UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL ESTADO ACTUAL DE LAS COMPARACIONES MULTIPLES DE MEDIAS.

T E S I S

Que para obtener el Título de

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a

DELFINO VARGAS CHANES

México, D. F. 1983

Resumen

El própósito del presente trabajo es presentar el estado actual de las comparaciones múltiples de medias. En él se han recopilado trabajos importantes que se han publicado hasta 1982. El interés que se persigue, es dotar al interesado, de una compilación actualizada de las pruebas de comparaciones múltiples de medias.

La presentación de cada prueba estadística se ha hecho de manera intuitiva a fin de ser accesible a otros profesionistas con interés en esta área. Cada prueba consta de un ejemplo numérico y de tablas adecuadas en un apéndice, al final.*

En el capítulo I se exponen las pruebas de comparaciones múltiples que constituyen el punto de partida en este tipo de pruebas simultáneas; en éste se incluyen la prueba de Fisher, conocida como diferencia mínima significativa (DMS), Tukey - conocida como diferencia mínima significativa honesta (DMSH), SNK - propuesta por Student, Newman y Kenus,

---

* *Algunas pruebas no contienen ejemplos numéricos ni tablas, porque la prueba estadística en cuestión todavía no ha sido completamente desarrollada.*

INDICE

Pág.

CAPITULO IV

Pág.

INTRODUCCIÓN

Los primeros trabajos hechos de manera muy general, fueron los de Irwin, J.O. (1925) y Student (1927); el primero de estos -Irwin- se basó en algunos trabajos de F. Galton y K. Pearson, sobre la distribución de las distancias entre la observación máxima y su antecesora; el segundo de ellos, Student, usando los resultados de K. Pearson y L.H.C. Trippett sobre rangos normales, propuso el rango como criterio para rechazar y repetir observaciones en análisis rutinarios.

R.A. Fisher en 1935 propuso usar pruebas de t individuales, seguidas de un análisis de varianza para seleccionar aquellos efectos que provocan una significancia estadística; esta idea después fue conocida como la prueba de la DMS (diferencia mínima significativa). En 1939 D. Newman formuló la primera prueba de rangos múltiples para el problema de análisis de varianza, utilizando fundamentalmente las ideas de Student.

Estos trabajos constituyeron la base del estudio de las comparaciones múltiples. Sin embargo, ninguna de estas ideas estaban completamente desarrolladas; los fundamentos de las comparaciones múltiples quedaron establecidas por Duncan, Sheffè y Tukey, entre 1947 y 1955. D.B. Duncan estudió y de-

Scheffè, Duncan y Bonferroni. En el capítulo II se han incluido las pruebas que comparan varios tratamientos experimentales contra un tratamiento control; el trabajo inicial en este tipo de comparaciones múltiples, fue elaborado por Duncan (1955) y posteriormente se modificó para casos desbalanceados; se incluyen otras pruebas que cubren el mismo objetivo: comprar simultáneamente varios tratamientos contra un control.

Las pruebas de comparaciones múltiples propuestas hasta la década de los cincuentas se han incluido en el capítulo I; sin embargo, estas pruebas resultaron poco robustas para diseños desbalanceados, con heterocedosticidad o con correlación entre las medias de los efectos. Este tipo de pruebas se han incluido en el capítulo III, que en esencia son modificaciones a las pruebas de Tukey, Scheffè y Duncan.

En el capítulo IV, se han agrupado una miscelanea de pruebas de comparaciones multiples de medias. En éste se incluyen pruebas para diseños con datos faltantes, con uno y dos criterios de clasificación, con efectos fijos y aleatorios, para diseños de bloques completamente al azar y para el análisis de covarianza, pruebas que usan rangos y otra que usa técnicas de análisis de conglomerados.

sarrolló el uso de pruebas de rangos múltiples, aunque éstas fueron pensadas para hacer pruebas de significancia y no para intervalos de confianza. J.W. Tukey introdujo el uso de las pruebas sobre diferencia de varianzas y se considera que él incorporó el uso de las pruebas de comparaciones múltiples en la práctica estadística cotidiana. H. Scheffè, investigó la relación entre las comparaciones múltiples y las hipótesis lineales generales, proporcionando una interpretación de los intervalos simultáneos de confianza a las pruebas de análisis de varianza.

Los trabajos importantes más recientes han sido elaborados por Miller (1966), Seeger (1968), Kurtz et. al. (1965) y Duncan (1965).

1. ¿Qué son las Comparaciones Múltiples?

Supongamos que X es una variable aleatoria con una distribución normal de media μ y varianza σ^2

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

si

$$X_1 \sim N(\mu_1, 1) \qquad X_2 \sim N(\mu_2, 1)$$

$$X_1,\ X_2 \ \text{v.a.i.d.}$$

podemos pustular la hipótesis nula

$$Ho : \mu_1 = 0, \mu_2 = 0 \qquad \ldots (1)$$

pero pudimos haber postulado

$$Ho_1 : \mu_1 = 0$$

$$Ho_2 ; \mu_2 = 0 \qquad \ldots (2)$$

por separado.

El probar de manera simultánea $\mu_1=0$ y $\mu_2=0$; concierne resolverlo a la filosofía de las comparaciones múltiples. Probar la hipótesis (2) por separado es sólo una de las posibles formas para probar Ho. y no concierne a las comparaciones múltiples, resolverlo.

Otra forma de comparar μ_1 y μ_2 es

H_1 : $\mu_1=0$ $\mu_2=0$

H_2 : $\mu_1=0$ $\mu_2>0$

H_3 : $\mu_1=0$ $\mu_2<0$

H_4 : $\mu_1=0$ $\mu_2<0$

H_5 : $\mu_1>0$ $\mu_2>0$

H_6 : $\mu_1>0$ $\mu_2<0$

H_7 : $\mu_1<0$ $\mu_2<0$

H_8 : $\mu_1<0$ $\mu_2>0$

H_9 : $\mu_1>0$ $\mu_2=0$

Cuando se hacen varias comparaciones de manera simultánea, no es suficiente con rechazar la hipótesis nula para dar una conclusión, sino que debe encontrarse cuáles medias producen el rechazo de la hipótesis global.

Si el investigador está interesado en cuantificar el tamaño del efecto no nulo, entonces son necesarias las pruebas de significancia o los intervalos de confianza.

2. Consideraciones sobre la Operación de las Comparaciones Múltiples.

En la mayoría de los casos, es necesario realizar un análisis de varianza para encontrar la significancia de las medias. Una vez realizado este proceso debe observarse si el interés del problema es meramente exploratorio en cuyo caso las comparaciones múltiples son lo indicado. Por otro lado es necesario determinar si se desea una prueba de significancia ó un intervalo de confianza; las pruebas de significancia son utiles cuando deseamos comparar μ_1 y μ_2 en cualesquiera de las opciones antes indicadas -una situación distinta sucede, cuando una de las poblaciones a comparar es un control-; los intervalos de confianza son útiles para encontrar, dada una probabilidad, en qué región se ubican simultáneamente los parámetros μ_1 y μ_2. Otro factor que debe tenerse en cuenta es saber qué comparaciones realizar y cuándo realizarlas. Hay situaciones experimentales en las que se desea elegir ciertos contrastes de interés previamente a la realización del experimento, o bien sugerir hipótesis a la luz de los datos, en el primero de estos casos suele probarse cada comparación por separado, mientras que en el segundo caso se utilizan los métodos de las comparaciones múltiples. El uso práctico de las técnicas comparaciones múltiples, consiste en dar ciertos límites al efecto previamente elegido más que ofrecer una solución exacta. En seguida se ejemplifica el modo de operación de una prueba de comparaciones múltiples sencillas, la DMS (dif. min. sign.) de Fisher.

Ejemplo 1.

Supóngase que se tienen 5 tratamientos, A, B, C, D, E; en un diseño completamente al azar con 6 repeticiones. Las medias de los tratamientos son:

A	B	C	D	E
55.16	60.16	72.83	70.5	64.16

para el ejemplo la tabla de análisis de varianza tiene como cuadrado medio del error 4.51, con 25 grados de libertad y la F calculada es 70.31, en este caso $F^{.05}_{4,25} = 2.76$, $F_c > F^{.05}_{4,25}$ por lo tanto hay evidencia significativa de que las medias de los tratamientos son distintas. Sin embargo, la prueba de F en el análisis de varianza indica solamente que existen diferencias en las medias de los tratamientos, pero nos dice muy poco en dónde residen tales diferencias; es decir, cuáles medias son las que producen la significancia estadística.

Los métodos de las comparaciones múltiples se diseñaron para examinar un conjunto de medias y encontrar cuáles medias producen el rechazo de la hipótesis nula (i.e. Ho : las medias son iguales).

Antes de introducirnos en métodos de comparaciones múltiples más elaborados, comenzaremos con dos métodos muy sencillos, aprovechando el ejemplo 1, más adelante los enunciaremos a detalle.

Una vez que la F resulta significativa, después de un análisis de varianza, todas las diferencias por parejas de tratamientos se pueden comparar. El procedimiento consiste en encontrar la diferencia mínima significativa (D.M.S.), usando la t-Student, para el caso balanceado tendremos

$$DMS = t^{\alpha}_{gl_{error}} \sqrt{\frac{2}{r}\, CME}\,,$$

donde r es el número de repeticiones de los tratamientos y CME es el cuadrado medio del error. En el ejemplo cada tratamiento tiene 6 repeticiones y el CME es 4.51, entonces con una t al 5% con 25 grados de libertad es

$$DMS = 1.708 \sqrt{\frac{2}{6}\,(4.51)} = 2.09 \qquad \ldots (3)$$

ahora comparamos esta cantidad con las diferencias de los pares de medias; aquellas diferencias de medias mayores que

2.09 indicarón posibles diferencias reales.

Sin embargo debemos hacer 10 comparaciones de pares de medias y seguramente que algunas diferencias serán falsas positivas (i.e. declarar dos medias de tratamientos distintas, cuando en realidad son iguales). Un procedimiento alternativo es usar el nivel de significancia entre el número de comparaciones, en nuestro caso 5 por ciento/10 = .5 por ciento, en lugar del 5 por ciento. Entonces tendremos

$$\text{DMS} = 2.787 \sqrt{\frac{2}{6} \ (4.51)} = 3.42 \qquad \ldots (4)$$

en lugar de (3) cuando se realizan las comparaciones de dos tratamientos significativamente diferentes.

Este procedimiento básicamente fue el sugerido por Fisher en 1935, excepto que él sugiere hacer m comparaciones de interés antes de ver los resultados, con un 5l m por ciento de significancia. Sin embargo, se puede encontrar que la prueba de F global sea significativa, pero ninguna de las pruebas de t, para diferencias por parejas, sea significativa [Miller (1966), pág. 91] .

Una explicación y desarrollo más detallado se encuentra en el interior de este trabajo, por el momento sólo se hara el planteamiento de manera superficial.

Supongamos ahora que no tenemos interés en todas las comparaciones entre 5 tratamientos del ejemplo 1, sino en aquellas medias más altas. O bien podemos elegir las medias más bajas u otras combinaciones de interés; para cada objetivo se utilizan técnicas distintas.

3. Nota Preliminar.

Las pruebas de comparaciones múltiples tienen fundamentalmente fines exploratorios; sin embargo algunos investigadores estarán interesados en hacer comparaciones por parejas de medias y otros estarán interesados en ciertas comparaciones específicas entre las medias. En el primer caso generalmente no existe un conocimiento específico sobre qué medias comparar; en el segundo caso existe de antemano una idea estructurada de qué medias comparar. Para esta última situaciones es recomendable usar contrastes para comparar las medias de los tratamientos de interés. (Ostle: 1981, pág. 293). En primer lugar nos referiremos a los contrastes porque muchas de las comparaciones múltiples usan contrastes.

Definición 1.

Se llama constraste a una combinación lineal de las medias τ_i de los tratamientos

$$\Psi = \sum_{i=1}^{p} C_i \tau_i$$

tal que

$$\sum_{i=1}^{P} C_i = 0$$

La estimación de Ψ está dada por

$$\hat{\Psi} = \sum_{i=1}^{P} C_i \overline{y}_{i.} \qquad \overline{y}_{i.} = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij},$$

si el modelo es completamente al azar con P tratamientos, se tendrá

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad \begin{cases} i=1,\ 2,\ldots,p \\ j=1,\ 2,\ldots,n_i \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0,\sigma^2) \qquad \text{independientes}$$

y además si $\overline{Y}_{i.} = \sum_j Y_{ij}/n_i$

$$\overline{Y}_{i.} \sim N(\mu+\tau_i,\ \sigma^2/n_i) \text{ con } \overline{y}_{i.} = \frac{1}{n_{ij}} \cdot \sum_j y_{ij}$$

de donde

$$E(\overline{Y}_{i.}) = \mu + \tau_i$$

$$\sum_{i=1}^{p} C_i E(\overline{Y}_{i.}) = \sum_{i=1}^{p} C_i(\mu+\tau_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} C_i\mu + \sum_{i=1}^{p} C_i\tau_i$$

$$= \mu\sum_{i=1}^{p} C_i + \sum_{i=1}^{p} C_i\tau_i$$

una propiedad deseable de $\hat{\Psi}$ es que sea insesgado para Ψ, es decir que

$$E(\hat{\Psi}) = \Psi$$

La estimación de Ψ esta dada por $\hat{\Psi} = \sum_{i=1}^{p} C_i\overline{Y}_{i.}$, de donde

$$\mu\sum_{i=1}^{p} C_i \quad \sum_{i=1}^{p} C_i\tau_i = \sum_{i=1}^{p} C_i\tau_i$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \mu\sum_{i=1}^{p} C_i = 0$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{p} C_i = 0$$

(NOTA: μ depende de las características comunes a toda la la población y no del diseño seleccionado, por ello no podemos asegurar que $\mu = 0$, luego $\sum_{i=1}^{p} C_i = 0$).

De aquí se observa que la condición $\sum_{i=1}^{p} C_i=0$ es importante para la estimación de Ψ.

Los métodos que describimos en este trabajo ofrecen pruebas de significancia y/o intervalos confidenciales para pruebas de contrastes y para comparaciones dos a dos. Los intervalos de confianza son del tipo

$$\Psi \subset \hat{\Psi} \pm D$$

donde el valor D depende de la prueba considerada.

En el modelo $Y_{ij}=\mu+\tau_i+\varepsilon_{ij}$, definido anteriormente, se tiene

$$\bar{Y}_{i.} \quad N(\mu+\tau_i, \sigma^2/n_i)$$

$$\Rightarrow \quad \sum C_{ji}\bar{Y}_{i.} \sim N(\sum C_{ji}\tau_i, \sigma^2\sum_{i=1}^{p}\frac{C_i^2}{n_i})$$

como

$$\Psi_j = \sum_{i=1}^{p} C_{ji}\tau_i \quad y \quad \hat{\Psi}_j = \sum_{i=1}^{p} C_{ji}\bar{Y}_{i.}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\Psi}_j \sim N(\Psi, \sigma^2\sum_{i=1}^{p}\frac{C_i^2}{n_i})$$

Definición 2.

Sean Ψ_i y Ψ_2 dos contrastes tales que sus respectivas estimaciones están definidas por

$$\Psi_1 = \sum_{i=1}^{p} C_{1i}\overline{Y}_{i.} \quad y \quad \hat{\Psi}_2 = \sum_{i=1}^{p} C_{2i}\overline{Y}_{i.}$$

se dice que Ψ_1 y Ψ_2 son ortogonales si

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{C_{1i}C_{2i}}{n_i} = 0$$

para n_i=n (i=1, 2,...,p) se tendrá

$$\sum_{i=1}^{p} C_{1i}C_{2i} = 0$$

Calculamos la covarianza entre $\hat{\Psi}_1$ y $\hat{\Psi}_2$, ya que si la covarianza es cero y $\hat{\Psi}_1$ y $\hat{\Psi}_2$, se distribuyen normal, entonces obtendremos que $\hat{\Psi}_1$ y $\hat{\Psi}_2$ serán independientes.

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(\hat{\Psi}_1,\hat{\Psi}_2) &= E\left\{(\hat{\Psi}_1 - \Psi_1)(\hat{\Psi}_2 - \Psi_2)\right\} \\ &= E\left\{\left[\sum_{i=1}^{p} C_{1i}\overline{Y}_{i.} - \sum_{i=1}^{p} C_{1i}\tau_i\right]\left[\sum_{j=1}^{p} C_{2j}\overline{Y}_{j.} - \sum_{j=1}^{p} C_{2j}\tau_j\right]\right\} \end{aligned}$$

$$E = \left\{ \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} C_{1i} C_{2j} (\overline{Y}_{i.} - \tau_i)(\overline{Y}_{j.} - \tau_j) \right\}$$

$$= \sum_i \sum_j C_{1i} C_{2j} \; E \left\{ (\overline{Y}_{i.} - \tau_i)(\overline{Y}_{j.} - \tau_j) \right\}$$

Para obtener el valor de la esperanza consideraremos

1) $i \neq j$; entonces

$$E = \left\{ (\overline{Y}_{i.} - \tau_i)(\overline{Y}_{j.} - \tau_i) \right\} = E(\overline{Y}_{i.} - \tau_i) E(\overline{Y}_{j.} - \tau_i)$$

$$= \mu \cdot \mu$$

$$= \mu^2$$

2) $i = j$; entonces

$$E \left\{ (\overline{Y}_{i.} - \tau_i)(\overline{Y}_{j.} - \tau_j) \right\} = E(\overline{Y}_{i.} - \tau_i)^2$$

$$= E(\overline{Y}_{i.} - \mu - \tau_i + \mu)^2$$

$$= E(\overline{Y}_{i.} - \mu \quad \tau_i)^2 + 2\mu E(\overline{Y}_{i.} - \mu - \tau_i) +$$

$$+ E\ (\mu^2)$$

$$= \frac{\sigma^2}{n_i} + 0 + \mu^2.$$

Por lo que

$$\mathrm{Cov}(\widehat{\Psi}_1,\widehat{\Psi}_2) = \sum_{i\neq j} C_{1i}C_{2j}E(\overline{Y}_{i.} - \tau_i)(\overline{Y}_{j.} - \tau_j) + \sum_{i=j} C_{1i}C_{2j}E(\overline{Y}_{i.} - \tau_i)(\overline{Y}_{j.} - \tau_i)$$

$$= 2\mu^2 \sum_{i\neq j} C_{1i}C_{2j} + \sigma^2 \sum_i \frac{C_{1i}C_{2i}}{n_i}$$

si Ψ_1 y Ψ_2, son ortogonales $\sum_{i\neq j} C_{1i}C_{2j} = 0$ y por lo tanto

$$\mathrm{Cov}(\Psi_1,\Psi_2) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n_i} \frac{C_{1i}C_{2i}}{n_i} ,$$

de·aquí que la condición de ortogonalidad implique covarianza cero.

En resumen la combinación de los efectos de tratamientos es un contraste si

$$\Psi = \sum_{i=i}^{p} C_i \tau_i$$

es tal que

$$\sum_{i=1}^{p} C_i = 0.$$

Por ejemplo si P = 4 tratamientos, la combinación

$$\tau_3 - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_4)$$

es una combinación lineal de las medias de los tratamientos, sin embargo no es ningun contraste porque la suma de los coeficientes es (+1 -1 -1 -1 = -2) distinta de cero. Esta combinación compara la media del tercer tratamiento con la suma de las medias de los tratamientos restantes; para que cumpla con ser constante, entonces debemos comparar τ_3, con el promedio de las medias restantes es decir

$$\Psi = \tau_3 - \left[\frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_4}{3}\right]$$

es un contraste porque la suma de los coeficientes es cero

$$\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0\right).$$

Por otro lado tenemos que los contrastes

$$\hat{\Psi}_1 = \sum_{i=1}^{P} C_{1i}\bar{Y}_{i.} \qquad \hat{\Psi}_2 = \sum_{i=1}^{P} C_{2i}\bar{Y}_{i.}$$

son ortogonales si

$$\sum_i \frac{C_{1i}\ C_{2i}}{n_i} = 0$$

Por ejemplo si tenemos 5 tratamientos, los contastes

$$\Psi_1 = \tau_1 - \tau_2$$

$$\Psi_2 = 2\tau_1 + 6\tau_2 - 8\tau_3$$

$$\Psi_3 = 2\tau_1 + 6\tau_2 + 11\tau_3 - 19\tau_4$$

$$\Psi_4 = 2\tau_1 + 6\tau_2 + 11\tau_3 + 4\tau_4 - 23\tau_5$$

para $n_1=2$, $n_2=6$, $n_3=11$, $n_4=4$, $n_5=2$, son contastes ortogonales.

Ψ_2 y Ψ_3 son ortogonales.

$$\frac{2.2}{2} + \frac{6.6}{6} - \frac{8.11}{11} + \frac{0(-19)}{4} + \frac{0.0}{2} = 0$$

Ψ_2 y Ψ_4 son ortogonales.

$$\frac{2.2}{2} + \frac{6.6}{6} - \frac{8.11}{11} + \frac{0.4}{4} + \frac{0(-23)}{2} = 0$$

análogamente se encuentra que Ψ_1 y Ψ_2; Ψ_1 y Ψ_3, Ψ_1 y Ψ_4... Ψ_3 y Ψ_4 son ortogonales, por lo que, Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 y Ψ_4 son mutuamente ortogonales.

También puede probarse (I. Méndez 1976), que el número máximo de contrastes ortogonales es P-1. Pero debe subrayarse que a pesar de la ortogonalidad de los p-1 contrastes los estadísticos de prueba no son independientes.

De todos los conjuntos de contrastes ortogonales, el investigador debe escoger el que más conviene a sus intereses. Los contrastes ortogonales son deseables pero no absolutamente esenciales. Cuando se tiene interés en varios contrastes, la falta de ortogonalidad no debe ser obstáculo para hacer pruebas estadísticas siempre y cuando tales contrastes no sean sugeridos por los datos (V. Chew,1977). Los contrastes sugeridos a la luz de los datos deben ser probados por métodos de comparasiones múltiples especiales.

Una pregunta natural puede ser ¿Son mejores los contrastes ortogonales que los no ortogonales?. Intuitivamente los contrastes ortogonales son preferibles si se desea que no estén correlacionadas las estimaciones derivadas de los diferentes contrastes, puesto que éstos garantizan la independencia al tomar P-1 contrastes; sin embargo, como ya lo hemos hecho notar, el contar con un conjunto de contrastes ortogonales no significa que debamos probar todos ellos, sino únicamente deberán analizarse aquellos contrastes que sean de interés para el investigador (Ostle 1981, pág. 295).

4. Ejemplo de Ingeniería Biomédica

En algunas pruebas de comparaciones múltiples se tomarón como ejemplo numérico un experimento en Ingeniería Biomédica y considero conveniente exponerlo ampliamente en esta sección (tomado de Anderson, 1979 pág. 162).

Un ingeniero construyó un aparato mecánico para simular el sistema circulatorio del ser humano; se usó un tanque de agua como simulador de la presión sanguínea, la cual se podía controlar. Se utilizó además una bomba que simulaba las pulsaciones del corazón y un sistema de mangueras flexibles imitando el recorrido del torrente sanguíneo. El motor en cuestión podía controlarse de tal manera que el pulso variaba de 0 a 220 "latidos" por minuto. En el experimento se usaron 4 tipos de válvulas protéticas y 6 diferentes ritmos de pulsaciones por minuto. El experimento se realizó de la siguiente manera: Cada válvula se corrió dos veces pero de manera aleatoria, en cada corrida se probaron cada uno de los 6 ritmos de pulsación en forma aleatoria. Para clarificar este diseño, considere los cuatro tipos de válvulas como tratamientos y con un orden completamente aleatorizado, de tal manera que cada tipo de válvula o tratamiento es probado en la máquina dos veces, en cada prueba se tiene una válvula nueva pero del mismo tipo. Note que cada sesión de prueba constituye un bloque y cada sesión esta anidada en tipo de válvula. Hasta aquí se ha descrito un diseño completamente al azar, y el tipo de aleatorización puede ser así

TIPO DE VALVULA			
1	2	3	4
4 5	2 7	6 8	1 3

ORDEN DE SESION DE PRUEBA

Usando el esquema anterior, se selecciona primeramente la válvula 4 y se realiza la sesión de prueba con los 6 ritmos de pulsaciones previamente aleatorizados. En seguida se selecciona la válvula 2 y se procede de igual manera hasta terminar en la sesión 8 con la válvula 3.

El modelo que sirve para analizar los datos, obtenidos de esta manera, es

$$Y_{ijkl} = \mu + V_i + S_{j(i)} + \delta_{\ell(ij)} + P_k + VP_{ik} + SP_{jk(i)} + \varepsilon_{(ijk\ell)}$$

$$i=1,\ldots,4 \qquad j=1,2 \qquad k=1,2,\ldots,6 \qquad \ell=1$$

donde

$Y_{ijk\ell}$ = Es la respuesta del flujo de gradiente máximo (mm Hg) obtenido de la j-ésima sesión k-ésima pulsación, i-ésima válvula.

μ = Media global

V_i = Efecto de la i-ésima válvula (fija).

$S_{j(i)}$ = Efecto de la sesión j-ésima (válvula aleatoria) en el i-ésimo tipo de válvula.

$\delta_{\ell(ij)}$ = Error de restricción causado por los 6 tipos de ritmos de pulsación corridos en la j-ésima sesión de válvula i.

P_k = Efecto de la pulsación k-ésima.

VP_{ik} = Efecto de interacción de la válvula i con la pulsación K.

$SP_{jk(i)}$ = Efecto de interacción de la j-ésima sesión en la i-ésima válvula por el ritmo de pulsación k-ésimo.

$\varepsilon_{(ijk\ell)}$ = Error aleatorio, en este caso se tienen cero grados de libertad porque se tiene una sola observación en la sesión j-ésima de la válvula i-ésima para la pulsación k-ésima.

Los datos son los siguientes

RITMOS DE PULSACION	TIPO DE VALVULA 1 SESION 1	SESION 2	2 SESION 3	SESION 4	3 SESION 5	SESION 6	4 SESION 7	SESION 8	TOTALES
1	2	3	4	2	6	5	7	5	34
2	4	4	4	4	5	5	5	4	35
3	5	7	4	3	5	6	6	5	41
4	3	5	5	3	8	10	9	10	53
5	7	7	8	5	9	9	10	11	66
6	6	6	6	7	7	8	8	9	57
Totales...	27	32	31	24	40	43	45	44	286
	59		55		83		89		

La tabla de ANDEVA usando el modelo descrito es

F.V.	g.l.	S.C	C.M	E.C.M	F	P
V_i	3	72.25	24.08	$\sigma^2_\varepsilon+6\sigma^2_\delta+6\sigma^2_s+12\sigma^2_V$	13.76*	0.0142
$S_{j(i)}$	4	7.00	1.75	$\sigma^2_\varepsilon+6\sigma^2_\delta+6\sigma^2_S$	nada	
$\delta_{\ell(ij)}$	0	nada		$\sigma^2_\varepsilon+6\sigma^2_\delta$		
P_k	5	105.42	21.08	$\sigma^2_\varepsilon+\sigma^2_{SP}+8\sigma^2_V$	28.11*	0.0000
VP_{ik}	15	38.25	2.55	$\sigma^2_\varepsilon+\sigma^2_{SP}+2\sigma^2_{VP}$	3.40	
$SP_{jk(i)}$	20	15.00	0.75	$\sigma^2_\varepsilon+\sigma^2_{SP}$	nada	
$\varepsilon_{(ijk\ell)}$	0	nada		σ^2_ε		
Total...	47	237.92				

* Significativo al 5%

Obsérvese que con este diseño sí se pudo probar el efecto de válvula, su F_c=CM(V)/CM(S); en este caso el CM(S) está funcionando como error (a), contra el cual se compara el efecto de válvula. Además se puede probar el ritmo de pulsación, su F_c=CM(P)/CM(SP); en este caso el CM(SP) está funcionando como error (b). Los efectos de tipo de válvula y ritmo de pulsación fueron significativos, corresponde a las comparaciones múltiples decidir cuáles válvulas y cuáles ritmos de pulsación son iguales y/o distintos.

Finalmente se escriben en seguida las medias de tipo de válvula y ritmo de pulsación.

Tipo de válvula	C	D	B	A
media	4.917	5.583	6.917	7.417

Ritmo de pulsación	M	N	O	P	Q	R
media	4.25	4.375	5.125	6.625	8.25	7.125

CAPITULO I

MÉTODOS BÁSICOS

Introducción

En este capítulo se presentan los métodos de comparaciones múltiples propuestos por los iniciadores de esta técnica. En primer lugar se expone la prueba de Fisher, quien en 1935 propuso usar pruebas de t, seguido de un análisis de varianza, para probar el efecto entre dos medias de tratamientos, a esta prueba se le conoce como Diferencia Mínima Significativa (DMS). En seguida se expone la prueba de Tukey (1953), la cual usa la distribución de rangos estudentizados, esta prueba esta diseñada para casos balanceados. Además se expone la prueba de Student-Newman-Keuls (SNK) la cual es una modificación de la prueba de Tukey y compara con un criterio secuencial - i.e. se va modificando de acuerdo al número de medias involucradas en la comparación, pero sólo es aplicable cuando el diseño es balanceado. A continuación se presenta la prueba de Scheffè (1953) que es un procedimiento más general que el de Tukey, es aplicable para diseños desbalanceados; este método usa la distribución de F para comparar la significancia de contrastes o diferencia de medias. Haciendo uso de la distribución de rangos múltiples, Duncan (1955), propuso un método parecido al de SNK, excepto que el nivel de significancia es menos restrictivo que aquel de SNK. En seguida se expone la Prueba de Bonferroni, la cual se basa fundamentalmente en la desigualdad que lleva su nombre. Finalmente se expone la prueba del Módulo Máximo Estudentizado, propuesta por Tukey y Roy & Bose en 1953, es una prueba que introduce nuevos cuantiles para comparar las diferencias o combinaciones lineales de medias, se basa en la distribución de rangos estudentizados.

1. Prueba de Fisher

El procedimiento de la prueba protegida DMS de Fisher se aplica sólamente cuando, en el análisis de varianza, la F resulta significativa. Consideramos que τ_i denota el efecto promedio del tratamiento i-ésimo, el problema aquí consiste en determinar cuáles τ_i producen el rechazo de la hipótesis nula

$$Ho \; : \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_p$$

Fisher propusó realizar pruebas de t-Student para cada pareja de tratamientos, el número total de pruebas a realizar es $\binom{P}{2} = P(P - 1)/2$.

Supongamos que se tiene un diseño con un criterio de clasificación, con n_i observaciones en el tratamiento i-ésimo.

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{j(i)} \quad \begin{cases} i = 1,\ldots,p \\ j = 1,\ldots,n_i \end{cases}$$

Y_{ij} : Es la variable respuesta en la j-ésima unidad que recibió el j-ésimo tratamiento.

Por lo tanto Y_{ij} se distribuye normal con media $\mu + \tau_i$ y varianza σ^2, es decir

$$Y_{ij} \sim N(\mu + \tau_i, \sigma^2), \qquad j = 1,\ldots,n_i$$

las Y_{ij} (s) son independientes. Si promediamos sobre j para i fija se tiene

$$\overline{Y}_{i.} \sim N(\mu + \tau_i, \sigma^2/n_i)$$

donde

$$\overline{Y}_{i.} = \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}/n_i,$$

de manera análoga

$$\overline{Y}_{i'.} \sim N(\mu + \tau_{i'} , \sigma^2/n_{i'})$$

por lo tanto se tiene

$$\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{i'.} \sim N\left(\mu + \tau_i - \mu - \tau_{i'},\ \sigma^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{i'.} \sim N\left(\tau_i - \tau_{i'},\ \sigma^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{i'.} - (\tau_i - \tau_{i'})}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}\right)}} \sim N(0,\ 1)$$

sin embargo se desconoce σ^2, pero la distribución de su estimador sí se conoce, σ^2 = SCE/(n-p) el cuadrado medio del error.

$$\frac{SCE}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n.\ -\ p}\ , \qquad SCE = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2$$

$$n. = \sum_{i=1}^{p} n_i$$

Si el interés es probar

$$Ho\ :\ \tau_i = \tau_{i'} \qquad \forall_i \neq i'$$

$$i,\ i' = 1,\ 2, \ldots, p.$$

o equivalentemente

$$Ho \;:\; \tau_i - \tau_{i'} = 0,$$

entonces bajo Ho

$$\frac{\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{i'.}}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}\right)}} \sim N(0,\ 1)$$

por lo tanto la t-student se obtiene dividiendo la normal estándar, N(0, 1) entre $\sqrt{\chi^2_{n.\ -\ p}/(n.\ -\ p)}$

$$\frac{\dfrac{\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{i'.}}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}\right)}}}{\sqrt{\dfrac{SCE}{\sigma^2(n.\ -\ p)}}} \sim t_{n.\ -\ p}$$

es decir

$$\frac{\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{i'.}}{\sqrt{CME\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}\right)}} \sim t_{n.\ -\ p} \quad \ldots\ldots (1)$$

donde

$$CME = \frac{SCE}{n. - p} = \frac{SCE}{gl.\ error}.$$

obsérvece que si $n_i = n_{i'} = r \ \forall_i \neq i' \quad i = 1, 2, \ldots, p$
$i' = 1, 2, \ldots, p$; entonces la expresión (1) se convierte en

$$\frac{\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{i'.}}{\sqrt{\frac{2}{r}\ CME}} \sim t_{p(r-1)}$$

Llamemos DMS a la Diferencia Mínima significativa, entonces para un $(1-\alpha) \times 100\%$ de confianza se tendrá

$$DMS = t_{\alpha, gl.\ error} \sqrt{CME \quad \frac{1}{n_i} + \frac{1}{ni'}} \qquad gl.\ error = \nu$$

si $n_i = n_{i'} = r \ \forall \ i \neq i'$

$$DMS = t_{\alpha,\ gl.\ error} \sqrt{\frac{2}{r}\ CME} \qquad gl.\ error = \nu$$

donde $t_{\alpha,\ gl.\ error}$ es el cuantil de dos colas de una t-student con un valor $(1-\alpha)$ 100% y los gl. del error (ejemplo $t_{.05,30}$ = 2.04).

Si la hipótesis nula es Ho : $\tau_i - \tau_{i'} = 0$, se rechaza si

$$|\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{i'.}| > DMS$$

Los dos tratamientos asociados a τ_i, $\tau_{i'}$ serán declarados distintos si las medias $\bar{Y}_i$, $\bar{Y}_{i'}$ difieren (en magnitud obsoluta) en más de la DMS

La DMS se puede usar para obtener intervalos de confianza. Así para una confianza de $(1 - \alpha) \times 100\%$ el intervalo para $\tau_i - \tau_{i'}$ es

$$\bar{Y}_i - \bar{Y}_{i'} \pm DMS$$

(notar que si la diferencia entre $\bar{Y}_i$ y $\bar{Y}_{i'}$ es menor que la DMS, los límites de confianza tendrán signos opuestos de manera que la hipótesis Ho : $\tau_i = \tau_{i'}$ $\forall_{i \neq i'}$, $i, i' = 1,\ldots,p$ no se rechaza)

Todas las $\binom{p}{2}$ parejas de comparaciones se prueban contra la DMS. Sin embargo, como ya lo hemos mencionado, es posible que la prueba de F global resulte significativa, pero ninguna de las comparaciones por parejas sea significativa [Miller (1963) pág. 91]

Las aplicaciones de la prueba DMS son bastantes ya que se puede usar en cualquier modelo lineal de distribución normal, también es útil en casos desbalanceados (i.e. hay un número desigual de observaciones por tratamiento).

Las ventajas de esta prueba son su sencillez y conveniencia. Se pueden efectuar los cálculos con una calculadora de escritorio. Muchos de los paquetes estadísticos de Regressión (SPSS, SAS) incluyen los valores de F y t con los grados de libertad que son necesarios para calcular la DMS.

Sin embargo, esta prueba presenta problema; cuando se tiene pocos tratamientos, la probalidad del error tipo I se mantiene chica, pero cuando aumentamos el número de tratamientos podemos encontrar que la diferencia máxima $\bar{Y}_{i.}$ - mínima $\bar{Y}_{i.}$ sea significativa, lo que ocasiona un aumento considerable de la probabilidad del error tipo I. Pearson y Hartley (1943) - citado por I. Méndez (1976) - demostraron que si se usaba DMS con 5 tratamientos, 40 gl. error y $\alpha = .05$ se tendrá

$$P(\text{Error tipo I}) = .27$$

para 10 tratamientos

$$P(\text{Error tipo I}) = .59$$

para 20 tratamientos

$$P(\text{Error tipo I}) = .86$$

cuando se tienen muchos tratamientos, el nivel de significancia de α se refiere a cada comparación por separado (O'Neill y Wetherill 1981). Para salvar este problema se puede hacer una modificación: si interesan sólamente m comparaciones el valor de t debe modificarse por $t_{\alpha/m,\ gl.\ error}$, donde el nivel de significancia se refiere a la probabilidad de obtener una o más significancias falsas. Esta prueba es válida si se planean las comparaciones a realizar antes de ver los datos.

Ejemplo Numérico

Ilustremos la aplicación de esta prueba con el ejemplo de las válvulas protéticas para el corazón (Anderson 1974), descrito en la introducción de este trabajo. Supongamos que estamos interesados en comparar los 4 tipos de válvulas. Las medias ordenadas de manera descendente, son

A	B	C	D
7.42	6.92	4.92	4.58

para las comparaciones múltiples usamos como CME = CM(S) = 1.75, con 4 g.l. por lo tanto se tendrá que $t_{.05,4} = 2.132$

$$DMS = 2.132\ \sqrt{2(1.75)/12} = 1.15$$

cualesquiera dos medias que difieran en más de 1.15 se declaran significativas al 5%. Probamos A-D, A-C, B-D, B-C y C-D, trazamos una linea sobre las parejas de medias que difieran en menos de 1.15. En el ejemplo

$$\underline{A\ B}\quad \underline{C\ D}$$

Desafortunadamente muchas de las comparaciones múltiples carecen de la transitividad, ejemplo B=C y C=D puede suceder que estadísticamente B≠D.

(Nota: en esta primera prueba no podemos probar contrastes que involucren más de dos medias, porque la prueba está diseñada para probar parejas de medias).

Para el caso de la prueba de Fisher desprotegida no hay necesidad de realizar el ANDEVA, pero la confianza α debe ser reducida a α/m donde es el número de comparaciones a realizar (especificadas de antemano) de entre t tratamientos. Si seleccionamos hacer todas las comparaciones por parejas $m = p(p-1)/2$; si deseamos realizar contrastes ortogonales $m = p-1$. Así los niveles de confianza serán $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ para los m contrastes. Los cuantiles de la distribución t obtenidos de una F desprotegida para un procedimiento DMS se encuentran en Dunn 1961 (pág. 55), Tabla XIII del apéndice.

2. Prueba de Tukey

Esta técnica fué propuesta por Tukey en 1953, el método es válido si existe el mismo número de observaciones en cada clase ($n_i = r$).

Mood y Gralbill (1963), obtienen que si $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p$ se distribuyen normalmente con media cero y varianza uno y

χ^2_ν se distribuye como una ji-cuadrada con ν grados de libertad, entonces la variable aleatoria de rangos estudentizado con parámetros p, ν esta definida por

$$Q_{p.\nu} = \frac{\underset{i,\, i' = 1,\dots,p}{\text{máx.}} \{|X_i - X_{i'}|\}}{\sqrt{\chi^2_r/\nu}} \iff Q_{p.\nu} = \frac{\underset{i=1,\dots,p}{\text{máx.}} \{X_i\} - \underset{i=1,\dots,p}{\text{mín.}} \{X_i\}}{\sqrt{\chi^2_\nu/\nu}}$$

Para un diseño con un criterio de clasificación e igual número de observaciones en cada tratamiento se tiene

$$\overline{Y}_{i.} \sim N(\mu + \tau_i, \frac{\sigma^2}{r}) \qquad i = 1,\dots,P; \text{ independientes.}$$

r = No. de observaiones por tratamiento.

$$\Rightarrow \qquad \frac{\overline{Y}_{i.} - (\mu + \tau_i)}{\sqrt{\sigma^2/r}} \sim N(0, 1) \qquad \dots\dots (1)$$

además

$$\frac{(rp - p)\ \text{CME}}{\sigma^2} \sim \chi^2(rp - p) \qquad \dots\dots (2)$$

donde

$$\text{CME} = \sum_i^p \sum_j^r (Y_{ij} - \overline{Y}_{i.})^2 / (rp - p)$$

usando (1) y (2) obtenemos

$$\frac{\dfrac{\underset{i}{\text{máx.}}\left\{\overline{Y}_{i.} - \mu - \tau_i\right\} - \underset{i}{\text{mín.}}\left\{\overline{Y}_{i.} - \mu - \tau_i\right\}}{\sqrt{\sigma^2/r}}}{\sqrt{\dfrac{(rp-p)\quad CME}{\sigma^2(rp-p)}}} \sim Q_{p,(ip-p)}$$

$$\frac{\text{máx.}\left\{\overline{Y}_{i.} - \mu - \tau_i\right\} - \underset{i}{\text{mín.}}\left\{\overline{y}_{i.} - \mu - \tau_i\right\}}{\sqrt{CME/r}} \sim Q_{p,(rp-p)}$$

o equivalentemente, bajo Ho : $\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_p$

$$\frac{\underset{i,\ i'=1,\ldots,p}{\text{Máx.}}\left\{\left|\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{i'.}\right|\right\}}{\sqrt{CME\ /\ r}} \sim Q_{p,(rp-p)} \quad \ldots\ldots (3)$$

las tablas de rangos estudentizados se tomaron de Harter (1960). Tabla I del apéndice. Para un nivel α y con P, ν gl. se encuentran los valores de $Q^{\alpha}_{p,\nu}$, tales que

$$P\left[Q_{p,\nu} \leq Q^{\alpha}_{p,\nu}\right] = 1 - \alpha$$

Entonces la expresión 3 se traduce en el enunciado probabilístico de que Bajo Ho : $\tau_1 = \ldots = \tau_p$

$$P\left[\frac{\underset{i,\, i' = i,\ldots,p}{\text{máx}} \left\{\left|\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{i'.}\right|\right\}}{\sqrt{CME / r}} \leq Q^{\alpha}_{p,(rp-p)}\right] = 1-\alpha$$

equivalentemente

$$P\left[\left|\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{i'.}\right| \geq Q^{\alpha}_{p,(rp-p)}\sqrt{CME/r}\right] = \alpha \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

porque $\underset{i,i'}{\text{máx}}.\{|\overline{Y}_{i.} - Y_{i'.}|\}$ es el rango de r variables independientes $N(0, \sigma^2)$.

