2 G
6

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

UNA CLASIFICACION DE PROBLEMAS DE MATEMATICAS DE LA ENSEÑANZA DE NIVEL MEDIO DE ACUERDO A CIERTAS ACTIVIDADES MENTALES.

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

PRESENTA

JOSE GUILLERMO CUSTODIO RAMIREZ

MEXICO, D. F. 1984

INDICE

DESCRIPCION DEL TRABAJO. 1

FINALIDADES. 3

ANTECEDENTES. 4

UBICACION DEL TRABAJO. 13

CLASIFICACION DE PROBLEMAS MATEMATICOS. 40

- ALGUNOS ELEMENTOS QUE APARECEN EN EL PENSAMIENTO AL RESOLVER PROBLEMAS MATEMATICOS. 42
- EJEMPLIFICACION. 45

RELACION DE LA CLASIFICACION PROPUESTA CON LA TAXONOMIA DEL NLSMA. 124

- TAXONOMIA DE BLOOM. 125
- TAXONOMIA DEL NLSMA. 127

UBICACION DE LOS PUNTOS DE LA CLASIFICACION DENTRO DE LA TAXONOMIA DEL NLSMA. 131

BIBLIOGRAFIA. 138

DESCRIPCION DEL TRABAJO.

El trabajo consta básicamente de cuatro partes:

1. Antecedentes.

2. Ubicación del Trabajo

3. Ejemplificación de algunos elementos que aparecen en el pensamiento, al resolver problemas de matemáticas

4. Relación de los elementos citados en el punto 3 con la Taxonomía del National Longitudinal Study Mathematical Abilities (NLSMA).

En el punto 1, menciono tres tipos de antecedentes:

i) Mi experiencia como estudiante de la Facultad de Ciencias.

ii) Mi experiencia como ayudante y profesor de la Facultad de Ciencias.

iii) Mi experiencia con textos del área de resolución de problemas.

En el punto 2, hago una aplicación y comento el material que aparece en el artículo de Robert M. Gagne, Learnable Aspects of Human Thinking, centrándome específicamente en algunos elementos del pensamiento matemático.

En el punto 3, doy una clasificación de problemas matemáticos, y ejemplifico cada uno de los puntos de ésta con problemas de Algebra Superior y Geometría Analítica, principalmente.

En el punto 4, doy una descripción breve de la Taxonomía de Bloom y de la Taxonomía del NLSMA, en el renglón correspondiente al dominio cognoscitivo, y establezco una relación de la Taxonomía del NLSMA con los elementos descritos en el punto 3.

FINALIDADES.

1. Abordar un problema específico relacionado con el área del pensamiento matemático, esto es, un aspecto del tema de la resolución de problemas, con la doble intención de ir entendiendo la temática y hacer mejoras directas en la enseñanza de las matemáticas.
2. Informar y sensibilizar a los profesores de matemáticas en general de los problemas relativos al aspecto en cuestión, como son: la selección de problemas, la elaboración de problemas, el propósito de los ejercicios en una tarea, la diversidad de actividades y enfoques mentales en la resolución de un problema, etc.
3. Hacer más crítica y reflexiva la elaboración y diseño de tareas y ejercicios por parte del profesor, considerando que estos son parte fundamental del trabajo independiente de los estudiantes durante el proceso de aprendizaje.

4. Elaborar un material de apoyo para algunas actividades de los cursos de la carrera en Educación Matemática, que se ofrece en la Escuela de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Puebla.

5. Ampliar, refinar y profundizar el trabajo "Un análisis de las Tareas-Examen de un curso de Cálculo I" que se elaboró durante el desarrollo de la materia "La Enseñanza del Cálculo", materia de la carrera en Educación Matemática.

ANTECEDENTES.

Los antecedentes de este trabajo son de tres tipos:

i) En mi etapa como estudiante de la Licenciatura de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, casi siempre el trabajo de las materias que se me dejaba para realizar en la casa, estaba basado en la resolución de ejercicios, sin embargo, pocas veces se mencionaban estrategias, rara vez se resolvían problemas de igual dificultad a los dejados de tarea, frecuentemente la tarea contenía solo problemas de un mismo tipo (de talacha, demostraciones, etc.), y aunque se tenían horas de ayudantía, en éstas no se tenían sistemáticamente actividades de orientación, entendimiento y traducción de los problemas, siendo en la mayoría de los casos el ayudante el que resolvía los ejercicios. Hay que reconocer que uno como estudiante no exigía ninguna de estas actividades, pero creo que esta actitud es un problema que fomenta el sistema educativo.

En resumen, creo que la resolución de ejercicios está sumamente descuidada en la Facultad de Ciencias, y sin embargo, esta actividad constituye toda una área de estudios en la Educación Matemática, y dentro de las recomendaciones en la Enseñanza es frecuentemente citada de manera prioritaria, tal es el caso del Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (NCTM) en:

"Una Agenda para la Acción."

Recomendaciones para Matemáticas Escolares para la década de los 80's.

El Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas recomienda:

1. Que la resolución de problemas sea el enfoque de las Matemáticas...

Un ejemplo del estudio de esta área lo constituye el trabajo de George Polya, material que empecé a conocer y estudiar en las materias de enseñanza de las matemáticas que se imparten en la Facultad de Ciencias. Dentro de la obra de Polya, en particular en su libro "Cómo plantear y resolver problemas," se exhibe todo un plan para la resolución de un problema, desde el entendimiento del enunciado, pasando por la concepción y ejecución de un plan hasta la revisión de la solución encontrada (visión retrospectiva).

ii) Durante los cursos y asesorías de Cálculo Diferencial e Integral I que impartí en la Facultad de Ciencias, me dí cuenta, por las preguntas que los estudiantes hacían respecto a los ejercicios que se dejaban de tarea, que se destacaba lo siguiente:

- La redacción de los ejercicios no siempre era clara para ellos.

- Preguntaban principalmente acerca de los ejercicios diferentes a los expuestos en clase o que ameritaban mayor esfuerzo.
- Las preguntas se hacían en forma individual y no reflejaban trabajo de equipo.
- No encontraban con facilidad caminos para la solución del problema.
- No revisaban la solución encontrada.
- Les costaba trabajo entender lo que pedía el enunciado del ejercicio.

Algunas causas de estas situaciones son las siguientes:

a) Falta de entrenamiento continuo con problemas en donde se involucran actividades de traducción y entendimiento de un problema.

b) Falta de estrategias para atacar un problema.

c) Falta de prácticas para el análisis y crítica de una solución a un problema.

d) Falta de definición de palabras como: demuestre, interprete, pruebe, muestre, establezca, dentro de un contexto matemático.

e) Falta de prácticas de confrontación de ideas.

f) Falta de reflexión y análisis cuidadoso en la selección y planteamiento* de los ejercicios por parte del profesor.

En general creo que los ejercicios los escoge el profesor por intuición, por rutina o simple gusto sin tomar en cuenta las dificultades con las que se podría encontrar el estudiante, como por ejemplo: el problema del gusto por las matemáticas, la facilidad para aprender matemáticas, el desconocimiento del papel de las...

* Existen artículos como el de "Planteando Problemas Convenientemente" de Thomas Butts en donde se exponen algunas formas de plantear un problema con el objeto de maximizar la fuente de motivación del resolvedor (estudiante).

matemáticas en el desarrollo mental de los estudiantes, entre otras. Cabe mencionar que algunas de las causas enlistadas son tratadas en el libro "como plantear y resolver problemas" de G. Polya.

iii) Antecedentes que llamo "teóricos" que surgen a través del contacto que he tenido con textos del área de resolución de problemas.

En el trabajo desarrollado en la Educación Matemática relacionada con el estudio del pensamiento matemático, hemos visto que el área de resolución de problemas abre un campo amplio de investigación y experimentación en el camino hacia la determinación de las características del pensamiento científico y su utilidad en la enseñanza de las matemáticas.

Algunas ramas de estudio de esta área son las siguientes:

- Planteamiento de ejercicios
- Estrategias y caminos de solución de un problema.
- Clasificación de problemas.
- Resolución de problemas como una meta del aprendizaje de las matemáticas, etc.*

Estos aspectos, desde mi punto de vista, deben ser abordados cada uno con mayor cuidado y tratar de tomarlos en cuenta, como una unidad, dentro de la labor del profesor de matemáticas.

El presente trabajo es resultado de una reflexión sobre esta área, centrándome en la cuestión ¿qué tipo de actividades mentales desarrolla un estudiante al resolver un problema de matemáticas?

Habría que señalar que este punto no se restringe tan solo a la resolución de problemas, sino también podemos encontrarlo, por ejemplo, en la Heurística, es de-

* Algunos autores incluyen otros temas y cuestiones relacionadas con el pensamiento matemático o pensamiento en general. (Problem Solving in School Mathematics. NCTM. Cap 2. Págs 3-8. 1980).

cir, en el estudio de cómo se genera el conocimiento* y aún dentro del área de resolución de problemas existen trabajos, como el de Polya, que considero que hay que ampliar señalando otros puntos en la dirección que expongo.

* Algunos autores relacionan en forma directa la Heurística con la resolución de problemas. (Problem Solving in School Mathematics. NCTM. Cap 3. Págs. 9-22. 1980).

UBICACION DEL TRABAJO.

Uno de los problemas centrales de la enseñanza de las matemáticas, consiste en desarrollar en el estudiante las habilidades del pensamiento científico durante el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por ende, una actividad prioritaria es la determinación de los componentes o características del pensamiento científico, y una vez determinadas, integrarlas a la práctica diaria del profesor con la intención de resolver el problema antes citado.

Esta es una preocupación reciente y de actualidad, que es abordada por muchas personas y de diferentes formas. Esto último se puede ilustrar en los siguientes párrafos del artículo "Learnable Aspects of Human Thinking" de Robert M. Gagné, que aparece en el libro del año de la Asociación para la Educación de Profesores en la Ciencia de

1980 (1980 AETS YEARBOOK), titulado "The Psychology of Teaching for Thinking and Creativity"

"... Científicos y educadores de la ciencia en particular están frecuentemente interesados en que los elementos para el razonamiento científico, la invención y el pensamiento creativo sean reflejados en la currícula escolar. Virtualmente cada uno de los programas de ciencia organizados racionalmente y desarrollados durante la década de los sesentas incluye en sus propósitos establecidos la idea de que los estudiantes serán conducidos a "pensar como científicos". Presumiblemente tal frase fué empleada para reflejar la intención de fomentar actitudes de objetividad, respeto por la evidencia empírica, evitar conclusiones sobregeneralizadas, etc. En parte también pensar como científico fué tomado como pensamiento crítico, razonamiento lógico y uso apropiado de analogías. Armado con tales capacidades como prerequisitos, se deseo que algunos estudiantes llegaran a ser los científicos creativos de la siguiente generación, mientras que muchos otros poseerán, al menos, "alfabetización científica".
Estas ideas forman una base para este capítulo. Lo que intento hacer al acercarme al tópico de los aspectos que pueden aprenderse del pensamiento humano es, primero, revisar algunas de las principales teorías y evidencias contemporáneas. Formulaciones valiosas del problema, y evidencia pertenecientes a ellas, han sido aportadas en años recientes por educadores de la ciencia y psicólogos. Deduciendo

sobre estas fuentes, intentaré suministrar una descripción del pensamiento humano el cual está en la tradición de la psicología cognoscitiva moderna, empleando la concepción general de procesamiento de información como una base teórica. Intentando identificar las capacidades humanas que están involucradas en la resolución de problemas y en el pensamiento creativo, consideraré lo que sabemos acerca de su aprendibilidad y qué implicaciones pueden ser inferidas para la práctica educativa.

COMPONENTES INTELECTUALES DEL PENSAMIENTO CIENTIFICO.

Si el problema de cómo enseñar es afrontado, es evidentemente necesario como primer paso identificar las capacidades intelectuales (procesos de razonamiento) que entran en tal pensamiento y definir sus características tanto como sea posible. Aunque se han tenido progresos en recientes años en este problema todavía no tenemos una lista básica de estas capacidades que engendren confianza..."

El autor se refiere a la lista que menciona el Prefacio del mismo libro:

Prefacio

En el <u>Propósito Central de la Educación Americana</u>, 1961, la Comisión de Políticas Educativas estableció que el propósito central de la educación era desarrollar en los estudiantes una condición llamada libertad de la mente, es decir, la libertad para pensar y escoger. De acuerdo a la Comisión, la escencia de la habilidad para pensar involucra los procesos racionales de:

- recordar e imaginar.
- clasificar y generalizar.
- comparar y evaluar.
- analizar y sintetizar.
- deducir e inferir.

En su opinión estos procesos los cuales llaman procesos racionales, "capacitan a alguien para aplicar la lógica y la evidencia útil para sus ideas, actitudes y acciones, y para perseguir mejor cualquier meta que él pueda tener".

Anton E. Lawson, Editor.

Como un ejemplo del trabajo en esta área, basada en concebir el aprendizaje como un procesamiento de información, mencionada en los párrafos anteriores, está el de Greeno, del cual Gagne hace un resumen:

"... Una clasificación de tipos de problema, desde el punto de vista de proceso de información y una hojeada inicial de las habilidades humanas involucradas en alcanzar la solución de estos

tipos, ha sido elaborada por Greeno (1978).
Un resumen de algunos puntos importantes de este artículo es el siguiente:

1. Problemas de inducción de estructura.
La tarea presentada por estos problemas es inducir una estructura total de partes que son dados. Problemas de analogía (mano es a guante como pié es a zapato) y problemas de extrapolación de series (ABRCDR - - -) son ejemplos que han sido estudiados extensivamente. Greeno considera que estos problemas son para involucrar procesos de "entendimiento", análogos al entendimiento de una oración. Los tipos de habilidades y conocimientos requeridos para la solución son identificados como:
(a) un proceso de "comprender relaciones" entre los elementos del problema, y
(b) "generar una representación integrada del patrón".
Evidentemente, esto significa que la solución exitosa del problema está influenciada por la habilidad de identificar relaciones de patrones, y por conocimiento de los elementos del patrón (que puede estar en palabras o dibujos).

2. Problemas de Transformación.
En estos problemas la tarea es operar sobre una situación y transformarla en una diferente, representando la última la meta.
Generalmente estos son problemas de "cambiar" o "mover", que incluyen la Torre de Hanoi, pruebas de teoremas y problemas de almacenaje de agua* (Luchins, 1942). Habilidad para analizar

* water-jug problems.

y planear, realizar análisis de medios y fines, están involucrados en estos problemas, de acuerdo con Greeno. La selección de estrategias para planear, es de considerada importancia como una habilidad humana. Otros factores de importancia son:

(a) habilidad en identificar características de la situación relacionadas con los últimos resultados, y
(b) habilidad en usar operaciones integradas complejas (como un ejemplo, cálculo aritmético).

En muchos casos de problemas de transformación, la inducción de una estructura es también requerida. El proceso de entendimiento inicial del problema está involucrado, como fue estudiado por Hayes y Simon (1974), Simon y Hayes (1976), usando tareas diferentes en contenido pero isomorfas a la Torre de Hanoi. Las habilidades identificadas por Greeno relativas a esta categoría de problemas, están en el "entendimiento", previamente mencionado, y el conocimiento general accesible a la memoria a largo plazo del que resuelve el problema

3. Problemas de arreglo.

En los problemas de esta clase, algunas componentes son presentadas, y la tarea es encontrar un arreglo que satisfaga un criterio establecido. Un ejemplo común es un anagrama (NCABO) y un tipo algo más complejo es el criptaritmético (Newell - Simon. 1972), representado por el problema:

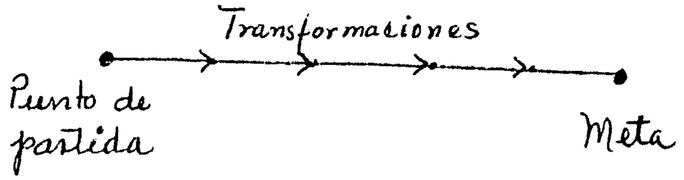
DONALD + GERALD = ROBERT

Problemas de arreglo de naipes (Katona. 1940) son otros ejemplos. De acuerdo a la interpretación de Greeno de la demostración, las habilidades humanas requeridas para la solución exitosa de tales tareas incluye:

(a) afluencia en generar ensayos de soluciones parciales,
(b) accesibilidad, en la memoria del resolvedor del problema, de patrones de solución.
(c) aprovechamiento de reglas que reducen la investigación de posibilidades (como las reglas de fonética del Inglés, aplicadas a los anagramas)
(d) Estrategias específicas de tareas de procedimiento (como reordenar las letras de un anagrama en forma consistente).

4. <u>Problemas de Transformación de arreglos.</u>
Estos son problemas en que un arreglo de elementos está dado, y la tarea es realizar una transformación estructural de este arreglo. Como ejemplos están los problemas de matchstick de Katona (1940). y problemas de ajedrez (Simon y Gilmartin, 1973). Tales problemas, dice Greeno, tienen parte de las habilidades requeridas para la transformación de problemas, y también aquellas requeridas para problemas de arreglo. En resumen, estudios han enfatizado la posesión de habilidades prerrequisito, tales como la identificación de patrones por maestros de ajedrez (Case y Simon, 1973; de Groot, 1966)..."

Observemos que en el punto 2, problemas de transformación, Greeno ubica a las pruebas de teoremas dentro de este punto. Como ahí se menciona, se sigue un esquema básico en donde se parte de una situación, se hacen transformaciones de ésta hasta llegar a una situación meta.



Analicemos algunos ejemplos representativos de distintas pruebas de teoremas o resultados en matemáticas, tratando de seguir el esquema anterior.

Las demostraciones que se analizarán son las siguientes:

A) Teorema. La solución del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

está dada por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Meta

Punto de partida

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

$$\longrightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Demostración.

1. Tomemos las ecuaciones del sistema y llamémoslas (1) y (2) respectivamente

$$a_1 x + b_1 y = c_1 \quad \ldots\ldots (1)$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2 \quad \ldots\ldots (2)$$

2. Multipliquemos la ecuación (1) por b_2 y la ecuación (2) por $-b_1$, para obtener las ecuaciones (1') y (2')

$$b_2 a_1 x + b_2 b_1 y = b_2 c_1 \quad \ldots\ldots (1')$$
$$-b_1 a_2 x - b_1 b_2 y = -b_1 c_2 \quad \ldots\ldots (2')$$

3. Sumemos (1') y (2')

$$\begin{array}{r} b_2 a_1 x + b_2 b_1 y = b_2 c_1 \\ -b_1 a_2 x - b_1 b_2 y = -b_1 c_2 \\ \hline b_2 a_1 x - b_1 a_2 x = b_2 c_1 - b_1 c_2 \end{array}$$

Obtenemos

4. Factorizando x

$$x(b_2 a_1 - b_1 a_2) = b_2 c_1 - b_1 c_2$$

5. Despejando x

$$x = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{b_2 a_1 - b_1 a_2} = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

6. Llevando numerador y denominador al arreglo de determinantes, tenemos que:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

que es una parte de la meta.

