# Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS


# ESPACIOS TOPOLOGICOS PRIMERO - NUMERABLES DE FRECHET Y SECUENCIALES

## TESIS PROFESIONAL

Que para obtener el Titulo de

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a


VICTOR MANUEL FENTON NAVARRO



México, D. F. 1984

# P R O L O G O

Desde los principios de la topología, el concepto de sucesión fué empleado como herramienta para obtener resultados importantes en la materia, aunque posteriormente, al considerar un concepto más amplio de espacios topológicos, fué necesario introducir una modificación al concepto de sucesión, que permitiese manejar problemas de convergencia en espacios topológicos en general: el concepto de red. Dicha modificación es necesaria pues existen ejemplos de espacios topológicos en los que la topología no puede ser descrita en términos de sucesiones; y en cambio, con el concepto de red se puede describir totalmente la topología de cualquier espacio topológico, especificando cuáles son las redes convergentes (ver teorema en 0.1); sin embargo, dicha labor resulta muy compleja pues lo es también la clase de todas las redes que se pueden formar con los elementos de un conjunto arbitrario. Una labor más sencilla es la de describir unicamente cuáles son las sucesiones convergentes con elementos en un conjunto dado, pues el concepto de sucesión, al estar estrechamente ligado con la noción natural de conteo, resulta más simple; es por ello que resulta natural plantear el siguiente problema:

Conocer la clase de los espacios topológicos que pueden ser totalmente descritos por la definición de las sucesiones convergentes en ellos.

Es un hecho útil y muy conocido, que todo espacio primero-numerable cae dentro de esta clase. De hecho, esto sucede en -- virtud de cualquiera de las dos propiedades de los espacios - primero-numerables siguientes:

(a) Un punto está en la cerradura de un conjunto si y sólo si existe una sucesión en el conjunto que converge al punto en - cuestión.

(b) Un conjunto es cerrado si y sólo si toda sucesión con puntos en el conjunto, tiene como puntos límite a elementos del conjunto (o equivalentemente, un conjunto es abierto si y sólo si toda sucesión que converge a un punto de conjunto, está eventualmente ella misma contenida en el conjunto).

Al pensar en las propiedades análogas a (a) y (b) para redes (ver teoremas 0.1 y 0.6), se comprueba que dichas propiedades son equivalentes. No sucede lo mismo con (a) y (b), pero am-- bas propiedades son por ellas mismas, de interés. Se tiene entonces que el problema planteado es la conjunción de los problemas :

"Conocer la clase de los espacios topológicos que satisfacen (a), y la clase de los que cumplen (b)".

Si a los espacios que satisfacen (a) se les llama "espacios - de Fréchet" y a los que cumplen con (b), "secuenciales", las interrogantes planteadas anteriormente se pueden resumir en - el problema :

Conocer y caracterizar, por medio de nociones conocidas y simples en el contexto topológico, a los espacios primero-numerables, de Fréchet y secuenciales.

Tal es la labor que se desarrolla en el presente trabajo.

† † †

# TABLA DE CONTENIDO

# NOTACION

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | El conjunto de los números naturales (i.e. $\mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$) |
| $\mathbb{R}$ | El conjunto de los números reales. |
| $A \cup B$ | La unión de los conjuntos A y B. |
| $A \cap B$ | La intersección de los conjuntos A y B. |
| $A \subset B$ | El conjunto A está contenido en el conjunto B. |
| $A \setminus B$ | La diferencia de los conjuntos A y B ("A menos B"). |
| $X / E$ | El conjunto de clases de equivalencia formadas por el conjunto X y la clase de equivalencia E. |
| $\Rightarrow, \Leftarrow$ | Las implicaciones. Se usarán en las demostraciones para - denotar: "la veracidad del enunciado a la izquierda implica la veracidad del enunciado a la derecha", y viceversa, respectivamente. |
| $(X,\tau)$ | El espacio topológico que consta del conjunto X y la topología $\tau$. |
| $X \cong Y$ | Los espacios topológicos X y Y son homeomorfos. |
| $\beta$ | Una base para la topología de un espacio topológico dado. |
| $\beta(x)$ | Una base local del punto x en un espacio topológico dado. |
| Card(A) | El número cardinal asociado al conjunto A. |
| $\omega(A)$ | El peso del espacio topológico A (el menor número cardinal de la forma Card($\beta$), donde $\beta$ es una base de A). |
| $\chi(x,A)$ | El carácter del punto x en el espacio topológico A (el menor número cardinal de la forma Card($\beta(x)$), donde $\beta(x)$ es una base local del punto x en el espacio topológico A). |
| $\chi(A)$ | El carácter del espacio topológico A (el supremo de todos los números $\chi(x,A)$ con $x \in A$). |

$\psi(x,A)$ El pseudocarácter del punto x en el espacio topológico A que es un espacio $T_1$ (el menor número cardinal de la forma $\mathcal{U}$, donde $\mathcal{U}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X tal que $\bigcap \mathcal{U} = \{x\}$).

$A^d$ El conjunto derivado de A, o el conjunto de puntos de acumulación del conjunto A (i.e. el conjunto de puntos x tales que $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

$\{X_i\}_{i\in I}$ La familia de espacios topológicos $X_i$'s, donde I es un conjunto de índices arbitrario.

$\sum_{i\in I} X_i$ La suma topológica ajena (o coproducto) de los espacios topológicos ajenos por parejas $X_i$ e $\{X_i\}_{i\in I}$.

$\prod_{i\in I} X_i$ El espacio topológico producto cartesiano de los espacios topológicos de la familia $\{X_i\}_{i\in I}$.

$\{x_i\}_{i\in N}$ Una sucesión en un espacio topológico.

$\lim\{x_i\}_{i\in N} = \lim_{i\in N}\{x_i\}$ El conjunto de puntos límite de la sucesión $\{x_i\}_{i\in N}$ en un espacio topológico.

$\lim_Y\{x_i\}_{i\in N}$ El conjunto de puntos límite de la sucesión $\{x_i\}_{i\in N}$ en el subespacio Y de un espacio topológico dado.

$\nabla_{c\in C} f_c$ La combinación de las funciones $f_c$ con $c\in C$. i.e. Si X es un espacio topológico dado, $\{A_c\}_{c\in C}$ es una cubierta de X y $\{f_c\}_{c\in C}$ es una familia de funciones tales que, si $c_1$ y $c_2$ son elementos arbitrarios de C, entonces $f_{c_1}(x) = f_{c_2}(x)$ para cualquier $x\in A_{c_1} \cap A_{c_2}$ (las funciones de $\{f_c\}_{c\in C}$ con contradominio común); se define la función $\nabla_{c\in C} f_c$ del espacio X al espacio dominio común de las funciones $f_c$'s como: $\nabla_{c\in C} f_c\,(x) = f_c(x)$ para $c\in C$.

† Denotará el fin de alguna demostración.

# F U N D A M E N T O S

La siguiente, es una lista de resultados básicos de topología de conjuntos, que serán usados en el presente trabajo. Las demostraciones de los mismos se omiten, pues pueden encontrarse en cualquier texto de topología general. El orden de la lista está determinado por el orden de aparición de los resultados en el desarrollo del trabajo.

0.1 Teorema. Un subconjunto A de X es cerrado si y sólo si, junto con cualquier red contiene a todos sus límites.

0.2 Teorema. Una función f de un espacio topológico X a un espacio topológico Y es continua si y sólo si $f(\lim\{x_i\}_{i\in I}) \subset \lim\{f(x_i)\}_{i\in I}$ para cualquier red $\{x_i, i\in I\}$ en el espacio X.

0.3 Proposición. Un espacio topológico X es un espacio de Hausdorff si, y sólo si cada red en X tiene a lo más un límite.

0.4 Teorema. Suponga que se tienen dados un conjunto X y una colección $\{\beta(x)\}_{x\in X}$ de familias de subconjuntos de X que tiene las propiedades:

(BP1) Para cada $x\in X$, $\beta(x)\neq\emptyset$ y para cada $U\in\beta(x)$, $x\in U$.

(BP2) Si $x\in U\in\beta(y)$, entonces existe un $V\in\beta(x)$ tal que $V\subset U$.

(BP3) Para cualesquiera $U_1, U_2\in\beta(x)$ existe $U\in\beta(x)$ tal que $U\subset U_1\cap U_2$

(BP4) Para cada par de puntos distintos $x,y\in X$, existen conjuntos abiertos $U\in\beta(x)$ y $V\in\beta(y)$ tales que $U\cap V=\emptyset$.

Entonces el espacio X con la topología generada por el sistema de vecindades $\{\beta(x)\}_{x\in X}$ es un espacio de Hausdorff.

0.5 Teorema. El operador cerradura en un espacio topológico tiene las siguientes propiedades:

(CO1) $\overline{\emptyset}=\emptyset$.

(CO2) $A \subset \overline{A}$

(CO3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(CO4) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$

0.6 <u>Teorema</u>. El punto x está en $\overline{A}$ si y sólo si existe una red de elementos de A que converge a x.

0.7 <u>Teorema</u>. Suponga que se tienen dados un conjunto X y una familia C de subconjuntos de X que satisface las propiedades:

(C1) $X \in C$ y $\emptyset \in C$.

(C2) Si $F_1 \in C$ y $F_2 \in C$, entonces $F_1 \cup F_2 \in C$.

(C3) Si $A \subset C$, entonces $\bigcap A \in C$.

Se tendrá entonces que la familia $\mathcal{O} = \{X \setminus F \mid F \in C\}$ satisface las propiedades:

(O1) $\emptyset \in \mathcal{O}$ y $X \in \mathcal{O}$.

(O2) Si $U_1 \in \mathcal{O}$ y $U_2 \in \mathcal{O}$ , entonces $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$.

(O3) Si $A \subset \mathcal{O}$, entonces $\bigcup A \in \mathcal{O}$.

y es por tanto una topología para X; y la familia C es la familia de todos los subconjuntos cerrados del espacio topológico $(X,\mathcal{O})$.

0.8 <u>Proposición</u>. Sean $\{X_s\}_{s\in S}$ una familia arbitraria de espacios topológicos y $X = \prod_{s\in S} X_s$. Si para cada $s\in S$, $p_s : X \to X_s$ es la proyección natural; se tendrá entonces que para todo $s\in S$, $p_s$ es una función supravectiva, continua y abierta.

0.9 <u>Proposición</u>. Sea $\{X_s\}_{s\in S}$ una familia arbitraria de espacios topológicos. Para cada familia de subconjuntos $\{A_s\}_{s\in S}$, donde $A_s \subset X_s$ para cada $s\in S$ se tiene que $\overline{\prod_{s\in S} A_s} = \prod_{s\in S} \overline{A_s}$ .

0.10 <u>Proposición</u>. Sea X un espacio topológico arbitrario, entonces son equivalentes:

(a) X es de Hausdorff.

(b) La diagonal de $X \times X$ es cerrada en $X \times X$.

0.11 Proposición. Para cada espacio compacto de Hausdorff X se tiene que $\omega(X) \leq \mathrm{Card}(X)$.

0.12 Teorema. Si X es un espacio topológico compacto y de Hausdorff, X es normal.

0.13 Teorema. Si X es un espacio topológico compacto y de Hausdorff, entonces, para cada $x \in X$ se tiene que $\psi(x,X) = \chi(x,X)$.

0.14 Lema de Schedler. Sea X un espacio topológico de Hausdorff. X es un c-espacio si y sólo si para cada $A \subset X$, $\bar{A} = \bigcup \{\bar{D} \mid D$ es numerable y $D \subset A\}$.

0.15 Teorema. El producto cartesiano $X \times Y$ de un espacio numerablemente compacto X y un k-espacio numerablemente compacto Y es numerablemente compacto.

0.16 Teorema. El producto cartesiano $X \times Y$ de un espacio pseudocompacto X y un k-espacio pseudocompacto Y es pseudocompacto.

0.17 Teorema de Kuratowski. Si X es un espacio topológico compacto, para todo espacio topológico Y la proyección $p : X \times Y \to Y$ es una función cerrada.

0.18 Proposición. Sea X un espacio topológico. X es numerablemente compacto si y sólo si para todo subconjunto numerable infinito A de X se tiene que $A^d \neq \emptyset$.

0.19 Teorema. Un espacio topológico es compacto si y sólo si toda red de elementos en el espacio tiene un punto de acumulación.

0.20 Teorema de Whitehead. Para cada espacio localmente compacto X y cada función cociente $g : Y \to Z$ (Y arbitrario), el producto cartesiano $f = id_X \times g : X \times Y \to X \times Z$ es una función cociente.

0.21 Proposición. Si S es un espacio topológico con la topología discreta, tal que $\mathrm{Card}(S) = m$; y $B(m) = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ es el espacio de Baire donde $X_i = S$ para todo $i \in \mathbb{N}$, $B(m)$ es metrizable, y la métrica:

$$q(\{s_i\}_{i\in N},\{s_i'\}_{i\in N}) = \begin{cases} 1/k \text{ si } s_k \neq s_k', \text{ y } s_i = s_i' \text{ si } i < k. \\ 0 \quad \text{si } s_i = s_i' \text{ para todo } i\in N. \end{cases}$$

es compatible con la topología de $B(m)$.

0.22 Proposición. Sea $\{X_s\}_{s\in S}$ una familia arbitraria de espacios topológicos. La suma topológica ajena (o coproducto) $\sum_{s\in S} X_s$ es metrizable si y sólo si $X_s$ es metrizable para todo índice $s\in S$.

† † †

# N O C I O N E S   B A S I C A S

1.- *Definición*. Sea $X$ un espacio topológico.

(a) $X$ será llamado un *espacio primero-numerable* si y sólo si cada elemento de $X$ tiene una base local numerable. (También se dirá: $X$ es primero-numerable).

(b) $X$ será llamado un *espacio de Fréchet* si para cada subconjunto $A$ de $X$ y cada $x\in\bar{A}$, existe una sucesión de puntos de $A$ que converge al punto $x$. (También se dirá: $X$ es de Fréchet).

(c) $X$ será llamado un *espacio secuencial* si un subconjunto $A$ de $X$ es cerrado si y sólo si, para cualquier sucesión de puntos de $A$, el conjunto de puntos límite de la sucesión está contenido en $A$. (También se dirá: $X$ es secuencial).

La clase de los espacios primero-numerables está contenida en la clase de los espacios de Fréchet, y ésta a su vez está contenida en la clase de los espacios secuenciales. Esto es:

2.- *Teorema*. Sea $X$ un espacio topológico.

(a) Si $X$ es primero-numerable, $X$ es de Fréchet.

(b) Si $X$ es de Fréchet, $X$ es secuencial.

Demostración. Sean $A$ un subconjunto de $X$ y $x\in\bar{A}$. Como $X$ es primero-numerable, existe una base local numerable $\{U_i\}_{i\in N}$ de $x$; entonces, tomando $x_i$ como un punto arbitrario de $A \cap (\bigcap_{j=1}^{i} U_j)$ para $j=1,2,\ldots,$ (lo cual se puede hacer pues $x\in\bar{A}$), se define una sucesión $\{x_i\}_{i\in N}$ de puntos de $A$ que converge a $x$; pues si $V$ es una vecindad arbitraria de $x$ existe un índice $i\in N$ tal que $U_i\subset V$, y claramente, para cualquier -- $j\geq i$, $x_j\in V$, lo que prueba la afirmación.

(b) Como toda sucesión es red, usando el teorema 0.1 se tiene que si $A\subset X$ es cerrado, A junto con cualquier sucesión contiene a todos sus puntos límite.

Sea A un subconjunto arbitrario de X, y supongamos ahora que dada una sucesión cualquiera en A, todos los puntos límite de la sucesión son elementos de A. Si $x\in\bar{A}$, como X es de Fréchet, existe una sucesión de puntos de A que converge a x, y como por hipótesis, $x\in A$, se tiene entonces que $\bar{A}\subset A$ y por tanto, A es cerrado.

Por lo tanto, X es secuencial.

+

La continuidad de funciones cuyo dominio es un espacio secuencial, puede expresarse por medio de sucesiones. Tal es la tesis de la siguiente:

3.- <u>Proposición</u>. Una función f del espacio secuencial X al espacio topológico Y es continua si y sólo si, para cada sucesión $\{x_i\}_{i\in N}$ en el espacio X se tiene que: $f(\lim\{x_i\}_{i\in N})\subset\lim\{f(x_i)\}_{i\in N}$ .

Demostración. <u>=> )</u> Como toda sucesión es red, esta implicación es consecuencia inmediata del teorema en 0.2.

<u><= )</u> Supongamos que, para cada sucesión $\{x_i\}_{i\in N}$ en el espacio X se tiene que $f(\lim\{x_i\}_{i\in N})\subset\lim\{f(x_i)\}_{i\in N}$ . Sea B un subconjunto cerrado arbitrario de Y; tómese una sucesión arbitraria $\{x_i\}_{i\in N}$ de puntos de $f^{-1}(B)$ y un punto $x\in\lim\{x_i\}_{i\in N}$ , se tiene entonces que $f(x)\in\lim\{f(x_i)\}_{i\in N}\subset B$; entonces, $x\in f^{-1}(B)$ y, como X es secuencial $f^{-1}(B)$ es cerrado. Por lo tanto, f es continua.

+

Las sucesiones, aunque son un concepto más debil que el de red en espacios topológicos en general, sirven para conocer algunas propiedades de separación que se dan en cierto tipo de espacios topológicos, como los mencionados en la siguiente:

4.- Proposición. Sea X un espacio topológico.

(a) Si cada sucesión en X tiene a lo más un punto límite, X es un espacio $T_1$.

(b) Si además, X es primero-numerable, X es entonces un espacio de Hausdorff.

Demostración. (a) Si $y \in \overline{\{x\}}$ entonces cada vecindad de $y$ contiene a $x$, y $y \in \lim\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, donde $x_i = x$ para $i=1,2,3\ldots$ . Como también $x \in \lim\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, si toda sucesión tiene a lo más un límite, tenemos que $y=x$, y $\{x\}$ es un conjunto cerrado. Por lo tanto, X es un espacio $T_1$.

(b) Sean $x_1, x_2 \in X$ cualesquiera. Como X es primero numerable, existen $\{U_i'\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\{V_i'\}_{i \in \mathbb{N}}$ bases numerables de los puntos $x_1$ y $x_2$ respectivamente; entonces $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ y $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, donde $U_i = \bigcap_{j \leq i} U_j'$, $V_i = \bigcap_{j \leq i} V_j'$, son bases numerables de $x_1$ y $x_2$ respectivamente, y tales que $U_j \subset U_i'$ y $V_j \subset V_i'$ si $j \geq i$. Supongamos que X no es un espacio de Hausdorff, entonces, para cualesquiera $i,j \in \mathbb{N}$, $U_i \cap V_j \neq \emptyset$. Para cada $i \in \mathbb{N}$ sea $z_i$ un punto arbitrario de $U_i \cap V_i$; se tendrá entonces que $x_1 \in \lim\{z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, pues si U es una vecindad arbitraria de x, existirá $i \in \mathbb{N}$ tal que $U_j \subset U$ si $j \geq i$, de donde, $z_j \in U_j \cap V_j \subset U_i$ si $j \geq i$; y análogamente, $x_2 \in \lim\{z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, por hipótesis se tendría entonces que $x_1 = x_2$, lo que resulta absurdo si se supone de antemano que $x_1 \neq x_2$.

†

De la proposición anterior y del teorema en 0.3 obtenemos:

5.- Proposición. Un espacio primero-numerable X es un espacio Hausdorff si y sólo si toda sucesión en el espacio X tiene a lo más un punto límite.

Los espacios métricos son de primordial importancia en topología debido a su gran cantidad de aplicaciones; es fácil ver que todo espacio métrico es primero-numerable (tomando para cada punto x del espacio métrico (X,d) la colección $\{\{z \mid d(z,x)<1/n\} \mid n\in\mathbb{N}\}$ por ejemplo, como base local numerable en el punto x). La siguiente proposición muestra como, bajo algunas hipótesis, la forma de definir el concepto de continuidad en los espacios métricos puede extenderse para espacios primero-numerables, de Fréchet y secuenciales.

