29-7

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GENESIS DEL CONCEPTO DE DEMOSTRACION EN MATEMATICAS Y ALTERNATIVAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRIA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

LUZ MARIA CHAPA AZUELA

MEXICO, D. F., 1984

INDICE GENERAL

Página.

CAPITULO 2

INTRODUCCION GENERAL.

La primera y más eficaz motivación de este trabajo fué el encontrarme -sin buscarla expresamente- con la genialidad de la metemática griega antigua, principalmente a través de los Elementos de Euclides. Esto sucedió durante un curso de Historia de las Matemática -por demás optativo y poco cotizado, a juzgar por el número de alumnos que formábamos el grupo- en el tercer semestre de la carrera. La didáctica del curso exigía preparar y exponer ante el grupo, el origen, demostración y principales comentarios y observaciones hechas a lo largo de la historia, acerca de algunas proposiciones -en su mayoría geométricas- de los Elementos. Esto me ayudó a ir captando cada vez mejor y a familiarizarme con el concepto de demostración en matemáticas, el cual había manejado escasamente en Preparatoria y me estaba resultando un tanto ajeno y difícil en los primeros meses de la carrera. En otras palabras, este contacto con la Geometría Euclídea sirvió como punte natural entre la matemático de "formularios" -que consistía en la aplicación fría de algoritmos- y la matemática deductiva que se imparte a nivel de facultad.

Posteriormente cayó en mis manos un artículo del húngaro Arpad Szabó, aparecido en la revista Scripta Mathemática, que trataba con amplitud el proceso de transformación de la Matemática en una ciencia deductiva y los orígenes de su fundamentación sobre definiciones y axiomas. En dicho artículo, corroboré nuevamente la grandiosidad de la aportación de los matemáticos griegos antiguos. El autor del artículo -y estoy plenamente de acuerdo con él- considera que éste es uno de los capítulos más emocionantes de la historia de las matemáticas; comparable a lo hecho por los griegos en otros terrenos de la ciencia y el arte.

Por otra parte, me adentré en lo que podríamos llamar la siguiente etapa: el surgimiento del método axiomático formal o hipotético-deductivo, a partir de las transformaciones sufridas por el método euclídeo y que dieron lugar a la compreta axiomatización y formalización de la teoría matemática actual. Considero que el estudio de la etapa antes mencionada ayudó en gran parte a captar el desarrollo de esta última etapa de gestación y evolución del método axiomático formal.

Pienso que así como a mí me sucedió, la lectura y profundización de las etapas de la historia de las matemáticas arriba mencionadas, puede hacer mucho bien si se dan a conocer y se difunden convenientemente a los profesores, especialmente a los que se encargan de elaborar los programas les serivía para ayudar al alumno a pasar de la matemática menos axiomática o deductiva a la axiomática propiamente dicha. Por otra parte, los matemáticos la han de conocer por cultura elemental y para ubicar su ciencia (sin extrapolarla en el formalismo puro quedándose en las solas técnicas de matemática aplicada).

Esto se puede considerar una aproximación teórica e hipotética que, sin embargo, podría ser reforzada por la experiencia práctica y fundamentada sobre una teoría pedagóica más profunda.

En el presente trabajo no se pretende más que hacer una selección, traducción y estructuración de textos -especialmente de carácter histórico- relativos al desarrollo en la axiomatización y formalización de la Matemática y una reflexión sobre la misma.

En el primer Capítulo se expone el proceso mediante el cual la matemática se transformó de conocimientos empírico-práctico en ciencia deductiva basada sobre definiciones y axiomas. Dicha transformación tuvo lugar en el periodo llamado "milagro griego", el cual abarca del S. VI al S.III A.C. Analizamos este proceso fijándonos principalmente en el origen histórico de ciertos conceptos más que en su desarrollo formal, tratando de detectar las etapas y obstáculos por los que pasó la comunidad matemática primitiva.

En el segundo Capítulo se estudia -desde un punto de vista más formal- el proceso de axiomatización y formalización por el cual pasó la Matemática en lo general y la Geometría en lo particular. Para ello se analiza con cierta profundidad el trabajo realizado por los griegos (S. VI a S. III A.C.) y, posteriormente, con una mayor generalidad, el proceso realizado en la Matemática hasta nuestra era. Se destaca de manera especial la importancia de la labor hecha por Euclides, tanto en la fundamentación de la Matemática, en especial de la Geometría, como su papel clave en la presentación axiomática de la teoría, aun y cuando fueron precisamente las críticas al aparato euclídeo, las que hicieron, las que hicieron surgir el método axiomático formal.

CAPITULO 1

ORIGEN DE ALGUNOS CONCEPTOS MATEMATICOS

El objetivo de este capítulo es analizar el proceso en el cual el temprano conocimiento práctico-empírico se transformó en una ciencia deductiva. Nos fijaremos principalmente en el origen de ciertos conceptos más que en su desarrollo formal. Seguiremos estas ideas matemáticas a través de la historia para detectar las diferentes etapas y los obstáculos por los que pasó la comunidad matemática primitiva.

Es innegable que esta transformación tuvo lugar en Grecia durante la "Epoca de Oro" que abarca los siglos VI a III A.C. Sin embargo, aún surge la pregunta de cómo y por qué se dió esta transformación. A modo de antecedentes al capítulo se dan los tres tipos de explicación más conocidos a este respecto : la de A. Kolmogorov, la de Van Der Waerden y la de K.V. Fritz.

No obstante las explicaciones citadas han arrojado poca luz sobre el problema. Por esta razón se ha elegido la teoría de Arpad Szabó -presentada en el artículo *La transformación de las matemáticas en una ciencia deductiva y los orígenes de su fundamentación sobre definiciones y axiomas*, aparecido en la revista "Scripta Mathematica" (Vol. XVII, nn. 1 y 2) - que, en principio, es más clara por estar basada en hechos históricos y no en simples conjeturas como las anteriores.

Tomamos esta versión como base para el desarrollo ulterior del Capítulo, añadiendo solamente algunas cosas que ayudan a ilustrar mejor sus ideas. Omitimos lo que no se relacionaba directamente con nuestro propósito .

Antes de entrar en materia, esbozamos los resultados más importantes obtenidos por la Matemática griega primitiva y las investigaciones relacionadas con ella, las cuales hicieron a Szabó concebir su teoría, ya que todas las demostraciones estrictas y precisas que encontramos en este periodo no son posibles sin la aceptación de algún tipo de principio matemático.

Llegados a este punto, procedemos en las dos últimas secciones del Capítulo a estudiar el DESARROLLO HISTORICO DE LA DEMOSTRACION MATEMATICA y el ORIGEN DE LOS PRINCIPIOS MATEMATICOS.

En opinión de Szabó, la demostración matemática griega temprana parece haber sido una simple visualización tanto en Aritmética como en Geometría.

Más tarde, la mera evidencia visible no satisface los requerimientos de la ciencia griega. Surge entonces la tendencia a privar a los teoremas de su carácter ilustrativo y verificarlos con la pura teoría, buscando lograr un mayor grado de generalidad. Esto está estrechamente vinculado con la aparición del método de demostración INDIRECTA.

Szabó opina que este último tipo de demostración ni fue creado por matemáticos ni fueron ellos los primeros en utilizarla, sino que los pitagóricos del sur de Italia la tomaron ya hecha de los filósofos eleáticos, con objeto de demostrar la existencia de los inconmensurables, la cual no podia ser hecha de forma directa.

En resumen, vemos como la transformación de la Matemática en ciencia deductiva está relacionada con la filosofía eleática: la Aritmética como aplicación directa de ésta y la Geometría como una construcción antitética a la filosofía eleática.

1.1 ANTECEDENTES

Uno de los Capítulos más emocionantes, aunque por ahora poco conocido, de la historia de la matemática es el período en el cual el temprano conocimiento práctico-empírico de carácter matemático se transformó en una ciencia sistemática y deductiva, basada en definiciones y axiomas. Sin duda este cambio altamente importante tuvo lugar durante el desarrollo de la cultura griega antigua. En los tiempos anteriores al surgimiento de Grecia, el concepto de ciencia deductiva era desconocido para los pueblos levantinos de la antigüedad, aunque sus conocimientos concretos de carácter matemático habían obtenido un nivel sorprendentemente alto en muchos aspectos[1]. En los documentos con contenido matemático redactados por estos pueblos que han llegado a nosotros no se encuentran ni TEOREMAS ni DEMOSTRACIONES[2]; según todas las apariencias, en este período primitivo del desarrollo de la ciencia, ningún concepto fundamental como TEOREMA, DEMOSTRACION, DEDUCCION, DEFINICION, POSTULADO, AXIOMA, COROLARIO, PORISMA se había formado aún. Bajo la luz de nuestro conocimiento actual sabemos que la matemática anterior a la antigua civilización griega era a lo más una "colección de prescripciones" útiles; los conceptos fundamentales, antes mencionados, hicieron su primera aparición sólo con los matemáticos griegos.

Y aunque es innegable que la matemática por primera vez se convirtió en una ciencia deductiva en la antigua Grecia, no se ha encontrado ninguna respuesta satisfactoria para la pregunta: ¿Cómo y por qué esta transformación particular tuvo lugar?.

Obviamente, la matemática deductiva nació cuando el conocimiento adquirido por la SOLA práctica NO es más aceptado como verdadero. Se requerían consideraciones teóricas de más categoría aún para aquello que la práctica invariablemente corrobora. Las investigaciones históricas han arrojado muy poca luz sobre la pregunta: ¿Cómo se conformó la ciencia deductiva de los griegos, basada en definiciones y axiomas?.

En opinión de Arpad Szabó, esto se manifiesta claramente en las consideraciones relativas al problema hechas en las últimas décadas.

1. El primer y mejor conocido tipo de explicación del desarrollo de la matemática deductiva se puede caracterizar más concisamente con las palabras de A. Kolmogorov[3] :

> "El desarrollo de la matemática en Grecia tomó una dirección esencialmente diferente de la del Este. La reflexión profunda con respecto a técnicas de cálculo, habilidad para resolver problemas algebraicos y desarrollo de la matemática necesaria para la astronomía, fueron alcanzados por los griegos, sobrepasando el nivel de la matemática babilónica aproximadamente en la época del helenismo, la matemática griega alcanzó un nuevo estadio en la evolución de la época. Fueron exigidas demostraciones matemáticas rigurosas; el primer esfuerzo fue hecho en la construcción sistemática de la teoría matemática. En

conformidad, las matemáticas dejaron de ser una ciencia impersonal, como lo fue en Babilonia. Bien conocidos, eran los nombres de algunos matemáticos, quienes escribieron los libros sobre matemáticas y que llegaron a nosotros a través de fragmentos, preservados por comentadores posteriores. Este cambio en el carácter de la matemática debería atribuirse al avanzado desarrollo de dialécticas, el arte de la discusión (arte de razonar metódicamente), en la que uno de los que discute se esfuerza por conseguir del adversario la aceptación de sus tesis. El origen del pensamiento filosófico, independiente de la religión, tuvo lugar por la necesidad de conocer racionalmente los fenómenos naturales, los cuales, a su vez, confrontaban las matemáticas con nuevas tareas".

2. Van Der Waerden explica el nacimiento de la matemática deductiva griega con la siguiente consideración.

"Los griegos tomaron una gran cantidad de conocimiento matemáticos, ya establecidos, de los egipcios y babilonios. Las prescripciones matemáticas orientales de diferentes origenes, con todo, no podían ajustarse siempre. Los babilonios encontraron que el área del círculo es $3r^2$; los egipcios usaron la fórmula $(8/9\ 2r)^2$. Ahora bien, ellos al tener información de reglas diversas de origen empírico, las cuales servían sólo a própositos prácticos, los griegos estuvieron obligados a decidir cual de ellas era más correcta. Así es como ellos debieron llegar gradualmente, a la idea de deducción exacta de demostraciones matemáticas".

3. Un tercer concepto, propuesto por K.V. Fritz[5], compara el desarrollo de la matemática deductiva y su fundamentación sobre definiciones y axiomas con el nacimiento de la lógica aristotélica. El autor señala que la lógica aristotélica se desarrolló a partir del arte de la discusión de la manera siguiente. La discusión entre dos adversarios sigue el patrón: finalmente, A muestra que su afirmación original, la cual fue rechazada por B al inicio de la discusión, es implicada lógica y necesariamente por las premisas aceptada por B como verdadera. Esto es, precisamente, lo que llamamos demostración. Es indudable que este patrón puede aplicarse, en general, a la matemática euclideana[6]. Muchas de las tesis "complicadas" de Euclides pueden reducirse, vía la demostración, a tesis "simples", i.e., a definiciones, postulados, o axiomas. Ya que la matemática es una ciencia DEDUCTIVA precisamente porque DEDUCE toda afirmación (todas sus tesis) de tales premisas; esto es porque REDUCE toda afirmación a las premisas aceptadas. Esta concepción parece convincente hasta un cierto grado sobre todo si nos damos cuenta que llama la atención sobre un hecho sumamente importante. En la discusión, el adversario

que quiere probar algo parte de la afirmación que quiere probar y sólo SUBSECUENTEMENTE trata de encontrar las premisas aceptables para su contrincante que son necesarias para demostrar la validez de su afirmación. No es,de ninguna manera,necesario llegar a la validez de la tesis que se quiere probar por el conocieminto previo de las premisas usadas de hecho para demostrarla. Al contrario,podemos concebir fácilmente que sólo después, cuando uno de los contrincantes trata de probar sus afirmaciones, los adversarios hacen conciencia de sus premisas lógicas. Esto debe haber sucedido con la mayoría de los teoremas de la matemática euclideana. Muchos de estos teoremas debieron ser conocidos,por medio de la práctica,por los pueblos delEste,aunque ellos no los pusieran en la forma de TEOREMAS,cuando los griegos empezaron a buscar tesis "simples" de las cuales deducir las más "complicadas". A pesar de que la matemática como sistema completo es una ciencia sistemática y deductiva, en sus orígenes se trató de conocimiento inductivo o suposiciones basadas en la práctica o en intentos previos[7] .

En opinión de Szabó estas tres explicaciones permancen en la esfera de generalidades abstractas y carecen de concreción. Ninguna está sustentada por datos históricos concretos y, por lo tanto, no pueden llevarse del nivel de mera posibilidad al nivel de conviencente probabilidad histórica.

Szabó no entra en la discusión de estos argumentos sino que hace el intento de aproximarse al problema histórico del desarrollo de la ciencia deductiva y su fundamentación sobre definiciones y axiomas, desde un ángulo diferente.

Antes de exponer dicho intento, esbozaremos en un breve apartado, los resultados más importantes obtenidos por la matemática griega primitiva y las investigaciones relacionadas con ella, las cuales hicieron concebir al autor su teoría.

1.2 MATEMATICA GRIEGA PRE-EUCLIDEANA

Euclides compiló su obra clásica, los trece libros de los ELEMENTOS, alrededor del año 300 A.C. Del tiempo anterior a esta fecha, sólo han llegado hasta nosotros dos obras completas de matemáticas, ambas escritas por un contemporáneo mayor que Euclides, Autolico de Pitane[8] . Fuera de éstos, toda la matemática griega pre-euclideana debe ser reconstruida a partir de fragmentos. Si queremos encontrar algo sobre este período más temprano de la matemática debemos examinar primero las tradiciones históricas de la antigüedad.

La historia más antigua de la matemática griega fue escrita poco antes de Euclides por uno de los discípulos de Aristóteles, Eudemo, en el siglo cuarto A.C. Un pequeño extracto de esta obra perdida ha sido preservada en el famoso "Catálogo de geómetras" de Proclo -S.V D.C.-, concretamente en el comentario al primer libro de Euclides.

A continuación se encuentra un mapa que ubica la antigua Grecia (Elea, Crotona, Siracusa, Mileto y Alejandría). Además un cuadro cronológico del período pre-euclideano. Tanto el mapa como el cuadro, tienen como única función la de dar una perspectiva global, muy general, de esa época.

El ámbito de las matemáticas griegas. Los lugares que guardan relación con las luminarias matemáticas de la antigua Grecia son, de Oeste a Este, Elea (Zenón), Crotona (Pitágoras), Siracusa (Arquímedes), Mileto (Tales) y Alejandría (Euclides, Apolonio e Hipatia).

TABLA CRONOLOGICA.

SIGLO VI A. C.	
TALES (639 - 546)	La tradición que atribuye a Tales algunos descubrimientos matemáticos, nos induce a pensar que el concepto de ángulo era ya conocido desde esa época. La elaboración de ese concepto parece ser una adquisición personal de los griegos.
ANAXIMONES (560 - 528)	La teoría sobre los números pares e impares era bastante conocida.
PITAGORAS (- 510)	
PARMENIDES (no mucho más joven que Pitágoras)	
EPICARMIO (- 500)	

SIGLO V A. C.	
ZENON (discípulo inmediato de Parménides).	Su experiencia con los discos de bronce verifica a posteiori las relaciones numéricas de las consonantes. Se deduce que las experiencias primitivas sobre el concepto de "Diastema", deben ser anteriores.
HIPPASUS DE METAPONTE (discípulo inmediato de Pitágoras).	
CENOPIDE (contemporáneo más viejo de Hipócrates de Chios).	Los tres primeros postulados de Euclides des.
HIPOCRATES DE CHIOS (ejerció en Atenas hacia el año 430 A.C.).	La construcción de la media proporcional era ya conocida en esa época.

SIGLO IV A. C.	
ARQUITAS (contemporáneo de Platón).	Duplicación del cubo.
PLATON (427 - 347)	
EUDOXIO (un poco más joven que Platón).	El libro V de los elementos.
ARISTOTELES (384 - 322)	
EUDEMIO (descípulo de Aristóteles).	Composición de los elementos.
AUTALICO	
EUCLIDES (- 300)	

Las afirmaciones más importantes contenidas en el Catálogo de Geómetras, relacionadas con nuestro propósito son las siguientes[9] :

1. El fundador de la matemática griega, i.e. de la Geometría fue Tales de Mileto quien adquirió su conocimiento en Egipto en el siglo sexto A.C. e introdujo esta disciplina en Grecia. Sobre él leemos "hizo muchos descubrimientos y en otros aspectos mostró a sus sucesores el camino a los principios mediante el planteo de algunas preguntas hechas en forma general y otras expresadas en forma más concreta (= perceptible)".

2. La siguiente afirmación importante en las notas se refiere a Pitágoras quien vivió en el siglo sexto A. C. Pitágoras, leemos, cambió el ejercicio de la Geometría (Filosofía) y le dió una forma que le permitió formar parte de la educación de los ciudadanos libres. Estas palabras de nuestra fuente quieren decir que la geometría, i. e. la matemática, en manos de Pitágoras ya no es más una ciencia práctica sino que se ha transformado en una ciencia teórica. Según la concepción de la antigua sociedad esclavista, la práctica, PRAXIS, no es digna de un hombre libre quien debe ocuparse sólo de la contemplación, TEORIA. Esta afirmación sobre Pitágoras es de gran importancia si observamos que el término griego para TESIS matemáticas es νξωνμα (Teorema). El término νξωνμα en sí mismo significa "contemplación auto-contenida", TEORIA y no práctica. Según las notas, Pitágoras produjo un cambio decisivo en la matemática al investigar sus principios (τα αιχαι αυτης εφοκονμελος) y al examinar sus teoremas por medio del intelecto(γοειως) desliga-

do de las cuestiones concretas (ζνλωζ). Fue Pitágoras, leemos, quien inventó la teoría de los irracionales (o mejor, ¿proporciones?) y quien construyó los cuerpos cósmicos (regulares).

3. También sabemos por los comentarios de Proclo que mucho antes de Euclides se habían escrito obras matemáticas sistemáticas semejantes a los ELEMENTOS. El primer metemático que construyó tal sistema fue Hipócrates de Quios en el siglo quinto A.C.; luego sabemos de León en la primera mitad del siglo cuarto y de Teodocio de Magnesia en la segunda mitad del mismo.

Analizando los datos citados del Catálogo de Geómetras de Proclo, llegamos a las siguientes conclusiones:

1.2.1 Tales, el primer matemático griego conocido por su nombre, sólo "mostró el camino que lleva a los principios a sus sucesores". Parecería que el autor antiguo quisiera enfatizar que Tales sólo PREPARO el camino para el desarrollo de la matemática en ciencia deductiva; la verdadera transición tuvo lugar sólo después, debido al trabajo de Pitágoras.

Los teoremas imputados a Tales, como se puede ver enseguida, son todos verificables empíricamente, y si en verdad Tales hubiera conocido un método deductivo, hubiera podido demostrar otros resultados que no son perceptibles a simple vista (por ejemplo, que la suma de los ángulos de un triángulo rectángulo es igual a dos rectos).

Tales de Mileto fue a Egipto y llevó la Geometria entonces a Grecia. Pero lo que él aprendió en Egipto fue un conjunto de recetas geométricas más que geometría. Pues mientras los egipcios tenían reglas prácticas para medir con más o menos exactitud ciertas áreas tales como cuadrados, triángulos, trapecios y áun círculos, además del contenido sólido de medidas de maíz, de diferentes formas, no hay vestigio de algún intento de dar la prueba de alguna regla; no tenían idea de la Geometría como una ciencia demostrativa.

La Geometría, en este sentido, fue creación de los griegos. Nadie antes de ellos había pensado en probar cosas tales como que los dos ángulos de la base de un triángulo isóceles son iguales; la idea fue una inspiración única en la historia del mundo, y el fruto de ello fue la creación de las matemáticas como una ciencia.

Podemos formarnos una opinión justa de lo que Tales estaba en posición de aprender en Egipto: la fuente de información disponible más importante acerca de las matemáticas egipcias es todavía el Papiro Rhind, escrito probablemente alrededor de 1650 A.C. pero copiado de un original del tiempo de Amenmenemher III (decimosegunda dinastía) quien reinó de 1849 a 1801 A.C. La geometría descrita en esta "guía para cálculos" en un conjunto de mediciones aproximadas. Las más importantes por su grado de aproximación son:

1. Area del rectángulo (producto de los lados).
2. Area del triángulo.
3. Area de un trapecio paralelo.
4. Area de un cuadrilátero de cualquier forma (los triángulos son trata tados como cuadriláteros en donde uno de los lados se hace cero).
5. Medición de círculos (ilustrado en las mediciones de recipientes con bases circulares que son, de hecho, cilindros rectos).
6. Proporciones de pirámides.

Las mediciones del *sequet* (es decir, de la cotangente del ángulo de inclinación de las caras de una pirámide) de las pirámides en el Papiro Rhind, se asocian a sí mismas de una manera natural con la historia del dscubrimiento de un método de Tales, para encontrar la altura de una pirámide.

Las tradiciones acerca de sus matemática, excepto aquellas que consideran su definición de número, se refieren a su geometría, y son las siguientes:

a) Medición de altura de una pirámide.

Tales provocó admiración general al mostrar cómo calcular la altura de una - pirámide por medio de sombras.Hay dos versiones de la anécdota. La más antigua es la de Jerónimo, un discípulo de Aristóteles, quien afirma que Tales - observó la longitud de la sombra de la pirámide en el momento particular en que nuestras sombras son de la misma longitud que nosotros mismos, en ese momento midió la sombra de la pirámide. La versión posterior (de Plutarco dice que clavó una estaca al final de la sombra de la pirámide y habiendo formado así dos triángulos (semejantes) argumentó que la altura de la pirámide es a la altura de la estaca, como la sombra de una es a la sombra de la otra.

El método descrito en la primera versión, llevado al cálculo simple, parece el más probable. Tales quizá observaría que cuando los objetos proyectan una sombra de longitud igual a su propia altura, otros objetos lo hacen también; probablemente se convenciera de ésto por inducción, después de mediciones - reales en un cierto número de casos.

La deducción respecto a la pirámide sería entonces obvia. Pero áun si su método fue el más general, no requería más conocimiento de las propiedades de triángulos semejantes que el que estaba implícito en el uso del sequet por - los egipcios; su solución es de hecho el cálculo del sequet como el del problema 57 del Papiro Rhind, donde dada la base y el sequet, tenemos que calcular la altura. El sequet en el caso de Tales es desde luego, la razón de la longitud de la sombra de la estaca a la de la estaca misma, las cuales se-- rían obtenidas por medición. La única dificultad sería medir o estimar la -- longitud de la sombra de la pirámide, es decir, la distancia del remate de - su sombra, al centro de su base.

b) Teoremas geométricos.

Los siguientes son los teoremas generales de geometría elemental atribuidos a Tales:

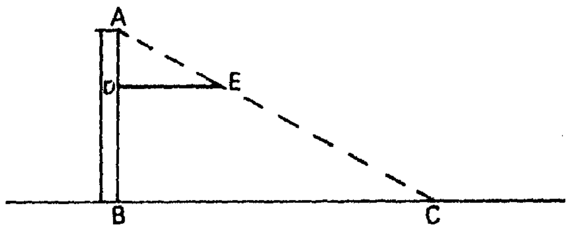
1. Un círculo es bisectado por su diámetro (equivale a Euclides, libro I, definición 17).
2. Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales (equivale a Euclides I.5).
3. Si dos líneas rectas se cortan entre sí, los ángulos opuestos por el vértice son iguales (equivale a Euclides I.15).
4. Si los triángulos tienen dos ángulos iguales a dos ángulos respectivamente, y un lado igual a un lado (a saber aquel adyacente a los ángulos iguales o aquel que subtiende uno de los ángulos iguales), entonces los triángulos son iguales. (equivale a Euclides I.26).

Además,

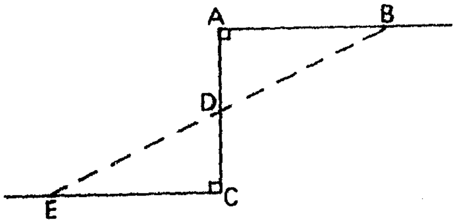
5. Pánfilo afirma que Tales fue el primero en describir en un círculo un triángulo (el cual será) rectángulo, y que sacrificó un buey (por la importancia del descubrimiento). Esto debe significar aparentemente que Tales descubrió que elángulo en un semicírculo es un ángulo recto (equivale a Euclides III.31).

• Se atribuye a Tales haber demostrado 1., pero sólo haber afirmado 2., mientras Eudemo es citado al decir que descubrió 3, pero no lo probó científicamente, y que debía haber conocido 4, porque era necesario para su método de encontrar la distancia de barcos a la costa. El aforismo de que demostró que un círculo es bisectado por su diámetro (un hecho que Euclides establece como definición) no necesita ser tomado tan literalmente. Tales puede haber observado más que probado el hecho, el cual tal vez se lo haya podido sugerir la apariencia de ciertos dibujos, de círculos divididos en sectores por dos, cuatro o seis diámetros, los cuales vería en monumentos de Egipto.

En cuanto a 4, no estamos enterados de cómo Tales medía la distancia de los barcos desde la costa. Varias suposiciones han sido hechas acerca de este método: la primera supone que haya estado en lo alto de una torre, C es el barco y A el ojo del observador verticalmente sobre B, entonces ABC es un triángulo rectángulo. Si un pequeño triángulo rectángulo es construido como ADE tal que AD permanezca sobre AB y AE sobre AC, como ADE es el ángulo recto, los dos triángulos rectángulos son semejantes. En estos triángulos AB es conocido, mientras que AD, DE pueden ser medidos. Entonces como los triángulos son semejantes, $CB : BA = ED : DA$ entonces, si $AD = 1$, $DE = m$ y $AB = h$, se obtiene que BC es $hm/1$. La objeción a esta solución, es que no se adapta a la descripción de Eudermo ya que no depende directamente del teorema I.26 de Euclides.



Tannery favorecía la hipótesis de una solución lineal usada por el agrimensor romano Marco Junio Nipso en su "Fluminis variatio". Para encontrar la distancia de un punto A a un punto B inaccesible, medir a partir de A , una longitud cualquiera AC en una dirección tal que forme ángulo recto con AB. Bisectar AC en un punto D. A partir de C y del lado de AC donde no está B, dibujar CE en ángulo recto con AC, de tal modo que E es el punto que esté en línea recta con B y D. Entonces obviamente por Euclides I.26 , CE = AB y CE puede ser medida, así que AB es conocida. La objeción a esta solución es que por regla general sería difícil conseguir una cantidad suficiente de espacio libre y plano para la construcción y medición de la figura.



La siguiente parece ser la solución más fácil posible, que depende de Euclides I.26. Un observador en lo alto de la torre tenía que usar sólo un rudimentario instrumento consistente en una estaca vertical con una pieza cruzada, fija a ella, pero capaz de girar alrededor del punto fijo (digamos un clavo) tal que pudiera formar cualquier ángulo con la estaca y permaneciera donde fue puesta. Luego se fija la estaca en posición vertical (por medio de una plomada) y se dirige con la vista la pieza cruzada hacia el barco. En seguida, dejando la pieza cruzada en el ángulo así encontrado, girar la estaca manteniéndola vertical, hasta que la pieza cruzada apunte a algún punto acce sible de la costa. Fijando este punto mentalmente sólo tenemos que medir la línea recta trazada al punto desde la base de la torre, la cual por la proposición Euclides I.26, es igual a la distancia del barco.

Parece que éste método es encontrado actualmente en muchas geometrías prácticas del primer siglo de imprenta y ha sido por tanto muy conocido. Hay una anécdota de que uno de los ingenieros de Napoleón ganó el favor imperial por medir rápidamente, de este modo, el ancho de una corriente que obstruía el avance del ejército.

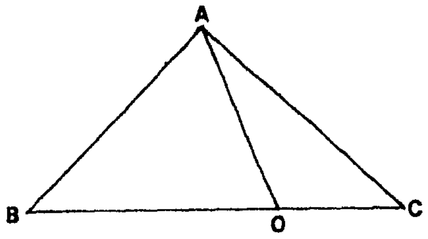
Hay más dificultad acerca de la afirmación de Pánfilo (n. 5) implicando que Tales descubrió primero que el ángulo en su semicírculo es un ángulo recto. El asunto es además confuso por una adición de Diógenes Laercio a la cita de Pánfilo: "otros, sin embargo, incluyendo a Apolodoro el Calculador dicen que fue de Pitágoras". La referencia de Pánfilo a un sacrificio, evidentemente hizo pensar a Diógenes en el dístico de Apolodoro, acerca del sacrificio con el cual Pitágoras celebró el descubrimiento de su famoso teorema, y Diógenes olvidó por el momento que el posterior fue un teorema un tanto distinto. Podemos, por tanto, ignorar la adición de Diógenes a la anécdota.

El dilema es el siguiente:

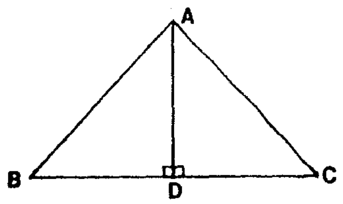
1. Euclides prueba (en III.31) que el ángulo subtendido por un semicírculo es recto por medio de la proposición (I.32) de que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a dos ángulos rectos: la prueba es bien conocida. Pero somos informados de un modo distinto por Proclo en base a la autoridad de Eudermo, que los primeros en descubrir, así como en dar una prueba general del hecho que los ángulos de cualquier triángulo suman dos rectos, fueron los pitagóricos. Es por tanto difícilmente aceptable suponer que Tales usó el método de prueba de Euclides.

Por otro lado:

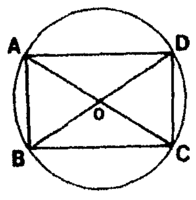
2. Si Tales probó de algún otro modo que el ángulo en un semicírculo es recto, difícilmente podría haber no visto la deducción obvia de que la suma de los ángulos de un triángulo rectángulo es igual a dos rectos. Pues si BAC es un ángulo recto subtendiendo un semicírculo, y A se une con el centro O, tenemos dos triángulos isósceles OAB, OAC y por la proposición de Tales (igual a Euclides I.5), los ángulos de la base en cada uno son iguales, o sea, los ángulos OAB, OBA son iguales y los ángulos OAC, OCA son iguales; por lo tanto, la suma de los ángulos OAB, OAC es igual a la suma de los ángulos OBA, OCA.



Ahora, los ángulos del triángulo ABC suman lo mismo que los ángulos de los dos triángulos ABD y ADC, menos los ángulos ADB y ADC. Estos forman dos rectos; por lo tanto la suma de los ángulos del triángulo ABC es igual a cuatro rectos menos dos rectos, es decir, dos ángulos rectos.



En vista de tales dificultades, parece posible que el argumento de Tales fuera de una clase más primitiva sin hacer suposición acerca de la suma de los ángulos de incluso un triángulo rectángulo. Sin duda, en la infancia de la geometría, toda clase de diagramas se dibujarían, y líneas en ellos, a manera de experimento, para ver si alguna propiedad podía ser detectada por mera inspeccion. Podemos imaginar a Tales dibujando lo que llamamos un rectángulo, una figura con cuatro ángulos rectos y entonces dibujando las dos diagonales como AC, DB en la figura anexa.