De igual forma obtenemos el valor de y.

7. Multipliquemos la ecuación (1) por $-a_2$ y la ecuación (2) por a_1 para obtener las ecuaciones (1") y (2")

$$-a_2 a_1 x - a_2 b_1 y = -a_2 c_1 \quad \ldots\ldots (1'')$$
$$a_1 a_2 x + a_1 b_2 y = a_1 c_2 \quad \ldots\ldots (2'')$$

8. Sumemos (1") y (2")

Obtenemos $a_1 b_2 y - a_2 b_1 y = a_1 c_2 - a_2 c_1$

9. Factoricemos y

$$y(a_1 b_2 - a_2 b_1) = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

10. Despejemos y

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

11. Llevando numerador y denominador al arreglo de determinantes, tenemos que:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Llegamos a la meta.

B) Teorema. Consideremos las rectas

$$Ax + By + C = 0 \quad \ldots\ldots (1), \text{ con } B \neq 0$$
$$A'x + B'y + C' = 0 \quad \ldots\ldots (2), \text{ con } B' \neq 0$$

Las rectas (1) y (2) son paralelas si y sólo si $AB' - A'B = 0$

Esta prueba consta de dos partes.

1ª Parte.

Punto de Partida

Las rectas: $\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C = 0 \end{cases}$ son paralelas

$\downarrow$ transformaciones

Meta

$AB' - A'B = 0$

1. Tomemos $Ax + By + C = 0$

2. Entonces $y = \dfrac{-Ax - C}{B}$

3. Entonces $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$

4. Entonces la pendiente de $Ax + By + C = 0$ es $m = -\dfrac{A}{B}$

5. Tomemos $A'x + B'y + C' = 0$

6. Entonces $y = \dfrac{-A'x - C'}{B'}$

7. Entonces $y = \frac{-A'}{B'}x - \frac{C'}{B'}$

8. Entonces la pendiente de $A'x + B'y + C' = 0$ es $m' = -\frac{A'}{B'}$.

9. Como las rectas son paralelas tenemos que

$m = m'$, es decir, $-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}$ $\quad B \neq 0,\ B' \neq 0$

10. Entonces $-AB' = -A'B$

11. Entonces $AB' = A'B$

12. Por lo tanto, $AB' - A'B = 0$. Llegamos a la meta.

2ª Parte.

Punto de Partida		Meta
$AB' - A'B = 0$	$\xrightarrow{\text{Transformaciones}}$	Las rectas $\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$ son paralelas

1. Si $AB' - A'B = 0$

2. Entonces $-A'B = -AB'$

3. Entonces $-\frac{A'}{B'} = \frac{-A}{B}$, con $B \neq 0$ y $B' \neq 0$

4. Sabemos que la recta $y = -\frac{A'}{B'}x + k'$ tiene como pendiente $-\frac{A'}{B'}$ y que la recta $y = -\frac{A}{B} + k$ tiene como pendiente $-\frac{A}{B}$.

5. Por el paso 3. estas rectas son paralelas.

6. Si $k = -\frac{C}{B}$ y $k' = -\frac{C'}{B'}$ entonces . . .

$y = -\frac{A'}{B'}x + k'$ es la recta $y = -\frac{A'}{B'}x - \frac{C'}{B'}$ ....(1)

$y = -\frac{A}{B}x + k$ es la recta $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ ....(2)

son paralelas

7. Haciendo modificaciones en las ecuaciones, tenemos:

$$B'y = -A'x - C'$$
$$By = -Ax - C$$

8. Entonces $A'x + B'y + C' = 0$ estas rectas, por el paso 5,
$Ax + By + C = 0$

son paralelas.
Llegamos a la meta.

c) Teorema. La suma de los primeros n naturales está dada por la siguiente relación:

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

La demostración de este resultado se hace por Inducción Matemática, y como se sabe, este método consta de dos partes:

I. Demostrar que la igualdad es válida para el natural 1.

II. Suponiendo que la igualdad es válida para el natural k, hay que demostrar que ésta también es válida para el natural $k+1$.

Tratando de seguir el esquema, punto de partida – meta, podríamos decir que el punto de partida global es $1+2+3+\ldots+n$ y la meta $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Aunque en los pasos I y II, es posible dar puntos de partida y metas parciales.

Demostración.

I. Punto de Partida — Meta

$$1 \xrightarrow[\text{transformaciones}]{} 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

1. Tomemos el 1.

2. $1 = \frac{2}{2}$

3. $1 = \frac{1(2)}{2}$

4. $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Llegamos a la meta.

II. 5. Supongamos que la igualdad es válida para el natural k, es decir, supongamos que:

$$1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

<u>Punto de Partida</u> <u>Meta</u>

$$1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2} \xrightarrow{\text{transformaciones}} 1+2+3+\dots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

6. Tomemos $1+2+3+\dots+k+(k+1)$

7. Entonces $1+2+3+\dots+k+(k+1) = \dfrac{k(k+1)}{2} + (k+1)$

8. Entonces $1+2+3+\dots+k+(k+1) = \dfrac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$

9. Por lo tanto, $1+2+3+\dots+k+(k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Llegamos a la meta.

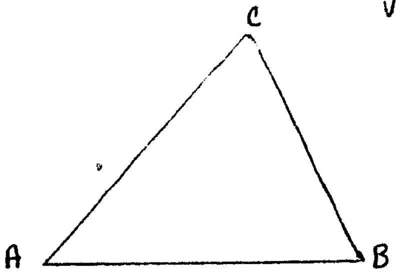
D) La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos.

<u>Punto de Partida</u> <u>Meta</u>

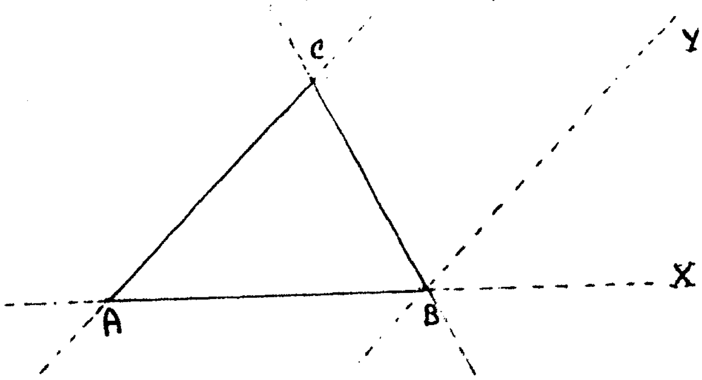
Los ángulos internos de un triángulo. $\xrightarrow{\text{Transformaciones}}$ La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos.

Demostración.

1. Sea ABC un triángulo cualquiera.



2. Tracemos la recta BY paralela a AC y prolonguemos los lados del triángulo, en particular AB hasta X



3. Entonces $\measuredangle XBY + \measuredangle YBC + \measuredangle B = 2$ rectos, por ser ángulos suplementarios.

4. $\measuredangle A = \measuredangle BXY$, por ser ángulos correspondientes.

5. $\measuredangle C = \measuredangle YBC$, por ser ángulos alternos internos.

6. Por lo tanto, $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 2$ rectos, por el paso 3.

E) Teorema. $\sqrt{2}$ es un número irracional.

La demostración se hará por reducción al absurdo, siguiendo el esquema usado en los casos anteriores, podríamos decir que el punto de partida y la meta, son:

$$\sqrt{2} \text{ no es irracional} \xrightarrow{\text{transformaciones}} \sqrt{2} \text{ es irracional}$$

Demostración.

1. Supongamos que $\sqrt{2}$ no es irracional
2. Entonces $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
3. Entonces $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.
4. Eliminemos los factores comunes de p y q
5. Entonces $\sqrt{2} = \frac{p_1}{q_1}$, donde $\frac{p_1}{q_1}$ es la fracción irreducible de $\frac{p}{q}$
6. Entonces $q_1\sqrt{2} = p_1$
7. Entonces $(q_1\sqrt{2})^2 = p_1^2$
8. Entonces $2q_1^2 = p_1^2$
9. Entonces p_1^2 es par
10. Entonces p_1 es par.

11. Entonces $p_1 = 2n$, para algún $n \in \mathbb{Z}$.

12. Entonces $2q_1^2 = 4n^2$ (sustituyendo p_1 en el paso 8).

13. Entonces $q_1^2 = \frac{4n^2}{2}$

14. Entonces $q_1^2 = 2n^2$

15. Entonces q_1^2 es par

16. Entonces q_1 es par

17. Entonces $q_1 = 2m$, para algún $m \in \mathbb{Z}$.

18. Entonces p_1 y q_1 tienen como factor común a 2

19. El paso 5 y el paso 18 constituyen un absurdo.

20. Por lo tanto, $\sqrt{2}$ es irracional.

F) Teorema. El conjunto de números primos $\mathbb{P}$ es infinito.

La demostración se hará por reducción al absurdo.

<u>Punto de Partida</u>		<u>Meta</u>
El conjunto de números primos $\mathbb{P}$ no es infinito	$\xrightarrow{\text{transformaciones}}$	El conjunto de números primos $\mathbb{P}$ es infinito

Demostración

1. Supongamos que P no es infinito.

2. Entonces P es finito

3. Supongamos que $P = \{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n\}$ y que aquí están todos los primos.

4. Tomemos el número $N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$

5. Hay dos posibilidades para N

   i) N es primo
   ii) N no es primo

6. i) Si N es primo, podemos ver que N no es ninguno de los $p_j \in P$, ya que

$$p_1 < (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n) + 1$$

$$p_2 < (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n) + 1$$

$$\vdots$$

$$p_n < (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n) + 1$$

7. Hemos encontrado otro primo, a saber, N y habíamos supuesto que teníamos todos. Esto es un absurdo, este absurdo viene de suponer que P es finito

8. Por lo tanto, $\mathcal{P}$ es infinito.

9. ii) Si N no es primo, N es un natural, entonces debe existir algún primo que lo divide.

10. $$\frac{N}{p_1} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1}{p_1} = p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + \frac{1}{p_1}$$

11. Entonces $p_1 \nmid N$, pues $\frac{1}{p_1}$ no es un entero.

12. $$\frac{N}{p_2} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1}{p_2} = p_1 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdots p_n + \frac{1}{p_2}$$

13. Entonces $p_2 \nmid N$, pues $\frac{1}{p_2}$ no es un entero.

14. Este proceso lo hacemos hasta llegar a p_n

$$\frac{N}{p_n} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{n-1} \cdot p_n + 1}{p_n} = p_1 \cdot p_2 \cdots p_{n-1} + \frac{1}{p_n}$$

15. Entonces $p_n \nmid N$, pues $\frac{1}{p_n}$ no es un entero.

16. Por lo tanto, ningún primo $p_j \in \mathcal{P}$ divide a N

17. Entonces debe haber otro primo que no está en $\mathcal{P}$ que divide a N.

18. Este último paso nos da un absurdo, porque habíamos supuesto que en $\mathcal{P}$ teníamos todos los primos.

19. Este absurdo viene de suponer que P es finito, por lo tanto P es infinito.

De las demostraciones anteriores resaltamos algunos pasos de ellas, en la siguiente lista:

a) Los pasos:

del 1 al 5 o 7 al 10 de la demostración A (Determinantes).

del 1 al 3 o 5 al 7 de la demostración B (Paralelismo).

del 1 al 4 o 5 al 8 de la demostración C (Inducción Matemática)

del 5 al 8 o 11 a 14 de la demostración E ($\sqrt{2}$ es irracional)

que podríamos considerar como transformaciones algebraicas.

b) A partir de un número escribir la ecuación de la recta (como es el caso del paso 3 al 4 de la suficiencia de la demostración B.

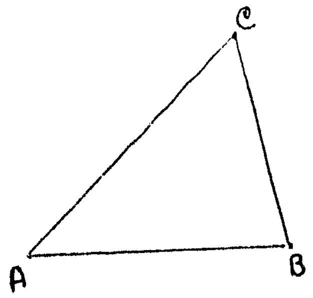
c) A partir de una recta, identificar cual es su pendiente (como en el paso 3 al 4 de la necesidad de la prueba B).

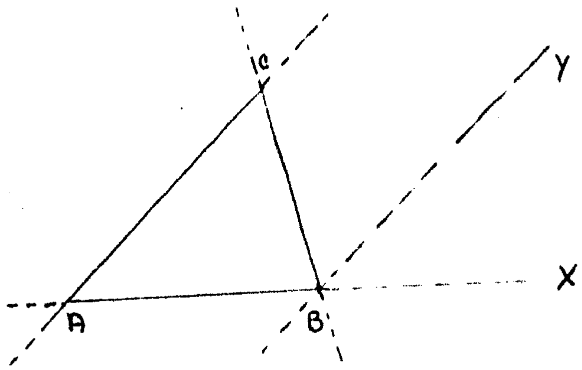
d) A partir de la meta, esto es $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

en la prueba de inducción en C, aplicar una transformación que nos da dos puntos iniciales y sus respectivas metas

Punto de Partida	Meta
1	$1 = \frac{1(1+1)}{2}$
$1+2+3+\dots+k+k+1$	$1+2+3+\dots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

e) "Transformar" un triángulo en dos pares de paralelas con sus transversales, como es el caso del paso 2 en la prueba D





AC paralela a BY y su transversal BC
AC paralela a BY y su transversal BA.

f) A partir de la meta generar un punto de partida, que no existía inicialmente. Este es el caso de las pruebas por reducción al absurdo E y F ($\sqrt{2}$ es irracional y los primos son un conjunto infinito).

Meta: Queremos demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional.

Punto de Partida : Supongamos que $\sqrt{2}$ no es irracional.

Meta : P es infinito.

Punto de Partida: Supongamos que P es finito.

g) A partir de relaciones o expresiones identificar propiedades. Como es el caso del paso 8 al 9 y 9 al 10 de la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ (prueba E)

(8) Si $2q_1^2 = p_1^2$ entonces, (9) p_1^2 es par entonces, (10) p es par

o bien el paso (6) de la prueba A (Determinantes), a partir de $x = \dfrac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$ podemos decir que

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Las operaciones o procesos como los de (a) a (g), como otros tantos que se realizan en la demostración de que P es infinito, son tan diferentes en sus características o formas, que lo único en común es que se pasa de una situación a otra, pero la forma de pasar y las situaciones a las que se llegan, no siempre son una modificación directa de la anterior. Por lo tanto el llamar a todos estos cambios o procesos con el mismo nombre de "transformaciones", como propone Greeno, nos conduce a una situación tan difusa, que plantea inmediatamente dos observaciones:

1. La necesidad de determinar claramente el significado de la palabra transformación.
2. Que en el caso de que la definición de tal palabra abarque los casos anteriores, entonces es casi seguro que prácticamente cualquier procedimiento matemático (definir, demostrar, pensar, identificar, etc). va a poder ser llamado una transformación. Esto último en términos de caracterizar los procesos de razonamiento matemático, no nos dá información, pues son consideraciones demasiado generales.

Otra observación acerca de la clasificación de Greeno, es que debido a que toda prueba matemática, debería ser un ejemplo del punto 2 de su clasificación, parece ser que ninguna demostración puede ser ejemplo de otro punto de la misma. Si analizamos la demostración D, respecto a la suma de los ángulos internos de un triángulo, y observamos el punto 3, "problemas de arreglo", parece ser que la prueba D sería un ejemplo de este punto de la clasificación, pues en tal prueba hay que identificar un arreglo distinto de los ángulos de un triángulo. Esto mismo podría decirse con problemas de Geometría, que involucran semejanza así mismo en pruebas que incorporan transformaciones de una matriz, como diagonalizar una matriz, sin embargo, Greeno no menciona que pruebas como éstas pueden ser consideradas como problemas de arreglo. Esta situación es bastante típica y representativa respecto a la clasificación de habilidades intelectuales del pensamiento en general.

Estas clasificaciones presentan poca información con respecto al pensamiento matemático, pues no se ve relación directa de estas clasificaciones con el contenido de las Matemáticas, precisamente por su generalidad.

Esto nos conduce a desarrollar un trabajo en el terreno de las matemáticas y con problemas específicos de ellas, es decir, daremos una clasificación de algunos elementos del pensamiento matemático, obtenida a partir del análisis de problemas y ejercicios de Geometría Analítica y Algebra Superior debido a su gran amplitud y uso, sobre todo en Bachillerato, primeros semestres de Licencia tura de Matemáticas y carreras afines. A través de esto intentaremos aproximarnos a una clasificación más directa de algunos aspectos del pensamiento matemático que aparecen en la resolución de problemas, con la intención de entender y usar cuestiones relativas al pensamiento y aprendizaje de las matemáticas.

CLASIFICACION DE PROBLEMAS MATEMATICOS.

Con la intención de hacer más reflexiva la selección de problemas o ejercicios durante el desarrollo de un curso de matemáticas, se elaboró una clasificación de los mismos pensando en el tipo de actividades mentales que el alumno emplea en su resolución. Con esto se pretende que el diseño de actividades o tareas relacionadas con la resolución de problemas sea más consciente en cuanto a la clase de trabajo o habilidades que queremos desarrollar en el estudiante cuando resuelve un problema específico.

Así la idea de esta clasificación es que sea un apoyo para el profesor de matemáticas en el sentido de ubicarlo con respecto de los objetivos que puede alcanzar al diseñar una tarea, que se dé cuenta que hay distintos grados y niveles de entendimiento de un concepto matemático y en base a esto, el profesor trate de conocer en qué etapa de desarrollo se encuentran sus estudiantes con respecto de un tema para poder idear o seleccionar, con ayuda de la clasificación, algunos ejercicios apropiados que los hagan avanzar y consolidar esa etapa del conocimiento.

La lista que constituye la clasificación que llamo "Algunos elementos que aparecen en el pensamiento al resolver problemas matemáticos", tiene como antecedente el trabajo "Un análisis de las tareas - examen de un curso de Cálculo I". Esta lista se obtuvo al analizar los elementos que intervenían en la solución de cada ejercicio de cada tarea-examen, debido a esto la lista no es exhaustiva. Sin embargo, considero que es un inicio para alcanzar las finalidades de este trabajo.