6.- Proposición. (a) Sean X un espacio primero-numerable, Y un espacio topológico arbitrario y $f:X\to Y$ una función cualquiera; entonces f es continua si y sólo si para cada sucesión convergente $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en X se tiene que $f(\lim\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}})\subset \lim\{f(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ .
(b) En (a), se puede cambiar la hipótesis X es primero numerable por X es secuencial y Hausdorff, para que se siga cumpliendo la tesis.
Demostración. La demostracion de (a) se sigue directamente de las propiedades en 0.3, 3 y 5; y la de (b) de las proposiciones en 0.3 y 3.

Anteriormente se ha mostrado que la clase de los espacios primero-numerables está contenida en la clase de los espacios de Fréchet, y ésta a su vez en la de los espacios secuenciales; los siguientes ejemplos (en 7 y 8), prueban que dichas contenciones son propias.

7.- Ejemplo de un espacio de Fréchet que no es primero-numerable.

Sean $X=\mathbb{R}$ y $Y=(\mathbb{R}\setminus\mathbb{N})\cup\{y_0\}$, donde $y_0\notin\mathbb{R}$; asígnese a cada punto $x\in X$ el punto:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x\in X\setminus\mathbb{N} \\ y_0, & \text{si } x\in\mathbb{N} \end{cases}$$

y considérese en Y la topología generada por la familia de conjuntos cerrados $\mathcal{C} = \{A\subset Y \mid f^{-1}(A) \text{ es cerrado en } X\}$. Es fácil ver que $f\colon X \to Y$ es cerrada y además que, si W es abierto en Y y contiene a $y_0$, $f^{-1}(Y\setminus W)$ es cerrado y no contiene a $\mathbb{N}$, de modo que, las vecindades de $y_0$ son de la forma $(U\setminus\mathbb{N})\cup\{y_0\}$, donde U es abierto en X y contiene a $\mathbb{N}$.

Sea $(U_1\setminus\mathbb{N})\cup\{y_0\}$, $(U_2\setminus\mathbb{N})\cup\{y_0\}$, ... una sucesión arbitraria de vecindades de $y_0$. Para $i=1,2,3\ldots$, elijamos un punto $x_i\in U_i\setminus\mathbb{N}$ tal que $x_i>i$. El conjunto $U = X\setminus\{x_1,x_2,\ldots\}$ es abierto en X y contiene a $\mathbb{N}$, entonces $V = (U\setminus\mathbb{N})\cup\{y_0\}$ es vecindad de $y_0$. Como ningún elemento de la sucesión está en V, $(U_i\setminus\mathbb{N})\cup\{y_0\}\not\subset V$ para $i=1,2,3,\ldots$; se sigue que el espacio Y no tiene base local numerable en $y_0$, entonces, Y no es primero-numerable.

Sea $A\subset Y$ cualquier subconjunto y $y\in\overline{A}$; si $y\neq y_0$, $f^{-1}(\overline{A})$ es cerrado en X y contiene a y, además, eligiendo $z\in\mathbb{N}$ con la propiedad de que $z<y<z+1$ se tendrá que $U = [z+\varepsilon, z+1-\varepsilon]$ donde $\varepsilon={}^1/_2\min\{|z-y|,|z+1-y|\}$ entonces, $f^{-1}(\overline{A})\cap U$ es cerrado en X, y como $f^{-1}(\overline{A})\cap U = f^{-1}(\overline{A}\cap U) = \overline{A}\cap U = \overline{A\cap U}$, entonces, como X es de Fréchet y $y\in f^{-1}(\overline{A})\cap U$, existe una sucesión de elementos de A que converge a y.

Ahora, si $y\in\overline{A}\setminus A$ y $y=y_0$, existe un índice $k\in\mathbb{N}$ y una sucesión $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en A que converge a k en X (pues de otro modo, para cada $i\in\mathbb{N}$ se tendría una vecindad $U_i\subset X$ que no interseca al conjunto A, lo que implicaría que $\{(\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i)\setminus\mathbb{N}\}\cup\{y_0\}$ es una vecindad de $y_0$ en Y ajena de A, contradiciendo la hipótesis de que $y_0\in\overline{A}$). De la definición de la topología en Y se sigue que $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $k\in\mathbb{N}$ en X, y a $y_0$ en Y.

Finalmente, si $y\in A$, la sucesión $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ con $y_i=y$ para todo índice i en $\mathbb{N}$ es una sucesión en A que converge a y.

Lo anterior demuestra que Y es un espacio Fréchet pero no un espacio primero-numerable.

†

8.- Ejemplo de un espacio secuencial que no es un espacio de Fréchet.

Sea $X = \{0\} \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i)$, donde, para cada $i\in\mathbb{N}$, $X_i=\{1/i\} \cup (\bigcup_{j=i^2}^{\infty} \{1/i+1/j\})$.

Para cualesquiera $k_1, k_2 \in\mathbb{N}$, si suponemos que $k_1<k_2$, se tendría que existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $k_1=k_2-k$, de donde $k_2(1-k)<k$ (pues $1-k\leq 0$), entonces, $(k_2-k)(k_2+1) = k_2+ k_2(1-k) - k < k_2^2$, es decir, $k_1(1+k_2) < k_2^2$, se sigue que $k_1 < k_2^2 - k_1k_2$, y que $k_1k_2 < k_2^2(k_2-k_1)$, y si $j \geq k_2^2$, $k_1k_2 <j(k_2-k_1)$, de aquí que $k_1k_2 + jk_1 < jk_2$, entonces se tendrá que $(k_1(j+k_2))/(jk_2) = k_1/k_2 + k_1/j < 1$ y que $1/k_2 + 1/j < 1/k_1$ y por tanto, para cualquier $q\in X_{k_2}$, $q\notin X_{k_1}$. Es decir, para cualesquiera dos índices $k_1,k_2 \in\mathbb{N}$ (con $k_1\neq k_2$), $X_{k_1} \cap X_{k_2}= \emptyset$.

La topología en X será generada por el siguiente sistema de vecindades: Todos los puntos de la forma $1/i + 1/j$ serán puntos aislados de X, i.e. $\beta(x) = \{ \{x\} \}$ para cada punto de esa forma. Para un punto de la forma $1/i$, tómese $\beta(x)$ como la familia de todos los conjuntos $X_i\setminus \bigcup_{j=i^2}^{k}\{1/i + 1/j\}$ para $k=i^2,i^2+1,\ldots$ . Finalmente, como miembros de $\beta(0)$, tómense todos los subconjuntos que se pueden obtener de X removiendo un número finito de $X_i$'s, y un número finito de puntos de la forma $\{1/i + 1/j\}$ en todos los restantes $X_i$'s. Es fácil ver que la colección $\{\beta(x)\}_{x\in X}$ cumple las propiedades (BP1) a (BP4) enunciadas en la proposición en 0.4, y entonces, X es un espacio de Hausdorff.

De la definición de $\beta(0)$, se sigue de inmediato que el punto 0 está en la cerradura del conjunto $X\setminus\{0,1,1/2,1/3,\ldots\}$; pero no existe sucesión alguna en dicho conjunto que converja a 0 (pues si $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $X\setminus\{0,1,1/2,1/3,\ldots\}$, para que tuviese a 0 como punto límite, para cada $j\in\mathbb{N}$, $X_j \cap \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ debe ser finito (de otra forma, dada la vecindad de 0, $W = X\setminus X_j$, para cualquier $N\in\mathbb{N}$, existiría $k\in\mathbb{N}$ - con $k>N$ tal que $x_k\notin W$) pero entonces, $V = \{0\} \cup \Big( \bigcup_{k \mid X_k \cap \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \neq \emptyset} \{X_k \setminus$ --

$$\bigcup_{j=k^2}^{w} \{1/k + 1/j\} \mid w=\max\{z\in\mathbb{N} \mid x_z\in X_k\}\}\Big) \cup \Big( \bigcup_{k \mid X_k \cap \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \emptyset} X_k\Big)$$

es una vecindad de cero ajena a $X_i$, para todo índice $i\in\mathbb{N}$ ); y por lo tanto, X no es un espacio de Fréchet.

Se probará ahora, que X es un espacio secuencial.

Como X es de Hausdorff, basta probar que cada subconjunto A de X con la propiedad de que cualquier sucesión convergente de puntos en A tiene punto límite en A, es cerrado en X. Tómese cualquier elemento x de $\bar{A}$. Si $x\neq 0$, $\beta(x)$ es una base local numerable en x y, análogamente a la demostración dada al teorema en 2, existe una sucesión de puntos de A que converge a x. Considérese ahora el caso $x=0$, y supóngase que --- $0\in\bar{A}\setminus A$; existe entonces una subsucesión $x_1,x_2,x_3,\ldots$ de la sucesión - $1,1/2,1/3,\ldots$ tal que cualquier vecindad de cualquier $x_i$ interseca a A (pues de no ser así, se podría construir una vecindad de 0 ajena a A). Ya que toda sucesión en A tiene punto límite en A, cada uno de -- los términos de la subsucesión debe ser un elemento de A, pero como - la subsucesión converge a 0, se tendría que $0\in A$, lo que es absurdo. - Por tanto, si $0\in\bar{A}\setminus A$, $0\in A$.

De lo anterior se concluye que X es un espacio secuencial.

†

El ejemplo anterior, es también un ejemplo de un espacio numerable --

que no es primero numerable (la comprobación es trivial). Además, se puede probar que es un espacio regular (se sigue de la definición de regularidad y del hecho de que todos los miembros de $\bigcup_{x\in X} \beta(x)$ son abiertos y cerrados), e incluso, perfectamente normal; lo que da la idea de que los espacios secuenciales que no son de Fréchet no son necesariamente patológicos. Posteriormente se darán condiciones necesarias que deben satisfacer este tipo de espacios; por ejemplo, deben contener a un subespacio numerable que no es secuencial. En el ejemplo anterior, se puede destacar, que el subespacio $Y=X\setminus\{1,1/2,..\}$ (con la topología inducida por X), es un espacio perfectamente normal que no es secuencial (pues, $Y\setminus\{0\}$ no es cerrado pero toda sucesión en este subespacio tiene puntos límite en el mismo subespacio); de ahí que los espacios no secuenciales tampoco son necesariamente patológicos.

En los espacios de Fréchet, se puede extender la forma de caracterizar a los puntos de acumulación de sucesiones, que se tiene para espacios métricos. Esto es:

9.- <u>Proposición.</u> Si X es un espacio de Fréchet, entonces para cada punto de acumulación x de una sucesión arbitraria $\{x_i\}_{i\in N}$ en X, existe una subsucesión de $\{x_i\}_{i\in N}$ que converge a x. La hipótesis: "X es de Fréchet", no puede ser reemplazada por: "X es secuencial".

Demostración. Si x en punto de acumulación de $\{x_i\}_{i\in N}$, $x\in\overline{\{x_1,x_2,...\}}$ y ya que X es de Fréchet, existe una sucesión de puntos $\{y_j\}_{j\in N}$ de $\{x_1,x_2,...\}$ que converge a x. La sucesión $\{y_j\}_{j\in N}$ puede no ser subsucesión de $\{x_i\}_{i\in N}$ (por el orden de los índices), pero contiene a una subsucesión $\{x_{\alpha_i}\}_{i\in N}$ de $\{x_i\}_{i\in N}$ que, forzosamente converge a x.

Para ver que la hipótesis "X es de Fréchet", no puede ser debilitada, tómese X como en el ejemplo en 8, y $A = X \setminus \{0,1,1/2,1/3,\dots\}$, se sabe que $0 \in \bar{A}$, pero no existe sucesión alguna en A que converja a x; como A es numerable, se puede ordenar en forma de sucesión. Si $\{x_i\}_{i \in N}$ es -- uno de dichos arreglos de A en sucesión, claramente 0 es punto de acumulación de $\{x_i\}_{i \in N}$, pero no existe ninguna subsucesión de $\{x_i\}_{i \in N}$ -- que tenga a x como límite.

†

La proposición en 5 no es cierta si se cambia la hipótesis "X es primero-numerable" por "X es de Fréchet", como se puede ver en el siguiente:

10.- Ejemplo de un espacio de Fréchet no Hausdorff en el cual toda sucesión tiene a lo más un límite.

Sea Y el espacio topológico definido en el ejemplo en 7. Se define el espacio topológico Y' como el espacio formado por el conjunto $Y \cup \{y_1\} = (\mathbb{R} \setminus N) \cup \{y_0, y_1\}$ , donde $y_1$ es un punto que no está en los reales y es distinto de $y_0$; y con la topología determinada por el siguiente sistema de vecindades: Para $y_0$ y para todo $x \in \mathbb{R} \setminus N$ , el sistema de vecindades será el mismo que el definido en la topología de Y; y para $y_1$ , - $\beta(y_1) = \{\{y_1\} \cup (\mathbb{R} \setminus N) \setminus K \mid K \text{ es compacto en } Y\}$. Como se puede ver fácilmente, $\beta(y_1)$ cumple con las propiedades (BP1) a (BP3) definidas en 0.4 y entonces, el sistema de vecindades definido anteriormente, provee a Y' de una topología.

Se probará ahora que Y' es de Fréchet. Sean A un subconjunto arbitrario de Y' y $p \in \bar{A}$, si $p \neq y_1$, los mismos argumentos utilizados en el ejercicio en 7, muestran que existe una sucesión de puntos en A que con--

verge a p (pues para $p \neq y_1$ no se ha alterado el sistema de vecindades); si $p = y_1$, se tendrá que $A$ no está acotado en $\mathbb{R}$, (pues de ser así, existiría un compacto $K$ en $\mathbb{R}$ que lo contendría (e.g. $\overline{A \cap \mathbb{R}}$), entonces, -- $K \setminus N \cup \{y_0\}$ sería un compacto en $Y$ que contendría a $A$, y $\{y_1\} \cup (\mathbb{R} \setminus N) \setminus (K \setminus N \cup \{y_0\}) = \{y_1\} \cup (\mathbb{R} \setminus N) \setminus K$ sería una vecindad de $y_1$ sin puntos de $A$, lo que sería una contradicción al hecho de que $y_1 \in \bar{A}$ ). Entonces, - de cualquier subconjunto de $A \subset \mathbb{R}$ numerable y no acotado en $\mathbb{R}$, se puede formar una sucesión en $A$ que converge a $y_1$ en $Y'$ (por el axioma de elección).

Para mostrar que $Y'$ no es de Hausdorff, basta notar que toda vecindad de $y_0$ contiene un subconjunto numerable no acotado de puntos de $\mathbb{R} \setminus N$ y por tanto, toda vecindad de $y_0$ interseca a todas las vecindades de $y_1$.

Finalmente, falta demostrar que toda sucesión en $Y'$ tiene a lo más un punto límite.

Sea $\{x_i\}_{i \in N}$ una sucesión cualquiera en $Y'$.

Primero, si $\{x_i\}_{i \in N} \cap \mathbb{R}$ está acotada en $\mathbb{R}$, $y_1$ no es punto de acumulación de $\{x_i\}_{i \in N}$, pues, como se mostró anteriormente, $y_1 \notin \overline{\{x_1, x_2, \ldots\}}$. Supongamos que, para algún punto $p \in \mathbb{R} \setminus N$, $p \in \text{lím}\{x_i\}_{i \in N}$ entonces, para cualquier $V$ vecindad de $p$ en $\mathbb{R}$ con $V \subset \mathbb{R} \setminus N$, existe $n \in N$ tal que si $n \geq N$ $x_n \in V$; entonces, la subsucesión $\{x_i\}_{i \geq N} \cap \mathbb{R}$ está acotada en $\mathbb{R}$ y por tanto, $y_1 \notin \text{lím}\{x_i\}_{i \geq N}$ lo que implica que $y_1 \notin \text{lím}\{x_i\}_{i \in N}$; además, para cualquier $q \in \mathbb{R} \setminus \{p\}$, $q \notin \text{lím}\{x_i\}_{i \in N}$, de donde, para cualquier índice $z \in N$, - existe $U_z$ vecindad de $z$ en $\mathbb{R}$ tal que $\{x_i\}_{i \in N} \cap U_z = \emptyset$ y entonces, $(\{y_0\} \cup (\bigcup_{z \in N} U_z) \setminus N) \cap \{x_i\}_{i \in N} = \emptyset$, lo que implica que $y_0 \notin \text{lím}\{x_i\}_{i \in N}$. La única posibilidad de sucesión con más de un punto de acumulación es entonces $\{y_0, y_1\} \subset \text{lím}\{x_i\}_{i \in N}$. Supongamos ahora que $\{x_i\}_{i \in N} \cap \mathbb{R}$ no está acotada en $\mathbb{R}$, entonces, $\{x_i\}_{i \in N}$ contiene a una subsucesión $\{y_i\}_{i \in N}$ no acotada sin puntos de acumulación (e.g. $y_1=x_1$, y $y_i=\text{mín}\{x_i|x_i>i\}$ para $i\geq 2$), de donde, para cada $z\in N$ existe $U_z$ vecindad de $z$ en $\mathbb{R}$ tal que $U_z \cap \{y_i\}_{i\in N}=\emptyset$ lo que implica que $(\{y_0\} \cup (\bigcup_{z\in N} U_z)\setminus N) \cap \{y_i\}_{i\in N}=\emptyset$ y por tanto, $y_0 \notin \text{lím}\{x_i\}_{i\in N}$. Como se tiene que, si $\{x_i\}_{i\in N} \cap \mathbb{R}$ no es acotada en $\mathbb{R}$ implica que $y_0 \notin \text{lím}\{x_i\}_{i\in N}$ y, si $\{x_i\}_{i\in N} \cap \mathbb{R}$ es acotada en $\mathbb{R}$ $y_1 \notin \text{lím}\{x_i\}_{i\in N}$, se descarta la posibilidad de que exista una sucesión que tenga a $y_0$ y a $y_1$ como puntos límite; lo que demuestra que toda sucesión en Y' tiene a lo más un punto límite.

†

Dentro de los espacios secuenciales, los espacios de Fréchet pueden caracterizarse por medio de propiedades de los puntos límite de sucesiones dentro de subconjuntos arbitrarios del espacio en cuestión; esto es:

11.- Proposición. **Si X es un espacio secuencial, entonces X es de Fréchet si y sólo si el operador cerradura secuencial, que a cada subconjunto A de X le asigna el conjunto de todos los límites de sucesiones contenidas en A cumple las propiedades (CO1) a (CO4) enunciadas en el teorema en 0.5.**

La hipótesis "X es secuencial" no puede omitirse.

Demostración. Sea A un subconjunto arbitrario de X, y denotemos por $\hat{A}$ su cerradura secuencial.

Si X es de Fréchet y $x\in\bar{A}$, existe una sucesión de puntos de A que converge a x, lo que implica que $x\in\hat{A}$ y por tanto, $\bar{A}\subset\hat{A}$; del teorema en 0.6, resulta inmediato que $\hat{A}\subset\bar{A}$, entonces, como $\bar{A}=\hat{A}$, por el teorema en 0.5, el operador cerradura secuencial satisface (CO1) a (CO4).

Para el recíproco de la proposición, nótese que, de (CO4) y de la hi pótesis de que X es secuencial, $\hat{A}$ es cerrado; como por (C02), $A\subset\hat{A}$, se tiene entonces que $\bar{A}\subset\hat{A}$, es decir, para cada $x\in\bar{A}$, x es punto límite de alguna sucesión de puntos en A y por lo tanto, X es de Fré-chet.

Para probar que la hipótesis de ser secuencial no puede omitirse, bastará dar un ejemplo de un espacio no secuencial en el cual el operador cerradura secuencial cumpla (C01) a (C04). Sea X el espacio $Y\setminus\{1,1/2,1/3,\ldots\}$ donde Y es el espacio topológico del ejemplo en 8 con la topología inducida por Y; como se mencionó, X no es secuencial (pues $X\setminus\{0\}$ no es cerrado pero toda sucesión convergente de puntos en $X\setminus\{0\}$ converge a un punto del mismo subconjunto). Veamos ahora que el operador cerradura secuencial cumple las propiedades (C01) a (C04) en X: ((C01) a (C03) siempre se cumplen).

(C01) Como no existen sucesiones con puntos en el conjunto vacío, $\emptyset = \hat{\emptyset}$.

(C02) Para cada $x\in A\subset X$, $\{x_i\}_{i\in N}$ donde $x_i=x$ para todo índice $i\in N$, es una sucesión de puntos de A que converge a x, de donde, $x\in\hat{A}$, y por tanto, $A\subset\hat{A}$.

