

1024



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GRAFICAS DE INTERVALOS

T E S I S :
Que para obtener el título de
M A T E M A T I C O
P r e s e n t a :
VAZQUEZ VAZQUEZ FROILAN

MEXICO, D.F.

1983



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N T R O D U C C I O N

Sea $I = \{ I_1, I_2, \dots, I_n \}$ una familia de intervalos sobre la recta real. Una gráfica de intervalos G es la gráfica de intersección de I si los vértices de G pueden ser etiquetados V_1, V_2, \dots, V_n y dos vértices V_i y V_j son adyacentes si y sólo si los intervalos I_i e I_j se intersectan. Sea I una colección de intervalos cuya gráfica de intersección es G , sea $NI(I)$ el número de diferentes tamaños de los intervalos de I . Se define el número de intervalos de G , denotado por $NI(G)$, como el mínimo $\{ NI(I) \mid I \text{ es un diagrama de intervalos de } G \}$. El propósito de esta tesis ha sido encontrar las características que poseen aquellas gráficas de intervalos que satisfacen $NI(G) = 2$. Ya se ha logrado caracterizar a las gráficas de intervalos que cumplen $NI(G) = 1$.

Los conceptos básicos y la notación necesaria que será usada en este trabajo se exponen en el capítulo 0. Son conceptos introductorios a la Teoría de las Gráficas.

En el capítulo 1 presentamos la definición y la caracterización de las gráficas de intervalos. Asimismo, se detallan algunas relaciones que las gráficas de intervalos tienen con otras familias de gráficas de intersecciones. Al final del capítulo se enlistan algunas, de las múltiples, aplicaciones que tienen las gráficas de intervalos.

En el capítulo 2 se detallan algunas familias de gráficas de intervalos que satisfacen $NI(G) = r$ para r natural, también, damos la longitud mínima que puede tener un diagrama de intervalos. Y para finalizar este capítulo, exponemos las conclusiones generales a las que hemos llegado durante el desarrollo de este trabajo.

Finalmente, presentamos la bibliografía consultada; así, como una bibliografía adicional para que toda persona interesada en alguna familia de gráficas de intersecciones pueda documentarse ampliamente.

C O N T E N I D O

Capítulo 0

Conceptos Preliminares	1
------------------------	---

Capítulo 1

Gráficas de intervalos y su relación con otras familias de gráficas	11
Gráficas de intersección	12
Gráficas de intervalos	14
Gráficas arco-circulares	18
Gráficas circulares	19
Gráficas de permutaciones	23
Aplicación de las gráficas de intervalos	25

Capítulo 2

Familias de gráficas de intervalos que satisfacen $NI(G) = k$ con $k \in \mathbb{N}$	39
Diagramas de intervalos de longitud mínima	51
Conclusiones	70
Bibliografía	73
Bibliografía Adicional	74

Capítulo 0: CONCEPTOS PRELIMINARES

Para facilitar la lectura y discusión de los temas tratados en esta tesis, primero definimos algunos términos y conceptos básicos. Hacemos esto en el presente capítulo con la introducción de los conceptos básicos y la notación necesaria para el desarrollo subsecuente de este trabajo.

Se presentan, con frecuencia, en la vida diaria situaciones que pueden ser descritas por medio de diagramas consistentes de un conjunto de puntos junto con líneas que unen a ciertos pares de estos puntos. Por ejemplo: Los puntos pueden representar empresas, y las líneas unen empresas que tienen alguna relación comercial; o los puntos pueden representar conjuntos y las líneas unen conjuntos que tienen algún elemento en común. En tales diagramas estamos interesados en saber si dos puntos dados están, o no están, unidos por una línea. Una abstracción matemática de situaciones de este tipo nos la da el concepto de gráfica.

Una gráfica G consiste de un conjunto finito no-vacío $V(G)$ de objetos no definidos llamados los vértices de G , junto con un conjunto $E(G)$ de parejas no ordenadas de elementos distintos de $V(G)$ llamadas las aristas de G .

Dos vértices $u, v \in V(G)$ son adyacentes cuando el par $(u, v) \in E(G)$. Los vértices u y v se llamarán los extremos de (u, v) . Si $(u, v) \in E(G)$, la denotaremos por $u - v$.

De una manera similar, dos aristas de G son incidentes si tienen un extremo en común. La gráfica de la figura 1.1 de la pág. 4 ejemplifica las definiciones anteriores.

El conjunto de vértices adyacentes a un vértice dado $u \in V(G)$ es llamado la vecindad de u . Se denotará por $\Gamma(u)$. Para un ejemplo véase la figura 1.1 pág. 4.

Una gráfica H es una subgráfica de una gráfica G , si $V(H) \subset V(G)$ y $E(H)$ es un subconjunto del conjunto de aristas de G que tienen ambos extremos en $V(H)$. Cuando $V(H) = V(G)$ de

timos que H es una subgráfica generadora de G . Si además, H es tal que $V(H) \subset V(G)$, y para $x, y \in V(H)$ sucede que $x - y \in E(H)$ si y sólo si $x - y \in E(G)$ decimos que H es una Subgráfica inducida de G . Ver figura 1.2 pág. 5.

Una trayectoria T_n en una gráfica G , es una sucesión al ternada de vértices y aristas $V_1, V_1 - V_2, \dots, V_{n-1}, V_{n-1} - V_n, V_n$ con $V_i \neq V_j$ para $i \neq j$, empezando y terminando con un punto. Ver figura 1.3 pág. 6.

Un ciclo C de una gráfica G se define como una sucesión alternada de vértices y aristas $V_1, V_1 - V_2, V_2, \dots, V_{n-1} - V_n, V_n, V_n - V_1$ con $V_i \neq V_j$ para $i \neq j$. Si C tiene n aristas, generalmente se denota por C_n ($n \geq 3$).

Una gráfica es conexa si para todo par de vértices $u, v \in V(G)$ existe una trayectoria T cuyos extremos son u y v . De otra manera se llama no-conexa.

G es una gráfica completa si para todo par de vértices $x, y \in V(G)$, $x - y \in E(G)$. Las gráficas completas con n vértices se denotan por K_n .

Una subgráfica completa H de G es llamada un clan de G si no hay ninguna subgráfica completa de G que contenga propia mente a H . Ver figura 1.4 pág. 6.

El complemento G^C de una gráfica G es la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V(G)$ y para la cual $x - y \in E(G^C)$ si y sólo si $x - y \notin E(G)$. Ver figura 1.5 pág. 7.

Un subconjunto no-vacio S de $V(G)$ es un conjunto independiente de una gráfica G si para todo par de vértices $u, v \in S$, $u - v \notin E(G)$. Ver gráfica 1.6 pág. 7.

Una representación para la cual las curvas que representan aristas de G se intersectan solamente en los puntos que representan vértices de G será llamado una representación plana de G . Una gráfica G es llamada Gráfica plana si existe una representación plana de ella. Ver figura 1.7 pág. 8.

Ahora introducimos la familia de gráficas conocidas como

gráficas orientadas.

Dada una gráfica G , una orientación \vec{G} de G es una asignación de una dirección a cada arista de G . Cada arista $x-y \in G$ puede ser orientada $x \rightarrow y$ o $y \rightarrow x$, sin embargo solamente una de estas orientaciones es elegida para cada arista de G . Diferentes elecciones de orientaciones para las aristas de G nos producen diferentes orientaciones de G . Ver figura 1.8 pág. 8.

El conjunto de todos los vértices x tales que $x \rightarrow v$ en G será llamado la frontera interior de v en G , y será denotada por $\Gamma^-(v)$. Similarmente se define la frontera exterior

$\Gamma^+(v) = \{x \mid v \rightarrow x\}$. Ver figura 1.9 pág. 9.

Cuando $G = K_n$, una \vec{G} será llamado un torneo. En la figura 1.10 pág. 9 se muestran dos diferentes torneos con cuatro vértices.

Un ciclo dirigido en una gráfica orientada G es una sucesión de vértices y aristas dirigidas $V_0, V_0 \rightarrow V_1, V_1, V_1 \rightarrow V_2, \dots, V_{n-1} \rightarrow V_n, V_n, V_n \rightarrow V_0$. Para un ejemplo ver la figura 1.11 pág. 9.

Si una gráfica orientada no contiene ningún ciclo dirigido, G será llamada una gráfica orientada acíclica.

Una gráfica orientada G es transitiva si para cada tres distintos vértices $x, y, z \in V(G)$ con $x \rightarrow y$ y $y \rightarrow z$ siempre sucede que $x \rightarrow z$.

Si una gráfica no orientada G es tal que existe una orientación \vec{G} la cual es una gráfica orientada transitiva, entonces G se dice que es orientable transitivamente; también se llama gráfica de comparabilidad. En la figura 1.12 pág. 10 se dan ejemplos de gráfica orientada acíclica y gráfica de comparabilidad.

No todas las gráficas son gráficas de comparabilidad. Se puede checar que la gráfica de la figura 1.13 pág. 10 no es gráfica de comparabilidad.

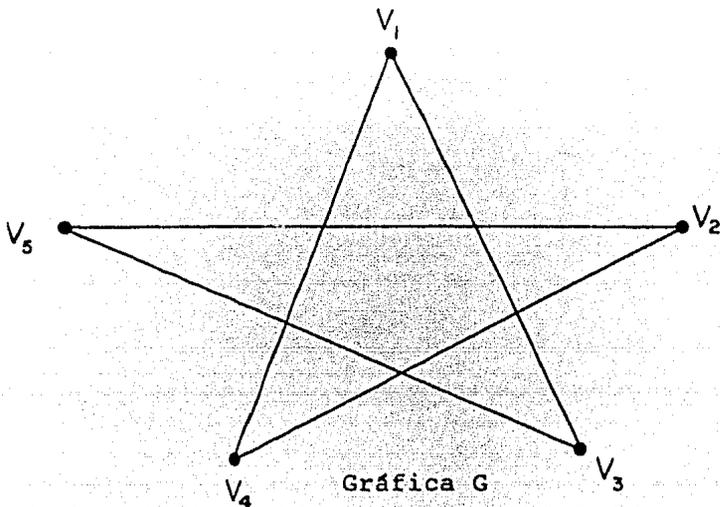


Figura 1.1

Esta gráfica esta formada por:

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \quad y$$

$$E(G) = \{(v_1, v_3), (v_3, v_5), (v_5, v_2), (v_2, v_4), (v_4, v_1)\} .$$

Ejemplo de:

vértices adyacentes v_1 y v_3 , v_2 y v_4

vértices no adyacentes v_2 y v_3 , v_4 y v_5

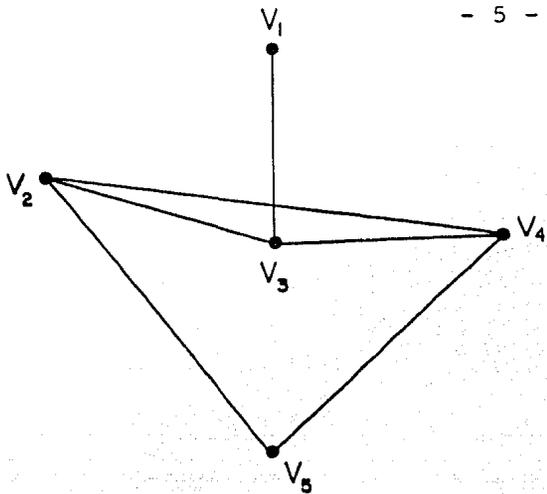
aristas incidentes $v_2 - v_5$ y $v_5 - v_3$, $v_2 - v_4$ y $v_4 - v_1$

aristas no incidentes $v_3 - v_5$ y $v_2 - v_4$, $v_4 - v_1$ y $v_2 - v_5$

Vecindades:

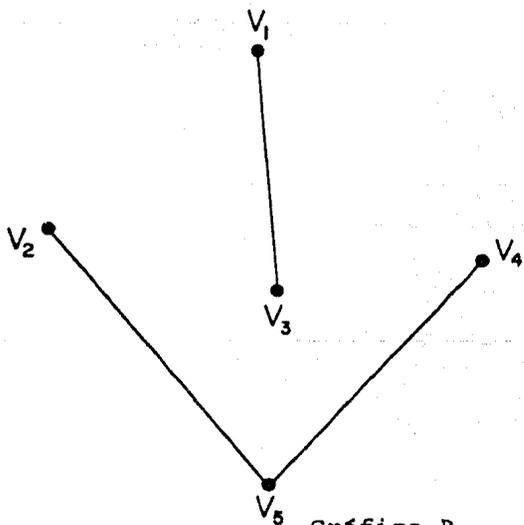
$$\Gamma(v_1) = \{v_3, v_4\} ,$$

$$\Gamma(v_2) = \{v_4, v_5\}$$

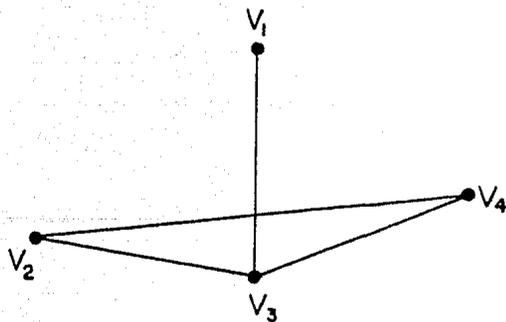


Gráfica A

La Gráfica B es subgráfica generadora de la gráfica A, pero no inducida la gráfica C es subgráfica inducida de la gráfica A, pero no generadora

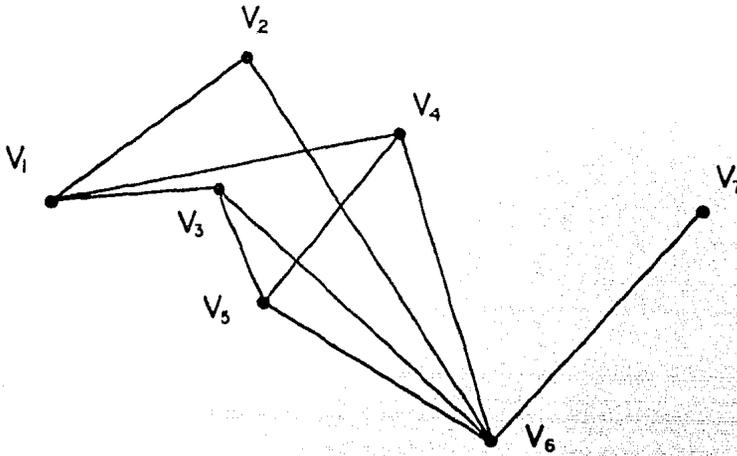


Gráfica B



Gráfica C

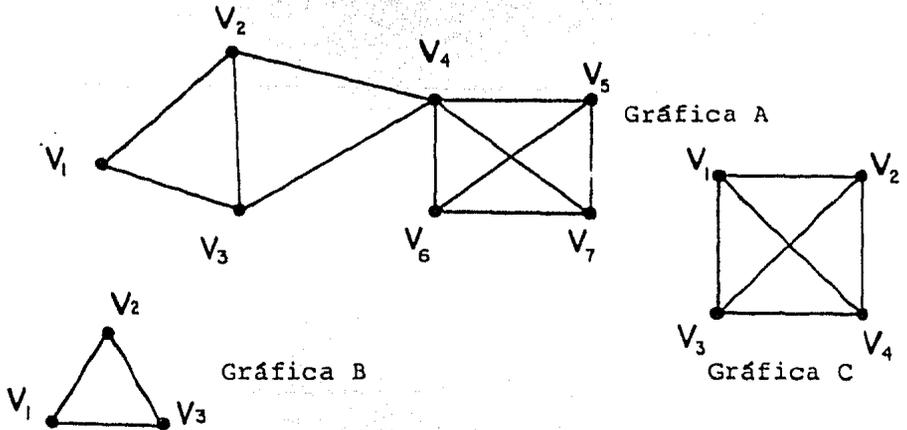
Figura 1.2



La sucesión $V_1, V_1 - V_2, V_2, V_2 - V_6, V_6, V_6 - V_5, V_5$ es una trayectoria.

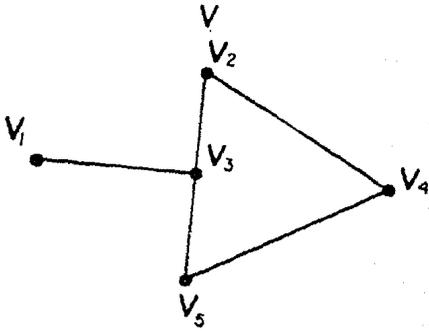
La sucesión $V_3, V_3 - V_5, V_5, V_5 - V_4, V_4, V_4 - V_5, V_5, V_5 - V_3, V_3$ no es una trayectoria, V_5 y V_3 se repiten.