ALGUNOS ELEMENTOS QUE APARECEN EN EL PENSAMIENTO AL RESOLVER PROBLEMAS MATEMATICOS.

1. Ejercicios que sirven para familiarizar al estudiante con un tema próximo a tratarse en clase.

2. Ejercicios en los que se pide enunciar una definición o un resultado.

3. Ejercicios de reconocimiento de definiciones y de resultados (teorema, lema, propiedades, etc).

4. Ejercicios que buscan el desarrollo de habilidades algorítmicas.

5. Ejercicios que buscan el desarrollo de habilidades intuitivas del tipo de visualización, esto es, que el alumno se auxilie de dibujos, gráficas, diagramas que le ayuden a comprender el problema.

6. Ejercicios que requieren la aplicación de definiciones y/o resultados.

7. Ejercicios que requieren de manipulaciones algebraicas que dependen de cada problema. (Estos ejercicios están a un nivel más alto de los que emplean solo memorización).

8. Ejercicios cuya finalidad es el descubrimiento de datos o hipótesis implícitas en el pro-

blema para la aplicación de un resultado.

9. Ejercicios que conducen al alumno a la búsqueda de elementos para la afirmación o negación de hechos.

10. Ejercicios que necesitan para su solución de construcciones auxiliares, a saber, geométricas o algebraicas.

11. Ejercicios que requieren de la construcción de contraejemplos para la solución del problema.

12. Ejercicios en los que el estudiante use dos o más caminos para la solución del problema.

13. Ejercicios en los que el alumno deduzca resultados a partir de otros.

14. Ejercicios que lleven al estudiante a intuir o sospechar, sugerir o conjeturar reglas o patrones, resultados o relaciones a base de inducción.

15. Ejercicios que lleven al estudiante a intuir o sospechar, sugerir o conjeturar reglas o patrones, resultados o relaciones a partir del análisis e integración de información nueva.

16. Ejercicios que lleven al estudiante a intuir o sospechar, sugerir o conjeturar reglas o patrones, resultados o relaciones por medio de analogías.

17. Ejercicios que fuerzan a los estudiantes a manejar, asociar, estructurar e integrar varios elementos que intervienen en el problema para su solución, tales como: definiciones, resultados, hipótesis, tesis, construcciones auxiliares, desarrollo lógico para su demostración, etc.

18. Ejercicios que requieren de la confrontación y análisis de conjeturas, enfoques o puntos de vista por parte de grupos de estudiantes.

EJEMPLIFICACION

Procedo a ejemplificar cada uno de los puntos de la lista anterior, utilizando ejercicios de Geometría Analítica, en especial de los temas de sistemas de coordenadas, gráfica de una ecuación y línea recta (primera parte de un curso de Geometría Analítica), también empleo ejercicios de Algebra Superior centrándome en el tema de divisibilidad.

Para esto, escojo dos libros muy utilizados como textos y que son citados frecuentemente en la bibliografía de cursos de Geometría Analítica y Algebra Superior, éstos son: Algebra Superior de Cárdenas, Lluis, Raggi, Tomas. y Geometría Analítica de Lehmann.

Como se menciona en la ubicación del trabajo, la intención de elegir problemas o ejercicios de Algebra Superior y Geometría Analítica se debe a su gran amplitud y uso, además considero que estos cursos son básicos dentro de la formación de un estudiante en el área de matemáticas.

<u>Observaciones y Aclaraciones.</u>

Desde mi punto de vista, sería recomendable obtener ejercicios de un mismo tema para ejemplificar cada uno de los puntos de la clasificación, y así desarrollar diversas actividades mentales, de un mismo tema, en el estudiante. Sin embargo, esta labor es difícil y podría resultar artificial debido a que posiblemente se tendrían que elaborar ejercicios nuevos que podrían resultar superfluos. Siguiendo esta consideración trato de agotar todos los puntos de la lista con por lo menos un ejercicio de Geometría Analítica y Algebra Superior en un mismo tema, y paso a otro cuando considero que en ese hay mejores ejemplos.

Así mismo, quiero aclarar que las secciones de ejercicios de los textos mencionadas no cubren a mi juicio, todos los elementos citados en la clasificación o no siempre me satisfacen para la ejemplificación, de esta forma recurro a otros textos afines a las temáticas o construyo nuevos ejercicios en base a los que aparecen en los textos.

Por último hago mención del texto, capitulo y pág$^{\underline{a}}$na de donde extraje cada ejercicio, así como la justificación del porqué considero que es un ejemplo para el punto en cuestion, y según el caso menciono si el ejercicio corresponde también a otro punto de la clasificación.

1. Ejercicios que sirven para familiarizar al estudiante con un tema próximo a tratarse en clase.

Ejemplo 1.

Hallar la distancia del origen al punto (a,b).

Geometría Analítica. Lehmann. Sistemas de Coordenadas. Página 9.

Este ejercicio lo ubican en el texto antes de dar el Teorema de la distancia entre dos puntos. El alumno hasta el momento sabe localizar puntos en el plano y conoce el Teorema de Pitágoras.
El ejercicio requiere de la aplicación del Teorema de Pitágoras por lo cual también puede ejemplificar el punto 6.

Ejemplo 2.

Para los siguientes incisos hallar la ecuación de su lugar geométrico y dar su interpretación geométrica.

a) Un punto se mueve de tal manera que siempre equidiste de dos puntos dados (-1,2) y (4,-1).

b) Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto (2,3) es siempre igual a 5.

c) Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto (2,4) es siempre igual a su distancia del eje Y aumentada en 3.

d) Un punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los dos puntos (3, 0) y (-3, 0) es siempre igual a 8.

e) Un punto se mueve de tal manera que la diferencia de sus distancias a los dos puntos (3,0) y (-3,0) es siempre igual a 4.

Geometría Analítica de Lehmann. Gráfica de una ecuación y lugares geométricos. Página 54. Ejercicios 4, 5, 14, 15 y 17.

El estudiante se encuentra en la parte de gráfica de una ecuación y lugares geométricos por lo cual estos ejercicios lo empiezan a familiarizar con la ecuación y gráfica de la recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola.

<u>Ejemplo 3</u>.

Obsérvese que:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$1+2 = \frac{2(2+1)}{2}$$

$$1+2+3 = \frac{3(3+1)}{2}$$

$$1+2+3+4 = \frac{4(4+1)}{2}$$

i) Cheque que se cumple una igualdad similar para los números 5 y 6.

ii) Parece que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
¿Cuál de los siguientes métodos podría ayudarnos a probar la validez de la igualdad para todo número natural?

a) Checando que se cumple para 1, para 2, para 3, para 4,...
b) Checando que se cumple para un número natural elegido al azar.
c) Checando que se cumple para un subconjunto de $\mathbb{N}$.
d) Checando que cada vez que se cumple para un número natural se cumple para su sucesor.

Este ejercicio fué diseñado por mí.
Lo que pretende el ejercicio es introducir al alumno al método de Inducción Matemática mediante la reflexión propuesta en el ejercicio.

2. <u>Ejercicios en los que se pide enunciar una definición o un resultado.</u>

En este tipo de ejercicios lo que básicamente se pide, es que el estudiante recuerde cuestiones fundamentales para avanzar en el desarrollo de un tema. Estos ejercicios podrían servir como indicadores de avance del grupo, en exámenes cortos escritos o como preguntas directas al estudiante en clase. Los ejemplos fueron diseñados por mí.

Ejemplo 1.

Defina la distancia entre los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.
(Se supone que la definición se dió en clases pasadas).

Ejemplo 2.

a) ¿ Cuál es la ecuación de una recta que es paralela al eje Y ?

b) ¿ Cuál es la ecuación de una recta que tiene pendiente m y pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$?

En el libro de Lehmann el inciso (a) es tratado como un caso especial debido a que se considera que la recta paralela al eje Y no tiene pendiente, y el inciso (b) es un teorema que demuestran a partir de la ecuación de la pendiente.
Considero que estos dos resultados deben estar siempre presentes en el estudiante para poder avanzar con fluidez en el tema.

Ejemplo 3.

Complete los siguientes enunciados

i) Si a y b son números enteros, decimos que b divide a a si ______________ cuya notación es $b|a$

ii) Dados dos enteros a y b, a los enteros de la forma ______________, se les llama combinaciones lineales de a y b, con r y s números enteros

iii) Dados dos enteros a y b podemos dividir a entre b y obtener un cociente y un residuo, de aquí el siguiente:

teorema. Si a y b son enteros y $b \neq 0$, existen dos enteros q y r ________ tales que ________ ____________, donde r cumple con ________.

3. <u>Ejercicios de reconocimiento de definiciones y de resultados (teorema, lema, propiedades, etc).</u>

<u>Ejemplo 1.</u>

Sean $Ax+By+C=0$ y $A'x+B'y+C'=0$, las ecuaciones de dos rectas. ¿Cómo son las rectas si se satisfacen las relaciones enlistadas?

1. $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$, o sea $AB'-A'B=0$ ______________
2. $AA'+BB'=0$ ______________
3. $A=kA'$, $B=kB'$, $C=kC'$, $(k\neq 0)$. ______________

4. $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$, o sea $AB' - A'B \neq 0$ ______________

Este ejercicio es un teorema del libro de Lehmann del tema de línea recta (página 69). Considero que estos resultados son importantes de reconocer para poder proseguir con soltura el tema de línea recta de acuerdo al tratamiento propuesto por el texto.

Otro ejercicio similar al anterior es el siguiente

Ejemplo 2.

Sean m_1 y m_2 las pendientes asociadas a l_1 y l_2 respectivamente.
En el paréntesis de la izquierda escriba el número adecuado de la lista propuesta en la columna de la derecha.

( ) Pendiente de la recta l_1 que pasa por los puntos distintos (x_1, y_1), (x_2, y_2)

( ) Angulo θ formado por dos rectas con pendiente inicial m_1 y pendiente final m_2

1) $m_1 = \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}$, $y_1 \neq y_2$

2) $m_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, $x_1 \neq x_2$

3) $m_1 = \frac{y_1 - x_1}{y_2 - x_2}$, $y_2 \neq x_2$

( ) Condición necesaria y suficiente para el paralelismo de las rectas l_1 y l_2 de pendientes m_1 y m_2 respectivamente.

( ) Condición necesaria y suficiente para la perpendicularidad de las rectas l_1 y l_2 de pendientes m_1 y m_2 respectivamente.

4) $tg\,\theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

5) $tg\,\theta = \dfrac{m_2 + m_1}{1 + m_1 m_2}$

6) $tg\,\theta = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

7) $m_1 = -m_2$

8) $m_1 \neq m_2$

9) $m_1 = m_2$

10) $m_1 . m_2 = 1$

11) $m_1 m_2 = -1$

12) $m_1 m_2 \neq -1.$

Ejemplo 3

Tache la respuesta correcta.

i) Se dice que dos números son primos entre sí o primos relativos, si

( ) El máximo común divisor de ellos es cero, $(a,b) = 0$

( ) El máximo común divisor de ellos es uno, $(a,b) = 1$

( ) El máximo común divisor de ellos es menos 1, $(a,b) = -1$

ii) Decimos que a es congruente con c módulo b, $a \equiv c \mod b$, si

( ) $a = c$

( ) b divide a a y b divide a c

( ) $a - c$ divide a b

( ) b divide a $a - c$

Como en el punto anterior, estos ejemplos pueden conformar un indicador de avance del grupo, por lo cual pueden formar parte de un examen corto. Los ejercicios fueron diseñados por mí tomando en cuenta resultados importantes de los textos.

4. Ejercicios que buscan el desarrollo de habilidades algorítmicas.

Ejemplo 1.

Hallar la pendiente para cada una de las rectas siguientes

Recta que pasa por los puntos (-3, 2) y (7, -3)

Recta que pasa por los puntos (1, 5) y (10, 7)

Recta que pasa por los puntos (-2, 1) y (7, 3)

Recta que pasa por los puntos (1, 5) y (-2, 1)

Geometría Analítica de Lehmann Sistemas de Coordenadas. Página 24. Ejercicio 4
Los alumnos tienen la fórmula de la pendiente de una recta $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, $x_1 \neq x_2$.

El ejercicio requiere de la utilización de la fórmula de la pendiente por lo cual puede ejemplificar también el punto 6 (aplicación de definiciones o resultados).

Ejemplo 2.

Los puntos extremos de un segmento son P_1 (2,4)

y $P_2(8,-4)$.
Hallar el punto $P(x,y)$ que divide a este segmento en dos partes tales que

$$\frac{\overline{P_2P}}{\overline{PP_1}} = -2$$

Geometría Analítica de Lehmann. Sistemas de Coordenadas. Página 16. Ejercicio 12.

Los estudiantes solo tendrán que aplicar el teorema de la División de un segmento en una razón dada, donde el punto $P(x,y)$ buscado cumple $x = \frac{x_1 + r x_2}{1+r}$, $y = \frac{y_1 + r y_2}{1+r}$

donde r es la razón.
Debido a esto último el ejercicio también ejemplifica el punto 6.

Ejemplo 3

a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,5)$ y tiene pendiente 2.

b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-6,3)$ y tiene un ángulo de inclinación de $45°$

c) Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -3 y cuya intersección con el eje y es -2.

Geometría Analítica de Lehmann. Línea Recta. Página 63. Ejercicio 1, 2, 3.

El estudiante tiene información de distintas formas de representar una recta, lo que se busca es desarrollar habilidades fundamentalmente algorítmicas, para poder obtener estas representaciones a partir de ciertos datos.
Este ejercicio ejemplifica el punto 6 pues como se menciona se puede aplicar el resultado citado para la solución del mismo.

Ejemplo 4

Sabemos que si a y b son enteros y $b \neq 0$, existen r y s únicos tales que $a = bs + r$, con $0 \leq r < |b|$
Encuéntrense r y s para las siguientes parejas de números.

i) $a = 0$, $b = -3$
ii) $a = 12$, $b = 52$
iii) $a = 59$, $b = 12$
iv) $a = -59$, $b = 12$
v) $a = 59$, $b = -12$
vi) $a = -59$, $b = -12$

Algebra Superior de Cárdenas, Raggi, Tomas, Lluis. Divisibilidad. Página 186. Ejercicio 1.

Ejemplo 5

I. Aplicando el Algoritmo de Euclides, encuéntrese el máximo común divisor de las siguientes parejas de números.

a) 329, 1005
b) 1302, 1224

c) 1816, −1789
d) −666, −12309

Algebra Superior de Cárdenas y otros. Divisibilidad: Página 194. Ejercicio 2.

II. Escalone la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

El escalonar una matriz permite, entre otras cosas, encontrar el rango de la misma, resolver sistemas de ecuaciones, etc, por lo cual es importante que el estudiante desarrolle este tipo de algoritmos.

III. Calcule el siguiente determinante utilizando el desarrollo por menores con respecto a la primera columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Uno de los objetivos de desarrollar este tipo de alritmos por parte del estudiante, es que el alumno cuente con esta herramienta para facilitar el cálculo de determinantes.

IV. Resuélvanse con las fórmulas de Cramer los sistemas siguientes.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 2 \\ 3x - y - 3z = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha \\ x \cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha = -\cos\alpha \end{cases}$$

Algebra Superior de Cárdenas y otros. Sistemas de Ecuaciones Lineales. Página 147. Ejercicio 1.

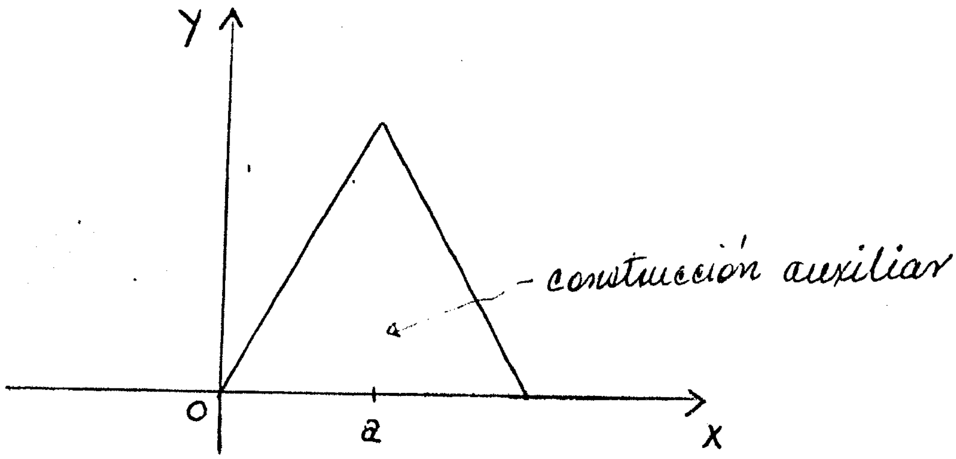
5. Ejercicios que buscan el desarrollo de habilidades intuitivas del tipo de visualización, esto es, que el alumno se auxilie de dibujos, gráficas, diagramas que le ayuden a comprender el problema.

Ejemplo 1.

Un triángulo equilátero OAB cuyo lado tiene longitud a, está colocado de tal manera que el vértice O está en el origen, el vértice A está sobre el eje de las x_s y a la derecha de O, y el vértice B está arriba del eje X. Hallar las coordenadas de los vértices A y B y el área del triángulo.

Geometría Analítica de Lehmann. Sistemas de Coordenadas. Página 8. Ejemplo.

En la solución de este ejercicio, una de las intenciones es que el alumno se auxilie de un dibujo para entender y visualizar el problema.



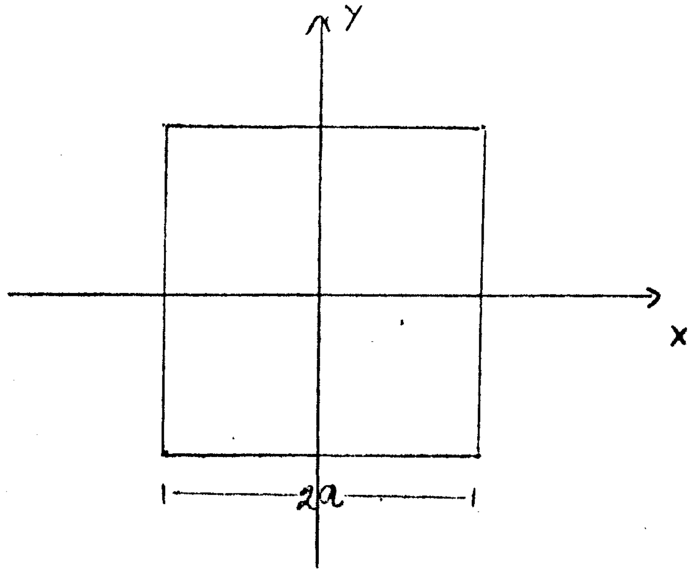
En el ejercicio uno de los caminos que el estudiante tiene para encontrar las coordenadas del punto A y el área del triángulo, es construir la recta que representa la altura del triángulo, por lo cual considero que este ejercicio puede ser clasificado dentro del punto 10. (ejercicios que necesitan construcciones geométricas).