(C03) Sean A y B subconjuntos arbitrarios de X; si $x\in\hat{A}\cup\hat{B}$ entonces existe una sucesión $\{x_i\}_{i\in N}$ totalmente contenida en A ó en B, que converge a x, como la sucesión tiene puntos en $A\cup B$, entonces $x\in\widehat{A\cup B}$, y por tanto, $\hat{A}\cup\hat{B}\subset\widehat{A\cup B}$. Ahora, si $x\in\widehat{A\cup B}\setminus(A\cup B)$, existe una sucesión $\{x_i\}_{i\in N}$ de puntos de $A\cup B$ que converge a x; se tendrá entonces que uno de los dos conjuntos $\{i\in N|x_i\in A\}$ ó $\{i\in N|x_i\in B\}$ es forzosamente infinito, de donde, la subsucesión con índices en este conjunto infinito converge a x y, por tanto, $x\in\hat{A}\cup\hat{B}$. Por lo anterior, $\hat{A}\cup\hat{B}=\widehat{A\cup B}$.

(C04) Sea $A\subset X$ arbitrario. Nótese que para cada $x\in X$, las únicas sucesiones convergentes a x son las que, a partir de algún índice, son -

constantes e iguales a x (pues ninguna sucesión converge a 0, y todos los puntos de $X\setminus\{0\}$ son aislados). Entonces, si $x\in\hat{(\hat{A})}$, se tiene que $x\in A$ y por tanto, $x\in\hat{A}$. Por lo tanto, $\hat{(\hat{A})} = \hat{A}$.

†

Como ya se mencionó (en el espacio empleado en el ejemplo anterior), existen espacios secuenciales que contienen subespacios no secuenciales (de hecho, como se verá más delante, si un espacio secuencial no es de Fréchet, contiene al menos a un subespacio que no es secuencial). Pero el ser primero-numerable o de Fréchet, sí es una propiedad hereditaria en los espacios topológicos; esto es:

12.-Proposición. (a) Si X es primero-numerable (Fréchet) y Y es un subespacio arbitrario de X, Y es primero-numerable (Fréchet).
(b) Si X es un espacio secuencial y Y es un subespacio abierto o cerrado de X, Y es un espacio secuencial.
Demostración. (a) Sean X un espacio primero-numerable y Y un subespacio arbitrario de X; para cada $y\in Y$ existe una base local numerable $\beta(y)$ de y en el espacio X; claramente $\{B\cap Y \mid B\in\beta(y)\}$ es una base local numerable de y en el espacio Y, por tanto, Y es primero-numerable.
Supongamos ahora que X es de Fréchet. Sean Y un subconjunto arbitrario de X, A un subconjunto cualquiera de Y, y $x\in\overline{A}^{Y}$; como X es de Fréchet, existe una sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de A que converge a x en X. Si V es una vecindad de x en Y, existe una vecindad U de x en X tal que $V = U\cap Y$, existirá entonces un índice $N\in\mathbb{N}$ tal que $x_n\in U$ si $n>N$ y como $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset A\subset Y$, $x_n\in V$ si $n>N$. Por tanto, Y es de Fréchet.

†

(b) Sean Y un subespacio cerrado de X y C un subconjunto de Y tal -- que toda sucesión de puntos en C tiene puntos límite en C ( en la topología de Y). Si $\{x_i\}_{i\in N}$ es una sucesión de puntos en C y $x \in \lim_{i\in N}\{x_i\}$ (en la topología de X), como Y es cerrado, $x\in Y$, y claramente, la sucesión $\{x_i\}_{i\in N}$ converge a x en la topología de Y. Por hipótesis $x\in C$, y como X es secuencial, C es cerrado en X, de donde, C es cerrado en Y. De lo anterior se sigue que Y es un espacio secuencial.

Sean ahora $Y \subset X$ abierto y $C \subset Y$ tal que toda sucesión en C tiene -- puntos límite en C. Si $A = Y \setminus C$, para cualquier $\{x_i\}_{i\in N} \subset C$ se tendrá que $\lim_y\{x_i\}_{i\in N} \cap A = \emptyset$ y por tanto, $\lim\{x_i\}_{i\in N} \cap A = \emptyset$ (pues Y - es abierto). Además, si $\{x_i\}_{i\in N} \subset X\setminus Y$, como $X\setminus Y$ es cerrado, también $\lim\{x_i\}_{i\in N} \cap A = \emptyset$; de donde, si $\{x_i\}_{i\in N} \subset (X\setminus Y) \cup C$, $\lim\{x_i\}_{i\in N} \cap A = \emptyset$ (pues de no ser así, en $\{x_i\}_{i\in N} \cap (X\setminus Y)$ o en $\{x_i\}_{i\in N} \cap C$ se tendría una subsucesión de $\{x_i\}_{i\in N}$ que convergería a un elemento de A). De - modo que toda sucesión en $(X\setminus Y) \cup C$ converge a puntos en $(X\setminus Y) \cup C$ y como X es secuencial, $(X\setminus Y) \cup C$ es cerrado en X. Se sigue entonces que $A = X \setminus ((X\setminus Y) \cup C)$ es abierto en X y por tanto, abierto en Y. De lo anterior, C es cerrado en Y, y Y es por tanto secuencial.

†

Los espacios estudiados en este trabajo se comportan bien bajo sumas topológicas ajenas (o coproductos. Esto es:

13.- <u>Proposición</u>. Sea $\{X_s\}_{s\in S}$ una familia de espacios topológicos ajenos por parejas. Se tendrá entonces, si $X = \sum_{s\in S} X_s$, que:

(a) X es primero-numerable si y sólo si $X_s$ es primero numerable para todo índice $s\in S$.

(b) X es de Fréchet si y sólo si $X_s$ es de Fréchet para todo $s \in S$.

(c) $X$ es secuencial si y sólo si $X_s$ es secuencial para todo índice $s \in S$.

Demostración. (a) Sean $s$ un índice arbitrario de $S$, $x$ un punto cualquiera de $X_s$ y $\{U_i\}_{i\in N}$ una base local numerable de $x$ en $X$. La familia de vecindades de $x$ en $X_s$: $\{U_i \cap X_s \mid i\in N\}$ es una base local numerable de $x$ en $X_s$, pues si $A$ es vecindad de $x$ en $X_s$, como $A$ es también vecindad de $x$ en $X$, existe $i\in N$ tal que $U_i \subset A$, de donde, $U_i \cap X_s \subset A$.

$\Leftarrow$) Sean $x$ un punto arbitrario de $X$ y $\{U_i\}_{i\in N}$ una base local numerable de $x$ en el espacio $X_s$, donde $s\in S$ es el único índice tal que $x\in X_s$. Si $A$ es un subconjunto abierto de $X$ que contiene a $x$, entonces $A \cap X_s$ es también (por la definición de coproducto) una vecindad abierta de $x$ en $X_s$, de donde, existirá un índice $i\in N$ tal que $U_i \subset A \cap X_s$ y por tanto, $\{U_i\}_{i\in N}$ es, considerada como una familia de subconjuntos de $X$, una base local numerable de $x$ en $X$. Se sigue entonces, que $X$ es primero-numerable.

(b) $\Rightarrow$) Sean $s$ un índice cualquiera de $S$, $A$ un subconjunto arbitrario de $X_s$ y $x\in\bar{A}$ en $X_s$. Como $X$ es de Fréchet y la cerradura de $A$ en $X$ coincide con la cerradura de $A$ en $X_s$, existe una sucesión de puntos en $A$ que converge a $x$ en $X$. Dicha sucesión, claramente converge a $x$ en $X_s$, de donde, $X_s$ es de Fréchet para todo índice $s\in S$.

$\Leftarrow$) Sean $A$ un subconjunto arbitrario de $X$ y $x\in\bar{A}$. Por la definición de coproducto, existe un único índice $s\in S$ tal que $x\in X_s$. Como se tiene que $x\in\bar{A}\cap X_s = \overline{A\cap X_s}$ y como $X_s$ es de Fréchet, existirá una sucesión $\{x_i\}_{i\in N} \subset A \cap X_s$ tal que $x\in \lim\{x_i\}_{i\in N}$. Es claro que $\{x_i\}_{i\in N}$ es una sucesión en $A$ que converge a $x$ en $X$; por lo tanto, $X$ es de Fréchet.

(c) $\Rightarrow$) Si para algún índice $s\in S$ $X_s$ no fuese secuencial, existiría un subconjunto $A$ de $X_s$ no cerrado tal que toda sucesión de puntos en $A$ tiene puntos límite en $A$ (con la convergencia en $X_s$). Como en $X$ no hay más sucesiones de puntos en A que las ya consideradas, X no podría ser un espacio secuencial. Por lo tanto, $X_s$ es secuencial para cada índice s∈S.

$\underline{\Leftarrow}$) Sea C un subconjunto de X que no es cerrado en X. Entonces, para algún índice s∈S, $C \cap X_s$ no es cerrado en $X_s$. Como todos los espacios $X_s$'s son secuenciales, existe una sucesión $\{x_i\}_{i\in N} \subset C \cap X_s$ tal que $\lim\{x_i\}_{i\in N} \not\subset C \cap X_s$, de donde, $\lim\{x_i\}_{i\in N} \not\subset C$ aún cuando $\{x_i\}_{i\in N} \subset C$. Por lo tanto, X es un espacio secuencial.

†

Aunque se ha visto que las contenciones de la clase de los espacios primero-numerables en la de los Fréchet, y la de ésta última en la de los espacios secuenciales son propias, existen clases de espacios topológicos en donde no hay distinción entre las tres clases de espacios estudiados en este trabajo; tal es el caso en:

14.- Proposición. Todo espacio secuencial linealmente ordenado (con la topología inducida por el orden) es primero-numerable.

Demostración. Sea X un espacio secuencial linealmente ordenado, y sea x un punto arbitrario de X. Si no existe un salto a la derecha de X, i.e. si para cualquier y∈X con y>x se tiene un elemento z de X tal que x<z<y; existe en $(x,\rightarrow)$ una sucesión $\{b_i\}_{i\in N}$ tal que $x = \lim\{b_i\}_{i\in N}$ (se usa igualdad pues X es Hausdorff y de hecho, normal). Para la prueba, nótese que $(x,\rightarrow)$ no es cerrado pues $(\leftarrow,x] = X \setminus (x,\rightarrow)$ no es abierto pues, para cualesquiera a,b∈X con a<x<b, existe z∈X tal que x<z<b, lo que implica que $(a,b) \not\subset (\leftarrow,x]$ (i.e. ninguna vecindad básica de x está contenida en $(\leftarrow,x]$ ); si suponemos que para cualquier sucesión convergente $\{b_i\}_{i\in N} \subset (x,\rightarrow)$, $x \neq \lim\{b_i\}_{i\in N}$, como obvia-

mente $\text{lím}\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ no es un elemento de $(\leftarrow,x]$, se tendría que $(x,\rightarrow)$ - es un conjunto no cerrado en el cual toda sucesión convergente tiene su límite en $(x,\rightarrow)$, lo que contradice a la hipótesis de que X es secuencial.

Análogamente, si no existen saltos a la izquierda de x, existirá una sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de $(\leftarrow,x)$ tal que $x=\text{lím}\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Estaremos entonces en uno de los cuatro casos siguientes:

i) Si existen saltos a la derecha e izquierda de x, i.e. si existen $a,b\in X$ con $a<x<b$ tales que para cualquier elemento $z\neq x$ se tiene que - $z\notin(a,x)$ y $z\notin(x,b)$; entonces, claramente $\{(a,b)\}$ es una base local numerable en x.

ii) Si x tiene un salto a la derecha pero no tiene saltos a la izquierda, i.e. si existe $b\in X$ con $b>x$ tal que para todo $z\in X$ $z\notin(x,b)$, y para todo $a\in X$ con $a<x$ existe $z\in X$ con $z\in(a,x)$; existirá entonces una sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset(\leftarrow,x)$, que podemos suponer creciente, tal que $x = \text{lím}\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$; entonces, la familia $\{(a_i,b)\}_{i\in\mathbb{N}}$ de vecindades de x es - una base local numerable de x (pues si $A,B\in X$ con $A<B$ son tales que - $(A,B)$ es vecindad de x, existirá un índice $N\in\mathbb{N}$ tal que $A<a_n<x$ si $n>N$ y como claramente $B\geq b$, $(a_n,b)\subset(A,B)$ si $n>N$ ).

iii) Si x tiene un salto a la izquierda pero no tiene saltos a la derecha, análogamente al inciso anterior, existen una sucesión $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ decreciente contenida en $(x,\rightarrow)$ tal que $x=\text{lím}\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, y un elemento - $a\in X$ con $a<x$ tal que para cualquier $z\in X$, $z\notin(a,x)$. Se tendrá entonces que la familia de vecindades de x, $\{(a,b_n)\}$ es una base local numerable de x.

iv) Si x no tiene saltos a la derecha ni a la izquierda, existirán - sucesiones $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset(\leftarrow,x)$ creciente y $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset(x,\rightarrow)$ decreciente tales que $x = \text{lím}\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \text{lím}\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Será entonces la familia de in-

tervalos: $\{(a_n,b_n)\}_{n\in N}$ una base local numerable de x.
Como en cualquiera de los cuatro casos se encuentra una base local numerable para x, se tiene que X es un espacio primero-numerable.

†

El concepto de espacio secuencial define espacios topológicos en los que cierto tipo de redes de cardinalidad $\aleph_0$ son suficientes para describir la topología de dichos espacios, a saber, las sucesiones. El concepto (que en este trabajo será llamado) "cerradura cardinal" (en inglés: "tightness") de un espacio topológico, es una función cardinal que nos dará una condición necesaria para que un espacio topológico sea secuencial. Se definirá de la siguiente manera:

15.- Definición. (a) La cerradura cardinal de un punto x en un espacio topológico X es el valor de la función cardinal que asigna a x el menor número cardinal $m \geq \aleph_0$ con la propiedad que si $x \in \overline{C}$, existe un subconjunto $C_0 \subset C$ tal que $\mathrm{Card}(C_0) \leq m$ y $x \in \overline{C_0}$. Este número cardinal se denotará por $\tau(x,X)$.
(b) La cerradura cardinal de un espacio topológico X se define como el valor de la función cardinal que asigna a X el supremo de todos los números $\tau(x,X)$ con $x \in X$. Dicho número cardinal se denotará por : $\tau(X)$.

La condición necesaria que se mencionó está dada en la siguiente:

16.- Proposición. Si X es secuencial entonces $\tau(X) = \aleph_0$.
Nota: Para la demostración se usará la caracterización $\tau(X) = \inf$ $\{m \geq \aleph_0 |$ Para cualquier $C \subset X$ no cerrado existe $C_0 \subset C$ con $\mathrm{Card}(C_0) \leq m$

tal que $\overline{C_0} \setminus C \neq \emptyset\}$ .

Demostración. Si $\tau(X) > \aleph_0$, existe $C \subset X$ no cerrado tal que para cualquier $C_0 \subset C$ con $\mathrm{Card}(C_0) \leq \aleph_0$, $\overline{C_0} \subset C$ y, en particular, para cualquier sucesión $\{x_i\}_{i \in N}$ en C, $\lim\{x_i\}_{i \in N} \subset \overline{\{x_1, x_2, \ldots\}} \subset C$, de donde, X no es secuencial.

†

La condición, sin embargo, no es suficiente, como se puede ver en el siguiente:

17.- <u>Ejemplo</u>. Si X es el espacio del ejemplo en 8, el espacio $Y = X \setminus \{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$ es tal que $\tau(Y) = \aleph_0$, pero Y no es secuencial.

Demostración. Como $\mathrm{Card}(Y) = \aleph_0$, para cualquier $x \in Y$ y para cualquier $C \subset Y$ tal que $x \in \overline{C}$, se tiene que $\mathrm{Card}(C) \leq \aleph_0$ como $x \in \overline{C}$, $\tau(x, X) = \aleph_0$, de donde, $\tau(Y) = \aleph_0$. El hecho de que Y no es secuencial ya se había demostrado en la proposición en 11.

†

En lo que sigue de esta sección, se trabajará con espacios que tienen definido un operador límite, y con un operador que asocia a cada conjunto en un espacio topológico los puntos límite de sucesiones formadas con puntos de él. Como se verá, los espacios en donde se manejaran dichos conceptos tienen relación estrecha con los espacios de Fréchet $T_1$, y con los espacios secuenciales $T_1$. Comencemos con la siguiente:

18.- <u>Definición</u>. (a) Un <u>espacio $L^*$</u> es una pareja $(X, \lambda)$, donde X es un conjunto y $\lambda$ es una función (llamada el <u>operador límite</u>) que asig na a algunas sucesiones de puntos de X un elemento de X (llamado el límite bajo $\lambda$ de la sucesión), de tal forma que se satisfacen las siguientes condiciones (se dirá que $\{x_i\}_{i\in N}$ converge a x bajo $\lambda$ si --- $\lambda(\{x_i\}_{i\in N}) = x$ ) :

(L1) Si $x_i = x$ para $i=1,2,3,\ldots$, entonces $\lambda(\{x_i\}_{i\in N}) = x$.

(L2) Si $\lambda(\{x_i\}_{i\in N}) = x$, entonces $\lambda(\{x_{k_i}\}_{i\in N}) = x$ para toda subsucesión $\{x_{k_i}\}_{i\in N}$ de $\{x_i\}_{i\in N}$.

(L3) Si una sucesión $\{x_i\}_{i\in N}$ no converge bajo $\lambda$ a x, contiene entonces a una subsucesión $\{x_{k_i}\}_{i\in N}$ tal que ninguna subsucesión - de $\{x_{k_i}\}_{i\in N}$ converge a x bajo $\lambda$.

(b) En un espacio $L^*$ definimos el operador cerradura secuencial (denotado por " ˜ "), estableciendo: $x\in\tilde{A}$ si y sólo si A contiene una sucesión que converge bajo $\lambda$ a x.

Para que el operador ˜ defina una topología en un espacio $L^*$, se necesita una condición adicional:

19.- Lema y Definición. En un espacio $L^*$, $(X,\lambda)$ se tiene:

(a) El operador ˜ satisface las condiciones (C01) a (C03) definidas en 0.5.

(b) El operador ˜ satisface la condición (C04) si y sólo si en $(X,\lambda)$ se satisface la condición:

(L4) Si $\lambda(\{x_i\}_{i\in N}) = x$ para una sucesión $\{x_i\}_{i\in N}$, y $\lambda(\{x_j^i\}_{j\in N}) = x_i$ para cada sucesión $\{x_j^i\}_{j\in N}$ con $i\in\{1,2,3,\ldots\}$; entonces existen sucesiones de enteros positivos $\{i_1,i_2,\ldots\}$ y $\{j_1,j_2,\ldots\}$ -- tales que $\lambda(\{x_{j_k}^{i_k}\}_{k\in N}) = x$.

En cuyo caso, el operador ˜ define una topología en $(X,\lambda)$, al cual se le llamará un espacio $S^*$, y a la topología inducida por $\lambda$ se le llama rá la <u>topología Fréchet inducida por el operador límite</u> .

Demostración. (a) Si $A = \emptyset$, no existen sucesiones en A, de donde, $\tilde{A} = \emptyset$, es decir $\tilde{\emptyset} = \emptyset$ y por tanto, se cumple (C01). Sea $B \subset X$ un subconjunto arbitrario; por (L1), la sucesión $\{x_i\}_{i \in N}$ tal que $x_i = x$ para $i \in \{1,2,\dots\}$ es tal que $\{x_i\}_{i \in N} \subset B$ y $\lambda(\{x_i\}_{i \in N}) = x$ de donde, se cumple (C02). Sean $C,D \subset X$ subconjuntos arbitrarios; si $x \in \tilde{C} \cup \tilde{D}$, existe una sucesión en C o en D que converge bajo $\lambda$ a x; como esta sucesión tiene puntos en $C \cup D$, $x \in \widetilde{C \cup D}$, de donde $\tilde{C} \cup \tilde{D} \subset \widetilde{C \cup D}$. Si $x \in \widetilde{C \cup D}$, existe una sucesión $\{x_i\}_{i \in N}$ en $C \cup D$ tal que $\lambda(\{x_i\}_{i \in N}) = x$; se tendrá entonces que $\{i \in N | x_i \in C\}$ ó $\{i \in N | x_i \in D\}$ es conjunto infinito que induce a una subsucesión en C ó en D que, por (L2) converge a x; de donde $x \in \tilde{C}$ ó $x \in \tilde{D}$ ; se sigue que $\widetilde{C \cup D} \subset \tilde{C} \cup \tilde{D}$ y por lo tanto, se satisface (C03).