Figura 1.3

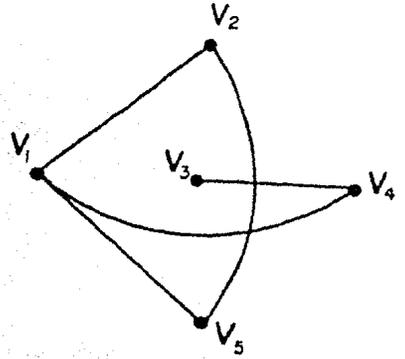


B y C son clanes de A

Figura 1.4

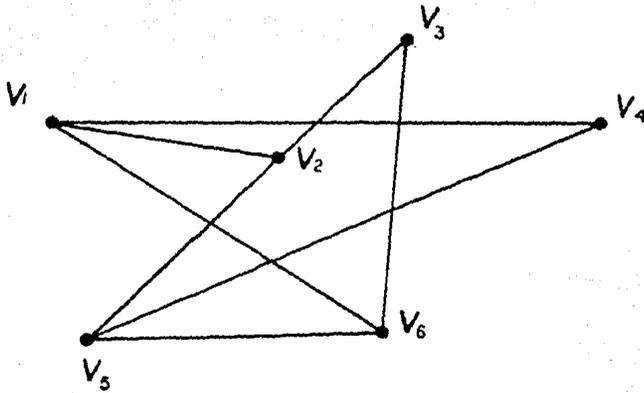


Gráfica G



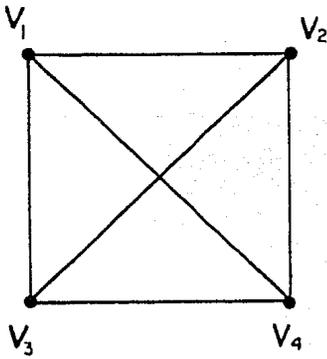
Gráfica G^c

Figura 1.5

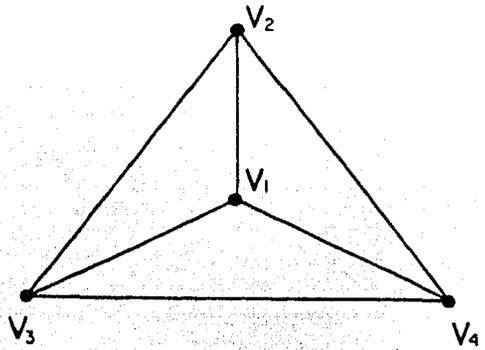


$S = \{V_2, V_6, V_4\}$ es un conjunto independiente de G

Figura 1.6

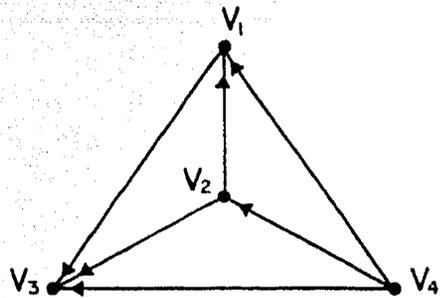
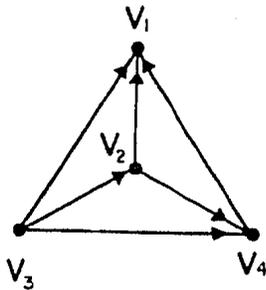


Gráfica G



Representación plana de G

Figura 1.7



Diferentes orientaciones de la gráfica G

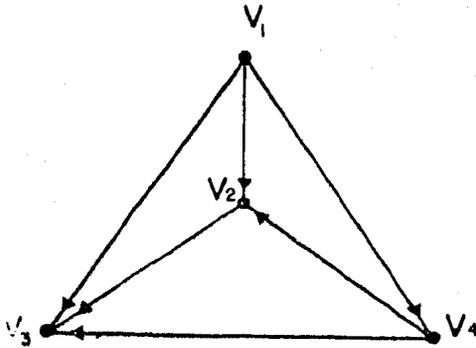
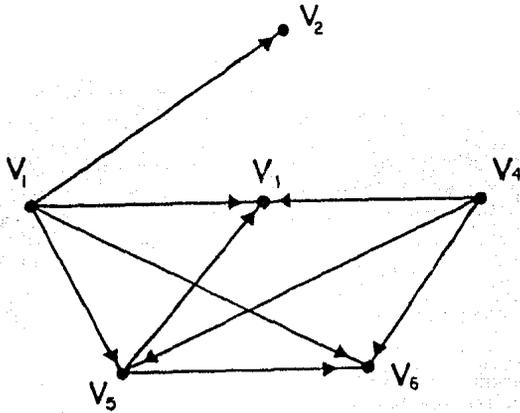


Figura 1.8



$$\begin{aligned} \overline{r}(v_5) &= \{v_1, v_4\} \\ \overline{r}(v_3) &= \{v_5, v_6\} \\ \overline{r}(v_2) &= \{v_1\} \\ \overline{r}(v_1) &= \phi \end{aligned}$$

Figura 1.9

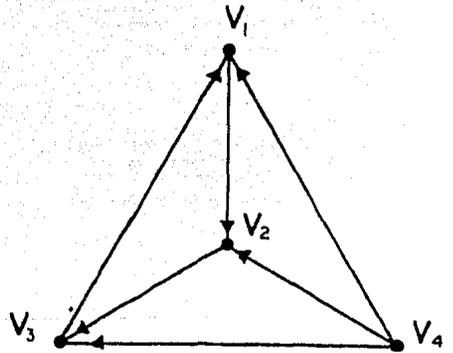
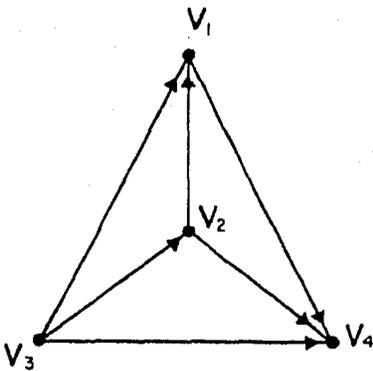
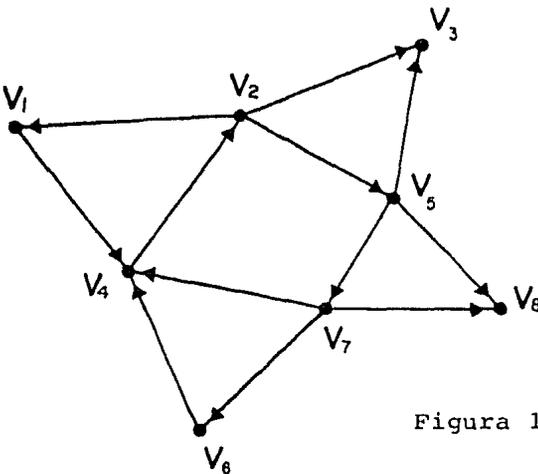
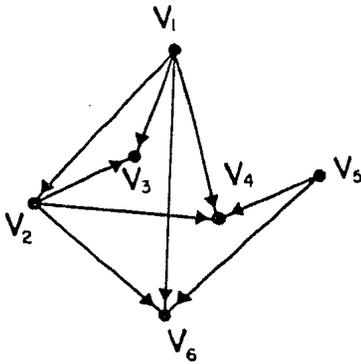


Figura 1.10

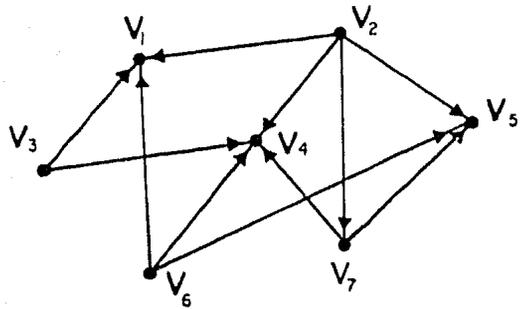


$v_2, v_2 \rightarrow v_5, v_5, v_5 \rightarrow v_1,$
 $v_7, v_7 \rightarrow v_4, v_4, v_4 \rightarrow v_2, v_2$
 Es un ciclo dirigido de la gráfica.

Figura 1.11

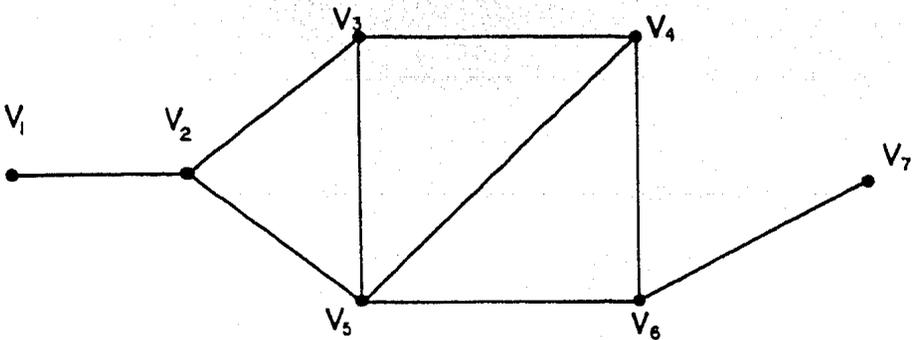


Gráfica orientada acíclica



Gráfica de comparabilidad

Figura 1.12



La gráfica no es de comparabilidad

Figura 1.13

Capítulo 1: GRAFICAS DE INTERVALOS Y SU RELACION CON OTRAS FAMILIAS DE GRAFICAS

En 1957 G. Hajös planteó el siguiente problema: Dado un número finito de intervalos sobre una línea recta, se puede construir una gráfica asociada con este conjunto de intervalos de la siguiente manera: A cada intervalo le hacemos corresponder un vértice de la gráfica, y dos vértices están conectados por una arista si y sólo si los correspondientes intervalos se intersectan. La pregunta es si una gráfica dada es isomorfa a una de las gráficas así caracterizadas (1).

Independientemente, el biólogo Seymour Benzer, durante sus investigaciones sobre la estructura de los genes, planteó lo siguiente: De las investigaciones clásicas de Morgan y su escuela, los cromosomas son conocidos como un arreglo lineal de elementos hereditarios, los genes. Estos elementos deben tener su propia estructura interna. En su nivel más fino, en relación a los genes, la pregunta aparece de nuevo ¿Están ellos (los subelementos dentro de los genes) ligados juntos en un orden lineal análogo a los niveles más altos de integración de los genes en los cromosomas?.

La solución a esta pregunta debería ser contestada estudiando las gráficas de intervalos y entonces, verificar si los datos que fueron traslapados fueron o no consistentes con la hipótesis genética lineal.

El propósito fundamental de este capítulo es presentar una caracterización de las gráficas de intervalos. La caracterización que aquí se presenta fue dada por Gilmore y Hoffman (2). Y la prueba que aquí se presenta se debe a Urrutia G. J. (3). Existen otras caracterizaciones dadas por: G. Lekkerkerker y J. Ch. Boland (4) y Fulkerson y Gross (5).

La familia de gráficas de intervalos pertenecen a la familia de gráficas de intersección consideradas de gran impor

tancia en Teoría de las Gráficas, ya que frecuentemente tienen aplicaciones al mundo real. Al final de esta parte, se ejemplifican algunas de las múltiples aplicaciones de gráficas de intervalos.

GRAFICAS DE INTERSECCION

Sea $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ una familia de conjuntos distintos, una gráfica G es la gráfica de intersección de S si los vértices de G pueden ser etiquetados $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ de tal manera que $V_i - V_j \in E(G)$ si y sólo si $S_i \cap S_j \neq \emptyset$.

En la figura 2.1 pág.27 se muestra una familia S de conjuntos y su gráfica de intersección.

Es claro que cualquier familia de conjuntos define una gráfica de intersección pero, ¿Cuáles gráficas son gráficas de intersección de una familia de conjuntos?.

La respuesta la da el siguiente teorema.

Teorema 2.1 (6). Toda gráfica G es una gráfica de intersección.

Demostración

Para todo $v \in V(G)$, sea $S(v) = \{u - v \mid u - v \in E(G)\}$. Hagamos $S = \{S(v) \mid v \in V(G)\}$, G es la gráfica de intersección de S ; puesto que $S(u) \cap S(v) \neq \emptyset$ si y sólo si $u - v \in E(G)$.

■

Como se puede observar, no existen restricciones para la familia S , así, el problema de caracterizar a las gráficas de intersección no es un problema interesante. Sin embargo, si escogemos clases especiales de conjuntos y nos preguntamos que gráficas son gráficas de intersección de tales conjuntos, el problema se vuelve interesante y en algunos casos la solución del problema es difícil de encontrar. Por ejemplo: Sea V

un conjunto de curvas en el plano y sea G la gráfica de intersección de V , es decir, V es el conjunto de vértices de G , dos vértices V_i, V_j son adyacentes si y sólo si las curvas V_i y V_j se intersectan. Ver figura 2.2 pág. 27.

Teorema 2.2 (Ehrlich, Even, Tarjan). No todas las gráficas son gráficas de intersección de conjuntos de curvas en el plano.

Demostración

Sea H una gráfica no plana. Construyamos G introduciendo un nuevo vértice en la mitad de cada arista de H (ver figura 2.3 pág. 28). Probaremos, por contradicción, que G no es una gráfica de intersección de un conjunto de curvas en el plano.

Supongamos que hay un conjunto V de curvas en el plano tal que G es su gráfica de intersección. Podemos contraer a puntos todas las curvas correspondientes a los vértices de H sin crear nuevas intersecciones en las curvas correspondientes a los vértices de $M = V(G) - V(H)$, excepto que todas las curvas en M intersectan curvas $V \in V - M$ que ahora se intersectan en el punto P al cual V fue contraído.

El diagrama resultante es una realización plana de H , donde los puntos a los cuales las curvas que representan vértices de H fueron contraídas representan los vértices de H y las curvas que representan vértices en M corresponden a las aristas de H . Esto es una contradicción ya que H es no-plana. ■

El problema general de caracterización de aquellas gráficas que son gráficas de intersección de curvas en el plano es demasiado difícil. Si las curvas son restringidas a ciertas familias se pueden hacer algunos avances. Necesitamos considerar una familia importante de gráficas que son de gran utilidad en los problemas de caracterización. Estas gráficas son

las gráficas de comparabilidad.

Recordemos que una gráfica orientada D es transitivamente orientable si para cada tres vértices distintos $x, y, z \in V(D)$ tales que $x \rightarrow y, y \rightarrow z$ en D , la arista $x \rightarrow z$ es también una arista de D . También definimos a una gráfica no-orientada G como una gráfica de comparabilidad si admite una orientación transitiva. La figura 2.4 pág. 29, muestra una gráfica transitivamente orientada. C_5 es un ejemplo de una gráfica que no es gráfica de comparabilidad.

Un camino W en una gráfica G , consiste de una sucesión finita de vértices y aristas $V_0, V_0 - V_1, V_1, \dots, V_{n-1} - V_n, V_n$. A los vértices V_0 y V_n les llamaremos vértice inicial y final respectivamente. Si $V_0 = V_n$ diremos que W es un camino cerrado. W es par o impar si n es par o impar. Nótese que en un camino W permitimos que un vértice o una arista aparezca más de una vez. Véase figura 2.5 pág. 29.

Una cuerda triangular en un camino cerrado W es una arista de la forma $V_i - V_{i+2}$. El siguiente teorema nos da una caracterización de las gráficas de comparabilidad, aquí se omite la demostración, para conocerla se puede consultar (2).

Teorema 2.3 (2): Una gráfica G es una gráfica de comparabilidad si y sólo si cada camino cerrado impar tiene al menos una cuerda triangular en G .

GRAFICAS DE INTERVALOS

La línea real junto con un conjunto de intervalos I_1, I_2, \dots, I_n forma un diagrama de intervalos I . Una gráfica G representa a I si sus vértices pueden ser etiquetados V_1, V_2, \dots, V_n tales que V_i es adyacente a V_j en G si y sólo si $I_i \cap I_j \neq \emptyset$. Una gráfica G es una gráfica de intervalos si representa al menos un diagrama de intervalos. Véase figura 2.6 pág. 30.

Teorema 2.4 (3): Una gráfica G es una gráfica de intervalos si y sólo si C_4 no es una subgráfica inducida de G y G^c es una gráfica de comparabilidad.

Demostración

\Rightarrow) Supongamos que G representa al diagrama de intervalos I , en el cual dos intervalos I_1 e I_2 de I no se intersectan, entonces si el intervalo I_0 de I intersecta a I_1 y a I_2 , cualquier otro intervalo I_3 que intersecte a I_1 y a I_2 debe intersectar a I_0 . Por lo tanto, C_4 no puede ser una subgráfica inducida de G . Para mostrar que G^c es una gráfica de comparabilidad, orientamos las aristas de G^c de la siguiente manera: Si los intervalos I_i e I_j no se intersectan en I (es decir, los vértices V_i y V_j son adyacentes en G^c) orientamos $V_i \rightarrow V_j$ si, para todo $x \in I_i$ y $y \in I_j$ tenemos $x < y$. De otra manera $V_j \rightarrow V_i$. Esto claramente induce una orientación transitiva en G^c , y por lo tanto \vec{G}^c es una gráfica de comparabilidad. La orientación \vec{G}^c inducida en G^c por I será llamada la I-orientación de G^c (véase figura 2.7 pág. 31). Similarmente, si para una orientación Transitiva \vec{G}^c en G^c existe un diagrama de intervalos I el cual induce en G^c la orientación \vec{G}^c , entonces \vec{G}^c será llamada una I-orientación de G^c .

Para probar la suficiencia de este teorema mostraremos que si G satisface las condiciones del teorema, entonces toda orientación transitiva de G^c es una I-orientación.

Definición

Se dice que una gráfica dirigida tiene la propiedad anidada si para todo par de vértices u y v , $\Gamma^+(u) \subseteq \Gamma^+(v)$ ó $\Gamma^+(v) \subseteq \Gamma^+(u)$. La gráfica \vec{G}^c de la figura 2.7 pág.31, tiene la propiedad anidada.

Lema 2.5 (3) Si una orientación \vec{G}^c del complemento de una grá

fica tiene la propiedad anidada, entonces \vec{G}^C es una I-orientación de G^C .

Demostración

Necesitamos probar primero que \vec{G}^C está orientada transitivamente y también que G es una gráfica de intervalos que representa un diagrama de intervalos I el cual induce la orientación \vec{G}^C en G^C .

Supóngase que \vec{G}^C no es transitivamente orientada. Entonces existe $u, v, z \in V(G)$ tal que $u \rightarrow v, v \rightarrow z$ en G^C pero $x \not\rightarrow z$ en G^C . Por lo que $\Gamma^+(u) \not\subseteq \Gamma^+(v)$ ya que $v \in \Gamma^+(u)$ y $v \notin \Gamma^+(v)$. También $\Gamma^+(v) \not\subseteq \Gamma^+(u)$ ya que $z \in \Gamma^+(v)$ y $z \notin \Gamma^+(u)$. Esto contradice la hipótesis de que G^C tiene la propiedad anidada, y por lo tanto \vec{G}^C está orientada transitivamente.

Ahora mostramos cómo obtener un diagrama de intervalos I para G el cual induzca la orientación \vec{G}^C en G^C .

Claramente si G tiene un solo vértice, el diagrama de intervalos I consistirá de un único intervalo. Supóngase que para todas las gráficas orientadas \vec{H}^C con la propiedad anidada y n vértices existe un diagrama de intervalos, el cual induce en H^C la orientación \vec{H}^C y sea G una gráfica con $n+1$ vértices. Sea \vec{G}^C una orientación de G con la propiedad anidada, y considérese el conjunto $S = \{V_1, V_2, \dots, V_S\}$ de vértices los cuales son fuentes de \vec{G}^C . Puesto que \vec{G}^C tiene la propiedad anidada, si tomamos un vértice $V_i \in S$ con grado máximo entonces $\Gamma^+(V_j) \subseteq \Gamma^+(V_i) \forall V_j \in S, j \neq i$.

Sea $\vec{H}^C = \vec{G}^C - \{V_i\}$. Entonces por la hipótesis de inducción hay un diagrama de intervalos I' el cual induce en $G - \{V_i\}$ la orientación \vec{H}^C . Sea S_h el conjunto de fuentes de \vec{H}^C . Entonces $S - \{V_i\} \subset S_h$. Claramente los vértices de S_h forman conjunto independiente máximo en \vec{H}^C (ya que todo vértice $v \in \vec{H}^C$ que no sea fuente en \vec{H}^C es adyacente al menos a una fuente de \vec{H}^C por la transitividad de \vec{H}^C). Entonces si IS_h es

el conjunto de intervalos correspondientes a los vértices en S_h , $A = \bigcap_{I_j \in IS_h} I_j \neq \emptyset$. Además, si $I_j \notin IS_h$, entonces $I_j \cap A = \emptyset$

ya que de otra manera I_j intersectaría a todos los elementos en IS_h , produciendo en H^C un conjunto independiente $S_h \cup \{V_j\}$ (donde V_j es el vértice en H^C correspondiente a I_j) el cual contendría a S_h como subconjunto propio, contradiciendo la maximalidad de S_h . Sea p un punto en la línea real a la izquierda de todos los intervalos de I' , y sean $X_1 < X_2 < \dots < X_s$ s puntos a la izquierda de p . Entonces si $I_j = [a_j, b_j]$ es el intervalo en I' correspondiente al vértice $V_j \in S - \{V_i\}$, el intervalo $I'_j = [X_j, b_j]$ $1 \leq j \leq s$, $j \neq i$ representará a V_j en un nuevo diagrama de intervalos I para \vec{G}^C , y V_i estará representado por el nuevo intervalo $[X_i, p]$. Probaremos ahora que I es un diagrama de intervalos representado por I , y también que I induce la orientación \vec{G}^C en G^C .