La regla de decisión es: Si la diferencia $|\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{i'.}|$ es mayor que DMSH = $Q^{\alpha}_{p,(rp-p)} \sqrt{CME/r}$ entonces se rechaza Ho : $\tau_i = \tau_{i'}$. DMSH es la diferencia mínima significativa honesta, haciendo alusión a la DMS de Fisher. Ello no quiere decir que la de Fisher sea deshonesta, si no simplemente corrige la falla encontrada en la DMS que llega muy rápido a las falsas positivas cuando p es grande. (Nótese que rp-p son los grados de libertad del error, entonces independientemente del diseño utilizado la Q-Tukey será $Q^{\alpha}_{p,\text{ gl. error}}$ donde p son los grados de libertad del factor de interés y gl. error, son los grados de libertad del cuadrado medio contra el que se compara)

El intervalo de confianza correspondiente para las $\binom{p}{2}$ comparaciones es

$$\tau_i - \tau_{i'} + \overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{i'.} \pm Q^{\alpha}_{p,rp-p} \sqrt{CME/r} \quad ; \; rp-p=gl.\ error=\nu$$

al $(1-\alpha)$ 100%.

$$i,i' = 1,\ldots,p \quad i \neq i'$$

La prueba de significancia correspondiente consiste en examinar si el intervalo de confianza contiene o no el cero. Para cualquier intervalo que no contenga al cero se concluye que las dos medias son distintas.

· Una generalización de las comparaciones de medias por parejas es el estudio de los contrastes. Los contraste no solo prueban la igualdad de dos medias si no de combinaciones lineales de tratamientos tales que para $\sum_{i=1}^{p} C_i\tau_i$ suceda $\sum_{i=1}^{p} C_i=0$.

Ahora construimos la prueba de Tukey para contrastes. Si $Y_1,\ldots,Y_p$ son v.a. independientes $N(\mu + \tau_i, \sigma^2)$ entonces

$$Y_{i.} - Y_{i'.} \sim N(\tau_i - \tau_{i'}, 2\sigma^2)$$

$$(Y_{i.} - Y_{i'.})-(\tau_i - \tau_{i'}) \sim N(0, 2\sigma^2)$$

Por otro lado una condición necesaria y suficiente para que las desigualdades

$$\frac{|(Y_i - Y_{i'}) - (\tau_i - \tau_{i'})|}{\sqrt{CME}} \leq C \qquad \ldots\ldots (5)$$

se satisfaga para toda $i \neq i'$ es que

$$\frac{\underset{i,i'}{\text{máx.}} \left\{ \left| (Y_i - \tau_i) - (Y_{i'} - \tau_{i'}) \right| \right\}}{\sqrt{CME}} \leq C \qquad \ldots\ldots (6)$$

(Nota: $\underset{i,i'}{\text{máx.}} \left\{ |(Y_i - \tau_i) - (Y_{i'} - \tau_{i'})| \right\}$ es el rango de r variables aleatorias $N(0, \sigma^2)$, lo que justifica (4)). Sean C_i los coeficientes de la combinación lineal $\Sigma C_i Y_i$, el sistema de desigualdades

$$\left| \sum_{i=1}^{p} C_i (Y_i - \tau_i) \right| \leq C(CME) \sum_{i}^{p} \frac{|C_i|}{2} \qquad \ldots\ldots (7)$$

implica que (5) tiene lugar para toda $i \neq i'$. Con el fin de obtener el enunciado de la prueba de Tukey para contraste, basta con mostrar que (5) implica (7).

Sea $y_i = Y_i - \tau_i$ y $C(CME) = \mathcal{C}$, entonces debemos mostrar que

$$|y_i - y_{i'}| = \mathcal{C} \implies \left| \sum_{1}^{p} C_i y_i \right| \leq \mathcal{C} \sum_{1}^{p} \frac{|C_i|}{2}$$

Si $C_i = 0 \ \forall \ i = 1,\ldots,p$ la implicación es inmediata, supongamos $C_i \neq 0$ para alguna $i = 1,\ldots,p$; entonces

$$\sum_1^p \frac{|C_i|}{2} = \frac{1}{2} \sum_{C_i>0} C_i + \frac{1}{2} \sum_{C_i<0} (-C_i)$$

como usamos contrastes

$$0 = \sum_i C_i = \sum_{Ci>0} C_i + \sum_{Ci<0} C_i \Rightarrow \frac{1}{2} \sum_{C_i>0} C_i + \frac{1}{2} \sum_{C_i<0} C_i = 0$$

sumando cero

$$\sum_1^p \frac{|C_i|}{2} = \frac{1}{2} \sum_{C_i>0} C_i + \frac{1}{2} \sum_{C_i>0} C_i + \frac{1}{2} \sum_{C_i<0} (-C_i) + \frac{1}{2} \sum_{C_i<0} C_i$$

$$= \sum_{C_i>0} C_i$$

rentando cero

$$\sum_1^p \frac{|C_i|}{2} = \frac{1}{2} \sum_{C_i>0} C_i - \frac{1}{2} \sum_{C_i>0} C_i + \frac{1}{2} \sum_{C_i<0} (-C_i) - \frac{1}{2} \sum_{C_i<0} C_i$$

$$= \sum_{C_i<0} (-C_i)$$

$$\therefore \sum_{1}^{p} \frac{|C_i|}{2} = \sum_{C_i<0} (-C_i) = \sum_{C_i>0} C_i \qquad \ldots\ldots \quad (8)$$

observe que

$$\sum_i C_i Y_i = \sum_{C_i>0} C_i y_i + \sum_{C_{i'}<0} C_{i'} y_{i'}$$

multiplicando el numerador y denominador de esta expresión por (8) obtenemos .

$$\sum_{1}^{p} C_i Y_i = \frac{\sum_{C_{i'}<0} (-C_{i'}) \sum_{C_i>0} C_i y_i + \sum_{C_i>0} C_i \sum_{C_{i'}<0} C_{i'} y_{i'}}{\sum_{1}^{p} \frac{|C_i|}{2}}$$

$$= \frac{\sum_{C_i>0} \sum_{C_{i'}<0} C_i (-C_{i'}) (y_i - y_{i'})}{\sum_{1}^{p} \frac{|C_i|}{2}}$$

Finalmente para $C_i>0$, $C_{i'}<0$ por hipótesis

$$|C_i(-C_{i'})(y_i - y_{i'})| = C_i(-C_{i'})|y_i - y_{i'}| \leq C_i(-C_{i'}) \, C$$

asi que en general

$$\left|\sum_{1}^{p} C_i y_i\right| \leq \frac{\sum\limits_{C_i>0} \; \sum\limits_{C_{i'}<0} C_i(-C_{i'}) \; \mathcal{C}}{\sum\limits_{1}^{p} \frac{|C_i|}{2}} =$$

por la desig. (8)

$$= \mathcal{C} \sum_{1}^{p} \frac{|C_i|}{2}$$

con ello queda establecido que 5 => 7.

Entonces queda establecido que bajo Ho : $\Sigma_{C_i} \tau_i = 0$

$$p \left[\frac{\sum\limits_{1}^{p} C_i \overline{Y}_{i.}}{\sqrt{CME/r} \; \sum\limits_{1}^{p} \frac{C_i}{2}} \leq Q^{\alpha}_{p,(rp-p)} \right] = 1 - \alpha.$$

o equivalentemente:

$$\text{Si} \quad \hat{\Psi} = \sum_{i=1}^{p} C_i \overline{Y}_{i.}$$

$$p \left[\hat{\Psi} \geq Q^{\alpha}_{p,(rp-p)} \sqrt{\frac{CME}{r}} \sum_{1}^{p} \frac{|C_i|}{2} \right] = \alpha$$

para intervalos de confianza se tiene

$$\tau_i - \tau_{i'} \, \varepsilon \; \hat{\Psi} \pm Q^{\alpha}_{p,(rp-p)} \sqrt{\frac{CME}{r}} \sum_{j}^{p} \frac{|C_i|}{2}$$

para todos los contrastes posibles. Si se tienen comparaciones dos a dos.

$$\sum_{j}^{2} \frac{|C_i|}{2} = 1.$$

$Q^{\alpha}_{r,(rp-p)}$ es el cuantil de una cola para $(1-\alpha) \times 100\%$ de confianza en la tabla de rangos estudentizados con r y rp-p grados distribuidos de libertad. Retomando el ejemplo de Anderson (1974 pág. 162) nuestro intervalo de confianza para dos medias al 5% de significancia, de la tabla I $Q^{.05}_{4,4} = 5.757$, de manera que

$$\Psi \;\varepsilon\; \hat{\Psi} \pm Q^{.05}_{4,4} \sqrt{CME/12}$$

$$\Psi \;\varepsilon\; \hat{\Psi} \pm 5.757 \sqrt{1.75/12}$$

$$\Psi \;\varepsilon\; \hat{\Psi} \pm 2.20$$

Para comparaciones dos a dos, las diferencias $\hat{\Psi}$ mayores que 2.20 implican $\hat{\Psi} \neq 0$ y que existe una diferencia real.

En nuestro ejemplo, para el caso de las válvulas, tendremos.

A B C D

observar que A=B y B=C pero D≠A, estadísticamente. Sin embargo este criterio es muy restrictivo, ya que se aplica la prueba máx.$\{|\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{i'.}|\}$ para $i \neq i'$, a todas las diferencias (Méndez R.I., 1976). En el ejemplo de las válvulas protéticas, es perfectamente posible que $|\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{4.}| = 2.83$ sea pequeño comparado con el estadístico $Q^{\alpha}_{p,\ gl.\ error}\sqrt{CME/r}$ para las 4 medias. Pero al comparar el efecto de dos medias interiores, digamos $|\bar{Y}_{2.} - \bar{Y}_{3.}|$, pueden declararse distintas Es decir las posibles diferencias interiores se estan jusgando con un criterio inadecuado.

Gabriel (1964), muestra que la prueba de F, en un análisis de varianza, resulta significativa sí y sólo sí al menos un contraste es significativo; pero no resulta así si los contrastes se limitan a diferencias de parejas de medias.

Posteriormente de que se propuso la prueba SNK modificando la de Tukey, éste a su vez realizó otra modificación. (La prueba SNK se ve a continuación). Para superar las críticas Tukey propuso una prueba de rangos múltiples usando un promedio de su procedimiento de la DMSH y la estadística SNK como criterios. Si se tienen q medias involucradas en un contrastraste, entonces la DMSH modificada queda

$$\frac{1}{2}\left[Q^{\alpha}_{p,\nu} + Q^{\alpha}_{q,\nu}\right]\sqrt{CME/r}$$

donde ν son los grados de libertad del error.

3. Prueba de SNK (Student - Newman - Keuls)

Este método es aplicable sólo en el caso balanceado ($n_i = r \; \forall \; i$, $i = 1,\dots,p$). Como en los casos anteriores CME es el cuadrado medio del error con ν grados de libertad. Este método no necesita la prueba de F del análisis de varianza, como prerrequisito.

Esta prueba es secuencial porque no compara la diferencias $|\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{i'.}|$ contra una constante sino contra un cuantil Q de Tukey que se va modificando según el número de medias incluidas en cada comparación. Para aplicar este método, arreglamos las medias en orden ascendente (o descendente) pero en lugar de utilizar la DMSH definida por Tukey se compara con

$$Q^{\alpha}_{q,\nu} \sqrt{CME/r}$$

donde q es el número de medias ($q = 2, 3, \ldots, P$; el número de tratamientos es P), $Q^{\alpha}_{q,\nu}$ es el cuantil de una distribución de rango estudentizado con q, grados de libertad al $(1 - \alpha)$ 100% de confianza, tabla I del apéndice.

En nuestro ejemplo $q = 4$, $\nu = 4$, $\sqrt{CME/r} = \sqrt{1.75/12} = 0.382$ entonces

q :	2	3	4
$Q^{.05}_{q,4}$:	3.927	5.040	5.757
$Q^{.05}_{q,4}$ (0.382):	1.5	1.925	2.198

Ahora comparamos AD con 2.198, cuantil que involucra 4 medias; AC y BC con 1.925; AB, BC y CD con 1.5. En resumen tendremos

$$\underline{A \quad B} \quad \underline{C \quad D},$$

cuando en la práctica se tenga que A y D sean estadísticamente iguales, no hay porque probar AB, BC ni CD.

Este método obtuvo 2 grupos, igual resultado se tiene con la DMS de Fisher, y con la de Tukey.

4. Prueba de Sheffè

Scheffè (1953), propuso un método más general que el de Tukey, ya que el primero no solo se puede aplicar a diseños desbalanceados sino que sirve para probar cualquier contraste, en tanto que el segundo resulta poco potente cuando se prueban contrastes.

Considere el modelo de diseño experimental reparametrizado

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}\ , \qquad \underline{\varepsilon} \sim N(\underline{0}, \sigma^2 I)$$

donde

$$\underline{Y} \in \mathbb{R}^n,\ \underline{\beta} \in \mathbb{R}^q$$

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_q \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_{11}, & X_{12}, & ,\ldots, & X_{1q} \\ X_{21}, & X_{22}, & ,\ldots, & X_{2q} \\ \cdot & \cdot & ,\ldots, & \cdot \\ X_{n1}, & X_{n2}, & ,\ldots, & X_{nq} \end{bmatrix}$$

y el rango $X = q$ $(q < n)$ observar que X es de rango completo formada por variables independientes conocidas, aunque los parámetros de regresión $\underline{\beta}$ y $var(\varepsilon)=\sigma^2$ son desconocidos

El estimador de $\underline{\beta}$ por mínimos cuadrados y de máxima verosimilitud, es

$$\hat{\underline{\beta}} = (X'X')^{-1} X'Y \quad \text{tal que} \quad \hat{\underline{\beta}} \sim N(\underline{\beta}, (X'X)^{-1}\sigma^2)$$

$$CME = \frac{Y'Y \; \hat{\beta}'X'Y}{n - q} \quad \text{tal que} \quad \frac{(n-q)CME}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-q)} \qquad \ldots\ldots (1)$$

además $\hat{\underline{\beta}}$ y CME son estadísticamente independientes.

Tomemos $\hat{\underline{\gamma}} \subset \hat{\underline{\beta}}$, en realidad $\hat{\underline{\gamma}}$ es una combinación lineal arbitraria de su espacio $\mathbb{R}^d$ $(d \leq q)$, así sin perder generalidad

$$\hat{\underline{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{\gamma}} \\ \underline{C} \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{matrix} \hat{\underline{\gamma}} \in \mathbb{R}^d \\ \underline{C} \in \mathbb{R}^{q-d} \end{matrix}$$

y

$$\hat{\underline{\gamma}} \sim N(\underline{\gamma}, \sigma^2 W^{-1})$$

donde W^{-1} $\mathcal{I}'(X'X)^{-1}\mathcal{I}$ para $\mathcal{I}'=(I_{dxd}, 0_{dx(q-d)})$ es decir la parte que corresponde a $\hat{\underline{\gamma}}$ en $(X'X)^{-1}$, note que

$$\sigma^2 W^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{Var}\ \beta_1 & \mathrm{Cov}(\beta_1,\beta_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(\beta_1,\beta_d) \\ \mathrm{Cov}(\beta_2,\beta_1) & \mathrm{Var}\ \beta_2 & \cdots & \mathrm{Cov}(\beta_2,\beta_d) \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathrm{Cov}(\beta_d,\beta_1) & \mathrm{Cov}(\beta_d,\beta_2) & \cdots & \mathrm{Var}\ \beta_d \end{bmatrix}$$

entonces

$$\underline{\hat{\gamma}} - \underline{\gamma} \sim N(\underline{0},\ \sigma^2 W^{-1})$$

y

$$\frac{(\underline{\hat{\gamma}} - \underline{\gamma})'\ W(\underline{\hat{\gamma}} - \underline{\gamma})}{\sigma^2} \sim \chi^2_d \qquad \ldots\ldots \quad (2)$$

usando (1) y (2) obtenemos la distribución F

$$\frac{(\hat{\gamma} - \gamma)'W\ (\hat{\gamma} - \gamma)/\ \sigma^2 d}{(n-q)CME/\sigma^2 \quad (n-q)} \sim F_{d_i\,(n-q)}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \frac{(\underline{\hat{\gamma}} - \underline{\gamma})'W\ (\underline{\hat{\gamma}} - \underline{\gamma})}{d\ CME} \sim F_{d,\ (n-q)}$$

de manera resumida se tiene,

$$P\left\{(\underline{\hat{\gamma}} - \underline{\gamma})'W(\underline{\hat{\gamma}} - \underline{\gamma}) \leq d\ CME\ F^{\alpha}_{d,(n-q)}\right\} = 1 - \alpha \qquad \ldots\ldots \quad (3)$$

donde $F^{\alpha}_{d,n-p}$ es el cuantil de una cola para 100α%, de significancia de una distribución F con d grados de libertad en el numerador y n-p grados de libertad en el denominador

Una forma alternativa a (2) es presentada por intervalos de confianza, se hará uso de la desigualdad de Gauchy-Schwartz. El propio Scheffê (1953), asegura que esta alternativa puede probar hipótesis del tipo $\underline{u}'\underline{\gamma}=k$ v.s. $\underline{u}'\underline{\gamma}\neq k$; ($\underline{u}$ es un vector de contrastes del espacio $\mathbb{R}^d$).

Primero mostramos que para toda c > 0

$$|\underline{u}'(\hat{\underline{\gamma}}-\underline{\gamma})|^2 \leq C(\underline{u}'W^{-1}\underline{u}) \iff (\hat{\underline{\gamma}}-\underline{\gamma})'W(\hat{\underline{\gamma}}-\underline{\gamma}) \leq C \qquad \ldots\ldots (3)$$

($\Leftarrow$) tomamos la desigualdad Cauchy-Schwartz.

$$|\underline{u}'(\hat{\underline{\gamma}}-\underline{\gamma})|^2 \leq \left[(\hat{\underline{\gamma}}-\underline{\gamma})'W(\hat{\underline{\gamma}}-\underline{\gamma})\right]\left[\underline{u}'W^{-1}\underline{u}\right]$$

P.H. $(\hat{\underline{\gamma}}-\underline{\gamma})'W(\hat{\underline{\gamma}}-\underline{\gamma}) \leq C$; entonces

$$|\underline{u}'(\hat{\underline{\gamma}}-\underline{\gamma})|^2 \leq C\left[\underline{u}'W^{-1}\underline{u}\right]$$

$\Rightarrow$ basta con hacer $\underline{u}' = (\hat{\underline{\gamma}}-\underline{\gamma})'W$; entonces la desigualdad

$$|\underline{u}'(\hat{\underline{\gamma}}-\underline{\gamma})|^2 \leq C\ (\underline{u}'W^{-1}\underline{u})$$

se transforma en

$$|(\hat{\underline{\gamma}}-\underline{\gamma})'W\ (\hat{\underline{\gamma}}-\underline{\gamma})|^2 \leq C((\hat{\underline{\gamma}}-\underline{\gamma})'W\ W^{-1}(W^{-1})'(\hat{\underline{\gamma}}-\underline{\gamma}))$$

o equivalentemente

$$|(\hat{\underline{\gamma}}-\underline{\gamma})'W\ (\hat{\underline{\gamma}}-\underline{\gamma})|^2 \leq C((\hat{\underline{\gamma}}-\underline{\gamma})'W\ (\hat{\underline{\gamma}}-\underline{\gamma}))$$

$$(\hat{\underline{\gamma}}-\underline{\gamma})'W\ (\hat{\underline{\gamma}}-\underline{\gamma}) \leq C \quad \square$$

finalmente si hacemos en (3), $C = d\ CME\ F^{\alpha}_{d,n-p}$ entonces obtenemos que la expresión (2) se transforma inmediatamente en

$$P\left[|\underline{u}'(\hat{\underline{\gamma}}-\underline{\gamma})|^2 \geq d\ CME\ F^{\alpha}_{d,n-q}(\underline{u}'W^{-1}\underline{u});\ \forall\ \underline{u}\in\mathbb{R}^d\right] = \alpha$$

o bien

$$P\left[|\underline{u}'(\hat{\underline{\gamma}}-\underline{\gamma})| \geq \sqrt{d\ CME\ F^{\alpha}_{d,n-q}(\underline{u}'W^{-1}\underline{u})};\ \forall\ \underline{u}\in\mathbb{R}^d\right] = \alpha$$

y esta expresión se puede utilizar para construir intervalos de confianza

$$\underline{u}'\underline{\gamma} \in \underline{u}'\hat{\underline{\gamma}} \pm \sqrt{d\ CME\ F^{\alpha}_{d,n-q}\ (\underline{u}'W^{-1}\underline{u})}.$$

esta prueba está pensada para probar todos los contrastes posibles, note que $V(\underline{u}'\gamma) = \sigma^2(\underline{u}'W^{-1}\underline{u})$ y que $\hat{V}(\underline{u}'\hat{\gamma}) = CME(\underline{u}'W^{-1}\underline{u})$ (Méndez 1976, pág. 27). En nuestro ejemplo deseamos comparar poblaciones por parejas, entonces el método toma la siguiente forma.

Sea

$$\Psi = \sum_{1}^{p} C_i \tau_i$$

el contraste estimado por

$$\hat{\Psi} = \sum_{1}^{p} C_i \bar{Y}_{i.} \quad \text{tal que} \quad \widehat{Var}(\hat{\Psi}) = CME \sum_{i=1}^{p} \frac{C_i^2}{n_i}$$

donde n_i es el número de repeticiones del i-ésimo tratamiento $(i=1,\ldots,p)$ y SCE es la suma de cuadrados del error (se toma de la tabla de análisis de varianza) con ν grados de libertad y para la suma de cuadrados de los tratamientos, tenemos p-1 gl.; para una confianza de $(1-\alpha)$ 100% en todos los contrastes Ψ se tiene

$$\hat{\Psi} \pm \sqrt{(P-1)\ CME\ F^{\alpha}_{(P-1),\nu} \sum_i \frac{C_i^2}{n_i}} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

(Notar que para este caso $\hat{V}(\underline{u}'\hat{\gamma}) = \hat{V}(\hat{\Psi}) = CME \sum_i \frac{C_i^2}{n_i} = CME(\underline{u}'W^{-1}\underline{u})$)

Para diferencias dos a dos $(\Sigma C_i^2=2)$ e igual número de repeticiones $(n_i=r)$, la expresión (4) queda

$$\bar{Y}_i - \bar{Y}_j \pm \sqrt{(P-1)\ \mathrm{CME}\ F^{\alpha}_{P-1,\nu}\ 2/r}\ .$$

Scheffè (1959 pág. 71) recomienda una $\alpha=.1$, entonces en nuestro ejemplo (sobre las válvulas) $F_{.05,\ 3,\ 4} = 6.59$

$$\sqrt{3(1.75)(6.59)2/12} = 2.401$$

las diferencias de dos pares de medias, mayores que 2.401 se declaran significativas.

$$\underline{A \quad B}$$
$$\qquad\qquad\underline{\quad C \quad D}$$

Notar que si se desean hacer comparaciones entre P=2 tratamientos la expresión (4) se transforma en la DMS de Fisher puesto que $\sqrt{F^{\alpha}_{1,\nu}}, = t^{\alpha}_{\nu}$. La diferencia mínima significativa de Scheffè , 2.401, es mayor que la DMSH de Tukey, 2.20. En términos generales el procedimiento de Tukey da mejores resultados que el de Scheffè en comparaciones dos a dos, pero para contrastes en general el método de Scheffè es recomendable porque mantiene controlado el error tipo I, para cualquier número de contrastes.

5. Prueba de Duncan (de Rangos Múltiples)

Duncan entre 1941 y 1955, propuso varias pruebas haciendo uso de los rangos múltiples. Los antecedentes más inmediatos son los trabajos realizados por Newman y Student, quienes aportaron las ideas básicas y finalmente en 1952 Keuls reunió en un solo trabajo la prueba que después se llamó de SNK (Student - Newman - Keuls). Duncan (1955) propuso un método muy parecido al de SNK, excepto que el nivel significancia es menos restrictivo que aquel de SNK. Esta prueba al igual que otras de rangos múltiples, se utiliza solo para el caso balanceado y para modelos con uno o más criterios de clasificación.

La idea fundamental de la prueba de rangos múltiples de Duncan establece que la diferencia entre dos medias en un conjunto de P medias es significativo de acuerdo a un nivel α_p de la prueba, donde p es el número de medias involucradas.

La diferencia entre la prueba SNKy la de Duncan (1955) reside en que la selección de α_p, $p=2,3,\ldots,P$. Para SNK $\alpha_p=\alpha$ y para Duncan.

$$\alpha_p = 1 - (1-\alpha)^{P-1}$$

y su estadística de prueba, para p medias es

$$Q_{P,\nu}^{\alpha P} \sqrt{CME/r}$$

donde CME, es el cuadro medio del error con ν grados de libertad y r repeticiones por tratamiento.

Una colección de q medias (q<p) puede encontrarse que es heterogénea siempre y cuando exista significancia en superconjuntos que las incluyan. Es decir que si cualquier subconjunto suficientemente grande de p medias es declarado significativo entonces la significancia del subconjunto prevalecerá.

Intuitivamente esto quiere decir que, dado $\tau_i = \ldots = \tau_p$

$$1 - P\left\{ D(\tau_1 \neq \tau_2 \cup \tau_2 \neq \tau_3 \cup \ldots \cup \tau_{p-1} \neq \tau_p) \right\} =$$

$$= \left\{1-P(D(\tau_1 \neq \tau_2))\right\} \left\{1-P(D(\tau_2 \neq \tau_3))\right\} \cdots \left\{1 - P(D(\tau_{p-1} \neq \tau_p))\right\}$$

puesto que se supone que cada $D(\tau_i \neq \tau_i)$ es una prueba de Duncan independiente, aunque en realidad no lo son, entonces $1-P\{D(\tau_{i=1} \neq \tau_i)\} = (1-\alpha)$ para cada $i=2,\ldots,p$ y

$$1 - P\left\{ D(\tau_1 \neq \tau_2) \cup D(\tau_2 \neq \tau_3) \cup \ldots \cup D(\tau_{p-1} \neq \tau_p)\right\} = (1-\alpha)^{P-1}$$

o equivalentemente

$$P\left\{\bigcup_{i=1}^{p} P(\tau_{i-1} \neq \tau_i)\right\} = 1 - (1-\alpha)^{P-1} = \alpha_p$$

el anterior enunciado probabilístico puede quedar

$$P\left\{Q_{p,\nu} > Q^{\alpha_p}_{p,\nu}\right\} = \alpha_p$$

donde $Q_{p,\nu}$ es una variable aleatoria con parámetros p,ν de una distribución de rangos estudentizados, ver tabla II.

Para ilustrar la manera de operación tomemos el experimento de Anderson (1974). Si tomamos un nivel de significancia al 5 por ciento, tendremos

Núm. de medias en el rango (P)	2	3	4
$Q^{\alpha P}_{P,4}$	3.927	4.013	4.033
$Q^{\alpha P}_{p,4}\ \sqrt{1.75/12}$	1.5	1.532	1.540

Los puntajes para la prueba de rangos múltiples de Duncan se encuentran en la tabla II del apéndice.

Comparando las diferencias de medias con los cuantiles arriba indicados tenemos

$\underline{A \quad B} \qquad \underline{C \quad D}$

uniendo una línea recta cada vez que dos medias se declaran no significativas. En este caso empezamos por comparar A-D = 2.834 > 1.540 por tanto se declaran significativas, A-C = 2.5 > 1.532 y B-D = 2.334 > 1.532 son significativas, A-B = 0.5 < 1.5 y C-D = 0.334 < 1.5 se declara estadísticamente no significativas, en tanto B-C = 2 > 1.5 es significativa; ahora trazamos una linea debajo de aquellas parejas que resultaron no significativas.

Una desventaja de este procedimiento es que no puede utilizarse para obtener intervalos de confianza (Chew, Víctor 1977), pues algunas diferencias de medias de tratamientos tendrán intervalos de confianza de diferentes longitudes aún - cuando existe el mismo número de repeticiones por tratamiento.

Obsérvese que en cierto sentido la DMS de Fisher, la SNK de Student-Newman-Kents y la DMSH de Tukey son casos particulares de la prueba de Duncan. En la expresión

$$Q^{\alpha P}_{P,\nu} \sqrt{CME/r} \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

si hacemos $\alpha_p=\alpha$ y $p=2$ obtenemos la DMS de Fisher. Si hacemos $\alpha_p= \alpha$ y $P=d$ tratamientos obtenemos la DMSH de Tukey. Si hacemos $\alpha=\alpha p$ obtenemos la SNK de Student - Newman - Keuts.

Para casos desbalanceados Bancroft (1968), sugiere usar la media armónica de los tamaños de muestras, entonces

$$Q^{\alpha P}_{P,\nu}\sqrt{CME\left[\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\ldots+\frac{1}{r_p}\right)/P\right]}$$

Kramer (1956), sugiere reemplazar $1/r$ por $\left(\frac{1}{r_i}+\frac{1}{r_j}\right)$ con lo cual (1) se convierte en

$$Q^{\alpha P}_{P,\nu}\sqrt{CME\left[1/r_i + 1/r_j\right]/2} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Kramer (1957), extiende su método considerando la heterocedasticidad por lo que

$$\hat{Y}_i \sim N(\bar{Y}_i, \sigma^2\, 1'_{oi}(X'X)^{-1} 1_{oi})$$

$$\hat{Y}_j \sim N(\bar{Y}_j, \sigma^2\, 1'_{oj}(X'X)^{-1} 1_{oj})$$

donde $1'_{oi} = (0,\ldots,1,\ldots,0)$ en el lugar i-ésimo vale 1(respectivamente para j), es decir que para i $1'_{oi}(X'X)^{-1}\, 1_{oi} = C_{ii}$ (respectivamente para j $1'o(X'X)1_o = C_{jj}$ que corresponde al j-ésimo elemento de la diagonal (respectivamente j-ésima columna j-ésimo renglón) de la matriz $(X'X)^{-1}$. Es decir

$$V(\hat{Y}_i) = \sigma^2 C_{ii} \Rightarrow \hat{V}(\hat{Y}_i) = CME\ C_{ii}$$

además $COV(\hat{Y}_i,\hat{Y}_j) = \sigma^2 C_{ij} \Rightarrow \widehat{COV}(\hat{Y}_i,\hat{Y}_j) = CME\ C_{ij}$

(la correlación entre las medias puede estar causada por un diseño de bloques incompletos o alguna covariable usada en el análisis), luego entonces

$$V(\hat{Y}_i - \hat{Y}_j) = \sigma^2 \, (C_{ii} - 2C_{ij} + C_{jj})/2$$

$$\Rightarrow \hat{V}(\hat{Y}_i - \hat{Y}_j) = \text{CME} \, (C_{ii} - 2C_{ij} + C_{jj})/2$$

Si $\overline{Y}_i$ y $\overline{Y}_j$. son dos medias de tratamientos (previamente ordenadas) entonces las declaramos distintas si la diferencia excede

$$Q^{\alpha P}_{P,\nu} \sqrt{\text{CME} \, (C_{ii} - 2C_{ij} + C_{jj})/2} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Nuevamente observe la similitud que guarda (3) con las pruebas de SNK y DMSH: Si las medas no están correlacionadas, entonces $C_{ij} = 0$ y $C_{ii} = 1/n_i$ y $C_{jj} = 1/n_j$ con lo cual (3) es completamente equivalente a (2). Duncan propuso en 1957 una prueba más potente (se verá después)

6. Prueba de Bonferroni

Esta prueba se basa en la desigualdad de Bonferroni, la cual se demuestra en seguida, y encuentra su aplicación a las comparaciones múltiples.

La desigualdad de Bonferroni asegura que si $\alpha_i = P(A_i)$ para A_i un evento aleatorio, $i=1,\ldots,P$; entonces

$$1-P\left(\bigcup_{i=1}^{P} A_i\right) \geq 1-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_p \qquad \ldots\ldots (1)$$

es decir

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{P} A_i^C\right) \geq 1-\sum_{i=1}^{P} P\,(A_i).$$

La demostración de esta desigualdad se hará por inducción.

Supongamos que si A_1 y A_2 son dos eventos

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

y en consecuencia

$$P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2) \qquad \ldots\ldots (2)$$

supongamos que la expresión (2) es válida para p-1 eventos

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_{p-1}) \leq \sum_{i=1}^{P-1} P(A_i) \qquad \ldots\ldots (3)$$

y tendremos que mostrar que (3) es válida para p eventos. Como (2) es válida para dos eventos, entonces

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_p) = P((A_1 \cup \ldots \cup A_{p-1}) + \cup A_p)$$

$$\leq P(A_1 \cup \ldots \cup A_{p-1}) + P(A_p)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{P-1} P(A_i) + P(A_p)$$

$$= \sum_{i=1}^{P} P(A_i)$$

entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{P} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{P} P(A_i)$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{P} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{P} P(A_i)$$

haciendo $P(A_i) = \alpha_i$ tiene lugar (1), con lo cual la desigualdad de Bonferroni queda demostrada.

Sean $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2{}_i)$ $\forall i$, $i=1,\ldots,P$; donde los Y_i son variables aleatorias, no necesariamente independientes. Sean S_i^2 los estimadores de σ_i^2 con distribución ji-cuadrada con ν_i grados de libertad respectivamente, de tal manera que

$\nu_i S_i^2/\sigma_i^2 \sim \chi^2_{\nu i}$ para todo i, $i=1,\ldots,P$; entonces

$$T_i = \frac{Y_i - \mu_i}{S_i}, \quad i=1,\ldots,P \qquad \ldots\ldots \quad (4)$$

tiene una distribución de t-student con ν_i grados de libertad para $i=1,\ldots,P$.

En seguida se expone un resultado muy útil, que servirá para obtener la prueba de Bonferroni para comparaciones múltiples.

Considere

$$A_i = \left\{ \left| \frac{Y_i - \mu_i}{S_i} \right| \geq t_{\nu_i}^{\alpha/2P} \right\} \quad i=1,\ldots,P$$

entonces

$$P(A_i) = \frac{\alpha}{P}$$

y por la desigualdad de Bonferroni

$$P\left\{ \bigcup_{i=1}^{P} A_i \right\} \leq \sum_{i=1}^{P} P(A_i)$$

$$= \underbrace{\frac{\alpha}{P} + \ldots + \frac{\alpha}{P}}_{P\text{ - veces}}$$

$$= p\left(\frac{\alpha}{p}\right)$$

$$= \alpha$$

$$\therefore \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) \leq \alpha \qquad \ldots\ldots \quad (5)$$

Observese que en

$$A_i = \left\{ \left| \frac{Y_i - \mu_i}{S_i} \right| \geq t_{\nu i}^{\alpha/2P} \right\},$$

$t_{\nu i}^{\alpha/2P}$ son los porcentiles superiores $\alpha/2P$ de una cola (ó $2/P$, para dos colas) de una distribución t-Student con ν_i grados de libertad $i=1,\ldots,p$ respectivamente. Entonces con probabilidad mayor o igual a $1-\alpha$, se tendrá

$$\tau_i \in Y_i \pm t_{\nu_i}^{\alpha/2P} S_i \quad \text{para} \quad i=1,\ldots,P$$

Pero el interés de probar la desigualdad de Bonferroni reside en poder encontrar un estadístico de prueba para comparaciones múltiples. En realidad sucede que si para cada $\sigma_i^2 = d_i\sigma^2$, $i=1,\ldots,p$ donde $d_1, d_2,\ldots,d_p$ son constantes conocidas, σ^2 es desconocido pero su estimador $S_i^2 = d_i S^2$ es tal que S^2 = CME tiene una distribución ji-cuadrada.

Entonces los numeradores de la expresión (4) consisten de variables aleatorias dependientes o independientes con distribución normal y los denominadores contienen una variable con distribución ji-cuadrada con sus respectivas constantes normalizadas.

Si tenemos un análisis de varianza para un modelo con un criterio de clasificación y de efectos fijos con n obs. por celda

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \, \overline{Y}_{i.}$$

es una combinación lineal de las medias de los tratamientos, tal que $\sum_{i=1}^{n} C_i = 0$, así la expresión (4) queda

$$T_i = \frac{\sum_i C_i \overline{Y}_{i.} - \sum C_i \mu_i}{\left(\sum C_i^2/n\right) \quad \text{CME}} \qquad \ldots\ldots \quad (6)$$

pero además si CME tiene ν grados de libertad, $\nu = np-p$ para p tratamientos con n observaciones, por celda, por lo que se tiene

$$\frac{(np-p) \left(\sum_i C_i^2 /n\right) \text{CME}}{\left(\sum_i C_i^2 /n\right) \sigma^2} \sim \chi^2_{np-p}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{(np-p)\ \ CME}{\sigma^2} \sim \chi^2_{np-p} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

bajo Ho: $\sum_{i=1}^{n} C_i\mu_i = 0$ tendremos que (5) equivale

$$P\left[\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} C_i\ \overline{Y}_{i.}}{\left(\sum_{i=1}^{n} C_i^2/n\right) CME}\right| \geq t_{np-p}^{\alpha/2p}\right] \leq \alpha$$

$\Longleftrightarrow$

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} C_i\ \overline{y}_{i.} \geq t_{np-p}^{\alpha/2p} \sqrt{CME \sum_{i=1}^{n} C_i^2/n}\right] \leq \alpha$$

En términos de intervalos de confianza

$$\sum_{i=1}^{n} C_i\mu_i \ \varepsilon \ \sum_{i=1}^{n} C_i\overline{y}_{i.} \pm t_{np-p}^{\alpha/2r} \sqrt{CME \sum_{i} C_i^2/n}$$

análogamente si nuestro modelo (de efectos fijos), está reparametrizado, en términos de regresión tendremos

$$Y = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$$

tal que se tengan p coeficientes de regresión, β_1, β_2, β_2, ..., β_p podemos probar

$$|\hat{\beta}_i - \beta_i^0| \geq t_{n-p}^{\alpha/2p} \sqrt{CME\ C_{ii}} \quad i=1,...,p$$

donde C_{ii} es el i-ésimo elemento de la diagonal de $(X'X)^{-1}$ (donde $V(\hat{\beta}_1) = \sigma^2 C_{ii}$)

Retomando nuestro ejemplo de las válvulas protéticas, de Anderson, V.(1974) y suponiendo que las válvulas son fijas, se tiene que para comparaciones dos a dos

$$\sum_{i=1}^{2} C_i /12 = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

por lo que

$$\sqrt{CME \sum C_i^2 /n} = \sqrt{1.75\ (1/6)} = 0.540$$

Ahora encontramos el cuantil $t_\nu^{\alpha/2p}$ que para nuestro ejemplo 2p=8 y ν=4, en la tabla III del apéndice, obtenida de BAILEY (1977), para una α=.05

$$t_4^{.05/8} = t_4^{.625} = 5.2611$$

$$\therefore \quad t_4^{.625} \sqrt{1.75(1/6)} = 2.841$$

de donde obtenemos

$$\underline{A \quad B \quad C \quad D}$$

Sin embargo cabe señalar en que si hay interés en disminuir la probabilidad de que suceda al menos un falso rechazo menor que α, es mejor utilizar la prueba de Tukey. Fisher consideró a este método de pruebas de t de Bonferroni como una alternativa al de DMS (Fisher 1974, secc. 24).

7. Prueba del Módulo Máximo Estudentizado

Esta técnica fue introducida por Tukey y Roy & Bose en 1953; existe una estrecha analogía entre esta prueba y la de rangos estudentizados de Tukey.

Considere $Y_i \sim N(\mu_i, d_i\sigma^2)$ $i=1,\ldots,p$. Las constantes d_i se suponen conocidas, pero μ_i y σ^2 son desconocidas para

$i=1,\ldots,p$. Sea S^2 una variable con distribución ji-cuadrada con ν gl. tal que $\hat{\sigma}^2 = S^2$ que es independiente de los Y_i. Entonces con probabilidad $1-\alpha$,

$$\mu_i \in Y_i \pm |m|^{\alpha}_{p,\nu} \sqrt{d_i S^2} \quad i=1,\ldots,p \quad \ldots\ldots (1)$$

donde $|m|^{\alpha}_{p,\nu}$ es el punto superior de una distribución de módulo máximo estudentizado con parámetros p,ν.

Para probar (1) basta mostrar que

$$\left| \frac{Y_i - i}{\sqrt{diS^2}} \right| \leq C \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\underset{1 \leq i \leq p}{\text{máx.}} \left\{ |Y_i - \mu_i| \right\}}{\sqrt{d_i S^2}} \leq C \quad \ldots\ldots (2)$$

lo cual es inmediato.