Ejemplo 2.

Un cuadrado de lado igual a $2a$ tiene su centro en el origen y sus lados son paralelos a los ejes coordenados. Hallar las coordenadas de sus cuatro vértices.

Geometría Analítica de Lehmann. Sistemas de Coordenadas. Página 9. Ejercicio 11.

Al igual que el ejemplo anterior, la idea es que el estudiante se auxilie de un dibujo para un mejor entendimiento del problema.



Ejemplo 3.

Sabemos que $A^c = \{x \in \overline{X} / x \notin A\}$, $\overline{X}$ conjunto universal. ¿Será cierto que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$? Justifique su respuesta.

Algebra Superior de Cárdenas y otros. Conceptos Preliminares. Página 17. Ejercicio XIII.

El alumno puede hacer uso de diagramas para poder contestar la pregunta.
Este ejercicio también puede ejemplificar el punto 9 (ejercicios que conducen al alumno a la búsqueda de elementos

Ejemplo 4

Sea $B(P, r)$ el círculo del plano con centro en P y radio r, esto es $B(P, r) = \{x \mid d(P, x) \leq r\}$, $d(P, x)$: distancia de P a x.

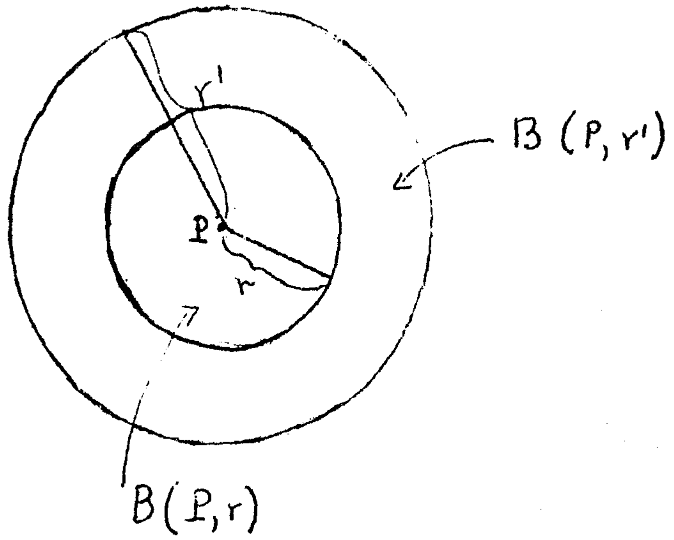
i) ¿Qué podría decir acerca de $B(P, r)$ y $B(P, r')$ si $r \leq r'$?

ii) Si $s \leq r - d(Q, P)$, ¿qué podemos asegurar con respecto de $B(Q, s)$ y $B(P, r)$.?

Algebra Superior de Cárdenas y otros. Conceptos Preliminares. Página 15. Ejercicio 1.

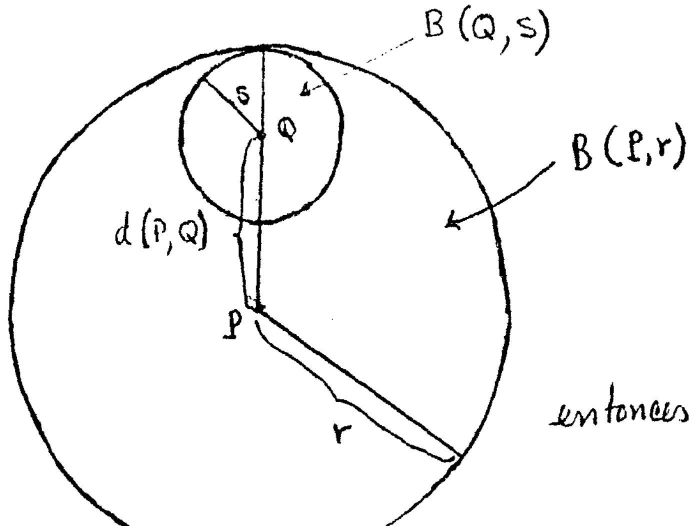
El estudiante puede recurrir a dibujos para tratar de comprender el ejercicio y posteriormente buscar elementos para conjeturar hechos.
Este ejercicio también ejemplifica el punto 9, ejercicios que conducen al alumno a la búsqueda de elementos para la afirmación o negación de hechos, debido a la forma como se plantea.

i)



ntonces $B(P,r) \subset B(P,r')$.

ii)



entonces $B(Q,S) \subset B(P,r)$

Está implícito que $Q \in B(P,r)$ pues S es una distancia tal que $s \leq r - d(Q,P)$.

6. Ejercicios que requieren la aplicación de definiciones y/o resultados.

Es frecuente encontrar ejercicios en donde es necesario la aplicación de algún resultado. Dentro de la ejemplificación hay varios ejemplos que podrían clasificarse dentro de este punto, tal es el caso del ejemplo 1 del punto 1, los ejemplos 1, 2, 3, 5 del punto 4; a continuación dos ejemplos más que considero pueden ejemplificar de manera más clara este punto de la clasificación.

Ejemplo 1.

Demostrar que los puntos $P_1(3,3)$, $P_2(-3,-3)$, $P_3(-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ son vértices de un triángulo equilátero.

Geometría Analítica. Sistemas de Coordenadas. Página 12. Ejemplo.

El estudiante puede aplicar el teorema de la distancia entre dos puntos para demostrar lo pedido.
Este ejercicio tiene como hipótesis implícita, aunque muy obvia, el hecho de que un triángulo equilátero tiene sus tres lados iguales, por lo cual podría clasificarse también dentro de los ejercicios cuya finalidad es el descubrimiento de datos o hipótesis implícitas (punto 8).

Ejemplo 2

i) Pruebe que 52 no es combinación lineal de 20 y 15

ii) Encuentre un número que no sea combinación lineal de 30 y 70.

iii) Pruebe que si c es un entero impar, entonces no es combinación lineal de 98 y 102.

Algebra Superior de Cárdenas y otros. Divisibilidad. Página 183. Ejercicios 6, 7, 8.

El estudiante cuenta con el siguiente resultado que aparece en la página 183 del mismo libro.
Resultado. Si hay un número e tal que $e|a$ y $e|b$ pero $e\nmid g$ entonces g no es combinación lineal de a y b.
De esta forma el estudiante al aplicar este resultado podrá resolver el ejercicio.

i) $5|20$ y $5|15$, como $5\nmid 52$ entonces 52 no es combinación lineal de 20 y 15.

ii) $10|30$ y $10|70$, como $10\nmid 21$ entonces 21 no es combinación lineal de 30 y 70.

iii) Supongamos que c es impar y que c es combinación lineal de 98 y 102 entonces $c = 98r + 102s$. Como $2|98$ entonces $2|98r$ y como $2|102$ entonces $2|102s$ entonces $2|98r + 102s$ entonces $2|c$, esto es un absurdo. Por lo tanto, c no es combinación lineal de 98 y 102.

7. Ejercicios que requieren de manipulaciones algebraicas que dependen de cada problema. (Estos ejercicios están a un nivel más alto de los que emplean solo memorización).

Ejemplo 1.

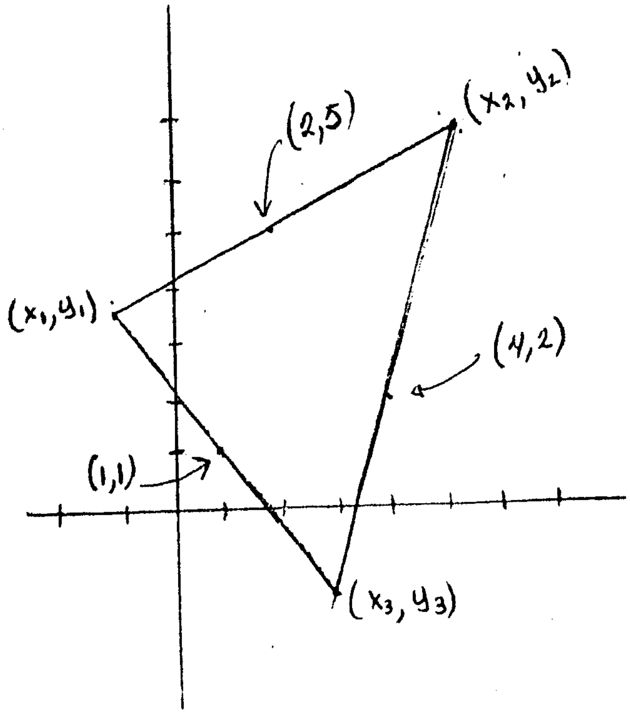
Los puntos medios de los lados de un triángulo son (2,5), (4,2) y (1,1). Hallar las coordenadas de los tres vértices.

Geometría Analítica de Lehmann. Sistemas de Coordenadas. Página 15. Ejercicio 15.

El alumno cuenta con el teorema 3 de la página 12 del libro:
Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son los extremos de un segmento P_1P_2, las coordenadas (x, y) de un punto P que divide a este segmento en la razón dada $r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ son

$$x = \frac{x_1 + r x_2}{1 + r}, \quad y = \frac{y_1 + r y_2}{1 + r}, \quad r \neq -1$$

De esta forma el ejercicio puede resolverse aplicando este teorema para $r = 1$. La aplicación no es de manera directa pues con lo que se cuenta es con los puntos medios de los lados del triángulo y por esto el estudiante tendrá que hacer algunas manipulaciones algebraicas como las que siguen :



Ayudándonos de un dibujo tendremos que :

$$2 = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad 1 = \frac{x_1 + x_3}{2} \qquad 4 = \frac{x_2 + x_3}{2}$$

$$5 = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad 1 = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad 2 = \frac{y_2 + y_3}{2}$$

Esto nos da dos sistemas de tres ecuaciones con tres variables.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 + y_2 = 10 \\ y_1 + y_3 = 2 \\ y_2 + y_3 = 4 \end{cases}$$

los cuales resolviéndolos tendremos que:

$x_1 = -1$ $\quad$ $y_1 = 4$

$x_2 = 5$ $\quad$ $y_2 = 6$

$x_3 = 3$ $\quad$ $y_3 = -2$

Por lo anterior, considero que este ejercicio puede clasificarse en el punto 6 (aplicación de teoremas) y el punto 5 (desarrollo de habilidades intuitivas).

Ejemplo 2.

Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que siempre equidista de dos puntos dados $A(-1, 2)$ y $B(4, -1)$.

Geometría Analítica de Lehmann. Gráfica de una ecuación y lugares geométricos. Página 51. Ejemplo.

El estudiante aplicando el teorema de la distancia entre dos puntos y haciendo manipulaciones algebraicas: a

$$\sqrt{(x-(-1))^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-(-1))^2}$$

podrá llegar a $5x - 2y - 6 = 0$

Ejemplo 3.

Hallar el área del triángulo rectángulo formado por los ejes coordenados y la recta cuya ecuación es $5x+4y+20=0$.

Geometría Analítica de Lehmann. La Línea Recta: Página 64. Ejercicio 24.

El alumno a partir de la ecuación dada, tendrá que efectuar manipulaciones algebraicas que le permitan encontrar las intersecciones con los ejes y así obtener base y altura.

Ejemplo 4.

Demuestre que las condiciones siguientes son equivalentes:

i) a divide a b
ii) $-a$ divide a b
iii) a divide a $-b$
iv) $-a$ divide a $-b$

Algebra Superior de Cárdenas y otros. Divisibilidad. Página 182. Ejercicio 5.

El alumno al aplicar la definición de divisibilidad entre enteros y al hacer manipulaciones algebraicas podrá demostrar lo pedido.
El ejercicio puede ubicarse dentro de los ejercicios que requieren la aplicación de definiciones (punto 6).

Ejemplo 5

i) Pruébese que si c es combinación lineal de a y b, entonces rc lo es también.

ii) Pruébese que si d es combinación lineal de a y b y b es combinación lineal de a y c entonces d es combinación lineal de a y c.

Algebra Superior de Cárdenas y otros. Divisibilidad. Página 183. Ejercicios 11 y 12.

El alumno podrá realizar las siguientes manipulaciones:

i) $c = al + bs \Rightarrow rc = r(al + bs) \Rightarrow rc = a(rl) + b(rs)$

ii) $d = ar + bs$ y $b = al + cm \Rightarrow d = ar + (al + cm)s$

$\Rightarrow d = a(r + ls) + c(ms)$

$\therefore$ d es combinación lineal de a y c

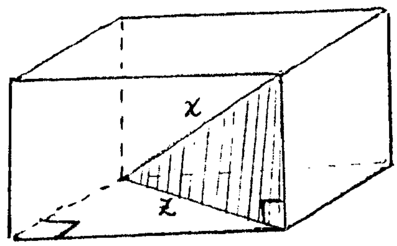
8. Ejercicios cuya finalidad es el descubrimiento de datos o hipótesis implícitas en el problema para la aplicación de un resultado.

Ejemplo 1.

Determinar la diagonal de un paralelepípedo rectangular dados su longitud, ancho y altura.

Como plantear y resolver problemas de George Polya. Página 29. Ejemplo 8.

Es conveniente el dibujo de la figura, por lo cual el problema puede ser clasificado en el punto 5, desarrollo de habilidades intuitivas.



Haciendo uso de la figura, con la construcción auxiliar de la diagonal z de uno de los lados del paralelepípedo, el alumno debe darse cuenta de la existencia del triángulo rectángulo de hipotenusa z, y del triángulo rectángulo de hipotenusa x para poder aplicar dos veces el teorema de Pitágoras.

Debido a que hay una construcción auxiliar, la diagonal z, el ejercicio puede clasificarse dentro de los ejercicios que requieren construcciones geométricas (punto 10).

Ejemplo 2.

Demuestre el siguiente resultado :

Un entero c es combinación lineal de a y b sí y sólo si el máximo común divisor de a y b divide a c

: Algebra Superior de Cárdenas y otros. Divisibilidad. Página 188. Corolario 2.

Si el profesor sigue el libro de Algebra Superior de Cárdenas, tendrá los siguientes resultados.

A). Un entero c divide a los enteros a y b $\Leftrightarrow$ c divide a cualquier combinación lineal de a y b.

B) Si $a, b \in \mathbb{Z}$, $a, b > 0$ y $d = as + bt$ es la combinación lineal positiva mínima entonces $d | a$ y $d | b$

C) El m.c.d. de dos enteros a y b es la combinación lineal positiva mínima de a y b. (Si $(a,b) = d'$ y $d = as+bt$ es combinación lineal positiva mínima entonces $d = d'$).

De esta forma una <u>hipótesis implícita</u> importante en el enunciado es, el m.c.d. de a y b es la combinación lineal positiva mínima de a y b, ya que de esta forma el estudiante puede aplicar el primer y segundo resultado para la demostración de lo pedido, como sigue:

Dem. $\Rightarrow$] ya que $(a,b) = d$ es la combinación

lineal positiva mínima de a y b entonasí $d|a$ y $d|b$, entonces d divide a cualquier combinación lineal de a y b $\therefore$ $d|c$.

[$\Leftarrow$ Si $d|c$ y $d=(a,b)$ entonces d es combinación lineal positiva mínima de a y b, es decir,

$d = as + bt$, como $d|c$ entonces $c = dk$, así

$c = (as+bt)k = a(sk) + b(tk)$

$\therefore$ c es combinación lineal de a y b

El ejercicio utiliza la aplicación de varios resultados y en su resolución se hacen varias manipulaciones algebraicas, debido a esto se le puede ubicar en los puntos 6 (aplicación de resultados) y 7 (requerimiento de manipulaciones algebraicas).
Más adelante en la ejemplificación del punto 17, se da otro ejemplo de este punto.

9. <u>Ejercicios que conducen al alumno a la búsqueda de elementos para la afirmación o negación de hechos.</u>

<u>Ejemplo 1.</u>

Se ha visto que la ecuación de una recta

cualquiera en el plano coordenado es de la forma $Ax + By + C = 0$, donde ya sea A ó B deben ser diferentes de cero y C puede o no ser igual a cero.
¿Esta ecuación representa siempre una recta?

Sugerencia: a partir de los coeficientes haga un análisis de dicha ecuación.

Ejercicio diseñado por mí a partir del teorema 5 (Una ecuación lineal en las variables x y y representan una recta y recíprocamente) que aparece en Geometría Analítica de Lehmann. La línea recta. Página 66.

El estudiante podrá obtener a partir del coeficiente de y (o del coeficiente de x), elementos que le ayuden a responder la pregunta. El estudiante siguiendo el método propuesto tendrá que hacer manipulaciones algebraicas, por lo cual este ejercicio se puede ubicar en el punto 7.

Solución: con respecto al coeficiente de y

Caso 1. $B = 0 \Rightarrow A \neq 0$ y se tiene la ecuación

$x = -\frac{C}{A}$ recta paralela al eje Y.

Caso 2. $B \neq 0 \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, recta de pendiente $-\frac{A}{B}$ y ordenada al origen $-\frac{C}{B}$

$\therefore$ $Ax + By + C = 0$ siempre representa una recta.

Ejemplo 2.

Considere la siguiente proposición.

La divisibilidad entre números enteros nos da una relación de equivalencia.

Proporcione elementos para afirmar o negar tal proposición.

Ejercicio diseñado por mí.

El estudiante tendrá que demostrar que solo las propiedades reflexiva y transitiva se cumplen y tendrá que dar un contraejemplo para demostrar que la propiedad de simetría no se cumple en general.

10. Ejercicios que necesitan para su solución de construcciones auxiliares, a saber, geométricas o algebraicas.

Ejemplo 1.

Hallar la distancia del punto $P(2,6)$ a la recta l cuya ecuación es $4x + 3y = 12$

Geometría Analítica de Lehmann. Línea Recta. Página 64. Ejercicio 25.

El estudiante tendrá que desarrollar cuatro pasos.