Claramente el diagrama de intervalos obtenido de I borrando el intervalo $[X_i, p]$ está representado por $H = G - \{V_i\}$ e induce en H^C la orientación \vec{H}^C . Más aún, todos los intervalos $[X_j, b_j]$ de I que representan vértices en $S - \{V_i\}$ intersectan a $[X_i, p]$ y todos los intervalos de I que representan vértices $V_j \in V(G) - S$ son intervalos de I' los cuales están a la izquierda de p . De aquí, $V_i + V_j$ en \vec{G}^C , e I induce en G^C la orientación \vec{G}^C , así que \vec{G}^C es una I -orientación.

Ahora probaremos la suficiencia del teorema.

Supóngase que para una gráfica G , G^C es una gráfica de comparabilidad y que C_4 no es una subgráfica inducida de G . Probaremos que toda orientación transitiva \vec{G}^C de G^C tiene la propiedad anidada, y por el lema 2.4, G es una gráfica de intervalos.

Sean u, v vértices de \vec{G}^C . Si u es adyacente a v en \vec{G}^C y $u \rightarrow v$, Si $v \rightarrow x$ en \vec{G}^C entonces por la transitividad de \vec{G}^C $u \rightarrow x$ y por lo tanto $x \in \Gamma^+(u)$. Por lo tanto $\Gamma^+(v) \subseteq \Gamma^+(u)$. Si-

u no es adyacente a v en \vec{G}^c y $\Gamma^+(v) \not\subseteq \Gamma^+(u)$, y $\Gamma^+(u) \not\subseteq \Gamma^+(v)$, entonces existe $x \in \Gamma^+(u) - \Gamma^+(v)$ y $y \in \Gamma^+(v) - \Gamma^+(u)$. Si x es adyacente a y en \vec{G}^c y $x \rightarrow y$ entonces $u \rightarrow x$ y \vec{G}^c es transitiva, $u \rightarrow y$ en \vec{G}^c y de aquí $y \in \Gamma^+(u)$ lo cual es una contradicción. Similarmente $y \not\rightarrow x$ en \vec{G}^c . Entonces x no es adyacente a y en G . Pero entonces $x - y, y - u, u - v, v - x$ es un ciclo de longitud 4 en G , lo cual contradice la hipótesis de que C_4 no es una subgráfica inducida de G . Por lo tanto \vec{G}^c tiene la propiedad anidada y G es una gráfica de intervalos. ■

Presentamos ahora, muy brevemente, otras familias de gráficas de intersección y damos su relación con gráficas de intervalos.

GRAFICAS ARCO-CIRCULARES

Un diagrama arco-circular al cual denotaremos por $-----$ $C[\bar{V}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_n]$ consiste de un círculo C con un conjunto de arcos $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_n$. Este diagrama define una gráfica G con vértices el conjunto $V(G) = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ tales que V_i es adyacente a V_j si y sólo si los arcos \bar{V}_i y \bar{V}_j se intersectan. La gráfica G será llamada la gráfica asociada a $C[\bar{V}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_n]$

Una gráfica G se llamará gráfica arco-circular si representa al menos un diagrama arco-circular. En la figura 2.8 pág 32 se presenta un diagrama arco-circular y su gráfica asociada.

A continuación presentamos los lemas que nos relacionan las gráficas arco-circulares y las gráficas de intervalos.

Lema 2.4 (7). Toda gráfica de intervalo G es una gráfica arco-circular.

Demostración

Sea I el diagrama asociado a G . Transformamos a R en un círculo y obtenemos un diagrama arco-circular. Cada intervalo-

de I se transforma en un arco en el diagrama obtenido. La fi-
gura 2.9 pág. 33 ilustra gráficamente. ■

Lema 2.7

Una gráfica arco-circular G con un vértice aislado V_p es -
una gráfica de intervalos.

Demostración

Sea $C[\bar{V}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_n]$ el diagrama arco-circular asociado
a G . Sea \bar{p} el arco correspondiente al vértice p . Como el vér-
tice V_p está aislado, el arco \bar{p} estará aislado. "Partimos" al-
círculo por \bar{p} para obtener la recta real. Obsérvese que no se
crean nuevas intersecciones en el nuevo diagrama, ni tampoco se
eliminan intersecciones. La figura 2.10 pág. 33 ilustra la de-
mostración. ■

Observación. Como una consecuencia inmediata del lema 2.7, te-
nemos que:

Si $C[\bar{V}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_n]$ es el diagrama de una gráfica G arco-
circular, y si existe $p \in C$ de tal manera que $p \notin \bar{V}_i$ para ninguna
 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, entonces G es una gráfica de intervalos.

GRAFICAS CIRCULARES

Un diagrama circular $C(C_1, C_2, \dots, C_n)$ consiste de un ---
círculo C con un conjunto de cuerdas C_1, C_2, \dots, C_n . Un diagra-
ma circular define una gráfica circular G con vértices el con-
junto $V(G) = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ tales que V_i es adyacente a V_j en G -
si y sólo si las cuerdas C_i y C_j se intersectan. En la figura-
2.11 pág. 34 se da un ejemplo.

Sea G una gráfica de intervalos. La arista $V_i - V_j$ de G -
será una C -arista si y sólo si $I_i \subset I_j$ ó $I_j \subset I_i$. La arista -
 $V_i - V_j$ de G será una E -arista si y sólo si $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ y ---
 $I_i \not\subset I_j$ ni $I_j \not\subset I_i$.

Sea $G(C)$ la subgráfica de G con $V(G(C)) = V(G)$ y todas la C -aristas de G . $G(C)$ se llamará la C -gráfica de I . Análogamente construimos la E -gráfica de G la cual denotaremos por $G(E)$. La figura 2.12 pág.35 ejemplifica un caso.

Induiremos una orientación $\vec{G}(C)$ sobre $G(C)$ de la siguiente manera: $V_i \rightarrow V_j$ en $\vec{G}(C)$ si y sólo si $I_i \subset I_j$. La orientación así definida es transitiva, ya que si $V_i \rightarrow V_j$ y $V_j \rightarrow V_k$ entonces $I_i \subset I_j \subset I_k$ y por lo tanto $I_i \subset I_k$ y en consecuencia $V_i \rightarrow V_k$.

Los siguientes lemas relacionan ambos tipos de gráficas.

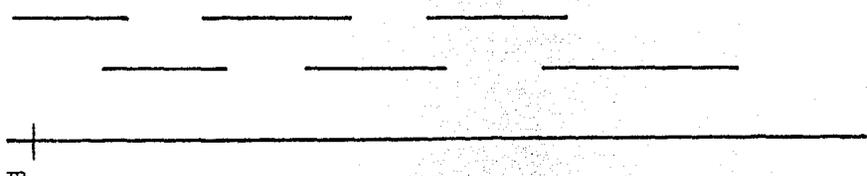
Lema 2.8

La E -gráfica de una gráfica G de intervalos es una gráfica circular.

Demostración

La demostración se hace construyendo el diagrama circular a partir del diagrama de intervalos asociado a $G(E)$.

Sea $I(E)$ el diagrama de intervalos asociado a $G(E)$. $I(E)$ tiene la forma:



Ningun intervalo contiene a otro, sólo se traslapan.

Unimos los extremos de R formando un círculo. Sean $I_i = [a_i, b_i]$, $I_j = [a_j, b_j]$. Si $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ entonces, $a_j \in [a_i, b_i]$ ó $a_i \in [a_j, b_j]$, supongamos que $a_j \in [a_i, b_i]$.

A cada intervalo $I_i = [a_i, b_i]$ le asociamos la cuerda $C_i = [a_i, b_i]$. Si dos intervalos se intersectan, sus cuerdas correspondientes se intersectan, y si dos intervalos no se intersectan sus cuerdas correspondientes no se intersectan. En

la figura 2.13 pág. 36 se da la construcción del diagrama circular.

Sea $C(C_1, C_2, \dots, C_n)$ el diagrama circular asociado a una gráfica circular. Sea $p \in C$, $p \notin C_i \forall i, i \in \{1, \dots, n\}$

A partir de p recorreremos al círculo en sentido contrario al recorrido de las manecillas del reloj.

Definición

Llamaremos Sucesión de C con respecto a p , denotada por $S_p(C)$, la sucesión que se forma con los puntos finales de las cuerdas de C durante el recorrido de p . Denotaremos por C_i^- (C_i^+) al primer (segundo) punto final de C_i que encontremos durante el recorrido de p .

Definición

Llamaremos Arco-intervalo de la cuerda C_i respecto a p , denotado por $AI_p(C_i)$, al arco del círculo comprendido entre C_i^- y C_i^+ .

Definición

Sea $u \in V(G)$, G gráfica circular. Llamaremos a u un C -vértice si y sólo si $AI_p(C_u) \subset AI_p(C_v)$; donde C_u es la cuerda asociada al vértice $u \in V(G)$.

Lema 2.9

Sea G gráfica circular con un vértice aislado tal que $V(G)$ no contiene C -vértices. G es gráfica de intervalos.

Demostración

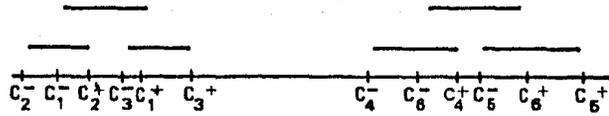
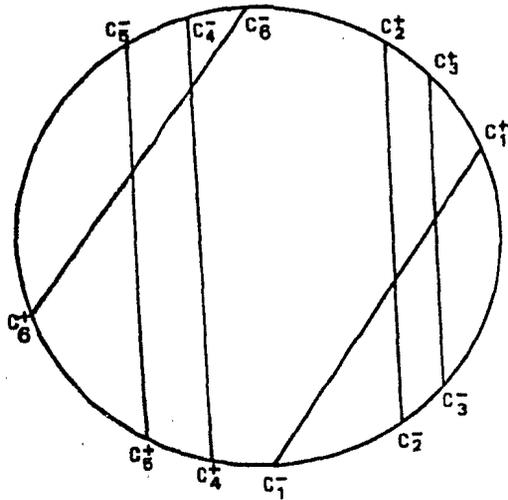
Sea $C(C_1, \dots, C_n)$ el diagrama circular asociado a G . Sea p^- el punto final derecho de la cuerda asociado al vértice aislado. Sea $S_p(C)$ la sucesión de C respecto a p^- . Ya que

G no tiene C-vértices no sucede que $AI(C_i) \subset AI(C_j)$ para ninguna cuerda. Por lo tanto $S_{p^-}(C)$ tiene la forma:

$$S_{p^-}(C) = \{p^-, C_1^-, C_j^-, C_k^-, \dots, C_i^+, \dots, C_j^+, C_e^-, \dots, C_e^+, C_k^+, \dots, p^+\}$$

Sobre R marcamos la sucesión $S_{p^-}(C)$ a partir de C_i^- y al final p^+ , p^- . Unimos los puntos C_i^- con C_i^+ para toda i . Claramente, no hemos creado ni quitado ninguna intersección. El diagrama así obtenido es un diagrama de intervalos y por lo tanto G es de intervalos. La figura 2.14 pág. 37 ilustra la construcción. ■

Observación: Existen gráficas circulares que son gráficas de intervalos, pero que no cumplen la condición del lema anterior. Por ejemplo:



Lo cual quiere decir que el lema no agota todas las gráficas circulares que son gráficas de intervalos.

GRAFICAS DE PERMUTACIONES

Un diagrama de permutación $D(\pi)$ para una permutación $\pi = \{\pi(1), \dots, \pi(n)\}$ consiste de dos líneas paralelas L_1 y L_2 sobre las que los números $1, 2, 3, \dots, n$ aparecen sobre L_1 en orden creciente, y $\pi(1), \dots, \pi(n)$ aparecen sobre L_2 de acuerdo a su orden en π . El número i en L_1 es unido al $\pi(i)$ en L_2 por un segmento \bar{i} para $1 \leq i \leq n$. La figura 2.15 pág 38 ilustra con un ejemplo.

Una gráfica G con n vértices representa a $D(\pi)$ si existe una etiquetación $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ de $V(G)$ tal que el vértice i es adyacente al vértice j en G si y sólo si \bar{i} y \bar{j} se intersectan. Una gráfica que representa al menos a un diagrama de permutación se llama gráfica de permutación.

Presentamos, sin demostrar, la caracterización de las gráficas de permutaciones.

Teorema 2.10 (10)

Una gráfica G es una gráfica de permutación si y sólo si G y G^c son gráficas de comparabilidad.

Los siguientes lemas dan la relación que existe entre las gráficas de intervalos y las gráficas de permutación.

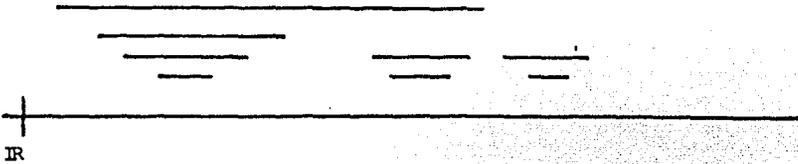
Lema 2.11

Sea G una gráfica de intervalos, sea $G(C)$ su C -gráfica. $G(C)$ es una gráfica de permutaciones.

Demostración

La demostración se hace construyendo el diagrama de permutaciones a partir del diagrama de intervalos asociado a $G(C)$.

Sea $I(C)$ el diagrama de intervalos asociado a $G(C)$. $I(C)$ es de la forma:



No hay traslapamiento de vértices, sólo contención.

Consideremos una línea R' paralela a R . Sea $I_i = [a_i, b_i]$. A a_i lo marcamos sobre R y a b_i sobre R' . Si $I_j \subset I_i \Rightarrow [a_j, b_j] \subset [a_i, b_i] \Rightarrow a_i < a_j$ y $b_j < b_i$. Al marcar b_j sobre R' seguimos obteniendo que $b_j < b_i$ y que $a_i < a_j$. Por lo tanto $\bar{i} \cap \bar{j} \neq \emptyset$. Si $I_i \not\subset I_j$, claramente $\bar{i} \cap \bar{j} = \emptyset$. La figura 2.16 pág. 38, ilustra la construcción.

Lema 2.12

Sea G gráfica de permutaciones. Si $C_4 \notin G$ entonces G es una gráfica de intervalos.

Demostración

Para que una gráfica sea de intervalos tiene que satisfacer: que no contenga a C_4 como subgráfica inducida y que su complemento sea de comparabilidad.

Por hipótesis, G no contiene a C_4 como subgráfica inducida y por ser G de permutaciones tenemos G^c es de comparabilidad. Por lo tanto G es de intervalos.

APLICACION DE LAS GRAFICAS DE INTERVALOS

Las gráficas de intervalos son de las estructuras matemáticas más útiles para representar problemas del mundo real. La línea sobre la cual descansan los intervalos puede representar cualquier cosa que sea normalmente considerada como uni-dimensional.

Aplicación 1.

El problema de Benzer, como se estableció en la introducción de este capítulo, pregunta si los sub-elementos en los genes están ligados mediante un arreglo lineal. Para contestar esta pregunta, los datos fueron recopilados de genes mutantes. Para ciertos micro-organismos, una forma mutante puede suponerse que proviene de la forma estandar por alteración de algunas partes unidas de la estructura interna.

Por medio de experimentos puede determinarse si la parte mutante de dos genes mutantes se intersectan o no se intersectan. Se esperaría mostrar que las partes mutantes son lineales.

De una gran colección de genes mutantes se obtuvieron los pares de datos que se intersectan en la mutación y se consideró su gráfica de intersección G. ¿Son las intersecciones compatibles con la hipótesis de linealidad de sub-elementos en los genes? Equivalentemente, ¿es G una gráfica de intervalos? Una respuesta afirmativa no confirma la linealidad. Sin embargo, si los datos son correctos, una respuesta negativa refuta definitivamente la hipótesis. Benzer experimentó con los virus Phage T4; sus hallazgos fueron consistentes con la linealidad. Véase (8) y (9).

Aplicación 2.

Sea $C = \{C_i\}$ una colección de cursos que ofrece cierta Universidad. Sea T_i el intervalo de tiempo durante el cual -

el curso C_i puede ser impartido. Queremos asignar a cada salón de clase un curso de manera que dos cursos no sean impartidos en el mismo salón de clase a la misma hora.

Este problema puede ser resuelto coloreando propiamente los vértices de la gráfica G con $V(G) = C$ y,

$$C_i - C_j \in E(G) \text{ si y sólo si } T_i \cap T_j \neq \emptyset.$$

Cada color corresponde a un salón de clases. La gráfica G es, obviamente, una gráfica de intervalos, ya que es representada por intervalos de tiempo.

Aplicación 3.

Supóngase que C_1, C_2, \dots, C_n son componentes químicos, los cuales deben ser refrigerados bajo condiciones estrechamente vigiladas. Si el componente C_i debe mantenerse en una temperatura constante entre T_i y T'_i grados, ¿cuántos refrigeradores serán necesarios para conservar todos los componentes?

Sea G la gráfica de intervalos con vértices C_1, C_2, \dots, C_n y conectemos dos vértices si el intervalo de temperatura de sus componentes correspondientes se intersectan. Por la propiedad Helly (Propiedad Helly: una familia $\{T_i\} \ i \in I$ de subconjuntos de un conjunto T satisfacen la propiedad Helly si $J \subseteq I$ y si $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ para toda $i, j \in J$ entonces $\bigcap_{j \in J} T_j \neq \emptyset$), si $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_n}$ es un clan de G , entonces los intervalos $\{[T_{i_j}, T'_{i_j}] \mid j = 1, \dots, k\}$ tendrán un punto en común. Sea t tal punto. Un conjunto de refrigeradores a una temperatura t será necesario para conservarlos. Así, una solución al problema de minimización será obtenido encontrando un clan mínimo que cubra a G .

$$F_1 = \{ S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 \}$$

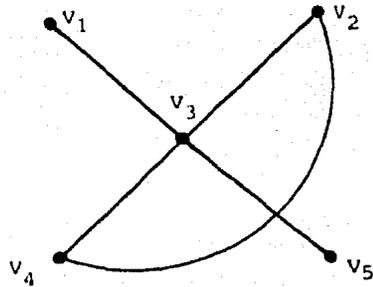
$$S_1 = \{ a \}$$

$$S_2 = \{ b, c, d \}$$

$$S_3 = \{ a, b, e, f \}$$

$$S_4 = \{ c, d, f \}$$

$$S_5 = \{ e, g, h \}$$



Gráfica G

Fig. 2.1- Gráfica de intersección

A cada conjunto S_i le asociamos el vértice V_i , $i=1,2,3,4,5$. V_i es adyacente a V_j , $i \neq j$, si y sólo si $S_i \cap S_j \neq \emptyset$.