(b) <u>=></u>) Sea $\{x_i\}_{i \in N}$ una sucesión tal que $\lambda(\{x_i\}_{i \in N}) = x$ y $\{x_j^i\}_{j \in N}$ tal que $\lambda(\{x_j^i\}_{j \in N}) = x_i$ para $i \in \{1,2,..\}$, entonces $x \in (\tilde{\tilde{A}})$, donde $A = \{z \in X | z = x_j^i$ para $i,j \in N\}$, por (C04), $x \in \tilde{A}$ de donde, existen sucesiones de enteros positivos $\{i_1,i_2,\dots\}$ y $\{j_1,j_2,\dots\}$ tales que $x = \lambda(\{x_{j_k}^{i_k}\}_{k \in N})$

<u><=</u>) Sea $A \subset X$ arbitrario y $x \in (\tilde{\tilde{A}})$. Existe entonces una sucesión en $\tilde{A}$, $\{x_i\}_{i \in N}$ tal que $\lambda(\{x_i\}_{i \in N}) = x$. Para cada $i \in N$ existe una sucesión en A, $\{x_j^i\}_{j \in N}$ tal que $\lambda(\{x_j^i\}_{j \in N}) = x_i$. Por (L4), existen sucesiones de enteros positivos $\{i_1,i_2,\dots\}$ y $\{j_1,j_2,\dots\}$ tales que $\lambda(\{x_{j_k}^{i_k}\}_{k \in N}) = x$, de donde, $x \in \tilde{A}$ y por tanto, $(\tilde{\tilde{A}}) \subset \tilde{A}$; como se cumple (C02), se sigue que $\tilde{A} = \tilde{\tilde{A}}$ .

†

La topología definida anteriormente posee la siguiente propiedad de separación:

20.- <u>Proposición</u>. Cada espacio $S^*$ $(X,\lambda)$ con la topología Fréchet inducida por el operador $\lambda$ es un espacio $T_1$.

Demostración. Sea $x \in X$, entonces $\widetilde{\{x\}} = \{y \in X \mid$ existe una sucesión contenida en $\{x\}$, $\{x_i\}_{i\in N}$ tal que $\lambda(\{x_i\}_{i\in N}) = y\}$; como la única sucesión contenida en $\{x\}$ es la constante e igual a $x$, y $\lambda$ le asocia un único punto de $X$, que es el punto $x$, $\widetilde{\{x\}} = \{x\}$. Por lo tanto, $X$ es un espacio $T_1$.

†

La razón de llamar a la función $\lambda$ del espacio $(X,\lambda)$ el operador límite se justifica en la siguiente:

21.- <u>Proposición</u>. Sea $(X,\lambda)$ un espacio $S^*$ con la topología Fréchet inducida por el operador límite $\lambda$, y $\{x_i\}_{i\in N}$ una sucesión en $(X,\lambda)$; entonces $x \doteq \lim\{x_i\}_{i\in N}$ si y sólo si $\lambda(\{x_i\}_{i\in N}) = x$ (i.e. la convergencia "a priori" es equivalente a la convergencia "a posteriori").

Demostración. <u>=></u>) Si $x \neq \lambda(\{x_i\}_{i\in N})$, entonces por (L3), existe una subsucesión $\{x_{i_k}\}_{k\in N}$ de $\{x_i\}_{i\in N}$ tal que ninguna subsucesión de $\{x_{i_k}\}_{k\in N}$ converge bajo $\lambda$ a $x$, de donde, $x \notin \tilde{A}$ donde $A = \{x_{i_k} \mid k\in N\}$; se sigue entonces que $x \neq \lim\{x_i\}_{i\in N}$ (pues $x = \lim\{x_i\}_{i\in N}$ implica que $x\in\tilde{A}$).

<u><=</u>) Supongase que $x = \lambda(\{x_i\}_{i\in N})$; entonces, por (L2), para toda subsucesión $\{x_{i_k}\}_{k\in N}$ de $\{x_i\}_{i\in N}$, $\lambda(\{x_{i_k}\}_{k\in N}) = x$. Supongase además, que $x \neq \lim\{x_i\}_{i\in N}$; entonces, dados un índice $N\in N$ y una vecindad $U$ de $x$, existirá una sucesión creciente de índices $\{i_k\}_{k\in N} \subset N$ con $i_k > N$ para todo $k\in N$ tal que $x_{i_k} \notin U$, se sigue que $\{x_{i_k}\}_{k\in N}$ es una subsucesión de $\{x_i\}_{i\in N}$ tal que $x \notin \tilde{A}$ donde $A = \{x_{i_k} \mid k\in N\}$, pero $\lambda(\{x_{i_k}\}_{k\in N}) = x$ implica que $x \in \tilde{A}$, lo que es absurdo. Por lo anterior, $x = \lim\{x_i\}_{i\in N}$.

†

De forma natural, se puede pensar en generalizar el concepto de espacio secuencial a los espacios $L^*$, aunque como se verá, el concepto no aportará nada nuevo.

22.- Proposición. (a) En un espacio $L^*$ $(X,\lambda)$, se puede generar una topología tomando como la familia $F$ de subconjuntos cerrados a todos los subconjuntos que contienen junto con cualquier sucesión convergente bajo el operador $\lambda$, a su punto límite; esta topología será llamada la topología secuencial inducida por el operador límite $\lambda$.

(b) Todo espacio $L^*$, $(X,\lambda)$ con la topología secuencial inducida por el operador límite $\lambda$ es un espacio $T_1$.

(c) En un espacio $L^*$, $(X,\lambda)$ las topologías Fréchet y secuencial inducidas por el operador límite $\lambda$ coinciden.

(d) Dada una sucesión $\{x_i\}_{i\in N}$ de puntos en un espacio $L^*$ $(X,\lambda)$, con la topología secuencial inducida por el operador límite $\lambda$, $x=\lim_{i\in N}\{x_i\}$ si y sólo si $\lambda(\{x_i\}_{i\in N}) = x$ (i.e. si la convergencia "a posteriori" coincide con la convergencia "a priori").

Demostración. (a) Por el teorema en 0.7, bastará probar que $F$ satisface (C1) a (C3). Es claro que $\emptyset$ y $X$ son cerrados, y se cumple (C1). Sean $A$ y $B$ elementos cualesquiera de $F$, y $\{x_i\}_{i\in N}$ una sucesión en $A\cup B$ convergente bajo $\lambda$ al punto $x$; se tendrá que $\{i\in N \mid x_i\in A\}$ ó $\{i\in N \mid x_i\in B\}$ es un conjunto infinito y por tanto, se tiene una subsucesión $\{x_{i_k}\}_{k\in N}$ con elementos en $A$ o en $B$ tal que $\lambda(\{x_{i_k}\}_{k\in N}) = x$ (por (L2)) y como, $A$ y $B$ son elementos de $F$, $x\in A$ ó $x\in B$ de donde, $x\in A\cup B$ y por tanto, $A\cup B\in F$ y se cumple (C2). Si $\mathcal{A}\subset F$ y si $\{x_i\}_{i\in N}\subset \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$ es una sucesión convergente bajo $\lambda$ a $x$, como $\{x_i\}_{i\in N}\subset A$ para cada $A\in\mathcal{A}$, $x\in A$ para toda $A\in\mathcal{A}$, de donde, $x\in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$, y se satisface (C3).

(b) Dado $x\in X$, como la única sucesión $\{x_i\}_{i\in N}$ contenida en $\{x\}$ es la constante e igual a x, y por (L1) converge bajo $\lambda$ a x, $\{x\}\epsilon F$ , es decir, $\{x\}$ es cerrado. De lo anterior, X es un espacio $T_1$.

(c) Sean $C_S$ y $C_F$ las familias de subconjuntos cerrados en las topologias secuencial y Fréchet inducidas por el operador límite $\lambda$ respectivamente. Bastará probar que $C_S = C_F$.

Sean $A\epsilon\ C_F$ y $\{x_i\}_{i\epsilon N}$ una sucesión en A convergente bajo $\lambda$ al punto x se tiene entonces, que $x\epsilon\tilde{A}$ y como $A\epsilon\ C_F$, $x\epsilon A$, de donde, $A\ \epsilon\ C_S$ y por tanto, $C_F \subset C_S$. Sean $A\epsilon\ C_S$ y $x\epsilon\tilde{A}$; existe entonces una sucesión --- $\{x_i\}_{i\epsilon N}$ convergente bajo $\lambda$ a x. Como $A\epsilon\ C_S$, se tiene que $x\epsilon A$, de donde, $\tilde{A}\subset A$ y por tanto, $A\epsilon\ C_F$. Se deduce que $C_S \subset C_F$, lo que concluye la demostración.

(d) Es inmediato de (c) y de la proposición en 21.

†

La justificación de los nombres dados a las topologías recién definidas en un espacio $L^*$, y la caracterización de las mismas en términos de las topologías de Fréchet y secuenciales estudiadas en este trabajo se resume en el siguiente:

23.- <u>Teorema</u>. En un espacio topológico X, un operador límite $\lambda$ tal que $(X,\lambda)$ es un espacio $S^*$ (un espacio $L^*$) es tal que la topología - Fréchet (secuencial) inducida por el operador límite $\lambda$ coincide con la topología original, y puede ser definido si y sólo si X es un espacio de Fréchet (secuencial) en el que cada sucesión tiene a lo más un punto límite.

Demostración. Si X es un espacio $S^*$ con la topología Fréchet inducida por el operador límite $\lambda$, si A es un subconjunto arbitrario de X y $x\epsilon\overline{A}$, como $\overline{A} = \tilde{A}$, existe una sucesión $\{x_i\}_{i\epsilon N}$ tal que $\lambda(\{x_i\}_{i\epsilon N})$

= x (la sucesión, con elementos en A); por la proposición en 21, se tiene que $x = \lim\{x_i\}_{i\in N}$, de donde, X es un espacio de Fréchet. De la proposición en 21 y de la definicion del operador límite $\lambda$, se sigue que toda sucesión tiene a lo más un punto límite.

Si X es un espacio de Fréchet en el que toda sucesión tiene a lo más un punto límite, tomando $\lambda$ como el operador que a cada sucesión convergente le asocia su punto límite (aquí, al hablar de convergencia se entiende la dada por la topología de X), trivialmente se cumplen las condiciones (L1) y (L2). Sea $\{x_i\}_{i\in N}$ una sucesión tal que $x \neq \lim\{x_i\}_{i\in N}$, si $\{x_i\}_{i\in N}$ tiene algún punto de acumulación p, contendrá a una subsucesión $\{x_{i_k}\}_{k\in N}$ que converge a p y por tanto, ninguna subsucesión de $\{x_{i_k}\}_{k\in N}$ converge a x (pues todas convergen a p). Si $\{x_i\}_{i\in N}$ no tiene puntos de acumulación, ninguna subsucesión converge y, por tanto, se satisface (L3).

De la forma de definir $\lambda$ y del hecho que X es secuencial, se sigue la condición (L4), pues los operadores cerradura coinciden y por tanto, las topologías coinciden.

†

# ESPACIOS COCIENTE

El estudio de las propiedades de los espacios primero-numerables, de Fréchet y secuenciales, concernientes a espacios cociente, nos será de gran utilidad para comprender y describir la estructura de los espacios estudiados en este trabajo. Comencemos con la siguiente:

24.- Definición. (a) Sea $X$ un espacio topológico y $E$ una relación de equivalencia en $X$; si $X/E$ denota el conjunto de clases de equivalencia, si $q: X \to X/E$ es la función que asigna a $x \in X$, la clase de equivalencia $[x] \in X/E$ y si $\tau$ denota la topología en $X/E$ más fina que hace continua a la función $q$; al espacio topológico $X/E$ con la topología $\tau$ se le llamará espacio cociente, a la topología $\tau$ topología cociente, y a $q$ la función natural.

(b) Sea $f$ una función de un espacio topológico $X$ sobre un espacio topológico $Y$; se dirá que $f$ es una función cociente si y sólo si, el conjunto $f^{-1}(F)$ es cerrado en $X$ si y sólo si $F$ es cerrado en $Y$.

(c) Una función continua $f : X \to Y$, de $X$ sobre $Y$ será llamada hereditariamente cociente (o pseudoabierta) si para cualquier subconjunto $B$ de $Y$, la restricción $f_B : f^{-1}(B) \to B$ es una función cociente.

Para los fines de este trabajo, será de utilidad la siguiente caracterización de las funciones hereditariamente cociente:

25.- Una función continua y suprayectiva $f : X \to Y$ es hereditariamente cociente si y sólo si para cualquier subconjunto $F$ de $Y$ se tiene que $f(\overline{f^{-1}(F)})$ es cerrado en $Y$.

Demostración. $\Leftarrow$) Sea $B$ un subconjunto arbitrario de $Y$. Como $f$ es continua, $f_B : f^{-1}(B) \to B$ es continua.

Ya que $f_B(f^{-1}(B)) = f(f^{-1}(B)) = B$, pues f es suprayectiva, se tiene que $f_B$ es suprayectiva.

Si F es un subconjunto arbitrario de B tal que $f_B^{-1}(F)$ es cerrado en $f^{-1}(B)$, entonces $f_B^{-1}(F) = f^{-1}(F) = \overline{f^{-1}(F)} \cap f^{-1}(B)$, de donde, $F = f_B(f_B^{-1}(F)) = f(f^{-1}(F)) = f(\overline{f^{-1}(F)} \cap f^{-1}(B)) = f(\overline{f^{-1}(F)}) \cap B$ (la contención de izquierda a derecha es obvia, y de derecha a izquierda se sigue de que si $y \in f(\overline{f^{-1}(F)}) \cap B$, existe $x \in \overline{f^{-1}(F)}$ tal que $y = f(x) \in B$ y por tanto, $x \in f^{-1}(B)$ ); de donde, como por hipótesis $f(\overline{f^{-1}(F)})$ es cerrado en Y, $F = f(\overline{f^{-1}(F)}) \cap B$ es cerrado en B.

Se sigue de lo anterior que $f_B$ es (hereditariamente) cociente para todo subconjunto B de Y.

=> ) Sea $f : X \to Y$ una función hereditariamente cociente. Supongamos que existe un subconjunto B de Y tal que $f(\overline{f^{-1}(B)})$ no es cerrado en Y. Se tendrá entonces que $\overline{B} \setminus f(\overline{f^{-1}(B)}) \neq \emptyset$ (pues, ya que f es continua, $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(f^{-1}(B))} = \overline{B}$ y como, $B \subset f(\overline{f^{-1}(B)})$, si $f(\overline{f^{-1}(B)})$ fuese cerrado, se tendría que $f(\overline{f^{-1}(B)}) = \overline{B}$ ). Ya que $f^{-1}(\overline{B} \setminus f(\overline{f^{-1}(B)})) = [f^{-1}(\overline{B} \setminus f(\overline{f^{-1}(B)})) \cup f^{-1}(B)] \setminus \overline{f^{-1}(B)}$ que coincide con $f^{-1}([\overline{B} \setminus f(\overline{f^{-1}(B)})] \cup B) \setminus \overline{f^{-1}(B)}$, se tendrá que $f^{-1}(\overline{B} \setminus f(\overline{f^{-1}(B)}))$ es abierto en $f^{-1}([\overline{B} \setminus f(\overline{f^{-1}(B)})] \cup B)$ y como f es hereditariamente cociente, $\overline{B} \setminus f(\overline{f^{-1}(B)})$ es abierto en $[\overline{B} \setminus f(\overline{f^{-1}(B)})] \cup B$. Existe entonces un subconjunto A de Y abierto tal que $\overline{B} \setminus f(\overline{f^{-1}(B)})$ es igual a $A \cap \{[\overline{B} \setminus f(\overline{f^{-1}(B)})] \cup B\}$, de donde, $A \cap B = \emptyset$ y se sigue que, para cualquier $y \in \overline{B} \setminus f(\overline{f^{-1}(B)})$, A es una vecindad de y ajena a B y por lo tanto, $y \notin \overline{B}$ , lo que es absurdo.

De lo anterior, $f(\overline{f^{-1}(B)})$ es cerrado en Y para cualquier $B \subset Y$.

†

Nótese que, como para cualquier subconjunto F de Y, $F = f(f^{-1}(F)) \subset f(\overline{f^{-1}(F)}) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} = \overline{F}$ (pues f es continua), si $f(\overline{f^{-1}(F)})$ fuese cerrado, como contiene a F, contendría a $\overline{F}$. De modo que, la proposición en 25 puede escribirse como: Una función continua y suprayectiva $f : X \to Y$ es hereditariamente cociente si y sólo si $f(\overline{f^{-1}(F)}) = \overline{F}$ para cualquier subconjunto F de Y.

Al formar funciones cociente, en algunos casos se puede saber si son hereditariamente cociente, de acuerdo a la topología del codominio; tal es el caso mencionado en la siguiente:

26.- Proposición. Sea $f : X \to Y$ una función cociente sobre un espacio de Fréchet Y en el cual toda sucesión tiene a lo más un punto límite (en particular, sobre un espacio $T_2$ de Fréchet), entonces, f es hereditariamente cociente.

Demostración. Sean B un subconjunto arbitrario de Y, y un punto y en $f(\overline{f^{-1}(B)}) = \overline{B}$; como Y es de Fréchet, existe una sucesión $\{y_i\}_{i\in N} \subset B$ tal que $y \in \lim\{y_i\}_{i\in N}$. Como el límite es único, $y = \lim\{y_i\}_{i\in N}$. Supongamos que $f^{-1}(y) \cap \overline{f^{-1}(B)} = \emptyset$, entonces, para cualquier $x \in f^{-1}(y)$ existe $U_x$ vecindad abierta de x tal que $U_x \cap \overline{f^{-1}(B)} = \emptyset$ y como $f^{-1}(y_i)$ está contenido en $\overline{f^{-1}(B)}$ para todo índice $i \in N$, $U_x \cap f^{-1}(y_i) = \emptyset$ para todo $i \in N$, de donde, $U_x \cap (\bigcup_{i\in N} f^{-1}(y_i)) = \emptyset$ y $x \notin \overline{\bigcup_{i\in N} f^{-1}(y_i)}$ para cualquier $x \in f^{-1}(y)$; pero $\bigcup_{i\in N} f^{-1}(y_i) = f^{-1}(\bigcup_{i\in N}\{y_i\})$ no es cerrado (pues de serlo, $\bigcup_{i\in N}\{y_i\}$ lo sería y entonces $y \notin \lim\{y_i\}_{i\in N}$, lo que es absurdo), entonces, existe $z \in X \setminus f^{-1}(y)$ tal que $z \in \overline{\bigcup_{i\in N} f^{-1}(y_i)}$. Si V es una vecindad de f(z) abierta, como f es continua, $f^{-1}(V)$ es vecindad abierta de z; se sigue entonces que existirán un índice $i \in N$ y un punto $x \in X$ tales que $x \in f^{-1}(V) \cap f^{-1}(y_i)$; de donde, $y_i \in V$ y por tanto, $f(z) \in \overline{\bigcup_{i\in N}\{y_i\}}$. Como Y es de Fréchet, existe una sucesión $\{y_{\alpha_i}\}_{i\in N}$ -

en $\{y_i\}_{i\in N}$ que converge a $f(z)$ (por prop. 9) de la cual, se puede extraer una subsucesión $\{y_{\gamma_i}\}_{i\in N}$ de $\{y_i\}_{i\in N}$; se tendrá entonces que $f(z) = \lim\{y_{\gamma_i}\}_{i\in N}$, y como $\{y_{\gamma_i}\}_{i\in N}$ es subsucesión de $\{y_i\}_{i\in N}$, también $y = \lim\{y_{\gamma_i}\}_{i\in N}$, pero se tenía que $y \neq f(z)$. Lo anterior es una contradicción al hecho de que toda sucesión tiene a lo más un punto límite; por lo tanto, $y \in f(\overline{f^{-1}(B)})$ y entonces, $f(\overline{f^{-1}(B)})$ es cerrado en Y. Se sigue de la proposición en 25, que f es una función hereditariamente cociente.