La igualdad de los pares de lados opuestos saltaría a la vista, y podría ser verificado por medición. Tales pudo entonces argumentar así: como en los triángulos ADC y BCD, los dos lados AD y DC son iguales a los dos lados BC y CD respectivamente, y los ángulos anteriores (siendo rectos) son iguales, los triángulos son iguales. Por lo tanto, el ángulo ACD (Ed. OCD) es igual al ángulo BCD (o ODC), de donde se sigue (por el inverso de Euclides I.5 concluido por Tales) que OC = OD. Partiendo de la igualdad de BA y CD sería probado del mismo modo que OD = OA. Por lo tanto OA, OD, OC (y OB) son todos iguales y el círculo determinado por O como centró y OA como radio pasa por B, C y D también. Ahora, AOC, siendo una línea recta es un diámetro del círculo y por lo tanto ADC es un semicírculo. El ángulo ADC es un "ángulo que subtiende un semicírculo" y por hipótesis es un ángulo recto. La construcción equivale a circunscribir un círculo al triángulo rectángulo ABC,lo cual parece responder bastante bien la frase de Pánfilo acerca de "describir en un círculo, un triángulo que es rectángulo".

Parece probable que la igualdad de la suma de los ángulos de un triángulo a dos ángulos rectos fue descubierto primero con referencia a un triángulo rectángulo por un argumento elemental del tipo anterior. Un rectángulo sería dibujado y una de sus diagonales insertadas. Sería entonces inmediatamente supuesto que los dos triángulos en los cuales la diagonal divide al rectángulo son exactamente iguales y de aquí que la suma de los ángulos de cada triángulo es igual a la mitad de la suma de los cuatro ángulos del rectángulo, y por lo tanto, a la mitad de cuatro ángulos rectos.

El paso a afirmarlo para cualquier triángulo podría ser hecho como se mostró antes, dividiéndolo en dos triángulos rectángulos.

Es verdad que Gémino dice que los antiguos investigaron cada tipo de triángulo separadamente, primero los equiláteros, después los isósceles, y después los escalenos, mientras los geómetras posteriores probaron la propiedad en general para cualquier triángulo. Pero no necesitamos tomar esto muy en serio. Aristóteles, en los Segundos Analíticos, observa que, si uno debiera probar separadamente para cada clase de triángulo, equilátero, isósceles y escaleno, que sus ángulos suman juntos dos rectos, ya fuera por una prueba o por diferentes pruebas, no sabría todavía que el triángulo en general tiene esa propiedad, excepto en un sentido sofístico, aún si uno supiera que ninguna otra clase de triángulo existe además de las especificadas. Pues uno no lo conoce del triángulo como tal triángulo o, conceptualmente, de un triángulo en general. Puede bien ser que Gémino estuviera errado al tomar como hecho histórico lo que Aristóteles sólo da como una ilustración hipotética.

1.2.2 Pitágoras. La tradición atribuye al mismo Pitágoras la transformación de la matemática en una ciencia deductiva. En efecto, Pitágoras comenzó a examinar las tesis (teoremas) de la matemática, independientemente de consideraciones concretas (ανλωζ), sólo por medio del intelecto (γοεɩωζ) e investigó los principios (ταζ αɩχαζ αυζη) -éste término en griego se refiere tanto a los axiomas como a las definiciones- de la matemática. No puede haber duda en que nuestra fuente se refiere con estas palabras a la transformación de la matemática en una ciencia deductiva.

Aunque puede parecer raro que la tradición antigua atribuya este momento sumamente importante en el desarrollo de la ciencia a la actividad de un solo hombre, vale la pena volver nuestra atención a esta información.

Ciertamente los filólogos desde hace tiempo vienen recordándonos que nuestras fuentes más tempranas no consideran a Pitágoras como filósofo o como matemático. La leyenda antigua relacionada con Pitágoras parece haberse manifestado sólo hasta el siglo cuarto A.C. Platón y Aristóteles mencionan más a menudo a los Pitagóricos que a Pitágoras. Además las invenciones matemáticas atribuidas a Pitágoras datan de antes o de después del siglo sexto A.C. Así resulta comprensible que muchos hayan considerado como leyenda lo que Proclo dijo sobre la relación de Pitágoras con la transformación de la matemática. Sin embargo, las siguientes consideraciones deben prevenirnos contra las conclusiones aventuradas: diversas fuentes antiguas dignas de confianza hablan de los estudios aritméticos de los Pitagóricos del siglo quinto A.C. Aristóteles, por ejemplo, afirma que los Pitagóricos fueron los primeros en tratar la μανημαια[10]. Según Platón, la primera y más importante disciplina de los Pitagóricos -la μανημαια - era su doctrina acerca de los números [11]. También es seguro que en opinión de los Pitagóricos la μανημα era un sistema de teoremas y demostraciones[12]. Investigaciones históricas modernas lograron en parte reconstruir la matemática de los Pitagóricos del siglo quinto A.C. Si ahora comparamos estas matemáticas Pitagóricas reconstruidas con lo que las notas de Proclo dicen sobre Pitágoras mismo, nos sorprendemos al ver que las afirmaciones de la tradición relacionadas con Pitágoras se aplican en todo caso a las matemáticas pitagóricas del siglo quinto. El conocimiento matemático de carácter práctico-empírico se había convertido, en verdad, en este período en teórico y había adquirido un carácter intelectual. Esta matemática trata, en realidad, de encontrar los principios "independientemente de consideraciones concretas, por medio del intelecto". Esto es lo que permitió a K. Reidemeister concluir que los fundadores de la matemática deductiva fueron los Pitagóricos del siglo quinto[13]. Las anotaciones de Proclo parecen aplicar la afirmación moderna sobre los Pitagóricos al Pitágoras legendario cuyo nombre fue usado por la secta. Esto, naturalmente, no explica en modo alguno el nacimiento de la matemática deductiva griega; sin embargo, no está por demás recordar que el Pitágoras legendario de las tradiciones antiguas[14] y los Pitagóricos descubiertos por la ciencia moderna no están muy alejados, el uno de los otros, en su concepciones.

Alrededor de cincuenta años separan a Tales de Pitágoras. Con Pitágoras, la geometría llega a ser por primera vez un tema científico realizado por su propío bien. "Pitágoras -dice el sumario de Proclo- transformó el estudio de la geometría en una educación libre, examinando los principios de la ciencia desde el principio e indagando los teoremas ampliamente y a través de una manera puramente intelectual". Favorino dice que él "usaba definiciones a causa de la naturaleza matemática de la materia". Nosotros concluimos que Pitágoras primero, propuso ciertos principios (incluyendo definiciones) y después construyó - de ahí una sucesión ordenada de proposiciones. "Una figura y una plataforma,no una figura y seis peniques" este era el lema pitagórico que significa que cada nuevo teorema establece una plataforma desde la cual ascender al siguiente y así sucesivamente.

Una autoridad comparativamente temprana, Calimaco (alrededor de 150 A.C.) es - citado por Diodoro por haber dicho que Pitágoras descubrió por sí mismo algunos teoremas geométricos y fue el primero en introducir otros de Egipto a Grecia.

Si Tales en realidad circunscribió un círculo a un triángulo rectángulo, según sugiere la cita de Pánfilo, sería lo más apropiado que los pitagóricos debieran generalizar el problema y mostrar cómo circusncribir un círculo a un triángulo escaleno cualquiera.

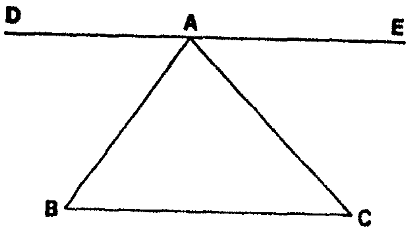
Procederemos a establecer las proposiciones geométricas que son definitivamente atribuidas a los pitagóricso, incluyendo aquellas asociadas con el nombre de Pitágoras mismo.

a) *La suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a dos ángulos rectos.*

Como hemos visto anteriormente, es bastante probable que esto fue primero descubierto con referencia al caso particular de un triángulo rectángulo después del cual, la extensión del teorema a cualquier triágulo sería hecha dividiendo el triángulo (por una perpendicular dibujada de un vértice al lado opuesto),en dos triángulos rectángulos. Todo lo que se ha dicho, sin embargo, es que Eudemo atribuyó el descubrimiento del teorema general a los pitagóricos y dió su prueba de él. Esta prueba, tan elegante como la de Euclides, depende, al igual que la suya, de las propiedades de las paralelas, las cuales deben por tanto - haber sido bien conocidas por los autores de ella.

La prueba es como sigue:

Sea ABC un triángulo cualquiera y por A dibujar DAE paralela a BC. Entonces, como BC y DE son paralelas, los ángulos alternos DAB y ABC son iguales. Por lo tanto la suma de los ángulos ABC y ACB es igual a la suma de los ángulos - DAB y EAC.



Al agregar a cada suma el ángulo BAC, la suma de los tres ángulos ABC, ACB y BAC, o sea, los tres ángulos del triángulo, es igual a la suma de los tres ángulos DAB, BAC y CAE, o sea, dos ángulos rectos.

No necesitamos vacilar en acreditar a los pitagóricos las proposiciones más generales acerca de los ángulos de cualquier polígono, a saber:

1. Que si n es el número de lados o ángulos, los ángulos interiores del polígono suman juntos 2n-4 ángulos rectos, y
2. Que los ángulos exteriores de un polígono(siendo los suplementos de los ángulos interiores respectivamente) suman juntos 4 ángulos rectos.

Las proposiciones son interdependientes y Aristóteles cita dos veces la última. Los pitagóricos también descubrieron que los únicos tres polígonos regulares cuyos ángulos, si son puestos juntos alrededor de un punto común como vértice, llenan todo el espacio (o sea cuatro ángulos rectos alrededor del punto), son el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular. (Se refiere al famoso teorema que afirma: "los únicos polígonos regulares con los que es posible cubrir o tapizar el plano son el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono").

b) *El Teorema de Pitágoras* (equivale a Euclides I.47).

La tradición es unánime al referir a Pitágoras el descubrimiento del teorema del cuadrado sobre la hipotenusa; pero la evidencia documental está lejos de ser concluyente.

Algún conocimiento, sin embargo, de la propiedad de triángulos rectángulos puede encontrarse mucho antes de la época de Pitágoras.

Los egipcios en verdad no parecen haberlo tenido, pues aunque conocían que $3^2 + 4^2 = 5^2$, no hay nada en sus matemáticas hasta donde se sabe, que sugiera que el triángulo (3, 4, 5) es rectángulo[15] .

Por otro lado parecería que fue hecho el uso práctico del teorema del cuadrado sobre la hipotenusa, tan antiguamente como 2 000 años A.C. por los babilonios. La evidencia de ello es el texto de ciertas tablas babilónicas que contienen problemas matemáticos los cuales sólo recientemente han sido interpretados (1928-1929) por O. Neugenbauer, W.Struve y otros.

Dos de los problemas son: calcular la longitud de a). Una cuerda de un círculo a partir de su (*sagitta*) flecha y del diámetro del círculo, y 2). De la (*sagitta*) flecha, a partir de la cuerda y del diámetro. Si c es la cuerda, a su flecha, y d el diámetro del círculo, las fórmulas intentadas a ser usadas son evidentemente:

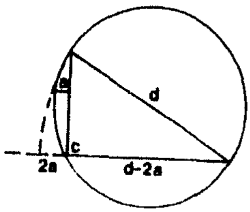
$$c = [d^2 - (d - 2a)^2]^{\frac{1}{2}} \quad y \quad a = \frac{1}{2}(d - d^2 - c^2)$$

y no es oosible explicar estas fórmulas, excepto con la susición de que fueron basadas en un modo u otro en el teorema de Pitágoras. En el caso particular a = 2, c = 12, d = 20 y la propiedad usada,

$$20^2 = 16^2 + 12^2,$$

equivalente a

$$5^2 = 4^2 + 3^2.$$



Además hay quienes dan a los hindúes el crédito del descubriemiento del teorema. La afirmación está principlamente basada en el Apastamba-Sulba-Sutra, del cual se piensa que al menos data del siglo IV o V A.C. Una característica de este trabajo es la construcción de ángulos rectos pro medio de cuerdas estiradas, en las razones de los lados de ciertos triángulos rectángulos en números racionales. Siete de tales triángulos eran usados, los cuales, sin embargo, se reducen a cuatro, a saber: (3, 4, 5) , (5, 12, 13) , (8, 15, 17) y (12, 35, 37).

Uno de estos triángulos (5, 12, 13) fue conocido tan antiguamente como el siglo VIII A.C., mientras que otro más (7, 24, 25) aparece en el Baudhayana S.S., el cual se supone que es más antiguao que el Apastamba.

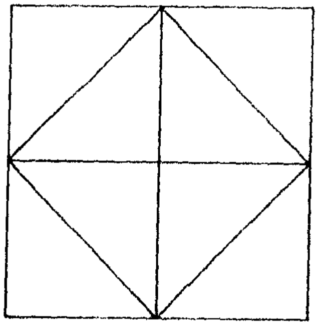
Por lo tanto los hindúes sabían que cinco distintos triángulos en números racionales a, b, c, tales que $a^2 + b^2 = c^2$ son rectángulos.

Conocieron empíricamente la propiedad de los triángulos rectángulos y lo establecieron en general. Pero no dieron indicación de ninguna prueba, sus afirmaciones parecen haber sido el resultado de una inducción imperfecta de un número de casos de triángulos rectángulos en números racionales conocidos por ellos.

Esto está en gran contraste con lo atribuido a Pitágoras, lo cual incluye el descubrimiento de una fórmula general para encontrar un número ilimitado de triángulos rectángulos racionales.

Suponiendo que como dice Vitruvio, Pitágoras empezó con el triángulo (3, 4, 5) el siguiente paso sería buscar otros casos similares.

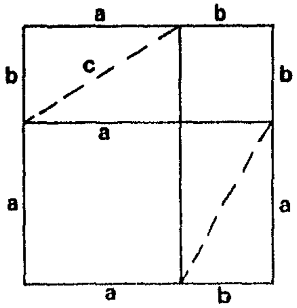
Un experimento puede haber sido hecho con un triángulo rectángulo isósceles, y el solo dibujo de la figura indicaría la propiedad en ese caso. Si los puntos medios de los lados de un cuadrado se unen en el orden del diagrama anexo, tendremos un cuadrado dentro del cuadrado original y obviamente de la mitad del tamaño.

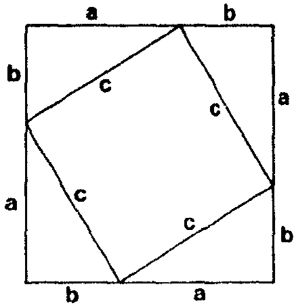


Para sugerir un método posible por el cual el teorema general fue probado primero, tenemos que elegir entre dos diferentes líneas de pueba. Una sería representar los tres cuadrados (los de los catetos y el de la hipotenusa) y mostrar cómo los dos primeros juntos son iguales al segundo, ésta sería la usada en el Libro II de Euclides. La otra sería usando proporciones como el Libro VI de Euclides.

Si se prefiere el primer método, no puede ser hecha mejor sugerencia que la de Bretschneider y Jankel. La primera de las figuras siguientes es como la de Euclides II.4 que representa un cuadrado grande de lado (a + b) y dos cuadrados menores de lados a y b, respectivamente, con los dos rectángulos complementarios (a,b). Dividiendo cada rectángulo complementario en dos triángulos rectangulos iguales dibujando la diagonal c; entonces acomodamos los cuatro triángulos en otro cuadrado de lado (a + b) como se muestra en la segunda figura.

Restando los cuatro triángulos rectángulos (a, b, c) del cuadrado mayor en cafigura, tenemos que nos queda 1). En la primera figura los cuadrados de a y b y 2). En la segunda figura el cuadrado de c. Por lo tanto la suma de los cuadrados de a y de b es igual al cuadrado de c.





La prueba por proporción podría tomar diferentes formas.

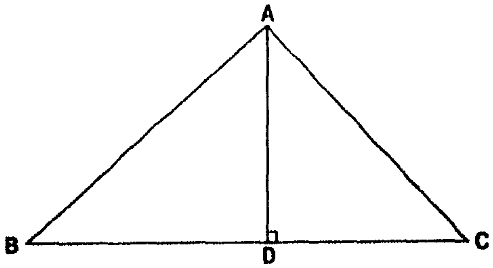
Sea ABC un triángulo rectángulo en A. Dibujar AD perpendicular de A a BC. Entonces los triángulos DBA y DAC son semejantes al triángulo ABC y semejante entre sí. Ahora,(1') se sigue de los teoremas 4 y 17 del Libro VI de Euclides que

$$BA^2 = BD \ BC \quad y$$

$$AC^2 = CD \ BC \quad \text{por tanto,}$$

$$BA^2 + AC^2 = BC \ (BD + CD) = BC^2$$

Alternativamente, (2') se verá que, en los triángulos semejantes DBA, DAC y ABC, los lados de cada uno están en la misma razon.



Así pués, $BA : BD :: BC : BA$

y $AC : CD :: BC : AC$

Reescribiendo estas relaciones (multiplicando los medios y los extremos) tenemos

$$BA^2 = BD \, . \, BC \quad y \quad AC^2 = CD \, . \, BC$$

y , por tanto

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \, .$$

No debe pasarse por alto que la teoría pitagórica de las proporciones fue sólo aplicable a magnitudes conmensurables. Esto no sería obstáculo para el uso de proporciones en tal prueba en tanto que la existencia de los inconmensurables permaneciera oculta.

Pero una vez descubiertos los inconmensurables sería necesario, mientras aparecía una nueva teoría de las proporciones aplicable tanto a magnitudes inconmensurables como conmensurables, inventar nuevas pruebas independientes de las proporciones en vez de las que las usan.

Se observará que la primera de las puebas anteriores muestra que el cuadrado en BC es igual a la suma de los rectángulos, y ésto es precisamente lo que Euclides prueba en su proposición probada por medio de proporciones y por una genialidad dió a la pueba una forma diferente para adaptar la proposición del Libro I, de acuerdo con el arreglo de los Elementos.

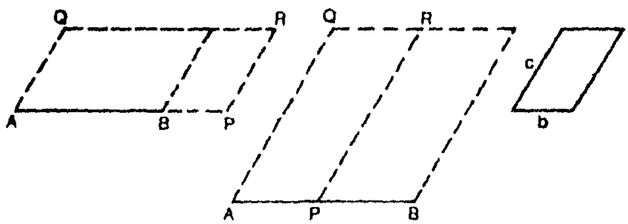
c) *Aplicación de áreas y álgebra geométrica.*

Por carencia de la notación necesaria, los griegos no tuvieron álgebra en el sentido actual. Estuvieron obligados a usar geometría como un sustituto para operaciones algebraicas; el resultado es que una gran parte de su geometría puede ser propiamente llamada "Algebra Geométrica". Uno de los dos métodos principales a su disposición era la "Aplicación de Areas" (el otro era el método de proporciones). Sabemos de él, por la autoridad de Eudemo, citado por Proclo, acerca de que el método de aplicación de áreas, su sobrante y su faltante fue descubrimiento de los pitagóricos. El método es fundamental en la geometría griega, y da la solución geométrica del equivalente de las ecuaciones algebraicas de un grado mayor que dos.

El caso más simple es la aplicación pura y simple como en Euclides I. 44,45; aplicar a una recta dada como base, un paralelogramo conteniendo un ángulo dado e igual en área a un triángulo o figura rectilínea. Esto es equivalente a la operación de encontrar x donde $ax = bc$, es decir, a dividir el producto bc entre a.

El caso general donde el área aplicada se excede o le falta es enunciado así: Aplicar a una recta dada un paralelogramo igual a una figura rectilínea y 1). Exceso o 2) Faltante por un paralelogramo similar a un paralelogramo dado.

En las figuras anexas los paralelogramos AR son aplicados a la recta AB, pero en la primera figura la base AP sobrepasa AB y el paralelogramo excede (al paralelogramo en AB mismo) por el paralelogramo BR: mientras en la segunda figura la base AP queda corta para AB y al paralelogramo AB le falta el paralelogramo BR.



El problema es, dado AB, dibujar la figura tal que el paralelogramo AR sea igual a un área dada (digamos c), mientras el exceso o defecto BR es semejante a un paralelogramo dado. Lo que en efecto debe ser hecho es determinar el tamaño del exceso o defecto BR (su forma está determinada por la figura dada a la cual tenía que ser semejante); es decir, determinar uno de los lados BP, PR de tal modo que, cuando la figura está completa el paralelogramo AR puede ser igual a c.

Sea la razón de BP la misma de b a c (figura anterior), y supóngase que dé BP = x. Sea AB =±a, entonces AP = x y BP/PR = b/c , es decir, PR = c/bx.

Ahora, el área del paralelogramo que se requiere es m.AP.PR que es,

m(A + X) x/bX, donde m es una cierta constante que depende del tamaño del ángulo dado BPR (en realidad el seno de ese ángulo). Entonces la ecuación a resolver es m(a ± X) c/b x = C.

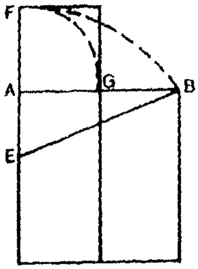
En el caso de defecto, correspondiendo al signo negativo, la posibilidad de una solución está sujeta a una cierta condición. Euclides en realidad prueba la condición necesaria en ese caso y da la solución geométrica de los dos casos (VI.27-9).

Los casos que surgen más comúnmente en la geometría griega son casos más simples, en los cuales el paralelogramo que es aplicado, es un rectángulo y el exceso o defecto es un cuadrado. La ecuación correspondiente es entonces de la forma $(a + x)x = b^2$; para resolver esta ecuación debemos primero, si es necesario, cambiar el signo en todas partes para hacer el término en x^2 positivo, entonces sumar $\frac{1}{4} s^2$ en ambos lados para hacer el lado izquierdo un cuadrado perfecto. Tenemos entonces en el lado derecho $\frac{1}{4} a^2 \pm b^2$ y hacemos ecuación la raiz cuadrada de ésto con el lado del cuadrado perfecto del lado izquierdo. El procedimiento geométrico griego fue el equivalente exacto como vemos, del caso particular resuelto por Euclides en II.11. Tenemos que dividir AB en G tal que AB . BC = BG . Esto es lo mismo que dividir AB por G en proporción áurea, porque si AB . BG = AG^2 , entonces $\frac{AB}{AG} = \frac{AG}{GB}$ lo que significa que AG y GB están en proporción áurea.

Si AB = a , AG = x , ésto es quivalente a:

$$a(a - x) = x^2, \text{ o sea } x^2 + a x = a^2 .$$

Euclides bisecta AD, el lado del cuadrado en AB, en E y úne EB. Entonces después de prolongar EA hasta F, tal que EF = EB, hace Ag igual a AF.



Ahora $EB^2 = \frac{1}{4}a^2 + a^2 = x^2 = a x = \frac{1}{4} a^2 = (x + \frac{1}{2}a)^2$.

Como EF = EB, entonces EF = x + $\frac{1}{2}$a , así que AF = x, lo cual es así encontrado.

Las soluciones de los casos $(a \pm x)x = b^2$ están relacionados con Euclides II.5, 6. Estas proposiciones están en forma de teoremas. Pero supóngase por ejemplo que la figura de II.5, AB = a y BD = x.

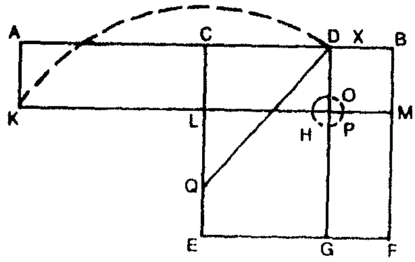
Entonces (a - x) = rectángulo AH

= gnomón NOP

Si entonces el área del gnomón (= b^2 , digamos)está dada, tenemos la ecuación

$$a x^2 - x = b^2, \text{ o sea}$$

$$x^2 - a x = -b^2 .$$



Para resolver esta ecuación, agregamos $\frac{1}{4}a^2$ a ambos lados y hacemos una ---- ecuación con $(\frac{1}{2}a - b)$. Para una solución real, por lo tanto, b no debe - esceder $\frac{1}{2}a$

El equivalente geométrico es este: bisectar AB en C y dibujar CQ en ángulo recto con AB y de longitud igual a b. Después con Q como centro y $\frac{1}{2}a$ como radio, dibujar un círculo. Si $\frac{1}{2}a$ es mayor que b, el círculo cortará CB en algún - punto d.

Por construcción, $CD^2 = QD^2 - QC^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2$; y por la ecuación, esto es igual a $(\frac{1}{2}a - x)^2$. Así, al encontrar D hemos encontrado CD ó $\frac{1}{2}a - x$ y x ó DB, está determinado.

Es importante notar que Apolonio emplea el término "aplicación de áreas" para describir las propiedades fundamentales de las tres cónicas. Estas propiedades son equivalentea a las siguientes ecuaciones cartesianas referidas a ejes, los cuales son, en general oblicuos:

$$y^2 = px \qquad \text{(parábola)}$$

$$y^2 = px + \frac{p}{d(x^2)} \qquad \text{(hipérbola)}$$

$$y^2 = px - \frac{p}{d(x^2)} \qquad \text{(elipse)}$$

en donde d es el diámetro de referencia y p el correspondiente parámetro. Este es el origen de los nombres que fueron aplicados a las tres cónicas por prime vez por Apolonio mismo: parábola = aplicación, hipérbola = exceso, elipse = faltante.

El problema de Euclides II.14 depende de I.44, 45 y es equivalente a la solu-- ción de la ecuación cuadrática para $x^2 = A$, o sea, la extracción de la raíz cuadrada.

Todo el Libro II de Euclides, así como la parte del libro I formado por las proposiciones de la 42 a la última puede decirse que tratan de transformación de áreas(o las sumas o diferencias de áreas) de figuras rectilíneas en áreas equivalentes de diferente forma o composición, por medio de aplicación y el uso del teorema I.47. Una caracteristica del Libro II es el uso de Gnomon, el cual es esencialmente pitagórico. También son pitagóricos los teoremas 9 y 10 del Libro II, que son muy usuales en geometría.

La comparación cuantitativa de áreas pudo haberse hecho por medio de proporciones, el otro método importante empleado en el álgebra geométrica. La razón de un área a otra (o del contenido de una forma sólida al de otra) podría ser expresado como una razón entre líneas rectas y tales razones podrían ser combinadas o por otro lado manipuladas para alguna extensión deseada.

d) *Los irracionales.*

El descubrimiento de los inconmensurables por los pitagóricos estaba destinado a causar una gran sensación, la mayoría de la cual sería ver dudosas muchas de las pruebas pitagóricas de teoremas sobre geometría, que descansaban en su teoría de proporciones. Para evitar este callejón sin salida, era necesario tratar de implementar pruebas en otros lineamientos; pero la geometría sin lugar a dudas sufrió un serio retroceso, hasta el descubrimiento por Eudoxo (408 - 355 A.C.) de la nueva teoría de proporciones aplicable a magnitudes conmensurables e inconmensurables por igual. En el tiempo intermedio la posición fue tan inconveniente que podemos entender un deseo por parte del círculo íntimo de pitagóricos de que el descubrimiento no debería llegar a ser conocido de los profanos. Esto puede tal vez, tomarse como leyenda, que el primer pitágorico que hizo público (haya sido Hippasus u otro) pereció en el mar por su impiedad o, de acuerdo a otra versión, fue desterrado de la comunidad y tuvo una tumba erigida para él, como si estuviera , muerto.

1.2.3 Hipócrates de Quios vivió en Atenas entre los años 450 y 430 A.C. y ganaba su sustento enseñando geometría[16] . Según Proclo, él fue el primero en redactar un texto matemático sistemático, ELEMENTOS. Esta observación no es impugnada por la ciencia moderna por dos razones. Primero, tenemos un informe palabra-por-palabra del siglo cuarto sobre otra obra matemática de Hipócrates, QUADRATURA LUNULARUM[17], y, a juzgar por su conocimiento matemático, podemos creer sin esfuerzo que era capaz de hacer el intento de construir un sistema estrictamente lógico de los conocimientos matemáticos de su época. Aún más, la información obtenida de Proclo está sustentada también por investigaciones recientes. La Historiografía moderna de la matemática, independientemente del informe sobre Hipócrates, ha llegado a la conclusión de que algún tipo de texto matemático sistemático debía existir en una época tan temprana como el siglo quinto A.C. y que el material allí incluído debió haber sido compilado en el Libro VII de los ELEMENTOS de Euclides sin cambios esenciales[18] . El antiguo informe sobre Hipócrates también resulta muy instructivo para noso---

tros, puesto que si él estaba en posibilidad de hacer una recapitulación de la matemática hacia la mitad del siglo quinto, entonces los comienzos de la matemática deductiva deben obviamente situarse en un período anterior, probablemente no posterior a la primera mitad del siglo V A.C.

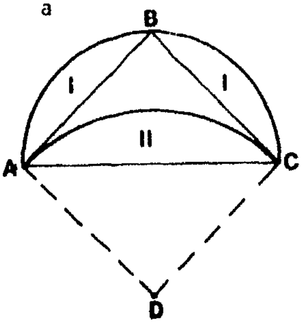
A continuación reproducimos una de las tres partes de las que consta este fragmento:

Se traza una semicircunferencia sobre la diagonal de un cuadrado ABCD [figura (a)] y con centro D y radio AD, un cuadrante desde A hasta C. Tanto las dos áreas sombreadas I y II, son segmentos circulares de 90°, en consecuencia, son semejantes.

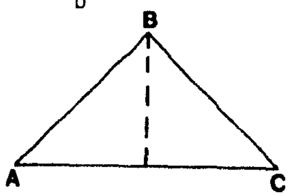
En figuras semejantes, la razón de las áreas es el cuadrado de las razones lineales, así:

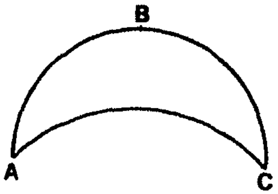
$$\frac{\text{segmento circular I}}{\text{segmento circular II}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \quad \frac{AB^2}{AC^2}$$

a



b





c

Pero esta última razón es $\frac{1}{2}$, puesto que AC es la diagonal de un cuadrado de lado AB.

Por lo tanto, el segmento II es el doble del segmento I, o, lo que es lo mismo, es igual a la suma de los segmentos I.

Si del semicírculo eliminamos ambos segmentos I, o el segmento II, el área remanente será igual en ambos casos, ya que hemos retirado áreas iguales..

En el primer caso, el área remanente corresponde al triángulo ABC [figura (b)], mientras que en el segundo, corresponde a la lúnula ABC [figura (c)]. El trián gulo y la lúnula tienen, en consecuencia, la misma área.

Hasta cierto punto podemos complementar las escasas notas de matemáticas antiguas con las reconstrucciones de la matemática griega pre-euclideana (especialmente la del siglo quinto) que las investigaciones históricas modernas lograron. En relación con lo anterior, debemos mencionar dos artículos: uno debido a O. Becker publicado en 1936 y el otro de B.L. van Waerden publicado en 1947.

O. Becker observó que los últimos dieciséis teoremas (del 21 al 36) del Libro IX de Euclides así como el trigésimo séptimo apéndice del Libro X, relacionado con los anteriores, constituyen, en realidad, sólo un APENDICE a la obra de Euclides, unido, en forma por demás informal, a los ELEMENTOS, ya sea por el autor mismo o por un escriba antiguo[19]. Desde el descubrimiento de O. Becker, este conjunto de diecisiete proposiciones ha sido llamado en la literatura "las enseñanzas pitagóricas sobre el par y el impar". Becker también mostró que estos teoremas se originaron en la mitad o en la primera mitad del siglo quinto A.C. Aunque este período resulta bastante vago, podemos asegurar que este conjunto de teoremas debe ser considerado como las más remotas μάνημα griegas conocidas hasta el momento.

De la misma manera, B.L. van der Waerden logró probar que las primeras treintayséis proposiciones del Libro VII de Euclides habían sido compiladas en un texto matemático de los Pitagóricos antes del año 400 A.C., i.e. en el siglo quinto A.C. y que habían sido tomadas por Euclides sin cambio esencial [20].

Por lo tanto, de la matemática griega del siglo quinto no sólo conocemos un fragmento significativo de las *quadratura lunularum* sino además dos conjuntos coherentes de teoremas; la teoría del par y del impar y las primeras treinayséis proposiciones del Libro VII de los ELEMENTOS de Euclides. Al realizar un análisis completo de estos fragmentos, reconstruidos en parte, de la matemática griega temprana, observamos lo siguiente.

Los requisitos de precisión en las demostraciones de la matemática Pitagórica eran sorprendentemente elevados en una época muy temprana. Por ejemplo, en la teoría del par y del impar, teoremas 21 a 29 del Libro IX de Euclides, los teoremas incluídos son obvios para cualquiera apenas iniciado en la aritmética; sin embargo, estos hechos aparentemente obvios están formulados como teoremas y son probados. De la misma manera, los teoremas 30, 31 y 32 del Libro IX resultan inteligibles sin explicación posterior, y no obstante ellos también son deducidos de hechos básicos. El fragmento de las *quadratura lunularum* prueba teóricamente aún aquellas desigualdades que pueden fácilmente encontrarse examinando cualquier figura.

También encontramos demostraciones cuidadosas similares a lo largo del Libro VII de los Elementos de Euclides[21].

Como estas demostraciones estrictas y precisas difícilmente son posibles sin algún tipo de PRINCIPIOS matemáticos, Arpad Szabó se pregunta: ¿Qué principios matemáticos eran conocidos en la época en que estos conjuntos tempranos de teoremas fueron compilados?.

Llegado este punto se ve claramente que los problamas son, por una parte, el desarrollo histórico de la DEMOSTRACION matemática y, por otra, el origen de los PRINCIPIOS matemáticos. En este mismo orden son tratados por Arpad Szabó.