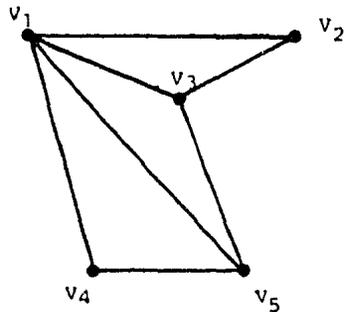
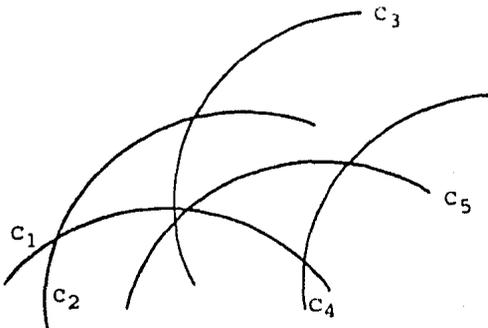
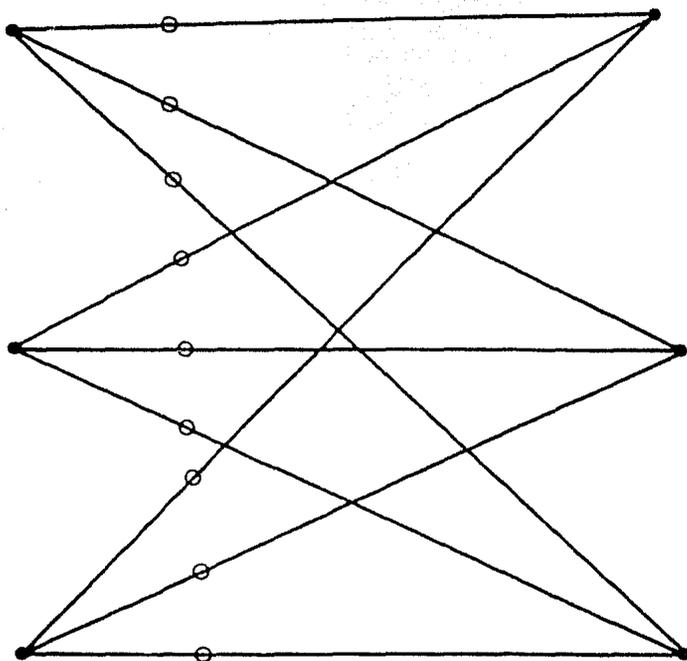


Fig. 2.2- Gráfica de intersección de una familia de curvas.

A cada curva C_i le hacemos corresponder el vértice V_i , $i=1,2,3,4,5$. Si dos curvas se intersectan, los vértices correspondientes serán adyacentes.



G

$$H = K_{3,3}$$

Fig. 2.3

Construcción de la gráfica G a partir de la gráfica H. Agregando un vértice en cada arista de H.

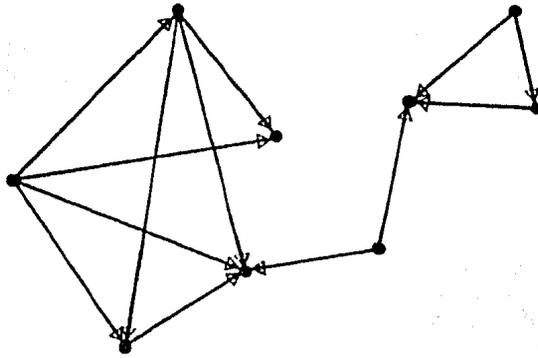


Fig. 2.4- Una gráfica transitivamente orientada.

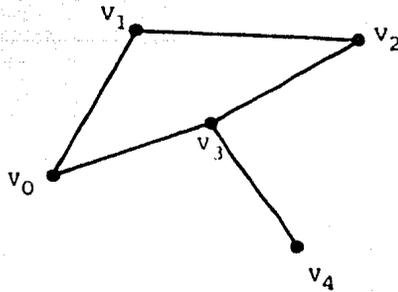


Fig. 2.5- Un camino en una gráfica.

La gráfica contiene al camino

$$v_0, v_0 - v_1, v_1, v_1 - v_2, v_2, v_2 - v_3, v_3, v_3 - v_4, v_4, v_4 - v_3$$

$$v_3, v_3 - v_0, v_0, v_0 - v_1, v_1, v_1 - v_0, v_0$$

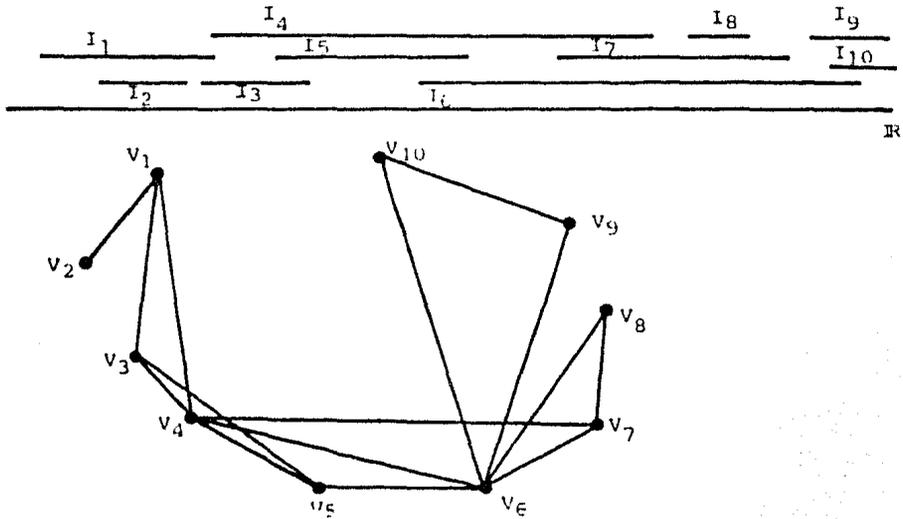


Fig. 2.6- Un diagrama de intervalos y su gráfica asociada.

A cada intervalo I_i le asociamos el vértice v_i , $i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$. Si dos intervalos se intersectan sus vértices correspondientes serán adyacentes.

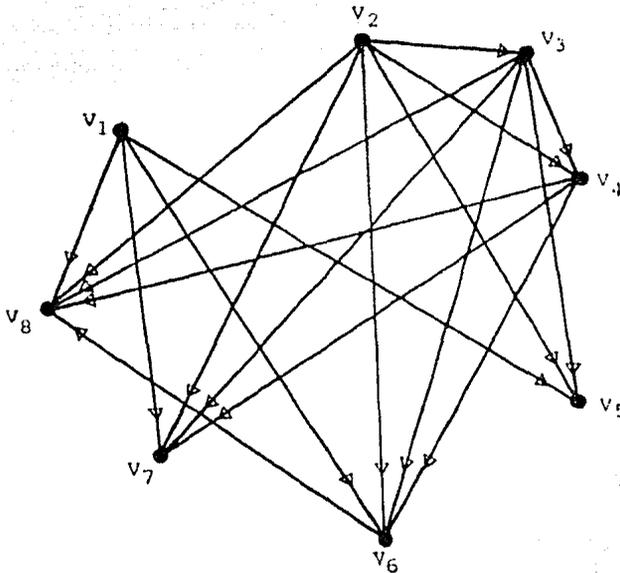
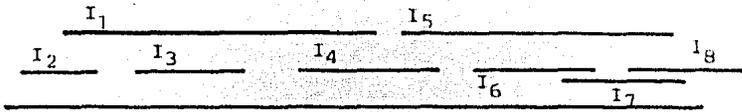


Fig. 2.7- Gráfica \vec{G}^C con la propiedad anidada, es decir, $\Gamma^+(u) \subseteq \Gamma^+(v)$ ó $\Gamma^+(v) \subseteq \Gamma^+(u)$ $u, v \in V(\vec{G}^C)$.

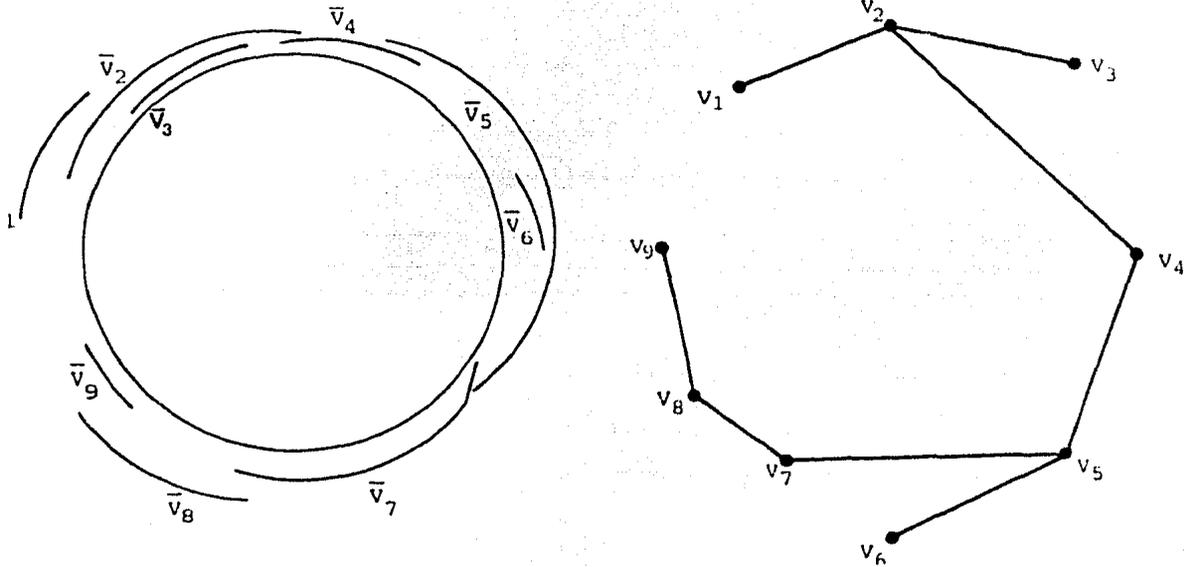


Fig. 2.8- Diagrama arco-circular y su Gráfica asociada.

A cada arco le asociamos un vértice y dos vértices son adyacentes si y sólo si los arcos correspondientes se intersectan.

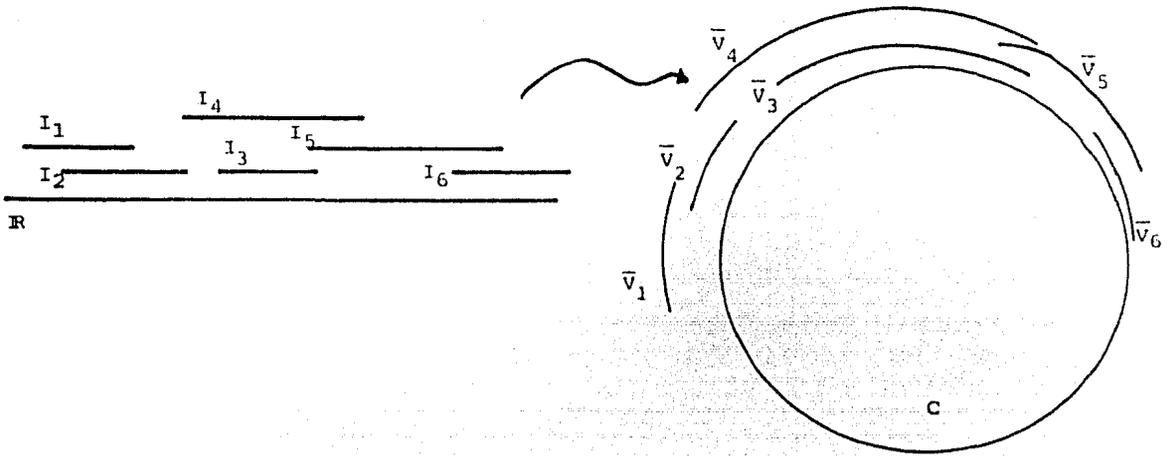


Fig. 2.9- Construcción del diagrama arco-circular a partir del diagrama de intervalos de una gráfica de intervalos G .

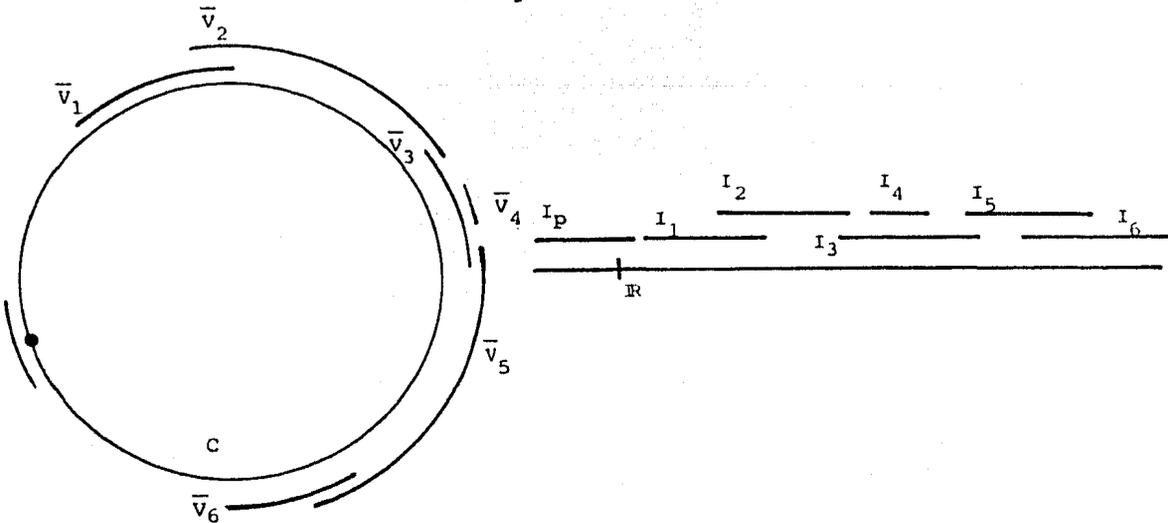


Fig. 2.10- Construcción del diagrama de intervalos a partir del diagrama arco-circular de una gráfica arco-circular.

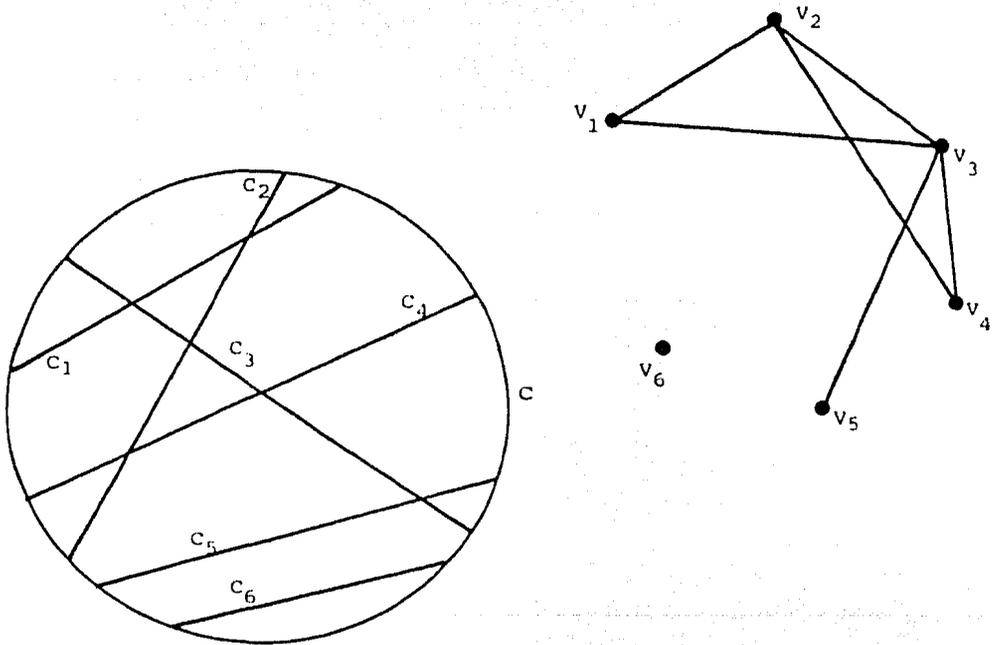


Fig. 2.11- Diagrama circular y su gráfica asociada.

A cada cuerda le hacemos corresponder un vértice y dos vértices son adyacentes si y sólo si las cuerdas correspondientes se intersectan.

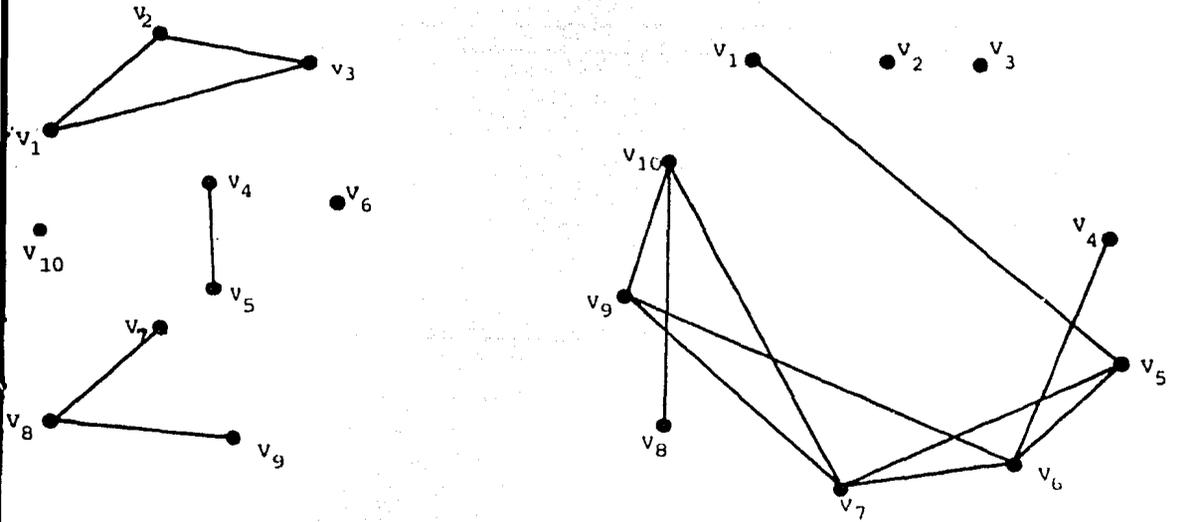
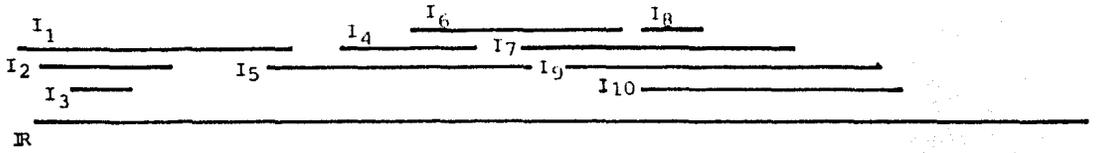


Fig. 2.12- Construcción de $G(C)$ y $G(E)$ a partir del diagrama de intervalos de una gráfica de intervalos G .