†

Las imágenes de espacios secuenciales (Fréchet) bajo funciones cociente (hereditariamente cociente) son espacios secuenciales (Fréchet); tal es la tesis de la siguiente:

27.- <u>Proposición</u>. Sea $f : X \to Y$ una función cociente.

(a) Si X es secuencial, Y también lo es.

(b) Si X es de Fréchet y f es hereditariamente cociente, Y es también un espacio de Fréchet.

Demostración. (a) Sea F un subconjunto de Y tal que, junto con cualquier sucesión contiene a todos sus puntos límite. Sean $\{x_i\}_{i\in N}$ una sucesión en $f^{-1}(F)$, x un punto límite de $\{x_i\}_{i\in N}$, y V una vecindad abierta de $f(x)$. Como f es continua, $f^{-1}(V)$ es una vecindad abierta de x, de donde, existe un índice $N\in N$ tal que si $n>N$, $x_i \in f^{-1}(V)$, que implica que $f(x_i) \in V\cap F$, y por tanto, $\{f(x_i)\}_{i\in N}$ es una sucesión en F que tiene como punto límite a $f(x)$, como por hipótesis, $f(x) \in F$, $x\in f^{-1}(F)$. Como X es secuencial, $f^{-1}(F)$ es cerrado en X, y por la definición de función cociente, F es cerrado en Y. Por lo tanto, Y es un espacio secuencial.

(b) Sean $A$ un subconjunto arbitrario de $Y$ y '$y$' un elemento de $\bar{A}$. Como $f$ es hereditariamente cociente, por la proposición en 25, se tiene que $f(\overline{f^{-1}(A)}) = \bar{A}$, existe entonces un elemento $x \in \overline{f^{-1}(A)}$ tal que $y = f(x)$; como $X$ es de Fréchet, existe una sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de elementos de $f^{-1}(A)$ tal que $x \in \lim\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$; como $f$ es continua, por la proposición en 3, $y \in \lim\{f(x_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ y como para todo índice $i \in \mathbb{N}$, $f(x_i)$ es un elemento de $A$, $Y$ es un espacio de Fréchet.

†

Sin embargo, la propiedad enunciada en el inciso (b) de la proposición anterior no tiene un análogo para espacios primero-numerables, como se verifica en el siguiente:

28.- <u>Ejemplo</u> de una función hereditariamente cociente de un espacio primero-numerable en un espacio de Fréchet que no es primero-numerable:

Sea $f : X \to Y$ la función del ejemplo en 7. Claramente $f$ es suprayectiva y, por la definición de la topología en $Y$, $f$ es una función cociente (de hecho, $f$ es la función natural, si la relación de equivalencia es la que identifica a cada punto de $X \setminus \mathbb{N}$ con el mismo, y a $\mathbb{N}$ con el punto $y_0$). Sea $F$ un subconjunto de $Y$ tal que $y_0 \notin F$, se tiene entonces que $F = f^{-1}(F)$, de donde, $f(\overline{f^{-1}(F)}) = f(\bar{F}) = \bar{F}$. Tomemos ahora un subconjunto $B$ de $Y$ que contenga a $y_0$; entonces, $f^{-1}(B) = (B \setminus \{y_0\}) \cup \mathbb{N}$, de donde, $f(\overline{f^{-1}(B)}) = f(\overline{B \cup \mathbb{N} \setminus \{y_0\}}) = f((\overline{B \setminus \{y_0\}}) \cup \bar{\mathbb{N}})$ $= f(\bar{B} \cup \bar{\mathbb{N}}) = f(\bar{B}) \cup \{y_0\} = (\bar{B} \setminus \mathbb{N}) \cup \{y_0\}$ que es cerrado en $Y$, pues --- $f^{-1}((\bar{B} \setminus \mathbb{N}) \cup \{y_0\}) = \bar{B} \cup \mathbb{N}$ que es cerrado en $X$. Por la proposición en 25, $f$ es hereditariamente cociente, y como se probó en 7, $Y$ es un - espacio de Fréchet que no es primero-numerable.

†

La propiedad enunciada en 27 (a) no es válida si sólo se pide que la función f sea continua, es necesario que sea cociente; pues, por ejemplo, si Y es un espacio no secuencial (e.g. $Y = X / \{0,1,1/2,...\}$ con X el espacio en el ejemplo en 8), X es el espacio topológico formado por el conjunto Y con la topología discreta, y $f : X \to Y$ la función identidad (i.e. $f(x) = x$ para todo $x \in X$), claramente f es continua, pero aún cuando X es primero-numerable, la imagen no es un espacio secuencial.

Tampoco (la tesis en 27 b) la imagen de un espacio de Fréchet bajo una función cociente es necesariamente de Fréchet, a menos que la función sea hereditariamente cociente; como se puede observar en el siguiente:

29.- <u>Ejemplo</u> de una función cociente con dominio en un espacio primero numerable, cuya imagen es un espacio secuencial pero no de Fréchet:

Sea X el conjunto de los números reales provisto de la topología generada por la topología usual y todos los conjuntos de la forma ... $\{0\} \cup U$, donde U es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$ que contiene a la sucesión $\{1/n\}_{n \in \mathbb{N}}$. De este modo, la topología de los reales ha sido alterada sólo en el cero, de tal forma que una sucesión que converge a 0 es a partir de cierto índice constante igual a cero, o una subsucesión de $\{1/n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Sea $A = X / (\{1/n | n=1,2,3...\} \cup \{0\})$; para cada vecindad V del cero, V es una vecindad de cero en la topología usual de los reales, o $V = \{0\} \cup U$ donde U es una vecindad usual abierta de $\{1/n | n=1,2,3...\}$ y, en cualquier caso, $V \cap A \neq \emptyset$ y por tanto, $0 \in \bar{A}$, pero como ninguna sucesión en A converge a 0, X no es de Fréchet.

Definamos ahora un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ Y, como $Y = \{(x,0) | 0 \neq x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,1)\} \cup \{(1/n,1) | n \in \mathbb{N}\}$. Y es la suma topológica ajena del espacio - $\{(0,1)\} \cup \{(1/n,1) | n \in \mathbb{N}\}$ (homeomorfo al conjunto $\{0,1,1/2,1/3...\}$ con la topología de subespacio de $\mathbb{R}$) y de la recta de los reales perforada; y, por la proposición en 13 (a), Y es un espacio primero-numerable.

La primera proyección del espacio Y (como subespacio de $\mathbb{R}^2$) es, como se puede comprobar facilmente, una función cociente del espacio Y sobre el espacio X y, por la proposición en 27 (a), X es un espacio secuencial pero como se probó, no es de Fréchet.

Se sigue también, de la proposición en 27 (b), que la proyección es un ejemplo de función cociente que no es hereditariamente cociente.

†

La estructura cociente es fundamental para la descripción de los espacios de Fréchet y de los espacios secuenciales, como se verá más - delante; para ello se usará el siguiente:

30.- <u>Lema</u>. Sea X un espacio secuencial. Existe un espacio primero-numerable Y tal que X es la imagen de Y bajo una función cociente.

Demostración. Sea $C_X$ la familia de todas las sucesiones $\{x_0, x_1, ...\}$ de puntos de X tales que $x_0 \in \lim\{x_i\}_{i \in M}$, donde $M = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Para cada $c = \{x_i\}_{i \in M} \in C_X$, sea $X_c = \{c\} \times \{0,1,1/2,...\}$ donde $\{c\}$ es el espacio discreto de un sólo punto y $N = \{0, 1, 1/2, ...\}$ tiene la topología de subespacio de $\mathbb{R}$. (Claramente, $X_c \cong N$, todo punto de $N / \{0\}$ es aislado, y las vecindades de 0 en N son los subconjuntos A de N ta-- les que existe un índice $k \in \mathbb{N}$ que cumple que, si $n > k$, $1/n \in A$).

Sea $f_c : X_c \to X$ la función definida por las fórmulas:

$f_c((c,0)) = x_0$ y $f_c((c,1/n)) = x_n$ $n\in\mathbb{N}$.

Sean $Y = \sum_{c\in C_X} X_c$ y $f = \nabla_{c\in C_X} f_c : Y \to X$. Para demostrar el lema será suficiente probar que Y es un espacio primero-numerable y que f es una función cociente. El hecho de que Y es primero numerable se sigue inmediatamente de la proposición en 13 (a) y de que cada $X_c$ es homeomorfo a N. Para probar que f es una función cociente, bastará demostrar que $f^{-1}(A)$ es abierto en Y si y sólo si A es abierto en X.

Sean pues A un subconjunto abierto de X, y $c = \{x_i\}_{i\in M} \in C_X$. Primero, si $x_0 \in A$, como $x_0 \in \lim\{x_i\}_{i\in M}$, existe un índice $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n>k$, $x_n \in A$, de donde, si $n>k$, $(c,1/n) \in f^{-1}(A)$ y como $X_c \cong N$, $f^{-1}(A)$ es abierto en $X_c$. Si $x_0 \notin A$, $(c,0) \notin f^{-1}(A)$ y por tanto, $f^{-1}(A)$ es abierto en $X_c$. En cualquier caso, $f^{-1}(A)$ es abierto en $X_c$ para todo c en $C_X$, por lo tanto, $f^{-1}(A)$ es abierto en Y, y f es por tanto continua.

Sea F un subconjunto no cerrado en X. Como X es secuencial, existen una sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de X y un punto $x_0 \in X \setminus F$ tales que $x_0 \in \lim\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Si w es la sucesión $\{x_0,x_1,x_2,\ldots\}$, $w \in C_X$ y se tendrá que $f^{-1}(F) \cap X_w = X_w \setminus \{(w,0)\}$ que no es cerrado en $X_w$; por lo tanto, $f^{-1}(F)$ no es cerrado en Y. De lo anterior se sigue que si A es un subconjunto de X tal que $f^{-1}(A)$ es abierto en Y, A es abierto en X, lo que termina la demostración.

$\dashv$

Como se mencionó, los espacios secuenciales guardan relación estrecha con los espacios primero-numerables y con las funciones cociente, de hecho, los primeros pueden caracterizarse por medio de los segundos. Este importante resultado se encuentra planteado en el siguiente:

31.- Teorema. Sea X un espacio topológico. X es secuencial si y sólo si X se puede expresar como la imagen de un espacio primero numerable bajo una función cociente.

Demostración. La condición necesaria es consecuencia inmediata del lema en 30, y la condición suficiente se deriva de la proposición en 27 (a).

†

Como se mencionó, el ser un espacio secuencial no es una propiedad hereditaria; la siguiente proposición establece un criterio para saber cuando un subespacio de un espacio secuencial es también un espacio secuencial:

32.- Proposición. Sean X un espacio secuencial y M un subespacio de X. M es secuencial si y sólo si la restricción $f_M = f|^{M}_{f^{-1}(M)} : f^{-1}(M) \to M$ es cociente, donde f es la función definida en el lema en 30.

Demostración. <= ) Si $f_M$ es cociente, como todo subespacio de uno primero-numerable también lo es (por la proposición en 12.a), en particular $f^{-1}(M)$ es primero-numerable y, por la proposición en 27 (a), M es secuencial.

=> ) Como claramente $f_M$ es suprayectiva y continua, falta comprobar que si F es un subconjunto de M tal que $f_M^{-1}(F)$ es cerrado en $f^{-1}(M)$, F es cerrado en M.

Sea F un subconjunto no cerrado de M; como M es secuencial, existen una sucesión $\{x_i\}_{i\in N}$ de puntos de F y un punto $x_0 \in M \setminus F$ tales que $x_0 \in \lim\{x_i\}_{i\in N}$. Si w es la sucesión $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, w es un elemento de $C_M$ y se tiene que $f_M^{-1}(F) \cap M_w = f^{-1}(F) \cap M_w = M_w \setminus \{(w,0)\}$ que no es cerrado en $M_w = X_w$ y por tanto, no es cerrado en $f^{-1}(M)$

(pues $X_w \subset f^{-1}(M)$ y se tiene que $f^{-1}(F)$ es cerrado en $f^{-1}(M)$ si y sólo si $f^{-1}(F) \cap X_w$ es cerrado en $X_w \cap f^{-1}(M)$ para cualquier $w \in C_X$, en particular, para cualquier $w \in C_M$).

†

La proposición anterior nos ayuda también a saber cuando un espacio secuencial (o un subespacio del mismo) es un espacio de Fréchet, esto es:

33.- Proposición. Sea X un espacio secuencial. X es de Fréchet si y sólo si X es hereditariamente secuencial.

Demostración. $\Rightarrow$) Es consecuencia de la proposición en 12 (a) pues, el ser un espacio de Fréchet es una propiedad hereditaria.

$\Leftarrow$) Si X es hereditariamente secuencial y f es la función definida en el lema en 30, por la proposición en 32, para cualquier subconjunto M de X, $f_M : f^{-1}(M) \to M$ es un mapeo cociente; es decir, $f : Y \to X$ es una función hereditariamente cociente, y como Y es primero-numerable, por la proposición en 27 (b), X es un espacio de Fréchet.

†

De la proposición anterior, se tiene una forma de identificar espacios secuenciales que no son de Fréchet:

34.- Corolario. Si X es un espacio secuencial que no es de Fréchet, entonces algún subespacio de X no es un espacio secuencial.

Posteriormente, al analizar las relaciones concernientes a espacios compactos, se verán otras características de este tipo de espacios.

Finalmente, de los resultados anteriores, se deduce el muy importante:

35.- <u>Teorema</u>. Los espacios de Fréchet pueden caracterizarse como las imágenes de espacios primero-numerables bajo funciones hereditariamente cociente.

Demostración. Si el espacio X es la imagen de un espacio primero-numerable bajo una función hereditariamente cociente, por la proposición en 27 (b), X es un espacio de Fréchet.

Si X es un espacio de Fréchet, la función $f : Y \to X$ definida en el lema en 30 es cociente y Y es primero numerable. Por la proposición en 12 (a), cada subespacio M de Y es de Fréchet, y por la proposición en 32, $f_M = f|^{M}_{f^{-1}(M)} : f^{-1}(M) \to M$ es cociente. Por lo tanto, f es hereditariamente cociente. †

# PRODUCTOS CARTESIANOS

Dentro de las propiedades de los espacios estudiados en este trabajo concernientes a productos cartesianos, destaca primeramente la siguiente:

36.- <u>Proposición</u>. Sean $\{X_s\}_{s\in S}$ una familia arbitraria de espacios topológicos y $X = \prod_{s\in S} X_s$ el producto cartesiano de dichos espacios.

(a) Si $X$ es un espacio primero-numerable, entonces para cada $s\in S$, $X_s$ es también un espacio primero-numerable.

(b) Si $X$ es un espacio de Fréchet, entonces para cada $s\in S$, $X_s$ es también un espacio de Fréchet.

(c) Si $X$ es un espacio secuencial, entonces para cada $s\in S$, $X_s$ es también un espacio secuencial.

Demostración. Para cada $s\in S$ sea $p_s : X \to X_s$ la proyección natural (i.e. $p_s((x_s)_{s\in S}) = x_s$). Por la proposición en 0.8, $p_s$ es suprayectiva, continua y abierta.

(a) Sean $s_0$ un elemento cualquiera de $S$, $x$ un punto arbitrario de $X_{s_0}$ y $w = (x_s)_{s\in S}$ un elemento de $X$ tal que $p_{s_0}(w) = x_{s_0} = x$. Como $X$ es primero-numerable, existe una base local numerable $\{W_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ de $w$ en $X$. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ la familia de subconjuntos de $X_{s_0}$ tal que $U_\alpha = p_{s_0}(W_\alpha)$ para cada $\alpha\in\mathbb{N}$. Como $p_{s_0}$ es abierta, $U_\alpha$ es una vecindad abierta de $x$ para cada $\alpha\in\mathbb{N}$. Sea $V$ una vecindad arbitraria de $x$ en $X_{s_0}$; entonces, como $p_{s_0}$ es continua, $A = p_{s_0}^{-1}(V)$ es una vecindad de $w$ en $X$; y por tanto, existirá un índice $\alpha_0\in\mathbb{N}$ tal que $W_{\alpha_0}\subset A$, y ya que $p_{s_0}$ es suprayectiva, se tendrá que $U_{\alpha_0} = p_{s_0}(W_{\alpha_0})\subset p_{s_0}(A) = V$, de donde, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ es una base local numerable de $x$ en $X_{s_0}$.

De lo anterior, $X_s$ es primero-numerable para cada $s\in S$.

(b) Se demostrará que, para cualquier índice fijo $s_0$ en S, $p_{s_0}$ es -- una función hereditariamente cociente.

Sean $s_0$ un índice fijo cualquiera de S, y F un subconjunto arbitrario de $X_{s_0}$. Se tendrá que $p_{s_0}^{-1}(F) = \prod_{s \in S} A_s$, donde $A_{s_0} = F$, y $A_s = X_s$ para todo índice $s \neq s_0$. Por la proposición en 0.9, se tendrá que -- $\overline{p_{s_0}^{-1}(F)} = \prod_{s \in S} B_s$, donde $B_{s_0} = \overline{F}$, y $B_s = X_s$ para todo índice $s \neq s_0$. De donde se sigue que $p_{s_0}(\overline{p_{s_0}^{-1}(F)}) = \overline{F}$ y, por la proposición en 25, $p_{s_0}$ es una función hereditariamente cociente.

De lo anterior, usando la proposición en 27 (b), $X_s$ es un espacio de Fréchet para cada índice $s \in S$.

(c) Como toda función suprayectiva, continua y abierta es un cociente (lo cual es muy sencillo de probar), para cada índice $s \in S$, $p_s$ es una función cociente y, por la proposición en 27 (a), $X_s$ es un espacio secuencial para cada índice $s \in S$.

†

De forma natural, la siguiente pregunta a contestar, es cuándo o bajo qué hipótesis la proposición anterior tiene una contraparte, es - decir, bajo qué hipótesis el producto cartesiano de espacios primero numerables, de Fréchet o secuenciales es de nuevo uno de estos espacios. De ésto nos ocuparemos en el resto de esta sección.

Primeramente, se tiene que el producto cartesiano finito o numerable de espacios primero-numerables es de nuevo un espacio primero-numerable. Esto es:

37.- <u>Proposición</u>. Si X y Y son espacios primero-numerables, $X \times Y$ es también primero numerable.

Demostración. Sean (a,b) un elemento arbitrario de $X \times Y$, y A una vecin dad de $(a,b)$ en $X \times Y$. Como la familia $\{U\times V|U$ es abierto en $X$ y $V$ es abierto en $Y\}$ es una base de la topología de $X \times Y$, existen una vecindad abierta $U$ de $a$ en $X$ y una vecindad abierta $V$ de $b$ en $Y$ tales que $(a,b) \in U \times V \subset A$. Como $X$ y $Y$ son primero-numerables, existen $\beta_a$ y $\beta_b$ bases numerables de $a$ y $b$ en $X$ y $Y$ respectivamente, de donde, existen $U' \in \beta_a$ y $V' \in \beta_b$ tales que $(a,b) \in U' \times V' \subset U \times V \subset A$; por lo que $W = \{U' \times V'|U' \in \beta_a$ y $V' \in \beta_b\}$ es una base local de $(a,b)$ en $X \times Y$ y como $W$ es numerable (pues $\beta_a$ y $\beta_b$ lo son), $W$ es una base local numerable de $(a,b)$ en $X \times Y$. Por lo tanto, $X \times Y$ es primero numerable.

†

38.- <u>Corolario</u>. Si $X_1,X_2,\dots,X_n$ son espacios topológicos primero-numerables, entonces $X_1\times X_2\times\dots\times X_n$ es primero numerable.

Demostración. Se sigue por inducción directamente de 37 y del hecho que $(X_1\times X_2\times\dots\times X_k)\times X_{k+1}$ es homeomorfo a $X_1\times X_2\times\dots\times X_k\times X_{k+1}$ para todo índice $k\in\mathbb{N}$.

†

39.- <u>Proposición</u>. Sea $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de espacios topológicos primero-numerables, entonces, $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ es primero-numerable.

Demostración.(Se supondrá que $X_i \neq \emptyset$ para todo índice $i\in\mathbb{N}$, pues de otro modo, no se tendría nada que probar).