1.3 DESARROLLO HISTORICO DE LA DEMOSTRACION EN MATEMATICAS Y CONCEPTO DE EVIDENCIA.

1.3.1 La visualización como demostración matemática.

Como se verá en el Capítulo siguiente (cfr. pág. 75) el hecho de que Euclides insista en su sencillo patrón de demostración, muestra que la parte esencial de su disquisición es la DEMOSTRATIO a la cual se refiere enérgicamente en su oración final. No hay duda acerca de lo que Euclides llama DEMOSTRATIO ("exhibición"), la cual se expresa en griego mediante el verbo δεικγνμλ .

Euclides hace uso de lógica estrícta al construir sus demostraciones puesto que en su época la validez de algún teorema matemático se *mostraba* mediante la lógica. Por lo tanto, el verbo δεικγνμλ en Euclides es el término técnico cuyo significado es EXHIBICION LOGICA.

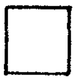
Arpad Szabó se pregunta sobre cómo habían interpretado los griegos la "exhibición" matemática anteriormente. Llega a la conjetura de que para ellos, la demostración matemática era una llana y concreta "visualización".

Su argumento es el siguiente: Sabemos que los griegos eran conscientes del significado antiguo del verbo δεικγνμλ que era "visualizar concrètamente" hasta períodos tan remotos como los de Platón[22] . Por otra parte, es sabido que los Pitágoricos tempranos consideraban la geometría como ίστοριη , i.e. como una ciencia inseparable de la VISION[23] . En la temprana geometría griega empírica ilustrativa, que aún no se había convertido en μανημα y era todavía ίστορίη, las demostraciones probablemente no eran más que simples "visualizaciones". Tenemos la fortuna de poder citar un ejemplo histórico concreto de la ilustración de la demostración por medio de la "visualización" como se practicaba en la geometría griega tamprana.

El ejemplo es el famoso pasaje de Platón, el diálogo de Menón: (al márgen izquierdo ponemos los posibles dibujos sobre la arena):

D I A L O G O.

SOCRATES.- Presta atención: examina si parece recordar o si parece aprender de mí.



MENON.- Prestaré atención a eso.

SOCRATES.- (Al esclavo). Dime, amigo mío: ¿sabes tú que este espacio es cuadrado?-

ESCLAVO.- Sí.

SOCRATES.- ¿Y que en un espacio cuadrado las cuatro lí neas que ves son iguales?.

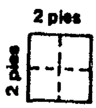
ESCLAVO.- Enteramente.

SOCRATES.- ¿Y que estas líneas que lo cruzan por la mi tad son también iguales?.

ESCLAVO.- Sí.

SOCRATES.- Un espacio de esta clase, ¿puede ser mayor o menor?

ESCLAVO.- Ciertamente.



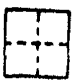
SOCRATES.- Si se dieran a este lado dos pies de longi- tud y a este otro también dos pies, ¿cuál sería la dimensión del todo?. Examina esto: si por este lado hubiera dos pies y por es- te otro uno solo, ¿no es verdad que el espa cio sería de una vez dos pies?.

ESCLAVO.- Sí.

SOCRATES.- ¿Cuántas veces hacen dos veces?

ESCLAVO.- Cuatro, Sócrates.

SOCRATES.- ¿No se podría tener otro espacio doble de éste, pero semejante, y que tuviera también todas sus líneas iguales?



ESCLAVO.- Sí.

SOCRATES.- ¿Cuántos pies tendría?.

ESCLAVO.- Ocho.

SOCRATES.- Pues bien: intenta decirme cuál sería la longitud de cada línea en este nuevo espacio. En ése la línea tiene dos pies, ¿cuántos tendría en el segundo, que sería doble?

ESCLAVO.- Es evidente, Sócrates, que tendría el doble.

SOCRATES.- Tú ves, Menón, que yo no le enseño nada: me limito a preguntarle sobre todo ello. En este momento él cree saber cuál es la longitud del lado que daría lugar a un cuadrado de ocho pies. ¿Opinas tú como yo?

MENON.- Sí.

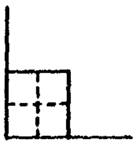
SOCRATES.- ¿Se sigue de ello que él lo sabe?

MENON.- De ninguna manera.

SOCRATES.- El cree que este lado sería doble del anterior, ¿no es así?

MENOS.- Sí.

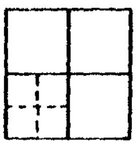
SOCRATES.- Pero mira cómo ahora va a acordarse de ello de una manera correcta. (Al esclavo) Respóndeme: tú dices que una línea doble da lugar a una superficie dos veces más grande, ¿no?. Entiende bien lo que digo. Yo no hablo de una superficie larga por un lado, corta por el otro; busco una superficie como ésta, igual en todos sentidos, pero que tenga una extensión del doble; es decir, de ocho pies. Mira si sigues creyendo aún que ella ha de ser resultado de doblar la línea.



ESCLAVO.- Así lo creo.

SOCRATES.- ¿Esta línea que tú ves, quedará doblada si, partiendo de aquí, le añadimos otra de igual longitud?

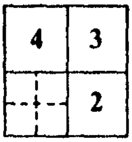
ESCLAVO.- Sin duda.



SOCRATES.- Así, pues, si trazamos cuatro líneas iguales, ¿se construirá la superficie de ocho pies sobre esta nueva línea?

ESCLAVO.- Sí.

SOCRATES.- Tracemos las cuatro líneas según el modelo éste. ¿Es ésta la superficie que tú dices es de ocho pies?



ESCLAVO.- Ciertamente.

SOCRATES.- ¿Acaso en nuestro nuevo espacio no hay estos cuatro, de los que cada uno es igual al primero, al de cuatro pies?

ESCLAVO.- Sí.

SOCRATES.- ¿Cuál es, pues, según esto, la extensión del último? ¿No es cuatro veces mayor?

ESCLAVO.- Necesariamente.

SOCRATES.- ¿Y una cosa cuatro veces mayor que otra,es pues, el doble de ella?

ESCLAVO.- ¡No, por Zeuz!

SOCRATES.- ¿Qué es, entonces?

ESCLAVO.- El cuádruplo.

SOCRATES.- De manera que, doblando la línea, no botienes tú una superficie doble, sino una superficie cuádruple.

ESCLAVO.- Es verdad.

SOCRATES.- Cuatro veces cuatro son dieciséis, ¿no?

ESCLAVO.- Sí.

SOCRATES.- ¿Con qué línea, pues, obtendremos una superficie de ocho pies? Pues ésta nos da una superficie que es cuádruple de la primera, ¿no?.

ESCLAVO.- Sí.

SOCRATES.- Y esta línea cuya longitud es de la mitad nos da una superficie de cuatro pies,¿no?

ESCLAVO.- Sí.

SOCRATES.- Bien. ¿Y acaso la superficie de ocho pies no es el doble de ésta, que tien cuatro pies, y la mitad de la otra, que tiene di dieciséis?

ESCLAVO.- Ciertamente.

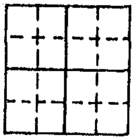
SOCRATES.- Necesitamos, pues, una línea más corta que ésta y más larga que aquella ¿no?.

ESCLAVO.- Así me parece.

SOCRATES.- Muy bien; respóndeme según lo que tú crees. Dime: ¿no tendría nuestra primera línea dos pies y cuatro pies la segunda?.

ESCLAVO.- Sí.

SOCRATES.- Por tanto, para el espacio de ocho pies, ¿necesitamos una línea más larga que ésta, que tiene dos pies, pero más corta que aquélla, que tiene cuatro?.



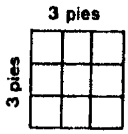
ESCLAVO.- Sí.

SOCRATES.- Intenta decirme qué longitud le das tú.

ESCLAVO.- Tres pies.

SOCRATES.- Para que ella tenga tres pied de longitud no tenemos que añadirle más que la mitad de su longitud, lo cual es aquí dos pies más un pie. Y en la otra también dos pies más un pie. Y obtenemos el cuadrado que tú pedías.

ESCLAVO.- Sí.



SOCRATES.- Ahora: si el espacio tiene tres pies de longitud y tres pies de anchura, ¿no será la superficie de tres veces tres pies?.

ESCLAVO.- Claro que sí.

SOCRATES.- ¿Y cuántos son tres veces tres pies?.

ESCLAVO.- Nueve.

SOCRATES.- Y para que la superficie fuera doble de la primera, ¿cuántos pies debía tener?.

ESCLAVO.- Ocho.

SOCRATES.- Así, pues, la línea de tres pies no es todavía la que nos proporciona la superficie de ocho pies.

ESCLAVO.- Evidente que no.

SOCRATES.- ¿Cuál es ésta?. Intenta decírmelo con exactitud, y si prefieres no tener que hacer cálculos, muéstranosla.

ESCLAVO.- Pero, ¡por Zeuz!, Sócrates, yo no sé nada de todo esto.

SOCRATES.- ¿Ves, Menón, una vez más, qué ha recorrido ya él en el camino de la reminiscencia? Tan en cuenta que, al comienzo, sin saber cuál es el lado del cuadrado de ocho pies, como que por otra parte aún ignora, creía, sin embargo, saberlo y respondía con seguridad, como quien sabe, sin tener ningún sentimiento de la dificultad existente. Actualmente tiene conciencia de sus problemas, y si no sabe, al menos no cree saber.

MENON.- Tienes razón.

SOCRATES.- ¿No supone esto una mejor disposición de espíritu en relación con la cosa que ignoraba?.

MENON.- Convengo igualmente en ello.

SOCRATES.- Embrollándole, pués, y aturdiéndolo como hace el torpedo, ¿le hemos hecho daño?.

MENON.- No me parece así a mí.

SOCRATES.- O mucho me engaño, o le hemos en gran manera ayudado a descubrir en qué lugar se encuentra él en relación con la verdad. Pues ahora, puesto que él ignora, tendrá gusto en investigar; mientras que antes no hubiera vacilado en decir y repetir confiadamente ante gran número de gente que, para doblar un cuadrado, era preciso doblar su lado.

MENON.- Así parece.

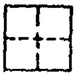
SOCRATES.- ¿Crees tú, pues, que él habria estado dispuesto a investigar y a aprender uuna cosa que él no sabía, pero que creía saber, antes de haberse sentido perplejo por haber llegado a tener conciencia de su ignorancia y de haber concebido el deseo de saber?.

MENON.- No creo fuera así, Sócrates.

SOCRATES.- Por tanto, le ha sido beneficioso haber quedado aturdido, ¿no?.

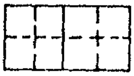
MENON.- Eso creo.

SOCRATES.- Mira ahora todo lo que le va a hacer descubrir esta perplejidad investigando conmigo, sin que yo le enseñe nada; antes bien, sin hacer otra cosa que interrogarle. Vigílame por si me sorprendes dándole lecciones o explicaciones en lugar de llevarle a que nos diga su opinión por medio de mis preguntas. (Dirigiéndose al esclavo). Respóndeme, tú. Tenemos, pues, aquí un espacio de cuatro pies. ¿comprendido?.



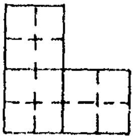
ESCLAVO.- Sí.

SOCRATES.- ¿Podemos añadirle este otro que es igual a él?.



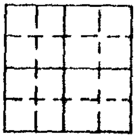
ESCLAVO.- Sí.

SOCRATES.- ¿Y también este tercero igual a cada uno de los dos primeros?.



ESCLAVO.- Sí.

SOCRATES.- ¿Y llenar luego este ángulo que queda vacío?.



ESCLAVO.- Completamente.

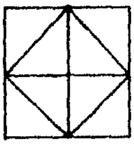
SOCRATES.- ¿No tenemos aquí ahora cuatro espacios o superficies iguales?.

ESCLAVO.- Sí.

SOCRATES.- Y todos juntos, ¿cuántas veces mayores que éste son?.

ESCLAVO.- Cuatro veces.

SOCRATES.- Ahora bien: nosotros estábamos buscando una superficie del doble, ¿te acuerdas?.



ESCLAVO.- Enteramente.

SOCRATES.- Si en cada cuadrado trazamos una línea de un ángulo a otro, ¿no cortará las superficies en dos partes iguales?.

ESCLAVO.- Sí.

SOCRATES.- He aquí, pues, cuatro líneas iguales que encierran un nuevo cuadrado.

ESCLAVO.- Efectivamente.

SOCRATES.- Piensa: ¿cuál es la dimensión de este cuadrado?.

ESCLAVO.- No lo sé.

SOCRATES.- ¿No hemos dicho que en cada uno de estos cuadrados cada una de nuestras líneas ha separado adentro una mitad de ellos? ¿O no es así?.

ESCLAVO.- Sí.

SOCRATES.- ¿Y cuántas mitades de éstas hay en el cuadrado del centro?.

ESCLAVO.- Cuatro.

SOCRATES.- ¿Y en éste?.

ESCLAVO.- Dos.

SOCRATES.- ¿Y qué es cuatro respecto a dos?

ESCLAVO.- Es el doble.

SOCRATES.- ¿Cuántos pies tiene, entonces, este cuadrado?.

ESCLAVO.- Ocho.

SOCRATES.- ¿Y sobre qué línea se ha construido?.

ESCLAVO.- Sobre ésta.

SOCRATES.- ¿Sobre la línea que va de un ángulo a otro en el cuadrado de cuatro pies?.

ESCLAVO.- Sí.

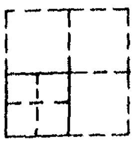
SOCRATES.- Esta línea es lo que los sofistas llaman diagonal. Supuesto que éste es su nombre, la diagonal es, según tú, esclavo de Menón, lo que da lugar a la superficie del doble.

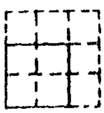
ESCLAVO.- Así es, en efecto, Sócrates.

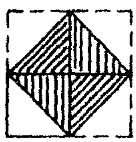
SOCRATES.- ¿Qué opinas de esto, Menón?. ¿Ha expresado él una sola opinión que no haya deducido por sí mismo?.

MENON.- Ninguna; lo ha sacado todo de su propio haber.

Este pasaje muestra la importancia del papel jugado por la VISUALIZACION CONCRETA, por LA ILUSTRACION MEDIANTE EL DIBUJO en el diálogo. El que los dos primeros intentos sean fallidos y el tercero lleve al resultado correcto es establecido por la posibilidad de demostrar si una afirmación es correcta o incorrecta empíricamente, visualmente por medio del dibujo.







Intentos fallidos

Respuesta correcta

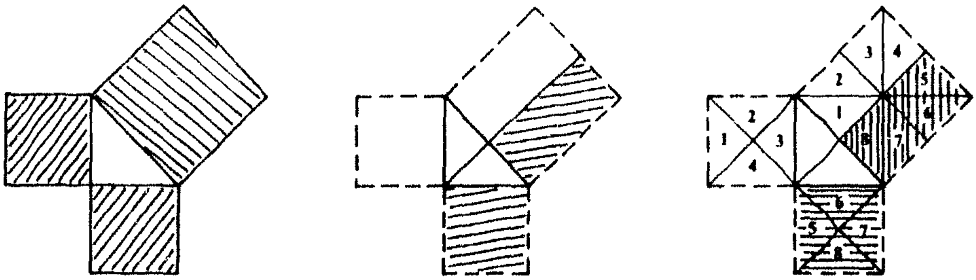
Sócrates mismo dice una vez en el transcurso del diálogo; dígame con exactitud (la longitud del lado que se pide) o si no quiere expresarlo mediante números, MUESTREME LA LONGITUD EN CUESTION SOBRE EL DIBUJO[24] . Recordemos que el objetivo de Platón al citar este ejemplo clásico era ilustrar el carácter A PRIORI del conocimiento matemático [25]. La VISUALIZACION concreta por medio del dibujo, permite a Sócrates mostrar a su auditorio que no ha enseñado nada nuevo al esclavo, que sólo le ha "recordado" el conocimiento olvidado mediante sus preguntas.

Este pasaje del Menón nos transmite, vívidamente, que en tiempo de Platón la enseñanza de la geometría había sido reconocida de tiempo antes [26]. Además pienso que este pasaje también nos ilustra con efectividad sobre el método y la técnica de demostración utilizada en la geometría griega antigua, cuando ésta era aún ιστορίν y no μαθημα .

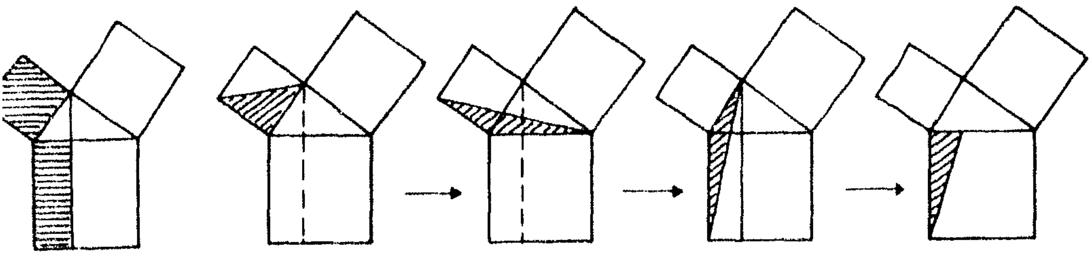
Szabó apoya esta afirmación con los puntos siguientes:

1. Probablmente los griegos demostraban originalmente el teorema general del llamado Teorema de Pitágoras por el mismo método de visualización usado por Sócrates. Es claro que la aseveración demostrada por Sócrates por medios ilustrativos -que el área de un cuadrado construido sobre la diagonal de algún o otro cuadrado, es del doble que la del último- es, de hecho, un caso particular del teorema de Pitágoras. La diagonal del cuadrado más pequeño es en realidad la hipotenusa de un triángulo isósceles.

También empíricamente podemos visualizar la división del cuadrado mayor en dos rectángulos al prolongar la otra diagonal del cuadrado pequeño y cómo cada rectángulo es igual al área de los cuadrados construidos sobre los catetos.



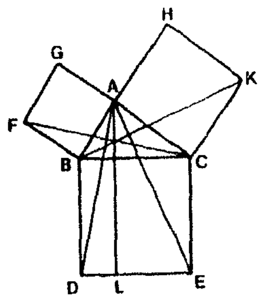
Para triángulos rectángulos no isósceles el teorema general de Pitágoras sigue siendo válido. Giremos una de las figuras anteriores para compararla con la figura que aparece en los Elementos de Euclides (proposición I.47).



Veremos cómo la demostración del teorema de Pitágoras dada en los Elementos, utiliza *en parte* el método de demostració por visualización.

Proposicion I.47: En los triángulos rectangulos, el cuadrado sobre el lado que subtiende el ángulo recto,es igual a los cuadrados sobre los lados que contienen el ángulo recto.

Sea ABC un triángulo rectángulo con el ángulo BAC recto; Decimos que el cuadrado sobre BC es igual a los cuadrados sobre BA, AC.
Trácese sobre BC el cuadrado BDEC, y sobre BA y AC los cuadrados GB y HC; (I.46).
A través de A dibújese AL paralelo a BD o CE, y únanse AD y FC.



Entonces, como los ángulos BAC y BAG son rectos, se sigue que con una recta AB, y en el punto A sobre ésta, las dos rectas AC y AG que no caen en el mismo lado, forman los ángulos adyacentes iguales a dos ángulos rectos;
Por lo tanto, CA está en una misma recta con AG (I.14).
Por la misma razón BA está también sobre una recta con AH.
Y, como el ángulo DBC es igual al ángulo FBA: por ser rectos:
sea añadido el ángulo ABC a cada uno;
por lo tanto todo el ángulo DBA es igual a todo el ángulo FBC (N. C. 2).
Y. como DB es igual a BC, y FB a BA,
los dos lados AB y BD son iguales a los dos lados FB y BC, respectivamente,
y el ángulo ABD es igual al ángulo FBC;
por lo tanto la base AD es igual a la base FC,
y el triángulo ABD es igual al triángulo FBC (I.4).
Ahora, el paralelogramo BL es doble del triángulo ABD,
porque tienen la misma base BD y están en las mismas paralelas BD y AL (I.41).
Y el cuadrado GB es doble del triángulo FBC,
porque tienen la misma base FB y están en las mismas paralelas FB y GC (I.41).
(Pero los dobles de iguales son iguales entre sí).
Por lo tanto el paralelogramo BL es también igual al cuadrado GB.
Similarmente, si AE y BK son unidas,
el paralelogramo CL puede también probarse que es igual al cuadrado HC;
por lo tanto todo el cuadrado BDEC es igual a los dos cuadrados GB y HC (N.C. 2).

Y el cuadrado BDEC es descrito sobre BC, y los cuadrados GB, HC sobre BA y AC. Por lo tanto el cuadrado sobre el lado BC es igual a los cuadrados sobre los lados BA, AC.
Por lo tanto, etc. l.q.q.d.

El carácter ilustrativo es sobresaliente en el caso de las proposiciones II.4, 5, 6 y 7 de los Elementos de Euclides.

2. Otro importante argumento en favor de la hipótesis de que en la antigua geometría griega las demostraciones se hacían por simple visualización puede ser sacado de la antigua tradición. Con respecto a la definición I.17 de los Elementos de Euclides, Proclo escribe: "Se dice que Tales fue el primero en demostrar que el diámetro divide el área de un círculo en dos partes iguales". Se afirma que Proclo hizo un mal uso de la palabra "probar" y que el método de superposición de áreas debió de aplicarse más frecuentemente de lo que aparece en el texto de Euclides.Siguiendo a K.V. Fritz, se supone que Tales demostró sus teoremas por simple visualización. (ver proposiciones atribuidas a Tales).

3. Los puntos 1 y 2 tratan de aclarar la idea de demostración por visualización en los inicios de la geometría. O. Becker afirma que los teoremas concernientes a números pares e impares, fueron originalmente deducidos con la ayuda de ábacos. Los números pares fueron representados por bolitas, la mitad blancas y la otra mitad negras. Los números impares pueden ser representados añadiendo una bolita blanca o negra a la representación de un número par, o quitando una de ellas. El teorema, por ejemplo, que dice así: "La suma de números pares es siempre par" (Proposición IX.21 de los Elementos), puede ser ilustrado de la siguiente manera:

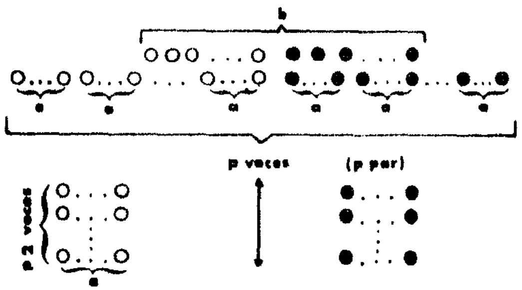
Sean a, b, c y d números pares arbitarios y e su suma.

Entonces, si a = 4, b = 6, c = 10, d = 2 y e = 22, es decir:

1. OO●● OOO●●● OOOOO●●●●● O●
2. OO●● OOO●●● OOOOO●●●●● O●
3. OOOOOOOOOOO●●●●●●●●●●●

La primera línea muestra solamente los números pares; en la segunda, los encontraremos sumados y colocados sin espacio intermedio; en la tercera, las bolitas son puestas en primer lugar y enseguida las negras, de acuerdo al principio de conmutatividad, para comprobar que la suma contiene igual número de bolitas blancas que negras, como se afirmaba en el teorema por demostrar.

De igual modo, el simple método de visualización puede ser usado para "demostrar" otros teoremas concernientes a números pares e impares, por ejemplo, la proposición IX.30 de Euclides: "Si un número impar es el divisor de un número par, entonces el número impar es también divisor de la mitad del número par previo" [27].



CONCLUSION; La demostración matemática griega temprana parece haber sido, originalmente, simple visualización tanto en geometría como en aritmética.

1.3.2 LA TENDENCIA ANTI-ILUSTRATIVA Y ANTI-EMPIRICA DE LA CIENCIA ANTIGUA.

Como se mostró en el apartado anterior, la simple evidencia visible jugó un papel importante en los incios de la ciencia griega. Esto fue señalado -entre otros- por K.V. Fritz, quien también puntualizó que en épocas posteriores la mera evidencia visible no satisfacía los requerimientos de la ciencia griega. Al contrario, los griegos se empeñaron en excluir tanto como fuera posible los elementos empírico-ilustrativos de su ciencia. Euclides, por ejemplo, rara vez usó el método de superposición; y, aunque incluyó en la definición 17 del Libro I el viejo teorema de Tales ("el diámetro bisecta al círculo"), descuidó el ocuparse de ella.

En otras ocasiones en las cuales no era posible evitar el uso de este método, Euclides trató de dar a sus operaciones por lo menos una fundamentación axiomá tica; y, tanto como le fue posible evitar el uso de este método, Euclides trató de borrar los rasgos empíricos-demostrativos de este método[28] . Esta tendencia "anti-ilustrativa" y "anti-empírica" de la ciencia griega, señalada, correctamente, por K.V. Fritz puede, en realidad, demostrarse mediante datos adicionales. Sólo tenemos que deshacernos del prejuicio de que "el rasgo característico de la matemática griega era su carácter ilustrativo". Otros autores también han insistido sobre lo incorrecto de esta concepción[29] ; más aún en la sección anterior hemos insistido que aún aquellas demostraciones en Euclides que pueden fácilmente hacerse ilustrativas, a partir de Euclides mismo, dejan de ser ilustrativas en el verdadero sentido del término. Antes de estudiar este carácter anti-ilustrativo en un ejemplo concreto, llamaremos la atención sobre el hecho de que esta tendencia particular de la matemática griega había prevalecido largo tiempo antes de Euclides. Ya,cerca de la mitad del siglo quinto A.C., Hipócrates de Quios en su QUADRATURA LUNULARUM, tuvo cuidado de probar teóricamente aún desigualdades que podrían haberse hecho obvias mediante ilustración[29]. Esta observación muestra que Hipócrates ya no confiaba en la evidencia de la simple visualización y, obviamente, a causa de ésto trató de probar teóricamente todas sus afirmaciones.

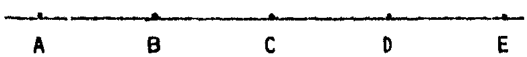
En realidad la idea no era sólo de apoyar la certeza adquirida mediante la ilustración con la certeza de la teoría. La tendencia anti-ilustrativa en la matemática griega, al menos en sus inicios, iba mucho más lejos. La tendencia era de PRIVAR aún a los teoremas obviamente ilustrativos de su carácter ilustrativo y verificar si son correctos con teoría pura sin usar métodos ilustrativos. Para apoyar lo anterior, investiguemos con cuidado las demostraciones de los primeros teoremas del antiguo cuerpo de teoremas aritméticos, tal como son presentados en el texto de Euclides. A continuación enunciamos los teoremas que analizaremos:

<u>Proposición IX.21</u>: "La suma de números pares es par".

<u>Proposición IX.22</u>: "La suma de una multitud par de números impares es par".

La demostración del teorema 21 comienza ilustrando la afirmación con un ejemplo considerado "concreto".

"sean AB, BC, CD y DE números pares arbitrarios; afirmo que su suma, AE, también es un número par. Como Euclides denota cada número par por dos letras (AB, BC, etc.) y su suma por AE muestra que veía estos números como *segmentos de recta*, y su suma como la suma de segmentos de recta así:



La demostración que sigue a la explicación anterior dice: "Como AB,CD, DE son números pares, tienen, cada uno, una parte que es su mitad, por lo tanto la suma AB tiene una parte que es su mitad. Los números pares son aquellos que tienen mitad. Luego AE es par QUO DERAT DEMONSTRATUM".

Szabó se pregunta ¿qué tiene en común esta demostración con la VISUALIZACION que explicamos en el apartado anterior refereida al mismo teorema?.

En realidad si representamos los números pares que aparecen en la demostración (AB, BC, etc.) mediante bolitas blancas y negras, podemos efectivamente *ver* que estas bolitas representan números pares.

Pero ¿de qué manera esta característica se hace obvia mediante la representación por segmentos de recta, usados por Euclides?. Las mismas secciones denotadas por las mismas letras representan números impares en el teorema siguiente (IX.22).

<u>Proposición IX.22:</u> Si se suma un número par de números impares, el conjunto es par.

Si de cada número se resta una unidad quedan números pares, cuyo conjunto es par, y como el conjunto de las unidades restados es también par, entonces, si este conjunto se junta con el otro resulta un número par, l.q.q.d.

Es claro que la diferencia entre números pares e impares de ninguna manera pueda bisectarse y, sin embargo, sólo los números pares pueden serlo. Y, en el espíritu de la aritmética griega, ni siquiera la UNIDAD puede ser representada como una sección de recta ya que la unidad es INDIVISIBLE[31] mientras que la sección es, siempre, divisible. Euclides tampoco se esmera en visualizar la transformación del teorema IX.22, por ejemplo, leemos: "Restemos una unidad de cada uno de los números impares, AB, BC, CD, DE y obtenemos numeros pares". Este es sólo una afirmación verbal dentro de la demostración y nada se hace para ilustrarlo en los arriba mencionados segmentos de recta.

Es claro que el método concreto de visualización mediante bolitas es en realidad más ilustrativo que el método de Euclides que acabamos de ver. De ninguna manera podemos pensar que Euclides fue ilustrativo en este caso. También es obvio que el carácter ilustrativo de la demostración antes tratada ha sido eliminado al sustituir las bolitas por segmentos de recta. Tampoco hay duda que cuando esta sustitución se realizó, se abrió una nueva era en la historia de la aritmética.

En este momento sólo se pueden dar respuestas aproximadas a la cuestión de por qué se reemplazó la antigua representación de los números mediante bolitas por la representación mediante segmentos de recta. Tampoco se sabe con precisión cuándo sucedió este cambio.

Obviamente, usando bolitas sólo podemos representar algunos números pares o impares concretos, digamos SEIS, SIETE, etc., pero no podemos dar una ilustración de un número par o impar EN GENERAL. Un segmento de recta, por otra parte, puede ser siempre el símbolo para un número arbitrario. Esto significa que la nueva manera de representar a los números pudo haber sido ideada -entre otras razones- con el objetivo de lograr un mayor grado de generalidad.

Euclides al tomar segmentos como representación de números pares o impares, en general, deja a un lado el problema anterior, pero como hemos visto, se metió en otro de suma importancia. Por otro lado, en relación a ganar en generalidad en la representación de los números vemos que esto es relativo, ya que aún y cuando Euclides trata de borrar los rasgos ilustrativos y las demostraciones por visualización para representar, por ejemplo, en la proposición IX.21, cualquier cantidad de números pares, utiliza <u>cuatro</u> segmentos.

El cambio de representación de los números en la aritmética tuvo lugar, sin duda alguna, a más tardar en el siglo V A.C., ya que el mismo método de representación se encuentra en un fragmento de Arquitas [32].

Resumiendo lo expuesto, podemos afirmar: La tendencia que requería más que mera evidencia ilustrativa en la ciencia griega nació en el siglo quinto A.C. El caracter <u>anti</u>-ilustrativo de esta tendencia se hace evidente en las demostraciones de los teoremas acerca de los números pares e impares conservados por Euclides. En estas demostraciones los números son representados por segmentos de recta, aunque este método no sólo muestra sino que oculta la diferencia entre los números pares e impares, diferencia que puede fácilmente hacerse evidente mediante el antiguo método de representación -las bolitas- para contar. Las preguntas sobre el por qué esta tendencia anti-ilustrativa y su relación con el desarrollo de la ciencia deductiva griega NO HAN SIDO, por el momento, RESPONDIDAS.

1.3.3 LA DEMOSTRACION INDIRECTA.

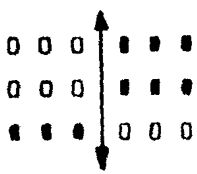
Al estudiar cuidadosamente el cuerpo de teoremas que hoy sabemos formaban parte de la aritmética Pitagórica más antigua -tanto los teoremas que hemos mencionado con frecuencia sobre los números pares e impares, como las primeras treinta y seis proposiciones del Libro VII de los Elementos- puede parecernos sorprendente con cuanta frecuencia nos encontramos con la llamada FORMA DE DEMOSTRACION INDIRECTA en las pruebas de los teoremas. La teoría de los números pares y de los impares está conformada por diecisiete teoremas de los cuales SEIS se demuestran por el método indirecto.