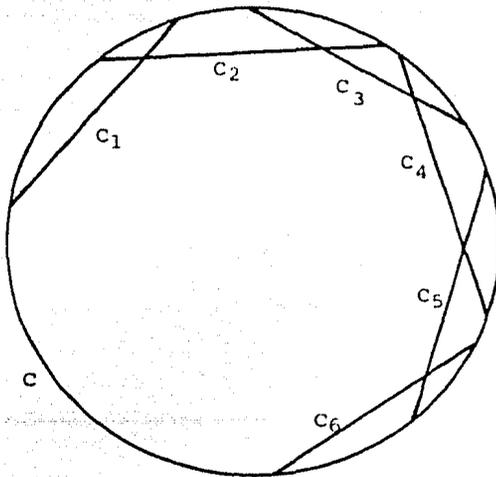
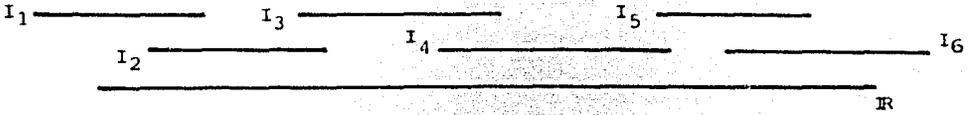
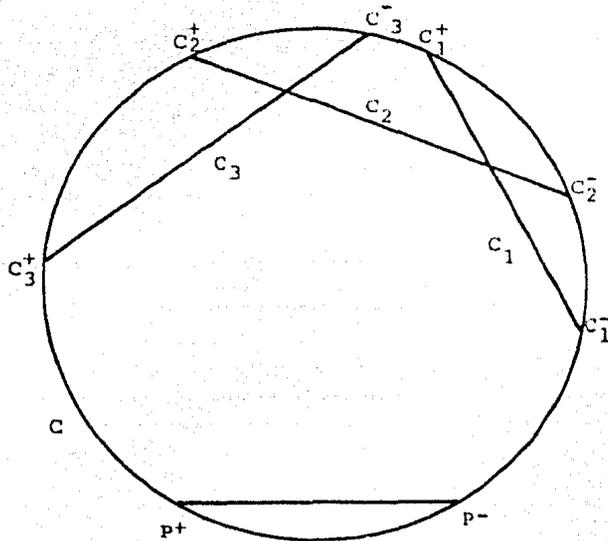


Fig. 2.13- Construcción del diagrama circular a partir del diagrama de intervalos de una gráfica de intervalos.

A \mathbb{R} le asociamos el círculo y a cada intervalo le asociamos una cuerda.



$$S_{p^-}(C) = \{p^-, c_1^-, c_2^-, c_1^+, c_3^-, c_2^+, c_3^+, p^+\}$$

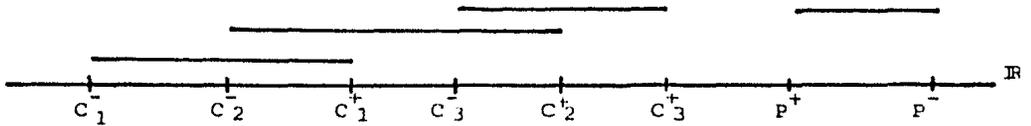


Fig. 2.14- Construcción del diagrama de intervalos a partir del diagrama circular de una gráfica circular con un vértice aislado y sin C-vértices.

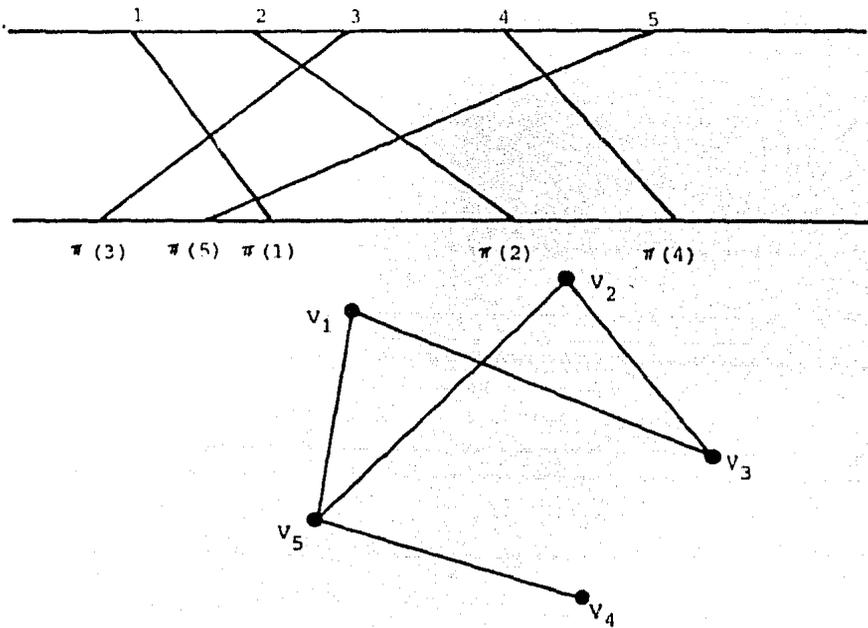


Fig. 2.15 Construcción de gráfica de permutación a partir de un diagrama de permutación .

A cada segmento le asociamos un vértice y dos vértices son adyacentes si los segmentos correspondientes se intersectan.

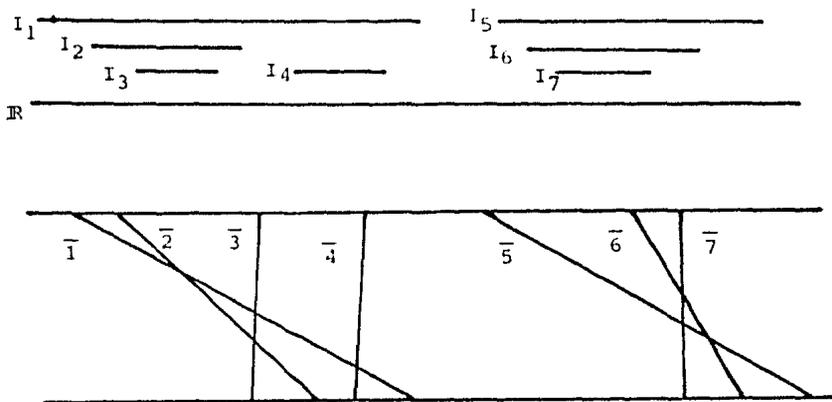


Fig. 2.16 Construcción del diagrama de permutación a partir del diagrama de intervalos de la C-gráfica de una gráfica de intervalos.

Capítulo 2: A - FAMILIAS DE GRAFICAS DE INTERVALOS QUE
SATISFACEN $NI(G) = K$ con $K \in \mathbb{N}$

El problema que motivó la realización de esta tesis es un problema que aparece en "Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs" Cap. 8, pág. 197: Sea I una colección de intervalos cuya gráfica de intersección es G , sea $NI(I)$ el número de diferentes tamaños de los intervalos de I . Definimos el Número de intervalos de G , denotado por $NI(G)$, como el $\min\{NI(I) \mid I \text{ es un diagrama de intervalos de } G\}$.

Para cuando $NI(G) = 1$ el problema está resuelto y la solución está dada por el siguiente teorema:

Teorema 3.1 (1)

$NI(G) = 1$ si y sólo si G no contiene a $K_{1,3}$ como subgráfica inducida.

Para conocer la demostración consulte obra citada arriba, cap. 8 pág. 187.

La finalidad de este trabajo fue buscar las características que poseen aquellas gráficas para las cuales $NI(G) = 2$. El problema no fue resuelto totalmente, sólo encontramos algunas familias no triviales de gráficas de intervalos para las cuales $NI(G) = K$. Para cualquier K en las naturales.

La primera familia que presentamos está formada por los árboles que son de intervalos.

Primeramente, introducimos la siguiente notación:

$|A|$ - Cardinalidad del conjunto A .

I_v - Intervalo asociado al vértice v .

$t(I_v)$ - Tamaño del intervalo I_v .

$D(G)$ - Diagrama de intervalos de la gráfica G .

$C(u)$ - Conjunto independiente máximo de u .

Proposición 3.2

Para todo árbol A de intervalos, $A \neq T_n$, $NI(A) = 2$.

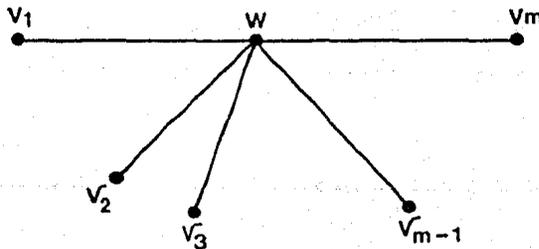
Demostración

Como $A \neq T_n$, existe al menos $u \in V(A)$ tal que u es adyacente al menos a 3 vértices. Por lo tanto $K_{1,3} \subset A$ y por tanto $NI(A) \neq 1$.

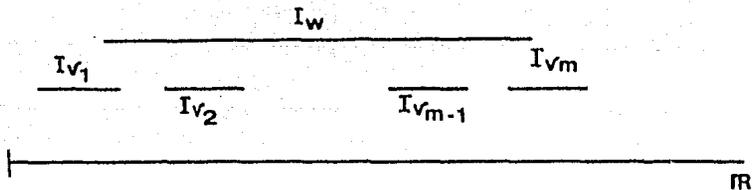
Veamos que $NI(A) = 2$, para ello:

Sea $B = \{ w \in V(A) \mid w \text{ es adyacente a 3 ó más vértices} \}$

Sea $w \in B$ tal que $|\Gamma(w)| = m$ con m máxima en B y sea $\Gamma(w) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$. El orden que tienen estos vértices corresponderá al orden que tendrán sus intervalos correspondientes en la recta real. Los vértices v_1 y v_m pueden o no ser adyacentes a otros vértices.



y su diagrama será de la forma



Necesariamente $I_{v_i} \subsetneq I_w$, para al menos $m-2$ vértices de

$\Gamma(w)$.

Los intervalos correspondientes a los vértices v_1 y v_m pueden o no estar contenidos en el intervalo correspondiente a I_w . Si $t(I_{v_i}) = t_1$, $i = 2, 3, \dots, m-1$, tenemos que

$t(I_w) > t_1$.

Hagamos $t(I_w) = t_2$. Por lo tanto $NI(A) \geq 2$.

Ahora, para todo $x \notin B$, sea $t(I_x) = t_1$

para todo $y \in B$, sea $t(I_y) = t_2$

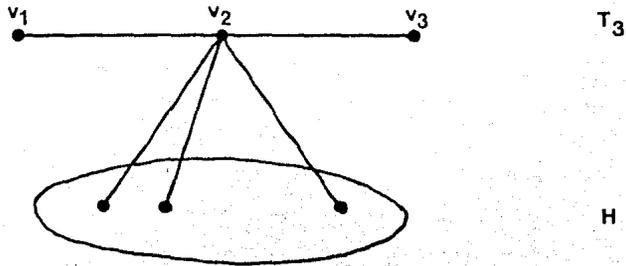
Por lo tanto $NI(A) = 2$

Nota:

Si tomamos $t_1 = 1$ entonces $t_2 = (m-2) + (m+1)\epsilon$, donde ϵ es la separación que existe entre dos intervalos que no se intersectan y que son contiguos y/o es la separación que existe entre el punto inicial y el punto final de dos intervalos que se traslapan.

Hay una segunda familia de gráficas de intervalos que satisfacen $NI(G) = 2$. La construimos de la siguiente manera:

Consideremos a T_3 y a H gráfica de intervalos con $NI(H) = 1$. Sea $V(T_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ con v_2 adyacente a v_i con $i \in \{1, 3\}$. Construyamos una nueva gráfica G , a partir de T_3 y de H , de la siguiente manera: Para todo $u \in H$ hagamos a u adyacente con v_2 ; pero no con v_1 ni v_3 .



Gráfica G

Una vez realizado la adyacencia antes indicada, se tiene que $I_u \not\subseteq I_{v_2}$ para todo $u \in H$, entonces $\bigcup_{u \in H} I_u \not\subseteq I_{v_2}$, de donde $t(I_{v_2}) > t(I_u)$ para todo $u \in H$. Por lo tanto, el mínimo número de tamaños diferentes para dibujar a $D(G)$ es igual a 2, es decir, $NI(G) = 2$.

Generalizamos, ahora, la construcción anterior.

Sean T_n , $n \geq 3$ y

$F = \{ H_i \text{ gráficas de intervalos} \mid NI(H_i) = 1; 2 \leq i \leq n-1 \}$.

Construimos la nueva gráfica G a partir de T_n y de la familia F como sigue:

Para todo $u \in H_i$ tal que $H_i \in F$, hacemos a u adyacente con $v_i \in T_n$, $2 \leq i \leq n-1$, pero no con v_j para toda $v_j \neq v_i$.

Una vez realizada la adyacencia antes indicada, se tiene que $I_u \not\subseteq I_{v_i}$, para todo $u \in H_i$ y $v_i \in T_n$, entonces

$\bigcup_{u \in H_i} I_u \not\subseteq I_{v_i}$, de donde $t(I_{v_i}) > t(I_u)$ con

$v_i \in T_n$ y $u \in H_i$, $2 \leq i \leq n-1$. Por lo tanto, $NI(G) \geq 2$. Para toda H_i teníamos que $NI(H_i) = 1$; a cada $v \in T_n$ hacemos $t(I_v) = t_2 > t_1$, donde $t_1 = t(I_u)$ con $u \in H_i$.

Por lo tanto, $NI(G) = 2$.

Así, hemos probado la siguiente proposición:

Proposición 3.3

Sean T_n , $n > 3$, y $F = \{ \text{Las gráficas de intervalos } H_i \mid NI(H_i) = 1, 2 \leq i \leq n-1 \}$. Si G es la gráfica que se obtiene al hacer que u sea adyacente a v_i , pero no a v_j para toda $j \neq i$, para toda $u \in H_i$ y $v_i \in T_n$, $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ entonces $NI(G) = 2$.

A continuación, presentamos dos familias de gráficas G que satisfacen $NI(G) = r$ para cualquier r natural.

Familia 1

Proposición 3.4

Sea $F = \{ G \text{ gráficas de intervalos} \mid |V(G)| = 3n + 1, n \in \mathbb{N} \}$.

Existe $H \in F$ tal que $NI(H) = n + 1$.

Demostración:

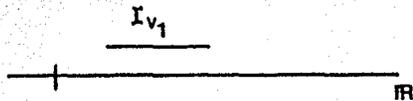
Para cada n exhibiremos la gráfica y su diagrama de intervalos.

Para $n = 0$

tenemos $|V(K)| = 1$. (K es, obviamente, la gráfica que consta de un solo vértice).



Gráfica K

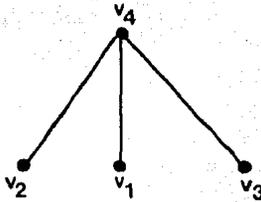


D(K)

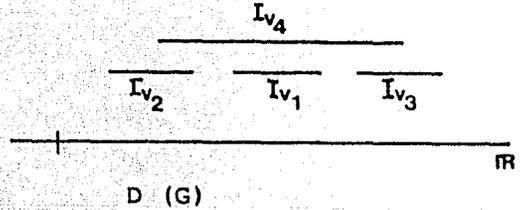
Por lo tanto $NI(K) = 1$

Para $n = 1$

tenemos $|V(G)| = 4$. (G es $K_{1,3}$).



Gráfica G



D(G)

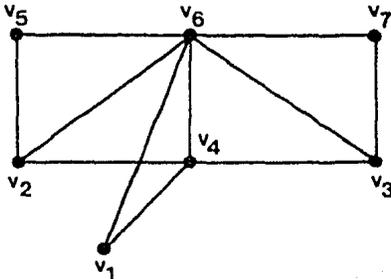
Por lo tanto $NI(G) = 2$

Para $n = 2$

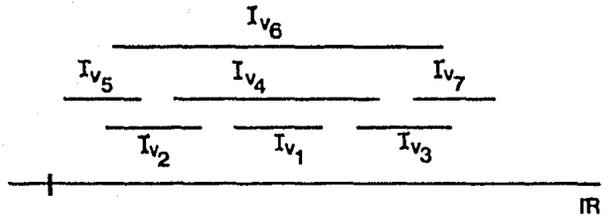
tenemos $|V(H)| = 7$

Construimos la gráfica H a partir de la gráfica G ($K_{1,3}$) de la siguiente manera: agregamos tres nuevos vértices v_5, v_6, v_7 .

Hacemos a v_5 adyacente a v_2 , a v_7 adyacente a v_3 y a v_6 adyacente a todos los vértices de G (v_1, v_2, v_3, v_4) y también adyacente a v_5 y a v_7 . Como $I_{v_1} \subsetneq I_{v_4} \subsetneq I_{v_6}$, necesariamente $NI(H) = 3$.



Gráfica H



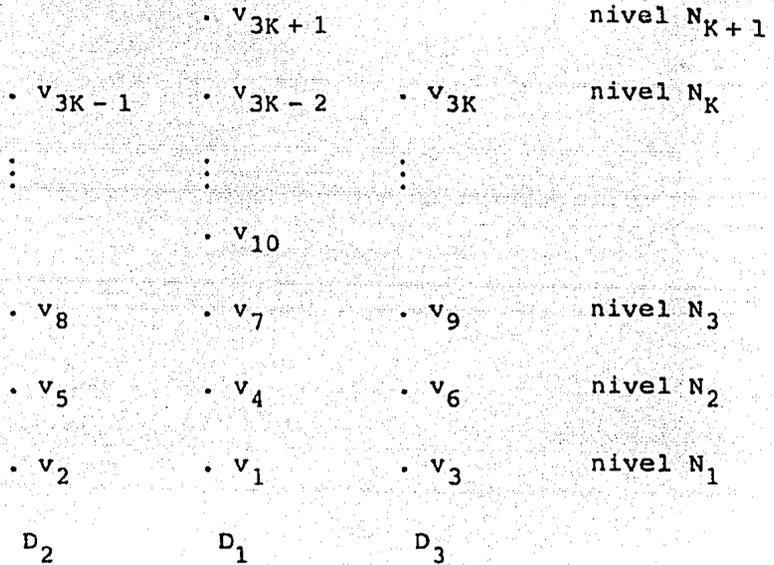
D(H)

Para completar la demostración, procederemos por inducción sobre n .