Sea $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un elemento arbitrario de $X$. Como $X_i$ es primero-numerable para todo índice $i\in\mathbb{N}$, existen $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\dots$ bases locales numerables de $x_1,x_2,x_3,\dots$ respectivamente que, por comodidad, supondremos anidadas; i.e. para cada $i\in\mathbb{N}$, $\beta_i = \{U_i^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es tal que $U_i^{j+1} \subset U_i^j$ para cada $j\in\mathbb{N}$ (esta suposición es válida y se puede comprobar facilmente). Sea $\beta = \{V_i\}_{i\in N}$ tal que $V_i = U_1^i \times U_2^i \times \ldots U_i^i \times X_{i+1} \times X_{i+2} \times \ldots$ para cada $i\in N$; claramente, de la definición de la topología de X, $V_i$ es una vecindad abierta de x en $X_i$ para cada índice $i\in N$. Sea A una vecindad abierta arbitraria de x en X, entonces, $A = \prod_{i\in N} B_i$ donde $B_i$ es vecindad abierta de $x_i$ en $X_i$ y tan sólo un número finito de los $B_i$'s son distintos de $X_i$. Si $k = \max\{i\in N | B_i \neq X_i\}$, existirá un índice $i_0 \geq k$ tal que $U_i^{i_0} \subset B_i$ para cada $i\in N$, de donde, $V_{i_0} \subset A$ (pues $U_i^{i_0} \subset B_i$ para todo índice $i \leq k$, y $B_i = X_i$ si $i > k$), y por tanto, $\beta$ es una base local numerable de x en X. Por lo tanto, X es primero numerable.

†

Sin embargo, el producto cartesiano más que numerable de espacios topológicos primero-numerables no es necesariamente primero-numerable, como se muestra en el siguiente:

40.- Ejemplo de producto cartesiano más que numerable de espacios primero numerables que no es primero numerable.

Sean $X = \{0,1\}$ con la topología discreta, y $Y = \prod_{i\in C} X_i$ tal que $X_i = X$ para cada índice i en un conjunto C tal que $\mathrm{Card}(C) = \aleph_1$, donde $\aleph_1$ es el menor número cardinal mayor que $\aleph_0$ (el cual existe pues la clase de los números cardinales está bien ordenada).

Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in N}$ una familia arbitraria numerable de vecindades de $y_0 = (x_i)_{i\in C}$ tal que $x_i = 0$ para cada $i\in C$. Por la definición de la topología de Y, para cada $\alpha\in N$ existe un subconjunto $I_\alpha$ finito de C tal que $U_\alpha = \prod_{i\in C} A_i$, donde $A_i = \{0\}$ si $i\in I_\alpha$, y $A_i = X_i$ si $i\in C \setminus I_\alpha$. Sea $J = \bigcup_{\alpha\in N} I_\alpha \subset C$; como $\mathrm{Card}(J) = \aleph_0 < \aleph_1 = \mathrm{Card}(C)$, entonces $C \setminus J \neq \emptyset$, de donde, si $i_0 \in C \setminus J$, $V = \prod_{i\in C} A_i$ donde $A_i = X_i$ si $i \neq i_0$, y $A_{i_0} = \{0\}$ es tal que $U_\alpha \not\subset V$ para todo $\alpha\in N$ pues claramente, $z = (x_i)_{i\in C}$ tal -

que $x_i = 0$ si $i\in I_\alpha$ y $x_i = 1$ si $i\notin I_\alpha$ es un elemento de $U_\alpha / V$ para cada $\alpha\in\mathbb{N}$. De donde, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ no es base local de $y_0$, se sigue entonces que no existe base local numerable en $y_0$, y por lo tanto, Y no es un espacio primero-numerable.

†

Pese a suceder en algunos casos para espacios primero numerables, la propiedad de ser de Frêchet o secuencial no se conserva en general bajo productos cartesianos, como se puede ver en los siguientes ejemplos:

41.- Ejemplo de un espacio de Frêchet X tal que X × X no es un espacio secuencial.

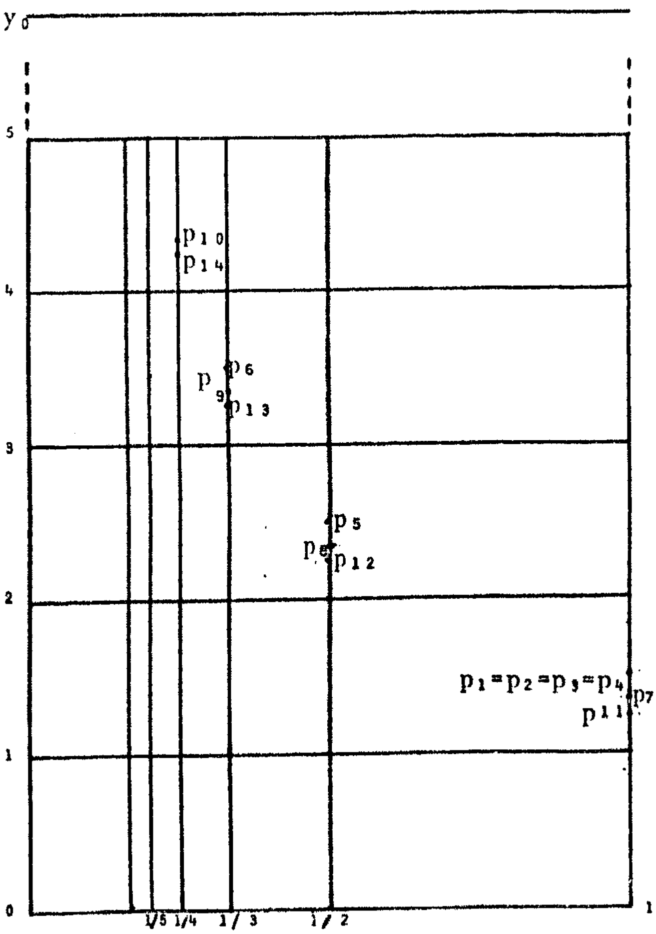
Sea Y' el espacio topológico considerado en el ejemplo en 10. Como se mostró, Y' es un espacio de Fréchet no Hausdorff en el cual toda sucesión tiene a lo más un punto límite. Sean $D = \{(y,y)\in Y' \times Y' \mid y\in Y'\}$ (la diagonal) y $\{(y_i,y_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria en D. Supongamos que $(y',y'') \in Y' \times Y'$ es un punto límite de $\{(y_i,y_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$. Sean U', U" vecindades arbitrarias de y', y" en Y' respectivamente; entonces, U' × U" es una vecindad de (y',y") en Y' × Y' y como, $(y',y'') \in \lim\{(y_i,y_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$, existe un índice $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n>N$, $(y_n,y_n) \in U' \times U''$, de donde $y_n \in U' \cap U''$ y por tanto, $\{y',y''\} \subset \lim\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en Y'. Como en Y' toda sucesión tiene a lo más un límite, $y' = y''$ es decir, toda sucesión convergente en D tiene a su punto límite en D; pero como Y' no es Hausdorff, por la proposición en 0.10, D no es cerrado. Por lo tanto, Y' × Y' no es un espacio secuencial.

†

El ejemplo en 41 muestra en particular que si X es un espacio secuencial, no necesariamente X × X es secuencial.

La propiedad de ser de Fréchet no se cumple necesariamente en un producto cartesiano, ni aún cuando algunos (no todos) de ellos son primero-numerables, como se puede apreciar en el siguiente:

42.- <u>Ejemplo</u> de un producto cartesiano X × Y que no es un espacio de Fréchet, donde X es primero numerable y Y es de Fréchet.




Sean $X = I = \{x \in \mid 0 \leq x \leq 1\}$ con la topología inducida por $\mathbb{R}$ y Y el espacio topológico del ejemplo en 7. Sea $\{p_i\}_{i \in N}$ la sucesión en X × Y determinada por: $p_1 = p_2 = p_3 = (1, 3/2)$, y para $i \geq 4$, se define $p_i = (1/(i - w(w+1)/2)\ ,\ i - w(w+1)/2 + 1/w)$ , donde w es el único natural tal que:

$w(w+1)/2 < i \leq (w+1)(w+2)/2$

Sea W una vecindad de $(0, y_0)$, se tendrá que, existen un real positivo $\varepsilon \leq 1$ y un conjunto U abierto en $\mathbb{R}$ tales que $N \subset U$ y además, $(0, y_0) \in [0, \varepsilon) \times [(U \setminus N) \cup \{y_0\}] \subset W$; existirán entonces $M_1, M_2 \subset N$, con $M_2 \geq M_1$ tales que $1/(M+1) < \varepsilon$ y $M+1+1/k \in U$ para todo $k \geq M_2$, de donde, $q_k = (1/(M+1), M+1+1/k) \in W$ si $k \geq M$ ; y como para cada $k \geq M_2$, $q_k \in \{p_i\}_{i\in N}$, se tiene que $(0,y_0)$ ès un punto en la cerradura de $A = \{p_1,p_2,\ldots\}$, considerado como subconjunto de $X \times Y$ (i.e., la imagen de la sucesión).

Supongamos que existe una sucesión $\{(x_i,y_i)\}_{i\in N}$ de puntos de A tal que $(0,y_0) \in \text{lím}\{(x_i,y_i)\}_{i\in N}$, se tendría entonces que $y_0 \in \text{lím}\{y_i\}_{i\in N}$ y que $0 \in \text{lím}\{x_i\}_{i\in N}$. Como se puntualizó en 7, existiría entonces un elemento $k \in N$ tal que $k \in \text{lím}\{y_i\}_{i\in N}$ (donde el límite se puede considerar en la topología de $\mathbb{R}$). De donde, si $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \delta < 1$, existiría un índice $M_3$ en $N$ tal que si $n>M_3$, $y_n \in (k-\delta,k+\delta)$, y como $(x_n,y_n) \in A$, se tendría que $x_n = 1/k$ si $n>M_3$, lo que implica que el cero no es punto límite de $\{x_i\}_{i\in N}$, pero entonces, $(0,y_0)$ no sería punto límite de $\{(x_i,y_i)\}_{i\in N}$, lo que es una contradicción.

Se tiene entonces, que $(0,y_0) \in \overline{A}$, pero ninguna sucesión en A converge a $(0,y_0)$ y por tanto, $X \times Y$ no es un espacio de Fréchet.

†

**El ejemplo en 41 muestra que el producto cartesiano no necesariamente conserva la estructura secuencial, aún cuando los espacios factores son de Fréchet; por la proposición en 37, el corolario en 38 y la proposición en 39, se sabe que dicha estructura (incluso la de espacio primero-numerable) sí se preserva si los espacios factores son primero-numerables, y el producto cartesiano es a lo más numerable. La hipótesis de que los espacios factores sean primero-numerables es necesaria, como se muestra en el siguiente ejemplo, donde los espacios factores tienen muchas propiedades deseables pero el producto cartesiano no es un espacio secuencial.**

43.- Ejemplo del producto cartesiano de un espacio normal segundo numerable con un espacio normal de Fréchet, que no es un espacio secuencial.

Sea $X = \mathbb{R} \setminus \{1/2, 1/3, \ldots\}$ con la topología de subespacio de $\mathbb{R}$; $X$ es claramente un espacio normal segundo numerable. Sea $Y$ el espacio en el ejemplo en 7, que como se probó, es de Fréchet pero no primero-numerable, y como se puede probar facilmente, es normal (basta observar que los abiertos en $Y$ que no contienen a $y_0$ son abiertos también en $Y \setminus \{y_0\} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ con la topología de subespacio de $\mathbb{R}$, que resulta un espacio normal; de ahí que, dados dos subconjuntos cerrados ajenos, resulte sencillo encontrar dos subconjuntos abiertos ajenos que los contengan).

Para cada $(i,j) \in \{2,3,4,\ldots\} \times \{2,3,4,\ldots\}$, sea $F_{ij} = \{x \in X : |i/j - x| \leq 1/i\} \times \{j - 1/i\} \subset X \times Y$. Para $j \in \{2,3,4,\ldots\}$ sea $F_j = \bigcup_{i=2}^{\infty} F_{ij}$, y sea $F = \bigcup_{i,j=2}^{\infty} F_{ij} = \bigcup_{j=2}^{\infty} F_j$. De la definición, claramente $(0,y_0) \notin F$, pero $(0,y_0) \in \overline{F}$ , pues si $A$ es una vecindad abierta de $0$ en $X$ y $B$ lo es de $y_0$ en $Y$, $A \times B$ será vecindad abierta de $(0,y_0)$ en $X \times Y$; entonces para cada $j \in \{2,3,4,\ldots\}$ existe un índice $N_j \in \mathbb{N}$ tal que $(j - 1/N_j, j + 1/N_j) \subset B$ y existe también un índice $N \in \mathbb{N}$ tal que $(-1/N, 1/N) \setminus \{1/i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset A$, se tendrá entonces que si $i,j \in \mathbb{N}$ son tales que $1/i + 1/j < \min\{1/N_j , 1/N\}$ , para cada $x \in X$ que cupla con $|1/j - x| < 1/i$, claramente ---- $(x, j - 1/i) \in A \times B$, y por tanto, $F_{ij} \subset A \times B$, de donde, $(0,y_0) \in \overline{F}$.

Sea $\{(x_i,y_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $F$ que converge a un punto $(x,y)$ en $X \times Y$; el límite será único pues como el producto de espacios $T_2$ es también un $T_2$, $X \times Y$ es en particular, de Hausdorff. Si $\{(x_i,y_i)\}_{i \in \mathbb{N}} \cap F_j$ fuese finito para todo índice $j \in \{2,3,4,\ldots\}$, $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ no convergería, pues tendería a $+\infty$ y por tanto, $\{(x_i,y_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ tampoco convergería, lo que por hipótesis sucede, por tanto, existe un índice $j_0 \in$

$\{2,3,4,\ldots\}$ tal que $\{(x_i,y_i)\}_{i\in\mathbb{N}} \cap F_{j_0}$ es infinito, y se tendrá además, que a partir de algún natural, $F_{j_0}$ contiene a todos los términos de la sucesión, pues de otro modo, la subsucesión de términos externos a $F_{j_0}$ convergería a un punto externo de $F_{j_0}$ y la subsucesión en $F_{j_0}$ a un punto de $F_{j_0}$, lo que no sucede pues $\{(x_i,y_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge. Se tiene también que el conjunto de índices $W = \{i\in\{2,3,4,\ldots\} \mid \{(x_i,y_i)\}_{i\in\mathbb{N}} \cap F_{ij_0} \neq \emptyset\}$ es acotado, pues de otra forma, se tendría una subsucesión de $\{(x_i,y_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ convergente a un punto de el conjunto $\{1/2,1/3,\ldots\} \times \{y_0\}$ en $\mathbb{R} \times Y$, que no es un elemento de $X \times Y$, --- i.e. una subsucesión divergente. De modo que, a partir de algún índice, todos los términos de la sucesión estarán en $F_{i_0 j_0}$ para algún índice $i_0 \in W$, y como $F_{i_0 j_0}$ es cerrado, $(x,y) \in F_{i_0 j_0} \subset F$.
Se tiene entonces que F no es cerrado, pero toda sucesión convergente con puntos en F converge a un punto de F. Por lo tanto, $X \times Y$ no es un espacio secuencial.

†

Como se ha visto en los ejemplos anteriores, para que el producto cartesiano de espacios secuenciales o de Fréchet,(no todos primero-numerables) sea de nuevo un espacio secuencial o de Fréchet, se necesitan hipótesis adicionales. En el capítulo siguiente, se darán algunas condiciones suficientes para que los productos cartesianos mencionados anteriormente resulten espacios secuenciales o de Fréchet.

# C O M P A C I D A D

Para empezar a establecer resultados sobre espacios primero-numera-- bles, de Fréchet y secuenciales, concernientes a propiedades de compacidad, nos será útil recordar la siguiente:

44.- Definición. Sea X un espacio topológico.

(a) X es compacto si toda cubierta abierta de X posee una subcubierta finita.

(b) X es localmente compacto si para cada $x \in X$ existe una vecindad U del punto x tal que $\overline{U}$ es un subconjunto compacto de X.

(c) X es un k-espacio si para todo subconjunto A de X, A es cerrado si $A \cap Z$ es cerrado en Z para todo subconjunto compacto Z de X.

Comenzaremos nuestro análisis con el siguiente resultado:

45.- Proposición. Todo espacio secuencial es un k-espacio.

Demostración. Supóngase que X es un espacio secuencial y que A es un subconjunto de X no cerrado. Entonces, existe una sucesión $\{x_i\}_{i\in N}$ de puntos de A y un punto $x_0 \in \lim\{x_i\}_{i\in N}$ tal que $x_0 \notin A$. Si $Z \subset X$ es el subconjunto $\{x_0,x_1,x_2,\dots\}$ se tiene que Z es compacto (pues si -- $\{U_i\}_{i\in I}$ es una familia arbitraria de subconjuntos abiertos de X tal que $Z \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, y si $i_0$ es un índice en I tal que $x_0 \in U_{i_0}$, existe entonces un índice $N \in N$ tal que si $n>N$, $X_n \in U_{i_0}$; si $\{i_1,i_2,\dots,i_N\}$ es un subconjunto de índices de I tal que $x_j \in U_{i_j}$ para $j\in\{1,2,\dots,N\}$, claramente $\{U_{i_0},U_{i_1},U_{i_2},\dots,U_N\}$ es una subfamilia de $\{U_i\}_{i\in I}$ tal que $Z \subset \bigcup_{j=0}^{N} U_{i_j}$ ), pero claramente $A \cap Z = Z\setminus\{x_0\}$ no es cerrado en Z -- (pues $x_0 \in \overline{Z}$) y, por la definición en 44 (c), X es un k-espacio.

†

Para los fines de este trabajo, la estructura de los k-espacios nos será de utilidad, especialmente cuando dicha propiedad sea hereditaria, por ello, se plantea la siguiente caracterización:

46.- Proposición. Sea X un espacio topológico de Hausdorff.
X es hereditariamente un k-espacio si y sólo si para cada subconjunto $M$ de $X$, y para cada punto $x \in \overline{M} \setminus M$, existe un subconjunto compacto $B$ de $M \cup \{x\}$ tal que $x \in \overline{B \setminus \{x\}}$.

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $M$ un subconjunto de $X$ y $x \in \overline{M} \setminus M$ . Supongamos que para cualquier subconjunto compacto $C$ contenido en $M \cup \{x\}$, $x \notin \overline{C \setminus \{x\}}$ . Como $x \in \overline{M}$, existe una red $\{x_i\}_{i\in I} \subset M$ ( donde $I$ es un conjunto dirigido) tal que $x = \lim\{x_i\}_{i\in I}$. Claramente, como $x \notin M$, el conjunto $A = \{x_i | i\in I\}$ no es cerrado, pero para cualquier subconjunto compacto $C$ contenido en $M \cup \{x\}$, $A \cap C$ es cerrado en $C$ (pues $A \cap C \subset C \setminus \{x\}$ y como, $x \notin \overline{C \setminus \{x\}}$, $x \notin \overline{A \cap C}$ ). De lo anterior se sigue que $M$ no es un k-espacio y por tanto, $X$ no es hereditariamente un k-espacio.

$\Leftarrow$ ) Sea $M$ un subconjunto de $X$ tal que para cualquier subconjunto compacto $C$, $M \cap C$ es cerrado en $C$. Supongamos que $M$ no es cerrado. Sea entonces $x \in \overline{M} \setminus M$; por hipótesis, existe un subconjunto compacto $B$ contenido en $M \cup \{x\}$ tal que $x \in \overline{B \setminus \{x\}}$. Como $X$ es de Hausdorff, $x \in B$ (pues de otra forma $B \setminus \{x\} = B$ que, como es compacto, es cerrado); como $B \cap M = B \setminus \{x\}$ , $B \setminus \{x\}$ sería por hipótesis, un subconjunto cerrado de $B$, pero esto es una contradicción pues $x \in \overline{B \setminus \{x\}} = B$. Por lo tanto, $X$ es un k-espacio.

Para terminar la demostración, como resultado del argumento recién probado, será suficiente probar que el postulado establecido como hipótesis se hereda (o se cumple) en todos los subespacios de $X$.

Sean $A \subset X$, $M \subset A$ y $x \in \overline{M}^A \setminus M$; entonces, $x \in \overline{M} \setminus M$, y como por hipótesis existe un subconjunto compacto $B$ contenido en $M \cup \{x\}$ tal que $x \in \overline{B \setminus \{x\}}$, y $x \in A$, se tendrá que $x \in \overline{B \setminus \{x\}}^A$.