El uso bastante frecuente de la demostración indirecta en la matemática griega antigua puede hacer surgir la sospecha de que FUE DEBIDO AL USO DE LA DEMOSTRACION INDIRECTA QUE LA MATEMATICA SE CONVIRTIO EN UNA CIENCIA SISTEMATICA Y DEDUCTIVA. Aún hoy día, los matemáticos, entre sus consejos heurísticos, son propensos a sugerir el método indirecto a los principiantes.[33]

Supongamos que el desarrollo de la ciencia deductiva está relacionado con el uso de la forma de demostración indirecta -y el uso frecuente de esta forma de demostrar parece apoyar la afirmación anterior- y hagamos un análisis cuidadoso de cómo una demostración por simple visualización puede transformarse en una demostración indirecta en aritmética. La transformación del método de demostración puede verse claramente en relación con el teorema 30, IX de Euclides:

> "Si un número impar divide a un número par entonces el mismo número impar divide a la mitad del número par"

Antes de examinar cómo se prueba este teorema indirectamente, veamos cómo se puede ilustrar la afirmación anterior, i.e. cómo podemos visualizar que es correcto por medio de la ψηφοφορια [34]. Sea 18 el número par concreto en cuestión; un divisor impar del mismo es 3. El teorema anterior nos dice que 3 no sólo es divisor de 18 sino que también lo es de su mitad (18/2 = 9). Este hecho debe poderse ilustrar de una manera o de otra. El 18, del cual 3 es divisor, también puede concebirse como el producto de dos números: 3 x 6 = 18. Ahora el producto de dos números puede representarse "geométricamente" por medio de un "área", puesto que el área es el producto de dos factores -el "largo" y el "ancho". Entonces el 18 puede representarse mediante la ψηφοφορια como 3 x 6 como sigue:



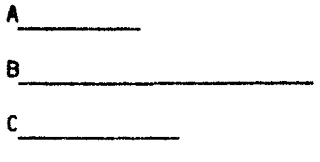
El "área" total representa el número 18. Las 3 bolitas en cada una de las columnas muestran al divisor impar (3) del número par (18). Si dividimos el "área" total por una recta vertical en dos partes iguales, podemos ver inmediatamente que el número tres es efectivamente un divisor de ambas mitades; la única diferencia entre las dos mitades es que en la mitad de la izquierda el impar 3 se representa en la columna mediante dos bolitas negras y una blanca, mientras que en la mitad de la derecha el mismo divisor se representa mediante dos bolitas blancas y una negra. Por lo tanto el teorema de que el impar 3 no sólo divide al par 18 sino también divide a su mitad 9 es cierto. Es, entonces, obvio que el teorema puede fácilmente representarse mediante un ejemplo concreto, i.e., demostrarse si nos contentamos con la evidencia de la viasualización concreta.

Sin embargo, el autor de la demostración conservada en los Elementos ya no quedaba satisfecho con tal ilustración concreta; el pretendía "mostrar" la validez general de la afirmación en todo caso posible. Es por esto que se escogió símbolos abstractos generales A y B en lugar de números concretos (3 y 18). (Más aún "representó" los números abstractos escogidos mediante segmentos de recta, los cuales no ilustraban nada en la demostración). Su argumento era el siguiente: si el número impar A (=3) es divisor de un número par B (=18), A es divisor de la mitad de B (=9) sólo si B es el producto de un número impar (3) y otro NUMERO PAR (6). La figura efectivamente muestra que las columnas contienen representaciones de números impares y las filas aquellas de números pares. Así debe suceder siempre que un número impar divida a un número par; puesto que, de no ser así, el "área" (el número "entero" representado) sería un número impar[35], lo cual es contrario a las hipótesis del teorema. Lo que puede demostrarse, entonces, es que en las condiciones dadas los números representados por las filas SOLO PUEDEN SER PARES, y una vez que esto se ha probado, el teorema se sigue fácilmente.

La secuencia de la demostración indirecta preservada en Euclides, es la siguiente:

<u>Proposición IX.30:</u> Si un número impar es divisor de un número par, será también divisor de la mitad de éste.

Sea el número impar A divisor del número par B;
decimos que también será divisor de la mitad de él.
Como A es divisor de B,
divídalo de acuerdo con C;
decimos que C no es impar.
Supongamos que C es impar.
Entonces, como A divide a B
de acuerdo con C,
por lo tanto A multiplicado por C dió B.



Por lo tanto B es el resultado de multiplicar número impares, cuyo conjunto es

impar.
Por lo tanto B es impar: lo cual es absurdo, ya que, por hipótesis, es par [IX.23]
Por lo tanto C no es impar; con lo cual, C es par.
Entonces A divide a B un número par de veces.
Por esta razón también divide la mitad de éste. l.q.q.d.

Los siguientes rasgos característicos de la demostración indirecta en matemáticas pudieron aclararse mediante los ejemplos anteriores:

a.- Esta forma de demostración muestra un tipo singular de IMPOSIBILIDAD, la ασυνατογ o ατοχον griegas.

b.- El teorema mismo no se puede sino que su contrario se refuta.
Nosotros queríamos probar que el núemro F es PAR; pero, en lugar de haber visualizado en forma concreta esta afirmación o de haberlo reducido a su premisa de manera (lógica) directa, lo que probamos es que la negación de esta a-firmación es falsa, ατονο .Por lo tanto, para demostrar indirectamente alguna afirmación, debemos formular primero su negación y proceder entonces a mostrar lo absurdo de tal negación. Euclides, generalmente introduce esta última mediante la frase estereotipada: ει γαρ σνυατον ενιω .

c.- También es interesante observar cómo se vé que una afirmación es falsa en el curso de una demostración indirecta. Luego de haber formulado una afirmación contraria al teorema a demostrar, inferimos consecuencias de esta última. Una consecuencia que obtuvimos en el análisis anterior de nuestra hipótesis -que el cociente es un número impar- (hipótesis cuya falsedad debemos probar), era que el dividendo también debe ser un número impar. Esta última afirmación, sin embargo, es una CONTRADICCION obvia puesto que nuestro punto de partida era que el DIVIDENDO ES UN NUMERO PAR. Las dos afirmaciones -el punto de partida y la conclusión a la cual llegamos- som inconsistentes a menos que digamos que: "el dividendo es, al mismo tiempo, un número par y un número impar". Esta AUTO-CONTRADICCION muestra que la afirmación de la cual se infiere la contradicción es errónea. Por lo tanto, la imposibilidad (ασνυατο γ) mostrada por la demostración indirecta es, en realidad, una AUTO-CONTRADICCION.

El asunto ahora es: ¿Por qué los griegos del siglo V A.C. sustituyeron en la matemática la demostración por simple visualización por la demostración indirecta? y muy particularmente ¿Dónde se origina la demostración indirecta en Matemáticas?

En relación a lo anterior, Szabó declara primero que no puede ofrecer una explicación de cómo los griegos hubieron podido lograr construir la forma de demostración indirecta sobre la sola base de su conocimiento matemático de origen puramente empírico-práctico y principalmente para uso práctico.

Piensa que el origen de la forma de demostración indirecta en matemáticas que daría por simple oculto si tuvieramos que deducirlo históricamente de formas más primitivas de pensamiento matemático desprovistas de este proceso de demostración.

En su opinión, la forma de demostración indirecta, ni fue creada por matemáticos ni fueron ellos los primeros en utilizarla; los Pitagóricos del sur de Italia la tomaron ya hecha por los filósofos eleáticos quienes también vivieron allí en los inicios del siglo V.

Se encontró tiempo atras [36], que Parménides de Elea distinguió tres caminos de investigación:

(a) "el ser existe"
(b) "el ser no existe"
(c) "el ser existe y no existe"

Parménides descartó los dos últimos caminos como auto-contradicciones obvias, de la misma manera como la demostración del teorema 30.IX, Euclides rechazó la posibilidad de que un número fuera simultaneamente par e impar. No hay duda de que, de acuerdo al conocimiento actual, el método de demostración indirecta fue utilizado primero por Parménides en filosofía. Fueron los Eleáticos quienes probaron sus afirmaciones refutando la negación de la tesis [37]. Fueron Parménides y los Eleáticos quienes, clara y unánimamente, hicieron de la ausencia de contradicción el criterio para la validez de una afirmación. Como dijo Parménides: οὐ γαρ φατου ουσε ονζον | εστιν οπως ουκεστι ζο ον, "porque es atroz e impensable que el ser no exista" [38]. Lo que Parménides en su lenguaje arcáico describía en perífrasis como ου φατον ουσε χοητον apareció tiempo después en la terminología matemática como ον ατον ουσε νοητον No puede haber duda en que el proceso lógico era el mismo en ambos campos, en la filosofía Eleática y en la matemática griega deductiva antigua. Es caracteristico del método de Parménides el que, en realidad, no prueba la existencia del ΟΥ sino que refuta su no-existencia porque, como él dice, el segundo y tercer camino de investigación, cada uno, implica una contradicción. De esta misma manera cada demostración indirecta se realizaba en la matemática griega antigua.

A continuación propone la siguiente conjetura histórica:

LOS MATEMATICOS GRIEGOS ANTIGUOS TOMARON EL METODO DE DEMOSTRACION INDIRECTA DE LA FILOSOFIA ELEATICA: EN CONSECUENCIA, LA CREACION DE LA CIENCIA DEDUCTIVA METEMATICA PUEDE ATRIBUIRSE A LA INFLUENCIA DE LA FILOSOFIA ELEATICA.

Szabó es consciente de que esta suposición puede parecer, actualmente, una combinación atrevida y lleva esta combinación al nivel de la posibiliada histórica conviniendo sólo en el apartado siguiente.

La suposición arriba expuesta sirve para explicar dos fenómenos que, de otra manera, difícilmente serían comprensibles.

a.- Si el método de demostración indirecta en efecto proviniera de los filósofos Eleáticos, entonces sería sencillo comprender también la tendencia "anti-ilustrativa" y "anti-empírica" en la matemática griega antigua. Si partimos sólo de la matemática, esta tendencia difícilmente podría explicarse. Uno espera lo contrario: los primeros matemáticos griegos debían haberse regocijado al encontrar que lo que probaban logicamente podía, en la mayoría de los casos, verificarse mediante la práctica, por ilustración. En vez de esto, despreciaron y se desentendieron del empirismo tanto como de las demostraciones por visualización. Luego, el teorema 30.IX de los Elementos que discutimos anteriormente, se probó por demostración indirecta, remplazando el uso de bolitas por los segmentos de recta, ¡POR MIEDO DE HACER VISIBLE LO QUE SE QUERIA DEMOSTRAR! La relación entre la demostración indirecta y la tendencia anti-ilustrativa fácilmente se vuelve comprensible si consideramos la demostración indirecta como un legado de la escuela Eleática. El punto es que en la filosofía Eleática la demostración indirecta y la tendencia anti-ilustrativa eran INSEPARABLES. Los filósofos Eleáticos usaban el método de demostración directa sólo para probar aquellos teoremas diametralmente opuestos a la experiencia del sentido común y a la ilustración. (Zenón, por ejemplo, probó indirectamente la imposibilidad del "movimiento" el cual es real como lo muestran la experiencia y la ilustración). Esta es la razón por la cual los filósofos de la escuela Eleática estaban obligados a oponer experiencia, práctica e ilustración, con el propósito de mantener la validez de sus demostraciones indirectas. Esta actitud de los Eleáticos fue tomada por los primeros matemáticos griegos junto con la forma de demostración indirecta, aunque la tendencia anti-ilustrativa en matemáticas no era, de ningún modo, tan indispensable como en la filosofía Eleática.

b.- Apoyado en la suposición arriba delineada Szabó responde a la cuestión de por qué los griegos del siglo V A.C. reemplazaron la demostración mediante mera visualización por la demostración indirecta; y qué los indujo a adoptar esta forma singular de demostración.

K. Reidmeister escribió con respecto al más antiguo cuerpo de teoremas matemáticos griegos [39] :

> "La doctrina de los pitagóricos culminó con la DEMOSTRACION, relacionada con los números pares e impares, que prueba que la diagonal D de un cuadrado de lado S no pueden ser medidos con la misma unidad E, es decir que D y S son INCONMENSURABLES. Este hecho no puede ser ilustrado o experimentado por los sentidos -como puede ser ilustrado, por ejemplo, el teorema de Pitágoras- sólo puede ser imaginado y demostrado. Sólo --

> nos resta añadir que tal demostración (Apéndice 27, Libro X de los Elementos) es una DEMOSTRACION INDIRECTA. La aplicación de la forma indirecta de demostración hizo posible el demostrar un hecho matemático -la existencia de los inconmensurables- el cual no habría podido ser reconocido sin esta manera de pensamiento"[48]

Es por esto que los Pitagóticos tomaron de los Eleáticos la forma de demostración indirecta junto con su actitud anti-ilustrativa, y este es el camino que pudo haber seguido la matemática para convertirse en una ciencia teórica y deductiva.

Finalmente, antes de emprender la investigación sobre el origen de los principios matemáticos, resumamos los principales argumentos que se han esbozado hasta el momento que pueden corroborar la suposición de Szabó con respecto al origen histórico de la demostración indirecta en matemáticas:

(a) La aplicación más antigua conocida del método de demostración indirecta, en cuanto a los griegos se refiere, se encuantra en el poema didáctico de Parménides. Las aplicaciones más antiguas de esta forma de demostración, hasta donde sabemos, son de fecha posterior, se originan en tiempos POSTERIORES a Parménides.

(b) No tenemos ninguna explicación de cómo la forma de demostración indirecta pudo haberse encontrado sobre las bases de un conocimiento matemático puramente práctico-empírico.

(c) La forma de demostración indirecta aparece JUNTO CON la tendencia singular anti-empírica y anti-ilustrativa. La relación orgánica entre estos dos fenómenos sólo puede explicarse suponiendo su origen en la filosofía Eleática.

(d) Los matemáticos de la antigüedad posiblemente fueron inducidos a adoptar la forma de demostración indirecta y la actitud anti-ilustrativa ya que éste, inesperadamente, ampliaba las perspectivas y permitía reconocer algo (la inconmesurabilidad)(que, de otra manera, hubiera permanecido desconocida para ellos.

1.4 <u>ORIGEN DE LOS PRINCIPIOS DE LA MATEMATICA GRIEGA.</u>

1.4.1 <u>El problema histórico de los principios euclideanos.</u>

En el capítulos siguiente veremos cómo Proclo trata en detalle del contenido y significado de estos principios y marca las diferencias entre cada uno.

El problema que Proclo no aborda es el siguiente: Cómo se llegó, en el transcurso del desarrollo histórico, a la conclusión de que la matemática como un todo debe descansar sobre tales afirmaciones demostradas.

Como se vió también en el capítulo anterior, la ciencia moderna generalmente se remite a Aristóteles, atribuyéndole el papel principal en la fundamentación de la matemática griega sobre definiciones y axiomas.

Aristóteles (384-322 A.C.) pensó que podría contestar la pregunta sobre las condiciones bajo las cuales algo es probado y así refutar la doctrina filosófica de que el conocimiento científico (es decir, el conocimeinto basado en la demostración), o es imposible o es circular. Era imposible si, para demostrar una conclusión, se tuvieran que demostrar las premisas y para demostrar éstas, tuviera que demostrar las premisas de ellas, y así sucesivamente *ad infinitum*. Era circular si la conclusión se admitía en las premisas, lo cual realmente viene a ser, si A entonces A. "Un modo muy simple de probar cualquier cosa, remarca Aristóteles sarcásticamente.

De esto deducía que cada ciencia debe comenzar de principios indemostrables, de los cuales, algunos son:

a) *Comunes a todas las ciencias*: se trata de axiomas, generalmente ilustrados por éste: "si iguales son sustraídos de iguales, los residuos son iguales".

b) *Particulares o peculiares a cada ciencia*: tenemos primero el *genus* o materia de estudio, la existencia de la cual debe ser supuesta; por ejemplo, magnitudes, en el caso de la geometría, o la unidad, en el caso de la aritmética.

Para entender por qué era preciso hacer hincapié en los peligros extremos de una demostración, tenemos que reconsiderar la situación de la geometría en tiempos de Aristóteles. Es probable que hubiera muchos tratados sobre la materia y aquello que era supuesto sin prueba en uno, era probado en otro. Como se ha visto, las suposiciones iniciales o axiomas no fueron probablemente hechos explícitos todos. En tales circunstancias no es improbable que algunos pensadores llegaron a creer en la inutilidad de la demostración, porque el demostrador debe siempre asumir algo que no ha probado; mientras otros pensadores creerían que las demostraciones circulares eran legítimas, ya que resultaba obvio que los geómetras tenían conocimiento.

Nuestra propia doctrina, nos dice Aristóteles, es que no todo el conocimiento es demostrativo. Acorde con ésto proveyó bases filosóficas para la demostración. La demostración debe empezar con verdades auto-evidentes, que son no demostrables, a sí mismas. Estas deben ser claramente verdaderas y mejor conocidas que cualquier cosa que sea subsecuentemente probada de ellas.

El otro aspecto de la teoria de Aristóteles que debe ser mencionado es su ---

teoría de la definición. Una definición, nos dice, es una frase que significa la esencia de una cosa. Los objetos tienen propiedades que son de dos tipos: esenciales y accidentales, pero sólo las primeras entran en la definición de un objeto. Porque Aristóteles consideraba la diferencia entre las propiedades esenciales y accidentales como un hecho objetivo, una definición, para él, era también objetiva y si era correcta, era necesariamente verdadera. En esto fue enteramente socrático; en realidad Aristóteles dió a Sócrates el crédito de ser el primero en hacer notar el problema de la definición universal, y dijo que era natural que Sócrates debiera estar buscando silogizar y lo que es una cosa, es el punto de partida de los silogismos. Sin embargo, Aristóteles no consideró una definición verdadera hasta que hubiera sido mostrado que la palabra definida se refería a algo que existía y hasta que la definición hubiera expresado las propiedades esenciales de la cosa, en términos de los cuales fuera mejor conocida la palabra definida. Una definición como apunta Aristóteles varias veces, no asegura la existencia del objeto definido; esto debe ser asumido o probado.

Para Szabó, es más probable que los principios de la matemática enunciados por Euclides en el comienzo de su obra provengan de un período anterior a Aristóteles. Apoyándose en algunos investigadores, por ejemplo, P. Tannery, quien señaló que las definiciones 4 y 7 del Libro I de los Elementos -aquellas que se refieren a la "Línea Recta" y al "área plana"- no se usan en la obra de Euclides.

La terminología de las definiciones euclideanas tampoco coincide siempre con la terminología utilizada por Euclides en los teoremas y demostraciones. El término utilizado para "rectángulo", por ejemplo, en la definició 22.I es ετερομηκες aunque Euclides siempre se refiere a él como χαραλλη λοαραμμον. La misma definición también menciona el concepto de "rombo" el cual no aparece en ninguno de los teoremas de los Elementos de Euclides; además se menciona el "romboide" el cual nunca se diferencía del χαραλλοσραμμον en los teoremas subsiguientes. Las definiciones del Libro I de los Elementos tampoco son consistentes en cuanto a la denominación de los "polígonos"; siguiendo la definición 19 esperaríamos que Euclides se refiriera a ellos por sus LADOS y, sin embargo, lo hace en base a sus ANGULOS.

De lo anterior, Tannery concluye, acertademente, que las definiciones del Libro I no se originaron con Euclides. Euclides tuvo muchos predecedores, y probablemente estos matemáticos anteriores a él, al compilar sus propios ELEMENTOS, introdujeron definiciones, que precedían sus exposiciones. Esta forma de exposición no difiere de la de Euclides, quien mucho debe deberles a sus predecedores. Es por esto que, entre las definiciones del Libro I, encontramos pasajes que no son necesarios para el propósito de la obra. En otras instancias, parecería que a Euclides no le preocupara el hecho de que la terminología de estas definiciones no coincida exactamente con la terminología utilizada en la redacción de sus teoremas y demostraciones. Esto, que puede ser un grave error desde el punto de vista de la matemática, es lo que nos permite adentrarnos un poco en la historia de la matemática pre-euclidiana.

Tannery se refería en su suposición tan sólo a las definiciones del Libro I. Sin embargo, estudios posteriores han mostrado que el llamado "axioma de congruencia" de Euclides también puede ser considerado en esta categoría. Este axioma (el 7) propone un método que Euclides se empeña en evitar siempre que le es posible; esto parece también indicar que el axioma mencionado probablemente es el legado de un período anterior; así como las definiciones a las cuales nos referimos anteriormente, sólo se pueden explicar si suponemos que ellas se habían convertido en tradiciones pasadas de moda en el tiempo de Euclides.

Estas observaciones fácilmente nos llevan a la suposición de que los otros principios matemáticos enunciados por Euclides también provienen de la tradición. Esta suposición por lo menos concuerda con lo que sabemos de Euclides ahora.

Por otra parte, si convenimos -como lo hicimos en el capítulo anterior- que el autor de los ELEMENTOS compuso su obra a la manera de un compilador científico, es natural suponer que usó el mismo método al componer los pricipios de su ciencia. Podemos entonces partir de la suposición de que los ELEMENTOS de Euclides provienen de períodos anteriores.

1.4.2 La prioridad de la Aritmética sobre la Geometría en los comienzos de la metemática griega.

Antes de comenzar a demostrar el origen histórico de algunos de los principios de Euclides, resulta conveniente centrar nuestra atención en una característica peculiar de la matemática griega. En general se considera que la matemática griega es predominantemente de CARACTER GEOMETRICO. En efecto, la parte central de la obra de Euclides recopila los "elementos" de la geometría; todo aquello que no es geometría se relega a segundo término; por ejemplo, la aritmética que se encuentra en los Libros VII, VIII, IX de los Elementos. Sabemos ahora que este tratamiento de la matemática griega es una consecuencia de una tendencia general hacia la "geometrización" la cual, a pesar de ser moda anterior a Euclides, era de hecho un fenómeno secundario; esta geometrización subsecuente parece haber sido necesaria por el reconocimiento de las cantidades irracionales. Para poder encontrar una solución general y exacta de la ecuación cuadrática, fue necesario pasar del dominio de los números al de las cantidades geométricas. Sin embargo, es posible que antes de esta geometrización, la aritmética fuera considerada más importante que la geometría. Esta suposición puede sustentarse por los argumentos mencionados por O. Neugebauer, así como por otras pruebas.

Sabemos, por ejemplo, que los Pitagóricos se referían a la geometría como ἱστοριη , y llamaban a la enseñanza de los números μαθηματα . Como ιστοριη debía referirse a un conocimiento empírico de carácter visual, la geometría posiblemente no era considerada una disciplina verdaderamente matemática en épocas remotas. Es por esto que Platón menciona la geometría en SEGUNDO LUGAR después de la aritmética, y por lo cual Proclo se sentía justificado al escribir:

> "El que la geometría forma parte de la matemática y el que ocupa el *segundo lugar después de la aritmética*....ha sido expuesto por autores antiguos y por lo tanto no es necesario que nos ocupemos de ello aquí"

Esta cita también parece indicar que la geometría no era reconocida como disciplina matemática desde el comienzo y que su reconocimiento debió estar precedido por discusiones.

Szabó conjetura que la verdadera disciplina matemática era originalemente la aritmética -los Pitagóricos llamaron μαθηματα precisamente a su teoría de los de los números- y en base a esto investiga primero el origen de los principios de la aritmética griega para luego examinar los principios de la geometría con más detalle.

1.4.3 PRINCIPIOS DE LA ARITMETICA

a) La Unidad y los Números.

Podemos comenzar con el estudio de los principios de la aritmética euclideana investigando la serie de teoremas acerca de los números pares e impares, generados en la primera mitad del siglo V A.C.

En opinión de Szabó, la definición "unidad" ("Uno es aquello conforme a lo cual cada cosa que existe se llama una" Def. VII. 1) y de "número" ("el número es una multitud de unidades", Def. VII.2) constituye parte orgánica de la serie de teoremas mencionada; estas definiciones debían existir en la época en que se creó la teoría de los pares y de los impares.

En el contexto de la definición el UNO es indivisible. Aunque en la práctica toda unidad puede dividirse en partes y aunque los mercaderes, arquitectos e ingenieros griegos obviamente usaban fracciones en sus cálculos, este no era el caso en esta vieja ciencia...Hasta la época de Arquímides la aritmética griega ignoró las fracciones. Los estudiosos de la aritmética multiplicaban el UNO en lugar de dividirlo.

La definición de UNO debe ser anterior a Platón puesto que éste último atribuye al UNO el mismo significado que la definición de Euclides. Como se verá posteriormente, toda matemática deductiva griega se inicia con la definición del UNO.

Los estudiosos de la aritmética consideraban al UNO como INDIVISIBLE: puesto que si el UNO fuera divisible esto significaría que el UNO no sólo es UNO sino también su contrario: "no-uno", es decir, MUCHOS. La contradicción que conlleva el pensar en "uno es divisible" fue descubierta y por lo tanto esta afirmación no puede ser verdadera. Su contrario debe ser verdad: "el UNO es indivisible".

Si examinamos con más cuidado las ideas que Platón enfatiza

> "El UNO es indivisible",
> "Solo existe en pensamiento",
> "Cada UNO es en sí mismo completamente uniforme y no tiene partes", etc.

es imposible no recordar a Parménides, quien caracterizó el "ser" Eleático por medio de los mismos rasgos. De acuerdo a esto, la definición euclideana del UNO parece ser, el resumen conciso de la dosctrina Eleática del ser. Es característico que su definición se obtuvo por medio del mismo método -la aplicación del método indirecto de demostración- que usó Parménides para desarrollar su doctrina del ser. Esto de ninguna manera es sorprendente, ya que en la sección 2.2.3 mencionamos que la forma de demostración indirecta -el método indispensable en la matemática griega temprana- proviene de la filosofía Eleática.

El análisis de la definición del UNO nos ha llevado muy cerca de la filosofía Eleática. El completar esta identificación con lo expuesto en la sección 2.3, nos conduce a pensar que la aritmética deductiva temprana de los griegos no es sino el desarrollo de la filosofía Eleática.

Resumiendo este apartado, podemos decir que las dos primeras definiciones de la aritmética euclideana -UNO y NUMERO- son, desde cualquier punto de vista, indicativas de la influencia de la filosofía Eleática. La formulación de estas definiciones claramente estaba influida por el problema de la división.

El punto de vista de Szabó será apoyado y enriquecido en el próximo apartado.

b) La divisibilidad de los números.

El problema básico y central de la aritmética griega temprana era el problema de la divisibilidad.

Los pitagóricos sólo pudieron mantener el dogma eleático de la indivisibilidad del *uno* multiplicando el *uno* en *números*.

Así pudieron reemplazar la fracción por su equivalente matemático: la relación entre dos o más números, la proporción. Y como señaló B.L. van der Waerden, el problema de las fracciones fue el que produjo la antigua aritmética pitagórica, parte de la cual es tratada en el Libro VII de los Elementos.

La teoría del par y el impar surgió del problema de división; más precisamente, de la división entre dos.

La teoría pitagórica del par y del impar clasifico los números en dos categorías PAR e IMPAR según el número fuera divisible entre dos o no lo fuera. Podemos suponer que fue con esta distinción como comenzó el examen más a fondo de la divisibilidad de los núemros y que fue ésta la base para la serie completa de teoremas sobre el par y el impar.

Posteriormente, el estudio de la divisibilidad condujo a la distinción fundamental entre números primos y números compuestos. Al establecer con la definición de número que UNO es divisor de todos los números, la siguiente distinción dicotómica es posible: los números cuyo divisor "sólo es el *uno*" se llaman números primos (Libro VII def. 11) y aquellos números cuyo divisor "no sólo es el *uno*" (es decir es algún otro "número" diferente del UNO, Libro VII def. 13) se llaman NUMEROS COMPUESTOS, (es decir, no primos).

Los pitagóricos deseaban mantener el principio de no contradicción en el espíritu de la más importante de las doctrinas eleáticas. Con este propósito, primeron crearon el concepto de "pluralidad abstracta" por medio de la definición de "número"; a continuación, para poder resolver sin contradicción el nuevo problema de la divisibilidad, introdujeron nuevas definiciones siguiendo el ejemplo de los eleáticos. ESTE PARECE HABER SIDO EL INICIO DE LA FUNDAMENTACION DE LA ARITMETICA GRIEGA SOBRE DEFINICIONES EN UNA EPOCA TAN TEMPRANA COMO LA PRIMERA MITAD DEL SIGLO V A.C.

1.4.4. PRINCIPIOS DE GEOMETRIA.

a) Divisibilidad y Geometría.

Para los pitagóricos fue relativamente simple -como hemos visto hasta ahora- aplicar los principios eleáticos siempre que se trataran de números. Sin embargo, la situación no era tan simple en geometría; primero, porque las figuras geométricas eran mucho más abstractas que los números (el "triángulo", por ejemplo, es necesariamente más concreto que el "número impar"); segundo, porque era más difícil eliminar el método ilustrativo de las demostraciones geométricas que de las demostraciones aritméticas. En este campo, todo lo que pudo hacer Euclides fue hacer difuso el carácter ilustrativo de las demostraciones geométricas.

Los primeros matemáticos se enfrentaron a dificultades aún mayores cuando se propusieron examinar en geometría el problema eleático de la "divisibilidad" el cual probó ser fructífero en la construcción de la aritmética. La aritmética Pitagórica temprana está llena de pistas que muestran que los matemáticos griegos debieron notar relativamente temprano las dificultades geométricas relacionadas con la divisibilidad. Para apoyar este punto de vista resulta conveniente analizar con detenimiento la demostración de una de las proporsiciones aritméticas de Euclides. El teorema que nos proponemos examinar (VII.31) de origen pitagórico, como se mencionó anteriormente, data del siglo V A.C., y dice:

> "Cada número compuesto tiene un divisor, el cual es un número primo"
>
> Sea a un número compuesto arbitrario. Hay que probar que sí existe un número primo que es divisor de a. En virtud de la definición 13, a tiene divisor b, porque un número compuesto es aquel divisible entre algunos otros números menores que él. (No debemos olvidar que en la aritmética antigua el uno no es un número). Si b es primo el teorema está probado. Si, en cambio, b es compuesto, entonces otra vez, por la definición 13, b tiene un divisor c, el cual es también divisor de a. Si c es primo, el teorema VII.31 está demostrado; si c no es primo, continuamos examinando sus divisores hasta que encontremos un número primo que sea divisor de a. La demostración enfatiza el hecho de que de esta forma se encontrará finalmente un número primo que es divisor del número compuesto a. Si fallamos en encontrar tal número primo, el número a puede tener un número infinito de divisores continuamente decrecientes, los cuales sean todos compuestos; pero esto es imposible en el de los números.

La última frase de esta demostración es bastante significativa. Euclides pone especial cuidado al decir "en el dominio de los números", en el cual no es posible para una cantidad dada, tener una infinidad de divisores, porque existía otro dominio: el de - los segmentos de recta, es decir, de la geometría.

La concepción eleática no podía aplicarse en GEOMETRIA tan fácil mente. La mayor dificultad era, tanto la materia como el espacio, parecían ser infinitamente divisbles; por lo tanto la conclusión necesaria era que en la materia y en el espacio nada podía lla-- marse MENOR. Como escribe Proclo:

> "En geometría no existe lo más pequeño y donde la división -- puede efectuarse indefinidamen te también existe lo irracio-- nal (lo irrazonable)". "Es ob- vio -continúa Proclo- que los números son menos materiales y más puros que las cantidades - geométricas y que, por lo tan- to, la base de los números es también más simple que aquella de las cantidades geométricas".

Las dificultades en geometría, las cuales atribuye Proclo a la - infinita divisibilidad del espacio, fueran descubiertas por los eleáticos, quienes negaban la existencia del espacio y, por con- siguiente, de la ciencia del espacio, es decir, de la geometría. En otras palabras: los eleáticos concebían nuestro conocimiento del espacio de la misma manera como concebían nuestra experien-- cia del movimiento: ambas son producto de nuestras sensaciones.

Zenón de Elea, por ejemplo, podía enumerar varios argumentos pa- ra demostrar que el concepto de "espacio" es contradictorio.

Las dificultades encontradas para aplicar los principios eleáti- cos a la geometría pueden muy bien ser ejemplificadas por la de- finición euclideana de "punto".

"Punto es aquello que no tiene partes"

Esta es la primera definición de los Elementos. Así como la pri- mera definición del libro de aritmética determina el componente *mas pequeño*, el UNO el cual, por multiplicación, genera todos -- los números, tenemos que los libros de geometría se introducen - definiendo lo "más pequeño" en geometría: el punto. Las dos defi- niciones, la de UNO y la de PUNTO, pueden compararse. El estudio de los números comienza con UNO , el cual, a pesar de que para los eleáticos no es un número, no puede omitirse al concebir los números.Lo mismo se aplica, de acuerdo a la concepción antigua, al punto el cual a pesar de no ser una cantidad geométrica no puede omitirse al concebir las cantidades geométricas. La definición euclideana de *punto* es, probablemente, el equivalente geométrico de la definición de UNO aritmético. Aunque las dos primeras definiciones de la aritmética -UNO y NUMERO- se eligieron como base para un sistema no contradictorio, no podemos decir lo mismo de las definiciones de la geometría euclideana.

El esfuerzo de los primeros pitagóricos para construir una geometría sin contradicciones, así como se había logrado construir la aritmética no condujo a ningún lado. No encontraron para la geometría fundamentaciones simples y no-contradictorias sobre las cuales construir la teoría de manera no-contradictoria. Más aún, con su definición de punto -así como con la de línea- crearon una base FALSA para la geometría. En efecto, con la base de la definición euclideana de PUNTO, hubieran debido negar la existencia del espacio y por lo tanto de la geometría.

A menudo se reprochó a los geómetras de la antigüedad que comenzaran de teoremas falsos. Probablemente el neo-platónico Proclo tenía en mente este antiguo reproche cuando invitaba a los matemáticos a liberar la geometría -simbólicamente- del "abrazo de Calipso" y de llevar esta disciplina a la esfera de conocimiento más completo y espiritual. N. Hartman es conocido por haber pensado que estas palabras de Proclo precedían un nuevo tratamiento de la geometría el cual desarrolló posterior a Descartes (la geometría analítica).

b) Cronología de los principios matemáticos.

En la presente sección se ha procurado reconstruir y elucidar, a la manera de Szabó, el desarrollo histórico que se halla tras los fundamentos teóricos de la ciencia deductiva.