Para $n = K$

Supongamos que para $n = k$ existe $\bar{H} \in F$ que cumple:

$|V(\bar{H})| = 3K + 1$ y $NI(\bar{H}) = K + 1$. Se puede escoger \bar{H} con la siguiente estructura:



Dividimos a $V(\bar{H})$ en $K+1$ niveles y 3 "columnas". Es decir, que \bar{H} es tal que sus vértices pueden ser etiquetados de tal forma que $V(\bar{H}) = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, donde

$$D_1 = \{ v_i \in \bar{H} \mid i = 1 + 3n; n = 0, 1, \dots, K \}$$

$$D_2 = \{ v_i \in \bar{H} \mid i = 2 + 3n; n = 0, 1, \dots, K-1 \}$$

$$D_3 = \{ v_i \in \bar{H} \mid i = 3 + 3n; n = 0, 1, \dots, K-1 \}$$

Enseguida, describimos las adyacencias entre los vértices:

Para todo $u, v \in N_i$, u no es adyacente a v .

Para $u \in N_i \cap D_1$, u es adyacente a v para todo $v \in N_j$; $i > j$.

Para $u \in N_i \cap D_2$, u es adyacente a v para todo $v \in N_j \cap D_2$;
 $i > j$.

Para $u \in N_i \cap D_3$, u es adyacente a v para todo $v \in N_j \cap D_3$;
 $i > j$.

Para $n = K + 1$

Sea $V(H) = V(\bar{H}) \cup \{V_{3K+2}, V_{3K+3}, V_{3K+4}\}$. Claramente $V_{3K+2} \in D_2$, $V_{3K+3} \in D_3$ y $V_{3K+4} \in D_1$. Es claro que H tendrá $K+2$ niveles, es decir, a partir de \bar{H} hemos obtenido H agregando un nuevo nivel. Conservando las adyacencias descritas en el paso anterior sucede que $I_{V_{3K+1}} \not\subseteq I_{V_{3K+4}}$. Por lo tanto, $t(I_{V_{3K+4}}) > t(I_{V_{3K+1}})$. Por lo que $NI(H) = K+2$. Y de la construcción de H se observa que $|V(H)| = 3K+4 = 3(K+1) + 1$.

Familia 2

Definiciones:

Sea G gráfica de intervalos y sea $u \in V(G)$.

1.- Si existen $w, x \in \Gamma(u)$ y existen $x_1 \in \Gamma(x)$ y $w_1 \in \Gamma(w)$ y u no es adyacente a x_1 ni a w_1 entonces u se llamará F - vértice.

2.- Si $\Gamma(u)$ es una trayectoria, se llamará la trayectoria de u y se denotará por $T(u)$. Y a u se le llamará T - vértice.

Ahora, consideremos un conjunto independiente máximo A de $V(G)$ definido de la siguiente manera:

$A = \{u \in V(G) \mid u \text{ es a la vez F - vértice y T - vértice,}$

con $|T(u)| = N_i$ donde $N_0 = 5$ y $N_i = 2N_{i-1} + 3$ }

Lema 3.5

$$\text{Si } |T(u)| = N_i \text{ entonces } |C(u)| = \frac{N_i + 1}{2}$$

Demostración

La demostración se hará por inducción sobre i .

1) Para $i = 0$

$$|T(u)| = N_0 = 5 \text{ y claramente } |C(u)| = \frac{5 + 1}{2} = 3.$$

2) Supongamos que para $i = k$ la afirmación se cumple. Por lo tanto:

$$\text{si } |T(u)| = N_k \text{ sucede que } |C(u)| = \frac{N_k + 1}{2}$$

3) Demostremos que para $i = k + 1$ la afirmación es válida.

Hay que demostrar que si

$$|T(u)| = N_{k+1} \text{ entonces } |C(u)| = \frac{N_{k+1} + 1}{2}$$

$$\text{Sea } u \in V(G) \text{ con } |T(u)| = N_{k+1} \cdot N_{k+1} = 2N_k + 3$$

Supongamos un orden en los vértices de

$T(u) = \{v_1, v_2, \dots, v_{2N_k + 3}\}$; tomemos tres subtrayectorias

ajenas de $T(u)$; T^1 , T^2 y T^3 , tales que $T(u) = T^1 \cup T^2 \cup T^3$ y

$$T^1 = \{v_1, v_2, \dots, v_{N_k}\}$$

$$T^2 = \{v_{N_k+1}, v_{N_k+2}, v_{N_k+3}\}$$

$$T^3 = \{v_{N_k+4}, \dots, v_{2N_k+3}\}, \text{ notese que } |T^1| = |T^3| = N_k$$

y $|T^2| = 3$. Por hipótesis de inducción sabemos que

$$|C^1| = |C^3| = \frac{N_k + 1}{2} \text{ y además, es claro que } |C^2| = 2.$$

Por otro lado, es fácil verificar que

$$V_1, V_3, V_5, \dots, V_{N_K} \in T^1$$

$$V_{N_{K+2}} \in T^2 \quad \text{y}$$

$$V_{N_{K+4}}, V_{N_{K+6}}, \dots, V_{2N_{K+3}} \in T^3 \quad \text{forman } C(u); \text{ notese}$$

que $C^1, C^3 \subset C(u)$; es más, $C(u) = C^1 \cup C^2 \cup \{V_{N_{K+2}}\}$. Así,

$$\begin{aligned} \text{tenemos } |C(u)| &= \frac{N_K + 1}{2} + \frac{N_K + 1}{2} + 1 = N_K + 2 = \\ &= \frac{N_{K+1} - 3}{2} + 2 = \frac{N_{K+1} + 1}{2} \end{aligned}$$

Lema 3.6

Si $|T(u)| = N_i$ entonces $\frac{N_i - 3}{2} < t(u) < N_i$. Donde, los intervalos de los vértices correspondientes a $T(u)$ son unitarios.

Demostración

La demostración se hará por inducción sobre i .

1) Para $i = 0$

$$|T(u)| = N_0 = 5 \quad \text{y claramente } 1 < t(u) < 5$$

2) Supóngase que para $i = K$ se cumple la afirmación, es decir,

$$\text{si } |T(u)| = N_K \text{ entonces } \frac{N_K - 3}{2} < t(u) < N_K.$$

3) Demostremos que para $i = K + 1$ se cumple la afirmación.

$$\text{Hay que demostrar que } \frac{N_{K+1} - 3}{2} < t(u) < N_{K+1}$$

$$\text{si } |T(u)| = N_{K+1}.$$

$$\text{Sea } u \in V(G) \text{ tal que } |T(u)| = N_{K+1}.$$

Hagamos $T(u) = T^1 u T^2 u T^3$ con $|T^2| = 3$ y

$|T^1| = |T^3| = N_K$. Conectando las trayectorias T^1 con T^2 y T^2 con T^3 y aplicando la hipótesis de inducción tenemos

$$\text{que } \frac{N_K - 3}{2} + 3 + \frac{N_K - 3}{2} < t(u)$$

y por lo tanto $N_K < t(u)$ entonces $\frac{N_{K+1} - 3}{2} < t(u)$, ya que $N_{K+1} = 2N_K + 3$.

Por otro lado, $t(u) < N_K + 3 + N_K$ y así

$t(u) < 2N_K + 3$ y por lo tanto $t(u) < N_{K+1}$. Y por lo tanto $\frac{N_{K+1} - 3}{2} < t(u) < N_{K+1}$.

■

Lema 3.7

Si $|T(u)| = N_i$ y $|T(v)| = N_{i+1}$ entonces $t(u) < t(v)$.

Los intervalos correspondientes a los vértices de $T(u)$ y $T(v)$ son unitarios.

Demostración

Por el lema 3.6 concluimos que

$$\frac{N_i - 3}{2} < t(u) < N_i \quad \text{y} \quad \frac{N_{i+1} - 3}{2} < t(v) < N_{i+1}. \text{ Pero}$$

$N_{i+1} = 2N_i + 3$. Por lo tanto, $t(u) < t(v)$.

■

Definimos, para los elementos de A una relación \sim de la siguiente manera: Sean $u, v \in A$, decimos que

$$u \sim v \text{ si y sólo si } |T(u)| = |T(v)|$$

Claramente, esta relación es de equivalencia y, por lo tanto, induce en A una partición P .

Proposición 3.8

Sea G una gráfica de intervalos y sea P una partición en el conjunto $A \subset V(G)$, como se definió anteriormente, inducida por la relación \sim antes descrita. Hagamos las siguientes suposiciones sobre P :

- $|P| = r$
- Los elementos N_0, N_1, \dots, N_{r-1} de P son tales que si $u \in N_i$ entonces $|T(u)| = 2N_{i-1} + 3$
- Los intervalos correspondientes a los vértices de $T(u)$, para todo $u \in G$, y $u \notin A$, entonces $NI(G) \geq r + 1$.

Demostración

Sí u y v pertenecen a diferentes clases de equivalencias los tamaños de sus intervalos correspondientes serán diferentes. Como hay r clases de equivalencia, existirán r tamaños diferentes de intervalos. Sea $u \in A$, existe $x \in \Gamma(u)$ tal que $t(x) < t(u)$. Por lo tanto, $NI(G) \geq r + 1$. ■

Como se habra observado, hemos considerado familias muy particulares de gráficas de intervalos, es decir, hemos puesto restricciones solamente a las gráficas y no a sus diagramas correspondientes. Consideramos que si analizamos diagramas de intervalos con ciertas restricciones es factible obtener nueva información que puede ser de gran utilidad para solucionar satisfactoriamente el problema que atrajo nuestra atención. Los diagramas que analizamos son aquellos que tienen longitud mínima. Aunque no presentamos ningun resultado que relacione las familias de gráficas ya descritas con sus diagramas de longitud mínima, suponemos que al analizar las familias de gráficas de intervalos descritos a la luz de sus diagramas con longitud mínima puede obtenerse nuevo e interesante

sante información. La siguiente proposición nos proporciona la longitud mínima que puede tomar un diagrama de intervalos.

B - DIAGRAMAS DE INTERVALOS DE LONGITUD MINIMA

Hagamos las siguientes consideraciones:

a) Dos intervalos que no se intersecten y que sean consecutivos están separados una $\epsilon > 0$.

b) Si dos intervalos se intersectan no tendrán los mismos puntos finales.

c) La longitud mínima que puede tener un intervalo es 1.

(α_j, α'_j) denotará al intervalo $I(v_i)$, donde α_j (α'_j) es el punto inicial (final) del intervalo.

$\ell(D)$ denotará la longitud del diagrama de intervalos D.

Proposición 3.9

Sea G gráfica de intervalos cuyo diagrama satisface las consideraciones a), b) y c), sea D(G) tal que $\ell(D(G))$ es mínima, entonces

$$\ell(D(G)) = n + \epsilon \left[\sum_{i=1}^n |S'_i \cap H_i| + \sum_{j=1}^m (|H_j| + |S'_j|) - 1 \right]$$

donde S_i y S'_i se definen en forma recursiva de la siguiente manera:

$$S_0 = S'_0 = \phi$$

$$S_1 = \{\text{fuentes de } \vec{G}^c\}$$

$$S'_1 = \{\text{fuentes máximas de } S_1\}$$

$$S_2 = \{\text{fuentes de } \vec{G}^c - S'_1\}$$

$$S'_2 = \{\text{fuentes máximas de } S_2\}$$

En general:

$$S_i = \{\text{fuentes de } \vec{G}^C - S_{i-1}'\}$$

$$S_i' = \{\text{fuentes máximas de } S_i\}$$

$$\text{y sea } H_i = S_i - (S_{i-1} - S_{i-1}').$$

Sea $H_i = \{v_r, v_{r+1}, \dots, v_{r+s}\}$ y sea

$I(H_i) = \{I(v_r), \dots, I(v_{r+s})\}$, es decir, $I(H_i)$ es el conjunto de intervalos correspondientes a los vértices de H_i . Inducimos en los elementos de $I(H_i)$ un orden local, este orden será el inducido por el orden de la recta real, esto es, $I(v_i) < I(v_j)$ si y sólo si $\alpha_h < \alpha_k$ donde $I(v_i) = (\alpha_h, \alpha_h')$ y $I(v_j) = (\alpha_k, \alpha_k')$; por lo tanto, a $I(H_i)$ lo podemos simbolizar por $I(H_i) = \{I_0, I_1, \dots, I_s\}$, donde no necesariamente $I_i = I(v_i)$.

Demostración

La demostración la hacemos en 3 pasos:

- 1) Construcción de $D(G)$.
- 2) Obtención de $\ell(D(G))$
- 3) Demostración de que $\ell(D(G))$ es mínima

Como G es de intervalos tenemos que G^C es de comparabilidad. Sea \vec{G}^C una orientación transitiva de G^C .

1) Construcción de $D(G)$

Sean $i = 1$

$$S_0 = \phi$$

$$P_0 = -\varepsilon$$

$$S_0' = \phi$$

a) Sean $S_i = \{ \text{fuentes de } \vec{G}^C - S'_{i-1} \}$

$S'_i = \{ \text{fuentes máximas de } S_i \}$

$H_i = S_i - (S_{i-1} - S'_{i-1})$.

b) Localizamos, sobre \mathbb{R} , $|H_i|$ puntos a distancia una ϵ uno del otro, empezando una ϵ después del punto P_{i-1} .

c) Numeramos los puntos localizados de izquierda a derecha y en forma progresiva.

d) Sea $v_j \in S'_i$ y sea $I(v_j) = (\alpha_k, \alpha'_k)$. En este paso queremos asignar longitud a los intervalos correspondientes a las fuentes máximas; hay dos casos a considerar: caso d.1) si $v_j \in H_i$ y caso d.2) si $v_j \notin H_i$. Desarrollamos, a continuación, ambos casos.

d.1) Si $v_j \in H_i$ para alguna j , entonces $\ell(I(v_j)) = 1$. Por lo tanto, $\alpha'_k = \alpha_k + 1$.

d.1.1) Si $v_j \in S'_i - H_i$ entonces $\ell(I(v_j)) = \hat{\alpha}_k^j + \epsilon r$ y $\alpha'_k = \alpha_k + \hat{\alpha}_k^j + \epsilon r$; donde $\hat{\alpha}_k$ es la longitud acumulada del intervalo $I(v_j)$ hasta la iteración $i-1$ y r es el número de puntos localizados sobre \mathbb{R} después del punto P_{i-1} .

Si $\ell(I(v_j)) < 1$ hacemos $\ell(I(v_j)) = 1$; ya que, si $\ell(I(v_j)) < 1$ contradice la condición c).

Para los intervalos correspondientes a fuentes no máximas no conocemos, aún, su longitud. En esta iteración determinamos que longitud acumulan. Sea $v_k \in S_i - S'_i$ (v_k es fuente no máxima) y sea $I(v_k) = (\alpha_h, \alpha'_h)$.

d.1.2) Si $v_k \in H_i$ entonces $\hat{\alpha}_h^k = 1 + \epsilon |H_i \cap S_i'| - \epsilon h$.

d.1.3) Si $v_k \notin H_i$ entonces $\hat{\alpha}_h^k = \hat{\alpha}_h^k + 1 + \epsilon |H_i \cap S_i'|$.

Ahora, analizamos el caso d.2):

d.2) Si $v_j \notin H_i$ para toda j , entonces $\ell(I(v_j)) = \hat{\alpha}_k^j + \epsilon r$

y $\alpha_k' = \alpha_k + \hat{\alpha}_k^j + \epsilon r$. De nuevo, si $\ell(I(v_j)) < 1$ hacemos

$\ell(I(v_j)) = 1$.

Enseguida, determinamos que longitud acumulan los intervalos correspondientes a las fuentes no máximas. Sea $v_k \in S_i - S_i'$ (v_k es fuente no máxima) y sea $I(v_k) = (\alpha_h, \alpha_h')$.

d.2.1) Si $v_k \in H_i$ entonces $\hat{\alpha}_h^k = \epsilon (|H_i| + |S_i'|) - \epsilon h$.

d.2.2) Si $v_k \notin H_i$ entonces $\hat{\alpha}_h^k = \hat{\alpha}_h^k + \epsilon (|H_i| + |S_i'|)$.

e) Si $S_i' \cap H_i = \emptyset$ hacemos $P_i = P_{i-1} + \epsilon (|H_i| + |S_i'|)$,

de lo contrario $P_i = P_{i-1} + 1 + \epsilon |S_i' \cap H_i|$.

f) Si todos los vértices de G^{+c} han sido procesados fin, sino $i + i + 1$ y regresamos a a).

2) Obtención de $\ell(D)$

Cada vez que asignamos a $P_i = P_{i-1} + \epsilon (|H_i| + |S_i'|)$ aumentamos $\ell(D)$ en $\epsilon (|H_i| + |S_i'|)$.

Cada vez que asignamos a $P_i = P_{i-1} + 1 + \epsilon |S_i' \cap H_i|$ aumentamos $\ell(D)$ en $1 + \epsilon |S_i' \cap H_i|$.

Sea m las veces que hacemos

$$P_i = P_{i-1} + \varepsilon (|H_i| + |S_i|)$$

Sea n las veces que hacemos

$$P_i = P_{i-1} + 1 + \varepsilon |S_i \cap H_i|$$

$$\begin{aligned} \therefore \ell(D) &= \sum_{j=1}^m \varepsilon (|H_j| + |S_j|) + \\ &\quad \sum_{i=1}^n [1 + \varepsilon |S_i \cap H_i|] - \varepsilon \end{aligned}$$

$$\therefore \ell(D) = n + \varepsilon \left[\sum_{i=1}^n |S_i \cap H_i| + \sum_{j=1}^m (|H_j| + |S_j|) - 1 \right]$$

3) Demostración que $\ell(D)$ es mínima

Supongamos que del punto P_i hacia la derecha la longitud del diagrama es mínima. Veamos que la longitud del punto P_{i-1} al punto P_i es mínima, es decir, $P_i - P_{i-1}$ es mínima.

Hay dos situaciones a considerar:

$$1) P_i - P_{i-1} < 1$$

En este caso, $P_i - P_{i-1} = \varepsilon r$; donde, nuevamente r es el número de puntos localizados sobre \mathbb{R} una ε después del punto P_{i-1} hasta el punto P_i ; separados una ε . Por lo tanto, εr es mínima.