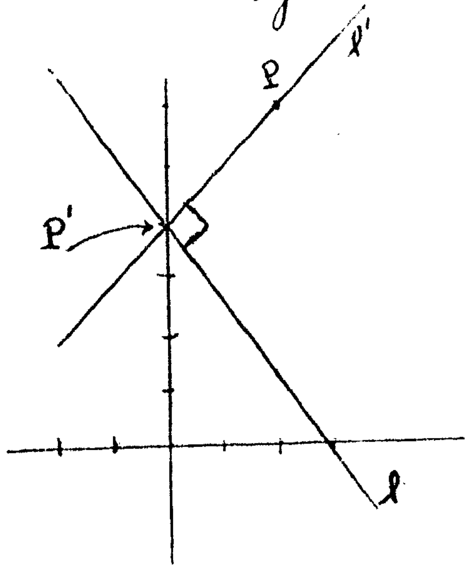
i) Encontrar la pendiente de la recta $4x+3y=12$ con la finalidad de encontrar una recta perpendicular a esta.

ii) Encontrar la recta l' perpendicular a l que pasa por el punto P.

iii) Encontrar el punto P' de intersección entre l y l'

iv) Encontrar la distancia entre P y P'.

En los dos primeros pasos el alumno tendrá que construir una recta l' y por lo tanto tendrá que construir la ecuación de la recta que le permita resolver el ejercicio.



El estudiante puede hacer un dibujo para visualizar el ejercicio

El ejercicio puede ser considerado como ejemplo del punto 17 (ejercicios que fuerzan a los estudiantes a manejar, asociar, estructurar varios elementos que intervienen en el problema para su solución) ya que se tendrá que ejecutar algunas manipulaciones algebraicas; aplicar algunos resultados (perpendicularidad de rectas, pendiente de una recta, distancia entre puntos) y como se menciona necesita de construcciones auxiliares.

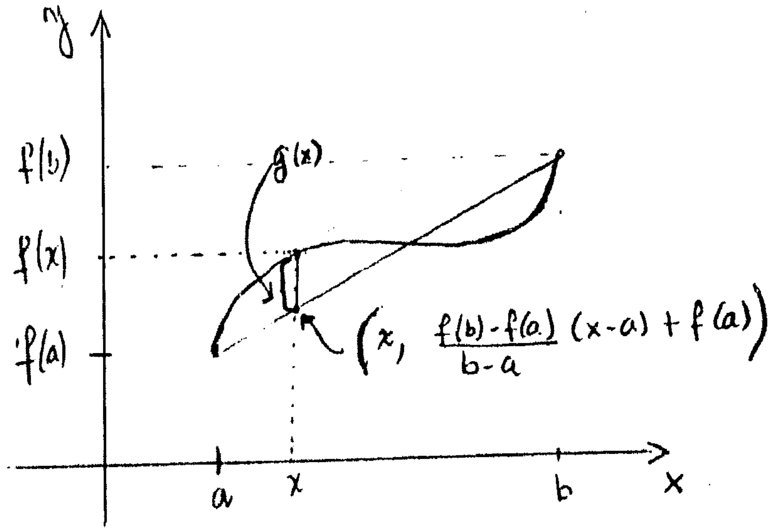
En los ejercicios donde es necesario la construcción de una relación algebraica, la finalidad principal es que el alumno se de cuenta de que no siempre se dan demostraciones mediante la deducción a partir de hipótesis o proposiciones anteriores, sino que a veces la clave para la resolución del problema es la construcción, por ejemplo de una función como en la demostración usual del teorema del Valor Medio*, o la construcción de un número, como en la demostración de la infinitud del conjunto de los números primos**.

(*, ** en la siguiente página).

* En la demostración del Teorema del Valor Medio se construye la función:

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \right)$$

que describe la diferencia entre las ordenadas de los puntos $(x, f(x))$ y $\left(x, \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right)$ para $x \in [a,b]$, y se demuestra que la función $g(x)$ cumple las condiciones del Teorema de Rolle, para concluir que existe $x_0 \in]a,b[$ tal que $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

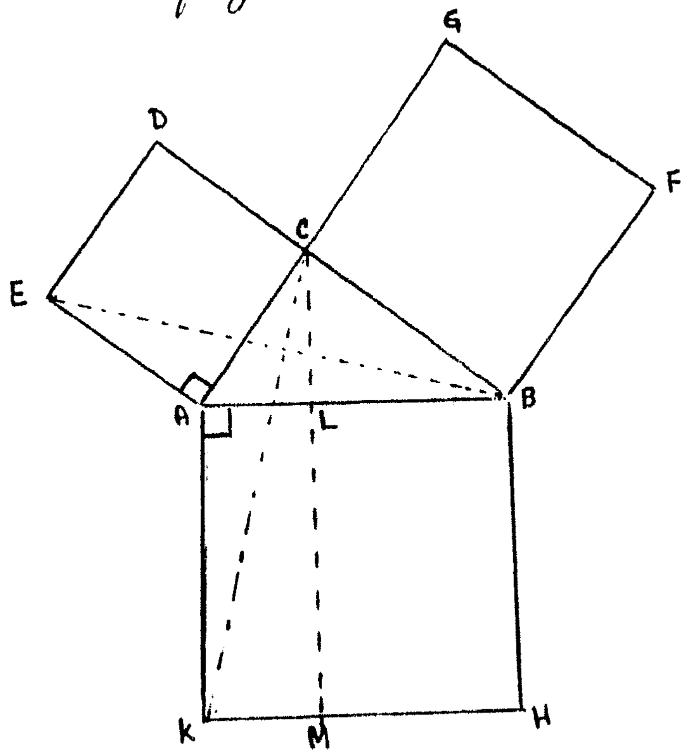


** En la demostración usual se construye el número $N = P_1 P_2 P_3 \cdots P_n + 1$, donde $P_1, P_2, \ldots, P_n$ constituyen la lista finita de números primos.

En cuanto a construcciones auxiliares geométricas es frecuente encontrar ejercicios en geometría plana que requieren de este tipo de construcciones. Ejemplo de esto es una demostración geométrica del Teorema de Pitágoras

Ejemplo 2.

Demuestre el Teorema de Pitágoras utilizando la siguiente figura.



Sugerencia: demuestre que el área del cuadrado ACDE es igual al área del rectángulo KHLA utilizando las líneas auxiliares EB, KC y CH. Haga algo análogo para demostrar que el área del cuadrado BFGC es igual al área del rectángulo MHBL.

Básicamente la demostración es la siguiente:

1) Δ AKC $\cong$ Δ BAE
2) área de Δ AKC = área Δ BAE
3) m Δ BAE = $\frac{1}{2}$ cuadrado ACDE

4) m Δ AKC = $\frac{1}{2}$ rectángulo KHLA

5) $\frac{1}{2}$ cuadrado ACDE = $\frac{1}{2}$ rectángulo KHLA

6) Cuadrado ACDE = rectángulo KHLA.
7) Cuadrado BGFC = rectángulo HHBL
8) El teorema es verdadero.

La demostración fué tomada de PROOFS OF PYTHAGOREAN THEOREM. Pythagorean theorem and its converse. Prueba 2. Página 2. ENCYCLOPAEDIA BRITANNICA. INC.

11. Ejercicios que requieren de la construcción de contraejemplos para la solución del problema.

Ejemplo 1

En la ejemplificación del punto 9, en el ejemplo 2 se da el siguiente ejemplo.

Considere la siguiente proposición: "La divisibilidad entre números enteros nos da una relación de equivalencia".
Dé elementos para afirmar o negar tal proposición.

El estudiante tendrá que construir un contraejemplo para demostrar que la propiedad de simetría no se cumple en general.

$$2 / 8 \not\Rightarrow 8 / 2$$

Existen varios ejemplos ilustrativos en Cálculo, en la parte de propiedades de una función, como el siguiente.

Ejemplo 2.

Sea $f(x)$ una función creciente de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

i) ¿ Es $f(x)+c$ creciente?

ii) ¿ Es $|f(x)|$ creciente?

iii) ¿ Es $(f(x))^2$ creciente?

iv) ¿ Es $(f(x))^3$ creciente?

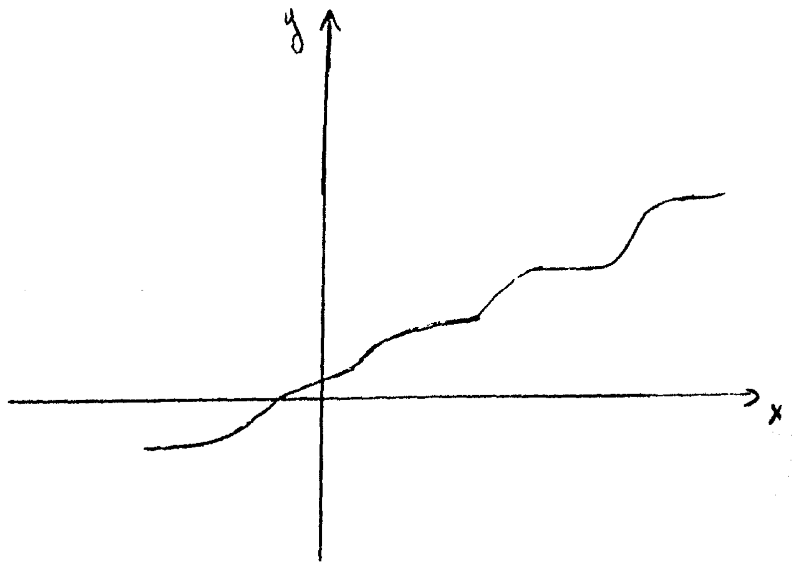
v) ¿ Es $-(f(x))$ creciente?

vi) ¿ Es $[f(x)]$, la parte entera de $f(x)$, creciente?

El estudiante tendrá que dar contraejemplos para los casos $|f(x)|$, $(f(x))^2$, $-f(x)$, por ejemplo, si $f(x)=x$ entonces $|x|$, x^2, $-x$ no son crecientes en todo $\mathbb{R}$.

En este ejercicio se puede sugerir que los estudiantes se ayuden de la gráfica "genérica" de una función creciente para visualizar el ejercicio.

Por ejemplo, este podría ser en general el comportamiento de una función creciente



En base a esto el ejemplo puede clasificarse también dentro del punto 5 (desarrollo de habilidades intuitivas del tipo de visualización)

12. <u>Ejercicios en los que el estudiante use dos o más caminos para la solución del problema</u>

Un objetivo que se persigue en este tipo de ejercicios es que el alumno se de cuenta de que, en general, tiene varios caminos o formas para tratar de resolver un problema en matemáticas

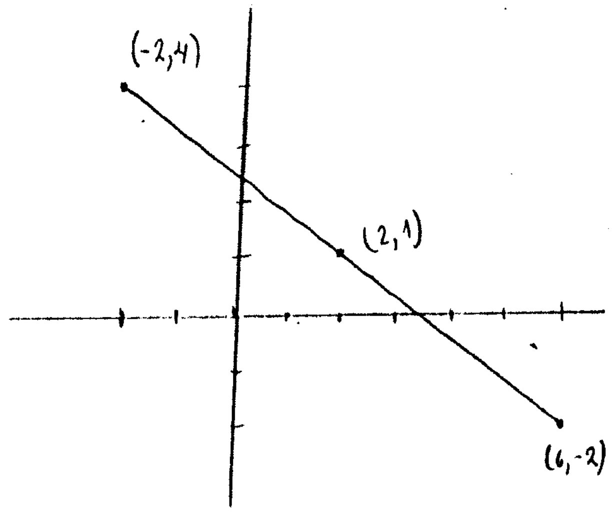
Ejemplo 1

Demuestre tres maneras diferentes que los puntos (6, -2), (2, 1) y (-2, 4) son colineales.

Este ejercicio lo diseñé en base al ejercicio 4 de la página 15, al 17 de la página 25 y el 12 de la página 64 del libro de Geometría Analítica de Lehmann, es decir, se plantea el mismo ejercicio con algunas variantes.

Los alumnos después de ver el tema de la ecuación de una recta, tienen al menos tres caminos para resolver el ejercicio.

1) Por medio de un segmento en una razón dada.
2) Por medio de la pendiente de una recta.
3) Por medio de la ecuación de la recta.



Siguiendo el punto 1.

En base a la localización de los puntos en el plano, para que el punto (2, 1) se encuentre en el segmento de recta determinado por (6, -2) y (-2, 4), debe suceder que las coordenadas del punto P(x, y) que divide al segmento en la razón:

$$r = \frac{d[(6,-2),(2,1)]}{d[(2,1),(-2,4)]}$$ coincide con $(2,1)$, es decir,

$$x = \frac{6 + r_1(-2)}{1+r} = 2 \quad y \quad y = \frac{-2 + r(4)}{1+r} = 1$$

(Recordemos el teorema: Si $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ son los extremos de un segmento P_1P_2, las coordenadas de un punto P que divide a este segmento en la razón $r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ son $x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}$, $y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$,

con $r \neq -1$).

Siguiendo el punto 2. A partir

A partir de la ecuación de la pendiente, encontrar la pendiente de la recta determinada por $(6,-2)$ y $(2,1)$, de esta forma, también encontrar la pendiente de la recta determinada por $(2,1)$ y $(-2,4)$. Si las pendientes son iguales, entonces se trata de la misma recta.

Ejemplo 2.

Encuentre la pendiente de la recta $-2x + 4y - \quad = 0$ de dos formas distintas.

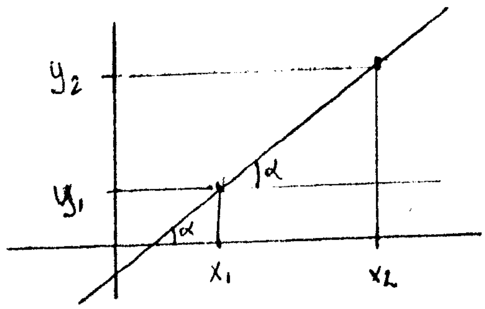
Ejercicio diseñado por mí.

El alumno puede utilizar tres posibles caminos

1) Despejar y, es decir, llevar la ecuación a la forma $y = mx + b$.

2) Encontrar dos puntos distintos de la recta y aplicar $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

3) Obtener dos puntos distintos de la recta, obtener un triángulo rectángulo de manera gráfica y encontrar la tangente del ángulo α, según el dibujo:



Ejemplo 3

Demuestre de dos maneras distintas que:

$$\frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} = r^n + r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + r + 1 \quad , \text{donde } r \neq 1$$

El alumno puede seguir los siguientes caminos.

1) Directamente multiplicando $(r-1)(r^n + r^{n-1} + \dots + r + 1)$

2) Realizando la división entre polinomios.

$$\begin{array}{r|l} & r^n + r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + r + 1 \\ \hline r-1 & r^{n+1} \\ & \underline{-r^{n+1} + r^n} \\ & \quad r^n - 1 \\ & \quad \underline{-r^n + r^{n-1}} \\ & \qquad r^{n-1} - 1 \\ & \qquad \underline{-r^{n-1} + r^{n-2}} \\ & \qquad\quad r^{n-2} - 1 \\ & \qquad\qquad \vdots \\ & \qquad\qquad r^2 - 1 \\ & \qquad\qquad \underline{-r^2 + r} \\ & \qquad\qquad\quad r - 1 \\ & \qquad\qquad\quad \underline{-r + 1} \\ & \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

3) Considerando el siguiente método.

$$S = r^n + r^{n-1} + \cdots + r + 1$$

$$\Rightarrow \quad rS = r^{n+1} + r^n + \cdots + r^2 + r$$

$$\Rightarrow \quad rS - S = \quad (r-1) = r^{n+1} - 1$$

$$S = \frac{r^{n+1} - 1}{r-1}$$

es decir, $\dfrac{r^{n+1} - 1}{r-1} = r^n + r^{n-1} + \cdots + r + 1$

Aunque considero que es necesario haber visto en clase algunos ejercicios que motiven al estudiante a pensar en este método (posiblemente ejercicios análogos).

4) Demostrando la igualdad por Inducción Matemática.

Ejemplo 4

Resuelva el sistema siguiente

$$\begin{cases} x + y + z + t = 10 \\ x + y - z - t = -4 \\ 2x - y + 2z - t = 2 \\ x + 2y - z - 2t = -6 \end{cases}$$

Por medio de:

i) Utilizando el método de Cramer
ii) Escalonando la matriz asociada al sistema.

El ejercicio fué diseñado por mí en base al sistema que aparece en Resolución de Sistemas. Algebra Superior de Cárdenas y otros. Página 157.

En este ejercicio en particular se trata de que el estudiante valore lo práctico de cada método.

13. Ejercicios en los que el alumno deduzca resultados a partir de otros.

Ejemplo 1.

Se demostró en clase el siguiente

Teorema.- La recta cuya pendiente es m y cuya ordenada en el origen es b tiene por ecuación $y = mx + b$.

Deducir la ecuación de la recta cuya pendiente es m y determina sobre el eje x el segmento a.

Geometría Analítica de Lehmann. La línea recta. Página 64. Ejercicio 29.

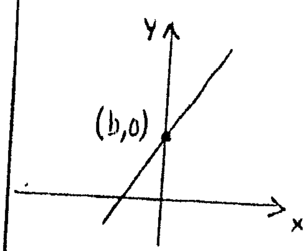
El estudiante a partir de la ecuación de la pendiente y siguiendo un procedimiento análogo al que se efectúa para encontrar la ecuación de la recta que tiene pendiente m y cuya ordenada al origen es b, puede llegar a deducir lo pedido.

Resultado

$$m = \frac{y-b}{x-0}$$

$$\Rightarrow m(x-0) = y-b$$

$$\Rightarrow mx + b = y$$



Deducción $\longrightarrow$

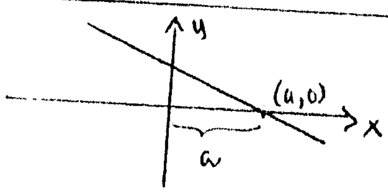
Resultado

$$m = \frac{y-0}{x-a}$$

$$\Rightarrow m(x-a) = y-0$$

$$\Rightarrow x-a = \frac{y-0}{m}, \text{ si } m \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{m}y + a, \text{ si } m \neq 0}$$



Gemplo 2

Demuestre que $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ es la ecuación de una recta cuyas intersecciones con el eje x es $(a,0)$ si $a \neq 0$, y con el eje y es $(0,b)$ si $b \neq 0$. Esta ecuación es llamada "la ecuación simétrica de la recta".

Ejercicio diseñado en base al teorema 4. del libro Geometría Analítica de Lehmann. La línea recta. Página 62.