Note que en contraposición a la estadística t de Bonferroni, la del módulo máximo pide que las Y_i's sean independientes. Además se tiene un denominador común S=CME que debe ser independiente para todos los numeradores.

La prueba del módulo máximo también puede extenderse para construir intervalos de confianza de combinaciones lineales y no necesariamente contrastes.

$$\sum_{i=1}^{p} C_i\mu_i \in \sum_{i}^{k} C_iY_i \pm |m|_{p,\nu}^{\alpha} S \sum_{i=1}^{p} |C_i \sqrt{d_i}| \qquad \ldots\ldots \quad (3)$$

para cualquier combinación lineal no necesariamente contraste. Note que (1) es un caso particular de (3), haga (i=1 ∀i, $i=\overline{i,P}$. Para probar (3) basta con mostrar que

$$\underset{i \le i \le p}{\text{máx.}} \left\{|Y_i-\mu_i|\right\} \le C \Longleftrightarrow |\sum_{1}^{p} C_i(Y_i- {}_i)| \le C \sum_{1}^{p} |C_i|$$

para toda combinación lineal.

⇐ Si se selecciona $C_1=1$, $C_2= \ldots = C_p=0$ entonces

$$|\sum_{1}^{p} C_i(Y_i-\mu_i)| = |Y_1- {}_1| \le C = C\sum_{1}^{p} |C_i|$$

repitiendo este proceso para cada i=2,...,p entonces

$$|Y_i-\mu_i| \le C$$

por (2)

$$\Longrightarrow \quad \underset{1 \le i \le p}{\text{máx.}} \left\{|Y_i-\mu_i|\right\} \le C$$

$\Rightarrow$

$$\left|\sum_{1}^{p} C_1 (Y_i - \mu_i)\right| \leq \sum_{1}^{p} |C_i| \cdot |Y_i - \mu_i|$$

por la expresión (2)

$$\leq \max_{1 \leq i \leq p} \left\{ |Y_i - \mu_i| \right\} \sum_{1}^{p} |C_i|$$

por hipótesis

$$\leq C \sum_{1}^{p} |C_i|$$

Nuestro interés fundamental es utilizar esta prueba para comparaciones múltiples; el único requisito que debemos cumplir es que exista independencia en los numeradores de (2); sin independencia no se puede aplicar esta prueba.

Los competidores de esta prueba para intervalos (1) son la F de Scheffe, la t de Bonferroni y la de rangos estudentizados de Tukey. Todas estas pruebas no son muy exactas porque no utilizan todas las posibles hipótesis sobre las medias, en consecuencia la prueba del módulo máximo es mejor.

La extensión (2), prueba de módulo máximo, presenta la ventaja que funciona bien cuando prueba combinaciones lineales que no involucren diferencias de medias y la prueba de rangos estudentizados funciona mejor para constrastes, La prueba de Scheffè es mejor opción para probar combinaciones de medias, es mejor si el diseño es balanceado, mientras que la del módulo máximo ofrece intervalos más cortos cuando determinada media es de interés.

En nuestro ejemplo supongamos que deseamos obtener un intervalo para la media más alta, A. La expresión (1) queda

$$\mu_4 \in \bar{Y}_A \pm |m|^{\alpha}_{p,\nu} \sqrt{CME/n}$$

para p=4, ν =4, $\sqrt{CME/n} = \sqrt{1.75/12} = 0.382$, $\bar{Y}_A = 7.417$, en la tabla IV del apéndice, tomado de Hahn y Hendrickson (1971), $|m|^{.05}_{4\,3} \simeq 3.62$.

$$\mu_4 \in 7.417 \pm 3.62\ (0.382)$$

$$\mu_4 \in (6.034,\ 8.8)$$

Cuando $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ estas correlaciones Hahn y - Hendrickson (1971), proponen una modificación en los cuantiles $|m|^{\alpha}_{p,\nu}$ convirtiendolo en $|m|^{\alpha}_{p,\nu,\rho}$ donde ρ es la correlación que hay entre las Y_i(s), las tablas aceptan ρ=0, 0.2, 0.4, 0.5 y α=0.10, 0.05 y 0.01.

CAPITULO II

COMPARACIONES MULTIPLES CONTRA UN CONTROL

Es frecuente que en algunos experimentos se haga uso de un "testigo" o "control" el cual es considerado como otro tratamiento con lo que se pueden hacer comparaciones para verificar la efectividad de los otros tratamientos.

Para clasificar esta idea considere el siguiente ejemplo, tomando de Cochran & Cox (1957): Supóngase que se desea comparar la efectividad de 3 tratamientos, que son similares cualitativamente; por ejemplo 3 fertilizantes nitrogenados los cuales proporcionen la misma cantidad de nitrógeno. El control sería un tratamiento sin nitrógeno. Pueden distinguirse 3 casos: i) se ha probado anteriormente la efectividad de este tipo de tratamiento y queda por descubrir cuál de los 3 tratamientos es mejor, aquí no hay necesidad de controles; ii) el tipo de tratamiento es por lo general efectivo pero ocasionalmente las condiciones de la prueba pueden ser tales que cambien la respuesta , aquí puede ser conveniente agregar un control como tratamiento; iii) Puede no saberse si el tipo de tratamiento es efectivo, aqui es muy necesario un control e inclusive puede ocurrir que el control se repita varias veces.

Jellinek (1946)- Citado por Cochran & Cox (1957)-expone un ejemplo interesante sobre la necesidad de incluir --controles. Un medicamento contra el dolor de cabeza contenía 3 ingredientes, A, B y C. Para probar si los ingre--dientes B y C eran necesarios, la mezcla completa fue comparada con las de AC y AB. Se tomaron 199 individuos, cada uno de los cuales fue tratado con cada droga por un periodo de 2 semanas, administrandose la droga cada vez que el individuo tenía dolor de cabeza. El éxito fue medido - por el cociente del número de dolores de cabeza aliviados, entre el número de dolores de cabeza total durante las dos semanas. Los éxitos promedio fueron 0.84 para ABC, 0.80 - para AC y 0.80 para AB. Posteriormente se corrió el mismo experimento, agregando un control - un placebo; esta -- prueba se realizó bajo las mismas condiciones que las tres mezclas restantes. Para este grupo de individuos cerca de 120, aprox. 60%, informaron del alivio a su dolor de cabeza por el control. Además el control permite aislar al - grupo de 79 individuos cuyos dolores de cabeza no fueron - aliviados por el proceso. Para este grupo, los éxitos promedio fueron 0.88 por ABC, 67 para AC y .77 para AB.

Como se observa muchos experimentos tienen necesidad de -- incluír un control, cierto tipo de comparaciones múltiples fueron pensadas exclusivamente para control. Pruebas que se exponen son la de Dunnett (1955), Gupta y Sobel (1958), Williams (1971, Dudewicz-Ramberg-Chen (1975) y de Paulson (1962).

1. Prueba de Dunnett.

Si tenemos un experimento con p tratamientos, incluídos el control podemos particionar los p-1 grados de libertad (g.l.) de los tratamientos en 1 gl. Para comparar el control vs. el promedio de los demás tratamientos gl. Para comparar el resto de los tratamientos. Si estos p-1 tratamientos son significativamente distintos, entonces tiene sentido el tener 1 gl. para la comparación del control vs. el promedio del resto de los tratamientos. Pero es válido que el experimentador desee comparar el control con cada uno de los p-1 tratamientos y no precisamente contra su promedio. Aquí la prueba de Duncan no se puede aplicar por que la diferencia entre el control y un tratamiento parece razonable que sea mayor que la diferencia entre dos tratamientos, o sea apriori existen comparaciones que podrían ser significativas (la del control con algún tratamiento).

Dunnet (1955 -1965) ofrece un procedimiento para la estimación simultánea por intervalos o para comparaciones múltiples de un control contra cada uno de los tratamientos restantes, él mismo construyó sus tablas.

Considere el modelo completamente al azar.

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \qquad \begin{cases} i = 0, 1, \ldots, p \\ j = 1, \ldots n \end{cases}$$

tal que $\varepsilon_{ij} \sim (0,\sigma^2)$, el tratamiento $i=0$ se utilizará como el control, entonces

$$Y_{ij} \sim N(\mu + \tau_i, \sigma^2)$$

El problema es comparar cada media de tratamiento con el control para así decidir cuáles tratamientos difieren - del control. Para pruebas de significancia la hipótesis - de nulidad es

$$\begin{aligned} & H_o: \mu + \tau_i - (\mu + \tau_o) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & H_o: \tau_i = \tau_o \end{aligned} \qquad i = 1, \ldots, p$$

contra la hipótesis alternativa.

$$H_a: \tau_i - \tau_o \neq 0$$

el estimador de $\mu + \tau_i$ es $\bar{Y}_i$ y el de σ^2 es CME

$$\text{CME} = \frac{1}{(p+1)(n-1)} \sum_{i,j} (Y_{ij} - \bar{Y}_{i\cdot})^2 ,$$

entonces

$$\frac{(\bar{Y}_i - \bar{Y}_{o.}) - (\tau_i - \tau_o)}{\sqrt{\sigma^2\, 2/n}} \sim N(0,1) \qquad \text{———(1)}$$

por otro lado, $\hat{\sigma}^2$ = CME tiene una distribución ji-cuadrada

$$\frac{(p+1)(n-1)\,CME}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(p+1)(n-1)} \qquad (2)$$

por (1) y (2) obtenemos la distribución t de Student.

$$T_i = \frac{\dfrac{(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{o.})-(\tau_i - \tau_o)}{\sigma\sqrt{2/n}}}{\sqrt{\dfrac{(p+1)(n-1)\,CME}{\sigma^2(p+1)(n-1)}}}$$

En algunos experimentos suele existir interés en algunos tratamientos no sólo si estos son distintos, sino cuando son mejores, quiere decir que las esperanzas de las medias son muy grandes o muy pequeñas, dependiendo del contexto que el control. Ello se traduce en obtener intervalos de confianza o pruebas de significancia de una cola; es decir, las pruebas de significancia serían

$$|Y_{i.}-Y_{o.}| > d^{\alpha}_{p,(p+1)(n-1)}\sqrt{CME(2/n)}\ .$$

y los intervalos de confianza

$$\tau_i - \tau_o \geq \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{o.} - d^{\alpha}_{p,(p+1)(n-1)}\sqrt{CME(2/n)}\ .$$

Las expresiones (5) y (6) pueden ser extendidas para comparar combinaciones lineales, y no necesariamente contrastes, de los tratamientos distintos del control, si hacemos

$$Y_i = (\bar{Y}_{i.} - Y_{o.}) - (\tau_i - \tau_o) \quad ,$$

$$c = |d|^{\alpha}_{p,(p+1)(n-1)} \sqrt{CME(2/n)} \quad ,$$

y $\quad c_1, c_2, \ldots, c_p$ constantes,

el problema consiste entonces en mostrar que

$$\max_{1 \leq i \leq p} \{ |y_i| \} \leq c$$

$$\Longleftrightarrow \left| \sum_1^p C_i Y_i \right| \leq C \sum_1^p |C_i|$$

Prueba

$\Leftarrow$ Seleccionar $C_1 = 1$, $C_2 = \ldots = C_p = 0$, entonces es inmediato que $|Y_1| \leq C$; repitiendo este procedimiento para - $C_2, \ldots, C_p$ se tendrá que $|Y_i| \leq C$, $i=1, \ldots, p$ y es equivalente a $\max\{|Y_i|\} \leq C$.

$\Rightarrow$

$$\left| \sum_1^p C_i Y_i \right| \leq \sum_1^p |C_i| \, |Y_i| \leq \max_{1 \leq i \leq p} \{|Y_i|\} \sum_1^p |C_i|$$

$$\Longleftrightarrow \quad T_i = \frac{(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{o.}) - (\tau_i - \tau_o)}{\sqrt{CME(2/n)}} \quad ; \; i = 1, \ldots, p$$

Para cada T_i se tiene una distribución de t-student con (p+1)(n-1) grados de libertad, de manera que el punto crítico está determinado por $t^{\alpha/2}_{(p+1)(n-1)}$

Por otro lado tenemos que

$$\left|\frac{(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{o.}) - (\tau_i - \tau_o)}{\sqrt{CME(2/n)}}\right| \leq C \iff \frac{\underset{1\leq i\leq p}{\text{Max}} \{|(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{o.}) - (\tau_i - \tau_o)|\}}{\sqrt{CME(2/n)}} \leq C, \quad \text{———} (3)$$

bajo H_o: $\tau_i - \tau_o = 0$, el cociente (3) tiene la distribución de Dunnett, esto es

$$\frac{\underset{1\leq i\leq p}{\text{Max}} \{|\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{o.}|/\sqrt{2}\}}{\sqrt{CME/n}} \sim \frac{\underset{1\leq i\leq p}{\text{Max}} \{|\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{o.}|/\sqrt{2}\}}{\sqrt{\chi^2_\nu/\nu}}. \quad \text{———} (4)$$

Entonces se tendrá el siguiente enunciado probabilístico

$$P\left\{\frac{\underset{1\leq i\leq p}{\text{Max}}\{|\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{o.}|/\sqrt{2}\}}{\sqrt{CME/n}}\right\} > |d|^{\alpha}_{p,(p+1)(n-1)} = \alpha$$

$$\iff P\left\{\underset{1\leq i\leq p}{\text{Max}} \{|\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{o.}|\}\right\} \geq |d|^{\alpha}_{p,(p+1)(n-1)}\sqrt{CME(2/n)}\} = \alpha.$$

Por lo tanto la H_o: $\tau_i - \tau_o = 0$ se rechaza si

$$|\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{o.}| > |d|^{\alpha}_{p,(p+1)(n-1)} \sqrt{CME(2/n)} \qquad (5)$$

dónde $|d|^{\alpha}_{p,(p+1)(n-1)}$ es el punto superior al 100α % de la distribución de Dunnett (4). Los intervalos apropiados son

$$\tau_i - \tau_o \in \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{o.} \pm |d|^{\alpha}_{p,(p+1)(n-1)} \sqrt{CME(2/n)} \qquad (6)$$

por hipótesis $\max\limits_{1 \le i \le p} \{|Y_i|\} \le C$

entonces $\max\limits_{1 \le i \le p} \{|Y_i|\} \sum\limits_1^p |C_i| \le C \sum\limits_1^p |C_i|$

por lo tanto $|\sum\limits_1^p C_i Y_i| \le C \sum\limits_1^p |C_i|$ □

En realidad se tiene que para cada $C_i \ge 0$ con $\sum\limits_1^p C_i = 1$, por lo cual tendremos

$$|\sum_1^p C_i Y_i| \le C,$$

es decir

$$\left| \sum_{1}^{p} C_i \left(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{o.} \right) - (\tau_i - \tau_o) \right| \leq |d|^{\alpha}_{p,(p+1)(n-1)} \sqrt{CME(2/n)},$$

la prueba de significancia respectiva bajo H_o: $\tau_i - \tau_o = 0 \ \forall_i$, es

$$P\left[\left| \left[\sum_{1}^{p} C_i \bar{Y}_{i.} \right] - \bar{Y}_{o.} \right| \leq |d|^{\alpha}_{p,(p+1)(n-1)} \sqrt{CME(2/n)} \right] = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left[\left| \left[\sum_{1}^{p} C_i \bar{Y}_{i.} \right] - \bar{Y}_{o.} \right| > |d|^{\alpha}_{p,(p+1)(n-1)} \sqrt{CME(2/n)} \right] = \alpha$$

de manera que la H_o: $\tau_i - \tau_o = 0$ para toda i, se rechaza si

$$\left| \left[\sum_{1}^{p} C_i \bar{Y}_{i} \right] - \bar{Y}_{o.} \right| > |d|^{\alpha}_{p,(p+1)(n-1)} \sqrt{CME(2/n)}$$

(note que $\sum_{1}^{p} C_i \bar{Y}_{o.} = Y_{o.} \sum_{1}^{p} C_i = \bar{Y}_{o.}$ pues $\sum_{1}^{p} C_i = 1$)
para intervalos de confianza se tiene

$$\left(\sum_{1}^{p} C_i \tau_i\right) - \tau_o \in \left(\sum_{1}^{p} C_i \bar{Y}_{i.}\right) - \bar{Y}_{o.} \pm |d|^{\alpha}_{p,(p+1)(n-1)} \sqrt{CME(2/n)}$$

Para cualquier $C_1, \ldots, C_p$ tal que $C_i \geq 0$ $\sum_{1}^{p} C_i = 1$. Si la prueba es de una cola, las expresiones son similares a las anteriores.

Las tablas que utilizamos son las de Dunnett (1964). quien la construyó para una y dos colas. Una buena sugerencia para saber cuando utilizar la prueba de una o dos colas, es considerar si a priori se conoce que el control es "superior" a los demas tratamientos. Es decir, si estamos comparando fungicidas y el control es uno estândar, la prueba de dos colas es adecuada cuando a priori no se conoce la efectividad del control (si es superior o inferior) en relación a los restantes. Existen tablas que abarcan más de 50 tratamientos, para pruebas de una cola, dadas por Gupta y Sobel (1957).

Para ilustrar este método supongamos que la vâlvula F es nuestro control, si suponemos que se desconoce qué tan "buena" o "mala" es la vâlvula D seleccionamos una prueba de 2 colas; de la tabla de Dunnett (1964) para $p=5$ y $\nu=4$, grados de libertad del error (note que $p=5$ porque el tratamiento faltante es el control), entonces de la tabla V, tomado de Dunnett (1964), $|d|^{.05}_{4,4} = 2.85$

$$|d|^{.05}_{4,4}\sqrt{CME\ (2/n)} = 2.85\sqrt{1.75(2/12)} = 1.539$$

las diferencias de la válvula D deben juzgarse contra A,B y C . Dado que la media de D=4.583, cualquier otra válvula será diferente de D si su respectiva media es al menos 4.583+1.539=6.122, como las medias restantes son

A	B	C
7.417	6.917	4.917

se concluye que la válvula C no es diferente de la válvula D, en tanto que las válvulas A y B obtienen una mayor respuesta que D.

Las pruebas anteriores suponen que existe igual número de repeticiones por tratamiento. Si el control se repite n_c veces y el i-ésimo tratamiento se repite n_i veces, definimos

$$S_d = \sqrt{S^2\ (1/n_c + 1/n_i\ )} \quad ; \; S^2 = CME$$

la cual es completamente equivalente a

$$S_d = \sqrt{S^2 (2/n)} \qquad ; \; S^2 = CME$$

si el diseño es balanceado. De manera más general si las varianzas dentro de cada tratamiento no son homogéneas, definimos

$$S_d = \sqrt{S_c^2/n_c + S_i^2/n_c}$$

donde S_c^2 es la suma de cuadrados medios del error originado por el control y S_i^2 es la suma de cuadrados medios del error originado por el i-ésimo tratamiento; para los grados de libertad usamos la regla de Satterthwite para combinaciones lineales de los cuadrados medios

$$\hat{\gamma}_i = \frac{(S_c^2/n_c + S_i^2/n_c)^2}{(S_c^2/n_c)^2/\gamma_c + (S_i^2/n_i)^2/\gamma_i} \qquad ; \; i = 1,\ldots,p.$$

γ_c son los gl. correspondientes del $S_c^2 = CME_c$ y γ_i son los gl. correspondientes al S_i^2=CME; (Ver OSTLE 1980,pag. 336).

Robson (1961) extiende la prueba de Dunnett al caso - de un diseño balanceado de bloques incompletos.

2. PRIMERA PRUEBA DE WILLIAMS. (1971)

Williams (1971) consideró casos de experimentación, - principalmente en Biología, en los cuales los tratamientos contienen diferentes dosis de cierta sustancia y un con--- trol. En tales experimentos, particularmente en estudios sobre toxicidad, debe determinarse la dosis mínima de res- puesta. La prueba propuesta está pensada para ser sensi-- ble ante cambios en la media de una población, llamada control.

El autor enfoca su trabajo a situaciones de la mínima dosis cierta respuesta. En estudios sobre toxicidad es muy común preguntarse cual es la dósis mínima de determinada - droga, pesticida o cualquier sustancia de interés, que permita detectar una respuesta. Una vez que se ha encontrado que existe cierta respuesta es deseable determinar la do-- sis más chica con la cuál exista respuesta.

A primera vista parece natural pensar que la solución es utilizar la metodología de superficies de respuesta. -- Sin embargo cuando se tienen más de tres tratamientos la prueba pierde potencia; pero el problema fundamental sobreviene cuando se trata de determinar la mínima dosis con la -

cual exista respuesta, a partir del modelo de regresión -- ajustado. Además es muy frecuente ajustar curvas logísticas para la función de respuesta, y en estos casos son muchas las dificultades.

La prueba de Dunnett (1955, 1964) se puede utilizar - para comparar la dosis cero, control, contra otras dosis, pero se pierde potencia a causa de la dependencia existente en la dosis de respuesta.

Williams supone que los tratamientos, incluídos en el control, son $i=0,1,\ldots,k$ (0, es el control y los tratamientos restantes son $1,2,\ldots k$). En el experimento se tienen- $k+1$ tratamientos, incluído control, con igual número de repeticiones n, donde $\bar{Y}_i$ es el estimador insesgado de la media μ_i, con varianza estimada por S^2/n, tal que

$$\bar{Y}_i \sim N(\mu_i, \sigma^2/n)$$

y

$$\frac{\gamma S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_\gamma$$

Supongase que la función de respuesta es no decreciente es decir,

$$\mu_o \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_k \quad ,$$

si los tratamientos

$$T_o \geq T_1 \geq T_2 \geq \cdots \geq T_k$$

están dispuestos en orden creciente de dósis. El primer paso es encontrar el estimador $\hat{\mu}_i$ de máxima verosimilitud, bajo la hipótesis alternativa de que existe una respuesta. Bertholomew (1961) encuentra el estimador $\hat{\mu}_i$ por máxima verosimilitud. Si

$$\bar{Y}_o \leq \bar{Y}_1 \leq \bar{Y}_2 \leq \cdots \leq \bar{Y}_k$$

enconces $\hat{\mu}_i = \bar{Y}_i$ (para $i=0,1,\ldots,k$) de otra manera se tendrá que para al menos un i sucederá $\bar{Y}_i > Y_{i+1}$. Reemplacemos $\bar{Y}_i$ y $\bar{Y}_{i+1}$ por la media. Donde n_i es el número de repeticiones del i-ésimo tratamiento.

$$\bar{Y}_{i,\,i+1} = (n_i \bar{Y}_i + n_{i+1} \bar{Y}_{i+1})/(n_i + n_{i+1})$$

de esta manera la sucesión se ha reducido a k medias

$$\bar{Y}_o, \bar{Y}_1, \ldots, \bar{Y}_i, \bar{Y}_{i,i+1}, \bar{Y}_{i+2}, \ldots, \bar{Y}_k$$

Si las medias no están dispuestas en un orden crecien te debemos detenernos y estimar $\hat{\mu}_j$ por $\bar{Y}_j$ (para $j=0,1,\ldots, i-1, i+1,\ldots, k$) y estimar a $\hat{\mu}_i$ y $\hat{\mu}_{i+1}$ por $\bar{Y}_{i,\ i+1}$.

De otra menera el proceso de ponderación debe repetir se, dando a cada $\bar{Y}_{j,\ j+1}$ un peso de (n_j+n_{i+1}). Por ejemplo si

$$\bar{Y}_{i,i+j} > \bar{Y}_{i+2}$$

la ponderación es

$$\bar{Y}_{i,i+j,\ i+2} = \left[(n_i + n_{i+1})\ \bar{Y}_{i,\ i+1} + n_{i+2}\ \bar{Y}_{i+2}\right] / (n_i+n_{i+1}+n_{i+2})$$

como la estimación común de μ_i, μ_{i+1} y μ_{i+2}, siempre y cuan do las medias muestrales estén ordenadas de manera ascenden te.

De esta manera obtenemos los estimadores $\hat{\mu}_i$ de máxi ma verosimilitud, con media $Y_{i,i+j,\ldots,i+j}$ que estiman el - valor de las medias poblacionales

$$\hat{\mu}_i,\quad \hat{\mu}_{i+1},\ldots,\quad \hat{\mu}_{i+j},$$

algunas de estas pueden ser iguales por el proceso de pon deración. Suponiendo que las dosis están repetidas en la- misma cantidad, para todas las dosis incluyendo la dosis -

cero, la prueba es

$$\bar{t}_p = (\hat{\mu}_p - \bar{Y}_o) / \sqrt{2S^2/n}$$

para p=k, k-1,..., 1 en este orden deteniendonos tan pronto como obtengamos un resultado no significativo. Esta -- prueba es identica a la estadística de t-student cuando se comparan k tratamientos contra un control, excepto que $\hat{\mu}_p$ es reemplazado por Y_p. En muchos ejemplos el proceso de - ponderación la $\hat{\mu}_k = \bar{Y}_k$ y la $\bar{t}_k = t$. Por esta similitud la prueba de Williams se llamara prueba de $\bar{t}$.

La prueba t_k se compara con el punto crítico determinado por el cuantil $\bar{t}_{p,\gamma}$ de la tabla III del Apéndice, tomando de Williams (1971).

Obviamente que podemos aplicar la prueba presentada - en la siguiente forma alternativa. Declarar μ_p y μ_o diferentes si

$$(\hat{\mu}_p - \bar{Y}_o) > \bar{t}^{\alpha}_{p,\gamma} \sqrt{2S^2/n} \qquad (1)$$

(note que por simplicidad de la distribución estadística, probamos $\hat{\mu}_p$ contra la media $\bar{Y}_o$ sin ponderar y no contra $\hat{\mu}_o$, aun cuando μ_o no es estimada por $\bar{Y}_o$.)

Williams (1971) elabora el siguiente ejemplo numérico: Considere el caso de 6 niveles de dosis que deben ser comparados con una dosis cero como control, usando un diseño de bloques completamente al azar con 8 bloques. Supóngase además que *SE ESPERA QUE LA SUSTANCIA AUMENTE* la media de la respuesta. El control es Y_o y el resto son las medias de los tratamiento elegidos.

$$\overline{Y}_o = 10{,}4,\ \overline{Y}_1=9.9,\ \overline{Y}_2=10.0,\ \overline{Y}_3=10.6,\ \overline{Y}_4=11.4,\ \overline{Y}_5=11.9,\ \overline{Y}_6=11.7$$

y el cuadrado medio del error con $\nu=42$ grados de libertad es $CME=S^2 = 1.16$.

Primero cada $\hat{\mu}_i$ debe ser calculada por el proceso de ponderación descrito. Cada $n_i = n$ porque el diseño es balanceado y n=1. Observar que $\overline{Y}_o > \overline{Y}_1$, la ponderación es

$$\bar{Y}_{0,1} = (10.4+9.9)/2 = 10.15\ ;$$

entonces $\overline{Y}_{0,1} > \overline{Y}_2$ por este hecho

$$\bar{Y}_{0,1,2} = (2\bar{Y}_{0,1}+\bar{Y}_2)/3 = [2(10.15)+10]/3 = 10.1,$$

pero $\bar{Y}_{0,1,2} < \bar{Y}_3$ no debemos continuar.

En suma tenemos

$$\bar{Y}_{0,1,2} < \bar{Y}_3 < \bar{Y}_4 < \bar{Y}_5$$

pero como $\bar{Y}_5$ y $\bar{Y}_6$ no están dispuestos en el orden ascendente, es decir $\bar{Y}_5 > \bar{Y}_6$ las ponderamos

$$\bar{Y}_{5,6}=(\bar{Y}_5+\bar{Y}_6)/2 = (11.9+11.7)/2 = 11.8,$$

de esta manera las restricciones de orden se han satisfecho completamente y los estimadores de máxima verosimilitud bajo la hipótesis alternativa son

$$\hat{\mu}_0 = \hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2 = \bar{Y}_{o,1,2}=10.1; \ \hat{\mu}_3=\bar{Y}_3=10.6; \ \hat{\mu}_4=\bar{Y}_4 = 11.4;$$

$$\hat{\mu}_5 = \hat{\mu}_6 = \bar{Y}_{5,6} = 11.8$$

Por otro lado el denominador de la estadística es

$$CME(2/18 = 1.16(2/18) = 0.539,$$

asi calculamos $\bar{t}^{\alpha}_{p,\gamma}$ para $\alpha=.05$, $p=6,5,\ldots,1$ y $\nu=42 \simeq 40$gl, de la tabla VI del Apéndice

p :	6	5	4	3	2	1
$\bar{t}^{.05}_{p,40}$:	1.81	1.80	1.80	1.79	1.16	1.68
$\bar{t}^{.05}_{p.40}(0.539)$:	.98	.97	.97	.96	.95	.91

Aplicando el criterio de la desigualdad (1)

$\hat{\mu}_6 - Y_o = 11.8 - 10.4 = 1.4 > .98$ Concluir $\mu_6 > \mu_o$

$\hat{\mu}_5 - Y_o = 11.8 - 10.4 = 1.4 > .97$ Concluir $\mu_5 > \mu_o$

$\hat{\mu}_4 - Y_o = 11.4 - 10.4 = 1.0 > .97$ Concluir $\mu_4 > \mu_o$

$\hat{\mu}_3 - Y_o = 10.6 - 10.4 = 0.2 < .96$ Concluir $\mu_3 = \mu_o = \mu_1 = \mu_2$

La conclusión es que las cuatro primeras dosis fueron las más bajas en su respuesta observada.

En 1972 Williams extiende su prueba para casos donde el control tiene más repeticiones que el resto de los tratamientos (se ve en seguida).

La prueba $\bar{t}$ de Williams (1971) fue el resultado de conocimientos intuitivos más que de principios teóricos; basado fundamentalmente en la pérdida de la podencia de la prueba de Dunnett (1955, 1964) cuando hay dependencia en la variable de respuesta y basado en el tratamiento de -- Bartolomen (1961) sobre pruebas ordenadas en el análisis de la varianza.

Víctor Chew(1977) recomienda el siguiente enfoque de regresión: supongamos que se tienen los siguientes resultados

Dosis:	0 1 2 3 4 5
Respuesta:	5 7 10 15 25 40.

Si usamos el procedimiento anteriormente descrito, se concluiría que el tratamiento tiene una respuesta significativa con la dosis 3. Víctor Chew (1977) se inclina a pensar que la respuesta crece de manera continua de la dosis-0, de manera gradual en el inicio y despues con mayor rapidez en dosis mayores. Podemos ajustar una curva y estimar la dosis mínima cuya respuesta sea una deseada.

Prueba Secuencial de Williams para determinar la dósis mínima para encontra respuestas significativas.

Supóngase que usamos la $\bar{t}$ de Williams con un nivel de significancia α para examinar si hay alguna respuesta a la substancia bajo estudio. Si $\bar{t}_k < \bar{t}_k^{\alpha}$ la hipôtesis nula H_k: $\mu_0 = \mu_1 = \ldots = \mu_k$ no es rechazada y se puede concluir que no hay respuesta en tales dosis. Si $\bar{t}_k > \bar{t}_k$ rechazamos la hipôtesis H_k y concluimos que existe una respuesta, pero es posible que tal respuesta ocurra solamente en la dósis - k-ésima. Para verificar la evidencia para respuestas de- dosis menores a la k-ésima, necesitamos probar la hipôtesis nula H_{k-1}: $\mu_o = \ldots = \mu_{k-1} < \mu_k$ vs. Ha: $\mu_o \leq \mu_1 \leq \ldots \leq \mu_{k-1} \leq \mu_k$.

Una manera natural puede ser la estadística

$$\bar{t}_{k-1} = (\hat{\mu}_{k-1} - \bar{Y}_o)/\sqrt{2S^2/n}$$

$$\iff \bar{t}_{k-1}\sqrt{2S^2/n} = (\hat{\mu}_{k-1} - \bar{Y}_o)$$

pero $\bar{t}_{k-1} \leq \bar{t}_k$ (equivalentemente $(\hat{\mu}_{k-1}-\bar{Y}_o) \leq \bar{t}_k\sqrt{2S^2/n}$) por que $\hat{\mu}_{k-1} \leq \hat{\mu}_k$ y por tanto $\bar{t}_{k-1}$ depende de $\bar{Y}_k$, cuya media - μ_k bajo H_{k-1} es desconocida. Sin embargo H_{k-1} es probada solamente en casos cuando $\bar{t}_k > \bar{t}_k$ (ó equivalentemente cuando $(\hat{\mu}_{k-1} - \bar{Y}_o) > \bar{t}_k^{\alpha} \sqrt{2S^2/n}$). A causa del crecimiento de $\bar{t}_k^{\alpha}$ para k dada α, se sigue que el punto superior a una distribución de $\bar{t}_{k-1}$, condicionada a H_{k-1} y $\bar{t}_k > \bar{t}_k$, es independiente de μ_k y es el valor crítico t_{k-1}^{α} de la tabla VI del Apéndice, tomando de Williams (1971).

De esta manera comparamos $(\hat{\mu}_{k-1} - \bar{Y}_o)$ con $\bar{t}_{k-1}^{\alpha}\sqrt{2S^2/n}$

(i) Si $(\hat{\mu}_{k-1}-\bar{Y}_o) < \bar{t}_{k-1}^{\alpha}\sqrt{2S^2/n}$ concluir que hay evidencia para la respuesta solamente para la dosis k.

(ii) Si $(\hat{\mu}_{k-1}-\bar{Y}_o) > \bar{t}_{k-1}^{\alpha}\sqrt{2S^2/n}$ concluir que hay evidencia para las respuestas de ambas dosis, k y k-1, y - debe probarse la respuesta en dosis k-2 comparando - $\bar{t}_{k-2}\sqrt{2S^2/n} = (\hat{\mu}_{k-2} - \bar{Y}_o)$ con el valor de tablas de t_{k-2}^{α}.

El proceso (ii) debe repetirse usando el mismo nivel de - significancia α a lo largo del proceso hasta que el i-ésimo nivel sea del tipo (i). Entonces hay que detener el -

proceso y concluir que hay evidencia para la respuesta cuyas dósis sean mayores o iguales a i + 1.

EJEMPLO NUMERICO

Considere el mismo ejemplo, usado en esta prueba, en éste $k=6$, $\bar{Y}_o = 10.4$, $= \hat{\mu}_o = \hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2 = 10.1$, $\hat{\mu}_3 = 10.6$, $\hat{\mu}_4 = 11.4$, $\hat{\mu}_5 = \hat{\mu}_6 = 11.8$, $\sqrt{CME(2/8)} = 0.539$ y $\alpha = .05$, de la tabla VI del Apéndice

p:	6	5	4	3	2	1
$\bar{t}^{.05}_{p,40}$:	1.81	1.80	1.80	1.79	1.76	1.68
$\bar{t}^{.05}_{p.40}(.539)$:	.98	.97	.97	.96	.95	.91

$\hat{\mu}_6 - Y_o = 11.8 - 10.4 = 1.4 > .98$ indica que hay respuesta con dosis 6

$\hat{\mu}_5 - Y_o = 11.8 - 10.4 = 1.4 > .97$ indica que hay respuesta con dosis 5

$\hat{\mu}_4 - Y_o = 11.4 - 10.4 = 1.0 > .97$ indica que hay respuesta con dosis 4

$\hat{\mu}_3 - Y_o = 10.6 - 10.4 = 0.2 < .96$ indica que hay evidencia insuficiente para una respuesta con dosis 3

Conclusión:

Existe respuesta con dosis mayores o iguales a la 4.

3. Segunda Prueba de Williams (1972)

Williams (1912) extiende el procedimiento para casos-donde el control, la dósis cero, tiene un mayor número de -repeticiones que los niveles con dósis distintas de cero,-tanto para pruebas de una cola como de dos colas.

Considere que los tratamientos son $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ (donde τ_o es el control y $\tau_1, \ldots, \tau_k$ son los tratamientos restantes). En este experimento se tienen k+1 tratamientos, incluyendo el control. Si cada dósis distinta de cero tiene el mismo número de repeticiones, n_1 Y la cosis cero tiene $c(c \geq n)$ repeticiones, entonces para $\bar{Y}_i$ estimador de μ_i

$$\bar{Y}_o \sim N(\mu_o, \sigma^2/ c)$$

$$\hat{\mu}_i \sim N(\mu_i, \sigma^2/ n)$$

$$=> \quad \hat{\mu}_i - \bar{Y}_o \sim N(\mu_o - \mu_i, \sigma^2 (1/n+1/c))$$

$$=> \quad \frac{(\hat{\mu}_i - \bar{Y}_o)-(\mu_o - \mu_i)}{\sqrt{\sigma^2 (1/n+1/c)}} \sim N(0,1) \quad , \quad y \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}(1)$$

$$\frac{(n+c)\nu \quad S^2}{\sigma^2} \sim (n+c) \; \chi^2_\nu \; , \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}(2)$$

dividiendo la expresión (1) entre (2) se obtiene

$$\bar{t}_i = \frac{\dfrac{(\hat{\mu}_i - \bar{Y}_o) - (\mu_o - \mu_i)}{\sqrt{\sigma^2(1/n+1/c)}}}{\sqrt{\dfrac{(n+c)\nu\, S^2)}{(n+c)\nu\, \sigma^2}}}$$

$$\Rightarrow \qquad \bar{t}_i = \frac{(\hat{\mu}_i - Y_o) - (\mu_o - \mu_i)}{\sqrt{S^2/n + S^2/c}}$$

Bajo H_o: $\mu_o - \mu_i = 0$ para $i = 1, \ldots, p$.

$$\bar{t}_i = (\hat{\mu}_i - \bar{Y}_o) \,/\, \sqrt{S^2/n + S^2/c}$$

por lo que la regla de decisión correspondiente es

$$(\hat{\mu}_i - \bar{Y}_o) > \bar{t}^{\alpha}_{i,\nu} \sqrt{S^2/n + S^2/c} \quad ,$$

donde los valores de $\bar{t}^{\alpha}_i$ se pueden aproximar mediante la fórmula

$$\bar{t}^{\alpha}_{i,\nu}(\omega) = \bar{t}^{\alpha}_{i,\nu}(1) - 10^{-2}\beta(1 - 1/W)$$

para $W=c/n$, $\bar{t}^{\alpha}_i(1)$ se obtiene de la tabla VII del Apéndice, tomado de Williams (1972) y β es el suscrito dado por las mismas tablas. Por ejemplo si $n=18$, $c=6$, $\nu=30$, $\alpha=.05$ e $i=2$

$$\bar{t}^{.05}_{2,60}\ (6/18) = 1.776 - .03(1-18/16) = 1.836$$

COMPARACION DEL EFECTO ENTRE DIFERENTES DOSIS CON UN NUMERO DESIGUAL DE REPETICIONES.

Aunque los experimentos usualmente se diseñan con un número igual de repeticiones, puede suceder que al final del proceso el experimento quede desbalanceado por alguna razón ajena a los efectos de los tratamientos. En experimentos realizados con animales, cuando es necesario emplear bastante tiempo, las unidades de estudio pueden perderse por razones imputables SOLAMENTE al azar.

Si las repeticiones restantes del control son C y de las dosis de los tratamientos, $n_1, n_2, \ldots, n_k$, entonces los estimadores de máxima verosimilitud de μ_i para $i \geq 1$ son $\hat{\mu}_i$, con media $\bar{Y}_{i,\ i+1, \ldots,\ i+j}$ que estiman el valor de las medias poblacionales son

$$\hat{\mu}_i, \hat{\mu}_{i+1}, \ldots, \hat{\mu}_{i+j}$$

(Note que cada $\hat{\mu}_i$ se obtiene con el mismo procedimiento que en el caso anterior,

y la estadística de prueba es

$$\bar{t}_{i,\bar{\nu}} = (\hat{\mu}_i - \bar{Y}_o) / \sqrt{S^2/n_i + S^2/C},$$

por lo que la regla de decisión correspondiente es

$$(\hat{\mu}_i - \bar{Y}_o) > \bar{t}^{\alpha}_{i,\nu} \sqrt{S^2/n_i + S^2/C} \qquad \text{———(3)}$$

Afortunadamente Williams (1972 pág. 526) demuestra que para diferencias moderadas en las repeticiones de las dósis de tratamientos no hay necesidad de tablas especiales, por tanto se usaran las mismas tablas que para el caso anterior.

PARA UNA PRUEBA DE DOS COLAS

Es muy frecuente desconocer en qué sentido se orientará la respuesta esperada del control, si en sentido positivo o negativo, aún cuando es razonable suponer que la media de la respuesta es una función monótona de las dosis. Los valores de $\bar{Y}_i$ observados deben ser examinados antes de decidir si se prueba contra las alternativas

$$\mu_o \leq \mu_1 \leq \cdots \leq \mu_k$$

o contra las alternativas

$$\mu_o \geq \mu_1 \geq \cdots \geq \mu_k$$

En cada caso la estadística será

$$(\hat{\mu}_i - \bar{Y}_o)/\sqrt{S^2/n_i + S^2/C} \quad ; \quad V_i, \; i=1,\ldots,k \qquad (4)$$

$$(\bar{Y}_o - \hat{\mu}_i)\,/\sqrt{S^2/n_i + S^2/C} \qquad V_i, \; i=1,\ldots,k \qquad (5)$$

donde $\hat{\mu}_i$ es el estimador de máxima verosimilitud para el caso $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_k$.

Las distribuciones (5) y (4) son idénticas. En la tabla VII del Apéndice se muestran los valores críticos para $\bar{t}_k^\alpha$ dos colas que están dados por $\alpha=0.025$ y $\alpha=.005$ que permiten una significancia de .05 y .01 respectivamente.