Hallamos en matemáticas que los preliminares para esta fundamentación consisten en dos pasos claramente diferenciados:

PRIMER PASO: adopoción de los principios eleáticos tomados sin alteración: tanto la doctrina del UNO y su *indivisibilidad* como el principio de *no-contradicción* en general.

SEGUNDO PASO: introducción de una nueva definición: el concepto de número. El principio general de no-contradicción pudo mantenerse gracias a este segundo paso. En realidad, sólo este segundo paso -la definición del concepto de número- puede considerarse como una fundamentación independiente de la aritmética. En efecto, es precisamente esta definición la que establece claramente los límites del campo -el dominio de los números- dentro de los cuales pueden formularse afirmaciones y teoremas no-contradictorio . Obviamente la definición de número se formuló para asegurar que los teoremas construi--

dos a partir de allí serían no-contradictorios.

Szabó se inclina a pensar, por consiguiente, que los "PRIMEROS principios matemáticos" fueron las definiciones.

La fundamentación de la matemática como ciencia deductiva parece haberse iniciado, en el desarrollo histórico, formulando definiciones. En efecto, lo que precede los libros de la aritmética de los Elementos sólo son definiciones, no hay otro tipo de principio matemático. Lo anterior viene a apoyar la suposición de que la aritmética griega, en sus orígenes, se construyó sólo a partir de las definiciones. Naturalmente no decimos que los griegos sólo usaron en su teoría de los números las definiciones enunciadas por Euclides en el Libro VII. Desde hace tiempo se sabe que Euclides recurre a menudo, especialmente en sus exposiciones geométricas,a principios que no fueron explícitamente enunciados en su introducción. Es claro que en estos casos, como tal, aún no había sido reconocido en su época.

Mencionamos en el capítulo 1 que Euclides clasificó los principios de la matemática en tres grupos: definicioes, postulados, nociones comunes. Cuando examinamos esta clasificación a la luz de los argumentos anteriores, podemos decir que:

Las definiciones de la geometría fueron , muy probablemente, formuladas de la misma manera que las de la aritmética. Hemos visto que la definición de PUNTO es, en última instancia, sólo un esfuerzo por transferir la definición aritmética del UNO, en una versión modificada, al campo de la geometría.

El punto geométrico que "no tiene partes" debía obviamente ser tan indivisible como el UNO aritmético. La secuencia de las dos primeras definiciones geométricas también es de notarse: "el punto es aquello que no tiene partes" y "una línea es longitud sin espesor"; el *orden* de estas dos definiciones recuerda el *orden* de las definiciones de UNO y NUMERO en aritmética.

La pregunta que surge es por qué el ejemplo de la aritmética no se sigue en la definición de "línea". Esto es, ¿por qué "línea" no se define como NUMERO en aritmética? Si un número es una "multitud" de unidades, por qué una LINEA no podía ser una "suma de puntos"? Más adelante veremos que los antiguos evitaron deliberadamente el exponer tal definición; ya que, de haber definido línea como "suma de puntos", se había resaltado el carácter contradictorio de la fundamentación de la geometría, carácter que ellos debían conocer.

Los matemáticos de la antigüedad posiblemente fueron llevados a establecer POSTULADOS y AXIOMAS (=communes animi conceptiones) porque rapidamente se dieron cuenta de la insuficiencia de las meras definiciones para una fundamentación teórica de la ciencia deductiva. Los postulados euclideanos tienen un origen claramente geométrico y no pueden ser usados en otro contexto. Sin embargo, los principios llamados por Euclides COMMUNES ANIMI CONCEPTIONES no son tan claros a este respecto como los postulados. Aunque entre ellos encontramos teoremas de carácter geométrico como, por ejemplo, el axioma de congruencia la mayoría de ellos son de validez más general como, por ejemplo "si a iguales quitamos iguales los restos serán iguales" Sin embargo sus orígenes son geométricos. Esto significa que fueron problemas de carácter geométrico los que llevaron a los antiguos a establecer teoremas que no podían probarse.

A continuación, Szabó examina cómo y por qué los principios matemáticos euclideanos llamados *communes animi conceptiones* llegaron a ser formulados. Tannery -en su opinión- tenía razón cuando afirmó que los términos griegos para estos principios en el texto de Euclides (κοιωμα ενυοιαι) sugerirían un origen estoico. La palabra αειωμα (el nombre antiguo de tales principios) era utilizada en tiempos anteriores a Euclides. Ya en el tiempo de Aristóteles se usaba como término matemático; más aún, uno de los axiomas que aparecen en el Libro de Euclides, el tercero, se encuentra en Aristóteles tal cual. Este hecho muestra que las COMMUNES ANIMI CONCEPTIONES de Euclides, o al menos casi todas ellas, provienen de una época anterior, al igual que las definiciones, de las cuales ya nos ocupamos anteriormente. Esta suposición puede apoyarse por argumentos más centrados en el problema, para lo cual estudiaremos detalladamente el axioma 8 de Euclides.

c) "<u>El todo es mayor que sus partes</u>"

Se trata del axioma 8 de Euclides. Una de las razones por las cuales resulta interesante este axioma es que rara vez se usa en los Elementos, por lo menos con esta formulación.

La afirmación -el todo es mayor que sus partes- parece tan trivial que uno se pregunta por qué fue necesario convertir en axioma esta verdad tan "simple".

La pregunta es además razonable puesto que, como decimos arriba, Euclides rara vez usa este axioma.

¿Cuál será, entonces, la razón para formularlo?

Szabó piensa que antes que se formulara esta afirmación, hubo pensadores que la impugnaron. Cuando se vieron las consecuencias que se derivan de tal suposición, tuvieron que aceptar la afirmación como un teorema evidente en sí mismo, pero imposible de ser probado. Lo cual hizo de el un axioma. Este tuvo que ser el origen del peculiar axioma 8. Szabó se pregunta si no fue precisamente debido a argumentos paradójicos como los de Zenón, los cuales han llegado a nosostros a través del intento de Aristóteles de refutarlos, por los que el axioma tuvo que formularse.

Obviamente Zenón, mediante su paradoja ("la mitad del timepo es igual a su - doble") también quería mostrar lo inconcebible (=contradictorio) de los conceptos de "movimiento", "tiempo" y "espacio". Sin embargo, mediante su "razonamiento falso" también anticipó la solución correcta para tales problemas como sólo pudieron ser tratados, en un nivel supeior, por la teoría moderna de los conjuntos. Zenón demostró que conceptos tales como "parte" ,"todo" e "igual" son válidos sólo en el caso de conjuntos finitos. En el caso de conjuntos infinitos, la "parte" puede ser "igual" (=equivalente) al todo.

Zenón no sólo demostró aquello que Aristóteles dice que demostró, es decir: que "la mitad del tiempo es equivalente al todo"; también iba encaminado a - probar que la mitad (una parte) de un segmento, como un conjunto infinito de puntos, es equivalente al segmento total visto que tanto el subconjunto como el conjunto son infinitos. Este razonamiento necesariamente provenía de la - definición geométrica de PUNTO.

Si "un punto es aquello que no tiene partes", entonces una línea sólo puede- ser la suma de un número infinito de puntos. En este caso cualquier sección de una línea (segmento) es equivalente a cualquier otra y el segmento total mismo puede ser equivalente a cualquiera de sus partes.

Esta es la razón por la cual la LINEA no podía definirse en geometría como - la suma de puntos, y podemos entender el por qué de la necesidad de formular el octavo axioma ("el todo es mayor que sus partes").

d) Origen de la fundamentación axiomática de la geometría.

La fórmula estereotipada que aparece frecuentemente en Euclides (LO MAS PE-- QUEÑO SERIA IGUAL A LO MAS GRANDE, LO CUAL NO ES POSIBLE) efectivamente está relacionada al axioma en cuestión. Si quisiéramos insistir,siendo estrictamente formales, en el texto del axioma notaríamos que en su formulación ni - siquiera se menciona el concepto de "igualdad"; este concepto sólo aparece - en el texto de la fórmula estereotipada deducida del axioma.

Sin embargo, como sabemos que el axioma aparece para refutar una concepción que afirma algo "inaceptable" acerca de la igualdad, no podemos dudar por -- más tiempo que el axioma también se refiere al problema de la "igualdad". Podríamos decir que define por negación lo que es "igualdad": el todo y sus -- partes no son iguales, el todo es mayor que sus partes.

Visto de esta manera, la relación entre el octavo axioma y los demás se revela con mayor claridad. Los demás axiomas afirman algo acerca de lo que es -- "igual" y de lo que "no es igual". Como elucidamos el origen de por lo menos un axioma, resulta relevante suponer que la formulación de los otros axiomas relativos a la igualdad fueron inducidos por razones semejantes a aquellas -

que discutimos con referencia al axioma 8. Todo parece señalar que el problema de la "igualdad" se manifestó en la filosofía eleática de tal manera que fue necesario formular afirmaciones empíricas relativas al problema: ¿qué es "igual"? y ¿qué no es "igual"? en geometría. (Por esto creo que el grupo de COMMUNES AMINI CONCEPTIONES son axiomas de ORIGEN GEOMETRICO).

En estos casos la validez de cada afirmación no se basaba, como en el caso de las definiciones, en la consistencia del pensamiento (es decir, por la demostración de que la afirmación contraria es contradictoria) sino, irrespetando los principios eleáticos, *en la observación práctico-empírica cuyos resultados se abstrajeron a partir del estudio de los conjunto finitos.*

La afirmación contenida en el octavo axioma "el todo es mayor que sus partes" tan evidente y fácilmente concebible como es no poder ser probada por medio del método de los eleáticos. Pero aún, su negación podría ser mostrada por este método. Sin embargo, los griegos se vieron obligados a escoger una afirmación empírica y que no se podía probar, válida sólo en el caso de conjuntos finitos, para fundamentar la matemática; ya que si esto fallaba el sistema geométrico no se hubiera podido construir. Debido a lo anterior, comprendemos el punto de vista aristotélico según el cual la ciencia de la geometría debía basarse en principios de ése tipo; es decir, principios verdaderos e incuestionables y sin embargo, indemostrables. Un teorema de este tipo, empíricamente verdadero e indemostrable, es el axioma 8.

En los primeros apartados de este capítulo también se ilustra la cuestión de cómo surgió la idea de que la matemática como ciencia deductiva debía basarse en definiciones y axiomas.

Szabó imagina esto de la siguiente manera. Muy probablemente la necesidad consciente de fundamentar la ciencia de las matemáticas con definiciones y axiomas apareció primero en el campo de la *geometría*. Vimos que la geometría fue un desarrollo ulterior e independiente de la filosofía eleática. Sin embargo, en el campo de la aritmética al margen de lo señaldo por los eleáticos resultó suficiente. Aunque en la teoría de los números se introdujo una definición esencialmente nueva (el concepto de NUMERO), esta definición no enfrentó a los pitagóricos contra la filosofía de Parménides y Zenón. Al contrario, esta definición resultó tan productiva que permitió la extensión del método eleático y la construccion de una disciplina no contradictoria -la aritmética- la cual casi parecía una provincia nueva e independiente de la filosofía eleática. La aritmética pitagórica posiblemente se ha convertido en la más grande y perdurable creación de la filosofía eleática.

Sin embargo, cuando este método se trató de aplicar a la geometría la situación cambió. Los principios eleáticos no podían ser aplicados allí con tanta facilidad como en la aritmética. Más aún, si los representantes de esta nueva disciplina deseaban hacer de la geometría una ciencia, debían apartarse de los eleáticos. (La lógica eleática que no retrocedía ni siquiera ante el estudio de los conjuntos infinitos no podía seguirse usando en geometría) La línea divisoria era el AXIOMA, es decir una verdad empírica que no podía demostrarse y que, en algunos casos, aún podía refutarse, tenía que ser tomada como base de posteriores demostraciones. Así, la fundamentación de la geometría no sólo fue un desarrollo ulterior de la filosofía eleática sino al mismo tiempo un punto de vista ANTITETICO a la filosofía eleática.

CAPITULO 2

LA GEOMETRIA EUCLIDEA Y SU RELACION CON LA FUNDAMENTACION FORMAL DE LA MATEMATICA

En el presente Capítulo estudiaremos el proceso de axiomatización y formalización por el que pasó la Matemática, en lo general y la Geometría, en lo particular. Para ello, analizaremos con cierta profundidad el trabajo realizado por los griegos en los siglos VI - III A.C. -desde la perspectiva de Los Elementos de Euclides como el producto más acabado de esta época- y, posteriormente, con una mayor generalidad, el proceso realizado en la Matemática hasta nuestra era.

El modo y orden en que se realiza lo anterior es el siguiente:

A modo de Antecedentes al Capítulo, se ubica la Geometría en el contexto general de las matemáticas, mencionando su papel en la fundamentación de ésta y su influencia en el desarrollo del Método Axiomático Moderno.

En la segunda sección, se menciona algo de los escasos particulares que se tienen sobre la vida y personalidad de Euclides, con el fin de conocer las circunstancias en las que su inmortal obra fue escrita.

En la tercera sección se analiza la estructura de los Elementos y se describe el llamado Método Axiomático Euclídeo. Se habla también de la influencia de la obra a lo largo de las distintas épocas, y se termina enunciando algunos de los defectos del aparato euclídeo, traídos a colación de manera especial en el S. XIX. Esto último se amplía y detalla en la sección 1.4.

En la cuarta sección, se trata de describir el esfuerzo por rectificar la Geometría Euclidea, que tuvo como resultado la presentación axiomática de la teoría.

Para esto, consideramos las magnitudes y limitaciones lógicas del método euclídeo de la siguiente manera:

Se muestra primero cómo cumple con las exigencias aristotélicas para una -- ciencia demostrativa. Excepto al llegar al 5° Postulado el cual no nos detenemos a considerar por no interesar cara a los objetivos de este trabajo.

Posteriormente vemos cómo el método euclídeo choca con nuevas exigencias de rigor. Se exponen las críticas sufridas a raíz de una reflexión sobre la deducción geométrica. Dicha deducción se fue desprendiendo cada vez más de su contenido geométrico para practicarse sobre una teoría deductiva cualquiera.

Se ve así, de manera natural. el surgimiento del Método Axiomático Formal a partir de las transformaciones sufridas por el Método Euclídeo.

El Texto elegido para esta sección es "*La Axiomática*" de Robert Blanché, concretamente el capítulo *Los defectos del aparato euclídeano* (pp. 64-76), que es una crítica a los más importantes defectos lógicos de la Geometría Euclídea en relación a los Postulados, las Figuras, los Axiomas, las Definiciones y la Demostración.

En la última sección del capítulo se describe el Método Axiomático Formal y, para ser más explícitos, se procede como si efectivamente estuviéramos llevando a cabo un trabajo de axiomatización, exponiendo una "muestra en miniatura" de esto y haciendo ver cómo la Geometría Euclídea resulta un modelo --- ideal de un sistema axiomático.

Para el análisis mencionado se ha incluido un texto que trata el tema de una manera especialmente clara y amena: el artículo *El Método Axiomático* de Raymond L. Wilder en "*El Mundo de las Matemáticas*" (pp. 77-103) el cual presenta el tema en dos partes: La primera, un comentario sobre la evolución del - método y la descripción de éste y la segunda, un análisis de los conceptos - de consistencia e independencia en un sistema axiomático formal.

2.1 ANTECEDENTES.

Los matemáticos han dividido la totalidad de las matemáticas en tres grandes categorías: geometría, álgebra y análisis. No siempre es fácil colocar sin titubear una rama dada de las matemáticas en una de las categorías, debido a la falta de definiciones precisas de las categorías. Esto tal vez era de esperarse si ni siquiera existe un acuerdo sobre lo que las matemáticas mismas son. En relación a este "desacuerdo", Hilbert escribe:

> "lo infinito ha removido más profundamente que cualquier otra cuestión la mentalidad humana, ha operado de manera más estimulante que cualquier otra idea sobre el espíritu del hombre, y, sin embargo, necesita ser dilucidado más que cualquier otra concepción".[41]

Sin embargo, la clasificación está determinada, de alguna manera, como sigue: el estudio del espacio iniciado por los antiguos griegos y recopilado tan elegantemente por Euclides en sus "Elementos" se llama geometría euclideana, junto con la gran cantidad de variaciones, generalizaciones y estudios asociados que desde entonces han sido creados. Entre las variaciones encontramos estudios como las geometrías no-euclideanas de Lobachevski y de Riemann, y las geometrías no-arquimedianas y no-desarguesianas; entre las generalizaciones están las geometrías de mayores dimensiones, la vasta familia de geometrías riemannianas y ejemplos de la idea de Klein de una geometría como la teoría de los invariantes de un grupo de transformaciones definido; y entre los estudios asociados están las geometrías finitas, geometrías cuyos elementos no son puntos, y varias teorías abstractas de conjuntos de elementos, generalmente llamadas puntos, con conjuntos de relacionen las cuales se involucra a estos puntos.

El estudio simbólico abstracto de la aritmética ordinaria se llama álgebra, con sus muchas variaciones, generalizaciones y estudios asociados, tales como grupos, anillos y campos, así como los estudios de número hipercomplejos, los cuaternios y las matrices.

Finalmente el análisis consiste de aquellas ramas de las matemáticas que surgen y están relacionadas con el cálculo. Estudios tales como el cálculo mismo, la teoría de las ecuaciones diferenciales, la teoría de las funciones, la teoría de las series infinitas, teorías generalizadas de integración, el cálculo de variaciones, etc., están dentro de esta tercera categoría.

La idea de límite juega un papel importante en cada una de estas últimas ramas de las matemáticas; generalmente la presencia del concepto de límite distingue el análisis del álgebra.

Existen tópicos de matemáticas sobre los cuales hay poco acuerdo acerca de la categoría en la que deben ubicarse. Así, la topología, que en su desarrollo inicial fue reconocida como geometría y que podría ser clasificada de acuerdo al programa de Klein, se ha desarrollado desde entonces en un bloque matemático que tal vez pueda ubicarse en cualquiera de las tres categorías; en realidad es muy posible que en el futuro la topologia pueda ser caracterizada como una cuarta división independiente de las matemáticas. Sin embargo, a pesar de este incierto e indefinido caso, la clasificación de la mayoría de las matemáticas en las tres categorías: geometría, álgebra y análisis, es razonablemente sólido puesto que la mayoría de las ramas de las matemáticas tienen un parentesco fundamental, ya sea en la geometría euclideana, en la aritmética simbolizada o en el método de límite del cálculo. Aunque ha de reconocerse que conforme la matemática ha ido avanzando, los límites entre las categorías están cada vez menos definidos.

Es bien conocida la importancia de las dos primeras categorías:geometría y álgebra,en cuanto a la fundamentación y a los conceptos fundamentales de la matemática. En particular, estas dos categorías influyeron en el desarrollo del método axiomático moderno; hasta hoy en día, cada categoría se ha convertido en un gran bloque de sistemas de postulados asociados.

Las contribuciones esenciales de la geometría y el álgebra a la fundamentación y a los conceptos fundamentales de las matemáticas surgieron cuando se descubrió que existían otras geometrías y álgebras, además de las tradicionales. Así fue como con el descubrimiento del álgebra no conmutativa de los cuaternios se inició un estudio profundo de los fundamentos y los conceptos básicos de estos campos de las matemáticas.

La historia del análisis es algo diferente de la de la geometría y el álgebra. No fue un descubrimiento similar de una clase nueva y radicalmente diferente de análisis lo que condujo al estudio correspondiente de la fundamentación y de los conceptos básicos de la tercera categoría de matemáticas; en lugar de ello, fue el surgimiento gradual de contradicciones dentro de la disciplina misma. Estas contradicciones revelaron la existencia de algunos defectos fundamentales graves, cuya eliminación requería una revisión cuidadosa y penetrante de las bases sobre las cuales descansaba este desarrollo. El esfuerzo que se hizo para establecer unas bases rigurosas para el análisis demostró que tal vez éste tenía un efecto más profundo y revolucionario sobre la totalidad de las matemáticas, que el que tuvo la tarea correspondiente en geometría y álgebra, debido en gran parte al hecho de que el análisis tenía que luchar seriamente con el viejo y difícil concepto de infinito.

Por otro lado, la demanda de un entendimiento aún más profundo de las bases del análisis sorprendentemente traída a discisión en 1874 cuando se exhibió un ejemplo, originado anteriormente por el matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897), de una función continua que no tenía derivada, o lo que es lo mismo, una curva continua que no tenía tangente en ninguno de sus puntos. Este ejemplo dió un recio golpe al empleo de la intuición geométrica en estudios analíticos. - la teoría de límites, de la que dependen las ideas de continuidad y diferenciación, se había construido previamente sobre una noción geométrica intuitiva simple del sistema de los números reales.

Volviendo al punto de la fundamentación de la Matemática podemos decir que:

Después del descubrimiento de las geometrías no-euclideanas, ningún otro hecho ha influído tan poderosamente en el desarrollo de los fundamentos de la matemática como la aparción de las paradojas (cfr. lo dicho a este respecto en la sección 1.4.4). Quizá se haya sobreestimado su importancia, no obstante, parece natural que las paradojas estimularan los esfuerzos de los matemáticos para que las explicaran y las superaran, y además, era un punto delicado con el que en adelante tenían que enfrentarse todas las teorías de fundamentación de la matemática.

Hilbert fue especialmente quien, en la labor que realizó en busca de un fundamento impecable de la totalidad de las matemáticas, desarrolló un aparato puramente formal de signos y reglas de operación, pero recalcó siempre la armonía entre forma y contenido, entre teoría y práctica, entre signo humano y mundo objetivo.

En el siglo XIX surge una crisis de los fundamentos de la matemática y es cuando se inician los procesos para matematizar la lógica y fundamentar con el auxilio de la lógica, la matemática.

El fracaso de los intentos de deducir la matemática de la lógica pone de manifiesto un problema matemático muy importante del siglo XX. Sin embargo, se hicieron intentos para clarificar los problemas serios que surgen en la fundamentación de la matemática.

La matemática y la lógica han interactuado repetidamente a través de sus respectivos desarrollos. Cada vez que ha habido interacción, las dos disciplinas se han beneficiado. Muchos problemas se han resuelto, pero la resolución de los problemas de una centuria han traído invariablemente otros que han tenido que ser atacados por los matemáticos y lógicos de la siguiente.

Antes de analizar con mayor cuidado el trabajo sobre la formalización de la Geometría, que se hizo del siglo pasado en adelante, veremos a continuación el desarrollo histórico del proceso de su fundamentáción. Para ello, iniciaremos con los elementos de Euclides, como un producto del trabajo de los siglos VI-III A.C.

2.2 EUCLIDES.

Como en el caso de otros grandes matemáticos griegos, en el de Euclides, tenemos sólo escasos particulares sobre la vida y personalidad del hombre. Mucho de lo que tenemos está contenido en el pasaje del sumario de Proclo relativo a él, el cual es como sigue:

> "No mucho más joven que estos (Hermotimus de Colofón y Filipo de Medma) es Euclides... este hombre vivió en el tiempo del primer Ptolomeo. En efecto, Arquímedes, el cual vine inmediatamente después del primer Ptolomeo, hace mención de Euclides, y, más aún, dicen que Ptolomeo una vez le preguntó que si había en geometría algún camino más corto que el de los Elementos, y él contestó que no había camino real a la geometría concisamente
> bía camino real a la geometría. (La misma historia se cuenta en Stobaeus, acerca de Alejandro y Menaechmus. Alejandro es representado como pidiendo a Menaechmus que le enseñara geometría concisamente, pero él replicó: 'Oh, rey, a través del país hay caminos reales y caminos para los ciudadanos comunes, pero en geometría existe un único camino para todos')".

Euclides es, pues, el más joven que los discípulos de Platón pero más viejo que Erastóstenes y Arquímides; en efecto, los últimos fueron contemporáneos de uno y otro, como Erastóstenes dice en algún lado.

Este pasaje muestra que Proclo no poseía aún un conocimiento directo del lugar de nacimiento o de la fecha de nacimiento o muerte de Euclides. Procedió por inferencia. Como Arquímides vivió justamente después del primer Ptolomeo y Arquímides menciona a Euclides, mientras hay una anécdota acerca de cierto Ptolomeo y Euclides, por lo tanto Euclides vivió en el tiempo del primer Ptolomeo. Podemos inferir entonces por Proclo que Euclides fue intermedio entre los primeros discípulos de Platón y Arquímides. Ahora, Platón murió en el año 347/6, Arquímides vivió 287-212, Erastóstenes 284-204 A.C. Por tanto Euclides debe haber florecido en el año 300 A.C., dicha fecha coincide bien con el hecho de que Ptolomeo reinó de 306 a 283 A.C.

Es muy probable que Euclides recibiera su educación matemática en Atenas, de los alumnos de Platón; en efecto, muchos de los geómetras que pudieron haberle enseñado eran de esa escuela, y fue en Atenas donde los antiguos escritores de elementos, y los otros matemáticos de cuyos trabajos dependen los Elementos de Euclides, vivieron y enseñaron. El mismo pudo haber sido platónico, pero esto no se sigue de las afirmaciones de Proclo sobre el tema. Proclo dice señaladamente que era de la escuela de Platón y en estrecha conexión con - esta filosofía. Pero era solamente un intento de un neo platonista de conectar a Euclides con su filosofía, como es claro de las siguientes palabras en la misma frase:

> "por esta razón también puso como fin de todos los Elementos, la -- construcción de las llamadas figuras platónicas" [43]

Es evidente que era sólo una idea del mismo Proclo el inferir que Euclides -- era un platónico porque sus Elementos acababan con la investigación de los -- cinco sólidos regulares, ya que esto es difícil de reconciliar con el hecho - obvio de que fueron pensados para proporcionar una base para el estudio de la geometría general,

> "para hacer perfecto el entendimiento del aprendiz en vistas la totalidad de la geometría" [44]

Para salir de la dificultad, dice que si uno pudiera preguntarle cuál era el fin del tratado, hubiera replicado haciendo una distinción entre las intenciones de Euclides en relación a los temas con los cuales sus investigaciones -- conciernen y en relación al prendiz, y diría en relación a lo primero que

> "el total del argumento del geómetra está relacionada con las figuras cósmicas" [45]

Este último enunciado es obviamente incorrecto. Es cierto que los Elementos - de Euclides acaban con la construcción de los cinco sólidos regulares; pero - la parte de figuars planas no tiene relación directa con éstas, y la aritmética ninguna relación en lo absoluto; las proporciones acerca de éstas son meramente la conclusión de la división estereométrica del trabajo.

Una cosa es cierta, a saber, que Euclides enseñó y fundó una escuela en Alejandría. Esto es claro por la observación de Pappus acerca de Apolonio, el -- cual, gastó mucho tiempo con los alumnos de Euclides en Alejandría, y fue así como adquirió tal hábito científico de pensamiento.

2.3 LOS ELEMENTOS.

Euclides fue todo un compilador científico. Existe la hipótesis, basada en argumentos sólidos, de que los principios de los Elementos son de un periodo anterior a Euclides. Los Elementos son una recopilación de resultados y obras matemáticas de diferentes autores de diversas épocas, sobre una amplia variedad de temas. Euclides sistematiza el conocieminto geométrico de su época. Al propio Euclides se le reconoce haber organizado todo este material y haber encontrado mejores demostraciones para algunos proposiciones.Trabajó la aritmética desde un punto de vista geométrico, y la última parte de los Elementos concierne a los cinco sólidos regulares, los cuales jugaron un papel importante en la cosmología de Platón.

Euclides mostró que la geometría podía triunfar donde la aritmética habia fracasado al trabajar con lo inconmensurable.

Comienza los Elementos enlistando principios matemáticos en tres grupos: definiciones, postulados y nociones comunes. Siendo en total: 131 definiciones, 5 postulados y 9 nociones comunes. Partiendo de estos, dedujo una cadena lógica de 465 proposiciones o teoremas.

Definiciones: sólo enunciaremos las del Libro I, por ser las básicas.

1.- Un punto es aquello que no tiene partes.
2.- Una línea es una longitud sin anchura.
3.- Los extremos de una línea son puntos.
4.- Una línea recta es una línea que yace uniformemente con todos sus puntos.
5.- Una superficie es aquello que sólo tiene longitud y anchura.
6.- Los extremos de la superficie son líneas.
7.- Superficie plana es la que yace igual por sobre sus rectas.
8.- Angulo plano es la inclinación de dos líneas que se encuentran en un plano y no yacen las dos sobre una recta.
9.- Si las dos líneas que contienen el ángulo son rectas, el aňgulo se llama rectilíneo.
10.-Si una recta trazada sobre otra forma con ella dos ángulos continuos iguales, cada uno de ellos es recto, y la recta se llama perpendicular a aquella sobre la cual se trazó.
11.-Angulo obtuso es el mayor que el recto.
12.-Angulo agudo es el menor que el recto.
13.-Límite es el extremo de algo.
14.-Figura es lo comprendido por uno o varios límites.
15.-Círculo es un figura plana limitada por una sola línea que se llama periferia,respecto de la cual son iguales las rectas que inciden sobre ellas trazadas desde uno de los puntos situados en el interior de la figura
16.-Este punto se llama centro del círculo.
17.-Diametro del círculo es un recta cualquiera que pase por el centro y cu-

yas dos partes tengan sus extremos en la periferia. Esta recta divide al círculo en dos partes iguales.

18.-Semicírculo es la figura limitada por un diámetro y la periferia. El centro del semicíŕiculo es el mismo que el del círculo.

19.-Figuras rectilíneas son las limitadas por rectas. Triláteras si lo están por tres; cuadriláteras por cuatro y multiláteras por más de cuatro.

20.-Entre las figuras triláteras el triángulo es equilátero si tiene los tres lados iguales, isósceles si sólo tiene dos lados iguales y, escaleno si sus tres lados son desiguales.

21.-Entre las figuras triláteras, el triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo recto; obtusángulo, el que tiene un ángulo obtuso, y acutángulo, el que tiene sus tres ángulos agudos.

22.-Entre las figuras cuadriláteras, el cuadrado es equilátero y equiángulo; el rectángulo, equiángulo, pero no equilátero; el rombo es equilátero pero no rectangular; el romboide, sin ser equilétro ni equiángulo, tiene iguales sus lados y sus angulos opuestos. Las demás figuras cuadriláteras se llaman trapecios.

23.-Rectas paralelas son las que, estando en el mismo plano y prolongadas al infinito, no se encuantran.

Postulados:

1.- Trazar una linea recta desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera.
2.- Prolongar de una manera ilimitada en línea recta una recta limitada.
3.- Describir un círculo para cada centro y para cada radio.
4.- Todos los ángulos rectos son iguales.
5.- Si una recta, al incidir sobre otras dos, forma del mismo lado ángulos internos menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas al infinito se encontrarán en el lado en que estén los ángulos menores que dos rectos.

Proclo trata de elucidar sobre las diferencias entre nociones comunes y postulados; por ejemplo, las nociones comunes (o axiomas) son afirmaciones acerca de magnitudes; los postulados son de carácter más particular y dicen algo acerca de la posibilidad de construcción geométrica.

Nociones Comunes.

1.- Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.
2.- Si a cosas iguales se agregan cosas iguales, los totales son iguales.
3.- Si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.
4.- Si a cosas desiguales se agregan cosas iguales, los totales son desiguales.
5.- Las cosas dobles de una misma cosa son iguales entre sí

6.- Las cosas mitades de una misma cosa son iguales entre sí.
7.- Las cosas congruentes entre sí, son iguales entre sí.
8.- El todo es mayor que la parte.
9.- Dos rectas no comprenden espacio.

En términos generales podemos hacernos una idea de los temas tratados en cada libro, y los principales autores recogidos en ellos. Para esto nos servirá el siguiente enlistado:

LIBRO I	Contiene los axiomas y postulados de todos los libros. Demuestra las 28 primeras proposiciones sin usar el 5° postulado. Proposición 5: atribuida a Tales de Mileto Proposición 47: teorema de Pitágoras.
LIBRO II	Da pruebas geométricas de fórmulas algebraicas.
LIBROS III y IV	Trata de la geomatría de círculos: inscripción y circunscripción de polígonos regulares.
LIBRO V	Trata el teorema de proporción de magnitudes de Eudoxio. Las cortaduras de Dedekind se basan en ideas cercanas a éstas.
LIBRO VI	Aplicación del teorema de proporción de Eudoxio a semejanza de --- figuras planas. Proposición 3: generalización de teorema de Pitágoras.
LIBROS VII VIII y IX	Llamados libros aritméticos. Trata sobre divisibilidad, números primos y máximo común divisor. También sobre proporcionalidad entre números (diferente de la proporcionalidad entre magnitudes). Los tres libros fueron conocidos por los pitagóricos y son más antiguos que otras partes de los Elementos. Poseen un alto nivel científico, al contrario de otras partes de la obra, en que se contienen errores y donde el significado de los términos es confuso.

Euclides sigue en todas sus demostraciones el siguiente esquema: comienza postulando las características básicas de sus entes elementales y después formula cada uno de sus teoremas primero con una simple afirmación. A continuación, explica esta afirmación por medio de un ejemplo que puede ser considerado como "concreto" en un cierto sentido del término. Luego desarrolla la demostración de la afirmación con la ayuda del ejemplo "concreto". En la última frase de cada demostración, se repite el teorema formulado al comienzo en forma general pero referido al ejemplo "concreto". Finalmente, se llama la atención - sobre esta repetición con la frase estereotipada con la cual Euclides cierra todas sus demostraciones: οχερ εσειαι ξαι - QUOD ERAT DEMONSTRANDUM.