El estudiante en base al teorema 3 del mismo texto, "La recta que pasa por dos puntos dados $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, tiene por ecuación $y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$, con $x_1 \neq x_2$", deducirá lo pedido.

$$y - 0 = \frac{0 - b}{a - 0}(x - a) \Rightarrow y = -\frac{b}{a}(x-a) \Rightarrow \frac{y}{-b} = \frac{x}{a} - \frac{a}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Resultado

La recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2) tiene por ecuación $y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$

$\downarrow$ deducción.

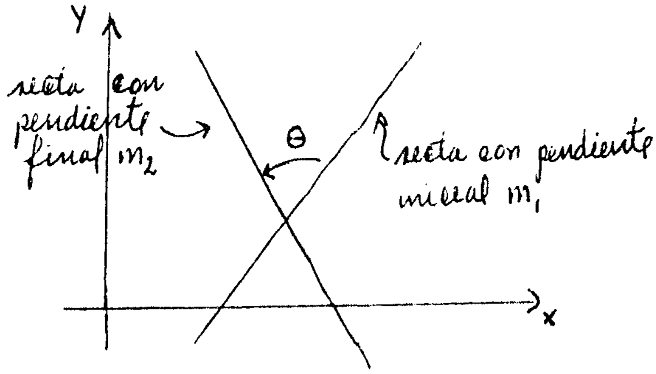
Resultado

La recta que pasa por $(a,0)$ y $(\;,b)$ tiene por ecuación : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Ejemplo 3.

A partir del resultado: Un ángulo especificado θ formado por dos rectas está dado por la fórmula.

$$Tg\,\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}, \quad m_1 m_2 \neq -1$$



Deducir las condiciones necesarias y suficientes para el paralelismo y perpendicularidad de d s rectas.

Ejercicio diseñado en base a los ejercicios 14 y 17, página 71, Linea Recta, Geometría Analítica de Lehmann.

Resultado.

$$\boxed{tg\,\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}, \quad m_1 \cdot m_2 \neq -1}$$

$\downarrow$ Deducción

Resultado

i) Rectas paralelas $\Rightarrow m_2 = m_1 \Rightarrow m_2 - m_1 = 0 \Rightarrow tg\,\theta = 0$
ii) Rectas perpendiculares $\Rightarrow m_1 m_2 = -1 \Rightarrow Tg\,\theta$ no está definida

Ejemplo 4

Considere la siguiente modificación del Principio de Inducción Matemática.

Principio de Inducción (modificado). Si H es un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que

i) $1 \in H$
ii) Si $1, 2, \ldots, n \in$ i entonces $n+1 \in H$,
entonces $H = \mathbb{N}$.

Demuestre que los dos principios de inducción son equivalentes.

Algebra Superior de Cárdenas y otros. Anillo de los números enteros. Página 177. Ejercicio 10.

El estudiante tendrá que deducir (demostrando) cada resultado a partir del otro.
El ejercicio fuerza a los estudiantes a manejar, asociar, estructurar e integrar varios elementos en la demostración, tales como: hipótesis, tesis, desarrollo lógico para su demostración, por lo cual puede ser considerado como un ejemplo también del punto 17 de la clasificación

Principio de Inducción.		Principio de Inducción Modificado
$H \subset$ tal que	$\rightarrow$	$H \subset \mathbb{N}$ tal que
a) $1 \in H$	Deducción.	i) $1 \in H$
b) Si $n \in H \Rightarrow n+1 \in H$	$\leftarrow$	ii) Si $1, 2, \ldots, n \in H \Rightarrow n+1 \in H$
entonces $H = \mathbb{N}$		entonces $H = \mathbb{N}$

Ejemplo 5

Demuestre el siguiente resultado
Si a, b, d son enteros con $d>0$, las cuatro condiciones siguientes son equivalentes

i) $d = (a,b)$

ii) $d = as + bt$ es la combinación lineal positiva mínima de a y b.

iii) $d|a$, $d|b$ y si $c|a$ y $c|b$ entonces $c|d$

iv) $d|a$, $d|b$ y d es combinación lineal de a y b.

Algebra Superior de Cárdenas y otros. Divisibilidad. Página 189. Teorema 1 y ejercicio 3.

El estudiante tendrá que deducir (demostrando) cada resultado a partir de otro.

14. <u>Ejercicios que lleven al estudiante a intuir o sospechar, sugerir o conjeturar reglas o patrones, resultados o relaciones a base de inducción.</u>

<u>Ejemplo 1</u>

Observemos lo siguiente
$7|14$ pues $14 = 7(2)$

Podemos afirmar que $7|14m_1$ si $m_1 \in \mathbb{Z}$, pues $14m_1 = 7(2)m_1 = 7(2m_1)$

$7/21$ pues $21 = 7(3)$

De igual forma podemos afirmar que $7/21m_2$ si $m_2 \in \mathbb{Z}$, ya que $21m_2 = 7(3m_2)$

¿Será cierto que $7|14m_1 + 21m_2$?
Veamos, $14m_1 + 21m_2 = 7(2m_1) + 7(3m_2) = 7(2m_1 + 3m_2)$
$\therefore 7 | 14m_1 + 21m_2$.

También sabemos que $7/28$ ya que $28 = 7(4)$

Se puede afirmar que $7/28m_3$ si $m_3 \in \mathbb{Z}$ ya que $28m_3 = 7(4m_3)$.

Parece factible afirmar que $7/14m_1 + 21m_2 + 28m_3$.
¡Pruébelo!.

Podemos extender este proceso a otros números divisibles entre 7. ¿Qué resultado general podemos obtener si tenemos n números divisibles entre 7?

En general, ¿qué resultado podremos obtener para los números divisibles entre a?

Ejercicio diseñado en base al ejercicio 13, página 184 Divisibilidad. Algebra Superior de Cárdenas y otros.

Creo que este tipo de ejercicios se pueden desarrollar en clase, en una sesión en donde el profesor funge como guía.

La idea sería conducir a los estudiantes al siguiente resultado.

"Si a divide a los enteros $b_1, b_2, \ldots, b_n$, entonces a divide a cualquier combinación lineal de $b_1, b_2, \ldots, b_n$, es decir $a \mid b_1 m_1 + b_2 m_2 + \ldots + b_n m_n$.

El ejercicio puede terminar probando la conjetura.

Ejemplo 2.

Observe lo siguiente

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)^3(a+b) = (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b) \\ &= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^3. \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^3\end{aligned}$$

Resumiendo:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b\end{aligned}$$

¿Cuál es la expresión general de $(a+b)^n$?

Sugerencias: i) Obtenga $(a+b)^5$, $(a+b)^6$, $(a+b)^7$ y tantas exponenciaciones como usted crea conveniente para obtener elementos de apoyo.

ii) Divida el problema en dos partes:

1º) Dedíquese a obtener los coeficientes de los sumandos

2º) Dedíquese a obtener los exponentes de cada sumando

iii) En la parte de los coeficientes:

¿Cuántos sumandos se obtienen si $n = 2$, si $n = 3$, si $n = 4$, etc..?

¿Qué relación hay entre los primeros coeficientes?

¿Qué relación hay entre los segundos coeficientes?

¿Qué relación hay entre los terceros, entre los cuartos, etc?

Este ejercicio fué diseñado por mí.

Es necesario para este tipo de ejercicios, desde mi punto de vista, que el estudiante haya tenido experiencia con el material adecuado y ejercicios similares, posiblemente de menor dificultad, debido a la exigencia de éste.
Sería conveniente que tal ejercicio se discutiera en clase con las intervenciones de los estudiantes, en una confrontación y análisis de ideas, o bien con las mismas actividades puede constituir parte de una tarea por equipos. Debido a ésto el ejercicio puede ser un ejemplo del punto 18 de la clasificación.

Un esquema al cual quisiéramos que los estudiantes llegasen en la parte de coeficientes (parte más complicada del ejercicio) es el siguiente :

			COEFICIENTES 1° 2° 3° 4° 5° 6° 7°
$(a+b)^0$	$0+1$	coeficientes	1
$(a+b)^1$	$1+1$	"	1 1
$(a+b)^2$	$2+1$	"	1 2 1
$(a+b)^3$	$3+1$	"	1 3 3 1
$(a+b)^4$	$4+1$	"	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	$5+1$	"	1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6$	$6+1$	"	1 6 15 20 15 6 1
$(a+b)^7$	$7+1$	"	1 7 21 35 35 21 7 1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$(a+b)^n$	$n+1$	"	$1 \quad n \quad \frac{n(n-1)}{2!} \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \quad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \quad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} \quad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6!} \quad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{7!} \cdots\cdots$

$\frac{n}{1!}$ "

$\cdots\cdots$ El enésimo coeficiente

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-2))}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)\cdots(2)}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

el $n+1$ coeficiente

$$\frac{n(n-1)\cdots[n-(n+1-2)]}{((n+1)-1)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(n-1)]}{n!}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(1)}{n!}$$

$$= \frac{n!}{n!} = 1$$

Ejemplo 3.

Observe la siguiente tabla.

a	b	(a, b)	[a, b]	a·b
13	7	1	91	91
6	8	2	24	48
5	25	5	25	125
24	6	6	24	144
14	18	2	126	252
9	21	3	63	189
17	5	1	85	85
10	21	1	210	210
27	10	1	270	270
9	12	3	36	108

Donde (a,b) denota el máximo común divisor y $[a,b]$ denota el mínimo común múltiplo.

Encuentre tres o cuatro relaciones entre las últimas tres columnas.

Ejercicio diseñado por mí.
Se espera que los estudiantes en una de las relaciones obtengan que $ab = (a,b)[a,b]$

15. Ejercicios que lleven al estudiante a intuir o sospechar, sugerir o conjeturar reglas o patrones, resultados o relaciones a partir del análisis e integración de información nueva.

Ejemplo 1.

¿Qué puede decir acerca de la perpendicularidad y paralelismo de las rectas $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$?, es decir, dadas las rectas $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$, ¿cómo podríamos saber si son paralelas o perpendiculares?

El alumno, después de darle la ecuación general de la recta (información nueva), con los conocimientos que tiene de pendiente de una recta, puede a través de analizar e integrar esta información sugerir o conjeturar condiciones para el paralelismo y perpendicularidad de dichas rectas.
Considero que este tipo de ejercicios deberían ser parte de una discusión en el salón de clases por parte de grupos de estudiantes para tratar de llegar, mediante la orientación del profesor a un resultado análogo al siguiente:

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ A'x + B'y + C' &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Las rectas son paralelas si $-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}$

Las rectas son perpendiculares si $\left(-\frac{A}{B}\right)\left(-\frac{A'}{B'}\right) = -1$

Ejercicio diseñado por mí.

Ejemplo 2

Considere el siguiente resultado.

"El máximo común divisor de dos enteros a y b es la combinación lineal positiva mínima e inversamente."

De esta forma

$(2,4) = 2 \iff 2 = 2r + 4t$ es la combinación lineal positiva mínima.

$(18,16) = 6 \iff 6 = 12l + 18t$ es la combinación lineal positiva mínima.

$(-15,25) = 5 \iff 5 = -15n + 25p$ es la combinación lineal positiva mínima.

$(-7,21) = 7 \iff 7 = -7q + 21s$ es la combinación lineal positiva mínima.

¿Qué podría afirmar acerca de una pareja de primos relativos?

Quisiéramos que el estudiante en base a la información que se le proporciona y la definición de primos relativos (a y b son primos relativos si $(a,b) = 1$), pueda conjeturar:

a y b son primos relativos $\iff 1 = as + bt$ es la combinación lineal positiva mínima.

Ejemplo 3

Considere la siguiente definición

Def. Sean a, b y c enteros. Decimos que a es congruente con c módulo b, si $a-c$ es divisible por b y escribimos

$$a \equiv c \pmod{b}$$

i) Utilizando la notación de congruencia, ¿cómo podríamos escribir

que 21 es divisible por 7,
que 35 es divisible por 5,
que 33 es divisible por 3 ?

ii) En general, si b divide a a, ¿cómo podríamos denotar este hecho, utilizando la notación de congruencia?

Ejercicio diseñado por mí, en base al material que aparece en la página 57 acerca de la notación de congruencia, Nota 1, del libro Hungarian Problem Book 1.

Pretendo que con la definición dada y con un análisis de ésta, los alumnos conjeturen lo siguiente:

$$a \mid b \iff a \equiv 0 \pmod{b}.$$

16. Ejercicios que lleven al estudiante a intuir o sospechar, sugerir o conjeturar reglas o patrones, resultados o relaciones por medio de analogías.

Ejemplo 1.

i) ¿Cuándo podríamos decir que un polinomio $p(x)$ divide a otro polinomio $q(x)$?

ii) En general, si $f(x)$ y $g(x)$ son dos polinomios, ¿siempre podremos dividir $f(x)$ entre $g(x)$?. En caso afirmativo, ¿qué condiciones deben darse para tal efecto?

Este ejercicio lo ubico como sigue:

Los estudiantes ya tocaron el tema de divisibilidad, el profesor pasa al tema de polinomios y llega a la parte de división entre polinomios. Quisiéramos que los estudiantes traten de sugerir o conjeturar lo que se pregunta con ayuda de los resultados de divisibilidad. De nueva cuenta, creo que es recomendable que este ejercicio o ejercicios análogos, formen parte de una discusión por parte de los alumnos en clase o fuera de ella.

Se espera que los estudiantes sugieran:

En (i) que $p(x)$ divide a $q(x)$ si $p(x)$ es no nulo y existe un polinomio $m(x)$ tal que $q(x) = p(x)\, m(x)$.

En (ii), sea $f(x)$ cualquier polinomio y sea $g(x)$ un polinomio no nulo, existen dos únicos polinomios $s(x)$ y $r(x)$ que satisfacen las condiciones siguientes:

$$f(x) = g(x)\, s(x) + r(x),$$

donde grado $r(x)$ < grado $g(x)$

El ejercicio puede continuar conjeturando resultados para polinomios, en base a los resultados demostrados en divisibilidad, por ejemplo:

¿Qué entenderíamos por el máximo común divisor de dos polinomios

¿Podríamos definir el Algoritmo de Euclides para polinomios?

Ejemplo 2.

i) ¿Cómo podríamos definir la distancia entre dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ del espacio?

ii) Si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ son los extremes del segmento dirigido P_1P_2, ¿cuáles serían las coordenadas del punto $P(x, y, z)$ que divide a este segmento en la razón $r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$, y cuáles serían las coordenadas del punto medio de este segmento?

Ejercicio diseñado en base al material del libro de Geometría Analítica de Lehmann, en la parte de Geometría Analítica del Espacio, el punto en el Espacio.

El profesor y sus estudiantes pasan a la Geometría Analítica del Espacio, después de hablar y definir un punto en el espacio dentro de un sistema de coordenadas rectangulares en el espacio, el profesor puede solicitar la respuesta a las preguntas anteriores. Se espera que los estudiantes sugieran o conjeturen mediante la extensión de los resultados vistos en Geometría Analítica Plana como sigue:

La distancia d entre dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ está dada por $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

Las coordenadas buscadas del punto $P(x,y,z)$ están dadas por :

$$x = \frac{x_1 + r x_2}{1+r} , \quad y = \frac{y_1 + r y_2}{1+r} , \quad z = \frac{z_1 + r z_2}{1+r} .$$

y las coordenadas del punto medio del segmento P_1P_2 son:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} , \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} , \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

17. <u>Ejercicios que fuerzan a los estudiantes a manejar, asociar, estructurar e integrar varios elementos que intervienen en el problema para su solución, tales como: definiciones, resultados, hipótesis, tesis, construcciones auxiliares, desarrollo lógico para su demostración, etc.</u>

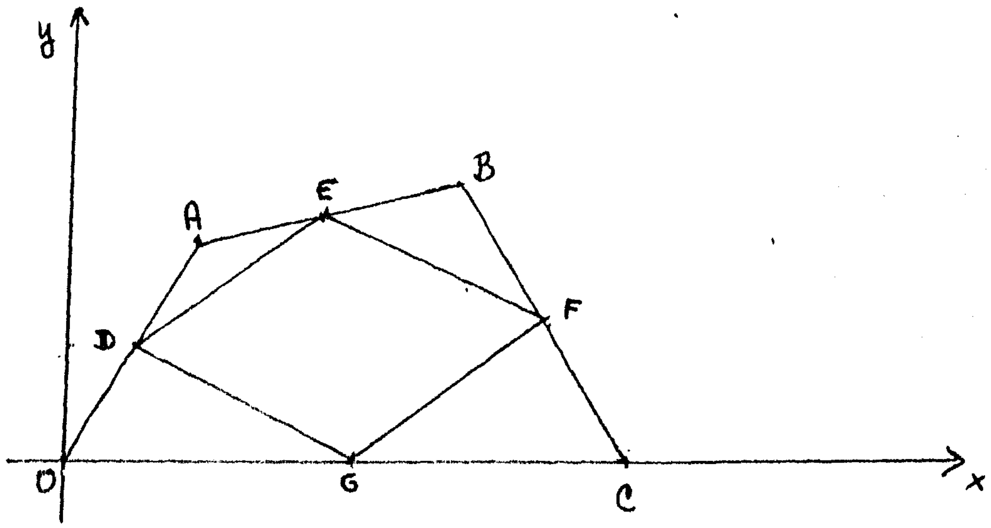
<u>Ejemplo 1</u>

Demostrar analíticamente que las rectas que unen los puntos medios de los lados sucesivos de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo.

Geometría Analítica de Lehmann. Sistemas de Coordenadas. Página 27. Ejemplo 1 de la parte Demostraciones de teoremas geométricos por el método analítico.

Revisemos una posible prueba del ejercicio.

Tomemos un cuadrilátero cualquiera y acomodemos uno de sus vértices en el origen y uno de sus lados sobre el eje x, como se ve en la figura:



Denotemos con O, A, B, C los vértices del cuadrilátero y con D, E, F, G a los puntos medios de sus lados.

Para probar que el cuadrilátero DEFG es un paralelogramo, uno de los caminos a seguir, es probando que la recta determinada por D y E es paralela a la recta determinada por G y F, y la -- recta que contiene a D y G es paralela a la recta determinada por E y F.

Para esto podemos utilizar el criterio de las pendientes para el paralelismo de rectas. Siguiendo este camino tendremos que determinar las coordenadas de los puntos D, E, F y G.

Ayudándonos de las coordenadas de los puntos A, B, F y O

Sean $A=(a,b)$, $B=(c,d)$, $C=(c,0)$ y $O=(0,0)$.