UN EJEMPLO

El autor propone el siguiente ejemplo: supóngase que comparamos 5 niveles de dósis contra un control, en un di seño completamente al azar usando 70 unidades experimentales con 10 repeticiones para los tratamientos y 20 para el control; pero por causas del azar se perdieron 5 observaciones. Se tiene c=18, $n_1=n_3=n_4=10$, $n_2=9$ y $n_5=8$. No se conoce el sentido del efecto (positivo o negat.) de la sustancia, se decide hacer una prueba de dos colas al 5% de nivel de significancia.

Supongamos que las medias son

$\bar{Y}_o = 50.1$, $\bar{Y}_1=52.7$, $\bar{Y}_2=45.2$, $\bar{Y}_3=47.1$, $\bar{Y}_4=44.8$, $\bar{Y}_5=46.6$ además S^2 = CME = 22.28 con 59 g.l.

Es claro que si hay algún efecto, éste debe ser en sentido positivo (i.e. que incremente la respuesta esperada), esto es, bajo H_a:

$$M_o \geq M_1 \geq M_2 \geq M_3 \geq M_4 \geq M_5$$

Primero cada $\hat{\mu}_i$ debe ser calculada por el proceso descrito por Williams (1971). Observar que $\bar{Y}_o < \bar{Y}_1$

$$\bar{Y}_1 = 52.7$$

el procedimiento es análogo al de la pág.   ; pero ahora H_a: $M_o \geq M_1 \geq \ldots \geq M_k$).

pues toque $\bar{Y}_1 > \bar{Y}_2$ no hay que ponderar como $\bar{Y}_2 < \bar{Y}_3$, entonces ponderamos

$$\bar{Y}_{2,3} = (n_2\bar{Y}_2 + n_3\bar{Y}_3)/(n_2+n_3)$$

$$= (9\bar{Y}_2 + 10\,\bar{Y}_3)/(9+10) = 46.2$$

puesto que $\bar{Y}_{2,3} > \bar{Y}_4$ no hay nada qué ponderar como $\bar{Y}_4 \leq \bar{Y}_5$, entonces ponderamos

$$\bar{Y}_{4,5} = (n_4\,\bar{Y}_4 + n_5\,\bar{Y}_5)/(n_4+n_5)$$

$$= (10\,\bar{Y}_4 + 8\,\bar{Y}_3)/(10+8)$$

$$= 45.6$$

En suma tenemos

$$\bar{Y}_o < \bar{Y}_1 < \bar{Y}_{2,3} < \bar{Y}_{4,5}$$

es decir que

$$\hat{M}_o < \hat{M}_1 < \hat{M}_2 = \hat{M}_3 < \hat{M}_4 = \hat{M}_5 \; .$$

Por otro lado la regla de decisión es

$$(\bar{Y}_o - \hat{M}_i) > t^{\alpha}_{i,\nu}\sqrt{S^2(1/n_i+1/c)} \qquad \text{\_\_\_\_\_(5)}$$

i:	5	4	3	2	1
n_i:	8	10	10	9	10
$\bar{t}^{.029}_{i,60}$:	2.06	2.07	2.06	2.05	2.00*
$\sqrt{22.28(1/n_i+1/18)}$:	2.00	1.86	1.86	1.93	1.86
$t^{.025}_{1,60}\sqrt{22.28(1/n_i+1/18)}$:	4.13	3.85	3.84	3.95	3.72

(*) Obtenido de tablas t-Student con ν=60 gl. y α=.025

Los cuantiles $t^{\alpha}_{i,60}$ se obtienen con la fórmula de extrapolación

$$t^{\alpha}_{i,\nu} = t^{\alpha}_{i,\nu}(1) - 10^{-2}\beta(1-n_i/c)$$

dónde $\bar{t}^{\alpha}_{i,\nu}(1)$ se obtiene de la tabla VII del Apéndice para α = .025, de Williams (1972).

Aplicando el criterio de la desigualdad (5)

$\bar{Y}_o - \hat{\mu}_5 = 50.1 - 45.6 = 4.5 > 4.13$ concluir $\mu_o > \mu_5$

$\bar{Y}_o - \hat{\mu}_4 = 50.1 - 45.6 = 4.5 > 3.85$ concluir $\mu_o > \mu_4$

$\bar{Y}_o - \hat{\mu}_3 = 50.1 - 46.2 = 3.9 > 3.84$ concluir $\mu_o > \mu_3$

$\bar{Y}_o - \hat{\mu}_2 = 50.1 - 46.2 = 3.9 < 3.95$ concluir $\mu_o = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

La conclusión es que las dósis 3, 4 y 5 fueron más bajas en su respuesta observada, comparada con el control. Una modificación a la prueba de Williams (1971) es realizada por Marcus (1976).

4. Prueba de Paulson

Consideremos k+1 grupos de tratamientos bajo estudio, de los cuales T_o es el control y $T_1, T_2, \ldots, T_k$ son los experimentales (a probar contra el control). Se discute el caso balanceado y supondremos que las observaciones en cada tratamiento se distribuyen normalmente.

Los tratamientos experimentales, $T_1, T_2, \ldots, T_k$, se dividen en dos categorías: Una primera formada por el conjunto de tratamientos experimentales superiores al control y una segunda formada por el conjunto de tratamientos que son inferiores o iguales al control. En tal situación sería deseable tener cierta protección contra la selección de tratamientos experimentales "mejores" cuando en realidad son inferiores al control. Ello es posible haciendo que el procedimiento usado proporcione seguridad en la selección de T_o como el mejor si la segunda categoría consiste en todos los k grupos (i.e. ninguno de los tratamientos experimentales es superior a T_o).

Consideremos una muestra de (k+1)n observaciones independientes $\{Y_{ij}\}$ 1,...,k; j=1,2,...n tal que y_{ij} es la j-ésima observación del tratamiento T_i ; para asegurar que el procedimiento estadístico seleccione un tratamiento, de entre los k+1, como el mejor se debe tener que la probabilidad de que τ_0 se seleccione sea $\geq$ 1-α, si ninguno de los tratamientos T_1, T_2,...,T_k es en realidad superior a T_0. Además también consideramos el problema de decidir el tamaño de muestra necesario para que cuando uno de dos tratamientos experimentales es realmente superior al resto, incluyendo a T_0, por una probabilidad determinada apriori sea $\geq$ 1-β (i.e que el tratamiento experimental sea seleccionado como el mejor). Las constantes α y β pueden ser consideradas como análogas al error tipo I y II cuando se prueban hipótesis. Sin embargo en el problema de comparaciones múltiples y no es completamente equivalente al caso de pruebas de hipótesis de Neyman-Pearson, a menos que k=2.

Consideremos que las n observaciones del tratamiento T_i (i=0,1,2,...,k) se distribuyen normalmente

$$T_i \sim N(\mu_i, \sigma^2) \quad i=0,1,2,...k$$

el mejor tratamiento se define como aquél que tenga el valor más grande de μ_i

Paulson (1952b) discute dos tipos de distribución de las observaciones, normal y binomial.

CASO NORMAL CON VARIANZA DESCONOCIDA

Sea S^2 = CME, el cuadrado medio del error, el estimador de la varianza, en el caso de un diseño completamente al azar es

$$CME = \frac{1}{(k+1)(n-1)} \sum_{i,j} (Y_{ij} - \bar{Y}_{i\cdot})^2$$

$$i=0,1,\ldots,k \quad ; \quad j=1,2,\ldots n,$$

además sea $\hat{\mu}_i$ la media estimada del tratamiento T_i (para $i=1,2,\ldots,k$) y $\bar{Y}_0$ la media estimada del control T_0 y λn una constante que se determinará en seguida. El procedimiento estadístico queda de la siguiente forma : Sea $\hat{\mu}^* = \max\{\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \ldots, \hat{\mu}_k\}$ y T^* el tratamiento correspondiente a la $\hat{\mu}^*$ seleccionada

$$\text{seleccionar } T^* \text{ si } \hat{\mu}^* - \bar{Y}_0 \geq \lambda_n \sqrt{CME(2/n)}$$

$$\text{seleccionar } T_0 \text{ si } \hat{\mu}^* - \bar{Y}_0 < \lambda_n \sqrt{CME(2/n)}$$

La λn puede encontrarse evaluando

$$P\{\hat{\mu}^* - \bar{Y}_o < \lambda n \sqrt{CME(2/n)} \mid \mu_0 = \mu_1 = \ldots = \mu_k\} = 1-\alpha$$

y

$$P(n; \lambda n, k+1, \Delta/\sigma)$$

haciendo uso de la integración en dos variables (Ver Paulson 1952b, pág. 244), donde $P(n; \lambda n, k+1, \Delta/\sigma)$ denota la probabilidad de que T_k sea seleccionado como el mejor cuando -- $\mu_0 = \mu_1 = \ldots = \mu_{k-1}$; $\mu_k/\sigma = \mu_o/\sigma + \Delta/\sigma$, Δ es el incremento de T_K respecto a los demás tratamientos (i.e $\mu_k \geq \max\{\mu_o, \mu_1, \ldots, \mu_{k-1}\} + \Delta$). Desafortunadamente los valores de λn no - han sido calculados por completo y en la práctica resulta - complicado calcular los valores de λn, por lo tanto se usan métodos númericos aproximados para encontrar λn. Sea $C_i = \{\hat{\mu}_i - \bar{Y}_o > \lambda n \sqrt{CME(2/n)}$; $i=1,\ldots, k\}$ y sea $t_{n'}$ una variable-aleatoria con distribución t y n'grados de libertad. Con - la ayuda de tablas de t encontraremos una aproximación $\tilde{\lambda} n$ a λn, de tal manera que

$$P\{\hat{\mu}_z - \bar{Y}_o > \tilde{\lambda} n \sqrt{CME(2/n)}\} = P\{t_{n'} > \tilde{\lambda} n\} = \frac{\alpha}{K}.$$

Entonces la probabilidad de que T_o sea seleccionado como - el mejor cuando todas las medias son iguales excederá $1-\alpha$

por una cantidad menor que $\frac{1}{2}(k-1)k\ P(C_1.C_2)$ para

$$P\{C_1.C_2\} = P\{S \geq \lambda n\sqrt{\frac{2_n'}{2_n'+\lambda 2_n}}\ \text{e}\ \ I \geq \lambda n\sqrt{\frac{2_n'}{2_n'+\ \lambda 2_n}}\ \},$$

dónde (S, I) tiene una distribución normal con media cero, varianza uno y correlación $\rho=(n'+\lambda^2 n)/(2n'+\lambda^2 n)$. De esta manera se evalúan los límites del error tipo I, ya que, se sabe, $\frac{CME}{\sigma} \sim N(1,1/2n')$.

Para los límites del error tipo II, se tiene que dado

$$\mu_k/\ \sigma = \ \mu_o/\ \sigma + \Delta/\sigma$$

$$P\{\hat{\mu}_k-\bar{Y}_o \geq \lambda n\ \sqrt{CME(2/n)}\ \} - (k-1)P\{\hat{\mu}_k < \hat{\mu}_1\} \leq$$

$$\leq P(n;\lambda n,\ k+1,\ \Delta/\sigma) \leq P\{\hat{\mu}_k-\bar{Y}_o \geq \lambda n\ \sqrt{CME(2/n)}\qquad ñ$$

estas desigualdades se obtienen evaluando las probabilidades involucradas, por medio de integrales en una y dos variables y usando la desigualdad de Bouferroni.

Finalmente para encontrar el tamaño de muestra, se propone

$$n_o = (2\sigma^2 / \Delta^2)(\gamma_{\alpha 1}+\gamma_\beta)^2$$

donde $\alpha_1 = \alpha/k$, $\gamma_{\alpha 1} = \tilde{\lambda} n$ y $\gamma_\beta = Z_\beta$ de una distribución normal estandarizada; después de calcular $\tilde{\lambda}(n_o)$ y los límites para $P(n_o, \tilde{\lambda}(n_o), k+1, \Delta/\sigma)$, puede modificarse la n_o por iteración.

Debe notarse que para encontrar el tamaño deseado para controlar el error tipo II, debe conocerse σ de la experiencia previa. Paulson (1952a) desarrolla un método para encontrar una solución óptima para k muestras con distribución normal. Esta solución está formulada como un problema de decisión múltiple; ese trabajo discute el caso balanceado con distribución normal y varianza desconocida.

Concluímos esta sección con un ejemplo numérico. Consideremos el experimento descrito por Anderson (1974): supongamos que la válvula D es nuestro control, las medias son las siguientes

Válvula	A	B	C	D
Tratamiento	T_3	T_2	T_1	T_0
media	7.417	6.917	4.917	4.583

en este caso max $\{\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3\} = \hat{\mu}_3 = 7.417$, entonces $\Delta = \hat{\mu}_3 - \bar{Y}_o = 2.834$; por otro lado se tiene que CME = 1.75;

supongamos además que por experiencia previa $\sigma = 1.75$, entonces de valores de la tabla VIII del Apéndice calculados por Paulson (1952b) para $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.05$ se tiene $\hat{\lambda}_{12} = \gamma_{\alpha 1} =$ 2.326 y $\gamma_\beta = 1.645$ por lo que se tendrá

$$n = \frac{2\sigma^2}{\Delta^2}\,(\gamma_{\alpha 1} + \gamma_\beta)^2 = \frac{2(1.75)^2}{2.834^2}\,(2.326+1.645)^2 \simeq 12.$$

De esta manera se tendrán 12 observaciones por tratamiento para una $\sigma = 1.75$. En nuestro ejemplo tenemos

$$2.326\ \sqrt{1.75(2/12)} = 1.256$$

$\hat{\mu}_3 - \bar{Y}_o = 7.417 - 4.583 = 2.834 > 1.256$; Concluir $\mu_o > \mu_3$

$\hat{\mu}_2 - \bar{Y}_o = 6.917 - 4.583 = 2.334 > 1.256$; Concluir $\mu_o > \mu_2$

$\hat{\mu}_1 - \bar{Y}_o = 4.917 - 4.583 = 0.334 < 1.256$; No hay evidencia suficiente.

De lo anterior se concluye que el conjunto formado por los tratamientos T_2 y T_3, tienen respuestas superiores al control; en tanto el conjunto formado por T_1 se considera igual al control.

En la tabla VIII del Apéndice, se reproducen los valores calculados por Paulson (1952b) para $P(\tilde{\lambda})$ y los lími tes superiores para $1-P(n;\tilde{\lambda}, k+1, \Delta)$ respectivamente.

CASO BINOMIAL

En esta sección trataremos el caso binomial, haciendo uso de la transformación inversa del seno; esto es, si $\bar{p}$ es la proporción de éxitos observados en n ensayos independientes con probabilidad constante P de éxitos, entonces arcsen $\sqrt{\bar{p}}$ para una n grande se distribuirá normalmente con media arcsen $\sqrt{P}$ y varianza $1/4n$ (para medidas de los angulos dados en radianes).

Sea r_i el número de éxitos en la n observaciones del tratamiento T_i. Sean $\bar{p}_i = r_i/n$, $u_i=$ arcsen$\sqrt{\bar{p}_i}$ y P_i la probabilidad real de éxitos en el tratamiento T_i. Sea $\bar{P}^* = \max\{\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_k\}$, $u^* = \max\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$. Donde T_o es el control y $T_1, T_2, \ldots, T_k$ los tratamientos experimentales. Sea T^* el tratamiento observado cuyo porcentaje de éxiro es $\bar{P}^*$. En caso de que más de un tratamiento tenga un porcentaje de éxito igual a $\bar{p}^*$, elija T^* de manera aleatoria del conjunto que tenga $\bar{p}_i = \bar{p}^*$.

Paulson (1952b) propone el siguiente procedimiento para seleccionar uno de los k-tratamientos experimentales.

$$\text{Elegir } T^* \text{ si } u^* - u_o \geq \lambda\sqrt{1/2n} \;;$$
$$\text{elegir } T_o \text{ si } u^* - u_o < \lambda\sqrt{1/2n} \;;$$

donde λ se escoge de tal manera que si $P_o \geq \max\{P_1, \ldots, P_k\}$ la probabilidad de que T_o sea elegido como el mejor, será $\geq 1-\alpha$. Supondremos que n es suficiente grande para que el conjunto $\{U_i\}$ se distribuya como $N(\text{arcsen}\sqrt{P_i}, 1/4n)$.

De esta manera el problema se reduce al caso normal con varianza conocida; el valor de λ se determina al evaluar

$$P\{u^* - u_o < \lambda\sqrt{1/2n} \mid u_o = u_1 = \ldots = u_k\} = 1-\alpha$$

Desafortunadamente los valores de λ tampoco están calculados en tablas adhoc y se utilizan las aproximiaciones discutidas en el caso anterior. Por otro lado para encontrar el tamaño de muestra para n tal que si $P_1 = P_2 = \ldots P_{k-1} = P$ y $P_k = P + \delta$ $(\delta > 0)$, la probabilidad de que T_k sea elegido como el mejor, igual a $1-\beta$, y además $\Delta = \text{arcsen}\sqrt{P+\delta} - \text{arcsen}\sqrt{p}$, esta determinado al evaluar.

$P(n;\lambda,k+1,\Delta) = P\{u_k - u_o > \lambda\sqrt{1/2n},\ u_k > \max(x_1, \ldots, x_{k-1})\}$
dado que $u_k = u_o + \Delta$.

Usando la notación de la sección anterior tenemos que el tamaño de muestra , para el caso binomial, es

$$n = (\gamma_{\alpha 1} + \gamma_\beta)^2 / 2\Delta^2$$

Concluimos esta prueba discutiendo un ejemplo numérico. Considere una situación en la que estemos interesados en investigar el efecto de cuatro tratamientos para cierta enfermedad-un control y tres experimentales-; supongamos - que se conoce por la experiencia previa que la probabili-- dad de sanarse con el tratamiento estándar es de 0.75. El problema consiste en seleccionar uno de los cuatro trata-- mientos (incluido el control) que tenga las siguientes propiedades:

(a) La probabilidad de seleccionar un tratamiento experimental como el mejor, cuando en realidad es inferior - al control, sea ≤ 0.05 ; (b) si uno de los tratamientos experimentales incrementa su probabilidad (de sanar al 0.90, mientras que la del resto es ≤ 0.75, entonces la probabilidad de que el tratamiento experimental superior sea elegido como el mejor debe ser ≥ 0.95.

En este ejemplo tenemos $\alpha=.05$, $\beta=.05$, $k=4$ podemos -- aproximar con una t-student, a λ, es decir $t_4^{.05} = 2.132 \tilde{=} \lambda$

y

$$\Delta = \operatorname{arcsen}\sqrt{.75 + .15} - \operatorname{arcsen}\sqrt{.75} = .202$$

entonces

$$n = (2.132 + 1.645)^2/2(.202^2) = 174.$$

Una vez que se ha encontrado el tamaño de muestra necesario para detectar el efecto deseado, se procede a realizar el experimento. El procedimiento estadístico que -- cumpla los requisitos (a) y (b) es el siguiente: Un grupo de 174×4=696 animales son inoculados con la enfermedad específica bajo estudio; luego los animales son subdivididos de manera aleatoria en 4 grupos, cada uno de 174 animales. Al primer grupo se le llama control, el resto de los grupos reciben los tratamientos restantes. Después de realizar el experimento, si

$$\text{arcsen}\,\sqrt{\bar{p}^*} - \text{arcsen}\,\sqrt{\bar{p}_o} \geq 2.128/\sqrt{2(174)}$$

concluimos que el tratamiento bajo experimentación es mejor con un porcentaje $\bar{p}^*$ de éxito, de otra manera el control es en realidad mejor que los tratamientos de experimentación.

5. Primera Prueba de Gupta y Sobel

Haciendo uso del método de Dunnet (1955), Gupta y Sobel (1958) obtuvieron el siguiente procedimiento para elegir un subconjunto de tratamientos que son igualmente buenos o mejores que el control. El procedimiento garantiza una probabilidad de al menos $1-\alpha$ de que el subconjunto -

de tratamientos, cuando menos iguales al control. Este procedimiento es más flexible que otros -Dunnett (1955), Paulson (1952- porque permite al experimentador escoger un subconjunto determinado en base a consideraciones económicas o de otro tipo.

Este procedimiento permite encontrar intervalos de confianza para alguna media de interés. Después de realizar el experimento se encuentra un intervalo de confianza, a nivel α para todas las medias de las poblaciones de tratamientos-con respuestas inferiores al control. Este intervalo de confianza obtenido es consecuencia de que al seleccionar un subconjunto con todas las poblaciones de tratamientos, tan buenas o mejores que el control, se han eliminado automáticamente quedando aquéllas inferiores al control. Por tanto este procedimiento se puede usar para eliminar aquellas poblaciones de tratamientos que son significativamente inferiores - al control.

Para el caso en el que haya interés en tratamientos inferiores al control, el problema estadístico es idéntico y-las tablas se aplican igualmente con las modificaciones obvias.

Los autores discuten dos tipos de distribución de las poblaciones: normal y binomial. Aquí solamente incluiremos el primer caso.

Sean T_1, $T_2, \ldots, T_p$ los tratamientos a comparar contra el control T_o, con sus medias $\mu_1, \ldots, \mu_p$ y μ_o respectivamente. Tendremos ahora cuatro casos distintos: Varianza común conocida (μ_o conocida), Varianza común conocida (μ_o desconocida), Varianza común desconocida (μ_o conocida), varianza común desconocida (μ_o desconocida). Desde el punto de vista práctico el último caso tiene más interés y se discute a continuación.

La varianza σ^2 es, desconocida y está estimada por el CME, la media μ_i es desconocida y está estimada por $\bar{Y}_i$ (para i=o,1,...p). En este caso se tienen n_i observaciones de los tratamientos T_i(i=0,1,...,p). Gupta y Sobel proponen incluir en el subconjunto a todos los tratamientos cuyas medias $\bar{Y}_i$ excedan al control $\bar{Y}_o$ por

$$(\bar{Y}_i - \bar{Y}_o) > - d^{\alpha}_{p,\nu}\sqrt{CME\ (2/n_i)} \qquad \text{———} (1)$$

donde $d^{\alpha}_{p,\nu}$ es el valor crítico de una cola, de la tabla V del Apéndice, tomada de Dunnett (1955), ν son los grados de libertad del error.

Al usar el estadístico (1) eliminamos los tratamientos que son significativamente peores que el control. Los tratamientos cuyas medias muestrales sean "suficientemente" menores que el control, se incuirán en el subconjunto (es decir, aquéllas diferencias $\bar{Y}_i - \bar{Y}_o$ que sean -

suficientemente grandes y negativas).

Si usaramos la prueba de Dunnett, declararíamos al - i-ésimo tratamiento como bueno o mejor que el control si

$$(\bar{Y}_i - \bar{Y}_o) > + d^{\alpha}_{p,\nu}\sqrt{CME(2/n_i)}, \text{ —————— } (2)$$

para pruebas de una cola. Al comparar las fórmulas (1) y (2) es evidente que el método de Gupta y Sobel obtendrá un subconjunto de tratamiento más grande. El método de Dunnett incluye aquellos tratamientos que solamente sean mayores - que el control, mientras que el método de Gupta y Sobel - desecha solamente aquellos tratamientos que muestran ser - inferiores al tratamiento estándar, control.

En nuestro ejemplo supongamos que la válvula ha proba do ser mala, con lo cual podemos utilizar la prueba de una cola. Así - $d^{\alpha}_{p,\nu}$ = - 2.85 para α = .05 y p=4 ν=4, por lo tanto

$$-d^{\alpha.05}_{4,4}\sqrt{1.15/12} = -1.088$$

las diferencias de la válvula D deben juzgarse contra A, B y C. Dado que la media de D=4.583, cualquier otra vál- vula será diferente de "D" si su respectiva media es al menos 4.583 - 1.088 = 3.495, como las medias restantes son

A	B	C
7.417	6.917	4.917

se concluye que las válvulas A, B y C son distintas del control.

Posteriormente Sobel y Tong (1971) consideraron la agrupación óptima de las observaciones mediante ciertas particiones de poblaciones normales al compararlas contra un control.

6. Segunda Prueba de Gupta y Sobel
(Ryan & Antle, 1976)

El método de Gupta y Sobel selecciona un subconjunto de k poblaciones, con distribución normal y n repeticiones, las cuales contienen las poblaciones con la media más grande y probabilidad de al menos, P*. El método garantiza esta probabilidad P* sin importar qué tan pequeñas puedan ser las diferencias entre las medias de poblaciones. El experimentador puede estar interesado en detectar alguna diferencia en particular y de esta manera se puede ampliar o reducir el subconjunto de poblaciones, manteniendo la misma P*. Ryan y Antle (1976) mejoran el procedimiento de Gupta y Sobel y presentan tablas más exactas y ampliadas.

Considere $\mu_1,\ldots,\mu_k$ las k poblaciones de medias de - condistribución normal y varianza común σ^2. Sean $\bar{Y}_1$, $\bar{Y}_2$, ..., $\bar{Y}_k$ las medias muestrales y S^2 es estimador insesgado de σ^2. El tamaño de muestra de cada población es n. Sin pérdida de generalidad supongamos que μ_k es la media más - grande y la consideramos como la mejor población.

El procedimiento de Gupta y Sobel se formaría un conjunto con la población i-ésima si

$$\bar{Y}_i \geq \bar{Y}_{max} - ds/\sqrt{n}$$

donde los cuantiles de d se obtienen de la tabla IX del - Apéndice, tomada de Gupta y Sobel (1958). Los cuantiles- de d son tales que cuando $\mu_i = \mu_k$ para toda i

$$P\left[\bar{Y}_k \geq \bar{Y}_{max} - ds/\sqrt{n}\right] = P^*$$

Es decir que sin importar el arreglo de las μ_i, la probabilidad de que el subconjunto contenga la mejor población es al menos P*.

La modificación que proponen Ryan y Antle(1976) necesita que la mejor población sea seleccionada con una - probabilidad de, al menos, P*. Cuando $\mu_k > \mu_i + C\sigma$, para alguna $C > 0$ e $i=1,2,\ldots,k-1$. Si la diferencia en--

tre la media más grande y alguna de las otras es menor que $C\sigma$, entonces la probabilidad es al menos p* de que el subconjunto seleccionado contenga una población cuya media no sobrepase a la $C\sigma$ de μ_k. Si el experimentador desea usar una zona de indiferencia, expresada como una fracción de σ, no es necesario conocer la varianza para usar esta modificación al método de Gupta y Sobel.

La nueva propuesta consiste en proporcionar una nueva tabla, para ello debemos tener $\Delta = \sqrt{n} \cdot C$, y de esta manera se encuentra el valor de D* tal que

$$P \mid \bar{Y}_k \geq \bar{Y}_{max} - D^* S/\sqrt{n} \mid = P^*$$

donde $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{k-1}$ y $\mu_k = \mu_1 + \Delta\sigma/\sqrt{n}$, dado que éste es el peor arreglo posible de los parámetros. Los valores de D* para n=3,5,10;k=3,4,5,10; Δ=0,.5,1.0; P*=.90 y .95, se dan en la tabla de Ryan y Antle (1976, pág. 141). (Esta tabla fue obtenida por métodos numéricos de integración). Ver tabla IX A. del apéndice.

Para poder encontrar algunos valores aproximados de D* con los datos d, n, k y P* se debe encontrar D* tal -- que

$$P \left[\bar{Y}_k \geq \bar{Y}_{max} - D^* s/\sqrt{n} \right] = P^*$$

cuando $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{k-1}$ y $\mu_k = \mu_1 + C\sigma$. Ello equivale a encontrar un valor D* tal que

$$P\left[\bar{Y}_k - C\sigma \geq \bar{Y}_{max} - (C\sqrt{n}\ \ \sigma/S + D^*)S/\sqrt{n}\right] = p^*,$$

puesto que $\bar{Y}_k - c\sigma$ tiene la misma media que las otras poblaciones y dado que σ/s está muy cercano a la unidad, si n o k son grandes, ello sugiere que

$$c\sqrt{n} + D^* = d$$

donde d se obtiene de la tabla IX del Apêndice, tomando de Gupta y Sobel (1958(. La aproximación obtenida, D**, de D* está dada por la expresión

$$D^{**} = d - c\sqrt{n},$$

que es más conveniente de obtener. Por ejemplo de la tabla de Ryan y Antle se tiene que para n=k=5, $p^* = .90$ y $C\sqrt{n} = \Delta = 1$, $D^* = 1.66$ mientras que la aproximación es

$$D^{**} = d - c\sqrt{n} = 2.71 - 1.0 = 1.71$$

CAPITULO III

MODIFICACIONES A LAS PRUEBAS PROPUESTAS

Introducción

Las pruebas de comparaciones múltiples propuestas hasta antes de la década de los cincuentas - Tukey, Scheffé, Student, Newman, Keuls y Bonferroni, entre otros; tuvieron gran aceptación entre los estadísticos. Sin embargo estas pruebas resultaron poco robustas al aplicarlas en algunos casos particulares; por ejemplo, la prueba de Tukey original no fue pensada para tamaños de muestra desiguales, tampoco fue pensada para casos de heterocedasticidad.

De entre las modificaciones propuestas a la prueba de Tukey, describimos en primer término aquellas que analizan los casos de diseños desbalanceados: Kramer (1956), quien propone usar la media armónica de los tamaños de muestra involucrados en la comparación; Spjøtvoll y Stoline (1973), Hochberg (1975) y Genizi & Hochberg (1978), extienden la prueba de Tukey para comparar simultáneamente todas las combinaciones lineales de medias en diseños desbalanceados y de efectos fijos, haciendo uso de la distribución de rangos estudentizados. En seguida se describen las modificaciones propuestas a las pruebas T de Tukey, S de Scheffé y RM de rangos múltiples para analizar diseños con heterocedasticidad; Kramer (1957), estudia el caso de heterocedasticidad cuando existe correlación entre las medias, debida al diseño de bloques incompletos o alguna covariable usada en el análisis. Duncan (1957) muestra la proximidad en las propiedades de las pruebas sobre medias correlacionadas con varianzas heterogêneas y las pruebas sobre medias no correlacionadas con varianzas homogéneas, el autor se basa en la prueba de Kramer (1956) pero la prueba del primero es más robusta que la del segundo; Hochberg (1976) modifica la prueba de T, basado en los resultados de Spjøtvoll y Stoline (1973), y obtiene una prueba útil para comparar todos los contrastes posibles, por parejas; Brown y Forsythe (1974) modifican la prueba de Sheffè, mediante el uso de contrastes ortonormales en modelos con uno y dos criterios de la significación con varianzas desiguales, el método de ortogonalización de Gran-Schmidt se usa para obtener los contrastes ortonormales.

Finalmente este capítulo concluye con otras modificaciones a las pruebas originales. Dunn (1961), modifica la prueba de Tukey y Scheffè cuando se eligen m contrastes apriori de entre un grupo de k tratamientos, el autor construye sus tablas para determinar los valores de m y k en relación al número máximo de combinaciones lineales, con el fin de que los intervalos sean más estrechos. Fenech (1979) propone una modificación a la prueba de Tukey para probar diferencias de medias en un modelo de bloques completamente al azar (BCA), la observación que hace el autor es que en los modelos BCA. , los errores están correlacionados y no se puede suponer que tengan varianza común. Sen (1969) propone una modificación a la prueba de Tukey, considera que, en un modelo factorial, las variables aleatorias no están igualmente correlacionadas al realizar comparaciones sobre efectos de interacción. Boher, Chow, Faith, Joshi y Wo (1981), modifican las pruebas de Tukey, Scheffè y Bonferroni, eligiendo los puntos críticos adecuados para maximizar el número de decisiones correctas, este método es conocido como "tres reglas para la decisión múltiple en modelos factoriales". Concluimos este capítulo exponiendo la modificación a la prueba de Bonferroni,de Shaffer y Macready (1975), su propósito es mostrar que, dada una fami lia de contrastes, existen uno o más conjuntos de contrastes internamente independientes, con el fin de incrementar la po- tencia de la prueba.

1. Modificaciones a la Prueba de Tukey para Diseños Desbalanceados.

En muchos campos de la investigación es frecuente que el investigador se enfrente a la tarea de comparar efectos de tratamientos que estan desbalanceados. El desbalanceo pudo haberse originado porque el experimentador así lo decicidió o porque algunas unidades experimentales han desaparecido por causas ajenas al efecto de los tratamientos.

A continuación presentamos cuatro modificaciones a la prueba de Tukey para casos desbalanceados.

1.1 Primera Modificación, Kramer (1956)

Sean $T_1,\ldots,T_k$ los tratamientos a comparar, cuyas medias son $\mu_1,\ldots,\mu_k$ y sus estimadores $\hat{\mu}_1,\ldots,\hat{\mu}_k$. La prueba de Tukey original, afirma que comprobalidad $1-\alpha$, todas las comparaciones $\mu_i - \mu_j$ de $\mu_1,\ldots,\mu_k$ satisfacen simultáneamente

$$(\hat{\mu}_i-\hat{\mu}_j) - Q^{\alpha}_{k,\nu}\sqrt{\frac{CME}{n}} \leq (\mu_i-\mu_j) \leq (\hat{\mu}_i-\hat{\mu}_j) + Q^{\alpha}_{k,\nu}\sqrt{\frac{CME}{n}} \quad \ldots\ldots (1)$$

donde n es el número de observaciones en el tratamiento T_i $\forall$ i; $i=1,\ldots,k$. $Q^{\alpha}_{k,\nu}$ es el cuantil con un $(1-\alpha)\,.100\%$ de confianza de una distribución de rangos estudentizados con k,ν gl.

La modificación propuesta consiste en cambiar la expresión (1) en

$$(\hat{\mu}_i-\hat{\mu}_j)-Q^{\alpha}_{p,\nu}\sqrt{CME\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)/2} \leq (\mu_i-\mu_j) \leq (\hat{\mu}_i-\hat{\mu}_j) + Q^{\alpha}_{p,\nu}\sqrt{CME\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)/2}$$

Donde $Q^{\alpha}_{p,\nu}$ es un cuantil con $(1-\alpha)$ 100% de confianza de una distribución de rangos estudentizados con P,ν gl. (Nota: el artículo original de Kramer, hace uso de las tablas construidas por Duncan (1955); sin embargo Harter (1960) construye otras tablas que mejoran los cálculos del primero).

Ejemplo:

Reproducimos el ejemplo de Kramer (1956, pág. 309), modificando los cuantiles $Q^{\alpha}_{p,\nu}$ por los dados en las tablas de Harter (1960).

Se tienen 6 tratamientos ordenados de menor a mayor en un modelo completamente al azar.

i	1	2	3	4	5	6
$\hat{\mu}_i$	458	498	521	528	564	630
n_i	3	5	4	3	5	2

cuya tabla de análisis de varianza es:

FV	g.l.	S.C.	C.M.	F	P
Trats.	5	46530.85	9306.17	3.88	.017
Error	16	38352.00	2397.00		
Total	21	84882.85			

$$S\sqrt{2397} = 48.96$$

para una significancia de $\alpha = .05$ la tabla II del apéndice tomada de Harter (1960) dan los siguientes cuantiles

p	2	3	4	5	6
$Q^{.05}_{p,16}$:	2.998	3.649	4.046	4.333	4.557
$(48.96)Q^{.05}_{p,16}$:	146.78	178.65	198.09	212.14	223.11

comparamos

$$(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j)^* = (\hat{\mu}_i - \mu_j)\sqrt{\frac{2(n_1)(n_2)}{n_1 + n_2}}$$

contra

$$\sqrt{CME} \cdot Q^{.05}_{p,16}$$

para probar Ho : $\mu_1 = \mu_6$, calcular

$$(\hat{\mu}_6 - \mu_1)^* = (\hat{\mu}_6 - \hat{\mu}_1)\sqrt{\frac{2(2)(3)}{2+3}} = (172)(1.55) = 266.46 > 223.11$$

concluir $\mu_1 \neq \mu_6$; de manera análoga se calculan las demas diferencias, en resumen se tiene

	Conclusión
$(\hat{\mu}_6-\mu_1)^* = 266.46>223.11$; $(\hat{\mu}_6-\hat{\mu}_2)^* = 223.12>212.14$;	$\mu_6 \neq \mu_2$
$(\hat{\mu}_6-\hat{\mu}_3)^* = 178.00<198.09$	$\mu_6 = \mu_3$
$(\hat{\mu}_5-\hat{\mu}_1)^* = 205.27<212.14$	$\mu_5 = \mu_1$
$(\hat{\mu}_4-\hat{\mu}_1)^* = 121.24<198.09$	$\mu_4 = \mu_1$
$(\hat{\mu}_3-\hat{\mu}_1)^* = 116.65<178.65$	$\mu_3 = \mu_1$
$(\hat{\mu}_2-\hat{\mu}_1)^* = 77.46<146.78$	$\mu_2 = \mu_1$

en resumen se tiene el siguiente diagrama

T1 T2 T3 T4 T5 T6

1.2. Segunda Modificación, Spjøtvoll y Stoline (1973)

El estadístico basado en la distribución de rangos estudentizados, puede usarse para estimar aproximadamente, de manera simultánea, todas las combinaciones lineales de un conjunto de medias para un análisis de varianza de un modelo de efectos fijos, desbalanceado. Este nuevo método lo llamaremos Extensión del Método de Tukey (Ext T). Las ideas principales se tomaron de Sphøtvoll & Stoline (1973).

Supongamos que $\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_k$ son los estimadores de las medias de efectos de los tratamientos $T, \ldots, T_k$; donde

$$\hat{\mu}_i \sim N\left(\mu_i, \frac{\sigma^2}{n_i}\right) \tag{1}$$

para $i=1, \ldots, k$; n_i es el tamaño de muestra del tratamiento i-ésimo y $\mu_1, \ldots, \mu_k$; σ^2 son parámetros conocidos. Sea S^2=CME el estimador de σ^2 independientemente de $\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_k$ tal que $\nu S^2/\sigma^2$ se distribuye como una χ^2 con ν g.l.

Consideremos un diseño completamente al azar, de efectos fijos

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \qquad i=1, \ldots, k; \quad j=1, \ldots, n_i$$

donde los ε_{ij} (s) son independientes y con distribución normal de media cero y varianza σ^2. Entonces si $\mu_i = \mu+\tau_i$

$$\hat{\mu}_i = \bar{y}_{i.} = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{y_{ij}}{n_i}$$

es la media de las observaciones en la i-ésima celda y además el cuadrado medio del error estimado es

$$S^2 = CME = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2/(N-k)$$

para $N = \sum_1^k n_i$; con $\nu = N-k$ g.l.

El método de Tukey para el caso balanceado $(n_1=\ldots=n_k=n)$ puede resumirse de la siguiente manera:

1.- Con probabilidad $1-\alpha$, todas las combinaciones

$$\Psi = \sum_1^k C_i\mu_i \quad \text{con} \quad \sum_1^k C_i = 0$$

de $\mu_1,\ldots,\mu_k$ satisfacen simultáneamente

$$\hat{\Psi} - Q^{\alpha}_{k,\nu} \sqrt{\frac{CME}{n}}\, C^* < \Psi < \hat{\Psi} + Q^{\alpha}_{k,\nu} \sqrt{\frac{CME}{n}}\, C^* \quad \ldots\ldots (2)$$

2.- Con probabilidad $1-\alpha$ todos los contrastes

$$\Psi = \sum_{1}^{k} C_i \mu_i \quad , \quad \sum_{1}^{k} C_i = 0$$

satisfacen simultáneamente

$$\hat{\Psi} - Q^{\alpha}_{k,\nu} \sqrt{\frac{CME}{n}} \sum_{1}^{k} \frac{|C_i|}{2} \leq \Psi \leq \hat{\Psi} + Q^{\alpha}_{k,\nu} \sqrt{\frac{CME}{n}} \sum_{1}^{k} \frac{|C_i|}{2}$$

3.- Con probabilidad $1-\alpha$ para todas las comparaciones

$$\mu_i - \mu_j \quad \text{de} \quad \mu_1, \ldots, \mu_k$$

satisfacen simultáneamente

$$(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) - Q^{\alpha}_{k,\nu} \sqrt{\frac{CME}{n}} \leq (\mu_i - \mu_j) \leq (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) + Q^{\alpha}_{k,\nu} \sqrt{\frac{CME}{n}} ,$$

donde $Q^{\alpha}_{k,\nu}$ es el cuantil con un $\alpha \cdot 100\%$ de confianza de una distribución de rangos estudentizados con k y ν g.l. se muestran en la tabla I del apéndice y

$$C^* = \text{Máx} \left\{ \sum_{C_i > 0} C_i, \; -\sum_{C_i < 0} C_i \right\},$$

EXTENSION DE LA PRUEBA DE TUKEY

Considere que $\Psi = \sum_1^k C_i\mu_i$; bajo las suposiciones (1) y con probabilidad $1-\alpha$ todas las combinaciones lineales Ψ, de $\mu_1,\ldots,\mu_k$ satisfacen simultáneamente

$$\hat{\Psi} - \tilde{Q}^{\alpha}_{k,\nu}\ \sqrt{CME}\ C^{**} \leq \Psi \leq \hat{\Psi} + \tilde{Q}^{\alpha}_{k,\nu}\ \sqrt{CME}\ C^{**} \qquad \ldots\ldots (3)$$

donde $\hat{\Psi} = \sum_1^k C_i\mu_i$, $\tilde{Q}^{\alpha}_{k,\nu}$ es el punto superior con α100% de confianza y k,ν g.l. de una distribución aumentada de rangos estudentizados, ver tabla X en el apéndice, tomadas de Stoline (1978); y $C^{**} = \text{Máx}\left\{\sum_{C_i>0} \frac{C_i}{\sqrt{n_i}}\ ,\ -\sum_{C_i<0} \frac{C_i}{\sqrt{n_i}}\right\}$

Para probar (3) introducimos las variables $\hat{\gamma}_1,\ldots,\hat{\gamma}_k$ por $\hat{\gamma}_i = \hat{\mu}_i\sqrt{n_i}$; $i=1,\ldots,k$. Entonces $\hat{\gamma}_1,\ldots,\gamma_k$ son independientes y $N(\gamma_i,\sigma^2)$. Dado que las γ_i (s) tienen la misma varianza, los intervalos de confianza simultáneos para todas las combinaciones $\sum_1^k d_i\gamma_i$ se pueden obtener de (2), haciendo $n=1$ y C^{**} que considere las $d_1,\ldots,d_k$.