†

Usando el resultado anterior, se obtiene la muy importante caracterización de los espacios de Fréchet Hausdorff, por medio de la estructura de los k-espacios, que se plantea en el siguiente:

47.- Teorema. Sea $X$ un espacio topológico de Hausdorff. $X$ es hereditariamente un k-espacio si y sólo si $X$ es de Fréchet.

Demostración. $\Leftarrow$) Si $X$ es de Fréchet, por la proposición en 12 (a), todos sus subespacios son de Fréchet, y por la proposición en 45, todos sus subespacios son k-espacios.

$\Rightarrow$) Sean $M$ un subconjunto de $X$ y $x \in \overline{M} \setminus M$. Claramente, se puede encontrar un subconjunto $L$ de $M$ tal que $x \in \overline{L}$ y si $L' \subset M$ y $x \in \overline{L'}$, entonces $\mathrm{Card}(L) \leq \mathrm{Card}(L')$. Por la proposición en 46, existe un subconjunto compacto $B$ contenido en $L \cup \{x\}$ con la propiedad de que --- $x \in \overline{B \setminus \{x\}}$. Se sigue de la elección del conjunto $L$ que $\mathrm{Card}(L) = \mathrm{Card}(B) = \tau$. Se mostrará que $\tau = \aleph_0$, de lo que se sigue el teorema, pues existiría entonces una sucesión en $B \setminus \{x\}$ (y por tanto, en $M$) que converge al punto $x$.

El punto $x$ no es aislado en $B$, es más, $\chi(x,B) = \tau$ (pues, de la proposición en 0.11, $\omega(B) \leq \mathrm{Card}(B) = \tau$ y como para cualquier espacio topológico $Y$ y para cualquier punto $z \in Y$, $\chi(z,Y) \leq \omega(Y)$, se tiene que $\chi(x,B) \leq \tau$ ; y si se tuviese que $\chi(x,B) < \tau$, existiría entonces un conjunto $A \subset B$ con $\mathrm{Card}(A) < \tau$ tal que $x \in \overline{A}$, lo que es contrario a las hipótesis y por tanto, $\chi(x,B) = \tau$ ). Considérese alguna base local de $x$ en $B$, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ tal que $\mathrm{Card}(A) = \tau$. Se puede suponer que el conjunto de índices $A$ está bien ordenado como el menor número cardinal asociado al cardinal $\tau$. Se necesitará ahora cierta construcción transfinita.

Nótese que como $B$ es compacto y de Hausdorff, por el teorema en 0.12 $B$ es normal; sea entonces $O_1$ una vecindad de $x$ en $B$ tal que $\overline{O_1} \subset U_1$, y sea $x_1$ un elemento de $O_1 \setminus \{x\}$. Supongamos que para todos los índices $\alpha\in A$ con $\alpha < \beta$ para $\beta\in A$, se han definido vecindades $O_\alpha$ de $x$, contenidas en el correspondiente $U_\alpha$, y con sus respectivos puntos $x_\alpha$ e $O_\alpha \setminus \{x\}$. La cardinalidad de $\bigcup_{\alpha<\beta} \{x_\alpha\}$ es menor que $\tau$ y, por hipótesis, $x \notin \overline{\bigcup_{\alpha<\beta} \{x_\alpha\}}$. Tómese para $\beta$ cualquier vecindad $O_\beta$ de $x$ tal que $\overline{O_\beta} \subset U_\beta$ y $(\overline{\bigcup_{\alpha<\beta} \{x_\alpha\}}) \cap \overline{O_\beta} = \emptyset$ (lo cual se puede hacer pues $B$ es normal). Se tendrá entonces que $\bigcap_{\alpha<\beta} O_\alpha \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Para la prueba basta mencionar que $\mathrm{Card}(\{O_\alpha | \alpha\leq\beta\}) < \tau$ si $\chi(x,B) = \tau$ y ya que $B$ es compacto, $\psi(x,B) = \chi(x,B)$ (0.13). Tomemos entonces para $\beta$, cualquier $x_\beta$ punto de $\bigcap_{\alpha\leq\beta} O_\alpha \setminus \{x\}$. De tal forma se pueden definir $x_\alpha$ y $O_\alpha$ para todo $\alpha\in A$.

Considere el subespacio $X^* = \bigcup_{\alpha\in A} \{x_\alpha\} \cup \{x\}$; claramente (de la elección de los puntos $x_\alpha$'s), $x$ no es un punto aislado de $X^*$. Por otro lado, $X \setminus \left[(\overline{\bigcup_{\alpha<\beta} \{x_\alpha\}}) \cup \overline{O_{\beta+1}}\right]$ es vecindad de $x_\beta$ ajena a $X^* \setminus \{x_\beta\}$. Entonces, todos los puntos de $X^* \setminus \{x\}$ son aislados en $X^*$. Por la proposición en 46, se puede hallar un subconjunto compacto $F$ en $X^*$ tal que $x$ no sea punto aislado de $F$. Como $F \setminus \{x\} \subset M$, por la definición del número cardinal $\tau$, $\mathrm{Card}(F) = \tau$. Sea $P$ un subconjunto infinito numerable de $F \setminus \{x\}$. Ningún punto de $F \setminus \{x\}$ es punto de acumulación de $P$, y como $F$ es compacto, se sigue que $x \in \overline{P}$. Como $P \subset M$, de la elección de $L$, $\mathrm{Card}(P) = \mathrm{Card}(L) = \tau$. Por lo tanto, $\tau = \aleph_0$.

+

De la proposición en 46 y del teorema en 47 se sigue el siguiente:

48.- Corolario. Sea X un espacio topológico de Hausdorff.
X es de Fréchet si y sólo si para todo subconjunto M de X y para cada punto $x \in \overline{M}\setminus M$, existe un subconjunto compacto B contenido en $M \cup \{x\}$ tal que $x \in \overline{B\setminus\{x\}}$.

NOTA. En el teorema en 47, si X es de Fréchet, se mostró que X es hereditariamente un k-espacio, no importa si X es o no un espacio de -- Hausdorff.
En el mismo teorema, se usó para la demostración el hecho de que si X es un espacio de Hausdorff hereditariamente k-espacio, $\tau(X)$ (la cerradura cardinal de X; ver definición en 15) es igual a $\aleph_0$. Como se hizo ver en el ejemplo en 17, el ejemplo en 8 muestra un espacio topológico con cerradura cardinal $\aleph_0$ que no es de Fréchet, entonces, se tiene un ejemplo de espacio topológico secuencial de Hausdorff que no es hereditariamente un k-espacio (i.e. no es de Fréchet).

Del teorema en 47 y de la proposición en 33 se sigue el siguiente:

**49.- Corolario. Si X es un espacio secuencial de Hausdorff que no es de Fréchet, contiene a un subespacio que no es un k-espacio.**

**Se dirá aún más sobre los espacios secuenciales que no son de Fréchet para ello, se plantea la siguiente:**

50.- Definición. Sea X un espacio topológico de Hausdorff.
(a) X es un $S_R$-espacio si y sólo si toda función real en X secuencial

mente continua (i.e. $f(x) = \lim f(x_n)_{n \in N}$ si $x = \lim x_{n\, n \in N}$) es continua.

(b) X es un c-espacio si y sólo si siempre que A sea un subconjunto de X numerablemente cerrado (i.e. A tiene intersección cerrada con cada subconjunto numerable de X), A es cerrado.

Para los espacios numerables, se puede ahora caracterizar a los espacios secuenciales como una clase importante de espacios topológicos: los k-espacios. Esto es:

51.- Teorema. Sea X un espacio topológico numerable. X es un espacio secuencial si y sólo si X es un k-espacio.

Demostración. $\Rightarrow$ ) Es inmediato de la proposición en 45.

$\Leftarrow$ ) Supóngase que X no es un espacio secuencial. Sea A un subconjunto de X tal que toda sucesión convergente con puntos de A tiene punto límite en A, pero A no es cerrado . Como X es un k-espacio, existe algún subconjunto compacto $K \subset X$ tal que $A \cap K$ no es cerrado en K. Entonces, toda sucesión convergente con puntos de $A \cap K$ converge a un punto de $A \cap K$, pero $A \cap K$ no es cerrado en K. Pero K es numerablemente compacto y por tanto, metrizable;y claramente este tipo de espacios es una subclase de los c-espacios, lo que es una contradicción. Por lo tanto, X es un espacio secuencial.

†

La estructura de los $S_R$-espacios está también ligada a los espacios secuenciales y permite caracterizar a los espacios de Fréchet de Hausdorff, esto es:

52.- Teorema. Sea X un espacio topológico de Hausdorff.

(a) Si X es secuencial, X es un $S_R$-espacio.

(b) X es hereditariamente un $S_R$-espacio si y sólo si X es de Fréchet.

Demostración. (a) Es consecuencia inmediata de la proposición en 3.

(b) <= ) Si X es de Fréchet, por la proposición en 33, cada subespacio de X es secuencial y, por el inciso (a), cada subespacio es un - $S_R$-espacio. Por lo tanto, X es hereditariamente un $S_R$-espacio.

=> ) Supóngase que X no es de Fréchet; existirán entonces un subconjunto A de X y un punto $x_0 \in \bar{A} \setminus A$ tales que ninguna sucesión de puntos de A converge a $x_0$. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función secuencialmente -- continua. Si f no es continua, A es un subespacio de X que no es un $S_R$-espacio. Si f es continua, se puede extender f a $A \cup \{x_0\}$ de tal forma que f sea secuencialmente continua (esto siempre sucede pues - no se tendrán nuevas sucesiones convergentes) pero no continua; pues si $f_1, f_2 : A \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ son tales que $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$ para todo $x \in A$ y $f_1(x_0) = r_1 \neq r_2 = f_2(x_0)$, y si U y $V \subset \mathbb{R}$ son vecindades a -- biertas de $r_1$ y $r_2$ respectivamente en $\mathbb{R}$ tales que $U \cap V = \emptyset$, se tendrá que $f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V) = \{x_0\}$, de modo que no pueden ser ambos con-- juntos $f_1^{-1}(U)$ y $f_2^{-1}(V)$ abiertos en X, pues de ser así, $x_0 \notin \bar{A}$; de - lo anterior, alguna función, $f_1$ o $f_2$ no es continua en x , y por tanto, $A \cup \{x_0\}$ no es un $S_R$-espacio.

Se ha mostrado entonces, que si X no es de Fréchet, X no es hereditariamente un $S_R$-espacio.

†

Con ayuda de lo anterior, se pueden establecer condiciones necesa--- rias sobre los espacios secuenciales que no son de Fréchet, como se había comentado después del corolario en 34. Esto es:

53.- Teorema. Sea X un espacio secuencial de Hausdorff que no es de Fréchet. Entonces:

(a) Algún subespacio numerable de X no es un $S_R$-espacio.

(b) Algún subespacio numerable de X no es un espacio secuencial.

(c) Algún subespacio numerable de X no es un k-espacio.

Demostración. (a) Supóngase lo contrario. Sea A un subconjunto arbitrario de X y $x \in \bar{A}$. Como X es secuencial, X es un c-espacio. Entonces, por el lema en 0.14, existe un subconjunto numerable D contenido en A tal que $x \in \bar{D}$. Como D es hereditariamente un $S_R$-espacio (pues es numerable), por el teorema en 52 (b), X es de Fréchet. Existirá entonces una sucesión $\{x_i\}_{i \in N}$ de puntos de D tal que $x = \lim\{x_i\}_{i \in N}$. Como $\{x_i\}_{i \in N} \subset A$, se tendría que X es de Fréchet, lo que es una contradicción. Por lo tanto, algún subespacio de X no es un $S_R$-espacio.

(b) Se sigue directamente del inciso (a) y del teorema en 52 (a).

(c) Es inmediato del inciso (b) y del teorema en 51.

†

Seguiremos nuestra exposición, estudiando las relaciones de los espacios tema de este trabajo, con otros espacios con propiedades relacionadas con la compacidad; para ello se enuncia la siguiente:

54.- Definición. Sea X un espacio topológico.

(a) X es numerablemente compacto si toda subcubierta abierta numerable de X posee una subcubierta finita.

(b) X es pseudocompacto si cada función real continua definida en X es acotada.

Como consecuencia de la proposición en 45, se sigue el siguiente resultado para espacios secuenciales,que es un caso particular de los teoremas en 0.15 y en 0.16.

55.- El producto cartesiano $X \times Y$ de un espacio X numerablemente compacto (pseudocompacto) y un espacio secuencial Y numerablemente compacto (pseudocompacto) es numerablemente compacto(pseudocompacto)

Según el teorema en 0.17, si X es un espacio compacto, Y es un espacio topológico arbitrario, y $p: X \times Y \to Y$ es la proyección natural, entonces p es una función cerrada. El siguiente resultado muestra como la estructura de los espacios secuenciales permite debilitar la hipótesis de compacidad en el teorema:

56.- Proposición. Si X es un espacio numerablemente compacto y Y es un espacio secuencial, entonces la proyección $p : X \times Y \to Y$ es una función cerrada.

Demostración. Sea F un subconjunto cerrado de $X \times Y$. Considérese una sucesión $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de puntos de p(F) y un punto $y \in \lim\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Para cada $i \in \mathbb{N}$ tómese un punto $x_i \in X$ tal que $(x_i, y_i) \in F$. Si el conjunto $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ es finito, entonces existe $x \in X$ tal que $x_{k_i} = x$ para una sucesión infinita de índices $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$; y claramente se tiene que $(x,y) \in \lim\{(x_{k_i}, y_{k_i})\}_{i \in \mathbb{N}}$, lo que implica que $(x,y) \in \overline{F} = F$ y por tanto, $y \in p(F)$.

e otra forma, si A es infinito, por la proposición en 0.18, $A^d \neq \emptyset$, por tanto, existe un punto $x \in A^d$, de donde, $(x,y) \in \overline{F} = F$, lo que nos da como resultado que $y \in p(F)$. Como Y es secuencial y toda sucesión de puntos en p(F) tiene sus puntos límite en p(F), se deduce que p(F) es cerrado en Y. †

En la proposición anterior, la hipótesis de que Y es secuencial no - puede omitirse, ni siquiera reemplazarse por la hipótesis: Y es un - espacio normal compacto (que implica que Y es un k-espacio), como -- puede observarse en el siguiente:

57.- <u>Ejemplo</u> de una proyección $p: X \times Y \to Y$ que no es una función -- cerrada, donde X es un espacio normal localmente compacto (pero no - compacto) y Y es un espacio compacto normal.

Sea Y el conjunto de todos los números ordinales menores o iguales - que el primer número ordinal no numerable $\omega_1$. El conjunto Y está --- bien ordenado por el orden natural <. Considérese en Y la topología generada por la base $\beta$ que consta de todos los segmentos $(y,x] = \{z \in Y | y<z\leq x\}$, donde $y<x\leq\omega_1$, y el conjunto de un punto $\{0\}$, donde 0 es el tipo de orden del conjunto vacío. Fácilmente se puede comprobar - de la definición de $\beta$ que Y es de Hausdorff, y por la proposición en 0.12, si Y es compacto, Y es normal.

Probaremos ahora que Y es compacto. Sea $\{U_s\}_{s\in S}$ una cubierta abierta del espacio Y y sea A el conjunto de todos los puntos $y \in Y$ tal que el intervalo $[0,y]$ está contenido en la unión de un número finito de -- miembros de $\{U_s\}_{s\in S}$. Será entonces suficiente probar que $Y \setminus A = \emptyset$. Supóngase que $Y \setminus A \neq \emptyset$ y denotemos por $y_0$ al menor elemento de este conjunto. Existirá un punto $s_0 \in S$ tal que $y_0 \in U_{s_0}$. Ya que $0 < y_0$ (como se puede ver fácilmente), para algún $y \in [0,y_0)$, la inclusión -- $(y,y_0] \subset U_{s_0}$ también es cierta. Por definición de $y_0$, $y \in A$ de donde se sigue que $[0,y] \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i}$ para algunos índices $s_1,s_2,\ldots,s_k \in S$. Se sigue que $[0,y_0] \subset \bigcup_{i=0}^{k} U_{s_i}$ lo que es una contradicción al hecho de que $y_0 \notin A$. Por lo tanto, Y es compacto.

Sea $X = Y \setminus \{\omega_1\}$ con la topología de subespacio de Y. Como se puede comprobar sin dificultad, X es un espacio normal; y claramente, ya que X no es un subespacio cerrado de Y (pues obviamente $\omega_1 \in \overline{X}$), X no es un espacio compacto.

Para cada subconjunto numerable infinito A de X, existe un elemento $x_0 < \omega_1$ tal que $A \subset X_1 = [0,x] \subset X$, y como $X_1$ es un espacio compacto (pues es un subconjunto cerrado de Y), se tiene que $A^d \neq \emptyset$, entonces, por la proposición en 0.18, X es numerablemente compacto.

Finalmente, para mostrar que la proyección $p : X \times Y \to Y$ no es una función cerrada, considérese el subconjunto A de $X \times Y$ formado por la unión de todos los subconjuntos $W_x$ de $X \times Y$ con $x \in X$, definidos por $W_x = \{x\} \times [0,x]$ ; claramente, si $(x,y) \notin A$, se tiene que $x < y$, de donde, si $x'$ es el menor elemento de X mayor que $x$, $[0,y') \times (x,\omega_1]$ es una vecindad abierta de $(x,y)$ totalmente contenida en $X \times Y \setminus A$ y por tanto, A es cerrado en $X \times Y$. Como $p(A) = X \subset Y$, $p(A)$ no es cerrado en Y, y por tanto, p no es una función cerrada.

†

Como se establece en la proposición en 0.19, un espacio topológico es compacto si y sólo si, toda red con elementos en X tiene un punto de acumulación. En el presente trabajo se estudian los espacios en donde la estructura de sucesión, siendo ésta un caso particular de red, es suficiente para conocer la topología de dichos espacios; es por eso que se introduce la siguiente definición, de la que se derivarán resultados de interés:

58.- Definición. Sea X un espacio topológico.

(a) X es secuencialmente compacto si toda sucesión de puntos de X contiene alguna subsucesión convergente.

(b) X es <u>localmente secuencialmente compacto</u> si para cualquier $x \in X$ y cualquier vecindad U de x existe una vecindad V de x tal que $\bar{V}$ es secuencialmente compacto y $\bar{V} \subset U$.

De las propiedades de los espacios con compacidad secuencial, destacaremos la siguiente:

59.- <u>Proposición</u>. (a) Todo espacio secuencialmente compacto es numerablemente compacto.

(b) Las propiedades "secuencialmente compacto" y "numerablemente compacto" son equivalentes en la clase de los espacios secuenciales.

Demostración. (a) Es consecuencia inmediata de la proposición en --- 0.18.

(b) Para la prueba, es suficiente mostrar que cualquier sucesión $x_1$, $x_2, \ldots$ de puntos de un espacio secuencial X numerablemente compacto contiene una subsucesión convergente.

Claramente se puede suponer que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ con $i,j \in \mathbb{N}$. Sea x un punto de acumulación del conjunto infinito $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$(tal punto existe por la proposición en 0.18). Como $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$, el conjunto -- $A \setminus \{x\}$ no es cerrado, y siendo X un espacio secuencial, el conjunto $A \setminus \{x\}$ contiene una subsucesión que converge a un punto en el com-- plemento de $A \setminus \{x\}$ de la cual se puede obtener una subsucesión que sea también subsucesión de $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, que converja; lo que termina la demostración.

†

La estructura de los espacios secuenciales nos permite debilitar la hipótesis de compacidad local en el teorema de Whitehead en 0.20; ob teniendo el siguiente resultado que nos será de utilidad posterior-mente:

60.- Lema. Sean $X$ un espacio localmente secuencialmente compacto, $Y$ un espacio secuencial y $g : Y \to Z$ una función cociente. Entonces, el producto cartesiano $f = id_X \times g : X \times Y \to X \times Z$ es una función cociente.

Demostración. Como claramente $f$ es suprayectiva y continua, bastará mostrar que si $W$ es un subconjunto de $X \times Z$ tal que $f^{-1}(W)$ es abierto en $X \times Y$, entonces $W$ es abierto.