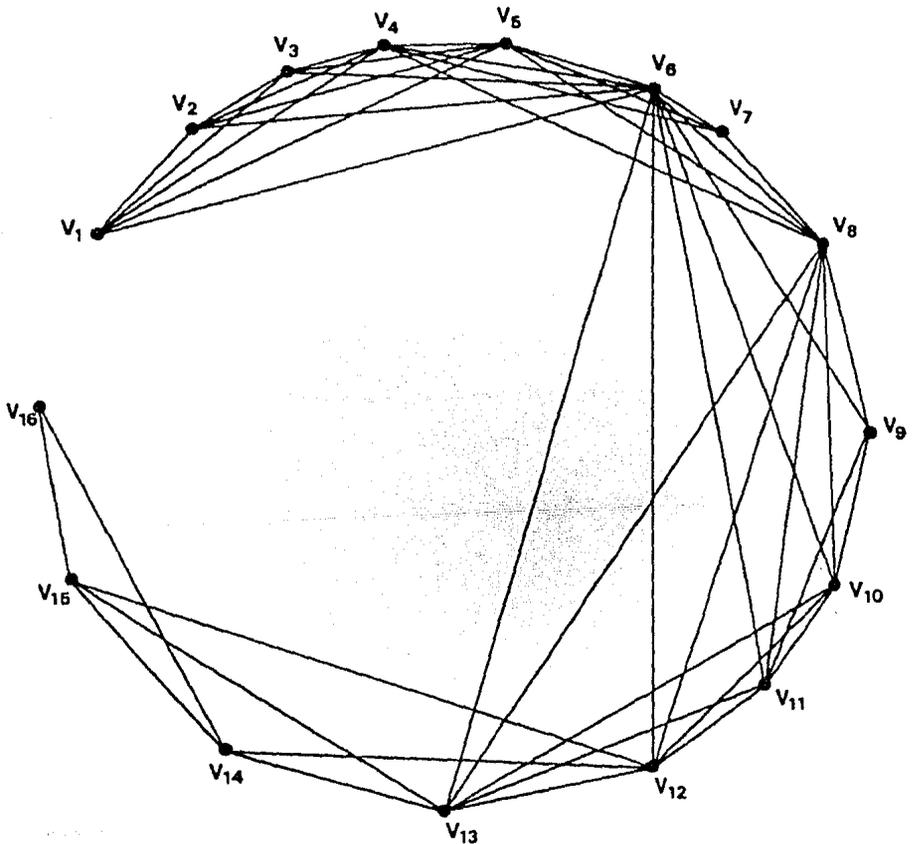
$$2) P_i - P_{i-1} > 1$$

Esto significa que existe al menos un intervalo de longitud uno entre los puntos P_{i-1} y P_i ; el número de intervalos que cumplen lo anterior está dado por $|H_i \cap S_i|$. Por lo tanto, $P_i - P_{i-1} = 1 + \varepsilon (|H_i \cap S_i|)$ y claramente esta longitud es mí

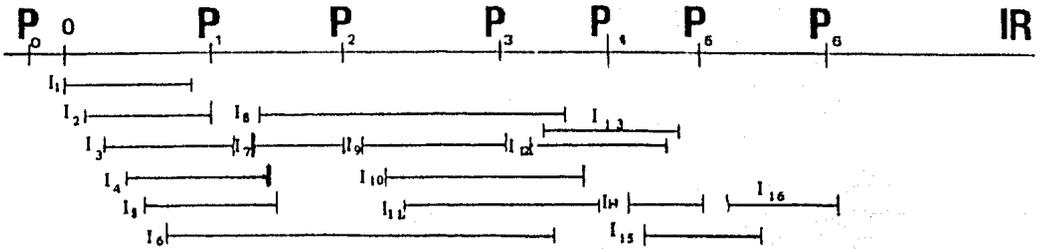
nima.

En consecuencia, la longitud del diagrama del punto $P_i - 1$ hacia la derecha es mínima.

Ilustramos con un ejemplo la proposición anterior. Consideremos la siguiente gráfica G:

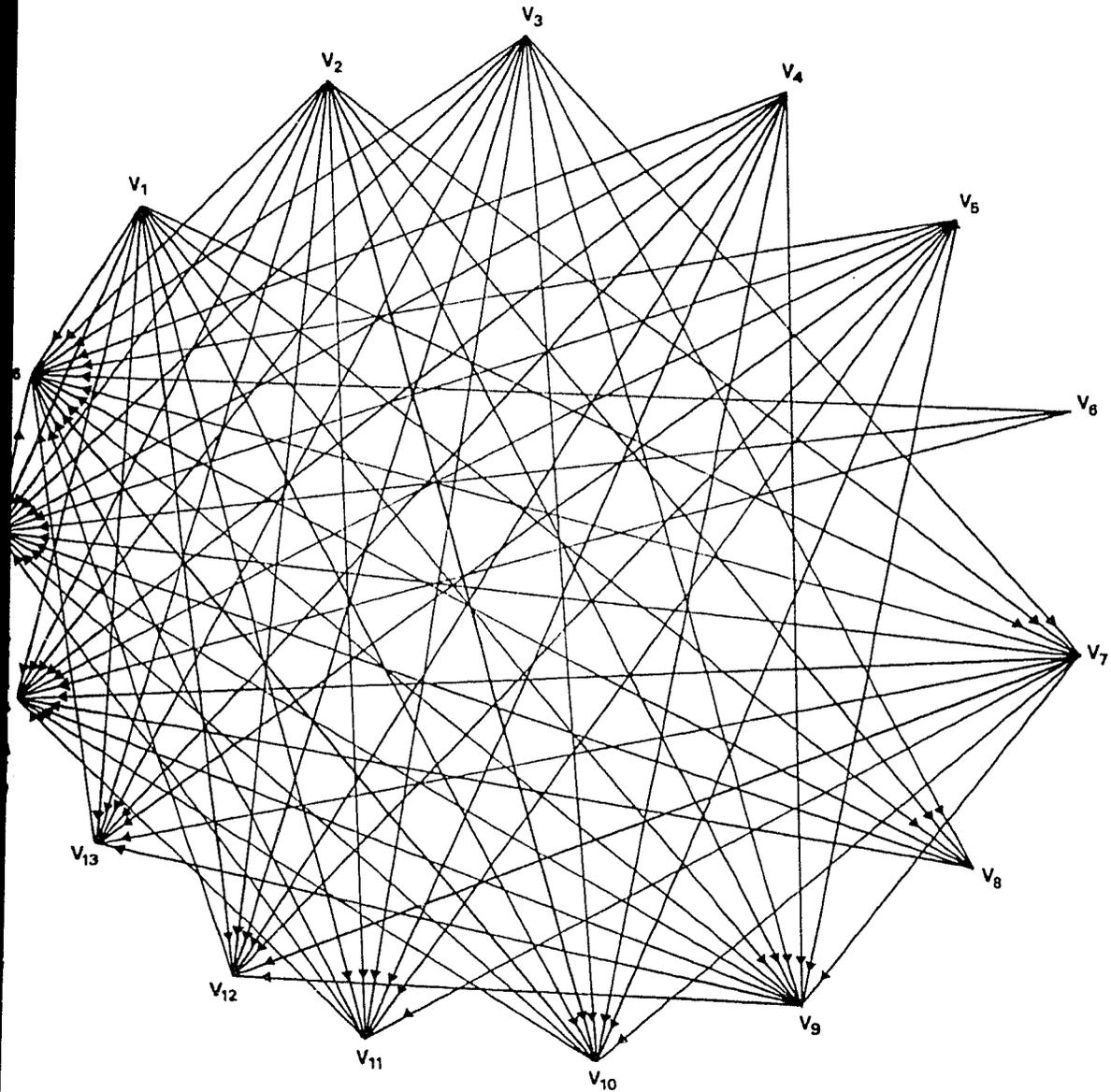


Su diagrama de intervalos de longitud mínima es:



Con $\ell(D(G)) = 5 + 12\epsilon$.

El complemento orientado \vec{G}^c de G se presenta a continuación:



Complemento orientado \vec{G}^c de G .

1) Construcción de D (G)

Iteración 1

$$P_0 = -\epsilon$$

$$S_0 = S'_0 = \phi$$

a) $S_1 = \{\text{fuentes de } \vec{G}^c\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

$$S'_1 = \{\text{fuentes máximas de } S_1\} = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$H_1 = S_1 - (S_0 - S'_0) = S_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

$$I(H_1) = \{I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5\} \text{ donde}$$

$$I_{i-1} = I(v_i); i = 1, 2, \dots, 6.$$

b) Localizamos y numeramos, sobre \mathbb{R} , $|H_1| = 6$ puntos a distancia una ϵ uno del otro, empezando una ϵ después del punto P_0 .

d) Sean $I(v_1) = (\alpha_1, \alpha'_1)$, $I(v_2) = (\alpha_2, \alpha'_2)$,

$$I(v_3) = (\alpha_3, \alpha'_3), I(v_4) = (\alpha_4, \alpha'_4),$$

$$I(v_5) = (\alpha_5, \alpha'_5), I(v_6) = (\alpha_6, \alpha'_6).$$

d.1) Ya que $v_1, v_2, v_3 \in S'_1$ y $v_1, v_2, v_3 \in H_1$ entonces

$$\ell(I(v_1)) = \ell(I(v_2)) = \ell(I(v_3)) = 1 \quad y$$

$$\alpha'_1 = \alpha_1 + 1 = 1$$

$$\alpha'_2 = \alpha_2 + 1 = 1 + \epsilon$$

$$\alpha'_3 = \alpha_3 + 1 = 1 + 2\epsilon$$

d.1.2) Como $v_4, v_5, v_6 \in S_1 - S'_1$ y $v_4, v_5, v_6 \in H_1$ hacemos

$$\alpha_3^4 = 1 + \epsilon |H_1 \cap S'_1| - 3\epsilon = 1 + 3\epsilon - 3\epsilon = 1$$

$$\alpha_4^5 = 1 + \epsilon |H_1 \cap S'_1| - 4\epsilon = 1 + 3\epsilon - 4\epsilon = 1 - \epsilon$$

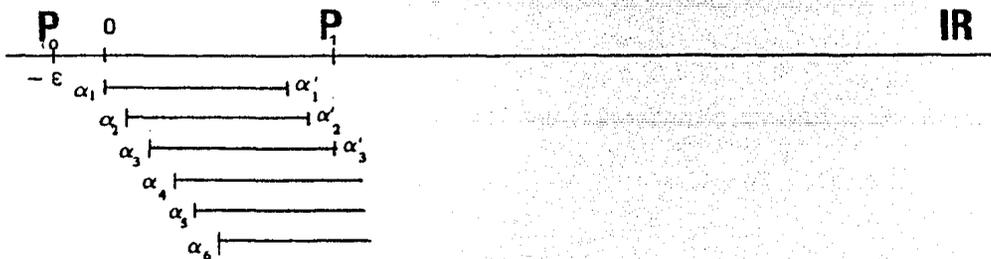
$$\alpha_5^6 = 1 + \epsilon |H_1 \cap S'_1| - 5\epsilon = 1 + 3\epsilon - 5\epsilon = 1 - 2\epsilon.$$

Obsérvese que $I_3 = I(v_4)$, $I_4 = I(v_5)$, $I_5 = I(v_6)$ y reetiquetamos de la siguiente manera: $I_3 = (\alpha_3^4, \alpha_3^4)$,

$I_4 = (\alpha_4^5, \alpha_4^5)$, $I_5 = (\alpha_5^6, \alpha_5^6)$; esta etiquetación es local.

e) $S'_1 \cap H_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$; por lo que

$$P_1 = P_0 + 1 + \epsilon |S'_1 \cap H_1| = 1 + 2\epsilon.$$



Iteración 2

a) $S_2 = \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$

$$S'_2 = \{v_4, v_5, v_7\}$$

$$H_2 = \{v_7, v_8\}$$

b) Localizamos y numeramos, sobre \mathbb{R} , $|H_2| = 2$ puntos a distancia una ϵ uno del otro, empezando una ϵ después

del punto P_1 .

$I(H_2) = \{I_0, I_1\}$ donde $I_0 = I(v_7)$, $I_1 = I(v_8)$.

d) Sean $I(v_7) = (\alpha_7, \alpha_7')$, $I(v_8) = (\alpha_8, \alpha_8')$.

d.1) $v_7 \in S_2'$ y $v_7 \in H_2$, entonces $\ell(I(v_7)) = 1$ y

$$\alpha_7' = \alpha_7 + 1 = 2 + 3\varepsilon$$

d.1.1) $v_4, v_5 \in S_2' - H_2$ entonces

$$\ell(I(v_4)) = \alpha_3^4 + 2\varepsilon = 1 + 2\varepsilon$$

$$\ell(I(v_5)) = \alpha_4^5 + 3\varepsilon = 1 + 2\varepsilon \quad y$$

$$\alpha_4' = 1 + 5\varepsilon$$

$$\alpha_5' = 1 + 6\varepsilon$$

d.1.2) Como $v_8 \in S_2 - S_2'$ y $v_8 \in H_2$ hacemos

$$\alpha_1^8 = 1 + \varepsilon |H_2 \cap S_2'| - \varepsilon$$

$$\alpha_1^8 = 1.$$

De nuevo, $I_1 = I(v_8) = (\alpha_1^8, \alpha_1'^8)$; esta nueva etiquetación es local.

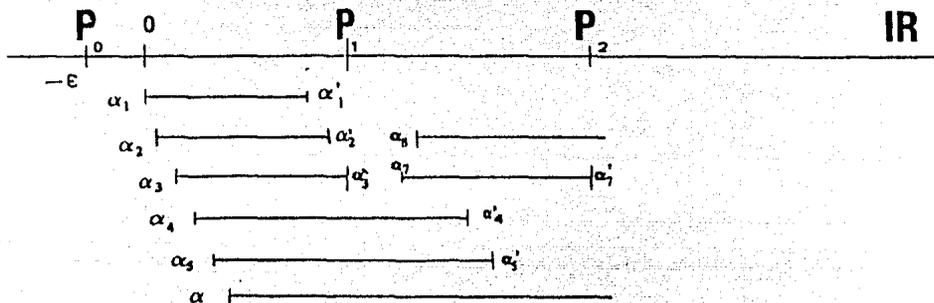
d.1.3) Como $v_6 \in S_2 - S_2'$ y $v_6 \notin H_2$ hacemos

$$\alpha_5^6 + \alpha_5^6 + 1 + \varepsilon |H_2 \cap S_2'| = 2 - \varepsilon, \text{ en consecuencia}$$

$$\alpha_5^6 = 2 - \varepsilon.$$

e) $S_2' \cap H_2 = \{v_7\}$; por lo que

$$P_2 = P_1 + 1 + \epsilon |H_2 \cap S_2'| = 2 + 3\epsilon.$$



Iteración 3

a) $S_3 = \{v_6, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}$

$$S_3' = \{v_9\}$$

$$H_3 = \{v_9, v_{10}, v_{11}\}$$

b) Localizamos y numeramos, sobre \mathbb{R} , $|H_3| = 3$ puntos a distancia una ϵ uno del otro, empezando una ϵ después del punto P_2 .

d) Sean $I(v_9) = (\alpha_9, \alpha'_9)$, $I(v_{10}) = (\alpha_{10}, \alpha'_{10})$,

$$I(v_{11}) = (\alpha_{11}, \alpha'_{11})$$

d.1) Puesto que $v_9 \in S_3'$ y $v_9 \in H_3$ entonces

$$\ell(I(v_9)) = 1 \text{ y así } \alpha'_9 = 3 + 4\epsilon.$$

d.1.2) Como $v_{10}, v_{11} \in S_3 - S_3'$ y $v_{10}, v_{11} \in H_3$ hacemos

$$\alpha_1^{10} = 1 + \epsilon |H_3 \cap S_3'| - \epsilon = 1$$

$$\alpha_2^{11} = 1 + \epsilon |H_3 \cap S_3'| - 2\epsilon = 1 - \epsilon.$$

Nótese que $I_1 = I(v_{10}) = (\alpha_1, \alpha_1')$, $I_2 = I(v_{11}) = (\alpha_2, \alpha_2')$ con $I_1, I_2 \in I(H_3)$.

d.1.3) Como $v_6, v_8 \in S_3 - S_3'$ y $v_6, v_8 \notin H_3$ hacemos

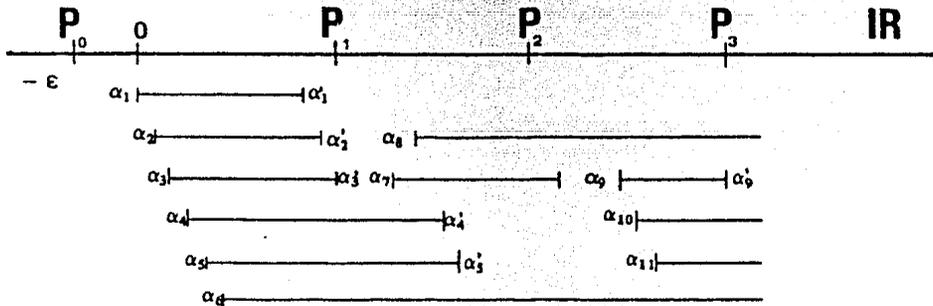
$$\hat{\alpha}_5^6 + \hat{\alpha}_5^6 + 1 + \epsilon |H_3 \cap S_3'| \quad y$$

$$\hat{\alpha}_1^8 + \hat{\alpha}_1^8 + 1 + \epsilon |H_3 \cap S_3'| \quad \text{así, } \alpha_5^6 = 3 \quad y$$

$$\hat{\alpha}_1^8 = 2 + \epsilon.$$

e) $S_3' \cap H_3 = \{v_9\}$; por lo que

$$P_3 = P_2 + 1 + \epsilon |H_3 \cap S_3'| = 3 + 4\epsilon$$



Iteración 4

a) $S_4 = \{v_6, v_8, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}\}$

$$S_4' = \{v_6, v_8, v_{10}, v_{11}\}$$

$$H_4 = \{v_{12}, v_{13}\}$$

b) Localizamos y numeramos, sobre \mathbb{R} , $|H_4| = 2$ puntos a distancia una ϵ uno del otro, empezando una ϵ después

del punto P_3 .

d) Sean $I(v_{12}) = (\alpha_{12}, \alpha'_{12})$, $I(v_{13}) = (\alpha_{13}, \alpha'_{13})$.

d.2) Como $v_6, v_8, v_{10}, v_{11} \in S'_4$ y

$v_6, v_8, v_{10}, v_{11} \notin H_4$ entonces

$$\ell(I(v_6)) = \alpha_5^6 + \epsilon r = 3 + 2\epsilon$$

$$\ell(I(v_8)) = \alpha_1^8 + \epsilon r = 2 + \epsilon + 3\epsilon = 2 + 4\epsilon$$

$$\ell(I(v_{10})) = \alpha_1^{10} + \epsilon r = 1 + 4\epsilon = 1 + 4\epsilon$$

$$\ell(I(v_{11})) = \alpha_2^{11} + \epsilon r = 1 - \epsilon + 5\epsilon = 1 + 4\epsilon$$

$$\text{Por lo tanto, } \alpha'_6 = \alpha_6 + 3 + 2\epsilon = 3 + 7\epsilon$$

$$\alpha'_8 = \alpha_8 + 2 + 4\epsilon = 3 + 8\epsilon$$

$$\alpha'_{10} = \alpha_{10} + 1 + 4\epsilon = 3 + 9\epsilon$$

$$\alpha'_{11} = \alpha_{11} + 1 + 4\epsilon = 3 + 10\epsilon$$

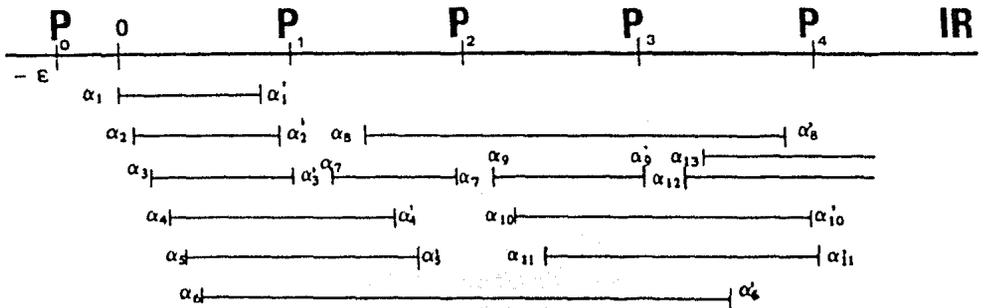
d.2.1) Como $v_{12}, v_{13} \in S_4 - S'_4$ y $v_{12}, v_{13} \in H_4$ entonces

$$\alpha_0^{12} = \epsilon(|H_4| + |S'_4|) = 6\epsilon$$

$$\alpha_1^{13} = \epsilon(|H_4| + |S'_4|) - \epsilon = \epsilon(2 + 4) - \epsilon = 5\epsilon$$

e) $S'_4 \cap H_4 = \phi$; por lo que

$$P_4 = P_3 + \epsilon(|H_4| + |S'_4|) = 3 + 10\epsilon$$



Iteración 5

a) $S_5 = \{v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$

$S'_5 = \{v_{12}, v_{13}, v_{15}\}$

$H_5 = \{v_{14}, v_{15}\}$

b) Localizamos y numeramos, sobre \mathbb{R} , $|H_5| = 2$ puntos a distancia una ϵ uno del otro, empezando una ϵ después del punto P_4 .

d) Sean $I(v_{14}) = (\alpha_{15}, \alpha'_{15})$, $I(v_{15}) = (\alpha_{14}, \alpha'_{14})$

d.1) Como $v_{15} \in S'_5$ y $v_{15} \in H_5$ entonces

$\ell(I(v_{15})) = 1$, por lo tanto,

$\alpha'_{14} = \alpha_{14} + 1 = 4 + 11\epsilon$

d.1.1) Como $v_{12}, v_{13} \in S'_5$ y $v_{12}, v_{13} \notin H_5$ entonces

$\ell(I(v_{12})) = \alpha_{12} + \epsilon r = 6\epsilon + 2\epsilon = 8\epsilon$

$\ell(I(v_{13})) = \alpha_{13} + \epsilon r = 5\epsilon + 3\epsilon = 8\epsilon$ y como am-

bas longitudes son menores que 1 hacemos

$\ell(I(v_{12})) = \ell(I(v_{13})) = 1$.