De esta forma aplicando el teorema de la división de un segmento de recta en una razón dada, en este caso la razón es igual a 1, tendremos que las coordenadas de D, E, F y G son:

$$D=\left(\frac{0+a}{2},\frac{0+b}{2}\right)=\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right),\quad E=\left(\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2}\right)$$

$$F=\left(\frac{c+c}{2},\frac{d+0}{2}\right)=\left(\frac{c+c}{2},\frac{d}{2}\right)\ \text{y}\ G=\left(\frac{c+0}{2},\frac{0+0}{2}\right)=\left(\frac{c}{2},0\right)$$

Obteniendo las pendientes de las rectas:

Pendiente de la recta determinada por D y E es:

$$\frac{\frac{b+d}{2}-\frac{b}{2}}{\frac{a+c}{2}-\frac{a}{2}}=\frac{\frac{d}{2}}{\frac{c}{2}}=\frac{d}{c}$$

Pendiente de la recta determinada por F y G es:

$$\frac{\frac{d}{2}-0}{\frac{c+c}{2}-\frac{c}{2}}=\frac{\frac{d}{2}}{\frac{c}{2}}=\frac{d}{c}$$

Ya que estas rectas tienen la misma pendiente, entonces son paralelas.

Pendiente de la recta determinada por E y F es

$$\frac{\frac{b+d}{2}-\frac{d}{2}}{\frac{a+e}{2}-\frac{e+e}{2}}=\frac{\frac{b}{2}}{\frac{a-e}{2}}=\frac{b}{a-e}$$

Pendiente de la recta determinada por D y G es

$$\frac{\frac{b}{2}-0}{\frac{a}{2}-\frac{e}{2}}=\frac{\frac{b}{2}}{\frac{a-e}{2}}=\frac{b}{a-e}$$

De igual forma, estas rectas son paralelas por tener la misma pendiente.
Así, el ejercicio queda demostrado.

Dentro del ejercicio se tienen los siguientes elementos:

Hipótesis: un cuadrilátero, las coordenadas de sus vértices

Hipótesis implícitas: siguiendo la demostración propuesta se tienen los siguientes resultados:

i) pendiente de una recta $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

ii) división de un segmento en una razón dada.

iii) dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales.

iv) condiciones para que un cuadrilátero sea un paralelogramo.

Así, considero que el ejercicio fuerza a los estudiantes a estructurar, asociar e integrar estos elementos

dentro de un desarrollo lógico para la demostración de la tesis.
El ejercicio a la vez ejemplifica varios puntos de la clasificación:
El punto 5, ejercicios que buscan el desarrollo de habilidades intuitivas, del tipo de visualización; el punto 6, ejercicios que requieren de la aplicación de resultados; el punto 7, ejercicios que requieren de manipulaciones algebraicas y el punto 8, ejercicios cuya finalidad es el descubrimiento de datos o hipótesis implícitas.

Ejemplo 2.

Un segmento rectilíneo de longitud d se mueve de tal manera que uno de los puntos extremos permanece siempre sobre el eje x, y el otro permanece siempre sobre el eje y. Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto medio del segmento.

Geometría Analítica de Lehmann. Gráfica de una ecuación y lugares geométricos. Página 55. Ejercicio 22.

El alumno para visualizar el problema tendrá que elaborar un dibujo (Figura 1). En base a éste hay posibilidades de que conjeture que el lugar geométrico, descrito por los puntos medios del segmento de longitud d, se trata de un círculo con centro en el origen. De aquí, el estudiante tendrá que obtener elementos de apoyo.

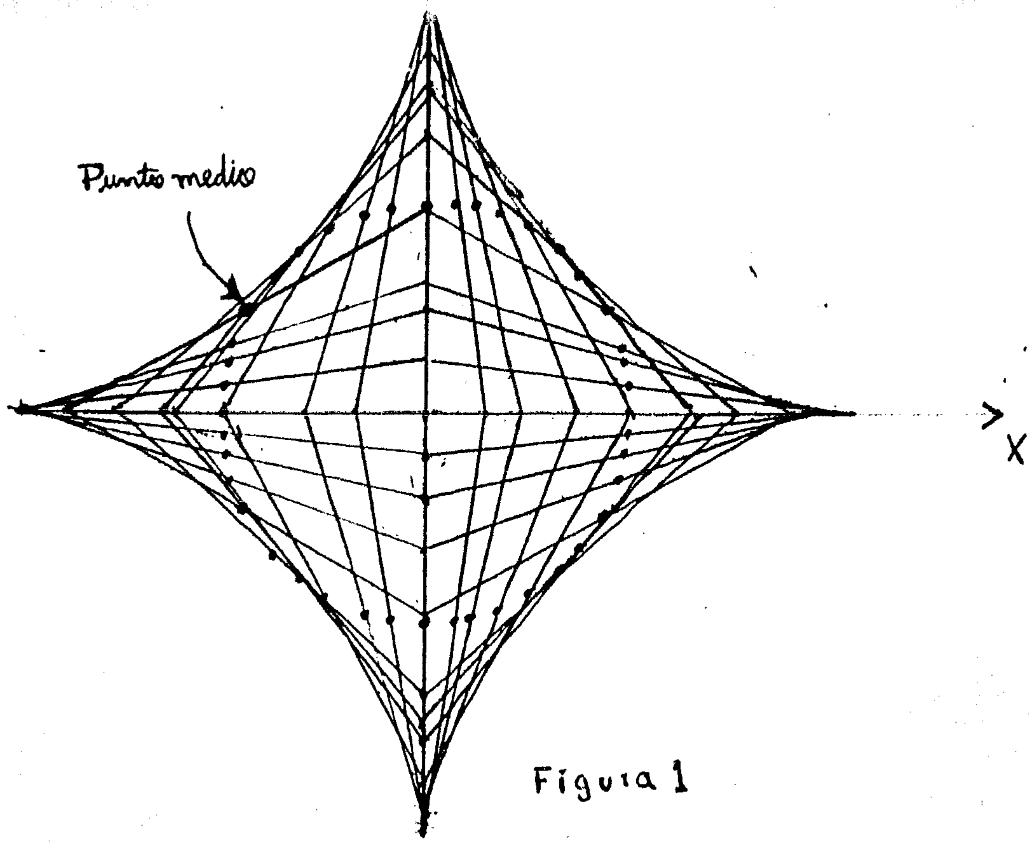


Figura 1

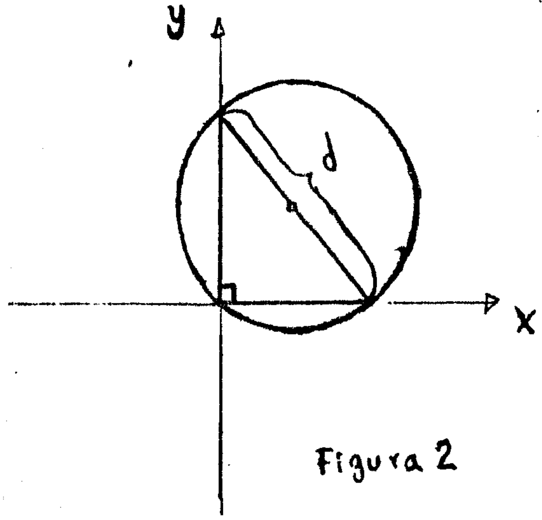


Figura 2

Del mismo dibujo se ve, que los segmentos de longitud d, forman triángulos rectángulos, es decir, son las hipotenusas de triángulos rectángulos cuyos catetos son segmentos de recta del eje x y del eje y, cuyas longitudes dependen de la posición del segmento.

Los estudiantes cuentan con el siguiente resultado:

"El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los tres vértices". *

El resultado conforma una hipótesis implícita del problema, que auxilia bastante en la solución, pues dado que en todos los triángulos rectángulos el origen es un vértice de ellos, entonces el punto medio de cada hipotenusa equidista del origen en $\frac{d}{2}$, por lo tanto el conjunto de puntos medios constituyen el perímetro de un círculo de radio $\frac{d}{2}$.

Entonces, si $P(x,y)$ es el punto medio de cada segmento de longitud d, la ecuación del lugar geométrico es $x^2+y^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2$

Así el problema obliga al estudiante a integrar varios elementos que intervienen en él para su solución, dentro de los cuales se destacan los siguientes:

Hipótesis: segmento de longitud d con las condiciones del enunciado.
Hipótesis implícitas: el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los tres vértices, ecuación del círculo con centro en el origen.
Desarrollo lógico para su demostración
Elaboración de un dibujo para su visualización

El ejercicio, por lo expuesto, ejemplifica el punto 5 de la clasificación, ejercicios que buscan el desarrollo de habilidades intuitivas del tipo de visualización; el punto 8, ejercicios cuya finalidad . . . . . .

* El resultado es cierto, pues todo triángulo rectángulo puede inscribirse en un círculo de tal manera que su hipotenusa sea el diámetro del círculo. (Figura 2).

es el descubrimiento de hipótesis implícitas; y el punto 6, ejercicios que requieren de aplicación de resultados.

Ejemplo 3.

Determine todos los enteros positivos n, para los cuales 2^n+1 es divisible por 3.

Hungarian Problem Book I. Competencia 1898. Página 56. Ejercicio 1898/1

El libro titulado Hungarian Problem Book I, based on the Eötvös Competitions, 1898-1905, de donde obtengo este problema, trata dos posibles caminos para su solución

1er Camino.

Considerar la relación:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

y considerar que $a=2$ y $b=-1$.

De esta forma se tiene:

$$2^n-(-1)^n=(2-(-1))\underbrace{\left[2^{n-1}+2^{n-2}(-1)+\dots+2(-1)^{n-2}+(-1)^{n-1}\right]}$$

Llamémosle A a este entero.

$\Rightarrow\ 2^n - (-1)^n = 3A$. Por consiguiente si n es impar, tenemos que $2^n + 1 = 3A$ y esto implica que 2^n+1 es divisible por 3.

Si n es par, tenemos que $2^n - 1 = 3A$ y sumando 2 a esta igualdad $2^n+1 = 3A+2$ lo cual implica que 2^n+1 no es divisible por 3, pues tenemos un residuo igual a 2.

Didácticamente, sería conveniente haber manejado con anterioridad la relación propuesta para casos particulares de a y b.
Siguiendo este camino, el estudiante tendrá que recordar el resultado y en base a su experiencia observar la posible utilidad para algunos valores de a y b, y tratar de amoldar este resultado para la solución del problema.

<u>2° Camino.</u>

i) En base a la asociación y estructuración de los siguientes teoremas:

Teorema I. Si $a \equiv a' \pmod m$ y $b \equiv b' \pmod m$, entonces $a+b \equiv a'+b' \pmod m$, $a-b \equiv a'-b' \pmod m$, $ab \equiv a'b' \pmod m$.

Teorema II. Si $a \equiv b \pmod m$ entonces $a^n \equiv b^n \pmod m$

i) En base a ejercicios anteriores, como el observar que:

$$2^2 \equiv 1 \pmod 3, \quad 2^4 \equiv 1 \pmod 3, \quad 2^6 \equiv 1 \pmod 3, \ldots$$

ii) Y en base al manejo del siguiente resultado

$$a \equiv 0 \pmod m \quad \Rightarrow \quad a \text{ es divisible por } m.$$

El estudiante puede, por medio de la manipulación, asociación, estructuración e integración de estos resultados, seguir el siguiente camino:

$$2 \equiv -1 \pmod 3 \quad \Rightarrow \quad 2^n \equiv (-1)^n \pmod 3$$

$$\Rightarrow \quad 2^n + 1 \equiv (-1)^n + 1 \pmod 3$$

De aquí que para n impar tenemos que

$2^n + 1 \equiv 0 \pmod 3$, lo cual nos dice que $2^n + 1$ es divisible por 3, y para n par tenemos que $2^n + 1 \equiv 2 \pmod 3$, lo cual nos dice que $2^n + 1$ no es divisible por 3.

Ejemplo 4

Pruebe que las expresiones $2x+3z$ y $9x+5z$ son divisibles por 17 para el mismo conjunto de valores enteros de x y z.

Hungarian Problem Book I. Competencia 1894. Página 17. Ejercicio 1894/1.

El texto da dos caminos para la solución.

1er Camino

i) Determinar los valores enteros de x y z para los cuales $2x+3z=k$ para algún entero k dado.

ii) Determinar los valores enteros de x y z para los cuales $9x+5z=l$ para algún entero l dado.

iii) Ver para cuales enteros x y z, $2x+3z=17n$, con $n\in\mathbb{Z}$, y checar que para éstos $9x+5z$ es divisible por 17.

iv) Ver para cuales enteros x y z, $9x+5z=17m$, con $m\in\mathbb{Z}$, y checar que para éstos $2x+3z$ es divisible por 17

2° Camino.

Utilizar la siguiente propiedad de los números primos. Sea $p\in P$ y $a,b\in\mathbb{Z}$, si $p\nmid a$ y $p\nmid b$ entonces $p\nmid ab$.

Esta propiedad tiene como contrapositiva:

Sea $p \in P$ (P es el conjunto de números primos) y $a, b \in \mathbb{Z}$.
Si $p|ab$ entonces $p|a$ o $p|b$.

De esta forma haciendo

$2x + 3z = u$ y $9x + 5z = v$ tendremos que

$-5u = -10x - 15z$ y $3v = 27x + 15z$, esto implica que $3v - 5u = 17x$ y tendremos que

$$3v = 17x + 5u \text{ ...... } (1)$$
y
$$5u = 3v - 17x \text{ ...... } (2)$$

En (1), si x y z son enteros para los cuales $u = 2x + 3z$ es divisible por 17, entonces $5u$ es también divisible por 17, esto implica que $3v = 17 + 5u$ sea divisible por 17. Como $17 \nmid 3$ entonces utilizando la contrapositiva de la propiedad antes citada podemos concluir que $17|v$, es decir, para los enteros x y z para los cuales u es divisible por 17, v también es divisible por 17.

Análogamente en (2), si x y z son enteros para los cuales v es divisible por 17, entonces $5u$ es divisible por 17. De la misma forma, como 17 es primo y $17 \nmid 5$ entonces $17|u$.

El estudiante, en los dos caminos, en base a su información y experiencia anterior (en la cual el profesor es factor importante), buscará, ensayará, integrará y asociará información útil para la solución.

18. <u>Ejercicios que requieren de la confrontación y análisis de conjeturas, enfoques o puntos de vista por parte de grupos de estudiantes.</u>

En estos ejercicios lo que se busca es desarrollar en el estudiante una actitud para propiciar un mejor entendimiento de los conceptos matemáticos y fomentar una actitud crítica y reflexiva ante el conocimiento.
Dentro del trabajo de G. Polya, una de las tesis que se maneja, es que dicha actividad se puede llevar a cabo si se da oportunidad a los estudiantes de redescubrir el conocimiento matemático por medio de la crítica, análisis y confrontación de sus ideas.

"Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero, si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventi-

vas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo. Experiencias de este tipo, a una edad conveniente, pueden determinar una afición para el trabajo intelectual e imprimirle una huella imperecedera en la mente y en el carácter.
Por ello, un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica su tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero si, por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello."

Parte del Prefacio a la primera edición en Inglés de "Cómo plantear y resolver problemas": de G. Polya.

...."1. Estrictamente hablando, todos nuestros conocimientos, aparte de las matemáticas y de la lógica demostrativa (que es, en realidad, una rama de aquéllas), consisten en conjeturas. Hay, naturalmente, conjeturas y conjeturas. Unas, que merecen todo respeto y confianza, como las expresadas en ciertas leyes generales de la física, y otras, que no merecen ni confianza ni respeto, algunas de

las cuales nos llenan de ira al leerlas en los periódicos. Y, entre unas y otras, se dan toda clase de conjeturas, presentimientos e intuiciones.
Aseguramos nuestro conocimiento matemático mediante el razonamiento demostrativo, pero apoyamos nuestras conjeturas por medio del razonamiento plausible. Una prueba matemática es razonamiento demostrativo, pero la evidencia inductiva del físico, la evidencia circunstancial del abogado, la evidencia documental del historiador y la evidencia estadística del economista pertenecen al razonamiento plausible.
Hay grandes diferencias entre las dos clases de razonamiento.
El razonamiento demostrativo es seguro, definitivo, y está más allá de toda controversia. El razonamiento plausible es azaroso, discutible, y provisional. Aquél penetra las ciencias naturales tanto como la matemática, pero es, en sí mismo, igual que ésta última, incapaz de producir un conocimiento esencialmente nuevo sobre el mundo en torno. Para aprender algo nuevo sobre el mundo necesitamos el razonamiento plausible, que es la única clase de razonamiento que utilizamos en nuestra vida cotidiana. El razonamiento demostrativo tiene modelos rígidos, codificados y aclarados por la lógica (formal o demostrativa), que es la teoría del razonamiento demostrativo. Los modelos del razonamiento plausible son fluidos y no hay teoría de este razonamiento que pueda ser comparada a la lógica demostrativa en claridad o que tenga un consenso comparable.

2. Hay otro punto concerniente a estas dos clases de razonamiento, que merece nuestra atención. Todos sabemos que las matemáticas ofrecen una excelente oportunidad de aprender el razonamiento demostrativo, pero yo sostengo también que no hay materia en los programas usuales de las escuelas que ofrezca una oportunidad semejante de aprender el razonamiento plausible. Me dirijo a todos los estudiantes interesados en matemáticas de todos los grados y les digo: "Aprendamos a probar, desde luego, pero aprendamos también a intuir"

Esto suena un poco paradójico y debo hacer hincapié en algunos puntos para evitar posibles males entendidos.

Las matemáticas son consideradas como una ciencia demostrativa. Sin embargo, éste es sólo uno de sus aspectos. La obra matemática se nos presenta, una vez terminada, como puramente demostrativa, consistente en pruebas solamente. No obstante, esta ciencia se asemeja en su desarrollo al de cualquier otro conocimiento humano. Hay que intuir un teorema matemático antes de probarlo, así como la idea de la prueba antes de llevar a cabo los detalles. Hay que combinar observaciones, seguir analogías y probar una y otra vez.

El resultado de la labor demostrativa del matemático es el razonamiento demostrativo, la prueba, pero ésta a su vez es descubierta mediante el razonamiento plausible, mediante la intuición.