Pero

$$\sum_1^k d_i\gamma_i = \sum_1^k d_i\mu_i\sqrt{n_i}$$

Un intervalo de confianza para $\sum_1^k C_i\mu_i$ se obtiene escogiendo $d_i = C_i/\sqrt{n_i}$ si y sólo si $d_i\sqrt{n_i} = C_i$ para todo i en (2) y de esta manera se obtiene (3), lo que completa la prueba.

Claramente (3) se puede utilizar para todos los contrastes de $\mu_1,\ldots,\mu_k$. Para comparaciones dos a dos, a partir de la expresión (3) es claro que con probabilidad mayor o igual que 1-α se satisface simultáneamente para $\mu_1,\ldots,\mu_k$.

$$(\hat{\mu}_i-\hat{\mu}_j) - \text{máx}\left\{\frac{1}{\sqrt{n_i}}, \frac{1}{\sqrt{n_j}}\right\} \tilde{Q}^{\alpha}_{k,\nu} \sqrt{CME} < \mu_i-\mu_j < (\hat{\mu}_i-\hat{\mu}_j) +$$

$$+ \text{máx}\left\{\frac{1}{\sqrt{n_i}}, \frac{1}{\sqrt{n_j}}\right\} \tilde{Q}^{\alpha}_{k,\nu} \sqrt{CME} \qquad \ldots\ldots (4)$$

Las expresiones (3) y (4) se pueden utilizar para estimar simultáneamente todas las combinaciones lineales y diferencias de parejas de medias, respectivamente. Con probabilidad 1-α todas las combinaciones lineales $\Psi = \sum_1^k C_i\mu_i$ de las medias $\mu_1,\ldots,\mu_k$, satisfacen simultáneamente la expresión (3).

Sphøtvoll y Stoline (1973), considera que la extensión de Tukey se puede recomendar cuando:

1.- Haya interés en comparaciones de medias por parejas y

2.- los tamaños de muestra no estén seriamente desbalanceados.

1.3. Tercera Modificación, Hochberg (1975)

De entre los muchos métodos de comparaciones múltiples, el de Tukey ofrece los intervalos más cortos para comparaciones dos a dos (Miller, 1966, cáp. 2). En 1975 Hochberg, discuto un procedimiento general de la prueba de Tukey para casos desbalanceados. Este nuevo método que llamaremos Ext. G.-T, es una extensión de la prueba discutida por Spjøtvall & Stoline (1973).

Sea $Y=(Y_1,\ldots,Y_n)'$ un vector de n variables independientes, normalmente distribuidas con varianza común $\sigma^2 I$ (I es una matriz idéntica). Sea $\underline{\mu}$ el vector de medias tal que

$$\underline{\mu} = X\underline{\beta}$$

donde

$$X = \begin{bmatrix} x_{11},\ldots, x_{1k} \\ \\ x_{n1},\ldots, x_{nk} \end{bmatrix}$$

Rango $X = k \quad (k<n)$

$$\underline{\beta} = (\beta_1,\ldots,\beta_k)$$

El número de columnas se supone menor que el número de renglones (k<n), para que los grados de libertad del error sean $\nu=n-k>0$. Se supone que X es una matriz de rango completo; ya que si X tiene rango incompleto, se puede usar una reparametrización que asegure rango completo.

El interés de esta prueba es encontrar un intervalo de confianza para $\ell'\underline{\beta}$ (que son contrastres de la forma $\sum_{i=1}^{k} {}_{i}\beta_i$ para $\sum_{i=1}^{k}\ell_i=0$) en un modelo de la forma

$$Y = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon} ,$$

puesto que X es de rango completo, el estimador de máxima verosimilitud de $\underline{\beta}$ es

$$\hat{\underline{\beta}} = (X'X)^{-1} X'Y.$$

El estimador de σ^2 es $S^2 = Y'(I-X(X'X)^{-1}X')\,Y\,/(n-k)$, tal que

$$\hat{\underline{\beta}} \sim N(\beta, \sigma^2 (X'X)^{-1})$$

$$\frac{(n-k)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-k} \; ; \quad \text{y además son independientes.}$$

Definamos

$$M(\ell') = \text{máx.} \left\{ \ell\sum_{i>0} \ell_i, \quad -\ell\sum_{i<0} \ell_i \right\}$$

El método de Hochberg para modelos de rango completo, en forma general se describe de la siguiente manera.

Si Q es una matriz de kxk elementos (números reales) que satisfacen

$$QQ' = (X'X)^{-1} \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

entonces con una probabilidad de $1-\alpha$ los intervalos de confianza simultáneos para $\ell'\beta$, están dados por

$$\left\{\ell'\underline{\beta} \in \ell'\hat{\underline{\beta}} \pm Q^{\alpha}_{k,\nu} \sqrt{CME} - M\,(\ell'Q)\right\} \qquad \ldots\ldots \quad (2)$$

Para demostrar (2) Hochberg (1975) construye Q y Q^{-1} a partir de (1)

$$Q = (X'X)^{-1}(Q')^{-1} = (X'XQ')^{-1}; \; Q^{-1} = (X'XQ')$$

$$\Rightarrow \quad QQ^{-1} = (X'XQ')^{-1}\,(X'XQ') = I$$

entonces la combinación lineal $\ell'(\hat{\underline{\beta}}-\underline{\beta})$ se puede escribir como

$$\ell'(\hat{\underline{\beta}}-\underline{\beta}) = \ell'QQ^{-1}(\hat{\underline{\beta}}-\underline{\beta}) = \ell'Q(Q^{-1}\hat{\underline{\beta}}-Q^{-1}\underline{\beta})$$

note que $$Q^{-1}\hat{\underline{\beta}} \sim N(Q^{-1}\underline{\beta},\, \sigma^2 I)$$

ya que

$$Q^{-1}(X'X)^{-1}Q'^{-1} = I$$

$$\Longleftrightarrow \quad (X'X)^{-1} = QQ'$$

Ahora aplicamos el razonamiento hecho por Tukey (ver Miller, 1966, pág. 40-46) para mostrar que

$$P\left\{\ell' Q(Q^{-1}\hat{\underline{\beta}} - Q^{-1}\underline{\beta}) \in \left[\pm Q^{\alpha}_{k,\nu}\sqrt{CME}\ \ M(Q'\ell)\right]\right\} = 1-\alpha \qquad \ldots (3)$$

$$\Longleftrightarrow P\left\{|\ell'(\underline{\beta}-\underline{\beta})| \leq Q^{\alpha}_{k,\nu}\sqrt{CME}\ \ M(Q'\ell)\right\}\ \ 1-\alpha\ .$$

Finalmente observemos que si $\ell^* = Q'\ell$, entonces tendremos una transformación inyectiva y suprayectiva. Además si sustituimos $\ell' Q$ por ℓ^* en (3) obtendremos la expresión equivalente a (2).

Por otro lado, la versión correspondiente para constrastes queda:

$$P\left\{c'(\hat{\underline{\beta}}-\underline{\beta}) \in \left[\pm Q^{\alpha}_{k,\nu}\sqrt{CME}\ \ M(Q'c)\right.\right\} = 1-\alpha$$

para todo contraste

$$c = (c_1, \ldots, c_k)'$$

$$\Longleftrightarrow \quad P\left\{|c'(\hat{\beta}-\beta)| \leq Q^{\alpha}_{k,\nu}\sqrt{CME}\; M(Q'c)\right\} = 1-\alpha$$

Este método es más general que el de Spjøtvoll & Stoline (1973), basta con mostrar que en el método Ext G-T hagamos que QQ' sea solamente una matriz diagonal. Ya que los autores usan a $Q = \mathrm{Diag}\left\{d_1, d_2, \ldots, d_k\right\}$ (ver notación en la prueba de Spjotvoll & Stoline, 1973).

Obviamente que la matriz Q tal que $QQ' = (X'X)^{-1}$, existe pero no es única y los métodos de Hochberg y de Spjøtvoll & Stoline no permanecen invariantes para cada selección de Q. Por esta razón, Hochberg (1975) discute una forma de seleccionar la matriz Q; sin embargo, la matriz Q no siempre puede encontrarse de tal manera que proporcione intervalos de confianza estrechos. El razonamiento básico del autor es encontrar una matriz Q cuya estructura se mantenga muy cercana a una matriz diagonal.

A continuación ejemplificamos el uso de este método, haremos un análisis de covarianza. Sean Y_{ij} $(i=1,\ldots,k;$ $j=1,\ldots,n)$ $N=kn$ variables aleatorias normalmente distribuídas con σ^2 común y esperanzas μ_i+bx_{ij} $(i=1,\ldots,k;\ j=1,\ldots n)$; donde las x_{ij} (s) forman una matriz de rango completo. Sea

$$\overline{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_{ij}}{n}, \quad \overline{Y}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{ij}}{n}, \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \overline{x}_i)(y_{ij} - \overline{y}_i),$$

$$S_{XX} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (X_{ij}-\overline{X}_i)^2, \quad \hat{b} = \frac{S_{XY}}{S_{XX}}, \quad SS_{\hat{b}} = \frac{S_{XY}^2}{S_{XX}} \text{ y } \gamma = N-k-1.$$

El estimador por mínimos cuadrados de μ_i, ajustado por las covariables es $\hat{\mu}_i$, esta dado por

$$\hat{\mu}_i = \overline{Y}_i - \hat{b}\overline{X}_i \quad (i=1,\ldots,k)$$

Este es un modelo de rango completo. La dispersión de las μ_i^* (s) esta dada por

$$\sigma^2 \left[\frac{1}{n} I + dd' \right] = \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

donde $d=(d_1,\ldots,d_k)'$; $d_i=\overline{X}_i/\sqrt{S_{XX}}$; $(i=1,\ldots,k)$ y la matriz identidad se denota por I. El estimador insesgado de σ^2 es

$$S_\nu^2 = (S_{yy} - SS_{\hat{b}}) / \nu.$$

Para poder aplicar el procedimiento de Hochberg hacemos que la matriz $Q=aI + hh'$ para alguna constante $a \in \mathbb{R}$ y $h=(h_1,\ldots,h_k) \in \mathbb{R}^k$. Para determinar el valor de a y h escribimos la condición (1), es decir

$$QQ' = (X'X)^{-1}$$

o bien

$$(aI+hh')(aI+hh') = \frac{1}{n} I+dd'.$$

$$\Longleftrightarrow \quad a^2 I+2ahh'+(h'h)(hh') = \frac{1}{n} I+dd'$$

$$\Longleftrightarrow \quad a^2 I+(2a+h'h)hh' = \frac{1}{n} I+dd' \ ;$$

finalmente obtenemos que $a^2=\frac{1}{n}$ y $h=u^{1/2}\,d$ para un escalar u que satisfaga la ecuación $\mu(2a+ud'd)=1$. De aquí obtenemos cuatro soluciones para Q, de las cuales dos son redundantes (porque $M(X) = M(-X)$ para cualquier vector X). Las dos soluciones restantes deben ser tomadas en cuenta para el problema particular y elegir la que es uniformemente mejor. La elección de la mejor solución esta determinada por el contexto del problema a resolver.

1.4 Cuarta Modificación, Genizi y Hochberg (1978)

Se han elaborado con anterioridad a esta propuesta, varios métodos que discuten los diseños desbalanceados. Usando como marco de referencia esta discusión general Genizi y Hochberg (1978); proponen estudiar los diseños con un criterio de clasificación con diferentes tamaños de muestra. Los autores obtienen con su procedimiento, intervalos de confianza más estrechos que los obtenidos por el de Spjøtvoll y Stoline (1973), para todas las comparaciones por parejas de medias. Para diseños moderadamente desbalanceados, la nueva propuesta es superior al método de Hochberg (1975), si se usa como criterio la longitud promedio de los intervalos de confianza para todas los contrastes dos a dos. La modificación propuesta por Genizi & Hochberg (1978), toma como referencia principal el trabajo de Hockberg (1975), expuesto aquí bajo el título "Tercera Modificación a la Prueba de Tukey para Diseños Desbalanceados".

Sean $\mu' = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$ el vector de medias de los tratamientos, cuyo vector de estimadores es $(\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_k)' = \hat{\mu}$, tal que $\hat{\mu} \sim N(\mu, \sigma^2 (X'X)^{-1})$; X es de rango completo y σ^2 es un escalar. Usualmente se tiene que S^2 = CME es un estimador insesgado de σ^2, independiente de $\hat{\mu}$ y tal que $\nu S^2/\sigma^2$ es una variable que se distribuye χ^2 con ν g.l. La notación que usamos a continuación es la misma que la usada por Hochberg (1975) y llamaremos T(Q) al método propuesto por este autor, aludiendo a la generalización del método de Tukey.

La modificación de Genizi & Hochberg (1978) consiste en encontrar nuevos métodos para elegir la matriz Q, tal que $QQ' = (X'X)^{-1}$. El primer método consiste en construir la matriz Q de tal manera que minimice las longitudes de los intervalos de confianza para más de K/2 contrastes de pares de tra tamientos. El segundo método esta pensado para modelos con un criterio de clasificación en el que hay solamente dos tamaños de muestra distintos, de entre k tratamientos.

De manera resumida el método anterior, de Hochberg (1975), puede escribirse de la siguiente manera: para Q, una matriz de kxk que satisfaga

$$QQ' = (X'X)^{-1} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

tenemos que si $\underline{\ell}' = (\ell_1,\ldots,\ell_k)$ y $\forall\ \underline{\ell}' \varepsilon\ \mathbb{R}^k$

$$P\left\{ |\underline{\ell}'(\hat{\underline{\beta}}-\underline{\beta})| \leq Q^{\alpha}_{k,\nu} \sqrt{CME}\ \ M(Q'\underline{\ell})\right\} = 1-\alpha \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

donde $Q^{\alpha}_{k,\nu}$ tiene una distribución de rangos estudentizados con $(1-\alpha)$ 100% de confianza y k, ν g.l. y

$$M(\underline{\ell}) = \text{máx}\left\{ \sum_{\ell_i>0} \ell_i,\ -\sum_{\ell_i<0} \ell_i \right\} i=1,2,\ldots,k .$$

La versión de esta prueba para contraste queda, si $c = (c\ ,\ldots,c_k)$, c un contraste arbitrario

$$P\left\{ |c'(\hat{\underline{\beta}}-\underline{\beta})| \leq Q^{\alpha}_{k,\ \nu} \sqrt{CME}\ \ M(Q'c)\right\} = 1-\alpha \ \ldots\ldots \ (3)$$

Primer método

i) Para cualquier ℓ' el autor propone sustituir en (2)

$$M(Q'\underline{\ell}) = \frac{1}{2}\sqrt{2.\ \underline{\ell}'(X'X)^{-1}\underline{\ell}}$$

ii) Para cualquier combinación lineal normalizada $\underline{\ell}'\underline{\beta}$. Se construye Q_1 que satisfaga (1), entonces todas las matrices Q que satisfacen (1), se pueden representar por $Q=Q_1H$, donde $H=Q_1'(Q_1')^{-1}$ y es tal que $HH' = I$, por lo que H es ortogonal. Así para $C_{12} = (1, -1, 0,\ldots,0)'$

$$H'Q_1'\ell = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ C_{12}$$

$$\Longleftrightarrow\ H^{-1}Q_1'\ell = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ C_{12}$$

$$\Longleftrightarrow\ Q_1'\ell = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ H_{C_{12}}$$

Si $h^{(i)}$ denota la columna i-ésima de H. Puesto que H es ortogonal

$$Q_1'\underline{\ell} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ (h^{(1)} - h^{(2)})$$

por lo que $Q=Q_1H$ cumple con la propiedad buscada, así definimos $g^{(1)} = Q_1'\underline{\ell}_1$ y H esta forma por

$$h^{(1)} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \; (g^{(1)} + g^{(2)}), \quad h^{(2)} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \, (g^{(2)} - g^{(1)}) \qquad \ldots\ldots \quad (4)$$

y

$$h^{(i)} = g^{(i)} \qquad (i=3,\ldots,k)$$

EJEMPLO.

Sea

$$Q_1 = \mathrm{diag} \left[\frac{1}{3}, \; \frac{1}{4}, \; \frac{1}{12}, \; \frac{1}{5}\right]$$

y sean los contrastes $C_{12} = (1, -1, 0, 0)'$ y $C_{34} = (0, 0, 1, -1)'$. Deseamos construir la Q para obtener la T(Q) óptima. Entonces normalizando los vectores tengo que

$$g^{(1)} = Q_1' \; C_{12} = \left(\frac{1}{3}, \; -\frac{1}{4}, \; 0, \; 0\right)' \Big/ \sqrt{\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}}$$

$$g^{(3)} = Q_1' \; C_{34} = \left(0, \; 0, \; \frac{1}{12}, \; -\frac{1}{5}\right)' \Big/ \sqrt{\frac{1}{12^2} + \frac{1}{5^2}}$$

entonces eligiendo

$$g^{(2)} = \left(\frac{1}{4}, \ \frac{1}{3}, \ 0, \ 0\right) \Big/ \sqrt{\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}}$$

$$g^{(4)} = \left(0, \ 0, \ \frac{1}{5}, \ \frac{1}{12}\right) \Big/ \sqrt{\frac{1}{12^2} + \frac{1}{5^2}}$$

usando (4) obtengo

$$H = \begin{bmatrix} .9899 & -.1414 & 0 & 0 \\ .1414 & .9899 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .9247 & .3807 \\ 0 & 0 & -.3807 & .9247 \end{bmatrix}$$

por lo que $Q=Q_1H$ tiene las propiedades deseadas.

Segundo método

En este caso tenemos dos grupos de tratamientos, un grupo con m_1 tratamientos, cada uno con un tamaño de muestra n_1; y un grupo o complementario de $k-m_1=m_2$ tratamientos, cada uno con un tamaño de muestra n_2. Sin pérdida de generalidad $n_1>n_2$ y $(X'X)^{-1} = \text{diag}\ (1/n_1,\ldots,1/n_1,\ 1/n_2,\ldots,1/n_2)$.

En la búsqueda de la matriz Q adecuada, debemos pedir que los intervalos de confianza (i) tengan una

$$\binom{m_1}{2} + \binom{m_2}{2}$$

de comparaciones dos a dos, entre los tratamientos con el mismo tamaño de muestra y que (ii) tengan la misma longitud para todas las $m_1 m_2$ comparaciones dos a dos, de los tratamientos con diferentes tamaños de muestra.

La prueba que proponen Genizi y Hochberg (1978), cumplen las condiciones (i) y (ii); es decir, minimizan las longitudes de los $m_1 m_2$ intervalos de covarianza para contrastes de parejas entre tratamienots de diferentes tamaños muestrales. (Este conjunto de contrastes lo denotaremos ζ).

Sea $Q=Q_1 H$ y una participación de la matriz ortogonal H en la forma

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} : m_1 \times m_1 & H_{12} : m_1 \times m_2 \\ H_{21} : m_2 \times m_1 & H_{22} : m_2 \times m_2 \end{bmatrix},$$

para que H cumpla con las condiciones (i) y (ii), ésta tiene que ser la forma $H_{11} = I + x11'$, $H_{11} = y11'$. Si $H_{21} = \pm H_{12}'$ $H_{22}=I+Z11'$. Si $H_{21}=H'_{12}$, entonces

$$Z = (-2 - m_1 x) / m_2, \; y = \pm \sqrt{XZ}$$

y $-2/m_1 \leq x \leq 0$. Si $H_{21} = -H_{21}'$, entonces $Z = xm_1/m_2$, $y = \pm\sqrt{-x(2 + m_1x)/m_2}$ y $-2/m_1 \leq x \leq 0$. (Para la demostración de este hecho vease Genizi y Hochberg, 1978, pág. 882).

Ahora buscamos la x que minimice las distancias de los intervalos de confianza en la expresión (2) para $Q = Q(x) = Q_1H(x)$ y un contraste $C \varepsilon \zeta$. Los autores usaron la computadora para encontrar el valor óptimo de x, llamémosle x_0, dados los valores de n_2, m_1, m_2 y $b = n_1/n_2 > 1$. Genizi y Hochberg (1978, pág. 882) exhiben una tabla en la que calculan los cuantiles $R(m_1, m_2, b) = \sqrt{n_1}\ \mu(Q_0' c)$ para $c \varepsilon \zeta$ y $Q(x_0) = Q_0$, la matriz Q óptima para x_0, ver tabla XI.

EJEMPLO

Para b=10, m = 2 y m = 1 (es decir, tres muestras, dos de las cuales tienen tamaño n , la otra de tamaño n y n /n =10) el valor R(1, 2, 10) = 2.646. Por tanto obtendremos intervalos para constrastes entre dos medias de la forma

$$\hat{\mu}_i-\hat{\mu}_j - \sqrt{\frac{CME}{n_1}}\ Q^{\alpha}_{3,\nu}\, R(1,\ 2,\ 10) < \mu_i-\mu_j < (\hat{\mu}_i-\hat{\mu}_j) + \sqrt{\frac{CME}{n_1}}\ Q^{\alpha}_{3,\nu}\, R(1,2,10)$$

para $\nu = 2n_1 + n_3 - 3$ gl.

2. Modificación a la Prueba de Tukey

2.1 Caso: Varianzas Desiguales

Posteriormente a la proposición de Kramer (1956), para comparar diferencias de medias en diseños desbalanceados, el mismo autor estudia el caso de diseños en los cuales las medias están correlacionadas y sus varianzas son desiguales.

El caso que estudia Kramer (1957), no contempla la situación cuando la desigualdad de varianzas de las medias se debe a que las observaciones provienen de diferentes tratamientos que, de por sí, tengan varianzas desiguales; además supone que la correlación de las medias se debe al diseño de bloques incompletos o a alguna covariable usada en el análisis.

Considere un experimento con cinco tratamientos, A, B, C, D y E, cada uno repetido r-veces. Suponga que las medias dispuestas en orden ascendente, son

$$\hat{\mu}_C, \quad \hat{\mu}_A, \quad \hat{\mu}_D, \quad \hat{\mu}_E, \quad \hat{\mu}_B,$$

definimos $R_p = \sqrt{CME}\ \ Q^{\alpha}_{p,\nu}$ donde CME es el estimador insesgado de σ^2, con ν g.l. tal que $\nu(CME)/\sigma^2$ se distribuye como una χ^2 con ν g.l. El procedimiento a modificar afirma que si $\hat{\mu}_B - \hat{\mu}_C$ excede a R_5 entonces debe juzgarse como significativo. Si así sucede, entonces comparar $\hat{\mu}_B - \hat{\mu}_A$ con R_4 y así sucesivamente.

El autor construye las estadísticas más convenientes para varios casos distintos.

2.2 Caso 1: Varianzas y Covarianzas Heterogéneas

Llamemos $a_{ij}(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) = (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j)^*$ la diferencia ajustada, donde a_{ij} es una constante conocida. Supongamos, se tienen k medias ajustadas con varianzas y covarianzas estimadas , $C_{ii}S^2$ y $C_{ij}S^2$. Puesto que el error estandar de cada media puede ser distinto, podemos modificar la prueba de Duncan original. Si $C_{ii}S^2 = C_{jj}S^2$ y $C_{ij}S^2 = 0$, entonces

$$S_{\hat{\mu}} = S_{\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j} / \sqrt{2} \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

Si tenemos dos medias, $\hat{\mu}_1$ y $\hat{\mu}_2$, con sus varianzas y covarianzas estimadas $C_{11}S^2$, $C_{22}S$ y $C_{12}S$ y bajo la relación (1) obtenemos

$$(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2) \quad \sqrt{2/(C_{11} - 2C_{12} + C_{22})} \quad > R_2$$

$$R_2 = S \cdot Q^{\alpha}_{2,\nu}$$

Generalizando las comparaciones anteriores a k medias una prueba conservadora para comparar diferencias de medias es

$$(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j)\ \sqrt{2/(C_{ii} - 2C_{ij} + C_{ij})}\ > R_p \qquad \ldots\ldots (2)$$

$$R_p = S \cdot Q^{\alpha}_{p,\nu}$$

Si se puede suponer que a_{ij} sea constante sin notar un error significativo para todas las $\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j$, entonces (2) puede transformarse en

$$(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) > \sqrt{S^2_{\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j}/2}\quad Q^{\alpha}_{p,\nu}$$

2.3 Caso 2: Método para el Análisis de Covarianza

La precisión de las comparaciones entre las medias de tratamientos distintos, puede incrementarse con un análisis de covarianza. Sin embargo si el cuadrado medio del tratamiento ajustado, es significativo, existe el problema de saber cuál media de tratamiento ajustado es significativa. Para hacer los cálculos más sencillos, supondremos que μ representa la variable a estimar y que x es la medida que está correlacionada con μ, la media ajustada del tratamiento i-ésimo es

$$\hat{\mu}_i' = \hat{\mu}_i - b(\bar{x}_i - \bar{x}),$$

donde μ_i y $\bar{x}_i$ son las medias para el i-ésimo tratamiento, $\bar{x}$ es la media general y b es un coeficiente de regresión. Las varianzas y covarianzas estimadas de las medias ajustadas, cada una con r repeticiones, son

$$C_{ii}S'^2 = \left[\frac{1}{r} + \frac{\bar{x}_i^2}{E_{XX}}\right] S'^2, \quad C_{jj}S'^2 = \left[\frac{1}{r} + \frac{\bar{x}_j^2}{E_{XX}}\right] S'^2,$$

$$C_{ij}S'^2 = \left[\frac{\bar{x}_i\bar{x}_j}{E_{XX}}\right] S'^2$$

donde S'^2 es el cuadrado medio del error para Y, y E_{XX} es la suma de cuadrados del error para las x(s). Por lo tanto el intervalo propuesto queda

$$(C_{ii} - 2C_{ij} + C_{jj}) = \left[\frac{2}{r} + \frac{(\bar{x}_i - \bar{x}_j)^2}{E_{XX}}\right],$$

y tendremos

$$(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) \sqrt{\frac{2_r\, E_{XX}}{2E_{XX} + r(\bar{x}_i - \bar{x}_j)^2}} > R_p$$

para $R_p = S' \, Q^{\alpha}_{p,\nu}$

Caso 3: Para Diseños Balanceados con Bloques Incompletos

Si tenemos t tratamientos cada uno repetidos r veces en q bloques conteniendo k tratamientos distintos y λ es el número de veces que cada tratamiento aparece en el mismo bloque con cada uno de los tratamientos, entonces las varianzas y covarianzas ajustadas de las medias ajustadas por el error entre bloques, son

$$C_{ii}S^2 = C_{jj}S^2 = (k-1)S^2 / rkE^2 \ , \quad C_{ij}S^2 = -\lambda / r^2kE^2 ,$$

donde S^2 es el error entre bloques y $E = [r(k-1) + \lambda] / rk$.

Además

$$C_{ii} - 2C_{ij} + C_{jj} = 2/rE = 2k/ [r(k-1) + \lambda]$$

y los intervalos son de la forma.

$$(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) \sqrt{[r(k-1) + \lambda] / k} > R_p \qquad R_p = S \cdot Q^{\alpha}_{p,\nu}$$

Caso 4: Para Diseños Parcialmente Balanceados

Casi siempre es posible obtener un promedio del error estandar de la diferencia entre dos medias ajustadas, de tal manera que puede utilizarse para todas las comparaciones. Si S^2_{pond} denota la ponderación promedio del error estandar para la diferencia de dos medias ajustadas, entonces los intervalos son de la forma

$$(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) \quad \sqrt{2/(C_{ij} - 2C_{ij} + C_{jj})} \quad > \quad \text{Spond} \cdot Q^{\alpha}_{p,\nu}$$

El autor discute otros dos casos: método general para Latices y otro para un número desigual de repeticiones el primero puede consultarse en Kramer (1957, pág. 17), el segundo se ha tratado al principio de este capítulo.

3. Modificación a las Pruebas de Rangos Múltiples para Varianzas Desiguales. (Duncan 1957)

Las pruebas de rangos múltiples han sido desarrolladas por varios investigadores, por ejemplo, D. Newman, M. Keuls, J.W. Tukey y D.B. Duncan; estas pruebas están pensadas para probar diferencias entre varias medias de tratamientos, siempre y cuando todas las diferencias tengan el mismo interés para el investigador. Estas pruebas suponen homogeneidad de varianzas entre medias de tratamientos y que no están correlacionadas. Kramer (1956) ha propuesto una prueba para casos de diseños desbalanceados, este método es válido para probar diferencias de medias no correlacionadas y con varianzas heterogenéas; el mismo autor ha propuesto modificaciones a la prueba de Tukey para medias correlacionadas.

El método propuesto por Duncan (1957) muestra la proximidad en las propiedades de las pruebas sobre medias correlacionadas con varianzas heterogéneas y las pruebas sobre medias no correlacionadas con varianzas homogéneas.

Sean $\hat{\mu}_1,\ldots,\hat{\mu}_k$ las k medias estimadas, tales que la varianza de la diferencia es $V(\hat{\mu}_i-\hat{\mu}_j) = U_{ij}\,\sigma^2$, donde U_{ij} es conocida y σ^2 es la esperanza de cuadrados medios de la diferencia. Sea S^2 el cuadrado medio del error con ν g.l. tal que $\nu S^2/\sigma^2$ se distribuye como una ji-cuadrada con ν g.l.

Llamemos $a_{ij} = \sqrt{2/U_{ij}}$ el factor de ajuste y $(\hat{\mu}_i-\hat{\mu}_j)^* = a_{ij}(\hat{\mu}_i-\hat{\mu}_j)$ la diferencia ajustada entre las medias $\hat{\mu}_i$ y $\hat{\mu}_j$ y llamemos $R_p = S\,Q^{\alpha}_{p,\nu}$ al valor crítico de p medias, donde $Q^{\alpha}_{p,\nu}$ tiene una distribución de rangos estudentizados con p y ν g.l. (tabla II, tomado de Harter 1960).

Duncan (1957) propone el siguiente criterio: "Cualquier conjunto de k medias es homogéneo si la máxima diferencia ajustada en el subconjunto no excede el valor crítico R_p. Dos medias cualesquira que no estén contenidas en el mismo subconjunto homogéneo, se declaran significativamente distintas. Dos medias cualesquiera que estén contenidas en el mismo subconjunto homogéneo, no se declaran significativamente distintas".

La anterior regla es muy parecida a la de Kramer (1956) excepto que en el último subconjunto de k medias, se declara homogéneo si su <u>rango ajustado</u> no excede a R_p.

El criterio de Duncan arriba expuesto, puede establecerse como sigue. Sean $\hat{\mu}_i$, $\hat{\mu}_j$ los estimadores de las medias μ_i, μ_j respectivamente, tales que $E(\hat{\mu}_i) = \mu_i$ y $E(\hat{\mu}_j) = \mu_j$. Si D_{ij} denota la decisión de que μ_i y μ_j son significativamente distintos, entonces el interés de Duncan es

$$\mathrm{Max}\left\{ P(D_{ij} \mid \mu_i = \mu_j)\right\}$$

que es igual a

$$P(a_{ij} \; |\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j| \leq S \cdot Q^{\alpha}_{p,\nu} \mid \mu_i = \mu_j) = 1 - \alpha \qquad \ldots\ldots (1)$$

Si se tiene que $n_1, \ldots, n_k$ son los tamaños de muestra correspondientes a las medias $\mu_1, \ldots, \mu_k$; entonces

$$a_{ij} = \sqrt{2n_i n_j / (n_i + n_j)}$$

de manera que la expresión (1) queda de la siguiente manera conjunto homogéneo, no se declaran significativamente distintas".

La anterior regla es muy parecida a la de Kramer (1956) excepto que en el último subconjunto de k medias, se declara homogéneo si su <u>rango ajustado</u> no excede a R_p.

El criterio de Duncan arriba expuesto, puede establecerse como si-sigue. Sean $\hat{\mu}_i$, $\hat{\mu}_j$ los estimadores de las medias μ_i, μ_j respectivamente, tales que $E(\hat{\mu}_i) = \mu_i$ y $E(\hat{\mu}_j) = \mu_j$. Si D_{ij} denota la decisión de que μ_i y μ_j son significativamente distintos, entonces el interés de Duncan es

$$\text{Max}\left\{ P(D_{ij} | \mu_i = \mu_j)\right\}$$

que es igual a

$$P(a_{ij} \, |\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j| \leq 5 \cdot Q^{\alpha}_{p,\nu} | \mu_i = \mu_j) = 1 - \alpha \quad \ldots\ldots (1)$$

Si se tiene que $n_1, \ldots, n_k$ son los tamaños de muestra correspondientes a las medias $\mu_1, \ldots, \mu_k$; entonces

$$a_{ij} = \sqrt{2n_i n_j / (n_i + n_j)}$$

de manera que la expresión (1) queda de la siguiente manera con una probabilidad $1-\alpha$ para todas las comparaciones $\mu_i-\mu_j$; de $\mu_1,\ldots,\mu_k$ satisfacen simultáneamente

$$P\left(\sqrt{2n_in_j/(n_i+n_j)}\ |\hat{\mu}\ \ \hat{\mu}| \leq S\cdot Q^{\alpha}_{p,\nu}\right) = 1 - \alpha$$

EJEMPLO

Sean $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2,\ldots,\hat{\mu}_7$ las medias estimadas de siete tratamientos a comparar, ordenadas de menor a mayor. Usando un modelo completamente al azar y desbalanceado. Reproducimos enseguida el ejemplo dado por Duncan (1957, pág. 165) (Nota: se usarán los mismos cuantiles $Q^{\alpha}_{p,\nu}$ dados en el ejemplo.Harter (1960) obtiene nuevas tablas para los valores de $Q^{\alpha}_{p,\nu}$, ver tabla II del apéndice.

Tratamiento	i:	1	2	3	4	5	6	7
Media est.	$\hat{\mu}_i$:	680	734	743	851	873	902	945
Tamaño	n_i:	3	2	5	5	3	2	3

cuya tabla de análisis de varianza es

F.V.	g.l.	C.M.	$S=\sqrt{CM}$
Trats.	6		
Error	16	5,394.6	73.45

para una α =.05 de la tabla II (Harter. 1960) dan los siguientes cuantiles $R_p = \sqrt{CME}\ Q^{\alpha}_{p,16}$

p	:	2	3	4	5	6	7
$Q^{.05}_{p,16}$	:	3.00	3.15	3.23	3.30	3.34	3.37
R_p	:	220.4	231.4	237.2	242.4	245.3	247.5

Hasta aquí este método es igual al de Kramer (1956) la aportación de Duncan se describe a continuación.

Consideremos que una secuencia es una sucesión de pasos. La secuencia 1 consiste de todos los pasos que incluyen todos los subconjuntos en los que la media $\hat{\mu}_7$ es la mayor; la secuencia 2 incluye todos los pasos que incluyen la media $\hat{\mu}_6$, como la mayor y así sucesivamente.

El orden de los pasos en cada secuencia es el mismo que el usado en Kramer (1956). Por ejemplo (ver tabla 1) todos los pasos en la secuencia 1.

TABLA 1

Secuencia No.	P A S O S	Resultado
1	$(\hat{\mu}_7-\hat{\mu}_1)^*>R_7, (\hat{\mu}_7-\hat{\mu}_2)^*>R_6, (\hat{\mu}_7-\hat{\mu}_3)^*>R_5, (\hat{\mu}_7-\hat{\mu}_4)^* <R_4$	$\mu_4=\mu_5=\mu_6=\mu_7$
2	$(\hat{\mu}_6-\hat{\mu}_1)^*>R_6, (\hat{\mu}_6-\hat{\mu}_2)^*<R_5 (\mu_2=\mu_3=\mu_4=\mu_5=\mu_6)$;	
	$(\hat{\mu}_6-\hat{\mu}_3)^*>R_5 (\mu_2=\mu_4=\mu_5=\mu_6)$;	
	$(\hat{\mu}_6-\hat{\mu}_2)^*>R_4 (\mu_4=\mu_5=\mu_6)$;	———
3	$(\hat{\mu}_5-\hat{\mu}_1)^*>R_5, (\hat{\mu}_5-\hat{\mu}_2)^*<R_4 \ (\mu_2=\mu_3=\mu_4=\mu_5)$;	
	$(\hat{\mu}_5-\hat{\mu}_3)^*>R_4 (\mu_2=\mu_4=\mu_5)$	
	$(\hat{\mu}_5-\hat{\mu}_2)^*<R_3, (\hat{\mu}_5-\hat{\mu}_4)^*<R_3, (\hat{\mu}_4-\hat{\mu}_2)^*<R_3$	$\mu_2=\mu_4=\mu_5$
4	$(\hat{\mu}_4-\hat{\mu}_1)^*>R_4, (\hat{\mu}_4-\hat{\mu}_2)<R_3 (\mu_2=\mu_3=\mu_4)$;	
	$(\hat{\mu}_4-\hat{\mu}_3)^*>R_3, (\mu_2=\mu_4)$	———
5	$(\hat{\mu}_3-\hat{\mu}_1)^*<R_3$	$\mu_1=\mu_2=\mu_3$

Nota: $(\hat{\mu}_i-\hat{\mu}_j)^* = (\hat{\mu}_i-\hat{\mu}_j)\sqrt{\dfrac{2(n_i)(n_j)}{n_i+n_j}}$ y $R_p = \sqrt{CME}\ Q^{.05}_{p,16}$

Consiste en probar las $(\hat{\mu}_6-\hat{\mu}_j)$ para j=1, 2, 3, 4, 5; en este caso el proceso se detuvo en j=4 por lo que concluimos que $\mu_4=\mu_5=\mu_6=\mu_7$.

Los cambios suceden cada vez que para alguna j, $(\mu_i - \mu_j)$ R_p para la secuencia i, fija. Si el factor de ajuste a_{ij} $(a_{ij} = \sqrt{2n_i n_j/(n_i+n_j)}$ para el rango de interés es menor que cualquier otra diferencia en el subconjunto, cualesquiera otras diferencias con un factor de ajuste mayor, deben ser probadas. En estos casos es útil escribir el subconjunto formado, sólo para recordar el número p a comparar en R_p contra las demas diferencias ajustadas. Por ejemplo cuando ajustamos, en la secuencia 3, el rango ajustado $(\hat{\mu}_5 - \hat{\mu}_2)^*$ para $(\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5)$ sucedió que fue menor a R_3 y así escribimos inmediatamente $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$; de manera que la siguiente diferencia ajustada $(\hat{\mu}_5 - \hat{\mu}_3)^*$ se compara con R_4 y no contra R_3-como hubiera sucedido en otro caso- como $(\hat{\mu}_5 - \hat{\mu}_3)^* > R_4$ se escribe $\mu_2 = \mu_4 = \mu_5$; en el paso siguiente, las tres diferencias restantes, $(\hat{\mu}_5 - \hat{\mu}_2)^*$, $(\hat{\mu}_5 - \hat{\mu}_4)$, $(\hat{\mu}_4 - \hat{\mu}_7)$ se comparan con R_3.

Cuando una diferencia ajustada en la secuencia i tal que p-medias contenidas en $(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j)^*$ es mayor a R_p, entonces la media $\hat{\mu}_j$ se omite en el siguiente subconjunto a probar. Por ejemplo en el paso 3 de la secuencia 3 $(\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5)$ es reducido a $\mu_2 = \mu_4 = \mu_5$; de esta manera la media μ_3 se omite a causa de $(\hat{\mu}_5 - \hat{\mu}_3)^*$ es mayor que R_4.

Cuando una diferencia ajustada, que no incluya la media máxima, es mayor que R_p se obtienen dos subconjuntos en la misma secuencia. Por ejemplo, si se tienen 4 medias dispuestas en orden ascendente y con distintos tamaños de muestra como sigue

A	B	C	D
(1)	(50)	(100)	(1)

se tendrían los pasos siguientes, para la misma secuencia.

$(\hat{\mu}_D-\hat{\mu}_A)^*<R_4 . (\mu_A=\mu_B=\mu_C=\mu_D)$; $(\hat{\mu}_D-\hat{\mu}_B)^*<R_4$; $(\hat{\mu}_D-\hat{\mu}_C)^*<R_4$; $(\hat{\mu}_C-\hat{\mu}_A)^*<R_4$;

$(\hat{\mu}_C-\hat{\mu}_B)^*>R_4$,

y los subconjuntos formados pueden ser $(\mu_A=\mu_B=\mu_D)$ ó bién $(\mu_A=\mu_C=\mu_D)$, ambos son válidos.

En nuestro ejemplo los conjuntos formados son

$(\mu_4=\mu_5=\mu_6=\mu_7)$, $(\mu_2=\mu_4=\mu_5)$ y $(\mu_1=\mu_2=\mu_3)$.

Notar que los subconjuntos formados en la secuencia 2 ya están incluidos en el primer subconjunto, y los de la secuencia 4 en el segundo subconjunto.

4. Modificación a la Prueba de Tukey.
Caso: Varianzas Desiguales. (Hochberg)

Hochberg (1976), extiende el método de Tukey para situaciónes en las que hay hetereogeneidad de varianzas (heterocedasticidad) en un modelo con un criterio de clasificación.