El método presentado en la obra de Euclides fue utilizado por Arquímides (287 -212 A.C.) en sus dos libros, los cuales suministraron el fundamento de la -- ciencia de la mecánica teórica; en el libro I de este tratado, Arquímides demostraba 15 proposiciones partiendo de 7 postulados.

Los famosos principia de Newton, publicados por primera vez en 1686, están organizados como un sistema deductivo en el que las leyes más conocidas del movimiento aparecen como proposiciones indemostradas, o postulados, dados al -- principio.

El tratamiento de la mecánica analítica publicado por Lagrange en 1788 ha sido considerado como una obra maestra de perfección lógica, que parte de proposiciones primitivas formuladas explícitamente para conseguir las demás proposiciones del sistema.[46]

> "Nunca ha habido y hasta donde podemos ver, nunca creeremos que pueda existir un sistema de geometría digno del hombre, que no -- tenga ningún punto de partida (no hablamos de correciones, extensiones o desarrollos) del plan trazado por Euclides" [47]

De Morgan escribió esto en octubre de 1848 y pienso que, si viviera hoy, no - habría visto razón para revisar la opinión tan deliberadamente pronunciada hace casi un siglo y medio. Es cierto que con los años que han pasado, se ha hecho mucho trabajo valioso sobre la investigación de los primeros principios, incluyendo la formulación y clasificación de axiomas y postulados, los cuales son necesarios para salir al paso de las deficiencias de los propios postulados explícitos de Euclides y para justificar las posteriores suposiciones que tácitamente hace en algunas proposiciones, satisfecho aparentemente de dejar que su verdad fuera inferida de la observación de las figuras como estaban - dibujadas; pero una vez que los primeros principios están ordenados, el cuerpo de doctrina contenido en los recientes libros de texto de geometría elemental, no muestran, y por la naturaleza del caso no pueden mostrar, ninguna diferencia sustancial de lo exhibido en los Elementos.

Los esfuerzos de muchos escritores se han dirigido más bien a producir alternativas para Euclides que puedan ser más asequibles, es decir, más fáciles para los estudiantes.

La geometría clásica, bajo la forma que le dió Euclides en sus Elementos, pasó durante mucho tiempo por un modelo insuperable y aún difícilmente igualable de teoría deductiva. Los términos propios de la teoría jamás se introducen en ésta sin ser definidos; las proposiciones jamás se adelantan sin ser - demostradas, a excepción de un pequeño número de ellas, que se enuncian en -- primer lugar a título de principios: la demostración no puede, en efecto, remontarse al infinito y debe sin duda reposar sobre algunas proposiciones primeras, pero se ha tenido cuidado en elegirlas de tal manera, que no subsista ninguna duda al respecto en un espíritu sano. Aunque todo lo que se afirma -- sea empíricamente verdadero, no se invoca a la experiencia como justificación: el geómetra no p :cede sino por vía demostrativa, no funda sus pruebas sino sobre lo que se ha establecido anteriormente, conformándose con con las solas leyes de la lógica. Así, cada teorema se encuentra unido por una relación necesaria a las proposiciones, de las cuales se deduce como consecuencia, de -- suerte que, paso a paso, se constituye una red apretada en donde, directa o indirectamente, todas las proposiciones comunican entre sí. El conjunto forma un sistema del cual no se podría distraer o modificar una parte sin comprometer el todo.

Los griegos razonaron con toda la exactitud posible en las matemáticas, y dejaron al género humano modelos del arte de demostrar. Con ellos, la geometría dejó de ser una colección de recetas prácticas o, cuando más, de enunciados empíricos, para llegar a ser una ciencia racional.

No obstante, ha parecido cada vez mejor que, si la geometría euclideana había seguido siendo durante mucho tiempo el ejemplo más cumplido que se pudiera -- citar de una teoría deductiva, el aparato lógico que la sostenía no era en modo alguno irreprochable. Algunas de estas imperfecciones habían sido advertidas muy pronto, pero no fue sino hasta el siglo XIX, cuando se midió la distancia que subsistía entre la exposición tradicional y una teoría deductiva ideal. Uno de los rasgos que distinguen mejor a las matemáticas desde esta -- época, es en efecto, un acrecentamiento súbito del afan de rigor lógico.

Examinada así, con una severidad nueva, la deducción geométrica clásica se revelaba defectuosa en muchos puntos. Se hicieron esfuerzos por rectificarla y el resultado fue la presentación axiomática de la teoría.

Trataremos de describir dicho proceso en los siguientes apartados del capítulo.

2.4 METODO AXIOMATICO EUCLIDEO Y SURGIMIENTO DEL METODO AXIOMATICO FORMAL.

A. METODO EUCLIDEO Y ARISTOTELES.

El método axiomático de Euclides, se basa en las aportaciones de Aristóteles a la teoría de la definición y al establecimiento de primeros principios, a saber: nociones comunes o axiomas, postulados o hipótesis; de los cuales proceden todas las demostraciones.

Aristóteles y probablemente también otros autores del periodo, tenían una noción muy correcta de la naturaleza de una ciencia demostrativa; y la deduc---

ción lógica de las proposiciones matemáticas era corriente en la Academia -- platónica y también entre los pitagóricos. No obstante, la influencia de la - obra de Euclides ha sido enorme; probablemente no hay ningún otro documento - que haya tenido mayor influencia en el pensamiento científico.

El punto de vista de Aristóteles sobre la naturaleza de la ciencia demostrativa al parecer influyó decisivamente en Euclides cuando estaba organizando los Elementos. En cualquier caso, lo que Aristóteles ha de decir acerca de las definiciones, postulados y nociones comunes, aclara lo que Euclides estaba tratando de hacer. Hemos visto que Aristóteles consideraba las definiciones como objetivas y verdaderas. Son objetivas en el sentido de que no pueden violar - el uso establecido. Por tanto sería erróneo definir círculo como aquello que es al mismo tiempo equilátero y rectángulo. Son verdaderas en un sentido derivado. Hablando estrictamente, una definición se refiere solamente a la esencia de una cosa, y no dice nada acerca de su existencia. Sin embargo, una definición llega a ser verdadera si es probado que el objetivo que corresponde a una definición existe y que tiene propiedades esenciales que requiere la definición. Así por ejemplo, la definición 20 de Euclides del triángulo equilátero: "entre las figuras triláteras el triángulo es equilátero si tiene los tres lados iguales", es objetiva en el sentido de que armoniza con el uso establecido. Se convierte en verdadera, en conjunción con la proposición I.1: - es posible construir un triángulo equilátero sobre un segemento dado , que -- prueba que los triángulos equiláteros existen con propiedades especificadas. Desde luego no podemos probar que todo lo que corresponde a las definiciones existe; de acuerdo con Aristóteles, en geometria se debe suponer la existencia de algunas cosas: a saber, puntos y líneas.

Una de las funciones de los postulados es hacer explícitas estas suposiciones. Así, el postulado 1: "es posible trazar una línea recta desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera", afirma la existencia de líneas rectas; el -- postulado 3: "es posible describir un círculo para cada centro y para cada radio", afirma la existencia de círculos. Es verdad que Euclides no supone explícitamente la existencia de puntos, pero nosotros podemos suponer que lo hizo indirectamente a través de la tercera definición, en cuyo caso debe ser demostrado que la primera definición y la tercera coinciden, o suponer que está omisión representa una falla de los Elementos para cumplir los requerimientos de Aristóteles.

Una segunda función de los postulados es afirmar la posibilidad de ciertas -- construcciones. Por ejemplo, el postulado 1 garantiza la construcción, no sólo de una línea, sino de una línea recta. Finalmente, los postulados también afirman relaciones básicas que son necesarias para probar los teoremas de la materia que se investiga. Los postulados 4 y 5 son ejemplos de esta clase.

Las Nociones Comunes (Aristóteles usa el término Opiniones Comunes), son suposiciones básicas, que son comunes a varias ciencias, mientras que los postulados hacen uso de términos que son especificamente geométricos. Así, por ejemplo, la Noción Común1; "cosas iguales a una tercera son iguales entre sí", es aplicable tanto a la aritmética como a la geometría, al menos no sin cambiar el significado de los términos usados.

Como Aristóteles mismo dice:

> "Atendiendo a los principios de la demostración, es cuestionable el hecho de que pertenezcan a una ciencia o a varias. -- Por principio de demostración, considero las Opiniones Comunes, de las cuales procede toda demostración...por ejemplo, -- que uno de los contrarios debe ser cierto y que es imposible a una misma cosa - ser y no ser" [48]

Esto último no es otra cosa que el llamado *principio de no contradicción*, ampliamente usado en filosofía y, en el terreno de la matemática, usado desde - un principio por los matemáticos griegos y, por ende, usado por Euclides.

Finalmente, las proposiciones o teoremas son pensados como derivados de las - definiciones, postulados y nociones comunes, sin ninguna suposición adicional. Es extremadamente difícil hacer esto de un modo sistemático. Por ejemplo, aún la proposición I.1 de Euclides es deficiente en cuanto que hace una suposición que no es derivable de definiciones, postulados y nociones comunes, a saber, que los círculos construídos se encontrarán en el punto C. Sin embargo, este es seguramente un error, y Euclides no dudaría en haber agregado un postulado para corregir este caso, de haberlo advertido.

Hay un último requerimiento aristotélico para un sistema axiomático: que los axiomas sean mejor conocidos que, más simples que, más ciertos que -en fin -- epistemológicamente anteriores a- los teoremas. De otro modo el sistema comete la falacia de dar por sentado lo mismo que se arguye. Una persona comete - esta falacia o cuando trata de probar lo que ya es epistemológicamente anterior (en cuyo caso lo mejor que se puede hacer es asumir disimuladamente lo - que se está tratando de probar), o cuando supone como un axioma lo que no es anterior (en cuyo caso cosas más simples y más ciertas que el axioma seguiría de él). En este último caso la prueba es fraudulenta, ya que lo - que se prueba está menos en duda que las premisas originales.

El sistema de Euclides parece satisfacer este último requisito en casi todos los aspectos: no se demuestran postulados y nociones comunes; de hecho, no -- hay discusión alguna, acerca de por qué debemos aceptarlos como verdaderos. - Las nociones comunes son claramente autoevidentes. Los tres primeros postulados al parecer proponen las construcciones más simples posibles, el cuarto -- postulado la determinabilidad de los ángulos rectos.

Es solamente respecto al *quinto postulado* que aparentemente falló, por dos razones:

1. En caso de ser cierto, no parece ser epistemológicamente anterior; es decir, parece necesitar prueba a partir de otras proposiciones que serían esencialmente más simples.

2. Aunque es plausible, podría aún no ser verdadero, ya que son conocidas otras líneas que convergen pero no se cortan (por ejemplo, una hipérbola y su asíntota).

Esto se ampliará al hablar de los postulados en la siguiente sección.

Las principales críticas al Método Axiomático euclideano fueron suscitadas por una reflexión sobre la deducción geométrica. Dichas críticas culminaron con el surgimiento del Método Axiomático Formal. A continuación veremos a grandes rasgos esta transformación en cada uno de los principios del método de Euclides.

B. DEFECTOS DEL APARATO EUCLIDEO.

2.4.1 Los postulados.

Estos postulados eran vistos como expresiones de verdades evidentes acerca del concepto de espacio dictado por la experiencia del hombre en el mundo físico. Como veremos, este punto de vista persistió en el siglo XIX.

Sin embargo, el mismo Euclides parece haber considerado algunos de estos postulados como "más evidentes" que otros.

La primera cosa que atormentó a los lectores de Euclides, amigos del rigor, fue la intervención de los postulados. Lo que molestó en primer lugar, no eran propiamente los tres postulados que figuran a la cabeza de los Elementos, al lado de las definiciones y los axiomas, y que tienen un carácter operatorio muy general, con la única mira de anunciar que uno se permitirá construcciones con la regla y el compás. Pero, después de haber comenzado la cadena de sus deducciones, ocurre dos veces que Euclides, en el curso mismo de una demostración y para las necesidades de esta, invoca una proposición muy particular, que pide se le otorgue, sin poder justificarla de otra manera que por una suerte de llamado a la evidencia intuitiva. Así es como, para demostrar su proposición 29: "una recta que incide sobre dos paralelas forma ángulos alternos iguales entre sí y el externo igual al interno y opuesto y los internos del mismo lado iguales a dos rectos", necesita admitir que, por un punto fuera de la recta, no pasa más que una sola paralela a esta recta. La sime—

tría aparente entre la proposición que enuncia que por un lado pasa al menos una paralela, proposición que se establece por una demostración (teorema de existencia), y la que enuncia que pasa una a lo sumo (postulado de unicidad), hacía más escandalosa aún la simetría de las justificaciones. El postulado de la paralela sobrevenía así como un eslabón extraño al sistema, como un expediente destinado a llenar una laguna del encadenamiento lógico.

Este postulado tenía, a los ojos de los geómetras, el aspecto empírico, cuya verdad no era puesto en cuestión, pero cuya demostración quedaba por descubrir. Los sabios alejandrinos, árabes y modernos se aplicaron sucesivamente en ello, pero siempre el análisis revelaba que las pretendidas demostraciones se fundaban en alguna otra suposición, que muy frecuentemente quedaba implícita: no se había hecho sino cambiar de postulado.

Este postulado -talón de Aquiles de la Geometría griega- es el llamado por antonomasia "postulado de Euclides", y ha hecho gastar en comentarios e intentos de demostración montañas de papel y mares de tinta. Visto lo cual, no nos introducimos de lleno en este punto concreto por factores de tiempo y espacio y, sobretodo, porque no es esencial a la temática planteada en este trabajo de tesis.

Cabe mencionar, no obstante, el hecho de que Euclides no hace uso del postulado 5 sino hasta mencionar la proposición 29, lo que prueba que el autor trató de evitarlo en las 28 antetiores, que, por ser independientes del famoso postulado, autorizan a considerar a Euclides como el fundador de la Geometría absoluta. Esto permite sospechar que lo consideraba de menor evidencia que los otros cuatro, lo cual da pie a decir que el primer tratado de Geometría no-euclidea lo constituyen las veintiocho primeras proposiciones de la Geometría euclidea.

2.4.2 <u>Las figuras</u>.

En Euclides el postulado de las paralelas hacía, a la intuición espacial, un llamado explícito, pero aparentemente excepcional. En realidad ha sido invocacada a todo lo largo de las demostraciones, y Poincaré podía decir justamente que, en esa vasta construcción donde los antiguos no encontraban ningún defecto lógico, todas las piezas se deben a la intuición. En un sentido, nada era sin embargo más manifiesto: las figuras mismas lo declaran. Pero en el texto no lo dice expresamente en modo alguno; hace creer que las figuras no están ahí sino como simples auxiliares del razonamiento, las cuales duplican en cierta forma la demostración lógica mediante una ilustración sensible, sin serle indispensables. No hay nada de ello: suprimamos la figura, trazado o imaginada, y la demostación se viene abajo. No vayamos más lejos de la primera proposición de Euclides, que es un problema: construir un triángulo equilátero sobre un segmento de recta dado AB. Se trazan dos círculos de radio AB, uno con A como centro, otro con B: el punto de intersección M cuya distancia a A o a B es la del radio AB, será el tercer vértice buscado. Más, para quien no ve o no se representa mentalmente la figura, la demostración es deficiente: ¿cómo sabe uno que los dos círculos se cortan?. La existencia del punto M ha sido mostrada, no demostrada.

Se ha discutido mucho para saber si la consideración de las figuras era esencial a la especulación geométrica. Si las demostraciones geométricas clásicas son tomadas como modelo, entonces es verdad que la intuición -contemplación y aún construcción- debe intervenir ahí. Tal era, se sabe, una de las tesis que Kant puso como base de su Crítica. Que se de a un filósofo, decía, el concepto del triángulo: por mucho que lo analice, considere los conceptos más elementales de la línea recta, del ángulo, del número 3, jamás descubrirá ahí la propiedad de que la suma de sus ángulos sea igual a dos rectos. Que se someta ahora la cuestión al geómetra: éste construye un triángulo, prolonga uno de los lados, etc., y llega al resultado por una cadena de razonamientos guiada constantemente por la intuición. Tesis análogas han sido retomadas por Cournot, Goblot y, bajo una forma más refinada por los matemáticos intuicionistas contemporáneos, los cuales rechazan cualquier intento de basar la aritmética elemental en algún sistema más fundamental y consideran los enteros positivos como una realidad intuitiva que sirve como base segura sobre la cual construir. Este movimiento fué encabezado por Brouwer (1881 - 1968), quién vió la idea de existencia en matemática como sinónimo de constructibilidad y la de verdad como sinónimo de demostrabilidad. De modo que afirmar la verdad de un enunciado matemático, es afirmar que tenemos una prueba de él. De modo similar, el afirmar que el enunciado matemático es falso significa que tenemos una prueba de que si suponemos que el enunciado es verdadero, esto nos lleva a una contradicción.

Sin embargo, es posible otra conclusión: si se piensa que el llamado a la intuición es una falta en una construcción que se presenta como lógica, entonces uno se propondrá corregir los métodos clásicos de demostración para substituir la intuición por su equivalente intelectual. Le es muy necesario, por lo demás, con las nuevas geometrías, cuyos espacios ya no se dejan casi representar en la intuición.

Cuando se debe recurrir a figuras, es evidentemente porque dicen a los ojos cosas que el texto, que se dirige a la sola inteligencia, sobreentiende. La fuerza de la intuición es tal, que aún su ausencia no se nota. Por ejemplo, no hace apenas sino un siglo que se advirtió que en ninguna parte Euclides enunció la proposición siguiente que no deja sin embargo de utilizar: si una recta tiene dos puntos en un plano, está contenida en éste completamente. En las exposiciones clásicas de geometría, un análisis atento descubre así un gran número de proposiciones implícitas. En primer lugar, las proposiciones de existencia. La posibilidad de construirla en la intuición prueba seguramente que la noción de la cual se trata no envuelve contradicción, pero es una prueba de hecho, no una justificación racional. Después, las proposiciones que se refieren a la co congruencia y que están implicadas en diversas operaciones, a las cuales se entrega mentalmente el geómetra: por ejemplo, regresar una figura para hacerla coincidir con su propio trazo. Los Elementos no enuncian expresamente más que una sola proposición de esta naturaleza, que colocan por lo demás entre los axiomas. Mencionemos aún las proposiciones que enuncian propiedades topológicas, es decir, que conciernen al orden y a la continuidad, independientemente de toda consideración de ángulos y de métrica. Euclides y sus sucesores, hasta el último siglo, pasaron regularmente en silencio estas propiedades, utilizandolas no obstante a cada paso, porque la visión de la figura las sugería suficientemente. Es claro que un método riguroso no puede permitirse este recurso permanente a la intuición. Exige que todas las propiedades supuestas sean enunciadas bajo la forma explícita de proposiciones: las que se demuestren, serán afirmadas como teoremas, las otras irán a aumentar el número de los postulados.

2.4.3 Los axiomas o nociones comunes.

Al lado de los postulados se colocan tradicionalmente, para completar los principios de la geometría, los axiomas, que son otro nombre para las "nociones comunes" de Euclídes, y las definiciones.

La separación entre los axiomas y los postulados quedó a menudo indecisa. Frecuentemente las dos palabras han sido, y son aún, tomadas indiferentemente la una por la otra: como prueba, el nombre mismo de la axiomática, que se llamaría sin duda más justamente una postulática. Los editores de Euclides que han vuelto a poner a la cabeza de los Elementos las propiedades que éste había postulado en el curso de sus demostraciones, las han colocado, una veces a continuación de las "proposiciones", otras veces a continuación de las "nociones comunes". En la medida en que se le distingue del postulado, el axioma envuelve en primer lugar la idea de una evidencia intelectual. Mientras el postulado es una proposición analítica que constituiría un absurdo negar. Además funcionaría como un principio puramente formal, regulando los pasos del razonamiento, pero sin llevarle, contrariamente a los otros principios, alimento alguno. Estas dos ideas se únen en la tesis, largo tiempo propagada -pero jamás justificada por un análisis preciso-, que hacía de los axiomas simples especificaciones de leyes lógicas, aplicadas a la cantidad.

Ahora bien, la noción de evidencia despierta cada vez más y más la desconfianza del matemático. El sentimiento de la evidencia es engañoso y su dominio varía según el temperamento intelectual de cada uno. Si uno quisiera apoyarse en él, los espíritus intuitivos pedirían sin duda que se suprimiera más de una demostración, menos evidente para ellos que el teorema que se supone tal demostración justifica. Otros, al contrario, más exigentes, rehusarían reconocer tal axioma como incondicionalmente necesario. Y es verdad que algunos de los axiomas de Euclides han sufrido, en la matemática moderna, una suerte de degradación: por ejemplo el que enuncia que el todo es mayor que la parte, no vale, en un cierto sentido, más que para definir tales conjuntos: (en el sentido en que "es mayor que" se entiende como"tiene potencia superior a", el axioma deja, en efecto, de valer para los conjuntos infinitos -en donde, no obstante, el todo "contine con una demasía", a la parte); en este sentido ya no es una proposición analítica, es una convención que delimita un cierto campo y a la cual el espíritu no está en manera alguna sujeto. Por lo demás, el papel que se ha hecho jugar a la evidencia durante largo tiempo está ligado al ideal de una matemática categórica, en donde lo que no está demostrado, debe sin embargo, de alguna manera, exhibir sus títulos en orden a la verdad Ello se afina en una concepción hipotético-deductiva,centrada en la idea de <u>coherencia lógica más bien que en verdad absoluta</u>. Al poner así en el primer plano la idea del sistema, se impone reducir al mínimo las proposiciones independientes. Pero si uno se esfuerza así por demostrar los axiomas, es dentro de un espíritu muy diferente al que inspiraba a Leibniz cuando formulaba la misma exigencia. Porque no se trata ya de reducirlos a proposiciones idénticas a fin de hacer resplandecer su evidencia, se trata simplemente de reducir al mínimo la base del sistema, debiendo aparecer los principios, de donde deducirán los axiomas, intuitivamente menos evidentes que ellos.

Estas últimas consideraciones valen sobre todo, es cierto, para la verdad material de las proposiciones, y pierden su fuerza aplicadas a principios formales y reguladores. Pero, sobre este punto, la teoría clásica carece aún de claridad. Pone los axiomas en una situación intermedia entre las proposiciones lógicas y las proposiciones geométricas: reguladores como las primeras, se refieren a la cantidad como las segundas. Pero, o bien se puede obtenerlas aplicando los principios de la lógica a las primeras nociones matemáticas, y en tal caso es necesario hacerlo y borrarlas del número de las proposiciones primeras de la geometría, para contarlas como proposiciones de lógica aplicada. O bien son rebeldes a tal reducción y esta resistencia manifiesta su carácter de de postulados. Conviene, pues, disociar los axiomas, de manera que una parte pase a los postulados y la otra caiga fuera de la geometría. Ya no habrá lugar para ellos entre los principios de la geometría, al nivel y al lado de los postulados.

2.4.4 <u>Las definiciones.</u>

Menos aún se necesita contar las defínciones entre los primeros principios. Hay ahí un error lógico sorprendente, que un instante de reflexión basta para disipar. Se justifica el recurso a proposiciones primeras invocando la imposibilidad de demostrar todo. Ahora bien, las mismas razones que valen para la demostracion, valen evidentemente para la definición. Se define un término mediante otros términos, éstos a su vez mediante otros, de suerte que, para evitar la regresión al infinito, es necesario sin duda detenerse en algunos términos no definidos, así como las demostraciones deben apoyarse sobre algunas proposiciones no demostradas. Estos términos irreductibles constituyen, para retomar una comparación de Russell, una suerte de alfabeto geométrico: sirven para deletrear, es decir, entran como elementos para componer las definiciones, pero ellos mismos son indefinibles. Estos indefinibles son los que conviene enunciar a la cabeza de la teoría deductiva, y no las definiciones intermedias,con la ayuda de términos primeros -exactamente como intervienen las demostraciones para justificar proposiciones nuevas con la ayuda de las proposiciones primeras. (Esta analogía funcional entre definición y demostración fue muy bien señalada por Pascal, en su fragmento "De l'esprit géométrique").

También las "definiciones" iniciales de Euclides no tienen de definiciones más que la apariencia. Se reducen a simples descripciones empíricas, comparables a las que daría un diccionario, que tuviera por objeto dirigir el espíritu hacia la noción de que se trata. Son propiamente designaciones. Por esto es por lo que casi no satisfacen a la función que parece asignárseles: enunciar las propiedades fundamentales, las que se utilizarán a fin de obtener de ahí todas las otras, en las proposiciones en donde figurará el término definido. Euclides define la línea recta: "la que descansa igualmente sobre sus puntos"; Herón la sustituye por la definición siguiente, en apariencia más clara: "el camino más corto entre dos puntos" Leibniz advierte con razón que la mayor parte de los teoremas que se apoyan sobre la recta no utilizan ni una ni otra de estas dos propiedades. Por un lado, tales definiciones son, pues, superfluas. Y por otra parte, disfrazan ausencia de proposiciones que enuncian las propiedades útiles, por ejemplo ésta, que explicarán más tarde los editores de Euclides: "dos rectas no encierran un espacio". Esta discordancia entre las propiedades enunciadas en la pseudo-definición y las propiedades efectivamente utilizadas después, constituye una falta lógica grave, porque hace nacer una sospecha sobre la identidad de la noción: ¿qué nos asegura que la recta de la cual hablan los teoremas es ciertamente aquella misma que se pedía a la definición introducir?

De una manera general, trátese de falsas definiciones iniciales o de verdaderas definiciones ulteriores, las exposiciones clásicas de geometría cometen con mucha frecuencia el error de presentar como aparentemente simples fórmulas donde se combinan en realidad dos enunciados de naturaleza muy diferente, una proposición y una denominación; y sin duda, esta confusión está en el origen de la tesis propagada durante largo tiempo, que ve en las definiciones los principios fecundos de donde los teoremas obtendrían toda su sustancia. Sea la definición 15 de Euclides: "círculo es la figura plana terminada por una línea tal que todas las rectas que la únen en un cierto punto interior a la figura son iguales entre sí". Significa dos cosas;

1. Es posible determinar una figura plana por una línea recta tal que... etcétera;
2. Se llamará "círculo" una figura tal.

Este segundo enunciado -al que sin duda sería más pertinente reservar el nombre de "definición", puesto que el primero es propiamente una aserción- no concierne sino al lenguaje, y no aporta rigurosamente ningún nuevo contenido a la ciencia geométrica. Es una decisión o una convención que abrevia el discurso, que puede, por tanto, justificarse por su comodidad, pero no tiene nada que ver con la verdad. No se sigue que pueda uno arbitrariamente afirmar la proposición correspondiente: aquélla es verdadera o falsa y, bajo este título, fuente de verdades o contradicciones ulteriores. Por tanto, si se descarta como inadecuado el llamado implícito a la intuición, es necesario demostrarla como teorema o establecerla como postulado.

La utilidad de esta exigencia lógica aparecerá tanto mejor si la definición reúne bajo un mismo término un número mayor de propiedades heterogéneas: entonces no basta que cada una sea posible, es necesario que en conjunto sean integrables. Si uno no se asegura de su compatibilidad, se expone a cometer lo que Saccheri denunciaba como "error de definición compleja": como si yo pretendiera definir un poliedro regular que tuviera por caras hexágonos.

2.4.5 Demostración y definición.

Parece así que en el punto de partida de una teoría deductiva, concebida para satisfacer las exigencias lógicas, deberán figurar no únicamente los tres "principios" tradicionales:definiciones, axiomas y postulados, sino proposiciones no demostradas -que se llamarán indiferentemente axiomas o postulados- y términos no definidos: y todo el trabajo ulterior consistirá en construir a partir de ahí proposiciones nuevas, justificadas por medio de demostraciones y de términos nuevos, fijados por medio de definiciones. Demostración y definición, tales son, pues, las dos operaciones fundamentales mediante las que se desarrolla una teoría deductiva. Pero ¿qué condiciones debe satisfacer una buena demostración, una buena definición?. Eso depende del fin que se asigne a estas operaciones y, también sobre este punto, las exposiciones clásicas de geometría carecen a menudo de claridad. Parecen proponerse en forma simultánea dos cosas diferentes, y que no se concilian necesariamente. Sin duda, la confusión es aquí menos imputable a Euclides mismo que al largo uso pedagógico que se ha hecho de su obra. Pero tiende también a ese rasgo de la geometría clásica de pretender unir la verdad material de las proposiciones y la verdad formal de su encadenamiento: la exactitud empírica y el rigor lógico.

Si se pone en primer plano la verdad del contenido, entonces la demostración y la definición llegan a ser simples medios para establecerla. El papel de la definición será hacer concebir exactamente el sentido de los términos que componen las proposiciones,y el de la demostración, hacer admitir la verdad de éstas. Definición y demostración dependen entonces, propiamente hablando de la retórica; su función es esencialmente psicológica: pedagógica o didáctica. En la otra hipótesis, por el contrario, no tiene más que una función lógica: reunir todos los términos y todas las proposiciones en un conjunto sistemático. Ahora bien, es claro, en primer lugar, que las dos exigencias, eficiencia psicológica y rigor lógico, tiran a veces en sentidos opuestos; luego, que tan pronto como se vincula uno a la primera, el valor de una demostración o de una definición se vuelve relativo, y aun doblemente relativo: una demostración o una definición no es más buena o mala, es solamente mejor o menos buena que otra; y esta cualidad, a su vez, varía según el lector o el oyente.

Parece que entre los matemáticos mismos, las dos funciones no siempre han estado claramente disociadas. Si no, se comprendería mal que algunos hayan compartido el asombro que provoca, en el profano, más de una demostración de Euclides: ¿porqué afanarse en persuadirnos por un razonamiento difícil de cosas de las que estamos de antemano perfectamente seguros o incluso en demostrar lo más evidente por lo menos eviente?. La Lógica de Port-Royal cuenta entre los defectos que se encuentran de ordinario en el método de los geómetras el de probar cosas que no tienen necesidad de pruebas. Algunos buscan explicaciones y excusas, como hace Clairaut: "que Euclides se tome la molestia de demostrar que dos círculos que se cortan no tienen el mismo centro y que un triángulo encerrado en otro tiene la suma de sus lados más pequeña que la de los lados del triángulo en el cual está encerrado: uno no se sorprenderá de ello. Este geómetra tenía que convencer a sofistas obstinados, que hacían gala de rechazar las verdades más evidentes; era necesario, pues, que la geometría tuviera entonces, como la lógica, el auxilio de razonamientos en forma, para cerrar la boca a la chicana[49] Y Clairaut añade: "pero las cosas han cambiado de aspecto. Todo razonamiento que recae sobre lo que el buen sentido decide de antemano, viene a ser hoy pura pérdida y no es propio sino para obscurecer la verdad y disgustar a los lectores". La misma concepción fundamental del papel de la demostración en el filósofo Schopenhauer quien, menos indulgente, juzga francamente "absurdo" el método de Euclides y esta manía de sustituir la intuición por el discurso: es como si un hombre, dice, se cortara las dos piernas a fin de caminar con muletas.

Sin embargo, el "absurdo" mismo que se encuentra ahí ¿no debería hacer sospechar que uno se equivoca quizá sobre las intenciones de Euclides?. Que se pueda, como hace Pascal, mirar el razonamiento geométrico como un modelo del arte de convencer, parte él mismo del arte de persuadir, no implica que tal se su función primera y esencial. En efecto, sabemos que muchas de las proposiciones de Euclides eran conocidas antes de él y ...i no hay duda de que hayan sido admitidas como verdaderas por todos los expertos. Pero faltaba organizarlas lógicamente, unirlas unas a las otras por una red tupida. Aparentemente es lo que quiso hacer y, en todo caso, lo que realmente hizo Euclides. Y tal es, sin duda, ahora el propósito cada vez más y más declarado del matemático. Desde la época de Clairaut, las cosas han "cambiado de aspecto" una vez más. "En el sistema de todos los juicios verdaderos -escribía ya Bolzano- reina una conexión objetiva, independiente del hecho contingente de que la conozcamos de modo objetivo; por ella ciertos juicios son el fundamento de otros"[50] Despender estas conexiones objetivas, tal parecía, en adelante, el verdadero fin de la demostración en una teoría deductiva. Al mismo tiempo que la certidumbre subjetiva, se deja a un lado la verdad material de las proposiciones, y la matemática se convierte en hipotético-deductiva.