Por lo tanto, $\alpha'_{12} = \alpha_{12} + 1 = 4 + 5\epsilon$

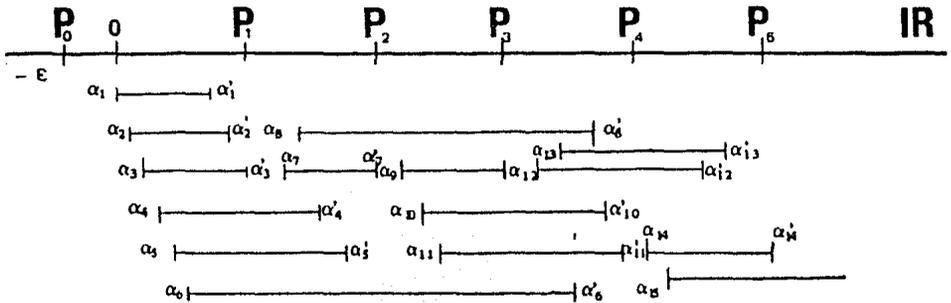
$$\alpha'_{13} = \alpha_{13} + 1 = 4 + 6\epsilon$$

d.1.2) Como $v_{14} \in S_5 - S'_5$ y $v_{14} \in H_5$ entonces

$$\hat{\alpha}_1^{14} = 1 + \epsilon |H_5 \cap S'_5| - \epsilon = 1.$$

e) $S'_5 \cap H_5 = \{v_{15}\}$; por lo que

$$P_5 = P_4 + 1 + \epsilon |S'_5 \cap H_5| = 4 + 11\epsilon.$$



Iteración 6

a) $S_6 = \{v_{14}, v_{16}\}$

$$S'_6 = \{v_{14}, v_{16}\}$$

$$H_6 = \{v_{16}\}$$

b) Localizamos y numeramos, sobre \mathbb{R} , $|H_6| = 1$ punto a distancia una ϵ del punto P_5 .

d) Sea $I(v_{16}) = (\alpha_{16}, \alpha'_{16})$

d.1) Como $v_{16} \in S'_6$ y $v_{16} \in H_6$ entonces $\ell(I(v_{16})) = 1$

por lo que $\alpha'_{16} = \alpha_{16} + 1 = 5 + 12\epsilon$

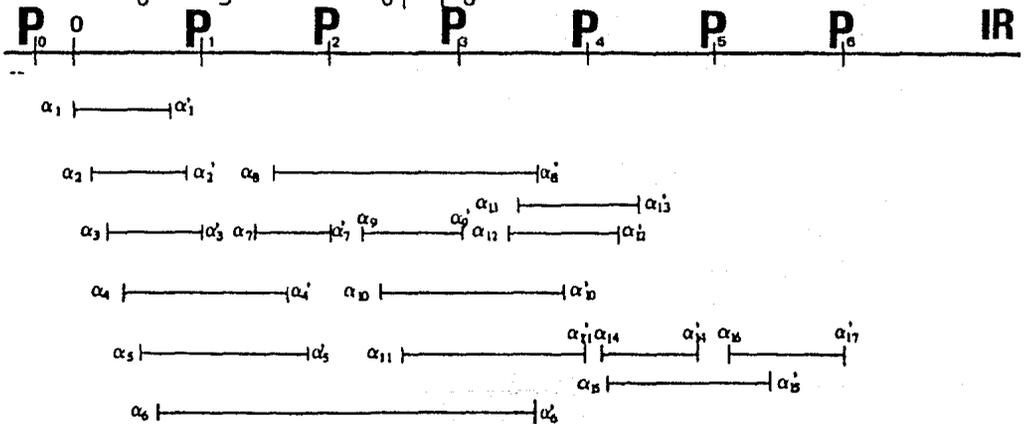
d.1.1) Como $v_{14} \in S'_6$ y $v_{14} \notin H_6$ entonces

$$\ell(I(v_{14})) = \hat{\alpha}_1^{14} + \epsilon r = 1 + \epsilon, \text{ así}$$

$$\alpha'_{15} = \alpha_{15} + 1 + \epsilon = 5 + 12\epsilon.$$

e) $S'_6 \cap H_6 = \{v_{16}\}$; por lo que

$$P_6 = P_5 + 1 + |S'_6 \cap H_6| = 5 + 12\epsilon.$$



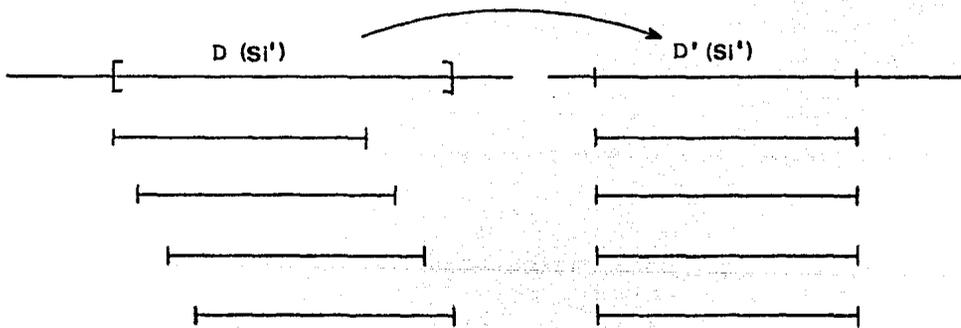
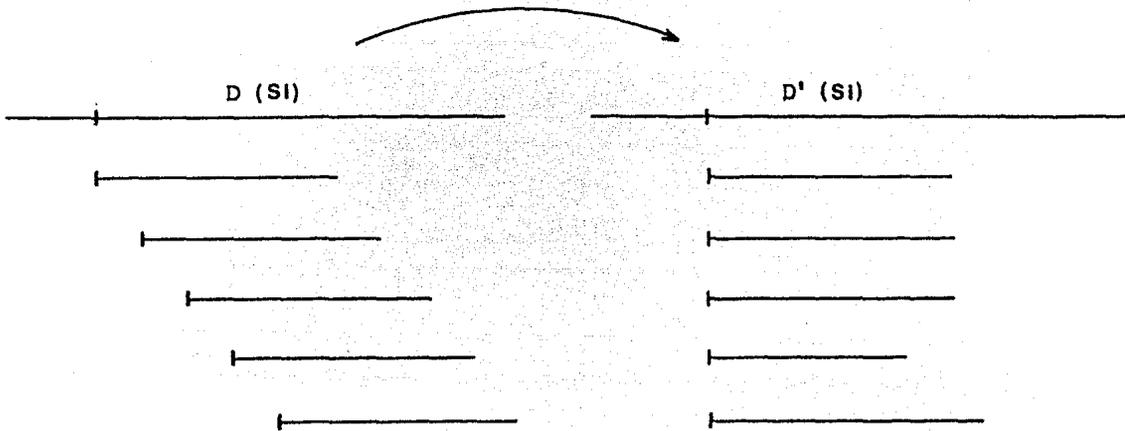
La longitud del diagrama es $5 + 12\epsilon$.

Abordamos el problema anterior pero con las consideraciones siguientes:

- 1) Longitud mínima de los intervalos es 1.
- 2) Dos intervalos que no se intersecten y que estén consecutivos estarán separados con una ϵ .
- 3) Dos intervalos que se intersecten pueden tener el mismo punto final y mismo punto inicial.

¿Cuál será $\ell(D(G))$?

Veamos en que se transforman $D(S'_i)$ y $D(S_i)$.



El paso d) del problema anterior se convierte en:

d') Sea $v_j \in S'_i$ y sea $I(v_j) = (\alpha_k, \alpha'_k)$

d'.1) Si $v_j \in H_i$ para alguna j , entonces

$$\ell(I(v_j)) = 1.$$

y por lo tanto $\alpha'_k = \alpha_k + 1$.

d.1.1) Si $v_j \in S_i' - H_i$ entonces $\ell(I(v_j)) = \hat{\alpha}_k^j$.

Si $\ell(I(v_j)) < 1$ entonces $\ell(I(v_j)) = 1 + \epsilon$.

Sea $v_k \in S_i' - S_i'$ (v_k es fuente no máxima) y sea

$$I(v_k) = (\alpha_h, \alpha_h').$$

d'.1.2) Si $v_k \in H_i$ entonces $\alpha_h^k = 1 + \epsilon$

d'.1.3) Si $v_k \notin H_i$ entonces $\hat{\alpha}_h^k + \hat{\alpha}_h^k + 1 + \epsilon$.

d'.2) Si $v_j \notin H_i$ para toda j entonces $\ell(I(v_j)) = \hat{\alpha}_k^h$ y

$$\alpha_k' = \alpha_k + \hat{\alpha}_k^h. \text{ Si } \ell(I(v_j)) < 1 \text{ entonces}$$

$$\ell(I(v_j)) = 1.$$

Sea $v_k \in S_i' - S_i'$ (v_k es fuente no máxima) y sea

$$I(v_k) = (\alpha_h, \alpha_h').$$

d'.2.1) Si $v_k \in H_i$ entonces $\hat{\alpha}_h^k = \epsilon$.

d'.2.2) Si $v_k \notin H_i$ entonces $\hat{\alpha}_h^k + \hat{\alpha}_h^k + \epsilon$.

El paso e) se convierte en:

e') Si $S_i' \cap H_i = \emptyset$ hacemos

$$e'.1) P_i = P_{i-1} + \epsilon$$

de lo contrario

$$e'.2) P_i = P_{i-1} + 1 + \epsilon.$$

Si todos los vértices de G^{+c} han sido procesados fin, sino $i + i + 1$ continuar.

La $\ell(D(G))$ será:

Cada vez que sucede $e'.1)$ aumentamos $\ell(D)$ en ϵ .

Cada vez que sucede $e'.2)$ aumentamos $\ell(D)$ en $1 + \epsilon$

Sea m las veces que sucede $e'.1)$

Sea n las veces que sucede $e'.2)$

$$\ell(D(G)) = m\epsilon + n(1 + \epsilon) - \epsilon = n + \epsilon(m + n - 1)$$

$$\underline{\underline{\ell(D(G)) = n + \epsilon(m + n - 1)}}$$

C - CONCLUSIONES

Como se manifestó al principio de éste capítulo, el problema a resolver fue hallar las características que poseen aquellas gráficas de intervalos cuyo diagrama de intervalos correspondiente necesita de dos y sólo dos tamaños diferentes para poder dibujar sus intervalos.

Primeramente, tratamos de resolver dicho problema analizando casos particulares, es decir, analizamos gráficas que satisfacen $NI(G) = 2$. Y a partir del análisis de estas gráficas tratamos de inferir las condiciones necesarias y suficientes para que $NI(G) = 2$.

Las condiciones que se desprendieron del estudio de estas gráficas son:

- 1) Si $V(G) = V_1 \cup V_2$ tal que para todo $v \in V_1$, $|C(v)| \leq 2$ y para todo $u \in V_2$, $|C(u)| \geq 3$ entonces $NI(G) \geq 2$.
- 2) Si existe $A \subset V(G)$, donde $A = \{u \in V(G) \mid u \text{ es } F\text{-vértice y } |C(u)| \geq 3\}$ entonces $NI(G) = r$, $r \in \mathbb{N}$.

Es fácil verificar que estas condiciones son suficientes, más no necesarias, es decir, si G es gráfica de intervalos y satisface, por ejemplo, la condición 1), podemos afirmar que $NI(G) = 2$, sin embargo, si G cumple $NI(G) \geq 2$, no podemos afirmar que G satisface necesariamente la condición 1).

Al no encontrar las condiciones necesarias y suficientes para que una gráfica G de intervalos cumpla con $NI(G) = 2$, nos avocamos a la tarea de encontrar familias de gráficas de intervalos para las cuales las condiciones halladas fueran necesarias y suficientes.

Así, encontramos que para los árboles que son de intervalos y la familia de gráficas descritas en la proposición 3.3 pág. 43 la condición 1) es necesaria y suficiente.

Si en la condición 2) permitimos que los F -vértices se "aniden", la condición será necesaria y suficiente para la familia contemplada en la proposición 3.4 pág. 44.

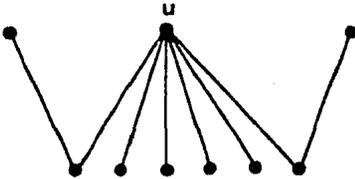
Al restringir la familia descrita en la proposición 3.8 pág. 49 y al cambiar ligeramente la condición 2), se observa que la condición es necesaria y suficiente para dicha familia.

Creemos que para encontrar las condiciones necesarias y suficientes para que una gráfica G satisfaga $NI(G) = 2$, es conveniente estudiar los tamaños mínimos y máximos que puede tomar un intervalo. Por ejemplo:

1) Si u es a la vez F-vértice y T-vértice entonces

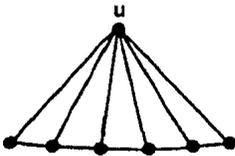
$$\frac{|T(u)| - 3}{2} < t(u) < |T(u)|$$

2) Si u es de la forma



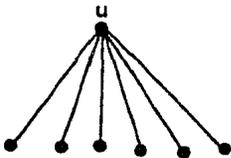
entonces $|C(u)| - 2 < t(u) < \infty$

3) Si u es de la forma



entonces $\frac{|T(u)| - 3}{2} < t(u) < \infty$

4) Si u es de la forma



entonces $|C(u)| - 2 < t(u) < \infty$

Obsérvese, que los vértices descritos son vértices muy especiales. Para vértices más generales hay mucho por hacer.

B I B L I O G R A F I A

- 1.- Hajös G., Über eine Art von Graphen, Intern. Math. Nachr. 11, problem 65.
- 2.- Gilmore P. C. y Hoffman A. J., A Characterization of comparability graphs and of interval graphs. Canadian J., Math., 16, 1964, pp. 539-548.
- 3.- Urrutia, G. J., Intersection graphs of some families of plane curves. Tesis doctoral. University of -- Waterloo.
- 4.- Lekkerkerker, C. G. y Boland, J. Ch., Representation of a finite graphs by a set of intervals on the real line. Fund. Math. 51, 45-64. Mr. 25 No.2596.
- 5.- Fulkerson D. R. y Gross, O. A. Incidence Matrices with the consecutive 1's property. Bull. Amer. Math. Soc. 70, 681-684, Mr. 32 No.7444.
- 6.- Marczewski, E. Sur deux propriétés des classes -- d'ensembles. Fund Math. 33, 303-307.
- 7.- Golumbic, M. Ch. Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs, pp. 188, Edit. Academic Press, 1980.
- 8.- Benzer, S. On the topologic of the genetic fine -- structure. Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., 45, --- 1607-1620.
- 9.- Roberts, F. S. Discrete Mathematical Models with Applications to Social, Biological and Environmental Problems. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1976.
- 10.- Pnueli, Amir, Lempel, Abraham y Even Shimon. Transitive orientation of graphs and identification of permutation graphs. Canad. J. Math. 23, 160-175, MR45-- No. 1800, 1971.

B I B L I O G R A F I A A D I C I O N A L

- 1.- Gavril, Fanica, Algorithms on circular-arc graphs, Networks 4, 357 - 369. MR 51 # 12614. 1974.
- 2.- Tucker, Alan C., Characterizing circular-arc graphs, Bull, Amer. Math. Soc. 76, 1257 - 1260. MR 43 # 1877. 1970.
- 3.- Leuker, G.S., Interval graphs algorithms, Ph. D. Thesis, Princeton Univ. 1975.
- 4.- Even, Shimon, Pnueli, Amir y Lempel, Abraham., Permutation graphs and transitive graphs. J. Assoc. Comput. Mach. 19, 400 - 410. MR 47 # 1675. 1972.
- 5.- Golumbic, Martin Charles, Comparability graphs and a new matroid, J. Combin. Theory, B - 22, 68 - 96. MR 55 # 12575. 1977.
- 6.- Gill, M. K. y Acharya, B. D., A New characterization of permutation graphs. (No - publicado).
- 7.- Even, Shimon e Itai, Alon, Queues, Stacks and graphs in theory of machines and computations, pp. 71 - 86. Academic Press, New York.
- 8.- Fournier, Jean Claude, Une caractérisation des graphes de cordes, CR. Acad. Sci. Paris 286 A, 811 - 813. 1978.