Sean k muestras independientes de n_i observaciones Y_{ij} independientes tal que

$$Y_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), \quad i=1,\ldots,k.$$

Los métodos de inferencia simultánea que se discuten aquí sirven para encontrar intervalos de confianza simultáneos para contrastes y para cualquier combinación lineal de las μ_i.

Sea $\bar{Y}_i$ y S_i^2 la media muestral y el estimador usual de la varianza, σ_i^2, respectivamente. Si se conocen los cocientes σ_i/σ_j ($i \neq j$), el problema puede reducirse al caso de la extensión generalizada de la prueba de Tukey en un modelo con un criterio de clasificación y desbalanceado, bajo la condición de homogeneidad de varianzas. Estos procedimientos se encuentran en Spjøtvoll & Stoline (1973)

Sin embargo es común que los cocientes de las σ_i no se conocen. El autor desarrolla un método para cuando no se conoce nada de las σ_i's. Sea $\underline{\ell} = (\ell_1, \ldots, \ell_k)'$ un vector en $\mathbb{R}^k$, definimos como en Spjøvoll & Stoline (1973)

$$M(\underline{\ell}) = \text{máx}\left\{ \sum_{\ell_i>0} \ell_i, \; -\sum_{\ell_i<0} \ell_i \right\},$$

además si $\nu_i = n_i - 1$ para $i=1,\ldots k$

$$m = \min\left\{ \nu_1, \ldots, \nu_k \right\}$$

entonces $Q^{\alpha}_{k,\,m}$ es el cuantil al $(1-\alpha)$ 100% de confianza de una distribución aumentada de rangos estudentizados, tabla X del apéndice. Haciendo $L = (\ell_1 S_1/\sqrt{n_1}, \ldots, \ell_k S_k/\sqrt{n_k}$ tendremos el siguiente resultado:

La probabilidad de los intervalos de confianza

$$\left\{ \sum_{1}^{k} \ell_i \mu_i \in \sum_{1}^{k} \ell_i \bar{y}_i \pm Q^{\alpha}_{k,m} \; M(L) \right\} = 1 - \alpha \quad \ldots. \; (1)$$

para toda $\underline{\ell} \in \mathbb{R}^k$.

Para probar (1) lo haremos de manera similar al resultado principal de Spjøtvoll & Stoline (1973). Escribimos

$$\sum_{1}^{k} \ell_i(\bar{y}_i - \mu_i) = \sum_{1}^{k} \ell_i S_i \sqrt{n_i}\, (\bar{y}_i - \mu_i)/S_i \sqrt{n_i} = \sum_{1}^{k} b_i t_i \quad \ldots. \; (2)$$

donde $b_i = \ell_i S_i/\sqrt{n_i}$ y $t_i = \sqrt{n_i}\,(\bar{y}_i - \mu_i)/S_i$. En la expresión (2) se tiene que t_i sigue una distribución t-central de student con ν_i g.l. y las t_i (s) son independientes, con lo cual tiene lugar (1).

Para el caso de comparar contrastes por parejas tendremos que comprobabilidad $\geq 1-\alpha$.

$$(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) - \text{máx}\left\{\frac{S_i}{\sqrt{n_i}}, \frac{S_j}{\sqrt{n_j}}\right\} Q^{\alpha}_{k,m} < \mu_i - \mu_j < (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) + \text{máx}\left\{\frac{S_i}{\sqrt{n_i}}, \frac{S_j}{\sqrt{n_j}}\right\} Q^{\alpha}_{k,m}$$

$$\ldots.. \; (3)$$

El conocimiento previo sobre las magnitudes de las varianzas, se puede utilizar para aumentar el número de observaciones donde se espera mayor variabilidad.

EJEMPLO

En este ejemplo se tiene $k=4$, $n_1=n_2=n_3=n_4=6$ y $S_1^2 = 178$, $S_2^2 = 60$, $S_3^2 = 98$, $S_4^2 = 68$. Seleccionamos una $\alpha = .05$, puesto que los tamaños de muestra son iguales y $k \geq 3$, podemos utilizar las tablas usuales para rangos estudentizados como una aproximación a la de rangos estudentizados, aumentada. (En realidad con la tabla I $Q^{.05}_{4,5} = 5.22$ y con la tabla X, $\bar{q}^{.05}_{4,5} = 5.236$. El método propuesto afirma

$$(\hat{\mu}_i-\hat{\mu}_j) - \max\left\{\frac{S_i}{\sqrt{6}}, \frac{S_j}{\sqrt{6}}\right\} 5.22 < \mu_i-\mu_j < (\hat{\mu}_i-\hat{\mu}_j) + \max\left\{\frac{S_i}{\sqrt{6}}, \frac{S_j}{\sqrt{6}}\right\} 5.22$$

5. Modificación a la Prueba de Sheffè para Varianzas Desiguales.

(Brown y Forsythe (1974)).

Cuando en un modelo con un criterio de clasificación existe heterogeneidad de varianzas, es bien conocido que hay cierta pérdida de robustez de la F en el análisis de varianza. Los resultados obtenidos por Brown y Forsythe (1974) derivan una prueba basada en los resultados de Scheffè (1953), combinando contrastes ortonormales en modelos con uno y dos criterios de clasificación con varianzas desiguales.

Considere el modelo con un criterio de clasificación

$$y_{ij} = \mu+\tau_i+\varepsilon_{ij} \qquad i=1,\ldots,p; \quad j=1,\ldots,n_i.$$

en este modelo tenemos p tratamientos y n_i observaciones en el tratamiento i-ésimo. Además $y_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ para $\mu_i=\mu+\tau_i$, definimos

$$\bar{y}_{i.} = \sum_j Y_{ij}/n_i \quad \text{y} \quad S_i^2 = \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2/(n_i-1).$$

Un contraste se define como $\Psi = \Sigma C_i\mu_i$ tal que $\Sigma C_i = 0$ tal que su estimador es $\hat{\Psi} = \Sigma C_i\bar{Y}_i$. Por otro lado $V(\hat{\Psi}) = \Sigma C_i^2\sigma_i^2/n_i$

y su estimador es $\widehat{V}(\hat{\Psi}) = \Sigma C_i S_i / n_i$; la estadística de prueba es

$$t_c = \hat{\Psi} / \sqrt{\widehat{V}(\hat{\Psi})}$$

para probar la hipótesis $Ho: \Psi = 0$. La distribución de t_c es la t-student con f g.l.

$$f = \left[\sum_i \frac{C_i^2}{n_i - 1} \right]^{-1} \quad \text{para} \quad C_i = \left[\frac{S_i^2 / n_i}{\sum S_i^2 / n_i} \right].$$

La F* obtenida por Brown y Forsythe (1974) para un ANDVA es

$$F^* = \frac{\sum_i n_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2}{\sum_i \left(1 - \frac{n_i}{n}\right) S_i^2},$$

que sigue una distribución F de Snedecor con P-1, f gl.

para

$$f = \left[\sum_i \frac{C_i^2}{n_i - 1} \right]^{-1} \quad \text{donde} \quad C_i = \frac{\left(1 - \frac{n_i}{n}\right) S_i^2}{\sum \left(1 - \frac{n_i}{n}\right) S_i^2}$$

Las condiciones que deben cumplir los coeficientes C_i de los contrastes ortonormales son

$$\sum_i C_{ik} = 0 \qquad k = 1,\ldots, \qquad \text{(Contraste)}$$

$$\sum_i C_{ik}^2/n_i = 1 \qquad k = 1,\ldots, \qquad \text{(Normalización)}$$

$$\sum C_{ik}C_{im}/n_i = 0 \qquad m,k = 1,\ldots,\ m \neq k \qquad \text{(Ortogonalización)}$$

El numerador del estadístico de prueba para los ℓ contrastes ortonormales es

$$\sum \left[\sum_k C_{ik}\,\bar{y}_{i.}\right]^2$$

y el denominador es

$$\sum_k \left(\sum_i C_{ik}^2\, S_i^2/n_i\right)$$

Por tanto el estadístico de prueba para los ℓ contrastes es

$$F_\ell^* = \frac{\sum_k \left(\sum_i C_{ik}\,\bar{y}_{i.}\right)^2}{\sum_i \sum_k C_{ik}^2\, S_i^2/n_i}$$

y se compara con una F de Snedecor con ℓ y f g.l., donde

$$f = \left[\sum_i \frac{a_i}{n_i - 1}\right]^{-1} \quad y \quad a_i = \frac{\sum_k \left(C_{ik}^2\right) S_i^2 / n_i}{\sum_i \left(\sum_k C_{ik}^2\right) S_i^2 / n_i}$$

La F_ℓ^* definida anteriormente cumple ciertas propiedades (para ver las pruebas de estas propiedades, consultar Brown & Forsythe, 1974; pág. 721):

i) F_ℓ^* es equivalente a $(\Sigma C_i \bar{y}_{i.})^2 / (\sum_i C_i^2 S_i^2 / n_i)$

ii) Dados dos conjuntos de ℓ contrastes ortonormales tal que un conjunto es una combinación lineal del otro, ambos conjuntos tendrán la misma F_ℓ^*.

iii) F_ℓ^* es equivalente a F^* cuando $\ell = p-1$

Basados en la prueba de Scheffè, los intervalos simultáneos con $(1-\alpha)$ 100% de confianza, para todos los contrastes posibles Ψ y varianzas desiguales, quedan

$$\hat{\Psi} - \sqrt{(k-1)\, F^{\alpha}_{k-1,f}\, (\Sigma C_i^2 S_i^2 / n_i)} < \Psi < \hat{\Psi} + \sqrt{(k-1)\, F^{\alpha}_{k-1,f} (\Sigma C_i^2 S_i^2 / n_i)}$$

donde $F^{\alpha}_{k-1,f}$ es el cuantil al $1-\alpha$ de una F de Fisher con $k-1$, f g.l. y f se estima para cada constraste $\hat{\Psi}$ particular.

Para un modelo con dos criterios de clasificación con interacción se tiene

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \eta_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad \begin{cases} i=1,\ldots,r \\ j=1,\ldots,c \\ k=1,\ldots,m \end{cases}$$

donde

$$\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2_{ij}) \text{ y } \sum_j \beta_j = 0, \quad \sum_i \alpha_i = 0 \text{ y } \sum_{ij} \eta_{ij} = 0$$

Este modelo puede reescribirse de la siguiente manera

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad \text{donde} \quad \mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \eta_{ij}.$$

La F que construyen los autores para probar los efectos de α_i es

$$F^{*}_{R} = \frac{mc \sum_i (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2}{\left(\frac{r-1}{cr}\right) \sum_{ij} S^2_{ij}}$$

$$= \frac{\sum_i (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2/(r-1)}{\sum_{ijk} (Y_{ijk} - Y_{ij.})^2/[(m-1)rc]}$$

que es la estadística usual F. Sin embargo, F_R^* no se distribuye como una F de Snedecor con r-1 y (m-1)rc grados de libertad, pero se puede aproximar satisfactoriamente con esta para r-1 y f grados de libertad para

$$f = \left[\sum_{i,j} \frac{a_{ij}^2}{i,j(m-1)} \right] \quad y \quad a_{ij} = \left[\frac{S_{ij}^2}{\sum_{i,j} S_{ij}^2} \right]$$

análogamente para los efectos de β_j se tiene

$$F_C^* = \frac{\sum_j (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2/(c-1)}{\sum_{i,j,k} (y_{ijk} - y_{ij})^2/ [(m-1)rc)}$$

y para los efectos de η_{ij} se tiene

$$F_{RC}^* = \frac{\sum_{ij} (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{...})/(rc - r - c + 1)}{\sum_{ijk} (y_{ijk} - y_{ij.})^2/ [(m-1)rc]} ;$$

estas dos expresiones, F_C^* y F_{RC}^*, se comparan contra una F de Snedecor con c-1, f g.l. para los efectos de β_j (s) y con rc - r - c + 1, f gl. para los efectos de interacción η_{ij} (s) respectivamente.

Para que los ℓ contrastes sean ortonormales, se utiliza el método de ortogonalización de Gram Schmidt: aumentar a la familia de contrastes la combinación lineal que estima la media

$$C_{oi} = n_i/n$$

el k-ésimo contraste ortogonalizado lo denotamos C'_{ki}, así

$$C_{ki} = C'_{ki} - \sum_{j=0}^{k-1} \left[\sum_{h=1}^{p} C'_{kh}\, C_{jh}/n_h \right] C_{ji}$$

para $i=1,\ldots,p$; después se normaliza C_{ki} dividiendo cada término entre

$$\sum_i C_{ki}^2/n_i$$

Una vez concluido este proceso, elimine C_{oi} del conjunto de contrastes ortonormales. Finalmente combine las sumas de cuadrados atribuidos a los contrastes como antes se indicó.

6 . Modificación a la Prueba de Tukey para Diseños que usan Covariables (Bryant & Paulson, 1976).

En muchos experimentos, expecialmente en el área de sicometría, es posible obtener información concomitante a bajo costo, además de la variable de respuesta principal. El proce dimiento propuesto por Bryan & Paulson (1976), está pensado para construir intervalos de confianza simultáneos en diseños que usan covariables. Este procedimiento está basado en el método de Tukey, expuesto en el capítulo I.

Considere el modelo

$$y_i = a_i'\mu + (x_i - \delta)' \; u + \varepsilon_i \quad ; \quad i=1,\ldots,N, \quad \ldots\ldots (1)$$

donde los vectores de orden $(p+1) \times 1$, $(x_{i1},\ldots,x_{ip}, y_i)' = (x_i', y_i)'$ independientes con distribución normal multivariada, con matriz de covarianza Σ, $E(x_i) = \delta$ y $E(y_i) = a_i'\mu$. La matriz A, de orden $N \times n$, cuyo i-ésimo renglón es a_i', es una matriz de constantes conocidas de rango q. Se supone que el vector $1_N=(1,\ldots,1)'$ esta en la primera columna de A. La matriz de covarianzas Σ, de orden $(p+1) \times (p+1)$ es definida positiva y puede obtenerse una partición de la siguiente manera

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma'_{xy} & \sigma^2_y \end{bmatrix}$$

de modo que Σ_{xx} es de orden $p \times p$, σ_{xy} de $p \times 1$ y σ^2_y un escalar. El vector μ, de orden $n \times 1$, y el vector de los coeficientes de regresión u, de orden $p \times 1$, deben ser estimados a partir de los datos, $u = \Sigma_{xx}^{-1}\,\sigma_{xy}$. Las desviaciones ε_i son independientes y distribuidas normalmente con media cero y varianza

$$\sigma^2_{y|x} = \sigma^2_y - \sigma'_{xy} \Sigma^{-1}_{xx} \sigma_{xy}$$

(para mayores referencias ver Anderson, 1958, Capítulo 2). Supondremos siempre que $N > p+q$.

Hagamos que $\theta_i = b_i'\mu$ $(i=1,\ldots,k)$, donde b_i es un vector de constantes conocidas, de orden nx1. La hipótesis nula es

$$Ho : \theta_1 = \ldots = \theta_k.$$

Por otro lado, mediante la estimación por máxima verosimilitud de los parámetros en el modelo (1) se obtiene

$$\hat{\delta} = N^{-1}X'1_N, \; \hat{\mu} = (A'A)^{-1}A'(y-Z\hat{u}), \; \hat{u} = (Z'HZ)^{-1}Z'H_y, \quad \ldots (2)$$

donde $(A'A)^{-1}$ denota la inversa generalizada de $(A'A)$,

$$y = (y_1, \ldots, y_N)', \; X = (x_1, \ldots, x_N)', \; Z=X-1_N\hat{\delta}' \text{ y } H-I-A(A'A)^{-1}A'.$$

La cantidad $\sigma^2_{y|x}$ se estima con v/ν, donde $\nu = N-p-q$ y

$$v = w_{yy} - w'_{xy} W^{-1}_{xx} w_{xy},$$

$$W = (Z,y)'H(Z,y) = \begin{bmatrix} Z'HZ & Z'Hy \\ y'HZ & y'Hy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{xx} & w_{xy} \\ w'_{xy} & w_{yy} \end{bmatrix}$$

de la expresión (3) se obtiene que las diferencias

$$\theta_i - \theta_j \ (i \neq j)$$

se pueden estimar $\hat{\theta}_i - \hat{\theta}_j$, donde

$$\hat{\theta}_i = b_i'\hat{\mu} = b_i'(A'A)^{-1}A'(y-Z\hat{u}) = c_i'(y-Z\hat{u}).$$

En analogía con las suposiciones de la prueba de Tukey, tenemos que

i) Para $i=1,\ldots,k$, $c_i'c_i=k_1$

ii) Para $i\neq j$, $c_i'c_j=k_2$, tales que $-k_1 \leq (k-1)k_2 \leq 0$

iii) Para $i=1,\ldots,k$, $c_i'1_N$=constante.

Bajo estas suposiciones la estadística de prueba propuesta por Bryant & Paulson, es

$$Q_p = \max_{i\neq j} \frac{(\hat{\theta}_i-\hat{\theta}_j) - (\theta_i-\theta_j)}{\{(k_1 - k_2)\, v/\nu\}\ 1/2}$$

La estadística Q_p se basa en una distribución del tipo de rangos estudentizados. Bajo Ho la regla de decisión es si $Q_p > q^{\alpha}_{p,k,\nu}$ entonces rechazar Ho ; si $Q_p \leq q^{\alpha}_{p,k,\nu}$ no rechazar Ho. Los cuantiles de $q^{\alpha}_{p,k,\nu}$ han sido calculados por Bryant y Paulson (1976), y se exhiben en la tabla XII. Además de esta estadística los autores derivan otra que se puede usar para obtener intervalos de confianza simultáneos para todos los contrastes $\Psi = \Sigma \ell_i \theta_i$, con $\Sigma \ell_i = 0$, de la siguiente manera

$$\Sigma \ell_i \hat{\theta}_i \pm \{(K_1 - K_2)\ v/\nu\}^{1/2} \left(\frac{1}{2} \Sigma |\ell_i|\right) q^{\alpha}_{p,k\nu}. \qquad \ldots\ldots (3)$$

Notar que si p=0, no existen covariables, la distribución de Q_p se reduce a la distribución exacta de rangos estudentizados y (3) toma la forma de un intervalo de confianza de Tukey.

Una modificación a esta prueba se presenta en el capítulo IV, comparaciones múltiples de medias en el análisis de covarianza, Bryant & Bruvold (1980).

6. Modificación a la Prueba de Tukey y Scheffé (Dunn 1961)

Dunn (1961), considera el caso de seleccionar m contrastes, a priori, de estre k tratamientos y estimar estos m contrastes lineales por medio de intervalos de confianza, basados en un estadístico de t student, de tal manera que el nivel de confianza global de los m intervalos es mayor o igual que el valor preasignado.

Las pruebas a las que hacemos referencia fueron expuestas en el capítulo I, en él se expuso que la prueba de Scheffè se basa para construir intervalos de confianza simultáneos para todas los posibles contrastes en una F. Los intervalos de Tukey para todos los posibles contrastes usa la distribución de rangos estudentizados.

Consideremos ahora el caso de haber elegido previamente m combinaciones lineales, de entre los k tratamientos cuyas medias son $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ y sus respectivos estimadores $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \ldots, \hat{\mu}_k$, las cuales se distribuyen normalmente con media μ_i y varianza $a_{ii}\sigma^2$ $i=1,\ldots,k$; la covarianza entre $\hat{\mu}_i$ y $\hat{\mu}_j$ es $a_{ij}\sigma^2$ para $i\neq i$. Aquí se supone conocide a_{ii} y a_{ij} pero σ^2 puede ser desconocida. Sea CME el estimador de σ^2 que es estadísticamente independiente de $\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_k$, tal que $\nu CME/\sigma^2$ se distribuye como una Ji-cuadrada con ν grados de libertad.

Modificación a la Prueba de Tukey

Sean las m combinaciones lineales de las medias a estimar

$$\theta_S = C_{1S}\mu_1 + \ldots + C_{kS}\,\mu_k \quad S=1, 2, \ldots, m.$$

Una combinación es, en particular, un contraste si

$$\sum_{i=1}^{k} C_{iS} = 0$$

Los estimadores insesgados para $\theta_1,\ldots,\theta_m$ son

$$\hat{\theta}_S = C_{1S}\hat{\mu}_1 + \ldots + C_{kS}\hat{\mu}_k \qquad S=1,\ 2,\ldots,m.$$

tales que

$$\hat{\theta}_S \sim N(\theta_S,\ b_S^2\sigma^2) \qquad \text{para} \quad b_S^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}C_{iS}C_{jS}.$$

Ahora bien, las variables $t_1,\ldots,t_m$ tienen cada una, una distribución de t-student con ν grados de libertad, así

$$t_S = \frac{\hat{\theta}_S - \theta_3}{\sqrt{b_S\ \text{CME}}}, \qquad S=1,\ldots,m.$$

usando la distribución conjunta de $t_1,\ t_2,\ldots,t_m$ y la desigualdad de Bonferroni (Dunn 1961; pág. 53) se pueden obtener los límites $-C$ y $+C$ (para C una constante positiva) y en consecuencia los intervalos de confianza al nivel $1-\alpha$ se obtienen de

$$P\left[-C < \frac{\hat{\theta}_S - \theta_S}{\sqrt{b_S\ \text{CME}}} < C, \quad S=1,\ldots,m\right] \geq 1-\alpha$$

y son

$$\hat{\theta}_S \pm C\sqrt{b_S\ \text{CME}} \qquad S=1,\ldots,m \qquad \ldots\ldots (1)$$

donde los valores de C con ν g.l. y m combinaciones lineales se encuentran en la tabla XIII, tomada de Dunn (1961).

Cuando $\hat{\mu}_1,\ldots,\hat{\mu}_k$ son las medias muestrales $\bar{y}_1,\bar{y}_2,\ldots,\bar{y}_k$ y cuando $\bar{y}_i$ para $i=1,\ldots,k$ son estadísticamente independientes, entonces $a_{ij} = L'/n_i$, donde n_i es el tamaño de muestra de las $\bar{y}_i$ (s); para $i\neq j$, $a_{ij}=0$. Los intervalos de confianza para $C_{1S}\mu_1+\ldots+C_{kS\ k}$ son ahora

$$(C_{1S}\,\bar{y}_1 + \ldots + C_{kS}\,\bar{y}_k) \pm C\sqrt{\sum_{i=1}^{k} C_{iS}^2/n_i\ \text{CME}}\ , \quad S=1,\ldots,m$$

Modificación a la Prueba de Sheffè

Los intervalos de Scheffè para cualquier número de contrastes, de entre k medias, son

$$\hat{\theta}_S \pm S\cdot\sqrt{b_S\ \text{CME}} \qquad \ldots\ldots (2)$$

donde $S^2 = (k-1)\,F^{\alpha}_{k-1,\nu}$. Aquí $F^{\alpha}_{k-1,\nu}$ es el cuantil al $(1-\alpha)$ 100% de confianza de una distribución F con k-1 y ν g.l., los demás simbolos se definieron antes.

Cuando se desea un número específico de combinaciones lineales [y no específicamente contrastes] , los intervalos son los mismos que en (2) pero $S^2 = k\ F^{\alpha}_{k-1,\nu}$.

Dado que los intervalos de t en (1) y los F en (2) tienen casi la misma forma y se tienen las mismas suposiciones, es sugestivo compararlos.

La principal diferencia es que en los intervalos de t, el conjunto de combinaciones lineales que se deben estimar, deben planearse de antemano; mientras que con Scheffè los intervalos pueden pensarse después de observar los datos, puesto que el método de Scheffè esta pensado para todas las posibles combinaciones lineales de k medias.

Una segunda diferencia entre ambos métodos, es que las longitudes de los intervalos de t dependen del número de combinaciones lineales de interés, mientras que con el método de Scheffè las longitudes dependen del número de medias. Parece razonable suponer que los intervalos de t son más estrechos para m chica y k grande; y que los intervalos de F pueden ser estrechos para m grande y k pequeña. Dunn (1961; pág. 56-64) muestra que esta segunda diferencia es real y construye tablas para determinar los valores de m y k, en relación al número máximo de combinaciones lineales, para que los intervalos sean estrechos, los cuantiles se exhiben en la tabla XIII.

7. Modificación a la Prueba de Tukey para Modelos de Bloques al Azar.

(Fenech)

En un modelo de bloques completamente al azar (B.C.A) los errores están correlacionados y no se puede suponer que tengan varianza común. Supongamos que tenemos P tratamientos que se han asignado aleatoriamente a p unidades experimentales en cada uno de los r bloques. Consideremos que el efecto de los tratamientos es aditivo y que la fuente de variación, cuando se aplica el mismo tratamiento a diferentes unidades experimentales, es muy heterogénea. Sea el modelo BCA

$$y_{ijk} = \mu + \beta_i + \tau_j + \varepsilon_{ij} \quad \begin{cases} i=1,\dots,r \\ j=1,\dots,p \quad , \end{cases} \qquad \dots\dots \quad (1)$$

donde y_{ij} es la respuesta del tratamiento j en el bloque i, μ es la media general, β_i el bloque i y τ_j el efecto del tratamiento j y ε_{ij} son los errores aleatorios causados por la heterogeneidad de la variable de respuesta dentro de los bloques.

El problema consiste en construir intervalos de confianza simultánea para las $\binom{p}{2}$ diferencias en los efectos de tratamientos. Si pudieramos suponer que $\varepsilon_{ij} \sim N(0,\sigma^2)$ e indepen dientes, podríamos usar los métodos de comparaciones múltiples de Tukey o Scheffé. Pero en el modelo (1) no necesariamente los errores ε_{ij} son independientes, ni tienen la misma varianza y tampoco se distribuyen normalmente. Fenech (1979) mediante métodos de simulación, propone una modificación a la prueba de Tukey para probar diferencias de medias, en un modelo BCA.

Hemos dicho que en el modelo (1) el efecto de los tratamientos es aditivo. Considere ahora que el conjunto de observaciones $\left\{y_{ij} \mid i=1,\ldots r;\ j=1,\ldots p\right\}$ se generan de la siguiente manera: los p tratamientos se asignan a los bloques $\beta_1,\ldots,\beta_r$ y en cada bloque los tratamientos se aleatorizan de entre las unidades experimentales (u.e) Definimos $\Pi(i,j)$ como la permutación del elemento j, i=1,...,p, correspondiente al i-ésimo bloque, entonces

$$\varepsilon_i = \begin{bmatrix} \varepsilon_{i1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{ij} \\ \vdots \\ \varepsilon_{ip} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{i\Pi(i,1)} \\ \\ e_{i\Pi(i,j)} \\ \\ e_{i\Pi(i,p)} \end{bmatrix} e_i \quad , \qquad \ldots..(2)$$

puesto que las permutaciones se seleccionan de manera aleatoria y con reemplazo de todos las posibles permutaciones de los números 1,...,p, los vectores $\{e_i\}$ son independientes. Usando el hecho de que $\sum_j e_{ij}=0$, se concluye que $E(e_{ij})=0$

Sea C una matriz de pxq, tal que

$$C = \begin{bmatrix} 1 & & & & -\frac{1}{p-1} \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ -\frac{1}{p-1} & & & & 1 \end{bmatrix}$$

entonces $COV(\varepsilon_i) = (\sum_j e_{ij}^2/P)C$. El modelo generado a partir los errores definidos en (2), lo llamaremos modelo aleatorizado.

En el Capítulo I definimos la distribución de rangos estudentizados, en este capítulo se definió $S^2 = CME$ como el estimador de σ^2. Si $C > 0$, se puede encontrar una solución para C tal que

$$P\left[\max_{j,j'=1,\ldots p}\left\{|\bar{Y}_{ij} - \bar{Y}_{.j'}|\right\}/S \leq C\right] = 1-\alpha \quad \ldots. \quad (3)$$

En nuestro modelo aleatorizado las observaciones y_{ij} siguen una distribución normal ya que los errores $\varepsilon_{ij} \sim N(0,\sigma^2)$. Así la expresión

$$\max_{j,j'}\left\{|\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{.j'}|\right\}/S$$

en (3) tienen una distribución de rangos estudentizados. Fenech (1979) afirma que los valores de C pueden encontrarse mediante el método tradicional de Tukey, cuando las observaciones $\{y_{ij}\}$ se generan por el modelo aleatorizado y el número de bloques es grande. El autor demuestra que

$$\frac{\max_{j,j'} \left\{ |\overline{Y}_{.j} - \overline{Y}_{.j'}| \right\}}{S / \sqrt{r}} \rightarrow \max_{j',j=1,\ldots,p} \left\{ |Z_j - Z_{j'}| \right\} \quad \ldots\ldots (4)$$

donde $Z_{j',j} \sim N(0,1)$ para $j,j'=1,\ldots,p.$ y r grande a partir (4) se obtiene que si

$$P \left\{ \max_{j,j'=1,\ldots,p} \left\{ |Z_j - Z_{j'}| \right\} \leq C \right\} = 1-\alpha$$

entonces

$$\lim_{r\to\infty} P \left\{ (\tau_j - \tau_{j'}) \varepsilon (\overline{Y}_{.j} - \overline{Y}_{.j'}) \pm \frac{CS}{\sqrt{r}} \right\} = 1-\alpha$$

para $j, j'=1,\ldots,p$. De manera que los intervalos son de la forma

$$(\overline{Y}_{.j} - \overline{Y}_{.j'}) - \frac{CS}{\sqrt{r}} < (\tau_j - \tau_{j'}) < (\overline{Y}_{.j} - \overline{Y}_{.j'}) + \frac{CS}{\sqrt{r}}$$

para una $(1-\alpha)$ 100% de confianza, donde C se exhiben en la tabla XIV, tomada de Fenech (1979).

8. Modificación a la Prueba de Tukey para Comparar Efecto de Interacción.

(Sen 1969)

La prueba de tukey, expuesta en el Capítulo I, es aplicable para casos en los que las medias tienen varianzas homogéneas e igualmente correlacionadas con distribución normal. Sin embargo un experimento factorial, al realizar comparaciones sobre efectos de interacción, las variables aleatorias no están igualmente correlacionadas. Sen (1969), propone una modificación al método de Tukey para realizar comparaciones múltiples entre medias de efectos de interacciones

Sea $Z=(Z_1,\ldots,Z_p)$ tal que tiene una distribución normal multivariada con media 0 y matriz de varianzas y covarianzas $\Sigma=\sigma^2 \mathcal{Z}$ para $\sigma^2>0$. $-1(P-1) \leq \rho<1$ y

$$(i-\rho)I_p+\rho J_p = \begin{bmatrix} 1-\rho & 0,\ldots,0 \\ 0 \quad \cdot & 0 \\ \vdots \quad \cdot & \vdots \\ \vdots \qquad \cdot & 0 \\ 0 \ldots\ldots 0 & 1-\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho & \rho \ldots \rho \\ \rho \quad \cdot & \vdots \\ \vdots \quad \cdot & \vdots \\ \vdots \qquad \cdot & \rho \\ \rho \ldots \rho & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho\ldots\rho \\ \rho \quad \cdot & \vdots \\ \vdots \quad \cdot & \vdots \\ \vdots \qquad \cdot & \rho \\ \rho \ldots\ldots \rho & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{Z}$$

(Notar que I_p es una matriz identidad de orden p y J_p es una matriz de unos, de orden p). Entonces para todos los contrastes posibles la prueba de Tukey, el enunciado probabilístico es (ver Miller 1966, pág. 42)

$$P\left\{\sum_1^p C_i Z_i \;\Big|\; \leq Q^{\alpha}_{p,\nu}\sqrt{S^2(1-\rho)}\sum_1^p \frac{|C_i|}{2}\right\} = 1-\alpha \qquad \ldots. (1)$$

para $Q^{\alpha}_{p,\nu}$ el cuantil de una distribución de rangos estudentizados con $(1-\alpha)$ 100% de confianza y p,ν g.l. los valores se exhiben en la tabla II, tomado de Harter (1960).

En la práctica sucede que ρ es igual a 0 ó $-1(p-1)$. Sen (1969) considera en su modificación, que $Z = \left\{(Z_{ij})\right\}$ es una matriz de orden pxq con distribución normal multivariada y $E(Z) = 0$, 0 una matriz de orden pxq y

$$E(Z_{ij}\cdot Z_{i'j'}) = \begin{cases} \sigma^2, & i=i',\ j=j' \\ \rho_1\sigma^2, & i\neq i',\ j=j' \\ \rho_2\sigma^2, & i=i',\ j\neq j' \\ \rho_3\sigma^2, & i\neq i',\ j\neq j' \end{cases} \qquad \ldots.. (2)$$

donde

$$\sigma^2>0,\ -1/(p-1) \leq \rho_1<1,\ -1/(q-1) \leq \rho_2<1 \quad y \quad 1-\rho_1-\rho_2+\rho_3>0$$

Esto es ρ_1 es la correlación de dos elementos en la misma columna, ρ_2 del mismo renglón y ρ_3 de diferentes renglones y columnas. En los modelos factoriales se tiene $\rho_1 = -1/(p-1)$ y $\rho_2 = -1/(q-1)$.

Hagamos que $L = \left\{(\ell_{ij})\right\}$ sea una matriz de pxq tal que $\sum_i \ell_{ij} = \sum_j \ell_{ij} = 0$, entonces la propuesta de Sen (1969) puede escribirse como sigue: bajo las condiciones de Z y L, antes expuestas.

$$P\left\{ |Tr(LZ')| \leq Q^{\alpha}_{pq,\nu} \sqrt{S^2(1-\rho_1-\rho_2+\rho_3)} \sum_j^p \sum_j^q \frac{|\ell_{ij}|}{2} \right\} \geq 1-\alpha \qquad \ldots\ldots (3)$$

donde la cota inferior $1-\alpha$ se alcanza cuando $\rho_1 = -1/(p-1)$ y $\rho_2 = -1/(q-1)$. De manera análoga a la prueba de Tukey $\nu S^2/\sigma^2$ tiene una distribución ji-cuadrada con ν g.l.

Para probar la expresión (3) hagamos

$$U = (I_p - \frac{1}{p} J_p)\, Z\, (I_q - \frac{1}{q} J_q), \qquad \ldots\ldots (4)$$

entonces $E\{U\}=0$, 0 una matriz de orden pxq; de las expresiones (2) y (4) se obtiene que

$$E(U_{ij}.U_{i'j'}) = \begin{cases} \sigma_0^2 = (p-1)(q-1)\sigma^2(1-\rho_1-\rho_2+\rho_3)/pq & i=i', \quad j=j' \\ -\sigma_0^2/(p-1) & i\neq i', \quad j=j' \\ -\sigma_0^2/(q-1) & i\neq i', \quad j\neq j' \\ \sigma_0^2/(p-1)(q-1) & i\neq i', \quad j\neq j' \end{cases}$$

Sean X y Y dos vectores independientes (e independientes de U con p y q elementos respectivamente), con distribución normal multivariada con medias cero y varianzas $I_p\sigma_1^2$ y $I_q\sigma_2^2$ respectivamente donde

$$\sigma_1^2 = \sigma^2(1-\rho_1-\rho_2+\rho_3)/q \quad \text{y} \quad \sigma_2^2 = \sigma^2(1-\rho_1-\rho_2+\rho_3)/p$$

finalmente hagamos

$$W = U + X'j_q + j'_p\, Y \qquad \ldots\ldots (5)$$

para $j_q = (1,\ldots,1)$ y $j'_p = (1,1,\ldots,1)'$. Al calcular E(W) se obtiene que es igual al $\underline{0}$, de orden pxq y

$$E(W_{ij}\cdot W_{i'j'}) = \begin{cases} \sigma^2(1-\rho_1-\rho_2+\rho_3)(pq+1)/pq & i=i',\quad j=j' \\ \sigma^2(1-\rho_1-\rho_2+\rho_3)/pq & i\neq i',\quad j\neq j' \end{cases}$$

de esta manera el autor obtiene pq elementos de W, los cuales conservan la homocedasticidad; estos elementos están correlacionados de igual forma y tienen la misma distribución normal multivariada. Si seleccionamos $\{\ell_{ij}\}$ tal que

$$\sum_i^p \sum_j^q \ell_{ij} = 0$$

obtenemos de (1) que

$$P\left\{|\mathrm{Tr}(LW')| \leq Q^{\alpha}_{pq,\nu}\sqrt{S^2(1-\rho_1-\rho_2+\rho_3)}\ \sum_i^p \sum_j^q \frac{|\ell_{ij}|}{2}\right\} = 1-\alpha \qquad \text{..... (6)}$$

pero considerando (4) y (5) obtenemos que

$$\mathrm{tr}(LW') = \mathrm{tr}(LU') = \mathrm{tr}(LZ') \qquad \text{..... (7)}$$

ya que la condición $\sum_{i=1}^{p}\ell_{ij} = \sum_{j=1}^{q}\ell_{ij} = 0$ esta contenida en $\sum_{i=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}\ell_{ij} = 0$ entonces por (6) y (7) se llega al resultado deseado. (para una discusión más detallada, ver Sen (1969); pág. 291).

EJEMPLO

Considere un diseño de bloques incompletos, al azar

$$Y_{ij\ell} = \mu + \beta_i + \tau_{j\ell} + \varepsilon_{ij\ell}$$

$$i=1,\ldots,b; \quad j=1,\ldots,p; \quad \ell=1,\ldots,q.$$

en este diseño se tienen b bloques pq tratamientos con r repeticiones y dos tratamientos en λ bloques. En el mismo modelo μ es el media global, β_i es el efecto del bloque i-ésimo y $\tau_{j\ell}$ son los efectos de los tratamientos y $\varepsilon_{ij\ell}$ son variables aleatorias con distribución normal y varianza común σ^2.

Supongase ahora, que $t=r(pq-1)+\lambda$ y $V_{j\ell}$ es el total de observaciones que reciben el tratamiento $\tau_{j\ell}$ y sea $B_{j\ell}$ el total de observaciones de bloques que contienen el tratamiento $\tau_{j\ell}$, entonces se tendrá

$$\hat{\tau}_{j\ell} = \frac{1}{\lambda}\left[V_{j\ell} - \frac{B_{j\ell}}{pq}\right].$$

Si se desean realizar comparaciones múltiples sobre interacciones de dos factores, tendremos que para el diseño de tratamientos

$$\zeta_{j\ell} = \zeta_j + \xi_\ell + \eta_{j\ell} \qquad \ldots\ldots 8$$

para ζ_j y ξ_ℓ se refieren a los efectos principales y $\eta_{j\ell}$ es la matriz de efectos de interacción. Bajo el modelo (8) la estimación de $\eta_{j\ell}$ es

$$\hat{\eta}_{j\ell} = \frac{p-1}{p}\;\frac{q-1}{q}\sum_{j}^{p}\sum_{\ell}^{q}\left(V_{j\ell} - \frac{B_{j\ell}}{pq}\right)^2$$

si $S^2 = \hat{\sigma}^2 =$ CME con $\nu = b(pq-1) - pq+1$ se tendrá el siguiente intervalo de confianza de $(1-\alpha) \times 100\%$.

$$\sum_{j\ell} C_{j\ell}\eta_{j\ell} \in \sum_{j\ell} C_{j\ell}\hat{\eta}_{j\ell} \pm Q^{\alpha}_{pq,\nu}\sqrt{\text{CME }(pq/t)}$$

sobre el mismo tema puede consultarse Dunn & Masey (1965), Johnson (1976), y Eardau & Gabriel (1974).

9. Modificación a la Prueba de Scheffè para Comparar Efectos de Interacción. (Johnson, 1976)

Basado en la prueba de Scheffè, Johnson (1976), propopone un procedimiento útil y potente para comparar efectos de interacción en modelos con dos criterios de clasificación.

Considere el modelo con dos criterios de clasificación con interacción

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_i + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk} \qquad \begin{cases} i=1,\ 2,..,p \\ j=1,\ 2,...q \\ k=1,\ 2,..,r;\ r>1 \end{cases}$$

donde ε_{ijk} son independientes con distribución normal de media cero y varianza σ^2.

Sean $\hat{\mu}$, $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\beta}_i$, $\hat{\gamma}_{ij}$ los estimadores de máxima verosimilitud y S^2 el estimador usual de σ^2 con $\nu = ab(r-1)$ g.l.

Es frecuente el caso de que los mismos factores bajo estudio presenten cierta estructura que sugiera algunos contrastes en particular. En estos casos la estructura de los tratamientos sugieren probar ciertos contrastes sobre efectos de interacción. Suponga $\Sigma C_i \alpha_i$ es un contraste sobre las α_i (s) y que $\Sigma d_j \beta_j$ es un contraste sobre las β_j (s), entonces $\Sigma C_i d_j \gamma_{ij}$ es un contraste sobre las γ'_{ij} (s). Este último tipo de constrastes son los que analiza la prueba de Johnson. Debe pensarse que cuando los contrastes sobre las α (s) y sobre las β (s) sean de mucho interés para el investigador, entonces los contrastes sobre γ (s) con frecuencia también serán de mucho interés.

El estimador del contraste $\Sigma C_i d_j \gamma_{ij}$; es $\Sigma C_i d_j Z_{ij}$, donde $Z_{ij} = Y_{ij} - Y_{i..} - y_{.j.} + Y_{...}$

La estadística propuesta por Johnson se describe a continuación, con probabilidad 1-α los intervalos están dados por

$$\left|\sum C_i d_j y_{ij.} - \sum C_i d_j \gamma_{ij}\right| < \sqrt{\sum C_i^2 d_j^2 U^{\alpha}_{p,q} \quad S^2/r}$$

donde los cuantiles de $U^{\alpha}_{p,q}$ se pueden aproximar con una distribución de Wishart, siempre y cuando γ los g.l. de S^2, sea grande; Hanumara y Thompson (1968) han calculado los - cuantiles para la distribución de la raíz extrema de una matríz con distribución de Wishart, estas tablas sirven para nuestro propósito. Desafortunadamente, cuando γ es pequeña no se dispone de tablas; sin embargo existen aproximaciones para valores p=2, 3, 4, 5 y q=2, 3, 4, 5, 9 se exhiben en la tabla XV. Johnson (1976).