Si el aprendizaje de las matemáticas refleja en algún grado la invención de esta ciencia, debe haber en él un lugar para la intuición, pa-

ra la inferencia plausible.
Hemos dicho que hay dos clases de razonamiento: demostrativo y plausible. Permítaseme observar que no se contradicen entre sí; por el contrario, se completan uno al otro. En el razonamiento estricto lo principal es distinguir una prueba de una intuición, una demostración válida de un intento sin validez. En el razonamiento plausible lo importante es distinguir entre intuiciones, unas más y otras menos razonables. Si dirigimos nuestra atención a estas distinciones, ambas pueden hacerse más claras.
Un estudiante seriamente interesado en matemáticas que pretenda dedicar a ellas su vida, debe aprender el razonamiento demostrativo; él es su profesión y el signo distintivo de su ciencia. Sin embargo para obtener un éxito real debe también aprender el razonamiento plausible; de él dependerá su labor creadora. El estudiante aficionado tomará también el gusto al razonamiento demostrativo: quizá tenga poca necesidad de usarlo directamente, pero con él adquirirá un término con el que comparar la supuesta evidencia de todas clases con que se enfrentará en la vida moderna. Sin embargo, en todos sus esfuerzos necesitará del razonamiento plausible. En todo caso, un estudiante de matemáticas ambicioso intentará aprender las dos clases de razonamiento, demostrativo y plausible, cualesquiera que pueda ser sus intereses ulteriores".

Parte del Prólogo de "Matemáticas y razonamiento plausible de G. Polya.

La actividad propuesta de redescubrimiento por parte de los alumnos, en su inicio sería recomendable efectuarla en el salón de clase, pues se cuenta con la orientación y las preguntas convenientes del profesor.

Ejercicios como los que ejemplifican los puntos 14, 15, 16 y 17 de la clasificación, pueden ser considerados para tratar de generar dicha actividad. De igual forma los ejemplos y problemas propuestos en los libros "Cómo plantear y resolver problemas" y "Matemáticas y razonamiento plausible" de G. Polya, así como los que aparecen en "International Mathematical Olympiads, 1959-1977" de Samuel L. Greitzer, y "Hungarian Problem Book I based on the Eötvös Competitions, 1894-1905", son ejercicios que pueden ser tratados y desarrollados para el mismo fin.

Un ejemplo más que puede ilustrar la actividad en cuestión, es el que aparece en el libro "Pruebas y Refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático" en donde Imre Lakatos a partir de la conjetura de Euler-Poincaré ("En todo poliedro el número de vértices menos el número de aristas más el número de caras es igual a 2"), desarrolla un diálogo que reconstruye, en forma racional las cuestiones históricas referentes a esta conjetura*.

* "... La forma dialogada debería reflejar la dialéctica de la narración; está pensada así para que contenga una especie de historia racionalmente reconstruida o "destilada". La historia real resonará en las notas, la mayoría de las cuales han de ser tenidas, por tanto, como parte orgánica del ensayo".
Ultima parte de Introducción del Autor. Pruebas y Refutaciones. I. Lakatos.

RELACION DE LA CLASIFICACION PROPUESTA CON LA TAXONOMIA DEL NATIONAL LONGITUDINAL STUDY MATHEMATICAL ABILITIES (NLSMA).

Existen clasificaciones generales y particulares refe- rentes a elementos o aspectos del conocimiento general y matemático respectivamente, tal es el caso de la Taxonomía de Bloom y la Taxonomía del NLSMA. Con la finalidad de comparar, aclarar términos y tener puntos de referencia, establezco una asociación entre la Taxonomía del NLSMA y la clasificación propuesta, es decir, trato de ubicar cada uno de los elementos del pensamiento que aparecen en la clasificación dentro de la Taxonomía mencionada. Antes de pasar a este punto, describiré brevemente la Taxonomía de Bloom y la del NLSMA.

A manera de síntesis diré que en la <u>Taxonomía de Bloom</u> las categorías en que se clasifican los comportamientos del dominio cognocitivo son seis:

1. Conocimiento. Significa la capacidad de recordar hechos específicos y universales, métodos y procesos, o un esquema, estructura o marco de referencia.

2. Comprensión. Representa el nivel más bajo de "comprensión". Se trata de un tipo tal de comprensión o aprehensión por el cual el individuo sabe qué se le está comunicando y hace uso de los materiales o ideas que se le trasmiten, sin tener que relacionarlos necesariamente con otros materiales o percibir la totalidad de sus implicaciones

3. Aplicación. Es el uso de abstracciones particulares y concretas. Pueden presentarse en forma de ideas generales, reglas de procedimiento o métodos generalizados y pueden ser también principios, ideas o teorías que deben recordarse de memoria y aplicarse.

4. Análisis. Es el fraccionamiento de una comunicación en sus elementos constitutivos de tal modo que aparezca claramente la jerarquía relativa de las ideas y se exprese explícitamente la relación existente entre éstas.

5. Síntesis. Es la reunión de los elementos y las partes para formar un todo. Implica los procesos de trabajo con elementos aislados, partes, piezas, etcétera, ordenándolos y combinándolos de tal manera que constituyan un esquema o estructura que antes no esta presente o era clara.

6. Evaluación. Se trata de formular juicios sobre el valor de materiales y métodos de acuerdo con determinados propósitos. Incluye los ejercicios cuantitativos y cualitativos respecto de la medida en que los materiales o métodos satisfacen determinados criterios. Los criterios pueden ser aquellos que el estudiante haya determinado o los que son sugeridos.

Taxonomía del NLSHA.

Como se menciona en "Anales del Programa Oficial de Matemáticas para el Primer Año de Secundaria (1975-1976)" esta taxonomía es una adaptación de la Taxonomía de Bloom a los objetivos del área de matemáticas

"Considerando que la instrucción en matemáticas es secuencial en cuanto al contenido, este modelo sugiere una doble clasificación: una, de acuerdo al tipo de contenido matemático y otra de acuerdo al nivel de comportamiento. Las categorías y subcategorías de esta segunda clasificación fueron elaboradas bajo los mismos principios de la de Bloom, sólo que teniendo en mente las conductas específicas del aprendizaje en matemáticas.

Las categorías en que se clasifican los componentes del dominio cognoscitivo en este modelo son: computación, compresión, aplicación y análisis.

A continuación enlistamos, en orden de menor a mayor grado de complejidad estas categorías con sus subcategorías correspondientes:

A.0 Computación
- A.1 Conocimiento de hechos específicos
- A.2 Conocimiento de terminología.
- A.3 Habilidad para llevar a cabo algoritmos

B.0 Comprensión

- B.1 Conocimiento de conceptos
- B.2 Conocimiento de principios, reglas y generalizaciones.
- B.3 Conocimiento de la estructura matemática
- B.4 Habilidad para transformar elementos de un problema de una forma a otra.
- B.5 Habilidad para seguir un razonamiento.
- B.6 Habilidad para leer e interpretar un problema.

C.0 Aplicación

- C.1. Habilidad para resolver problemas rutinarios.
- C.2. Habilidad para hacer comparaciones
- C.3 Habilidad para analizar datos.
- C.4 Habilidad para reconocer patrones, isomorfismos y simetrías

D.0 Análisis.

- D.1 Habilidad para resolver problemas no rutinarios.
- D.2 Habilidad para descubrir relaciones.
- D.3 Habilidad para construir pruebas.
- D.4 Habilidad para criticar pruebas.
- D.5 Habilidad para formular y validar generalizaciones. ...."

A continuación reproduzco una descripción de cada categoría:

A.0 <u>Computación</u>. Representa el comportamiento de menor complejidad que se espera que el estudiante tenga, como resultado de la instrucción en matemáticas. Este tipo de comportamientos se manifiestan como ejercicios simples de memoria y no requieren que el estudiante tome decisiones.

B.O <u>Comprensión</u>. Incluye objetivos de mayor complejidad cognoscitiva que los niveles de A.O y con frecuencia objetivos de este nivel, presuponen o incorporen objetivos de conocimiento de hechos específicos, terminología o de habilidad para llevar a cabo algoritmos.

C.O <u>Aplicación</u>. Tiene una diferencia esencial con los dos niveles anteriores (computación y comprensión) y esto consiste en que los objetivos de aplicación requieren de una <u>secuencia de respuestas</u> por parte del estudiante. Por otro lado, estos objetivos están íntimamente ligados al material usado en la instrucción, debido a su caracter rutinario; es decir, los reactivos de prueba para estos objetivos deben sufrir transferencias mínimas de situaciones (de las de instrucción).

D.O <u>Análisis</u>. Es el más alto nivel de comportamiento de las categorías cognoscitivas y comprende las conductas más complejas. Abarca objetivos de resolución de problemas no rutinarios, de descubrimientos de experiencias y de comportamiento creativo en lo referente a matemáticas.

Cuadro Comparativo de la Taxonomía de Bloom y la Taxonomía del NLSHA.

Taxonomía de Bloom (1956)	1. Conocimiento		2. Comprensión	3. Aplicación	4. Análisis	5. Síntesis	6. Evaluación
Taxonomía del NLSHA (1969)	A.1, A.2 Conocimiento de hechos específicos y terminología. B.1, B.2, B.3 Conocimiento de conceptos principios, reglas, generalizaciones y estructuras matemáticas	A.3 Habilidad para llevar a cabo algoritmos	B.4 Transformación de los elementos de un problema de un modo a otro.	C. Aplicación en situaciones rutinarias D. Resolución de problemas no rutinarios	B.5, B.6 Leer e interpretar un razonamiento o problema matemático C.3, C.4 Analizar datos, patrones e isomorfismos.	D.2 Descubrir relaciones nuevas. D.3 Construir demostraciones	D.4 Críticas demostraciones o argumentos matemáticos.

Ubicación de los puntos de la clasificación dentro de la Taxonomía del NLSMA.

ALGUNOS ELEMENTOS QUE APARECEN EN EL PENSAMIENTO AL RESOLVER PROBLEMAS MATEMATICOS.	SUBNIVELES DE LA CATEGORIA DE COMPUTACION.
1. Ejercicios que sirven para familiarizar al estudiante con un tema próximo a tratarse. Este punto lo ubico en Conocimiento de hechos específicos (A.1).	A.1 Conocimiento de hechos específicos. Incluye objetivos en los que se espera que el alumno reproduzca o identifique el material en casi la misma forma en la que se le presentó durante la experiencia de aprendizaje. También incluye unidades de conocimiento que supuestamente el estudiante domina, por haber sido expuesto, durante un largo período de tiempo a experiencias de aprendizaje que lo condujeron a ello.
2. Ejercicios en los que se pide enunciar una definición o un resultado. Este punto lo ubico (A.1).	A.2 Conocimiento de terminología. Los objetivos de este subnivel describen conductas de evocación de símbolos y nomenclatura. A.3 Habilidad para llevar a cabo algoritmos. También en este caso, el nombre del subnivel es muy sugestivo. Incluye comportamientos

3. Ejercicios de reconocimiento de definiciones y de resultados (teorema, lema, propiedades, etc). Este punto lo ubico en (A.2) y (B.1)	de manejo de ciertos elementos de acuerdo a una serie de reglas dadas. Los algoritmos no se limitan al campo de la aritmética; tanto en geometría como en álgebra, (por ejemplo), se pueden encontrar algoritmos (división de un segmento en partes iguales, resolver una ecuación de 2° grado).
4. Ejercicios que buscan desarrollar habilidades algorítmicas. (A.3)	B.1 <u>Conocimiento de conceptos.</u> Este subnivel pertenece a la categoría de comprensión, puesto que se parte de que un concepto es una abstracción, y como tal, requiere de alguna toma de decisiones implícita al usar un concepto o al decir cuando un objeto es o no instancia de un concepto.
5. Ejercicios que buscan el desarrollo de habilidades intuitivas del tipo de visualización, esto es, que el alumno se auxilie de dibujos, gráficas, diagramas que le ayuden a comprender el problema. (B.4) y (B.6)	B.2 <u>Conocimiento de principios reglas y generalizaciones.</u> También incluye comportamientos de abstracción como en el caso B.1, y los principios reglas y generalizaciones corresponden a los tratados en el curso o experiencia de aprendizaje. B.3 <u>Conocimiento de la estructura matemática</u>. Incluye objetivos referentes a conocer las propiedades de los sistemas de numeración, así como las estructuras algebraicas.

6. Ejercicios que requieren la aplicación de definiciones y/o resultados. (B.1), (B.2), (C.1) y (C.2)	B.4 <u>Habilidad de transformar elementos de un problema de una forma a otra.</u> Aunque el nombre de este nivel es bastante descriptivo, se puede mencionar como ejemplos: traducción de una descripción oral a una representación gráfica, o a una forma simbólica, y recíprocamente.
	B.5 <u>Habilidad para seguir una línea de razonamiento.</u> Se puede enunciar también como "habilidad para leer o escuchar un argumento matemático". Habilidad específica para recibir comunicación en matemáticas.
7. Ejercicios que requieren de manipulaciones algebraicas que dependen de cada problema. (Estos ejercicios están a un nivel más alto de los que emplean solo memorización). (C.1) y (C.2).	C.1 <u>Habilidad para resolver problemas rutinarios.</u> Abarca objetivos referentes a la resolución de problemas análogos a los tratados en el material de instrucción. Por lo general son precedidos de una o varias conductas, como por ejemplo el formular el problema simbólicamente, o aún más, esto puede ir precedido de la selección de una regla o uso de un principio para elegir adecuadamente el algoritmo o los cálculos por hacer.

8. Ejercicios cuya finalidad es el descubrimiento de datos o hipótesis implícitas en el problema para la aplicación de un resultado.
(C.3) y (D.1)

9. Ejercicios que conducen al alumno a la búsqueda de elementos para la afirmación o negación de hechos.
(D.1).

10. Ejercicios que necesitan para su solución de construcciones auxiliares, a saber, geométricas o algebraicas.
(D.1) y (D.2).

C.2 <u>Habilidad para hacer comparaciones.</u> Los comportamientos de este nivel consisten en: recordar la información relevante (conceptos, reglas, estructura matemática, terminología), descubrir una relación y formular una decisión.

C.3 <u>Habilidad para analizar datos.</u> Objetivos que requieren de leer e interpretar información, manipularla y, como resultado, tomar decisiones o dibujar conclusiones. Más precisamente, el nivel se refiere a la habilidad de separar un problema en las partes que lo integran, distinguir entre información relevante e irrelevante y finalmente establecer una relación con subproblemas cuya solución se conozca.

C.4 <u>Habilidad para reconocer patrones, isomorfismos y simetrías.</u> Se refiere a la evocación de información relevante, transformación de los elementos de un problema, manipulación de éstos en una secuencia y reconocer una relación. Es evidentemente una secuencia de conductas, que es una propiedad del nivel de aplicación.

11. Ejercicios que requieren de la construcción de contraejemplos para la solución del problema. (D.1)	D.1 Habilidad para resolver problemas no rutinarios. Comprende objetivos que requieren que el estudiante muestre la transferencia del aprendizaje reciente (en matemáticas) a un nuevo contexto. En este nivel, se va enfrentando a problemas distintos a aquellos resueltos previamente. La resolución de tales problemas, puede incluir separar un problema en partes e investigar la información que se puede obtener de cada uno de ellas; o reorganizar los elementos de un problema en un nuevo orden, para determinar la solución. En todos los casos se trata de problemas tales que ninguna solución algorítmica está al alcance del estudiante, y que tal vez requieran de un acercamiento heurístico, como establecer y llevar a cabo un plan, o hacer repetidas comparaciones entre la situación dada y la meta del problema, para determinar las diferencias que deben ser eliminadas para acercarse gradualmente a la solución.
12. Ejercicios en los que el estudiante use dos o más caminos para la solución del problema. (D.1) y (D.2)	
13. Ejercicios en los que el alumno deduzca resultados a partir de otros. (D.1) y (D.2)	
14. Ejercicios que lleven al estudiante a intuir o sospechar, sugerir o conjeturar reglas o patrones, resultados o relaciones a base de inducción. (C.3), (C.4), (D.1) y (D.2)	D.2 Habilidad para descubrir relaciones. Para descubrir se requiere de una reestructuración de

15. Ejercicios que lleven al estudiante a intuir o sospechar, sugerir o conjeturar reglas o patrones, resultados o relaciones a partir del análisis e integración de información nueva.
(D.1) y (D.2)

16. Ejercicios que lleven al estudiante a intuir o sospechar, sugerir o conjeturar reglas o patrones, resultados o relaciones por medio de analogías.
(C.2), (D.1) y (D.2)

17. Ejercicios que fuercen a los estudiantes a manejar, asociar, estructurar e integrar varios elementos que intervienen en el problema para su solución, tales como

los elementos de un problema en una forma, para formular la relación. Esta habilidad difiere de la descrita en el subnivel C.4 de Aplicación, en que aquí el estudiante debe formular una nueva relación y no tan sólo reconocer una relación familiar en la nueva estructura de los datos.

D.3 Habilidad para construir pruebas. El nombre de esta habilidad lo dice claramente, hay que distinguirla de la habilidad de reproducir una demostración (nivel de aplicación) y de la de recordar una demostración (nivel de computación).

D.4 Habilidad para criticar pruebas. El nombre de esta habilidad podría ser más general: "Habilidad para criticar cualquier argumento matemático".

D.5 Habilidad para formular y validar generalizaciones. Como suena muy semejante a otras subcategorías del nivel de análisis, se puede enunciar de la siguiente manera: "Habilidad para buscar una relación o construir una prueba que haga sustancioso algún resultado".

definiciones, resultados, hipótesis, tesis, construcciones auxiliares, desarrollo lógico para su demostración, etc.

(D.1), (D.2), (D.3) y (D.5)

18. Ejercicios que requieren de la confrontación y análisis de conjeturas, enfoques o puntos de vista por parte de grupos de estudiantes.

(D.4) y (D.5)

La información que aparece en este lado fué tomada de "Análisis del Programa Oficial de Matemáticas para el Primer Año de Secundaria (1975-1976)" de Teresa Rojano Ceballos.

BIBLIOGRAFIA.

1. An Agenda for Action. Recomendations for School Mathematics of the 1980s. NCTM.

2. Problem Solving in School Mathematics. 1980 Yearbook. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

3. The Psychology of Teaching for Thinking and Creativity. 1980 AETS YEARBOOK.

4. Cárdenas, Luis, Raggi, Tomas. Algebra Superior. México, Trillas. 1982.

5. Greitzer, Samuel L. International Mathematical Olympiads 1959-1977. The Mathematical Association of America. 1978.

6. Kürschák, József. Hungarian Problem Book. Random House. 1967.

7. Lakatos Imre. Pruebas y Refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático. Madrid, Alianza Editorial. 1978.

8. Lehmann, Charles H. Geometría Analítica. México, Limusa, 1980.

9. Polya, G. Cómo plantear y resolver problemas. México, Trillas. 1979.

10. Polya, G. Matemáticas y razonamiento plausible. Madrid. Tecnos. 1966.

11. Rojano, C.T. Análisis del Programa Oficial de Matemáticas para el primer año de Secundaria (1975-1976).