Sea $(x_0,z_0) \in W$. Elíjase un punto $y_0 \in g^{-1}(z_0)$ y una vecindad $U$ de $x_0$, tales que $\bar{U}$ sea secuencialmente compacto y $\bar{U} \times \{y_0\} \subset f^{-1}(W)$. Como para cada $y \in Y$ se tiene que $\bar{U} \times g^{-1}(g(y)) \subset f^{-1}(W)$ siempre que $\bar{U} \times \{y\} \subset f^{-1}(W)$..(*), entonces $\bar{U} \times g^{-1}(z_0) \subset f^{-1}(W)$. El conjunto $V = \{z \in Z | \bar{U} \times g^{-1}(z) \subset f^{-1}(W)\}$ satisface que $(x_0,z_0) \in U \times V \subset W$, por lo que será suficiente probar que $V$ es un subconjunto abierto de $Z$; y como $g$ es una función cociente, esto se reduce a probar que $g^{-1}(V) = \{y \in Y | \bar{U} \times g^{-1}(g(y)) \subset f^{-1}(W)\}$ es abierto en $Y$.

Por (*), $g^{-1}(V) = \{y \in Y | \bar{U} \times \{y\} \subset f^{-1}(W)\}$, entonces, $g^{-1}(V) = \{y \in Y \mid (x,y) \in \bar{U} \times Y$, con $(x,y) \in f^{-1}(W)\} = Y \setminus \{y \in Y | (x,y) \in ((\bar{U} \times Y) \setminus f^{-1}(W))\}$ $= Y \setminus p((\bar{U} \times Y) \setminus f^{-1}(W))$, donde $p : \bar{U} \times Y \to Y$ es la proyección natural.

Ahora, como $\bar{U}$ es secuencialmente compacto, por la proposición en 59 (a), $\bar{U}$ es numerablemente compacto y, como $Y$ es secuencial, por la proposición en 56, $p$ es una función cerrada. $g^{-1}(V)$ es entonces abierto en $Y$, pues es el complemento de la proyección del conjunto cerrado $(\bar{U} \times Y) \setminus f^{-1}(W)$. Por lo tanto, $f$ es una función cociente.

†

En la demostración del lema en 30, se construyó un espacio primero-numerable Y como la suma topológica ajena o coproducto de las sucesiones convergentes $\{x_0,x_1,x_2,\ldots\}$, por medio de los espacios $X_c = \{c\} \times N$, donde $N = \{0,1,1/2,1/3,\ldots\}$ tiene la topología de subespacio de $\mathbb{R}$. $X_c$ es por tanto un espacio compacto, y siendo Y la suma topológica ajena de este tipo de espacios, obviamente Y es un espacio localmente compacto. Asentemos este resultado en el siguiente:

61.- Lema. Si X es un espacio secuencial, X es la imagen de un espacio primero-numerable localmente compacto bajo una función cociente.

Se puede ahora, con la ayuda de los dos lemas anteriores, dar algunas condiciones suficientes para que el producto cartesiano de espacios secuenciales sea de nuevo un espacio secuencial; de las que se habló al fin de la sección anterior, donde se estudiaron las propiedades concernientes a productos cartesianos, de interés para el presente trabajo:

62.- Teorema. Sean X y Y espacios secuenciales. Si X es localmente secuencialmente compacto, $X \times Y$ es un espacio secuencial.

Demostración. Como X y Y son secuenciales, por el lema en 61 existen espacios primero-numerables localmente compactos X' y Y', y funciones cociente $h : X' \to X$ y $g : Y' \to Y$.

Como X es localmente secuencialmente compacto y Y' es secuencial, por el lema en 60, $f = id_X \times g : X \times Y' \to X \times Y$ es una función cociente; y como Y' es localmente compacto, por el teorema de Whitehead en 0.20, $f' = h \times id_{Y'} : X' \times Y' \to X \times Y'$ es también una función cociente.

Como resultado de la proposición en 37, $X' \times Y'$ es un espacio primero-numerable entonces, como $f'$ es cociente, por el teorema en 31, -- $X \times Y'$ es un espacio secuencial, y como $f$ es también una función cociente, por la proposición en 27 (a), $X \times Y$ es un espacio secuencial.

†

63.- Teorema. Sean X y Y espacios secuenciales. Si X es un espacio - localmente compacto, $X \times Y$ es un espacio secuencial.

Demostración. Es idéntica a la demostración del teorema en 62, excepto que se aplica el teorema de Whitehead (en 0.20), en vez del lema en 60.

†

# E S P A C I O S   M E T R I Z A B L E S

Los espacios estudiados en este trabajo están estrechamente ligados a los espacios metrizables, de hecho, como se verá, pueden caracterizarse por medio de los mismos, lo que enfatiza la importancia de los primeros, pues tienen cercana relación con el tipo de espacios más usados y con mayor aplicación: los espacios métricos.

Se iniciará la exposición de esta sección con el siguiente resultado:

64.- Proposición. Sea X un espacio topológico $T_0$. X es primero-numerable si y sólo si X es la imagen de un espacio métrizable bajo una función continua y abierta.

Demostración. $\Rightarrow$ ) Considerese el espacio de Baire $B(m) = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$, -- donde $X_i = S$ para cada índice $i \in N$, y S es el conjunto de índices de una base $\{U_s\}_{s \in S}$ para el espacio X (arbitraria). Para cada $x \in X$, sea $T_x$ el subconjunto de B(m) que contiene a todos los puntos $\{s_i\}_{i \in N}$ tales que $\{U_{s_i}\}_{i \in N}$ es una base local del punto x en X (lo anterior --- siempre es válido, pues como X es primero numerable, para cualquier punto $x \in X$ existe una base local numerable, y dicha base se puede obtener de los subconjuntos $U_i$ e $\{U_s\}_{s \in S}$ tales que $x \in U_i$). Se tendrá entonces, como X es $T_0$, que $T_x$ es ajeno a $T_y$ si $x, y \in X$ y $x \neq y$, pues,- dados $x_1$ y $x_2$ en X con $x_1 \neq x_2$, existe un índice $s_0 \in S$ tal que $U_{s_0}$ es vecindad de $x_1$ y $x_2 \notin U_{s_0}$ ó $U_{s_0}$ es vecindad de $x_2$ y $x_1 \notin U_{s_0}$. Si - $A = \{\{s_i\}_{i \in N} \in B(m) \mid \{s_i\}_{i \in N} \in T_x$ para algún $x \in X\}$ tendrá entonces sentido definir la función $f : A \to X$ dada por $f(\{s_i\}_{i \in N}) = x$ si ---- $\{s_i\}_{i \in N} \in T_x$.

Por la proposición en D.21 , B(m) es un espacio métrico con la métrica dada por:

$$q(\{s_i\}_{i=1}^{\infty},\{s_i'\}_{i=1}^{\infty}) = \begin{cases} 1/k & \text{si } s_k \neq s_k', \text{ y } s_i = s_i' \text{ para } i<k. \\ 0 & \text{si } s_i = s_i' \text{ para toda } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

y por tanto, A también lo es.

Se puede ver facilmente que en B(m) una sucesión $\{s_i^1\}_{i\in\mathbb{N}},\{s_i^2\}_{i\in\mathbb{N}},\ldots$ converge al punto $\{s_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in B(m)$ si y sólo si, para cada $i\in\mathbb{N}$ existe - un índice $k(i)\in\mathbb{N}$ tal que $s_i^j = s_i$ si $j\geq k(i)$.

Sea $\{\{s_i^j\}_{i\in\mathbb{N}}\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión en A que converge al punto $\{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}$; y sea $\{x_j'\}_{j\in\mathbb{N}}$ la sucesión en X tal que para cada $j\in\mathbb{N}$, $x_j' = f(\{s_i^j\}_{i=1}^{\infty})$. Supongamos que $x=f(\{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}) \notin \lim\{x_j'\}_{j\in\mathbb{N}}$; podemos suponer entonces que para cada $y\in\lim\{x_j'\}_{j\in\mathbb{N}}$ y para cada $\{s_i''\}_{i\in\mathbb{N}}\in T_y$, existe un índice $s_0 \in \{s_i''\}_{i=1}^{\infty}$ tal que el abierto $U_{s_0}$ es vecindad de y, y $x \notin U_{s_0}$. Entonces, $s_0 \notin \{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ , y como para cada $i\in\mathbb{N}$ existe $k(i)\in\mathbb{N}$ tal que si $j>k(i)$ $s_i^j = s_i$, para cualquier $N_i\in\mathbb{N}$ con $N_i>k(i)$ se tiene que $s_0 \notin \{s_i^j\}_{i=1}^{\infty}$ si $j>N_i$, y por tanto, $\{s_i\}_{i=1}^{\infty} \neq \lim\{\{s_i^j\}_{i\in\mathbb{N}}\}_{j\in\mathbb{N}}$, lo que es - absurdo; de donde $x \in \lim\{x_j'\}_{j\in\mathbb{N}}$, y por la proposición en 6, f es -- una función continua.

Para cada $k\in\mathbb{N}$, sea $V_k \subset A$ un abierto básico de la forma :

$V_k = \{\{w_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in A \mid q(\{w_i\}_{i\in\mathbb{N}},\{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}) < 1/k\}$ que es vecindad básica de $\{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en A. Se tiene entonces, para cada $k\in\mathbb{N}$, que $V_k = \{\{w_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in A \mid w_i = s_i \text{ para } i\leq k \text{ con } k\in\mathbb{N}\}$ de donde, para cada $k\in\mathbb{N}$, $f(V_k) =$ -- $\{x\in X \mid x\in U_{s_i} \text{ para } i\leq k\}$ que claramente coincide con $\bigcap_{i=1}^{k} U_s$ que es a-- bierto en X. Por lo tanto, f es una función abierta.

De lo anterior, X es la imagen del espacio métrico A bajo la función ontinua y abierta f.

<=) Por hipótesis se tiene que existe un espacio topológico metrizable Y y una función $f : Y \to X$ abierta y continua tal que $f(Y) = X$. Sean $x\in X$ y $\{U_i\}_{i\in I}$ una base local para x con $\mathrm{Card}(I) \geq \aleph_0$. Ya que f es suprayectiva, elijamos un punto $y \in f^{-1}(x)$. Como Y es metrizable,

existe una base local numerable en y; en particular, la podemos tomar como $\{V_j\}_{j\in N}$ con $V_j = \{y' \in Y \mid d(y,y') < 1/j\}$ para $j\in N$ (donde d es alguna métrica compatible con la topología de Y). Como f es abierta, para cada $j\in N$ $f(V_j)$ es abierto en X; elijamos entonces para cada $j\in N$ algún índice $i_j \in I$ tal que $U_{i_j} \subset f(V_j)$.
Sea A un abierto arbitrario en X tal que $x\in A$. Como f es continua, $f^{-1}(A)$ es vecindad abierta de y, entonces, existe un índice $k\in N$ con $V_k \subset f^{-1}(A)$; como se tiene que $U_{i_k} \subset f(V_k)$ y que $f(V_k) \subset f(f^{-1}(A)) = A$ (pues f es suprayectiva), entonces $U_{i_k} \subset A$ y por tanto, $\{U_{i_j}\}_{j\in N}$ es una base local numerable de x, de donde, X es primero-numerable.

†

En la proposición anterior, al demostrar la última parte, no se utilizó el hecho de que X fuese $T_0$, ni propiamente, que fuese metrizable, lo que en realidad se probó, que vale la pena destacar fué:

65.- Proposición. Si X es la imagen de un espacio primero-numerable bajo una función continua y abierta, X es primero-numerable.

La siguiente proposición nos permitirá posteriormente caracterizar a los espacios primero-numerables en general, por medio de los espacios metrizables.

66.- Proposición. Todo espacio primero numerable X es la imagen de algún espacio primero-numerable de Hausdorff bajo una función continua y abierta.

Demostración. Sean X primero-numerable, X'=X con la topología discreta tal que $\mathrm{Card}(X') = m$, y $B(m) = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$, donde $X_i = X$ para todo $i\in N$, el espacio de Baire. Definamos en $B(m)$ la familia $\{A_x\}_{x\in X}$ cuyos elementos son $A_x = \{\{x_i\}_{i\in N}\in B(m) \mid$ existe $k\in N$ tal que $x_i = x$ si $i \geq k\}$, - para cada $x\in X$; se tiene entonces que cada $A_x$ con $x\in X$ es denso en --- $B(m)$, pues si $\{y_i\}_{i\in N} \in B(m)$, y $D_w(\{y_i\}_{i\in N}) = \{\{z_i\}_{i\in N}\in B(m) \mid z_i=y_i$ si $i\leq w$ con $w\in N\}$ es una vecindad básica arbitraria de $\{y_i\}_{i\in N}$, el elemento $\{z_i\}_{i\in N}\in B(m)$ tal que $z_i=y_i$ si $i\leq w$ y $z_i=x$ si $i>w$ es también elemento de $A_x \cap D_w(\{y_i\}_{i\in N})$.

Sea $M = \bigcup\limits_{x\in X} (\{x\} \times A_x) \subset X \times B(m)$. Definamos la función $f : M \to X$ por $f((x,\{x_i\}_{i\in N})) = x$. Claramente, ya que $f$ puede pensarse como la inclusión de $M$ en $X \times B(m)$ seguida de la proyección en $X$, $f$ es continua; y como para cada $x\in X$, $(x,\{x_i\}_{i\in N})$ con $x_i = x$ para todo $i\in N$ es un elemento de $\{x\} \times A_x \subset M$ tal que $f((x,\{x_i\}_{i\in N})) = x$, $f$ es supra-yectiva. Como $X$ y $B(m)$ son primero-numerables, por la proposición en 37, $X \times B(m)$ es primero numerable, y por la proposición en 12 (a), $M$ es un espacio primero-numerable (pues es subespacio de $X \times B(m)$ ).

Sean $(x,\{x_i\}_{i\in N})$ y $(y,\{y_i\}_{i\in N})$ dos puntos (distintos) de $M$. Existirá entonces (independientemente de que $x=y$ ó $x\neq y$) un índice $k\in N$ tal que $x_k \neq y_k$, de donde, $q(\{x_i\}_{i\in N},\{y_i\}_{i\in N}) \geq 1/k$ (la métrica definida en 0.21); si $U = D_{2k}(\{x_i\}_{i\in N})$ y $V = D_{2k}(\{y_i\}_{i\in N})$, es claro que $U$ es vecindad de $\{x_i\}_{i\in N}$ , que $V$ es vecindad de $\{y_i\}_{i\in N}$ y que $U \cap V = \emptyset$. Se sigue entonces que si $U'$ y $V'$ son vecindades de "x" y "y" respectivamente en $X$, $U' \times U$ y $V' \times V$ son vecindades de $(x,\{x_i\}_{i\in N})$ y de -- $(y,\{y_i\}_{i\in N})$ respectivamente en $X \times B(m)$ tales que $(U' \times U) \cap (V' \times V)$ $\emptyset$ y por tanto, $M$ es de Hausdorff.

Para terminar la demostración, bastará mostrar que $f$ es una función abierta, lo cual es inmediato, pues si $(x,\{x_i\}_{i\in N})$ es cualquier punto de $M$, $U$ es vecindad de $x$ en $X$ y $B_k(\{x_i\}_{i\in N})$ es una vecindad básica arbitraria de $\{x_i\}_{i\in N}$ en $B(m)$, el subconjunto $W$ definido por ----

$W = U \times (B_k(\{x_i\}_{i\in N}) \cap (\bigcup_{x\in X} A_x))$ es una vecindad básica de el punto $(x,\{x_i\}_{i\in N})$, y como $A_z$ es denso para cualquier $z\in X$, existe un punto $(z,\{z_i\}_{i\in N})$ en $(\{z\} \times A_z) \cap W$, lo que implica que $f((z,\{z_i\}_{i\in N}) = z$ $\in f(W)$ para cualquier $z\in X$, y por lo tanto, $f(W) = X$, y $f$ resulta a-bierta.

†

Podemos ahora establecer la importante caracterización de los espacios primero-numerables por medio de los espacios metrizables, de la que se había hablado (en general y no sólo de los $T_0$ como en la proposición en 64):

67.- Teorema. Sea X un espacio topológico. X es primero numerable si y sólo si X es la imagen de un espacio metrizable bajo una función continua y abierta.

Demostración. $\Rightarrow$) Es consecuencia inmediata de las proposiciones en 66 y en 64, pues la composición de funciones continuas y abiertas es claramente una función continua y abierta.

$\Leftarrow$) Es lo que se sustenta en la proposición en 65.

†

Finalmente, se puede ahora deducir las caracterizaciones de los espacios de Fréchet y secuenciales por medio de espacios metrizables y de funciones cociente, de las que se habló al principio de esta sección:

68.- Teorema. Los espacios secuenciales pueden caracterizarse como imágenes de espacios metrizables bajo funciones cociente.

Demostración. Se sigue inmediatamente de los teoremas en 31 y en 67, pues toda función suprayectiva continua y abierta es cociente, y la composición de funciones cociente es de nuevo una función cociente.

†

69.- Teorema. Los espacios de Fréchet pueden caracterizarse como las imágenes de espacios metrizables bajo funciones hereditariamente cociente.

Demostración. Se sigue inmediatamente de los teoremas en 35 y en 67, pues toda función suprayectiva continua y abierta es hereditariamente cociente (lo cual se sigue de la proposición en 32 y del hecho que la función con esas características es cociente), y la composición de funciones hereditariamente cociente es de nuevo una función hereditariamente cociente (lo cual se puede probar facilmente).

†

70.- Nota. Al demostrar el lema en 30, se construyó el espacio primero numerable Y en cuestión como el coproducto de los espacios $X_c = \{c\} \times N$, donde $N = \{0, 1, 1/2, 1/3 \ldots\}$ tiene la topología de subespacio de $\mathbb{R}$, y es por tanto metrizable. Por la proposición en 0.22 se tiene entonces que Y es metrizable, y por el comentario anterior al lema en 61, Y es localmente compacto. De modo que, gracias a estas observaciones, se tendrían también probados los teoremas en 68 y 69 con la hipótesis adicional de la compacidad local, y además, por la construcción en el lema en 30, se tiene explícitamente un ejemplo de espacio metrizable localmente compacto del cual el espacio secuencial o de Fréchet provienen, como imagen cociente o hereditariamente cociente, respectivamente.

# B I B L I O G R A F I A


- Arhangel'skii A.
  Bicompact sets and the topology of spaces.
  Soviet Mathematical Doklady 4 (1963) pp. 561-564.

- Arhangel'skii A.
  Some types of factor mappings and the relation between classes - of topológical spaces.
  Soviet Mathematical Doklady 4 (1963) pp. 1726-1729.

- Arhangel'skii A.
  A characterization of very k-spaces.
  Czechoslovak Mathematical Journal 18 (1968) pp. 392-395.

- Boehme T. K.
  Linear S-spaces. Reprint of a talk presented at the symposium of convergence structures.
  University of Oklahoma, 1965.

- Dugundji James.
  Topology.
  Allyn and Bacon Inc., U.S.A. 1966.

* Engelking Ryszard.
  General Topology.
  Państwowe Wydawnictwo Naukowe (PWN-Polish Scientific Publishers)
  Warszawa, Poland, 1965.

- Franklin S. P.

Spaces in wich sequences suffice.

Fundamenta Mathematicae 57 (1965) pp. 107-115.

- Kamke E.

Theory of Sets.

Dover Publications Inc., New York, 1950.

- Michael E. A.

On representing spaces as images of metrizable and related spaces.

General Topology and its applications 1 (1971) pp. 329-343.

North Holland Publishing Company.

- Ponomarev V.

Axioms of countability and continuous mappings.

Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences. Serie des Sciences

Math., Ast., et Phys. Vol 8 (1960) pp. 127-134.

- Schedler D.

On topologies determined by clustering sequences: a generalization

of sequencial space.

Ph. D. Thesis. The George Washington University, 1971.

- Strong Paul L.

Quotient and pseudo-open images of separable metric spaces.

Proceedings of the American Mathematical Society. Volume 33, Num-

ber 2, June 1972, pp. 582-586.

- Willard S.

Subspaces of non-Frechet sequential spaces.

Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences. Serie des Sciences Math., Ast., et Phys. Vol. 22, No. 8, 1974, pp. 845-846.

† † †

# I N D I C E

† † †