EJEMPLO.

El propósito del experimento es estudiar el efecto de 4 diferentes temperaturas y 5 diferentes recetas sobre el tamaño de los pasteles, medidos por la longitud máxima en pulgadas. Los datos se exhiben en la tabla 1.

TABLA 1 (Datos)

	RECETAS				
TEMPERATURA	PASTEL NATURAL	3% GMS	6% GMS	3% Aldo	6% Aldo
218°C	4.12	5,35	5.67	5,30	5.52
	4.49	5.39	5.67	5.67	5.80
190°C	4.59	4.75	5.10	5.00	5.41
	4.45	5.10	5.57	5.02	5.29
163°C	4.63	4.56	4.80	4.79	4.65
	4.63	5.91	4.86	4.88	4.80
149°C	3.01	3.87	4.13	3.98	4.16
	4.08	3.74	4.03	4.11	4.35

La estructura de las diferentes recetas siguieron los contrastes dados en la tabla 2; algunos constrastes de interés sobre la temperatura, están dados en la tabla 3; las estimaciones de los contrastes de interés sobre interacción están en la tabla 4.

Para este ejemplo tenemos p=3, 9=4, r=2, v=20, por lo que debemos aproximar $U^{.05}_{3,4} \simeq 15.24$ (de la tabla XV, tomada de Johnson, 1976); por otro lado del análisis de varianza se tiene S^2 = .0185 y para la interacción F_c = 7.229, con lo cual la interacción es significativa. De esta manera obtenemos $(U^{.05}_{3,4,20} S^2/r)^{1/2} = [(15.24)(.0185)/2]^{1/2} = 0.375$. Cualquier valor en la tabla 4 cuyo valor absoluto sea mayor que .375 se declara significativo y se indica con *

TABLA 2.

CONSTRASTES PARA RECETAS				
PASTEL NATURAL	3% GMS	6% GMS	3% Aldo	6% Aldo
-1	0	1	0	0
-1	0	0	0	1
-2	1	1	0	0
-2	0	0	1	1
0	1	0	-1	0
0	0	1	0	-1
-1	1	0	0	0
-1	0	0	1	0
-1	2	-1	0	0
-1	0	0	2	-1
0	1	1	-1	-1

TABLA 3.

CONTRASTES PARA TEMPERATURA			
218°C	190°C	163°C	149°C
1	-1	0	0
1	0	-1	0
1	0	0	-1
0	1	-1	0
0	1	0	-1
0	0	1	-1

Examinando la tabla 4 concluimos que no existe interacción entre las 4 últimas recetas, la mayor parte de los efectos de interacción son originados por el partes natural en relación a las cuatro recetas restantes, además la interacción no es muy grande para las temperaturas de niveles contiguos.

TABLA 4

CONTRASTES PARA EFECTOS DE INTERACCION

TEMPS. \ RECETAS	-10100	-10001	-21100	-20011	010-10	0010-1	-11000	-10010	-12-100	-1002-1	011-1-1
1 -1 0 0	.19	.23	.28	.31	-.02	-.04	.30	.31	.23	.23	-.04
1 0 -1 0	.55*	.60*	.57*	.60*	-.01	-.05	.45*	.45*	.20	.18	-.04
1 0 0 -1	.63*	.54*	.72*	.63*	.06	.09	.62*	.56*	.35	.33	.11
0 1 -1 0	.36	.37	.29	.29	.01	-.01	.15	.14	-.03	-.05	.002
0 1 0 -1	.44*	.31	.44*	.32	.08	.13	.32	.24	.12	.10	.15
0 0 1 -1	.C8	-.06	.15	.03	.07	.14	.17	.10	.15	.15	.15

La estadística de Sen (1969), prueba que antecede a la presente, obtiene los puntos críticos para las columnas 1, 2, 5, 6, 7 y 8 de la tabla 4, es .500. Para las columnas 3, 4, 9 y 10 es ,577 y para la columna 11 es .707. En cada caso el método de Sen resultó ser menos potente que el de Scheffè.

En relación con el mismo tema puede consultarse Bradu & Gabriel (1974), quienes proponen tres estadísticas de prueba basadas en el método de Scheffè y de Tukey.

10. Modificación a las Pruebas de Tukey, Scheffè y Bonferroni para Modelos Factoriales.
(Bohrer)

Consideremos un experimento factorial 2^k, en el que se observan los tratamientos $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ tales que sin perder generalidad, se pueden definir como:

$$\tau_i = \begin{cases} 1 & \text{Si se tiene el nivel alto} \\ 0 & \text{Si no se tiene el nivel alto} \end{cases} \quad \forall_i, i=1,\ldots,k.$$

las medias de estos efectos de tratamientos tienen una distribución normal de media cero y varianza σ^2. Si $\hat{\mu}_i$ es la estimación de la media del tratamiento i-ésimo, entonces la regla de decisión múltiple establece si la combinación lineal

$$\ell'M = \sum_i \ell_i \mu_i$$

es positiva o negativa o no es concluyente para tal combinación; jusgando qué tipo de relación guarda $\ell'\hat{M}$, si $\ell'\hat{M} > cS_\ell$, $\ell'\hat{M} \leq cS_\ell$, o $|\ell'\hat{M}| < cS_\ell$. Aquí $M = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)'$, $\hat{M} = (\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_k)'$, $\ell' = (\ell_1, \ldots, \ell_k)$, $S_\ell = (\sum_i \ell_i^2 / n_i)^{1/2}$, n_i es el tamaño de muestra del i-ésimo tratamiento y S^2 es el estimador insesgado de σ^2.

Los autores modifican las pruebas de Scheffè, Tukey y Bonferroni, eligiendo los puntos críticos adecuados para maximizar el número de decisiones correctas.

$$P\left\{\text{Clasificación correcta}\right\} > 1-\alpha \quad \ldots\ldots (1)$$

cuando los valores μ_i son los verdaderos. Notar que el hecho de establecer que los datos "no son concluyentes" no significa una decisión incorrecta, sino simplemente no contribuyen a maximizar el número de decisiones correctas.

Cochran y Cox (1980, pág. 177-179) definen los efectos simples como las diferencias de las medias de tratamientos, y las interacciones simples como las diferencias de los efectos de interacciones de primer (o mayor) orden. Estos parámetros son más precisos que las interacciones y efectos principales, que son promedios de estos parámetros simples.

Bohrer, Chow, Faith, Joshi y Wu (1981) aplican un nuevo método -llamado tres reglas para la decisión múltiple en modelos factoriales- a las pruebas de Scheffè, Scheffè modificada (Bohrer, 1979), Tukey y Bonferroni.

Las Desigualdades Básicas.

Para decidir si los parámetros $\ell'M$ cumples la desigualdad (1) se debe tener que

$$P\left\{(-\text{sgn } \ell'M)\ \ell'\hat{M} \leq CS_{\ell}\right\} \geq 1-\alpha \quad \forall \ell \in L^*$$

donde L* es el evento de clasificación correctamente. Para las transformaciones de las pruebas, usaremos las siguientes desigualdades:

$$P_{M,\sigma^2}\left\{(-\mathrm{Sgn}\,\ell' M)\,\ell'\hat{M} \leq CSk_\ell,\ \forall\ \ell \in L^*\right\}$$

$$= P_{M,\sigma^2}\left\{(-\mathrm{Sgn}\,\ell' M)\,\ell'(\hat{M}-M) \leq CSk_\ell + |\ell' M|,\ \forall\ \ell \in L^*\right\}$$

$$\geq P_{M,\sigma^2}\left\{(-\mathrm{Sgn}\,\ell' M)\,\ell'(\hat{M}-M) \leq CSk_\ell,\ \forall\ \ell \in L^*\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\geq P_{M,\sigma^2}\left\{|\ell'(\hat{M}-M)| \leq CSk_\ell,\ \forall\ \ell \in L^*\right\} \quad \ldots\ldots (3)$$

Nótese que las desigualdades (2) y (3) siguen siendo válidas si el conjunto $\{\ell \mid \ell \in L^*\}$ se reemplaza por cualquier clase de vectores que contengan a este conjunto.

Pruebas de Scheffé

El método de Scheffè se obtiene a partir de la expresión (3). Sea K el subconjunto mínimo de L* tal que cualquier combinación de medias $\ell'\hat{M}$, $\ell \in L^*$ es una suma ponderada de las combinaciones en K. Sea k el número de elementos en K y L el conjunto de todas las combinaciones lineales de los elementos de K. Si hacemos en (3) que

$$k_\ell = \sqrt{\frac{1}{S}\sum_{1}^{k}\frac{\ell_i^{\,2}}{n_i}} \qquad C = \sqrt{k.\ F^{\alpha}_{k,N-2k}} \qquad \text{L reemplace a L*}$$

entonces tendremos

$$P\left\{|\ell'(\hat{M}-M)| \leq \sqrt{k.F^{\alpha}_{k,N-2^k}\ S^2\ .\ \sum_{1}^{k}\frac{\ell_i{}^2}{n_i}}\right\} = 1-\alpha.$$

Bohrer (1979) obtiene una modificación a la prueba de Scheffé, observando que la desigualdad (2) mejora a la (3) y se puede usar la primera para mejorar la prueba de Scheffè. basta con tomar la misma constante c, arriba descrita, pero ahora con los valores calculados por Hochberg y Quade (1975); los valores k_ℓ y $N-2^k$ con los ya descritos.

Prueba de Tukey.

Para diseños balanceados se tiene $n_i = N/2^k = n$. El método de Tukey puede obtenerse a partir de la desigualdad (3) si hacemos que

$$K_\ell = \sum_{i=1}^{k}\frac{|\ell_i|}{2}\ \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\quad C = Q^{\alpha}_{2^k,N-2^k}\quad L_C \text{ reemplaza a } L^*$$

para L_C un conjunto más grande que contiene a L^*, para L_C que conste de todos los vectores de contrastes posibles y $Q^{\alpha}_{2^k,\ N-2^k}$ es el cuantil correspondiente a una confianza de $(1-\alpha)$ 100% de una distribución de rangos estudentizados con 2^k y $N-2^k$ g.l. (ver tabla II, tomada de Harter, 1960). De esta manera tenemos

$$P\left\{ |\ell'(\hat{M}-M)| \leq Q^{\alpha}_{2^k, N-2^k} \sqrt{\frac{S^2}{n}} \sum_i \frac{|\ell_i|}{2} \right\} > 1 - \alpha$$

para todos los contrastes posibles tales que $\ell \in L_C$ para L_C el conjunto de todos los vectores de contrastes. Esta expresión satisface (1)

Prueba de Bonferroni.

La desigualdad de Bonferroni se obtiene de la expresión (3) haciendo que

$$k_\ell = \sqrt{\sum_i \frac{\ell_i^2}{n_i}} \quad ; \quad C = t^{\alpha/m}_{N-2^k} \quad ; \quad m = \text{card } (L^*)$$

(es decir, m es el número de parámetros involucrados en la decisión). De esta manera obtenemos

$$P\left\{ |\ell'(\hat{M}-M)| \geq t^{\alpha/m}_{N-2^k} \sqrt{S^2 \sum_i \frac{\ell_i^2}{n_i}} \right\} > 1 - \alpha .$$

esta expresión satisface también la condición (1).

Como se observa en las tres pruebas anteriores, las mo-modificaciones propuestas, consisten en cambiar los puntos críticos para evaluar las diferencias $|\ell'(M-M)|$. Bohrer et al (1981) comparan las tres pruebas, mediante simulación, y obtiene que la prueba de Bonferroni es más robusta en comparación con la de Scheffè y la de Tukey.

Bradley y El-Helbawy (1976) desarrollan una técnica que compara observaciones por parejas, contrastes específicos de tratamientos o conjuntos de contrastes en diseños factoriales. Esta técnica se puede aplicar a experimentos en los que los tratamientos constituyen un conjunto total o fraccionado de combinaciones de tratamientos. De igual manera se pueden contrastar los efectos principales e interacciones,

II MODIFICACION A LA PRUEBA DE BONFERRONI (Schaffer y McReady, 1975)

Supongamos que se tiene un modelo con dos criterios de clasificación y de efectos fijos, de manera que las medias-estimadas sean $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \ldots, \hat{\mu}_n$. Si tenemos interés en probar m contrastes del efecto α (sin pérdida de generalidad lo -- llamamos efecto por renglón), tendremos

$$\sum_{i=1}^{n} c_{hi}\,\hat{\mu}_i \quad ; \qquad h=1,\ldots,m$$

y los intervalos apropiados para la prueba de Bonferroni serían

$$\sum_{i=1}^{n} c_{hi}\,\alpha_i \in \sum_{i=1}^{n} c_{hi}\,\ddot{\mu}_i \pm t_{nk(r-1)}^{\alpha/2m} \quad \mathrm{CME}\,\frac{1}{kr}\sum_{i=1}^{n} c_{hi}^2 \;;\; h=1,\ldots m$$

si se tienen n niveles de α, k niveles de β y r observaciones por celda. (α efecto por renglon, β efecto por columna) Para encontrar los cuantiles de $t_{nk(r-1)}^{\alpha/2m}$ véase la tabla III, tomada de Bailey (1977).

El propósito de la modificación de Schaffer & Mac ready (1975) es mostrar que, dada una familia de contrastes, existen uno o más conjuntos de contrastes inferiormente independientes, es decir

$$\sum_i n_i C_{ij} C_{ij'} = 0 \quad \forall\, j,j' ,\ j \neq j ,$$

para cada pareja (j, j') de contrastes en el conjunto. Usando la notación de la prueba de Bonferroni, en el Capítulo I, si se tiene un conjunto de p pruebas independientes se sabe que

$$P\{\bigcup_1^p A_i\} = 1 - \Pi(1 - P\{A_i\})$$

y por la desigualdad de Bonferroni se tiene

$$P\{\bigcup_1^p A_i\} \leq \sum_1^p P\{A_i\}$$

para $A_i = \{|t_c| \geq t_{\nu i}^{\alpha/2} : t_c = \frac{\hat{\mu}_i - \mu_i}{S_i}\}$ i=1,..., p. La desigualdad (1) queda establecida para todas las pruebas, sean o no independientes. Sin embargo si una familia de m contrastes a probar, se particiona en ℓ conjuntos de contrastes n_i, $i=1,\ldots,\ell$, entonces podemos establacer la siguiente desigualdad

$$P\{\bigcup_1^{\ell} A_i\} \leq \sum^{\ell} P\{A_i\} \ ; \ i=1,\ldots,\ell$$

y además para α fijo en cada prueba

$$P\{A_i\} = 1-(1-\alpha)^{n_i}$$

$$<=> \sum_{1}^{p} P\{A_i\} = \ell - \sum_{i=1}^{p} (1-\alpha)^{n_i}$$

la cual obtiene el valor deseado de α, que generalmente será mayor que el usado por el método de Bonferroni, y de esta manera se incrementa la potencia de aumentar $\sum_{1}^{p} P\{A_i\}$

12. MODIFICACION DE LA PRUEBA DE SCHEFFE (Scheffè, 1970)

Dentro de la inferencia simultánea podemos encontrar dos enfoques: la contrastacción simultánea de hipótesis y la estimación múltiple. La contrastación simultánea de hipótesis incluye los procedimientos de pruebas de hipótesis del tipo θ=o (que se rechaza mediante una prueba de "dos colas"), $\theta < 0$ ó $\theta > 0$ (que se comparan con una prueba de "una cola"). La estimación múltiple se refiere a la estimación obtenida por intervalos de confianza o por regiones de confianza.

El método de Scheffè (1953) original es una técnica de de comparaciones múltiples cuyo enfoque básico es el de ser una prueba para estimación múltiple, aunque puede usarse con el enfoque de pruebas de significancia. La modificación pro puesta por Scheffé (1970) da como resultado una prueba más potente para pruebas de significancia.

Sean $\mu_1,\ldots,\mu_k$ las medias verdaderas de los efectos principales de k tratamientos. Sea $\theta = \sum_1^k a_j\mu_j$ una función lineal estimable (FLE), donde $\{a_j\}$ son constantes conocidas y $\hat{\theta} = \sum_1^k a_j \hat{\mu}_j$ el estimador insesgado de θ. Un espacio L de funciones estimables, de dimensión q, consiste de todas las combinaciones lineales $\sum_1^q h_i \theta_i$, donde $\{\theta_i\}$ es la colección de todas las funciones estimables linealmente independientes, y $\{h_i\}$ son constantes conocidas. Por otro lado la varianza de $\hat{\theta}$ será de la forma $\sigma^2_{\hat{\theta}} = b^2\sigma^2$, donde b^2 es una constante conocida; $\hat{\sigma}^2_{\hat{\theta}}$ denota al estimador $b^2\hat{\sigma}^2$, para $\hat{\sigma}^2$ = CME con ν=n-r grados de libertad.

En seguida exponemos el método de Scheffé (1953) original y a continuación de éste, la modificación propuesta por él mismo.

Un método para la estimación simultánea de θ en L, que llamaremos método – S, puede basarse en el siguiente enunciado:

"Con probabilidad 1-α todos los valores de las funciones estimables en L, satisfacen simultáneamente las desigualdades

$$\hat{\theta} - S\hat{\sigma}_{\hat{\theta}} \leq \theta \leq \hat{\theta} + S\,\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}\ , \qquad (1)$$

donde α y S están relacionados por

$$\alpha = P\ \{\ F_{(q,\nu)} \geq S^2/q\ \}, \qquad\qquad (2)$$

donde $F_{(q,\nu)}$ tiene una distribución F con $q_y \nu$ g.l.". Esta proposicion ha sido probada por Scheffè (1953) para el caso particular cuando L es un espacio de contrastes; sin embargo la prueba puede extenderse para el caso general usando los resultados que en seguida se exponen.

Sea $\hat{L}$ el conjunto de estimadores $\hat{\theta}$, de $\theta \in L$. por mínimos cuadrados; Si $\{\theta_1, \ldots, \theta_q\}$ es una base para L, entonces $\{\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_q\}$ es una base para $\hat{L}$. Seleccionemos una base ortogonal $\{\hat{\eta}_1, \ldots, \hat{\eta}_q\}$ para $\hat{L}$, tal que sea normalizada y que la matríz de covarianzas del vector $\hat{\eta} = (\hat{\eta}_1, \ldots, \hat{\eta}_q)'$ sea σ^2 I, para I una matriz identidad de orden pxp. Hagamos $\eta = E(\hat{\eta}) = (\eta_1, \ldots, \eta_q)'$, luego entonces $\{\eta_{ij}\}$ forma una base para L, por esta razón para cualquier $\theta \in L$ existe $\{d_i\}$ tal que $\theta = \sum_1^q d_i\eta_i = d'\eta$. Obviamente $\hat{\eta}$ y $\hat{\sigma}^2$ son estadísticamente independientes, así $\hat{\eta} \sim N(\eta, \sigma^2 I)$ y $\nu\hat{\sigma}^2/\sigma^2 \sim \chi^2$ con ν g.l.

El método de Scheffè (1953) se utiliza para obtener el nuevo método. El nuevo método de Scheffè (1970) para pruebas de significancia consiste en escoger cualquier función lineal estimable $\theta \in L$ y decidir:

(i) $\hat{\theta}$ no es significativamente diferente de cero, si

$$- S\hat{\sigma}_{\hat{\theta}} < \hat{\theta} < S\,\hat{\sigma}_{\hat{\theta}} .$$

(ii) $\hat{\theta}$ es significativamente positivo, si $\hat{\theta} > S\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$ o

(iii) $\hat{\theta}$ es significativamente negativo, si $\hat{\theta} < S\,\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$.

Sin embargo los valores que puede tomar S son

$$S_1 = \sqrt{q\ F^{\alpha}_{cq,\nu}}\ , \qquad o \qquad S_2 = \sqrt{(q-1)\ F^{\alpha}_{(q-r,\nu)}} \qquad (3)$$

donde $F^{\alpha}_{\nu_1,\nu_2}$ es el cuantil al $(1-\alpha)100\%$ de confianza con una distribución F con ν_1 y ν_2 g.l. En este caso el autor muestra que $S_1 > S_2$.

El método de Scheffé (1970) modificado consiste en escoger $\theta \in L$, tantos θ como se quieran y aplicar el método arriba descrito; la forma de operación está parcialmente caracterizada por ciertas probabilidades P_1 y P_2; P_1 es la probabilidad del evento ξ_1, que el enunciado (i) sea hecho para todas las funciones estimables $\theta \in L$, cuyos valores verdaderos son cero; P_2 está definida en Scheffé (1953, pág. 101). Sea

$$H: \theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_q = 0 \qquad (4)$$

$$<=> \qquad \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_q)' = 0$$

de manera que

$$P_1 = P\{F_{(q,\nu)} \leq S^2/q\} \quad \text{si } H \text{ es verdadera}$$

$$= P\{F_{(q-1),\nu} \leq S^2/(q-1)\} \quad \text{si } H \text{ es falsa.}$$

Si es justificable suponer que $\eta=0$ desearíamos que en general η fuera "exactamente cero". Sin embargo en algunas situaciones podrá ser aceptable suponer que en alguna vecindad de $\eta=0$ en la cual η no esté contenida. En los casos de que η esté fuera de la vecindad del 0 usamos la prueba de significancia múltiple con $S=S_2<S_1$, y su tamaño estarán determinado por α.

Si no es justificable suponer que $\eta=0$: primero se debe contrastar la hipótesis H en (4) con el nivel α estándar de la prueba de F- en la cual H se rechaza si la $F_c > F^{\alpha}_{(q,\nu)}$. Si H es aceptada aplicamos el enunciado (i) para todo $\theta \in L$. Si H es rechazada aplicamos las reglas (i), (ii), (iii) para todo $\theta \in L$ sustituyendo S por S_2, donde S_2 está dado por la expresión (3).

Es un mediato constatar que esta modificación al método de Scheffè tiene el mismo tamaño α que el método original de Scheffè con $S=S_1$; y además el primero tiene una aplicación más general que el segundo.

Posteriormente Scheffè (1977) toma en cuenta que su prueba original adolece de un defecto: el método S(Scheffè, 1953) es utilizado solamente cuando la prueba global de F rechaza la hipótesis asociada, de manera que la probabilidad usada por los intervalos de Scheffè deben ser construídos de manera condicional al rechazo de la prueba de F.

CAPITULO IV

MISCELANEA DE PRUEBAS

INTRODUCCION

Las pruebas de comparaciones múltiples incluídas en este capítulo abarcan varios problemas no considerados por las pruebas expuestas en capítulos anteriores. Las pruebas aquí expuestas están pensadas con fines específicos: para diseños con datos faltantes, para diseños con uno y dos criterios de clasificación, para diseños con efectos fijos y aleatorios, para diseños de bloques completamente al azar, para diseños desbalanceados; además se incluyen pruebas para el análisis de covarianza, pruebas que usan rangos y otra que usa técnicas de análisis de conglomerados.

En primer lugar se exponen dos pruebas que usan rangos: Dunn (1964) propone un procedimiento para comparar varias poblaciones haciendo uso de la suma de rangos y Kurtz, Link, Tukey y Wallace (1965) obtienen un procedimiento basado en rangos que permite realizar un análisis rápido y eficaz de los datos en un diseño balanceado con uno o dos criterios de clasificación. En seguida se describen las pruebas para comparar efectos de medias en el análisis de covarianza: --

Thigpen y Paulson (1974) derivaron una prueba haciendo uso de la distribución de rango estudentizado y Bryant & Bruvold (1980) obtienen un procedimiento para construir intervalos para los contrastes deseados, en el análisis de covarianza, haciendo uso de rangos y relajando ciertas suposiciones sin afectar la potencia de la prueba. En seguida se expone la prueba para modelos de bloques completamente al azar, -- Mudholkar y Subbaiah (1976), proponen una técnica de comparaciones múltiples válida bajo condiciones de heterocedosticidad y dependencia de los errores, que permite hacer inferencias sobre todos los contrastes y es sensible para algún contraste en particular. Los casos de diseños desbalanceados los hemos expuesto en el capítulo III, sin embargo éstos han sido extensiones de la prueba de Tukey; Gabriel -- (1978) elabora un método muy sencillo de comparaciones múltiples de medias para diseños desbalanceados haciendo uso - de la distribución del módulo máximo estudentizado. A continuación se describe una prueba diseñada para probar efectos fijos y aleatorios, Harville (1976) construye un procedimiento basado en los componentes de varianzas. Es muy -- frecuente tener el problema de perder observaciones en un - experimento por razones ajenas a los tratamientos aplicados; Lin(1913) considera el problema de estimar las diferencias de medias en diseños con datos incompletos, el autor propone un método que toma en cuenta todos los datos disponibles. Utilizando técnicas de análisis de conglomerados Scott y

Knott (1974) clasifican a los tratamientos en grupos más-o menos homogéneos. Finalmente se describe un método de -comparaciones múltiples usando la t de Student multivariada, propuesta por Dunn y Massey (1965) y otro método que -construye "zonas de indiferencia" propuesto por Reading --(1975), el autor desarrolla una prueba de comparaciones --múltiples de parejas de medias haciendo uso de la construcción de regiones de confianza en vez de elaborar una prueba de significancia.

1. COMPARACIONES MULTIPLES POR SUMA DE RANGOS (DUNN, 1964)

Los métodos de suma de rangos son usados para comparar dos o más muestras y decidir si éstas provienen de la-misma población. Dunn (1964) propone un procedimiento para comparar varias poblaciones haciendo el uso de la suma-de rangos; este procedimiento tiene como antecedente el --trabajo realizado por Steel (1961).

Sean k muestras - no necesariamente k debe ser grande-, cada una de tamaño n_k. Asignemos rangos de manera conjunta a todas las muestras previamente ordenadas, si hay empates se asignan rangos promedio. Lamemos T_i a la suma de rangos de la i-ésima muestra.

Supongamos que se desea realizar p contrastes entre las medias; el contraste m-ésimo es

$$\hat{\psi}_m = \sum_i T_i \;/\; \sum_i n_i - \sum_{i'} T_{i'} \;/\; \sum_{i'} n_{i'} \;, \quad m = 1, \ldots, p$$

para $i \neq i'$, $i, i' = 1, \ldots, k$. Sea α el nivel de significancia elegido. Cada contraste $\hat{\psi}_m$ se divide entre su desviación estándar $\hat{\sigma}_m$. Si no hay empates, entonces

$$\hat{\sigma}_m^2 = [N(N+1)/12]\left[\left(\sum_i n_i\right)^{-1} + \left(\sum_i n_{i'}\right)^{-1}\right]$$

donde $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$. La fórmula para $\hat{\sigma}_m^2$ debe ajustarse si existen empates. Sean r grupos de empates y si el s-ésimo grupo de rangos empatados contiene t_s números en el, entonces

$$\hat{\sigma}_m^2 = \left[\frac{N(N+1)}{12} - \frac{\sum_{s=1}^{r}(t_s^3 - t_s)}{12(N-1)}\right]\left[\frac{1}{\sum_i n_i} + \frac{1}{\sum_i n_{i'}}\right]$$

De esta manera el experimentador tiene p-valores: $\hat{\psi}_1 / \hat{\sigma}_1$, $\ldots$, $\hat{\psi}_p / \hat{\sigma}_p$. Cada uno de esos valores $\hat{\psi}_m / \hat{\sigma}_m$ se compara con una $z_{1-\alpha/2p}$, que es el cuántil $1-\alpha/2p$ de una distribución normal estándar, si el tamaño de muestra es suficien te grande.

Si $\hat{\psi}_m/\hat{\sigma}_m < -z_{1-\alpha/2p}$, concluir que el contraste poblacional es negativo.

Si $\hat{\psi}_m / \hat{\sigma}_m \in (1-z_{1-\alpha/2p}, z_{1-\alpha/2p})$, concluir que el contraste poblacional puede ser nulo.

Si $\hat{\psi}_m/\hat{\sigma}_m > z_{1-\alpha/2p}$, concluir que el contraste poblacional es positivo.

Cuando el contraste se plantea de la manera usual, $T_i/n_i - T_{i'}/n_{i'}$, estas tres decisiones se traducen respectivamente en: la media (o mediana) de la i-ésima distribución es menor que la media (o mediana) de la i-ésima distribución; las dos medias pueden ser iguales; o -- que la i-ésima media es mayor que la i-ésima media.

UN EJEMPLO

Considerese tres tratamientos cuya variable de respuesta es el número de personas correspondientes a determinada categoría (Ver Dunn 1964, pág. 243), los datos -- son los siguientes:

Tratamientos

		1	2	3	todos
Categorías	C_1	3	0	1	4
	C_2	12	4	2	18
	C_3	10	7	4	21
	C_4	20	10	11	41
	C_5	47	9	10	66
	C_6	74	12	21	107
	C_7	62	26	38	126
Totales		228	68	87	383

Los contrastes de interés son:

$$\hat{\psi}_1 = T_1/n_1 - (T_2 + T_3) / (n_2 + n_3)$$

$$\hat{\psi}_2 = (T_1 + T_3)/(n_1 + n_3) - T_2/n_2$$

$$\hat{\psi}_3 = T_1/n_1 - T_3/n_3 \quad ,$$

en este caso $k = 3$, $p=3$, $n_1 = 228$, $n_2 = 68$, $n_3 = 87$. Los totales T_i se muestran en la siguiente tabla

Categoría	(1) Frec.Ac.	(2) Rangos	(3) Trat.1	(4) Trat.2	(5) Trat.3
C_1	4	2.5	7.5	0	2.5
C_2	22	13.5	162	54	27
C_3	43	33	330	231	132
C_4	84	64	1,280	640	704
C_5	150	117.5	5522.5	1057.5	1175
C_6	257	204	15 096	2448	4284
C_7	383	320.5	19 871	8333	12179
		T_i =	42 269	12763.5	18503.5

(1) Se obtiene de la última columna de la tabla anterior, son las frecuencias acumuladas.

(2) Se calcula de la columna (1) como sigue: 2,5 =(4+1)/2; 13.5 = 4 +(22-4+1)/2; 33=22+(43-22+1)/2; etc.

Observar que $\sum T_i$ = 73 536 = (383)(384)/2

Si consideramos que el número de empates es desprecia_ble entonces $\hat{\sigma}_1^2 = [(383)(384)/12][228^{-1}+(68+87)^{-1}]=132.83$ por lo que $\hat{\sigma}_1=11.52$, $\hat{\sigma}_2=14.80$ y $\hat{\sigma}_3=13.95$; por otro lado $\hat{\psi}_1=-16.33$, $\hat{\psi}_2=5.23$, $\hat{\psi}_3=-27.29$. Si de antemano hemos seleccionado una $\alpha=.20$ tendremos que $z_{1-\alpha/2p} = z_{1-.2/6} = z_{.9667} = 1.834$. En resumen tenemos

$$-1.834 < \hat{\psi}_1/\sigma_1 = -1.42 < 1.834, \text{ concluir } \hat{\psi}_1 = 0$$

$$-1.834 < \hat{\psi}_2/\sigma_2 = 0.35 < 1.834, \text{ concluir } \hat{\psi}_2 = 0$$

$$\hat{\psi}_3/\sigma_3 = -1.96 < 1.834, \text{ concluir } \hat{\psi}_3 < 0.$$

2. Comparaciones Multiples Usando Rangos para Diseños con uno y dos Criterios de Clasificacion.

(Kurtz, et al 1965).

El análisis de varianza usual se realiza calculando- sumas de cuadrados; sin embargo para mayor facilidad en - los cálculos Kurtz, Link, Tukey y Wallace (1965) obtienen un procedimiento, basado en rangos que permite realizar un análisis rápido de los datos, en un diseño balanceado con uno o dos criterios de clasificación.

El cálculo rápido en el método de Kurtz et al (1965) no es la única ventaja, lo es también el hecho que las medidas de variabilidad que proporciona pierden poca eficacia. A primera vista parecería que es poco eficiente este método, se sabe que en la medida como sean grandes las -- muestras los rangos pierden eficiencia. Entonces parece muy riesgoso usar rangos si estuviéramos estimando la variabilidad como una guía para tener un punto de referencia de - cada efecto por columna, de esta manera se pierde poco en la estimación de la variabilidad y la diferencia, entre - el estimador por rangos y el usual, disminuye en la medida como aumente el tamaño de muestra.

Discutimos, en primer lugar, el caso de diseños con un criterio de clasificación y en seguida con dos criterios de clasificación (para este segundo diseño los autores describen dos métodos: *sencillo e intermedio;* sin embargo aquí expondremos, por brevedad, el segundo de ellos).

DISEÑO CON UN CRITERIO DE CLASIFICACION

Consideremos un experimento en el que se estudia el efecto de seis tratamientos con nueve repeticiones cada-uno, los datos se exhiben en la tabla 1.

Tabla 1

	TRATAMIENTOS					
	1	2	3	4	5	6
	26	18	36	27	42	20
	30	21	21	14	26	21
	54	29	24	29	19	24
	25	17	18	19	16	17
	70	12	10	29	39	13
	52	18	43	31	28	15
	51	35	28	41	21	15
	26	30	15	20	39	16
	67	36	26	44	29	28
T.	401	216	221	254	259	169
R.	45	24	33	30	26	15

Número de rangos = 6

Número de repeticiones=9

; 173= total de Rango

Observar que 45=10-25; 24=36-12;33=43-10 etc.

A continuación buscamos el número $\tilde{q}^{.05}_{6,9}$ un cuantil con (6,9) gl. con una significancia del 5% (Ver tabla - XVI de Kurtz et al, 1965) que en este caso es .71; y comparamos las diferencias de totales de la siguiente manera; sean τ_i y τ_j dos totales a comparar, los intervalos - de confianza para la diferencia están dados por la expresión

$$\tau_i - \tau_j = \hat{\tau}_i - \hat{\tau}_j \pm \tilde{q}^{.05}_{6,9}(SR); \quad SR=173, \text{ suma de rangos}$$

así obtenemos

$$\tau_1 - \tau_2 = \hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2 \pm (.71)(173) = 232 \pm 123; (109,355)$$
$$\tau_1 - \tau_4 = \hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_4 \pm (.71)(173) = 147 \pm 123; (24;270)$$
$$\tau_2 - \tau_5 = \hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_5 \pm (.71)(173) = -43 \pm 123; (-166,80)$$

si queremos obtener las expresiones correspondientes a -- las medias, basta dividir los intervalos de arriba entre 9. Y tendremos (12,38), (3,30) y (-18,9), respectivamente.

Si estamos interesados en probar algún contraste sobre los totales, tendremos que para $b_1,...,b_n$ donde $\{b_i\}$ son números tales que $\sum_{i=1}^{n} b_i=0$ en $\psi = b_1\tau_1+...+b_n\tau_n$, en-- tonces los intervalos son de la forma

$$b_1\tau_1+...+b_n\tau_n = b_1\hat{\tau}_1+...+b_n\hat{\tau}_n \pm \tilde{q}^{\alpha}_{k,r}(SR)\sum_{i=1}^{n}\frac{|b_i|}{2},$$

donde $\tilde{q}^{\alpha}_{k,r}$ es un cuantil de las tablas de Kurtz et al (1965) y SR es la suma de rango; es decir, en nuestro ejemplo si tenemos interés en obtener un intervalo para el contraste $2\tau_1 - \tau_6 - \tau_4$ tendremos el siguiente intervalo (nota $\sum_{i=1}^{3} \frac{|b_i|}{2} = \frac{2+1+1}{2} = 2$)

$$2\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_6 - \hat{\tau}_4 \pm (.71)(173)(2) = 379 \pm 246 \;;\; (133,625)$$

METODO *INTERMEDIO* PARA MODELOS CON DOS CRITERIOS DE CLASIFICACION

Consideremos un experimento en el que se tienen cuatro niveles del factor columna y cinco niveles del factor-renglón (los datos se obtuvieron de Kurtz, et al, 1965) en la tabla 2 se muestran los resultados

Tabla 2

		Factor Columna (Valores originales)					
		1	2	3	4	Totales	Medias
Factor renglón	1	13.4	16	14.4	20.0	63.8	16.0
	2	37.5	42.7	29.3	34.5	144.0	36.0
	3	65.2	54.9	36.4	39.7	196.2	49.0
	4	60.8	57.1	39.1	38.7	195.7	48.9
	5	37.7	49.2	39.4	39.7	166.0	41.5
Totales		214.6	219.9	158.6	172.6		

	(Diferencias de medias por renglón)				Suma por renglón
1	-2.6	+0.0	-1.6	+4.0	-0.2
2	+1.5	+6.7	-6.7	-1.5	0.0
3	+16.2	+5.9	-12.6	-9.3	0.2
4	+11.9	+8.2	-9.8	-10.2	0.1
5	-3.8	+7.7	-2.1	-1.8	0.0
Rangos	20.0	8.2	11.0	14.2	; 53.4= Total rangos

Observar que 20=16.2-(-3.8); 8.2=8.2-0; 11=-1.6-(-12.6); etc...

Si intercambiamos renglones por columnas cambiaremos el resultado. Si deseamos que los resultados sean independientes de la elección podemos realizar algunos cálculos - para encontrar la suma de cuadrados para efectos de inte-- racción y así encontramos el valor S^2=CME (del análisis de varianza).

Si $\tilde{q}^{\alpha}_{\nu_1,\nu_2}$ denota al cuantil de una distribución de - rangos estudentizados (Ver tabla XVI, de Kurtz et. al., 1965) con una confianza de $(1-\alpha)100\%$ y ν_1, ν_2 grados de libertad entonces para comparaciones dos a dos tendremos

$$\tau_i - \tau_j = \hat{\tau}_i - \hat{\tau}_j \pm \tilde{q}^{\alpha}_{c,r}(SR) \ ; \ SR= \text{Suma de rangos.}$$

donde c=n_o de columnas y r = no de renglones. En nuestro ejemplo $\tilde{q}^{.05}_{4,5} = \{^{1.15}_{1.10}\}$, el cuantil superior corresponde a los efectos por columna y el inferior, por renglón.

Por ejemplo si C_i denota i-=esima columna y r_i el i-ésimo renglón, entonces

$$C_2 - C_4 = \hat{C}_2 - \hat{C}_4 \pm (1.15)(53.4) = 47.3 \pm 61 \ ; \ (-14.108)$$

$$r_3 - r_5 = \hat{r}_3 - \hat{r}_5 \pm (1.10)(53.4) = 30.2 \pm 61 \ ; \ (-29.89)$$

y de manera análoga podemos encontrar intervalos para contrastes. Sea $\{b_i\}$ una colección de números tales que $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$, entonces $\psi = \sum_{i=1}^{n} b_i\tau_i$ denota un contraste y obtendremos

$$b_1\tau_1+\ldots+b_n\tau_n = b_1\hat{\tau}_1+\ldots+b_n\hat{\tau}_n \pm \tilde{q}^{\alpha}_{c,r} \sum_{i=1}^{n} \frac{|b_i|}{2} . \quad \text{(SR)}$$

3. Comparaciones Multiples Usando Distribuciones de t [Dunn y Massey, 1965]

Existen la literatura de las comparaciones múltiples varios métodos que se basan en la distribución de t-Student, con la finalidad de obtener intervalos de confianza simultáneos para medias o varios contrastes entre medias. Dunny y Massey(1965) proponen un nuevo método, en el cual se determina el nivel de confianza global para tales intervalos y evalúa la probabilidad de una variable con distribución de T^2 multivariada.

La distribución de la T^2 de Hotteling multivariada se obtiene de la siguiente manera: Sean $x_1,\ldots, x_p$, p variables cuya distribución conjunta es una normal multivariada con medias $\mu_1,\ldots, \mu_p$ y matriz de dispersión$\{\sigma_{ij}\}$. Sea S_i^2 un estimador de σ_{ii} que es independiente de $x_1,\ldots, x_p$ y tal que $\nu_i\ S_i^2/\sigma_{ii}$ tiene una distribución χ^2 con ν_i --

grados de libertad. Si $t_i = (x_i - \mu_i)/S_i$, $i=1,\ldots,p$, entonces las p variables tienen una distribución conjunta cuyas marginales son distribuciones de t Student. Tales distribuciones se llamarán distribuciones de t multivariada.

Si $\omega = \max |t_i|$, entonces los intervalos precisos para un nivel $1-\alpha$ para $\mu_1,\ldots,\mu_p$ son

$$x_i \pm W^{1-\alpha} S_i,$$

donde $W^{1-\alpha}$ es el cuantil con una confianza de $(1-\alpha)100\%$ de la distribución de $W = \max |t_i|$.

Otra distribución de t multivariada ha sido discutida por Dunnett y Sobel (1955) y es muy similar a la arriba expuesta, salvo que las x_i(s) se supone tienen varianzas -- iguales y en consecuencia tienen el mismo estimador de la varianza para cada una de las p variables. Sean $x_1,\ldots,x_p$, p variables que tienen distribución normal multivariada con medias $\mu_1,\ldots,\mu_p$ y matriz de dispersión $\{\sigma^2\rho_{ij}\}$ donde $\rho_{ii}=1$, $i,\ldots,p$, y sea $\nu S^2/\sigma^2$ se distribuye como una χ^2 con ν grados de libertad. Entonces cada $t_i = (x_i - \mu_i)/S$, $i=1,\ldots,p$ tiene una distribución t Student y la función de densidad de $t_1,\ldots, t_p$ es

$$f(t_1,\ldots, t_p) = \frac{\Gamma(\frac{p+\nu}{2})\ |\{\rho^{ij}\}|^{1/2}}{\nu^{p/2}\Gamma(\frac{\nu}{2})\ \pi^{p/2}} \left[1 + \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \rho^{ij} t_i t_j\right]^{-(p+\nu)/2}$$

donde $\{\rho^{ij}\}$ es la matriz inversa de la matriz de correlaciones, y $|\{\rho^{ij}\}|$ es el determinante de $\{\rho^{ij}\}$.