2.5 EL METODO AXIOMATICO FORMAL O HIPOTETICO-DEDUCTIVO.

Desde el princios del siglo XIX, la separación entre las dos concepciones de la ciencia y de la demostración matemáticas, había sido señalada, con una claridad perfecta, por un filósofo hoy ya olvidado, víctima del descrédito en que cayó la escuela escocesa. "En matemáticas -señalaba Dugald Stewart- nuestros razonamientos... no tienen por fin constatar verdades acerca de existencia reales, sino determinar la filiación lógica de las consecuencias que se derivan de una hipótesis dada. Si, partiendo de esta hipótesis, razonamos con exactitud,es manifiesto que nada podría faltar a la evidencia del resultado pues este resultado se limita a afirmar un enlace necesario entre la suposición y la conclusión ... De estas proposiciones no se puede decir que son verdaderas y falsas, al menos en el sentido en que se les llama proposiciones relativas a los hechos ... cuando se dice de estas proposiciones que las unas son verdaderas, las otras falsas, estos epitetos se refieren únicamente a su conexión con los datos, no a su relación con cosas actualmente existentes o a acontecimientos futuros" [51]

Así como la demostración vacila entre una función psicológica (determinar el asentimiento) y una función lógica (organizar las proposiciones en sistema), asimismo la definición se instala unas veces en el plano del pensamiento,otras en el del discurso, y muy a menudo pretende hacer a la vez lo uno y lo otro. Apunta, como su nombre lo sugiere, a delimitar la comprensión de una idea, pero también a establecer una equivalencia lógica entre un término nuevo, y un conjunto de téminos anteriormente introducidos: el medio viene a ser un nuevo fin, que a menudo se añade al primero sin borrarlo. De ahí una fluctuación que se observa hasta en la matemática casi contemporánea. Recordemos solamente las burlas de Poincaré sobre la definición de número uno en la matemática simbolizada de la escuela de Peano: "definición eminentemente propia, -dice con ironía- para dar una idea del número uno a las personas que jamás hubieran oído hablar de él" [52]

Uno de los primeros beneficios del método axiomático será disipar estas confusiones, disociando la matemática pura, ciencia formal, y la matemática aplicada, ciencia de lo real; o más precisamente, obligando a tomar claramente partido y a escoger entre las dos lecturas de una misma teoría matemática, según que uno se interese en ella por la coherencia lógica o por la verdad empírica.

En la interpretación tradicional, la demostración matemática era categórica y apodíctica. Decía: siendo estos principios absolutamente verdaderos, tal proposición, que deduzco de ellos, es por consiguiente verdadera también. Aristóteles la llamaba: el silogismo de lo necesario.

Ahora dice solamente esto: si se pone, arbitrariamente, tal conjunto de principios, he aquí las consecuencias que, formalmente, resultan de él. La necesidad no reside más que en el lazo lógico que úne las proposiciones, se ha re tirado de las proposiciones mismas. La matemática ha llegado a ser, según la expresión de Pieri, un sistema hipotético-deductivo.

Como ilustración de lo anterior, tomemos la obra clásica de Hilbert acerca de los fundamentos de la geometría, publicada en 1899, la cual no aplica a las afirmaciones o suposiciones fundamentales más que el nombre de "axiomas" y, además, algunos términos básicos, como "punto" y "línea", quedan sin definir en absoluto.

Cierto que Hilbert clasifica sus axiomas -en cinco grupos-, pero esa clasificación se basa sólo en el carácter técnico de las afirmaciones, y no en su estatuto de "veracidad" o "universalidad".

Aunque la citada obra de Hilbert ha llegado a ser considerada por muchos como la primera que presenta el método axiomático en su forma moderna, hay que reconocer que aparecían ideas análogas en obras de sus contemporáneos.

Los estudios de Pasch, Peano, Hilbert, Pieri y otros, en la geometría euclídea, suministraron un enorme ímpetú a la investigación de posibles organizaciones formales del tema de esta antigua disciplina; estas consideraciones facilitaron, a su vez, la comprensión de los sistemas matemáticos en general, y dan razón parcialmente de los notables progresos matemáticos del siglo XX.

Vale la pena observar que estos primeros estudios en el campo de la geometría revelaron la gran generalidad inherente a los sistemas matemáticos formales. La matemática evolucionaba en una dirección que imponía el desarrollo de un método capaz de abarcar en una sola estructura de términos indefinidos y afirmaciones básicas, conceptos como los de grupo y espacio abstracto, que habían surgido en ramas de la matemática, aparentemente sin relación entre ellas. La economía del esfuerzo así conseguida es uno de los rasgos característicos de la matemática moderna.

Un sistema axiomático -se dice también: una teoría axiomatizada o, más brevemente, una axiomática- es, pues, la forma acabada que toma hoy una teoría deductiva. En manera alguna es aquel sistema quimérico con el que soñaba Pascal para espíritus sobre humanos en donde se definirían todos los términos y demostrarían todas las proposiciones, sino un sistema en donde son totalmente explicitados los términos no definidos y las proposiciones no demostradas, siendo establecidas estas últimas como simples hipótesis, a partir de las cuales las proposiciones del sistema pueden construirse según reglas lógicas perfectas expresamente determinadas.

Por otra parte, el alcance epistemológico de las nuevas teorías es considerable. En particular, han contribuido grandemente a desplazar el centro de interés de la geometría especulativa, transportándolo del contenido hacia la estructura, de la verdad extrínseca de las proposiciones aisladas hacia la coherencia interna del sistema total. La suma de los ángulos de un triángulo ¿es igual, inferior o superior a dos ángulos rectos?. De los tres casos concebibles, un geo metra antiguo habría respondido que el primero era verdadero, los otros dos -- falsos. Para uno moderno, se trata ahí de tres teoremas distintos,que no se ex cluyen mutuamente sino en el interior de un mismo sistema, según que el núme ro de las paralelas sea postulado igual, superior o inferior a uno, y que aún se toleran en un sistema debilitado y más general, donde el número de parale-- las posibles se deje en suspenso.

Muchos explican lo anterior haciendo ver que el que la experiencia en nuestra escala verifique una y solamente una de estas tres proposiciones, no concier- ne sino a la utilización práctica de la ciencia, no a la ciencia pura y desin- teresada.

La idea aparecida así con ocasión de la teoría de las paralelas, debe natural- mente extenderse al conjunto de los postulados. Vemos entonces disociarse el doble aspecto de verdad geométrica, hasta ahí íntimamente mezclados en una -- unión sorprendente. Un teorema de geometría era a la vez un informe sobre las cosas y una construcción del espíritu, una ley física y una pieza de un siste ma lógico, una verdad de hecho y una verdad de razón. De estas parejas paradó- jicas, la geometría abandona decididamente el primer elemento, que remite a la geometría aplicada. La verdad de los teoremas es sólo su integración al siste ma. En cuanto a los sistemas mismos,ya no es cuestión para ellos de verdad o falsedad, sino en el sentido lógico de la coherencia o de la contradicción in- terna.

2.5.1 Los términos indefinidos y los axiomas.

Tal como se utiliza comúnmente hoy día en matemática, el método axiomático con siste en asentar ciertas afirmaciones básicas acerca del concepto (por ejemplo, la geometría del plano) que hay que estudiar, usando algunos términos técnicos indefinidos y algunos términos de la lógica clásica. Por regla general no se - describen las significaciones de los términos lógicos ni se formulan reglas acerca de su uso, ni los métodos disponibles para demostrar teoremas; es posi- ble que estas omisiones constituyen una debilidad del método (con esto no esta mos describiendo el método en la forma usada por la moderna lógica matemática o en los tratados formalistas de Hilbert y sus seguidores, en los cuales las reglas para operar con los símbolos básicos y las fórmulas se dan, por necesi- dad, en el lenguaje común).

La afirmaciones básicas se ll man axiomas (o postulados, pero usando esta pala bra como sinónima de axiomas). Se supone que pueden emplearse las reglas de la lógica clásica sobre la contradicción y el "tercio excluso" para demostrar teo remas a partir de los axiomas; por eso es de uso común el tipo de demostración llamado "por reducción al absurdo". Se dice que las afirmaciones contenidas en los axiomas y en los teoremas demostrados a partir de ellos, están implicadas por los axiomas o deducidas de ellos. Un ejemplo puede ser instructivo:

Consideremos de nuevo la geometría plana. No hará falta recordar muchos detalles. Pero podemos tal vez suponer que el lector recuerda que puntos, líneas rectas y nociones como la de líneas paralelas son fundamentales. Pues bien, si tuviéramos que sentar un sistema axiomático para la geometría plana en su moderna forma rigurosa, tendríamos que empezar por seleccionar ciertos términos básicos que dejaríamos sin definir; tal vez incluyéramos entre ellos los términos "punto" y "línea" (el adjetivo "recta" puede omitirse, porque el carácter indefinido del término"línea" nos permite elegir como significación del mismo la de "línea recta", como haremos en la siguiente selección de enunciados para los axiomas). Luego examinaríamos las proposiciones de la geometría, intentando seleccionar algunas básicas teniendo en cuenta su simplicidad y su adecuación para dar de sí las otras no seleccionadas; a las primeras llamaríamos proposiciones primarias, o axiomas, y quedarían sin demostrar en nuestro sistema.

Para ser más explícitos procederemos como si efectivamente estuviéramos llevando a cabo dicho trabajo; aunque no pretendemos dar un sistema completo de axiomas, expondremos una muestra en miniatura de lo que pueden ser los axiomas y las proposiciones secundarias o teoremas, junto con algunas sencillas demostraciones de los últimos:

Términos indefinidos: punto; línea.

Axioma 1: Toda línea es un conjunto de puntos.
Axioma 2: Existen por lo menos dos puntos.
Axioma 3: Si p y q son puntos, entonces existe una y sólo una línea que contiene a p y q.
Axioma 4: Si L es una línea, entonces existe un punto que no está en L.
Axioma 5: Si L es una línea y p un punto no situado en ella, entonces existe una y sólo una línea que contine a p y es paralela a L.

Estos axiomas no bastarían, naturalmente, como base suficiente para la demostración de todos los teoremas de la geometría plana, pero sí serán suficientes para demostrar cierto número de teoremas que se encuentran en cualquier sistematización de la geometría plana. Su selección puede justificarse del modo siguiente: en primer lugar, los términos indefinidos "punto" y "línea" deben presentar un papel parecido al de las variables en álgebra. Así en la expresión

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

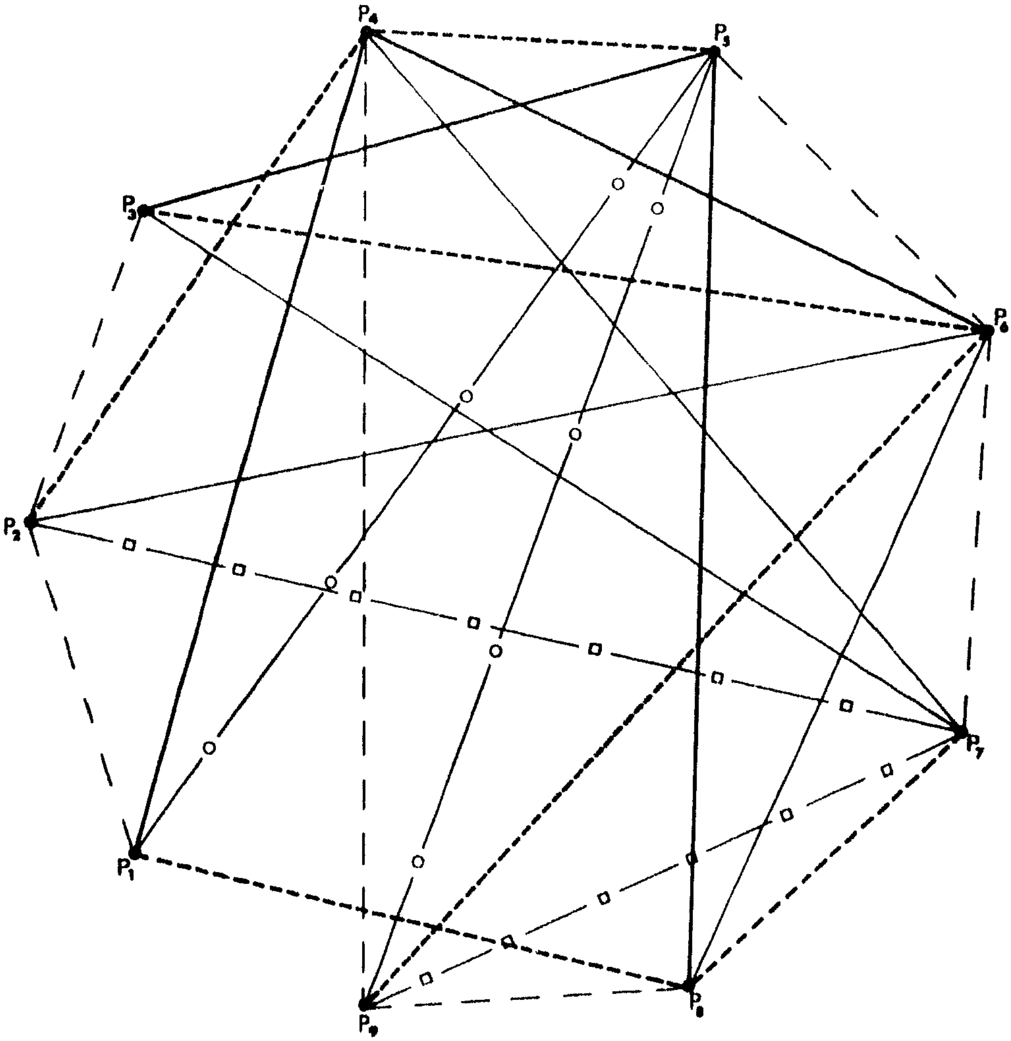
la x y la y son indefinidas en el sentido de que pueden representar números cualesquiera de un cierto dominio (por ejemplo, el dominio de los enteros ordinarios). En nuestro caso, "punto" puede ser cualquier individuo de un dominio lo suficientemente delimitado como para satisfacer las afirmaciones establecidas en los axiomas. Por otra parte; como indica el Axioma 1 "línea" tiene un campo de valores (significaciones) limitado a ciertos conjuntos de los individuos seleccionados como "puntos".

PROBLEMA. Encontrar una colección de nueve objetos (en lugar de cuatro, como hemos considerado hasta ahora), que "satisfaga" los axiomas de T., ennumerados en la página 91 .

Si definimos las líneas del sistema (L_1 ... L_{12}) como los siguientes conjuntos de puntos:

L_1 (P_1 , P_2 , P_3)	L_5 (P_2 , P_4 , P_5)	L_9 (P_3 , P_6 , P_9)
L_2 (P_1 , P_4 , P_6)	L_6 (P_2 , P_6 , P_8)	L_{10}(P_3 , P_7 , P_4)
L_3 (P_1 , P_5 , P_9)	L_7 (P_2 , P_7 , P_9)	L_{11}(P_4 , P_9 , P_8)
L_4 (P_1 , P_8 , P_7)	L_8 (P_3 , P_5 , P_8)	L_{12}(P_5 , P_6 , P_7)

Vemos claramente que se satisfacen los axiomas 1 a 5 del sistema T.



Así el Axioma 1 se destina a establecer una relación entre las entidades indefinidas punto y línea. No es una definición de la línea, puesto que (si se continúa el estudio del tema) habrá otras colecciones de puntos (como círculos, ángulos, etc.), que no serán líneas. El axioma 1 nos permite además, como vamos a ver, definir ciertos términos que necesitamos en la formulación de los demás axiomas. El Axioma 2 es el primer paso hacia la introducción de líneas en nuestra geometría, introducción que se realiza efectivamente al añadirle el Axioma 3.

Pero para que éste último pueda tener una significación necesitamos la siguiente definición formal:

Definición. Si un punto p es un elemento del conjunto de puntos que constituye una línea L (cfr. Axioma1), entonces decimos indiferentemente que L contiene a p, o que p se encuentra sobre L, o que L es una línea que contiene a p.

Establecidos los Axiomas 2 y 3, tendríamos que existe una línea en nuestra geometría; pero para tener una geometría plana, y no meramente una línea o una geometría "unidimensional", tendríamos que decir algo para asegurar que no todos los puntos se encuentran sobre una sola línea; el Axioma 4 está destinado a decir esto. Ahora podríamos imaginar intuitivamente (puesto que tenemos una línea, L, un punto p que no está sobre esa línea, y también una línea que pasa por p y por cada punto q de L) que tenemos prácticamente un plano; pero por lo que hace a la geometría euclídea aún poseemos una base suficiente, con los axiomas 1 - 4, que nos asegure acerca de la paralela a L por p; para ello tenemos que formular el Axioma 5, el cual desde luego, no tiene significación mientras no establezcamos la definición:

Definición. Se dice que dos líneas, L_1 y L_2 son paralelas si no hay ningún -- punto que esté a la vez sobre L_1 y L_2 . (podemos también decir que L_1 es paralela a L_2 , y recíprocamente).

Denotemos el anterior conjunto de cinco axiomas, junto con los términos indefinidos "punto" y "línea", por T, y llamémosle sistema axiomático T.

(Usaremos frecuentemente la expresión "sistema axiomático" también en un sentido más amplio, que incluya los teoremas, etc., implicados por los axiomas).

Subrayaremos para ulteriores fines dos aspectos de T, aunque por ahora no los estudiaremos del todo: 1° Además de los términos indefinidos geométricos - ("técnicos" "punto", "línea", hemos usado términos lógicos ("universales") indefinidos, como "colección", "hay" o "existe", "uno", "todo" y "no".2° T está lejos de ser un conjunto de axiomas adecuado para la geometría plana como puede demostrarse del modo siguiente: puesto que "punto" y "línea" no se definen, tenemos entera libertad para considerar posibles significaciones que atribuirles, sujetas naturalmente, a la restricción de que hemos de tener en cuenta - las afirmaciones hechas en los axiomas. Para personas educadas, por ejemplo, según la enseñanza americana o inglesa, la reacción a esos términos será sin duda inmediatamente especializada, porque la experiencia geométrica adquirida en esas escuelas domina dicha reacción. Pero imaginemos que los términos en -- cuestión no nos fueran nada familiares, mientras que los términos lógicos usados en los axiomas nos fueran, por el contrario, conocidos, de tal modo que -- efectivamente pudiéramos considerar otras significaciones para "punto" y "línea". Indiscutiblemente esto supondría una considerable experimentación antes de poder hallar significaciones adecuadas. Por ejemplo, podríamos empezar por hacer que "punto" significara libro, y "línea" biblioteca; por la afirmación - del Axioma 1 sabemos que una línea es un conjunto de puntos, y las bibliotecas son uno de los tipos de conjuntos más corriente de nuestra experiencia cotidiana. Podemos imaginar que vivimos en la ciudad C, que tiene dos bibliotecas distintas, y que por biblioteca entendemos una de las bibliotecas de C, y por libro uno cualquiera de los libros de esas dos bibliotecas. El axioma 2 se convierte asi en una afirmación verdadera: "Existen por lo menos dos libros". Pero no lo es el Axioma 3, puesto que, si p y q designan libros de diferentes bibliotecas, no hay biblioteca que contenga a la vez p y q. No obstante, antes de probar con otras significaciones para "punto" y "línea", observaremos que - los Axiomas 4 y 5 son válidos, pues se convierten respectivamente en: "Si L es una biblioteca, entonces existe por lo menos un libro que no está sobre (es decir, en) L, entonces existe una y sólo una biblioteca que continen a p y es paralela a (no tiene ningún libro en común con) L".

Aleccionados ahora por nuestro fracaso con el Axioma 3, que no ha quedado satisfecho en nuestro primer intento de dar significaciones a "punto" y "línea", podemos imaginar, pensando en ese axioma, una comunidad de personas representada por Z enla cual cada una pertenezca a algún club,pero de tal modo que si p y q son dos personas de Z, entonces exista un club y sólo uno del que sean miembros ambas p y q. Dicho de otro modo: podemos intentar que "punto" signifique una persona de Z y "línea" un club de Z, e imaginar que la situación de Z en - lo referente a clubs es tal que vale la afirmación hecha ahora, de modo que -- quede satisfecho el Axioma 3. No tendríamos entonces dificultad en ver que -- quedan satisfechos los Axiomas 1, 2 y 4: "Un club de Z es una colección de personas de Z"; "Existen por lo menos dos personas en Z", etc. Pero el Axioma 5 (con adecuados cambios en la frase para recoger las nuevas significaciones) se convierte en: "Si L es un club de Z, y p es una persona de Z que no pertenece al club L, entonces existe un club, y sólo uno, en Z, del cual es miembro p y que no tiene ningún miembro en común con L". Esta afirmación impone un convenio visiblemente demasiado fuerte sobre la situación de Z en lo referente a clubs, y puede imaginarse que sea falsa; en cualquier caso la estipulación de que sólo un club tiene un determinado par de personas como miembros no es para esperar que satisfaga al Axioma 5. Para hacer más tangible la situación, supongamos que Z es una comunidad "fantasma" de solo tres personas, a las que designaremos por a, b y c respectivamente; y que, como resultado de ciertas circunstancias, cada par ab, bc y ac guarda un secreto desconocido por el tercer miembro de la comunidad, de modo que podemos considerar este lazo que une a cada par como constitutivo de un club entre ellos (una "sociedad secreta"), que excluye al tercer miembro. Ahora, con las significaciones de "punto" y "línea" - que estamos considerando, valen los Axiomas 1-4, pero no vale el Axioma 5.

Pero antes de rechazar también éste último intento por imposible, imaginemos - que Z tiene cuatro ciudadanos, a, b, c y d. Y supongamos que cada par de estas personas forma un club que excluye a los otros dos miembros de la comunidad; o sea, hay seis clubs, que constan de ab, ac, ad, bc, bd y cd. Ahora quedan satisfechos todos los axiomas de T con las significaciones de persona de Z para - "punto" y club de Z para "línea". Y podemos observar que tendremos la misma situación tomando cualquier conjunto Z de cuatro cosas, a, b, c, d y "línea" cualquier par de elementos de Z; con esto se satisfacen las afirmaciones contenidas en los axiomas de T. Sin meternos en la significación, sino en el número de elementos del conjunto (En la página siguiente se ofrece un ejemplo detallado, en el cual el número de elementos es 9).

Aunque éste descubrimiento no nos produzca ninguna particular emoción -sino -- más bien la sensación de que esto de manipular posibles significaciones para el sistema T es un juego bastante trivial-, la experiencia puede tal vez tentarnos a buscar respuestas para preguntas como las siguientes: ¿cuántos "puntos" ha de tener una colección para servir como base de un ejemplo que satisfaga las afirmaciones de T?. (Por ejemplo, una "línea" del anterior ejemplo no - podía constar de tres personas de Z si Z constaba exactamente de cuatro ciudadanos). Además si tenemos ya un conocimiento general o alguna experiencia de la geometría plana, el anterior ejemplo nos muestra que T está lejos de ser una base suficiente para la geometría euclídea; sin duda un conjunto adecuado de axiomas para la geometría plana excluiría la posibilidad de que la geometría - permitiera un conjunto de sólo cuatro puntos como satisfactorio de todos los - axiomas.

Pero antes de seguir adelante con esta discusión general vamos a indicar cómo se demostrarían teoremas a partir de un sistema como T.

2.5.2 La demostración de teoremas.

Una vez formulado un sistema, como T, por ejemplo, procedemos a observar qué - afirmaciones quedan implicadas, o pueden demostrarse o deducirse a partir del sistema. A diferencia de lo que hicimos en la enseñanza media, cuando apelábamos a toda clase de proposiciones y supuestos no incluídos entre los términos fundamentales y los axiomas (como "anchura", cuando nos decían: "Una línea no tiene anchura"), y hasta diagramas y figuras para expresar propiedades que -- aceptábamos inmediatamente como parte de los instrumentos geométricos (Un ejemplo clásico es la conocida "demostración" de que todos los triángulos son -- isósceles, la cual se basa en un diagrama que engaña la vista al colocar un determinado punto dentro de un ángulo en vez de fuera de él, que es donde lo colocaría un razonamiento riguroso acerca de la situación. Esta curiosidad puede verse en J.W. Young, lectures of the Fundamental Concepts of Algebra an Geometry, Nueva York, 1916, pp. 143-145). Ahora tenemos que ser muy cuidadosos en - no usar mas que puntos, líneas y las relaciones y propiedades de puntos afirma das en los axiomas. (Como es natural, una vez demostrada una afirmación pode-- mos usarla en demostraciones posteriores, sin necesidad de remontarnos cada -- vez a los axiomas para volver a demostrarla). No hay nada que objetar al uso - de diagramas, siempre que el uso tenga como único sentido la ayuda al proceso de razonamiento y no nos mueva a hacer suposiciones no implicadas por los axio mas: en realidad, el matemático profesional usa constantemente diagramas y fi- guras.

Consideremos el siguiente teorema formal y su demostración:

Teorema 1. Todo punto se encuentra al menos sobre dos líneas distintas.

Demostración. Supongamos que p denota un punto cualquiera. Como por el Axioma 2, existen por lo menos dos puntos, tiene que existir otro punto q distinto de p. Y por el Axioma 3 existe una línea L que contine a p y q. Además, por el - Axioma 4 existe un punto, r que no se encuentra sobre L, y también (por el Axioma 3 de nuevo) una línea K que contiene a p y r.

Ahora bien: por el Axioma 1 toda línea es un conjunto de puntos. Por tanto, pa ra que dos líneas sean distintas (es decir, diferentes), los dos conjuntos que las contituyen deben ser diferentes; o, lo que es equivalente, una de ellas de be contener por lo menos un punto que no se encuentre sobre la otra. Las lín-- neas L y K son distintas, porque K contine el punto r, que no está sobre L. Y como p está sobre K y sobre L, queda demostrado el teorema.

Se observará que hemos usado en la demostración los Axiomas 1-4, pero no el - Axioma 5. Por tanto, podríamos volver al ejemplo de la comunidad Z, hacer que "punto" significara persona de Z y "línea" par de personas de Z, volver a for- mular los Axiomas 1-4 en estos términos y llevar a cabo la demostración del - Teorema 1 en los mismos. Esto quiere decir que el Teorema 1 es una afirmación "verdadera" para cualquier ejemplo que, como Z, satisfaga las afirmaciones con tenidas en los Axiomas 1-4 de T. Así pues, al demostrar el Teorema 1 hemos de- mostrado de una vez muchas afirmaciones diferentes acerca de muchos ejemplos - diferentes, a saber, las afirmaciones correspondientes al Teorema 1 tal como - aparecen en los diversos ejemplos que satisfacen los Axiomas 1-4 de T. Este -- (es un importante) aspecto de la "economía" conseguida al usar el método axio- mático ... Si, como consecuencia de algún diagrama u otra ayuda intuitiva pa ra el pensamiento, hubiéramos usado alguna propiedad de punto o línea no afir- mada en los Axiomas 1-4, no podríamos hacer con seguridad la anterior afirma-- ción, y habríamos perdido la "economía" mencionada.

Obsérvese también que el Teorema 1 será válido en todo sistema axiomático que, como T, contenga los términos indefinidos "punto" y "línea" y los Axiomas 1-4. En particular, es válido para la geometría plana euclídea, que es una de las - posibles geometrías que contienen esos cuatro axiomas y que, como dijimos antes, requeriría bastantes más axiomas que los formulados antes.

Consideremos ahora la siguiente afirmación a la que llamaremos un corolario -- del Teorema 1:

Corolario. Toda línea contine por lo menos un punto.

Antes de considerar una demostración de este corolario, nos apresuramos a responder a una objeción que el "no iniciado" podría sucitar en éste momento: puesto que el Axioma 1 afirma explícitamente que una línea es un conjunto de puntos, es claro que toda línea contine por lo menos un punto; ¿por qué hay que repetir entonces eso como corolario del Teorema 1?. No es éste un asunto trivial, sino que lleva directamente a una pregunta que importa mucho en la matemática moderna, a saber: ¿qué quiere significarse al decir "conjunto"?. Hemos mencionado antes que "conjunto" es un término lógico indefinido, y por eso suponemos que su uso se entiende universalmente y que se usa del mismo modo, igual que el artículo "el" se entiende y usa universalmente por cualquier persona que conozca el castellano. Pero ahora nos encontramos casi directamente puestos en la necesidad de explicar el uso del término en el anterior corolario.

La cosa, sin embargo, no puede asombrarnos mucho si pensamos que, siempre que queremos precisar mucho un término en el uso ordinario, resulta necesario adoptar algunos convenios. Por ejemplo, términos como "vegetal", "fruto", "animal" se "entienden" comúnmente y se usan por toda persona conocedora del castellano; pero cuando tenemos que aplicarlos a ciertos objetos especiales, es frecuentemente necesario convenir en algún acuerdo sobre ellos, como el de que un cierto tipo de sustancia viva se llamará "animal" y no "pez" (por ejemplo, ballena). Así podemos desear establecer el convenio de que si una persona A desea hablar acerca de "el conjunto de todas las monedas que hay en los bolsillos de B" pueda hacerlo aunque la persona B esté materialmente sin un céntimo. Dicho de otro modo: haya o no haya monedas en los bolsillos de B, el conjunto de las monedas que hay en los bolsillos de B debe considerarse como una entidad existente: llamaremos "vacío" al conjunto si B no tiene ninguna moneda en sus bolsillos. (En ésta misma hipótesis de que B no tenga ninguna moneda en sus bolsillos la frase "la moneda que está en el bolsillo de B" no tiene en cambio entidad existente alguna a la que referir). Y éste es el convenio generalmente aceptado en matemática y lógica, a saber, que un conjunto puede "existir", como en el caso del de todas las monedas que están en los bolsillos de B, aunque sea vacío.

Demostración del corolario del Teorema 1. Por el Axioma 2 existe un punto p, y por el Teorema 1 existen dos líneas distintas, L_1 y L_2 , que contienen a p.

Ahora bien; si existe una lína L que no contenga ningún punto, entonces tanto L_1 como L_2 son paralelas a L (por definición). Pero como es o se encontraría en contradicción con el Axioma 5, entonces no puede existir tal línea L.

El siguiente teorema contine una afirmación "más fuerte" que la del anterior corolario:

Teorema 2. Toda línea contine por lo menos dos puntos.

Demostración. Sea L una línea cualquiera. Por el anterior corolario, L contiene un punto p. Para mostrar que p no es el único punto sobre L, usaremos una "demostración por contradicción". Supongamos que p es el único punto que contiene L. Por el Teorema 1, hay otra, L_1', que también contine a p. Ahora bien, L_1' tiene que contener por lo menos otro punto, q, pues en otro caso L y L_1' no contendrían mas que p y, por tanto, serían el mismo conjunto de puntos, o sea, la misma línea (Axioma 3). Por el Axioma 4, hay un punto x que no se encuentra sobre L_1', y por el Axioma 5 hay una línea L_2 que contine a x y es paralela a L_1.

Pero tanto L como L_1, son líneas que contienen a p y son paralelas a L_2, violando el Axioma 5.

Tenemos, pues, que concluir que la suposición de que p sea el único punto sobre L no puede sostenerse, y, por consiguiente, que L contine por lo menos dos puntos.

Ahora bien: puesto que, según el Teorema 2, cada línea contiene por lo menos dos puntos, y por el Axioma 3 dos puntos dados no pueden encontrarse ambos sino sobre una sola Línea, podemos afirmar:

Corolario (del Teorema 2). Toda línea está completamente determinada por dos cualesquiera de sus puntos que sean distintos.

Teorema 3. Existen por lo menos cuatro puntos distintos.

Demostración. Por el Axioma 2 existen por lo menos dos puntos distintos p y q. Por el Axioma 3 existe una línea L que contine a q y p. Y por el Axioma 4 existe un punto x exterior a L. Por el Axioma 5 existe una línea L_1' que contiene a x y es paralela a L; y por el Teorema 2, L_1 contiene por lo menos dos puntos distintos. Entonces por la definición de paralela existen cuatro puntos distintos.

Teorema 4. Existen por lo menos seis líneas distintas.

Antes de demostrar el Teorema 4 puede ser tal vez necesario asegurarse de que reina acuerdo acerca de tal significación de otro de nuestros términos "comunes", a saber, la palabra "distinto". Tal como estamos usando el término, dos conjuntos son distintos si no son el mismo. Así las líneas L y L' que figuran en la demostración del Teorema 2 son distintas, aunque en la suposición hecha allí L_1' contine a L, porque no son la misma línea (ya que L_1' contiene a q y L no lo contiene).

Demostración del Teorema 4. Procedemos, como en la demostración del Teorema 3, a obtener la línea L, que contine los puntos p y q, y la línea L_2, paralela a L, y que contine dos puntos distintos (Teorema 2), x w y. Por el Axioma 3 existen unas líneas K y K_2' determinadas respectivamente por los pares (p , x), (q, y). Ahora bien: el punto q no se encuentra sobre K, porque entonces K y L serían la misma línea. Análogamente, p no se encuentra sobre K_1 y x no se encuen tra sobre K_1 . Por tanto, existen unas líneas M y M determinadas, respectivamente, por los pares (p , y), (q , x); y podemos mostrar que q no se encuentra sobre M, x no se encuentra sobre M, p no se encuentra sobre M_1' e y no se encuentra sobre M. Se sigue que todas las líneas L, L_1 , K, K_1' , M, M_1' son distintas.

Comentario a los anteriores teoremas y demostraciones.

Si el lector ha seguido las demostraciones recién dadas, ya habrá él mismo recurrido a figuras con toda probabilidad. Ello sería completamente natural; ellas ayudan además a recordar los diversos símbolos (L, p, q, ...) y sus significaciones. No obstante, y como ya hemos dicho, no se han asignado significaciones determinadas a "punto" y "línea", y consiguientemente, las anteriores demostraciones deben valer y valen tanto si el lector entiende por "puntos" monedas, y pares de monedas por "líneas", cuanto si usa las significaciones habituales. De hecho, si se utiliza cualquier conjunto de cuatro objetos, con "punto" para significar cualquier objeto del conjunto y "línea" para significar cualquier par de dichos objetos, el lector puede seguir las demostraciones teniendo presentes esos significados.

Como es natural, los teoremas que hemos formulado en la sección anterior no son en modo alguno todos los teoremas que podríamos establecer. Por ejemplo, podemos mostrar que cualquier conjunto de objetos que satisfaga ciertas condiciones sobre el número de puntos (no puede constar, por ejemplo, de 5 puntos precisamente), y que tiene que haber una relación entre el número de líneas y el número de puntos del conjunto. En realidad podemos continuar el estudio comenzado hasta darle unas dimensiones de sorprendente amplitud; difícilmente llegaremos a un punto en el que podamos afirmar con alguna confianza que no pueden demostrarse mas teoremas. No es, sin embargo, nuestra intención ampliar el número de teoremas, pues creemos haber obtenido ya suficientes teoremas y demostraciones como ejemplos para nuestras presentes intenciones.

Convendremos ahora para tener una terminología útil en lo que sigue, en que --- cuando usemos el término "enunciado" en relación con un sistema axiómatico W - queremos hablar de una sentencia formulad o formulable con los términos indefidos y universales de W; podemos llamar a un enunciado así un W-enunciado. Asi los axiomas de T son T-enunciados (el Axioma 5 contiene la palabra "paralela", pero esta expresión es "formulable" con los términos indefinidos y universales), y también lo son los teoremas.

De acuerdo con los convenios hechos en la descripción del método, diremos que un sistema axiomático W implica un enunciado E si E se sigue de W por argumentación lógica, tal como la usada antes. En particular, todo axioma se implica trivialmente a sí mismo. También diremos que E es logicamente deducible de W si W implica a E.

Por otro lado, las palabras "punto" y "línea" quedaron estrictamente sin definir, y dijimos que se les podría atribuir cualesquiera significaciones, siempre que éstas fueran consistentes con las afirmaciones contenidas en los axiomas. Vimos que no eran admisibles las significaciones "conjunto=biblioteca" "punto=

libro", pero que, si C es un conjunto de cuatro objetos "punto=objeto de C" y - "línea=par de objetos de C" son significaciones admisibles. Podemos llamar a -- los términos "punto", "línea" , "paralela", etc. términos técnicos del sistema; precisamente los términos "punto" y "Línea" son los términos técnicos indefinidos. Los términos "conjunto", "distinto" pueden llamarse términos universales o términos lógicos.

Otros ejemplos de términos universales que aparecen en T son "existe" (en el -- Axioma 2), "un" (Axioma 3), "dos" (Teorema 1),"cuatro"(Teorema 3), "seis" (Teorema 4), "y" (Axioma 3), "o" (Definición 1), "no" (Axioma 4) y "todo" (Teorema 1). En cambio, si nuestro trabajo consistiera en establecer un sistema axiomático para la aritmética general de los enteros (1 + 2 = 3, 2 x 2 = 4, etc.), usaríamos un término como "uno" como indefinido técnico. El mismo término puede, pues, tener diferentes papeles en diferentes sitemas axiomáticos. Tal como se - ha usado aquí, el término "existe" es principalmente permisivo en lo referente a demostraciones y estipulativo en cuanto a ejemplos; así, en la demostración - del Teorema 3 se nos permitía introducir la línea L en virtud del axioma 5, y el ejemplo de la "comunidad fantasma" que no contenía más que tres personas, falló precisamente porque no podía satisfacer la estipulación sobre la existencia de una cierta línea paralela a otra, estipulación sobre la existencia de una - cierta línea paralela a otra, estipulación hecha en el axioma 5.

2.5.3 La fuente de los axiomas.

Consideremos más detalladamente la fuente de los enunciados contenidos en los - axiomas. En nuestro ejemplo T hemos escogido axiomas para la geometría por la - simple razón de que podíamos suponer que el lector habrá estudiado algo de geometría. O sea; hemos tenido buen cuidado en escoger un tema ya familiar. Los -- términos técnicos indefinidos "punto" y "línea" tienen ya algún sentido para - nosotros. Pues bien: éste es el modo corriente de conseguir axiomas: los axiomas son enunciados acerca de algún concepto que ya nos es más o menos familiar. Así, si ya tenemos un conocimiento de la aritmética, podemos empezar a formular axiomas para la aritmética. Como es natural, el método no se limita a la matemática.

Si tenemos familiaridad con algún campo como la física, la filosofía, la química, la zoología, la economía, por ejemplo, podemos decidirnos a formular axiomas para ellos, o para una porción del campo elegido, y examinar qué teoremas - pueden deducirse lógicamente de ellos. Podemos decir, entonces, que un axioma, tal como se usa moderamente, es un enunciado que parece valer para un concepto supuesto, y un sistema axiomático es un conjunto de tales enunciados acerca del concepto.

En la práctica, pues, lo primero es el concepto; los axiomas vienen luego. Cierto que desde un punto de vista teórico esto no es necesario. Podemos, por ejemplo, decir, "vamos a tomar como términos indefinidos aba y daba, y vamos a formular algunos axiomas con esos términos y otros universales". Pero es difícil que se le ocurra a uno decir algo si no tiene presente ningún concepto, es decir, si no empieza por dar algunas significaciones a "aba" y "daba", introduciendo así algún concepto sobre el cual hablar: si no se hace esto, es difícil encontrar algo que decir. Por último, si no hallamos un concepto es muy posible que consigamos enunciados contradictorios. El concepto subyacente o supuesto no es sólo una fuente de los axiomas, sino que nos guía también hacia la consecución de la consistencia (de la cual hablaremos más adelante).

Empezamos, pues, por elegir el concepto; luego seleccionamos los términos que han de dejarse indefinidos, y los enunciados que deben constituir nuestros axiomas; por último, demostramos teoremas tal como hicimos antes. Esta es una simplificación del proceso, pero describe el método de un modo general. Debe observarse cómo difiere este procedimiento, tal como queda descrito, del uso clásico del método.

En el uso clásico los axiomas se consideraban verdades absolutas -enunciados absolutamente verdaderos acerca del espacio real- y dotados de cierto carácter de necesidad. El asentar el axioma de la paralela -que es el anterior axioma5- era establecer algo "obviamente verdadero", algo que se tomaba como dado si se pensaba en el carácter del espacio en que vivimos. Antes del siglo XIX habría sido inconcebible formular un axioma como el siguiente: "Si L es una línea y p es un punto que no se encuentra sobre L, entonces existen por lo menos dos líneas distintas que continen a p y son paralelas a L". También habría sido inconcebible el tener en matemática, simultáneamente, dos sistemas axiomáticos T_1 y T_2 con axiomas tales que los de T_1 niegan los axiomas de T_2, como es el caso hoy día con las geometrías euclídeas y no euclídeas.Pero adoptamos el punto de vista según el cual un axioma es simplemente un enunciado acerca de algún concepto (sólo este sentido -a saber, que un axioma es un enunciado verdadero de algún concepto- puede usarse la palabra "verdadero" a propósito de un axioma) de modo que axiomas de diferentes sistemas que se contradicen el uno al otro no expresen sólo diferencias básicas en los conceptos de los que se derivan, no se ve que exista ninguna dificultad fundamental. Lo importante es que los axiomas de un mismo sistema no se contradigan unos a otros. Y esto nos lleva al punto en el cual tenemos que discutir la consistencia y otras características de los sitemas axiomáticos.

Observación: La derivación de un sistema axiomático para una geometría no euclídea a partir de los axiomas de la geometría euclídea, por el procedimiento de sustituir el axioma de la paralela por una de sus negaciones es un ejemplo de otra manera de obtener nuevos sistemas axiomáticos. En general, podemos seleccionar un determinado sistema axiomático y cambiar uno o más de los axiomas que contine de un modo adecuado para derivar un nuevo sistema axiomático.

2.5.4 Consistencia de un sistema axiomático.

Desde un punto de vista lógico podemos sentar la siguiente definición:

Definición 1. Un sistema axiomático W se llama "consistente" si no implica enunciados contradictorios.

Ahora bien, esta definición da pie a ciertas cuestiones y críticas. En primer lugar, dado un sistema axiomático W, ¿cómo podemos decir si es consistente o no?. Es posible imaginar que consigamos demostrar a partir de W dos teoremas que se contradigan el uno al otro, con lo que podremos concluir que W no es consistente.

Por ejemplo: si añadimos al sistema T anterior el nuevo axioma. "Existen como máximo tres putnos", resultaría clara una contradicción en cuanto se demostrara el Teorema 3: el nuevo sistema de axiomas no es, pues, consistente.

Pero, suponiendo que eso no ocurra, ¿cómo podemos concluir que W es consistente? ¿Cómo podemos decir que, si continuamos enunciando y demostrando teoremas, no vamos a llegar en algún momento a enunciados contradictorios y, por tanto, a una inconsistencia?. Hemos observado a propósito del sistema T que difi lmente podemos esperar alcanzar un punto en el que podamos decir con confianza que ya no pueden afirmarse más teoremas. Y, a menos de tener todos los teoremas posibles ante la vista, todos los teoremas que puedan contradecirse, ¿cómo podemos decir que el sistema es consistente?. Así nos encontramos directamente ante el siguiente problema: ¿existe algún procedimiento para demostrar que un sistema de axiomas es consistente?. Y, si existe, ¿qué base puede tener la demostración, puesto que no puede realizarse dentro del sistema, como se demuestran los teoremas del mismo?.

Otra dificultad puede surgir del hecho de que acaso sea difícil reconocer que hay una contradicción implicada, aun en el caso de que efectivamente se de. Hay en la literatura metemática ejemplos de casos de sistemas en los cuales se había vertido mucho estudio y que sólo más tarde manifestaron su inconsistencia Mientras no hubo nadie que sospechara su inconsistencia y se esforzara por demostrarla, o (como ha ocurrido en algún caso) tropezara por casualidad con ella, los sistemas en cuestión parecieron perfectamente válidos y útiles. También puede ocurrir, por ejemplo, que los teoremas lleguen a ser tantos y tan complicados que nos sea difícil localizar un par de teoremas contradictorios. Por ejemplo, aunque dos teoremas pueden realmente ser de la forma "E" y no "no-E" respectivamente, puede escapar a nuestra atención, por el modo como están formulados, el hecho de que se contradicen. Dicho brevemente: la utilidad de la anterior definición queda limitada por nuestra capacidad para reconocer una contradicción incluso cuando, por así decirlo, es tal que salta a la vista.

La primera objeción, basada en la probable imposibilidad de formular todos los teoremas implicados por el sistema, es la más seria desde el punto de vista del trabajo matemático. Y como consecuencia de ella el matemático recurre generalmente al procedimiento descrito a continuación.

Empecemos por sentar la definición:

Definición 2. Si W es un sistema axiomático, entonces una interpretación de W es una atribución de significaciones a los términos técnicos indefinidos de W, de tal modo que los axiomas se conviertan en enunciados verdaderos para todos los valores de las variables (como p y q del Axioma 3, por ejemplo).

Esta definición requiere alguna explicación. Primero, y a título de ejemplo, podemos citar el anterior sistema T y las significaciones "punto" = cualquier moneda de un conjunto de cuatro, y "línea"= cualquier par de monedas de ese conjunto. Los axiomas se convierten ahora en enunciados acerca del conjunto de monedas, y se ve fácilmente que son verdaderos referidos a él. Por tanto, esta atribución de significaciones es una interpretación de T. Tal como están los axiomas, sin significaciones atribuidas a "punto" ni a "línea", no pueden considerarse ni verdaderos ni falsos. (Análogamente, no podemos decir que la expresión " $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$" sea verdadera o falsa sin atribuirle antes significaciones como "x e y son enteros"). Pero, con las significaciones recién atribuidas, los axiomas son enunciados verdaderos acerca de un concepto "con sentido". Usaremos la palabra "modelo" para designar el resultado de la atribución de significaciones a los términos indefinidos. Así, el conjunto de cuatro monedas, considerado como un conjunto de puntos y líneas según las significaciones antes atribuidas, es un modelo de T. En general, si se establece una interpretación I, de un sistema axiomático, denotaremos mediante M(I) el modelo resultante de I.

Para algunos modelos de un sistema axiomático W, ciertos axiomas de W pueden quedar satisfechos por vacíos. O sea: un axioma de la forma "Si..., entonces...", como el Axioma 3 de T, tipo al que podemos llamar "condicional", puede ser verdadero una vez interpretado, simplemente porque la condición "Si..." no sea satisfecha por el modelo.

Supongamos, por ejemplo, que eliminamos los Axiomas 2 y 4 de T y designamos por T' el sistema resultante. Entonces un conjunto de monedas que contenga precisamente una moneda es un modelo de T' si interpretamos "punto" por monedas y "línea" por conjunto que contiene precisamente una moneda. Pues en este modelo las partes condicionales de los Axiomas 3 y 5 no quedan satisfechas. Obsérvese que para que el Axioma 3 sea falso para un modelo M, tiene que haber dos puntos p y q en M, tales que ninguna línea de M contenga a p y q, o tales que más de una línea de M contenga p y q .

Esto puede tal vez ilustrarse mejor con la disgresión siguiente:

Supongamos que el muchacho A dice a la chica B: "Si el domingo hace sol te llevaré a remar". Y supongamos que llueve el domingo entero, sin que haga sol ni un momento. Entonces, lleve o no lleve A a B a remar, no podrá decirse en ningún caso que A haya prometido en falso. Pues para que la promesa fuera falsa, habría hecho falta primero que hiciera sol en domingo, y segundo, que A no hubiera llevado a B a remar. En general, para que un enunciado de la forma "Si ... , entonces ... " sea falso, tiene que cumplirse la condición y no cumplirse la afirmación.

Pero al formular los axiomas de T no estábamos pensando en un conjunto de monedas. Estábamos pensando en algo muy diferente, a saber, en la geometría euclídea tal como la conocemos. "Punto" tenía para nosotros una significación muy distinta: significaba algo "sin longitud, sin anchura ni espesor". ¿No darán también esas significaciones un modelo de T, tal vez lo que pudiéramos llamar un modelo "ideal"?. Podemos admitir que es así, y en matemática apelamos frecuentemente a tales modelos ideales: desde luego, siempre que resulta que todo conjunto de objetos que pueda servir como modelo tiene que ser necesariamente un conjunto de infinitos objetos. (Tal es el caso, por ejemplo, cuando tenemos en un geometría suficientes axiomas para asegurar la existencia de un número infinito de líneas). Volveremos a este análisis más adelante, por el momento, atendamos a la llamada "definición útil" de la consistencia:

<u>Definición 3.</u> Un sistema axiomático W es satisfactible si existe una interpretación de W.

¿En qué relación están las definiciones 2 y 3?. Lo que realmente deseamos de un sistema axiomático es que sea consistente en el sentido de la definición 1. Pero hemos visto que la definición 1 no era una definición útil o viable más que en los casos en que se hallara efectivamente que el sistema implica enunciados contradictorios, casos en los cuales pueden reconocerse sin más la inconsistencia. En cambio, si un sistema es consistente, somos por lo general incapaces de asegurar que se cumpla el hecho exigido, por la definición 1. Pero, como en el caso de la interpretación con el conjunto de cuatro monedas para el anteior sistema, tenemos a nuestra disposición una prueba muy sencilla para mostrar la "satisfactibilidad" en el sentido de la definición 3. ¿Implica esto la consistencia en el sentido de la definición 1?. El matemático y el lógico muestran un punto de vista afirmativo ante esta pregunta, y para explicar porqué lo hacen tenemos que penetrar por unos momentos en el dominio de la lógica.

2.5.5 <u>La demostración de consistencia de un sistema axiomático.</u>

Empecemos por recordar dos "leyes" básicas de la lógica clásica (es decir, aristotélica), a saber, la Ley de Contradicción y la Ley de Tercio Excluso; la última se llama también "ley de Exclusión de Medio", pero el primer nombre es el tradicional (<u>Tertium non datur</u>). Si E es un enunciado cualquiera, entonces la Ley de Contradicción afirma que no pueden valer al mismo tiempo E y una contradicción de E (esto es, una negación de E). Por ejemplo, sea E el enunciado "Hoy es martes". La ley de Contradicción vale sin duda aquí, porque hoy no puede ser a la vez martes y viernes, por ejemplo. Y la Ley de Tercio Excluso afirma que hoy es martes o no es martes, (no existe una tercera posibilidad).

Pero "las cosas no son tan sencillas comp parece" tampoco en este punto. A menos de limitarse a un punto determinado de la Tierra (o a una determinada longitud), puede perfectamente ser a la vez martes y viernes. Y si no se incluye en E esa precisión geográfica, la afirmación "Hoy es martes o no es martes" es difícil de aceptar. De hecho, siempre que se formulan tales enunciados existe un acuerdo tácito entre el que habla y el que escucha, por el cual la frase se refiere a su situación geográfica en el momento de pronunciarse el enunciado.

O consideremos el enunciado "El rey de los Estados Unidos lleva cordones de todos los colores". ¿Vale aquí la Ley del Tercio Excluso? ¿Y en el caso del enunciado "Todos los triángulos son verdes"?.

El resultado es el siguiente: aunque esas "leyes" se consideren "universalmente válidas", hay que hacer alguna especificación en su aplicación para que resulten válidas. Por lo que hace a los sistemas axiomáticos, el problema no es muy grande, ya que podemos restringir nuestro uso del término "enunciado" según el convenio ya hecho. Esto supondremos tácitamente desde ahora.

En cuanto se tiene una interpretación de un sistema W, los enunciados del sistema se convierten en enunciados acerca del modelo resultante. Supongamos lo siguiente, que puede considerarse como unos principios básicos de lógica aplicada:

a) Todos los enunciados implicados por un sistema axiomático resultan verdaderos para todos los modelos de W.

b) La Ley de Contradicción vale para todos los enunciados acerca de un modelo de un sistema axiomático W, siempre que sean W-enunciados cuyos términos técnicos tengan las significaciones dadas en la interpretación. Podemos aclarar y precisar esto introduciendo la noción de I-enunciado.

Si W es un sistema axiomático e I denota una interpretación de W, entonces el resultado de atribuir a los términos técnicos de un W-enunciado sus significaciones en I se llamará un "I-enunciado".

Con esta terminología, a) y b) se convierten, respectivamente, en:

a) Todo I-enunciado tal que el correspondiente W-enunciado está implicado por W, resulta verdadero para M(I).

b) I-enunciados contradictorios no pueden ser los dos verdaderos para M(I).

Suponiendo que valgan a) y b), la satisfactibilidad implica la consistencia. Pues si un sistema axiomático W implica dos W-enunciados contradictorios, enton ce,por a),esos enunciados,como I-enunciados,resultan los dos verdaderos para el modelo (I); pero esto último es imposible por b). Por tanto, tenemos que concluir que si son válidos a) y b), entonces la existencia de una interpretación para un sistema axiomático W garantiza la consistencia de W en el sentido de la definición 1. Y ésta es la base de la "definición útil" 3. Por ejemplo, la existencia de la "interpretación por las cuatro monedas" para el sistema T garantiza la consistencia de este sistema si valen a) y b).

Podemos observar que no hemos demostrado que la consistencia en el sentido de la Definición 1 implique la satisfactibilidad. Entrar en esta cuestión sería aquí muy poco viable, porque impone entrar en detalles acerca de sistemas lógicos formales, y es demasiado complicada.

Anteriormente usamos la expresión modelo "ideal" contrastándola con modelos como el de las cuatro monedas para T; este último tipo podría llamarse de modelos "concretos". Y precisamente también que cuando un sistema axiomático W requiere un conjunto infinito en cada uno de sus modelos, entonces los modelos son necesariamente "ideales".

Esto suscita no sólo la cuestión de en qué medida son de fiar los modelos "ideales", sino también la de qué es lo que constituye un modelo admisible. Lo que nos interesa es, naturalmente, un criterio que no admita más que modelos que satisfagan los supuestos a) y b), especialmente este último. Si existe algún peligro de que un modelo ideal exija tal grado de abstracción que contenga contradicciones, contra el supuesto b), entonces es claro que el uso de modelos no será una garantía general de consistencia, a pesar de todo lo que acabamos de decir.

Esta cuestión puede ilustrarse algo más considerando algunos ejemplos bien conocidos. Es bastante corriente, por ejemplo, obtener en una rama de la matemática -incluso en una rama de la matemática que se base a su vez en otro sistema axiomático W'- un modelo para un sistema axiomático W de otra rama de la matemática. ¿Hasta qué punto son válidos esos modelos? ¿Satisfacerán necesariamente a b)?. Por ejemplo: para establecer la consistencia de una geometría no euclideana damos un modelo de ella en la geometría euclídea (Cfr. Richrdson, "Fundamentals of Mathematics", Nueva York, 1941, pp. 418-419, por ejemplo). Pero supongamos que la geometría euclídea contenga a su vez contradicciones: ¿qué ocurre entonces?. Evidentemente, todo lo que podremos decir es que, si la geometría euclídea es consistente, entonces también lo es la geometría no euclídea cuyo modelo hemos establecido en el marco euclídeo.

2.5.6 La independencia de los axiomas.

Hemos hablado antes de "independencia" de axiomas. Entendemos esencialmente por "independencia" el hecho de "no estar diciendo demasiado" al formular nuestros axiomas. Por ejemplo: si añadimos a los cinco axiomas del sistema T un sexto axioma que diga "existen por lo menos cuatro puntos", no suministraremos más información nueva, puesto que el axioma está ya implícito en T (por el Teorema 3).

Desde luego, la adición de un tal axioma no destruiría la propiedad de consistencia inherente a T.

Para establecer una definición formal de independencia, hagamos que W represente un sistema axiomático y A uno de los axiomas de W. Denotemos por no-A alguna negación de A y por W-A el sistema sin A.Si E es un W-enunciado E como nuevo axioma.Entonces definimos:

<u>Definición 4.</u> Si W es un sistema axiomático y A es uno de los axiomas de W, entonces se dice que A es independiente en W, o que es axioma de W independiente, si son satisfactibles W y el sistema axiomático (W - A) + no A.

No tiene importancia cuál de las varias formas de no-A sea la usada. Así, el Axioma 5 es independiente en T, si T es satisfactible y, además, los primeros cuatro axiomas de T, junto con una forma "no euclídea" del quinto axioma, constituyen un sistema satisfactible. Por ejemplo, podemos tomar como negación del Axioma 5 el enunciado: "Existen una línea L y un punto p exterior a ella, tales que no hay ninguna línea que contenga a p y sea paralela a L". Para mostrar que el sistema T,con el Axioma 5 sustituido por este enunciado, constituye un sistema satisfactible, podemos tomar un conjunto de tres monedas, con "punto" para significar una moneda de este conjunto y "línea" cualquier par de puntos de ese conjunto. Tenemos así una interpretación del nuevo sistema, lo cual muestra que éste es factible. Hemos averiguado ya que T es satisfactible;podemos, pues, concluir que el Axioma 5 es independiente de T.
Es fácil ver que la razón de que en la definición 4, se especifique la satisfactibilidad de T es asegurar que haya algún no-A que no sea una consecuencia necesaria de los axiomas de W-A; porque, si tal fuera el caso, entonces no podríamos llamar "independiente" a A. Y, tal como está formulada, la definición asegura que ni A ni ninguna negación, no-A, de A, está implicada por el sistema W-A, de modo que la adición de A a W-A es realmente un suministro de nueva información.

En realidad, no damos la independencia la misma importancia que a la consistencia. La consistencia se desea simpre; en cambio, hay casos en los que no se desea independencia. Hablando en general, desde luego, es preferible que todos los axiomas sean independientes; pero si algún axioma resulta no ser independiente, ello no invalida el sistema.

De hecho, algunos sistemas axiomáticos muy conocidos e importantes contenían,al ser publicados por vez primera, axiomas que no eran independientes (cosa que, desde luego, no sabían en aquel momento sus autores). Ejemplo de ello es la formulación original del conjunto de axiomas para la geometría dada por Hilbert en 1899. Este conjunto de axiomas contenía dos de los que luego se descubrió que estaban implicados por los demás. Esto no invalidó en modo alguno el sistema; bastó con pasar esos axiomas a teoremas (dando sus demostraciones naturalmente).

P I E S   D E   P A G I N A.

1. B.L. van der Waerden, *Science Awakening*, Groningen, 1954; O. Neugebauer, *The exact Siences in Antiquity*, 2nd. Edition, 1957.

2. O. Becker, *Grundlagen der Mathematik in geschichtlecher Entwicklung*, Freiburg-München, 1954, p. 22; O. Becker, "Frühgriechische Mathematik un Musiklehre", *Archiv für Musikwissenschaft*, 14, Trossingen, 1957, p. 157.

3. Great Soviet Encyclopedia, under the entry "Mathematics".

4. B.L. van der Waerden, op. cit., 89. Cf. O. Becker, Gnomon 23, 1951, p. 297.

5. K. v. Fritz, op. cit., pp. 13-103.

6. Yet this can hardly be applied to the so-called *indirect demonstration*.

7. G. Pólya, *How to solve it?*, 2nd. Edition, New York, 1957; Preface to the First Printing; Induction and Analogy in Mathematics - a guide to the art of plausible reasoning, Princeton, New Yersey, 1954.

8. *Autolyci De sphaera quae movetur liber. de ortibus et occasibus libri duo.* (ed. Fr. Hultsch), Lipsine, 1885.

9. *Proclus* (ed. G. Friedlein), p. 65. Cf. B. L. van der Waerden, op. cit., p. 90.

10. Aristotle, Met., 985 b, pp. 23-24.

11. Plato, *Epinomis*, 990 C.

12. K. Reidemcister, op. cit., p. 52: "Matema=cine Zusammenstellung mathematischer Süitze und Beweise".

13. Ibid.; "Die Pythagoreer entdeckten die Möglichkeit, mathematische Tatbestände suf Hypothesen zurückzuführen, aus denen diese Tatbestände durch *Denken gefolgert* werden können. Damit entdeckten sie aber zugleich einen Weg, der aus dem Anschaulichen heraus zu geometrischen Tatsachen fürt, die *nur* dem --- Denken zugänglich sind".

14. Cf. B. L. van der Waerden, op. cit., pp. 92-102.

15. Peet T., Eric. "El papiro Matemático Rhind".

16. Cf. G. Hauser, *Die Geometrie der Griechen von Thales bis Euklid*, Luzern, 1955.

17. O. Becker, *Gruendlagen der Math.*, p. 29; *Quellen u. Studien zur Gesch. d. Math. Abt.* B., Bd. 3. 1936, pp. 411-419.

18. B. L. van der Waerden, *Math. Ann.*, 120, 1947-1949, pp. 145-146.

19. O. Becker, "Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im neunten Buch der eukl. Elemente", *Quell. u. Studien zur Gesch. D. Math. Abt.* B., *Bd.* 3, 1936, pp. 533-553; *Grundlagen der Math.*, p. 38.

20. B.L. van der Waerden, "Die Arithmetik der Pythagoreer, I", *Math. Ann.*, 120, 1947-1949, pp. 127-153.

21. B. L. van der Waerden, ibid., pp. 139-140.

22. Plato, *Crat.*, 430 E.

23. Jamblichos, *Vita Pythagorica*, p. 89; Cf., my above-mentioned paper "Deiknymi, als math. Terminus", and A. Frenkian, *Revue des Etudes Indo-Euroéennes*, Bucarest-Paris, 1938, pp. 468-474.

24. Plato, *Menon*, 83 E.

25. O. Becker, *Grundlagen der Math.*, p. 109.

26. O. Becker, *ibid.*

27. In this connection see Chapter 3 in Part One of the present paper.

28. K. v. Fritz, *op. cit.*, p. 94.

29. K. Reidemeister, *op. cit.*, p. 51: "Es ist ein weitverbreitetes Vorurteil, das wesentliche Merkmal der griechischen Mathematik sei ihre Anschaulichkeit... Rechtig ist es vielmehr, das sich in der griechischen pythagoreischen Mathematik die Umwendung vom Anschaulichen zum Begrif vollzieht".

30. Cf. B. L. van der Waerden, "Die Arithmetik der Pythagoreer, I", *Math. Ann.*, 120, 1947-1949, p. 140.

31. Plato, Resp., VII, 525 D-526 A.

32. *Boetius, De Inst. Musica* (ed. G. Friedlein), Ñipsiae, 1867, p. 285; B.L. van der Waerden, *Math. Ann.*, 120, 1947-1949, p. 134.

33. B. L. van der Waerden, *Elemente der Mathematik*, VII, Basel, 1953, p. 1213.

34. Cf. O. Becker, *Quell. u. Studien zur Gesck. d. Math. Abt.* Bd. 3, 1936,p. 538.

35. Cf. Euclide, IX, p. 29.

36. Cf. K. Reinhardt, *op. cit.*, p. 36.

37. Cf. A. Gigon, "Der Ursprung der griech". *Philosophie*, Basel, 1945, p. 251.

38. Fr. 8, 8 (Diels).

39. K. Reidemeister, p. 52.

40. Cf. Aristotle, 983 a, 12-13.

41. Hilbert, Grandlagen der Geometrie, Leipzig, 1899 (en Festchritt zür Feier der Enthullung des Gauss-Weber-Denkmels in Gottingen); the Foundations - for Geometry, Chicago, 1902.

42. Proclus, ed. Friedlein, p. 68 6-20.

43. Proclus, p. 68, 20

44. Ibid. p. 71, 8.

45. Ibid. p. 70, 19 sqq.

46. Mach, E. The Science of Mechanics, Chicago, 1893. p. 364.

47. De Morgan. "Short supplementary remarks on the first six Books of Euclid's Elements" en el "Companion to the Almanac, 1849.

48. Aristóteles, Metafísica I, 2.

49. Elements de geómetrie, 1741; citado por F. Gonseth, "La géometrie et le probleme de l'espce, p. 141.

50. Philosophie der Mathematik, 1810, citado por Cavallés. Méthode axiomatique et formalismé, p. 46-47. Elements de la philosophie de l'eoprit humanin, Vol. III, 1813.

51. Trad. de L. Peisse, p. 106-107.

52. Science et méthode, p. 168. Struik, J. Birk.

BIBLIOGRAFIA

1. Alumnos de la Universidad Autónoma de Guerrero.- Historia y fundamento de las Matemáticas. Material para el curso de Maestría en Matemática Educativa.

2. Amor Montaño, José Alfredo.- Antología de la Lógica Matemática. Cuadernos de Filosofía de las Ciencias. Facultad de Ciencias, U.N.A.M. Mayo, 1976.

3. Aristóteles.- "Obras Completas", Ed. Aguilar, 1976.

4. Banks, P. - Sobre la intepretación filosófica de la Lógica: Un diálogo aristotélico. Dominican Studies III, 1950. Traduc. de Marcela G. Navarro H.

5. Begue, Jane.- "Planches a claus et aires de polygones" Graud N. Fev., 1975.

6. Blenche, Robert. - La axiomática. U.N.A.M., México.

7. Científicos Griegos.- Vol. I, Ed. Aguilar, 1970.

8. Crombie, A.C.- Historia de la Ciencia, Tomos 1 y 2. Celianga Editorial, S.A., Madrid, 1979.

9. Chabrousslet, Marie-Thérese.- Activities Geometriques au C.E. Grand N., Mayo, 1976.

10. Dieudonné, Jean A.- Should We Teach "Modern" Mathematics? American Scientists, Vol. 61. Jan-Feb., 1973.

11. Dou, Alberto.- Fundamentos de la Matemática. Ed. - Labor, Barcelona, 1970.

12. Eves, Howard & Carroll, Newson.- An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathe - matics, Holt. New York, 1965.

13. Filloy, Eugenio.- El Método Axiomático. Revista Matemáticas y Enseñanza. Nov. 2 - 11.

14. Heiberg. The Thirteen Book of Euclide's Elements. -- Translated by Sir Thomas L. Heath. Dover Publications, Inc. New York, 1956.

15. Piaget, J., Choquet, G. Dieudonné, J. - "La enseñanza - de las matemáticas modernas". Alianza Ed., Madrid, España, 1978.

16. Platón.- "Obras Completas", Ed. Aguilar, 1966.

17. Polya, G.- Cómo plantear y resolver problemas. Ed. Trillas, México, 1970.

18. Saumells, Roberto.- La geometría euclideana como teoría del conocimiento. Ediciones Rialp, S.A., Ma - drid, 1970.

19. Smith David Eugene.- History of Mathematics. Dover Publications, Inc. New York, 1958.

20. Struik, Dirk J.- A Concise History of Mathematics. Dover Publications, Inc., New York, 1967.

21. Struik, Dirk J.- Matemáticas: su origen y desarrollo. - "Filosofía del Futuro", Compañía General de Ediciones, México, 1962.

22. Szabó, Arpad.- The Transformation of Mathematics into Deductive Science and the Beginings of it's -- Foundation on Definitions and Axioms. Parts 1 and 2. Scripta Mathemática, Vol. XXVII, No. 1, (1959).

23. Szabó Arpad.- Les Débuts des Mathématiques. Grecques. VRIN. Paris, 1977.

24. Thom, Rene.- Las matemáticas "modernas", ¿un error pedagógico y filosófico?. Miscelanea Matemática. Sociedad Matemática Mexicana, agosto, --- 1975. Traduc. Eugenio Filloy.

25. Thomas, Ivor.- Greek Mathematics. Harvard University Press, 1957.

26. Toth, Imre.- La révolution non euclidienne. La Recherche No. 75. Vol. 8. Fev. 1977.

27. Verneaux, R.

28. Wilder, .- Foundations in Mathematics.

29. Wilder, Raymond L.- El Método Axiomático, de Sigma, El Mundo de las Matemáticas. Vol.5. Ed. Grijalbo, Barcelona, 1969.