Si definimos $u = \max |t_i|$ y los intervalos de confianza para $\mu_1,\ldots,\mu_p$ para un nivel $1-\alpha$, son

$$x_i \pm u^{1-\alpha}S$$

donde $u^{1-\alpha}$ es el cuantil con una confianza de $(1-\alpha)100\%$ de la distribución $u = \max |t_i|$

Debe notarse que si v se define como $v = \max \{t_i\}$, $i=1,\ldots, p$, entonces los intervalos de confianza de una cola para $\mu_1,\ldots,\mu_p$ son

$$x_i + V^{1-\alpha}S$$

donde $V^{1-\alpha}$ es el cuantil con una confianza de $(1-\alpha)100\%$ de la distribución $v = \max \{t_i\}$.

Desafortunadamente no hay tablas que contengan los -- cuantiles de $w^{1-\alpha}$, con la excepción del caso cuando todas $\sigma_{ij}= 0$, $i\neq j$. En este caso las tablas de la distribución - de w se pueden obtener de la t de Student univariada. El cuantil $1-\alpha$ de la distribución w es el punto con $\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})(1-\alpha)^{1/p}$ de significancia de una t de Student univariada.

Casi no existen tablas para los cuantiles de u y v. Dunn y Massey (1965) construyen tablas para estas distribuciones estos cuantiles exhiben en la tabla XVII del -- Apéndice. Haciendo uso de estas tablas podemos estimar $\mu_1, \ldots, \mu_p$ usando

$$\bar{Y}_i \pm w^{1-\alpha} S_i/\sqrt{n}$$

donde S_i^2 es la varianza muestral y $\bar{Y}_i$ es la media de la - i-ésima muestra.

En el caso de que las varianzas se supongan iguales, obtendremos intervalos de confianza usando los valores de $u^{1-\alpha}$ para todo $\rho_{ij} = 0$. Si $\bar{Y}_i$ es la media de la i-ésima muestra y si S^2 es la estimación ponderada de la varianza, entonces los intervalos, son la forma

$$\bar{Y}_i \pm u^{1-\alpha} S/\sqrt{n_i}$$

cuyos grados de libertad serán $\Sigma n_i - p$. Aquí los tamaños de muestra pueden ser desiguales.

Dunnett (1955) da un ejemplo en el que las correlaciones son conocidas, positivas e iguales. En tales casos - se usan las tablas de $u^{1-\alpha}$ de Dunn y Massey (1965). El -- ejemplo de Dunnett (1955) incluye la comparación de varios tratamientos experimentales contra un control, cuando las muestras de los tratamientos son del mismo tamaño, n. Si n_o es el tamaño de muestra del control, $\bar{Y}_o$ su media y $\bar{Y}_1$, ..., $\bar{Y}_p$ son las medias de los tratamientos experimentales, entonces $\bar{Y}_i - \bar{Y}_o$, i=1,..., p son p diferencias con varianzas igual a

$$\sigma^2(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_o}) \quad y \; \rho_{ij} = 1/(\frac{n_o}{n} + 1)$$

los intervalos de confianza para

$$\mu_i - \mu_o \quad \text{son } \bar{Y}_i - \bar{Y}_o \pm u^{1-\alpha} S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}} .$$

donde S^2 es la estimación ponderada de la varianza.

Como un último ejemplo podemos estimar los efectos de interacción en un modelo con dos criterios de clasificación con efectos fijos y balanceado. Si tenemos r renglones , C columnas y n observaciones por celda, entonces bajo las suposiciones usuales de normalidad e independencia, las estimaciones de las interacciones se distribuyen normalmente de manera conjunta con varianzas igual a $\sigma^2(r-1)(c-1)/ncr$. Para cualesquiera dos interacciones que no esten ni en la misma columna ni renglón, el coeficiente de correlación es $1/(r-1)(c-1)$ y los intervalos de confianza pueden ser

$$(\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i...} - Y_{.j.} + \bar{Y}...) \pm u^{1-\alpha} S\sqrt{(r-1)(c-1)/ncr}$$

donde S^2 es la estimación ponderada de la varianza σ^2, $Y_{ij.}$ es la media de las n observaciones del renglon i, columna - j, $\bar{Y}_{i..}$ es la media de nc observaciones en el i-ésimo renglón, $\bar{Y}_{.j.}$ es la media de nr observaciones de la j-ésima columna - y $\bar{Y}...$ es la media global.

De una manera análoga se puede encontrar la expresión - para los intervalos de confianza correspondientes, en el caso de estimar contrastes.

4. Comparaciones Multiples para Datos Incompletos [Lin, 1973]

En algunas ocasiones se presenta el problema de que en un experimento se pierden observaciones pero por razones -- ajenas a los tratamientos aplicados. Este tipo de diseños- los llamaremos diseños con datos incompletos. Lin (1973) - considera el problema de estimar las diferencias de medias de una distribución normal bivariada en diseños con datos - incompletos; el autor propone un método que toma en cuenta todos los datos disponibles.

Especificamente considere $(X_1, X_2)'$ un vector aleatorio normalmente distribuido con vector de medias $(\mu_1, \mu_2)'$ y ma triz de covarianza $\sum = \{\sigma_{ij}\}$, $i,j=1,2$. Suponga además que se tienen N pares de observaciones del vector $(X_1, X_2)'$, de los cuales N-n ($n \leq N$) son observaciones incompletas correspondientes a X_2. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que los datos son

$$x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{1n+1}, \ldots, x_{1N}$$
$$x_{21}, \ldots, x_{2n}.$$

Supondremos como siempre, que $\sigma_i^2 = \sigma_{ii}$, $i=1,2$, el coeficiente de correlación $\rho = \sigma_{12}/\sigma_1\sigma_2$ el coeficiente de regresión $\beta = \rho\sigma_2/\sigma_1$ y $\delta = \mu_1 - \mu_2$

La hipótesis nula, cuya alternativa es de una cola queda

$$H_o: \delta = \delta_o \quad \text{vs.} \quad H_a: \delta > \delta_o$$

donde $\delta_o \in \mathbb{R}$ es conocida. Para la alternativa de dos colas el caso es análogo. Definamos

$$Z(s) = A(s)\, \bar{x}_1^{(n)} + \left[1 - A(S)\right] \bar{x}_1^{(N-n)} - \bar{x}_2^{(n)}$$

donde

$$A(s) = \lambda + (1-\lambda)S, \quad \lambda = n/N ,$$

$$\bar{x}_i^{(N)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \qquad (i = 1,2\ ).$$

$$\bar{x}_1^{(N)} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_{ij}\ , \quad \bar{x}_1^{(N-n)} = \frac{1}{N-n}\sum_{j=n+1}^{N} x_{ij}\ ,$$

y $\Lambda(s)$ está correlacionada con $\bar{x}_1^{(n)}$ y $\bar{x}_1^{(N-n)}$. El autor muestra que $Z(s)$ forma una clase de estimadores insesgados para δ(Ver Lin, 1971).

PROCEDIMIENTO DE LA PRUEBA PARA Σ CONOCIDA.

Se consideran tres casos de acuerdo al conocimiento de ρ y $c = \sigma_1/\sigma_2$. Cuando se conocen los dos parámetros se pueden construir pruebas exactas, si se desconoce uno de ellos se propondrán pruebas aproximadas.

Si se conocen ρ y c, entonces la colección $(\bar{x}_1^{(N)}$, $\bar{x}_2^{(n)} - \beta\bar{x}_1^{(n)}$, $\hat{\sigma}_2^2)$ forma un conjunto de estadísticas suficientes para [$(\mu,\ \nu,\ \sigma_2^2)$ donde $\nu = \mu_2 - \beta\mu_1$, $\beta = \rho c^{-1}$ y

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n+N} \sum_{j=1}^{N} (x_{1j} - \bar{x}_1^{(N)})^2 / C^2 +$$

$$+ \frac{1}{n+N} \sum_{k=1}^{n} (x_{2k} - \bar{x}_2^{(n)} - \beta x_{1k} + \beta \bar{x}_1^{(n)})^2 / (1-\rho^2).$$

Observar que x_{ij} y $x_{2k} - \beta x_{1k}$ son independientes y normalmente distribuidos con medias μ_1, ν y varianzas $C^2 \sigma_2^2$, $(1-\rho^2)\sigma_2^2$, respectivamente, para $j=1,\ldots, N$, $k=1,\ldots,n$,

La prueba propuesta es

$$T_1 = \frac{Z(\beta)-\delta}{\sqrt{\left[\frac{C^2(1-\beta)^2}{N} + \frac{1-p^2}{n}\right] \frac{n+N}{n+N-2}\, \hat{\sigma}_2^2}}$$

que se distribuye como una t de Student con n+N-2 g.l. Además si σ_2^2 es conocida se reemplaza $(n+N)\hat{\sigma}_2^2/(n+N-2)$ por σ_2^2.

Si $\rho = o$ y c es conocida la regla de decisión es: rechazar H_o, an nivel α, si

$$\bar{x}_1^{(N)} - \bar{x}_2^{(n)} - \delta_o \geq \left[\frac{t_1^2 a_{11}}{N(N-1)} + \frac{t_2^2 a_{22}}{n(n-1)} \right]^{1/2}$$

donde $a_{ii} = \sum_{j=1}^{N} (x_{ij} - \bar{x}_i^{(N)})^2$ y $t_i = t_{n_i}^{\alpha} - 1$ es el cuantil con una significancia de α(100%) de una distribución t Student con $n_i - 1$ grados de libertad para i=1,2. En nuestro ejemplo $n_1 = N$ y $n_2 = n$.

Si c es conocida y ρ es desconocida (sin pérdida de generalidad, cuando se conoce c,c=1) la estadística propuesta, utilizando *todos los datos*, es

$$T_2 = \frac{\bar{x}_1^{(N)} - \bar{x}_2^{(n)} - \delta}{\sqrt{\left[\frac{\lambda^2 - 2\lambda r + 1}{n} + \frac{(1-\lambda)^2}{N-n}\right] \frac{a_{22} + b_{11}}{N-2}}}$$

y

$$T_3 = \frac{\bar{x}_1^{(N)} - \bar{x}_2^{(n)} - \delta}{\sqrt{\left[\frac{\lambda^2 - 2\lambda u + 1}{n} + \frac{(1-\lambda)^2}{N-n}\right] \frac{a_{22} + b_{11}}{N-2}}}$$

donde $r = a_{12}/(a_{11} \cdot a_{22})^{1/2}$, $u = 2a_{12}/(a_u + a_{22})$, $v = a_{12}/a_{11}$
$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (x_{ik} - \bar{x}_i^{(n)})(x_{jk} - \bar{x}_j^{(n)})$, $i,j = 1,2$ y b_{11} =
$\sum_{j=n}^{N} (x_{ij} - \bar{x}_1^{(N-n)})^2$, $N-n > 1$.

PROCEDIMIENTO DE LA PRUEBA PARA Σ DESCONOCIDA

Cuando Σ es desconocida no se tienen pruebas exactas sino solamente aproximaciones. Un procedimiento conservador es el que establece la siguiente regla de decisión

$$\bar{x}_1^{(N)} - \bar{x}_2^{(n)} - \delta_o \geq \left(\sum_{i=1}^{2} \frac{t_i^2 \, \Delta_i^2}{n_i} \right)^{1/2}$$

donde $\Delta_1^2 = (\lambda^2 a_{11} - 2\lambda a_{12} + a_{22})/(n-1)$

$\Delta_2^2 = (1-\lambda)^2 \, b_{11} \, /(N-n-1)$

y $t_i = t^{\alpha}_{n_i - 1}$ es el cuantil con una significancia de (100%)α de una distribución de t Student con n_i-1 g.l., en este caso $n_1 = n$ y $n_2 = N-n$.

Otro procedimiento aproximado es el sugerido por Welch (1947), quien propone la estadística

$$T_a = \frac{\bar{x}_1^{(N)} - \bar{x}_2^{(n)} - \delta}{\sqrt{\Delta_1^2/n + \Delta_2^2/(N-n)}}$$

que tiene una distribución aproximada a la t Student con -- los grados de libertad

$$f = \left[\left(\sum_{i=1}^{2} \frac{\Delta_i^2}{n_i} \right)^2 \right] \Big/ \left[\sum_{i=1}^{2} \frac{\Delta_i^4}{n_i^2(n_i-1)} \right]$$

donde Δ_1 y Δ_2 se dan anteriormente y $n_1 = n$, $n_2 = N-n$. Sobre el mismo tema puede consultarse Ekbohm (1976a,b) y Lin& Stivers(1974).

5. Comparaciones Multiples Mediante Analisis de Conglomerados. (Scott y Knott, 1974)

Algunas veces es útil el análisis de varianza para clasificar a los tratamientos en grupos más o menos homogéneos. Las comparaciones múltiples pueden usarse para este propósito pero Scott y Knott (1974) proponen un método más eficaz usando las técnicas de análisis de conglomerados.

Introducimos la prueba mediante un ejemplo. Supóngase que se tienen t=7 medias de tratamientos, ordenadas de manera ascendente, 1,2,3,4,5,6 y 7. Primero obtenemos una partición en dos subconjuntos, sin pérdida de generalidad que sean {1,2,3,4} y{5,6,7}, las hipótesis serán H_o: $\mu_1 = \mu_2 = \ldots \mu_7$ contra la alternativa H_a: $\mu_i = m_1$ o m_2(con al menos una media en cada grupo) donde m_1 y m_2 representan las medias desconocidas de ambos grupos. Si H_o es rechazada obtendremos una nueva partición de {1,2,3,4} en dos grupos y probamos la igualdad de estos grupos. Un procedimiento similar se realiza para {5,6,7}; el procedimiento se repite hasta que H_o no se rechace.

El método se describe en seguida. Supóngase se tienen t medias μ_1, $\mu_2, \ldots, \mu_t$ cuyos estimadores son $\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_t$ las cuales no están correlacionadas y sus varianzas son homogéneas y tienen igual número de repeticiones. Como siempre $\hat{\mu}_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$, el estimador de σ^2 es S^2, la varianza común, donde $\nu S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_\nu$. (En un diseño completamente al azar, $\nu = t(n-1)$. Supóngase que obtenemos una partición y formamos dos grupos con t_1 y $t_2 = (t-t_1)$ medias. Los grupos G_1 y G_2 contendrán nt_1 y nt_2 observaciones, respectivamente.

Sea T_1 la suma de las nt_1 observaciones en el grupo G_1, y análogamente T_2. Del análisis de varianza usual la suma de cuadrados entre grupos es

$$B_o = [T_1^2/nt_1] + [T_2^2/nt_2] - [T^2/nt], \qquad (1)$$

donde $T = (T_1 + T_2)$. Bajo la hipótesis nula, el estimador de máxima verosimilitud de σ^2 es

$$\hat{\sigma}_o^2 = [n \sum_1^t (\hat{\mu}_i - \hat{\mu})^2 + \nu S^2]/(t+\nu), \qquad (2)$$

donde $\hat{\mu} = (\hat{\mu}_1 + \ldots + \hat{\mu}_t)/t$. La estadística propuesta es, para $\Pi=3.1416$,

$$\lambda = \frac{\Pi}{2(\Pi-2)} \cdot \frac{B_o}{\hat{\sigma}_o^2} = (1.376)\,\frac{B_o}{\hat{\sigma}_o^2}. \qquad (3)$$

Para una confianza de $(1-\alpha)100\%$ el autor obtuvo los cuantiles para λ, mediante simulación; para propósitos prácticos se aproximó con la $\chi^2_{\nu_o}$ donde $\nu_o = t/(\Pi-2) = t/1.1416$ g.l.

En el ejemplo numérico tenemos $t=7$, $n=6$, $S^2=79.64$ con $\nu=30$ g.l. (el diseño utilizado es de bloques al azar, se incluyeron 6 bloques y siete variedades de cebada; para mayores referencias ver Duncan, 1955). Las medias dispuestas en orden ascendente son

Media :	49.6	58.1	61.0	61.5	67.6	71.2	71.3
Tratamiento:	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7).

Para encontrar la partición con la suma de cuadrados - entre grupos más grande, deberíamos, buscar t-1=6 particiones posibles: {1} {2,3,4,5,6,7} ,{1,2}{3,4,5,6,7},{1,2,3} {4,5,6,7},{1,2,3,4}{5,6,7},{1,2,3,4,5}{6,7} y {1,2,3,4,5,6} {7}. En nuestro caso seleccionamos como posibles particiones {1}{2,3,4,5,6,7} y {1,2,3,4}{5,6,7}. La partición óptima es la segunda. En este caso $t_1=4$, $t_2=3$, $T_1=6(49.6+58.1+61.0+61.5)=3181.2$, $T_2=1260.6$, $T=T_1+T_2=2641.8$, $\hat{\mu}=(49.6+\ldots+71.3)/7=62.9$ y $\Sigma(\hat{\mu}_i-\hat{\mu})^2=370.04$.

A partir de las ecuaciones (1) y (2) $B_o=(1381.2)^2/24+(1260.6)^2/18-(2641.8)^2/42=1602.86$ y $\hat{\sigma}_o^2=[6(370.04)+30(79.64)]/(7+30)=124.58$ y por la ecuación (3) se obtiene $\lambda=1.376(1602.86/124.58)=17.70$. Usando la aproximación de $\chi^2_{\nu_o}$ donde $\nu_o=t/1.1416=7/1.1416=6.1$ g.l. con lo cual el valor 17.70 es significativo.(el cuantil χ^2_6 al 5% de significancia es - 12.59).

A continuación debemos obtener particiones de los conjuntos {1,2,3,4} y {5,6,7 }. Obtenemos la partición, primeramente del conjunto {5,6,7}, t=3; la partición óptima -- es {5}{6,7}, por lo que $t_1=1$, $t_2=2$, $T_1=405.6$, $T_2=855.0$, $\Sigma(\hat{\mu}_i-\hat{\mu})^2=8.8866$, $\hat{\sigma}_o^2=[6(8.8866)+30(79.64)]/33=74.02$, $B_o=$

$405.6^2/6+855^2/12-1260.6^2/18=53.29$ y $\lambda=(1.376)(53.29)/74.02$ $=0.99$, que no es significativa. La partición de $\{1,2,3,4\}$ en $\{1\}$ y $\{2,3,4\}$ está en la zona crítica; en suma, esquemáticamente tendremos

$$
\{1,2,3,4,5,6,7\}
\begin{cases}
\{1,2,3,4\} \begin{cases} \{1\} \\ \{2,3,4\} \end{cases} \quad \lambda=8,04 \\[2ex]
\lambda=17.70 \\[2ex]
\{5,6,7\} \begin{cases} \{5\} \\ \{6,7\} \end{cases} \quad \lambda=0.99
\end{cases}
$$

Ello sugiere que los conglomerados que se han formado son $\{1,2,3,4\}$ y $\{5,6,7\}$.

6. Comparaciones Multiples de Medias en el Analisis de Covarianza. (Thigpen y Paulson, 1974).

Haciendo uso de las pruebas del tipo de Rangos Estudentizados Thigpen y Paulson (1974), proponen una nueva prueba de comparaciones múltiples para medias ajustadas de tratamientos, en un análisis de covarianza. En relación con el mismo tema puede consultarse Kramer (1957) y Bryant & Paulson (1916), se han incluído en el capítulo III.

Sean las parejas (x_{ij}, y_{ij}) muestras aleatorias provenientes de una distribución normal bivariada, $N(\mu,\Sigma)$ donde el vector de medias es $\mu = (\nu, \mu_j)$ y la matriz de covarianzas

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix},$$

para $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,k$, $n>1$, $k\geq 2$. Llamamos $\rho=\sigma_{xy}/\sigma_x\sigma_y$ la correlación. Sea $N = nk$ y

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma\,\Sigma(x_{ij}-\bar{x}_j)^2 & \Sigma\Sigma(x_{ij}-x_j)(y_{ij}-\bar{y}_j) \\ \Sigma\,\Sigma(x_{ij}-\bar{x}_j)(y_{ij}-\bar{y}_j) & \Sigma\,\Sigma(y_{ij}-\bar{y}_j)^2 \end{bmatrix},$$

la suma de cuadrados corregida de las observaciones, con

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}, \quad \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_i \sum_j x_{ij},$$

$$\bar{y}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_{ij}, \quad \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_i \sum_j y_{ij}.$$

Supongamos ahora que X es la covariable y Y la variable dependiente y tales que X y Y se distribuyen conjuntamente y estan relacionadas linealmente por

$$E(y_{ij}) = \mu_j + \beta E(x_{ij} - \bar{x}).$$

El estimador usual, del efecto de tratamiento μ_j ajustado, es $\hat{\mu}_j = \hat{Y}_j = u(\bar{x}_j - \bar{x})$ para $u=\omega_{12}/\ \omega_{11}$; la suma de cuadrados del error está dada por $v=\omega_{22} - \omega_{12}^2/\omega_{11}$.

Definamos $z_j = \bar{Y}_j - u(\bar{x}_j - \nu)$, entonces las diferencias

$$\hat{\mu}_j - \hat{\mu}_{j'} = [\bar{Y}_j - u(\bar{x}_j - \bar{x})] - [\bar{Y}_{j'} - u(x_{j'} - \bar{x})]$$

$$= Y_j - u\bar{x}_j - u\bar{x} - \bar{Y}_{j'} - ux_{j'} - u\bar{x}$$

$$= \bar{Y}_j - u\bar{x}_j + u\nu - \bar{Y}_{j'} + u\bar{x}_{j'} - u\nu$$

$$= [\bar{Y}_j - u(x_j - \nu] - [\bar{Y}_{j'} - u(\bar{x}_{j'} - \nu)] = z_j - z_{j'}$$

Notar que para cada z_j dado u tienen distribución normal y para toda $j \neq j'$ $\mathrm{COV}(z_j, z_{j'} | u) = o$. Luego las $z_1, \ldots, z_k$ dado u bajo la hipótesis H_o: $\mu_1 = \ldots = \mu_k$ con distribución normal, independientes e idénticamente distribuidas. La estadística propuesta es

$$q = \frac{z_{max} - z_{min}}{\left\{\frac{v}{n(N-k-1)}\right\}^{1/2}},$$

El autor ha calculado los cuantiles de $q_{\nu,k}^{\alpha}$ para $\alpha=.05$ y --

$\alpha = .01$ estos cuantiles se exhiben en la tabla XVIII del Apéndice. Expongamos ahora un ejemplo para dar una idea del modo de operación de esta prueba.

Tres grupos, formados de 8 adultos cada uno, se seleccionaron de manera aleatoria. Se impartieron dos métodos de lectura teniendo como control a uno de los grupos. Se desea determinar si en realidad éstos métodos desarrollan ciertas habilidades específicas medidas con ciertos puntajes; y si es así cuál es la mejor técnica. Se pensó que el método de mejoramiento podría estar relacionado con el coeficiente intelectual (C.I.) de cada persona, de tal manera que las mediciones de C.I. constituyeron la covariable X y se obtuvieron las medidas antes de impartir los cursos. Después de aplicados los métodos se obtuvo la respuesta Y. Los datos se muestran en la tabla 1, de donde calculamos

Tabla 1. Habilidad para la lectura

	Método 1		Control		Método 2	
Persona	X	Y	X	Y	X	Y
1	89	541	107	494	103	628
2	92	520	95	408	100	528
3	111	459	96	438	104	746
4	121	681	137	631	102	492
5	105	617	79	493	116	611
6	115	544	106	384	89	382
7	88	460	122	484	85	361
8	86	474	108	496	112	533
Medias	100.9	537.0	106.53	478.5	101.4	535.1
Varianzas	190.1	6210.3	310.2	5654.9	108.6	16361.8

$\omega_{11} = \Sigma\Sigma(x_{ij}-\bar{x}_j)^2=7(190.1+310.2+108.6)=4262.3$

$\omega_{22} = \Sigma\Sigma(y_{ij}-\bar{y}_j)^2=7(6210.3+5654.9+16361.8)=197\ 588.9$

$\omega_{12} = \Sigma\Sigma(y_{ij}-\bar{y}_j)(y_{ij}-\bar{y}_j) = 16744.7$

$u = \omega_{12}/\omega_{11}=16744.1/4262.3=3.93; V=\omega_{22}-\omega_{12}^2/\omega_{11}=191588.9-$
$-16744.7^2/4262.3 = 131\ 806.1.$

Pero otro lado de las medias ajustadas son

$\hat{\mu}_1 = \bar{Y}_1- u(\bar{x}_1-\bar{x})=537-3.93(100.9-102.9)=544.6$ (método 1)

$\hat{\mu}_2 = \bar{Y}_2- u(\bar{x}_2-\bar{x})=478.5-3.93(106.3-102.9)=464.9$ (control)

$\hat{\mu}_3 = \bar{Y}_3- u(\bar{x}_3-\bar{x})=535.1-3.93(101.4-102.9)=540.7$ (método 2),

además encontramos que

$z_1 = \bar{Y}_1 - u(\bar{x}_1-\nu)=537.0-3.93(100.9-20)=219.1$

$z_2 = \bar{Y}_2 - u(\bar{x}_2-\nu)=478.5-3.93(106.3-20)=139.3$

$z_3 = \bar{Y}_3 - u(\bar{x}_2-\nu)=535.1-3.93(101.4-20)=215.2$

por lo que encontramos

$$Q = \frac{z_{max} - z_{min}}{\sqrt{\frac{V}{n(N-k-1)}}} = \frac{219.1-139.3}{\sqrt{\frac{131806.1}{8(24-3-1)}}} = 2.78$$

de la tabla XVIII se tiene que $q^{.05} = 3.69$, como $Q<q^{.05}_{20,3}$ concluimos que no es significativa al 5%. Por lo tanto te̲nemos que la aparente diferencia entre los tres tratamientos se ve oscurecida por su gran variabilidad de la varia-

ble dependiente del método 2.

Comparando el método 1 contra el control obtenemos Q=3.28, como $q^{.05}_{13,2}$= 3.21 => Q > $q^{.05}_{13,2}$ con lo cual se concluye que el método 1 es distinto al control.

Comparando el método 2 contra el control obtenemos -- Q=2.44, como $q^{.05}_{13,2}$ = 3.21 => Q < $q^{.05}_{13,2}$ y no es significativo; finalmente el Método 1 contra el método 2, Q=1.47 y Q < $q^{.05}_{13,2}$ y tampoco es significativo. En resumen tenemos

<u>Control M2</u> <u>M1</u>

7. COMPARACIONES MULTIPLES DE MEDIAS EN EL ANALISIS DE COVARIANZA (Bryant y Bruvold, 1980)

Los procedimientos basados en distribuciones de rangos, usualmente construyen intervalos para contrastes, en el análisis de covarianza, suponiendo que los vectores de las covariables usadas se distribuyen idénticamente. En estos casos se especifican ciertas condiciones que deben cumplir -- los vectores de covariables, para que no afecten la validez de tales procedimientos. Brayant y Bruvold (1980) utilizando los resultados de Brayant y Paulson (1976), capítulo III, muestran un método en el cual relajan ciertas suposiciones sin afectar la validez de los resultados; iniciamos la presentación de la prueba mediante un ejemplo de este hecho.

Una compañía desea evaluar la posible ventaja de vender sus productos al menudeo; para ello diseña un experimento de mercado para comparar varias estrategias de venta que incluyen diferentes formas de paquetes, precios y presentaciones. Los paquetes en venta se agrupan en bloques homogéneos, en términos de tamaño, localidad de producción, propietario y otras características de interés. De esta manera se forman grupos de armarios en los cuales se asignan aleatoriamente las diferentes estrategias de venta en cada bloque.

Durante la experimentación cierta información concomitante puede ejercer cierta influencia en la respuesta, la - venta, (como puede ser el número de clientes potenciales, cantidad de artículos almacenados). Esta información no pue de ser controlada por el experimentador y se debe considerar en el modelo como aleatorio. Sin embargo es poco factible que tales variables aleatorias se distribuyan idénticamente en cada bloque.

Tomando en cuenta este hecho consideremos m poblacio-- nes distintas, con p variables normales y matriz de varianzas Σ_{xx} con medias distintas $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$.

El modelo que satisface estos requerimientos es

$$Y = A\mu + (X - V\Delta)\, u + \varepsilon \qquad (1)$$

donde $Y = (y_1,\ldots,y_N)'$, $A=a_1,\ldots, a_N)'$, $X=(x_1,\ldots,x_N)'$, $\Delta=(\delta_1,\ldots,\delta_m)'$, $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N)'$, y los v_{ij} son los elementos de una matriz V de Nxm y $v_{ij}=1$ si es una covariable y $v_{ij}=0$ en otro caso; además μ y u son parámetros desconocidos; de aquí que los estimadores de μ, u y σ^2_{y1x} son

$$\hat{u} = (A'A)^{-1}A'(y - \hat{Z}\,\hat{u}),\quad \hat{u}\; w_{xx}^{-1}\; W_{xy}$$

$$\hat{\sigma}^2_{y1x} = \frac{1}{\nu}\,\{w_{yy} - w'_{xy}\,W_{xx}^{-1}\;w_{xy}\,\}$$

donde

$$\hat{Z} = x - Y\,\tilde{\Delta},\ H=I-A(A'A)^{-1}A',\quad W_{xx}= \hat{Z}'H\hat{Z}\ ,$$

$$w_{xy} = \tilde{Z}'HY\ ,\quad w_{yy} = Y'HY$$

y

$$\nu = N - p - \text{rango}(A).$$

Para comparar dos funciones $\hat{\theta}_i$ y $\hat{\theta}_j$, tenemos que

$$\hat{\theta}_i = b_i'\hat{\mu} = C_i'\,(y-\hat{Z}\,\hat{u}\,),\quad i=1,2,\ldots,k.$$

para $C_i' = b_i'\,(A'A)^{-1}A'$; de acuerdo con Bryant y Paulson (1976) debemos suponer que

1. Para $i=1,\ldots,k$ $C_i C_i' = k_1$
2. Para $i \neq j$ $C_i' C_j = k_2$, k_1 y k_2 son constantes tales que $-k_1 \leq (k-1)\, k_2 \leq 0$.
3. Para $i=1,2,\ldots,k$ $C_i' V = f'$, donde f es un vector de constante, de orden $(m \times 1)$.

Bajo estas suposiciones la prueba propuesta es

$$Q = \max_{i \neq j} \frac{(\hat{\Theta}_i - \hat{\Theta}_j) - (\Theta_i - \Theta_j)}{\{(k_1 - k_2)\, \hat{\sigma}^2_{y1x}\}^{1/2}}$$

Bryant y Paulson (1976) construyeron tablas de $q^{\alpha}_{p,k,\nu}$ para emplear esta estadística, ver tabla XII, considerando los parámetros, p, k y ν para $\alpha=.01$ y $\alpha=.05$. También estos autores obtienen los intervalos de confianza para todos los contrastes $\sum_{i=1}^{k} \ell_i\, \theta_i$ de la forma

$$\sum_{i=1}^{k} \ell_i\, \hat{\theta}_i \pm (k_1 - k_2)^{1/2}\; \hat{\sigma}_{y1x} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} |\ell_i|\right) q^{\alpha}_{p,k,\nu}$$

UN EJEMPLO

Suponga que los datos de la tabla 1 se han obtenido de un experimento controlado de mercado; en el cual se comparan k=6 armarios con b=4 bloques.

Tabla 1. (Y) Marca; (X) Arts. no vendidos

			Bloques					
			1	2	3	4	Totales	Medias
Armarios	1	Y	2.98	3.29	4.33	3.48	14.08	3.520
		X	9.19	13.78	11.20	13.88	48.05	12.013
	2	Y	2.99	3.36	3.99	4.18	14.52	3.630
		X	9.61	13.59	9.99	15.70	48.89	12.223
	3	Y	4.49	4.25	4.19	3.89	16.82	4.205
		X	11.74	14.21	9.54	14.31	49.80	12.450
	4	Y	4.30	4.40	3.83	5.03	17.56	4.390
		X	10.43	13.58	7.88	15.67	47.56	11.890
	5	Y	4.33	5.24	4.25	5.24	19.06	4.765
		X	10.18	15.73	8.28	16.04	50.23	12.558
	6	Y	3.91	4.83	4.91	5.61	19.26	4.815
		X	8.72	14.05	8.91	16.51	48.19	12.048
Totales		Y	23.00	25.37	25.50	27.43	101.30	
		X	59.87	84.94	55.80	92.11	292.72	
Medias		Y	3.833	25.37	4.250	4.572		4.221
		X	9.978	14.157	9.300	15.352		12.197

En cada celda (i,j) el número superior es la respuesta y_{ij} de la prueba sobre el movimiento del artículo que está ubicado en el armario i-ésimo del bloque j-ésimo (medido en centenas) y el número inferior es x_{ij} es la cantidad artículos en existencia.

El modelo ajustado a los datos es

$$y_{ij} = \theta_i + \beta_j + (x_{ij} - \delta_j)u + \varepsilon_{ij} \qquad \begin{matrix} i=1,2,\ldots,k \\ j=1,2,\ldots,b \end{matrix}, \quad \text{\_\_(2)}$$

donde θ_i es el efecto del i-ésimo armario, β_j es el efecto del j-ésimo bloque, δ_j es la cantidad esperada de artículos en existencia observados en la venta al menudeo en el j-ésimo bloque, u es el coeficiente de regresión correspondiente a x_{ij} y ε_{ij} el error. Sustituyendo

$$\hat{\delta}_j = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{ij} = \bar{x}_{.j}$$

en la expresión (2) en lugar de δ_j y suponiendo que $\sum_{j=1}^{b} \hat{\beta}_j = 0$ entonces las medias ajustadas se calculan por

$\theta_i = \bar{Y}_{i.} - (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})\hat{u}$, si $\hat{u} = W_{xx}^{-1} w_{xy} = .408$, entonces

$\hat{\theta}_1 = 3.52-(12.013-12.197)(.408) = 3.595$

$\hat{\theta}_2 = 3.63-(12.223-12.197)(408) = 3.619$

$\hat{\theta}_3 = 4.205-(12.45-12.197)(.408) = 4.102$

$\hat{\theta}_4 = 4.39-(11.89-12.197)(.408) = 4.515$

$\hat{\theta}_5 = 4.765-(12.558-12.197)(.408)=4.618$

$\hat{\theta}_6 = 4.815-(12.048-12.197)(.408)=4.876$,

y para los bloques tenemos

$\hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}$

$\hat{\beta}_1 = 3.833-4.221 = -0.388$

$\hat{\beta}_2 = 4.228-4.221 = .007$

$\hat{\beta}_3 = 4.250-4.221 = .029$

$\hat{\beta}_4 = 4.572-4.221 = .351$,

finalmente tenemos

$\hat{\sigma}^2_{y1x} = .01326$ y $\nu=14$ g.l.

Los vectores C_i, de dimensiones (kbx1), tienen el t-ésimo -- elemento a 1/b en la observación i-ésima y cero en otro lado. De donde se tiene $C_i'C_i = 1/b = k_1$ $(i=1,2,\ldots,k)$ y $C_i'C_j = 0 = k_2$ $(i \neq j)$, por lo que se cumplen las condiciones No.1 y No.2. La matriz V de la condición No.3 es $V=(I_b, I_b, \ldots I_b)'$ donde I_b es la matriz identidad de orden b. De manera que la condición No.3 se satisface escogiendo $f = (1/b)(1,1,\ldots,1)'$. De esta manera

$$Q = \max_{i \neq j} \frac{(\hat{\theta}_i - \hat{\theta}_j) - (\theta_i - \theta_j)}{\{(k_1 - k_2)\ \hat{\sigma}^2_{y1x}\}^{1/2}} = \max_{i \neq j} \frac{(\hat{\theta}_i - \hat{\theta}_j) - (\theta_i - \theta_j)}{\{\hat{\sigma}^2_{y1x}/b\}^{1/2}} ,$$

los valores críticos contra los que se compara esta estadística, son

$$r^{a}_{p,2,\nu} = q^{\alpha}_{p,2,\nu} \quad ,$$

y

$$r^{\alpha}_{p,k,\nu} = \max\{r^{\alpha}_{p,k-1,\nu} \ , \ q^{\alpha_k}_{p,k,\nu}\} \ , \quad k > 2$$

donde $\alpha_k = 1-(1-\alpha)^{k-1}$. Los cuantiles de $r^{\alpha}_{p,k,\nu}$ están calculados en la tabla XII tomada de Bryant y Paulson (1976). Lo que es equivalente a comparar $\hat{\theta}_i - \hat{\theta}_j$ contra $R_{j'} = (\hat{\sigma}_{y1x} / \sqrt{b})\ r^{.05}_{1,j',14}$ $j'=2,3,\ldots,6$, j' es el número de medias involucradas. En nuestro ejemplo $R_2 = .181$, $R_3 = .190$ $R_4 = .195$, $R_5 = .202$; comparando los $R_{j'}$(s) contra las diferencias de interés obtenemos

$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$	$\hat{\theta}_4$	$\hat{\theta}_5$	$\hat{\theta}_6$
3.595	3.619	4.012	4.515	4.618	4.876

Además podemos obtener intervalos de confianza para todos los contrastes $\Sigma^{k}_{i=1}\ \ell_i\theta_i$ de las medias de los armarios, en este caso $q^{.05}_{1,6,14} = 4.83$ de la tabla XII, así obtenemos

$$\sum_{i=1}^{6} \ell_i \hat{\theta}_i \pm (k_1 - k_2)^{1/2} \hat{\sigma}_{y|x} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{6} |\ell_i|\right) q^{.05}_{1,6,14}$$

$$<=> \quad \sum_{i=1}^{6} \ell_i \hat{\theta}_i \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} - 0\right)(0.01326)} \cdot \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{6} |\ell_i|\right) \cdot (4.83)$$

$$<=> \quad \sum_{i=1}^{6} \ell_i \hat{\theta}_i \pm \sqrt{0.0132674}\,(4.83)\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{6} |\ell_i| \,.$$

$$<=> \quad \sum_{i=1}^{6} \ell_i \hat{\theta}_i \pm 0.139 \sum_{i=1}^{6} |\ell_i|$$

8. Comparaciones Multiples para Modelos de Bloques Completamente al Azar (Mudholkar y Subbaiah, 1976)

En muchas investigaciones que involucran varios tratamientos, aun cuando podemos estar interesados en todos los contrastes entre tratamientos, solamente algunas comparaciones son de importancia primordial. Por otra parte es conocido que los modelos de bloques al azar no cumplen ciertas condiciones, como homocedasticidad e independencia de los errores. La prueba que proponen Mudholkar y Subbaiah (1976) es una técnica de comparaciones múltiples, válida bajo condiciones no estándares (heterocedasticidad y dependencia de los errores), que permite hacer inferencias sobre todos los contrastes y es sensativa cuando existe un interés específico sobre algunos contrastes en particular.

Sean $\mu_1,\ldots,\mu_p$, las medias de p tratamientos, cuyos estimadores son $\hat{\mu}_1,\ldots,\hat{\mu}_p$. Si hacemos $C_1^* = C_1$, $C_i^* = C_i(1+$

$+ \Sigma_{j=1}^{i-1} C_j^*)$ para $C_i = (n-i)F_{1,n-i}^{\alpha_i}$, $i=1,2,\ldots,p$ entonces con - una confianza de al menos $(1-\alpha) = \Pi_i(1-\alpha)$, tenemos los siguientes intervalos de confianza

$$\Sigma b_i\hat{\mu} - \frac{1}{\sqrt{n}} \Sigma|\ell_i b_i| \sqrt{C_i^*} \leq \Sigma b_i\mu_i \leq \Sigma b_i\hat{\mu}_i + \frac{1}{\sqrt{n}} \Sigma|\ell_i b_i| \sqrt{C_i^*} \qquad (1)$$

para probar (1) tenemos primeramente que

$$(\hat{\mu}_1 - \mu_1)^2 \leq C_1 = C_1^*$$

$$(\hat{\mu}_2 - \mu_1)^2 \leq C_2[1 + (\hat{\mu}_1 - \mu_1)^2] \leq C_2(1 + C_1^*) = C_2^*$$

$$\vdots$$

$$(\hat{\mu}_i - \mu_i)^2 < C_i \left[1 + \sum_{j=1}^{i-1} (\hat{\mu}_j - \mu_j)^2\right] \leq C_i\left(1 + \sum_{j=1}^{i-1} C_j^*\right) = C_i^*$$

$$\Rightarrow |\hat{\mu}_i - \mu_i| = |\mu_i - \hat{\mu}_i| \leq \sqrt{C_i^*}, \text{ como } |b_i| > 0$$

$$\Rightarrow \sum|b_i||\mu_i - \hat{\mu}_i \leq \sum|b_i|\sqrt{C_i^*} \qquad (2)$$

por otra parte tenemos que

$$\Sigma|b_i||\mu_i - \hat{\mu}_i| = \sum|b_i(\mu_i - \hat{\mu}_i)| \qquad (3)$$

usando (2) y (3) tenemos que para $\ell_i \in \mathbb{R}$ $\forall$ $i=1,\ldots,p$

$$\Sigma\, b_i(\hat{\mu}_i - \mu_i) \leq \Sigma|b_i||\mu_i - \hat{\mu}_i| \leq \Sigma|b_i|\sqrt{C_i^*} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\Sigma|\ell_i b_i|\sqrt{C_i^*}$$

$$<=> \quad \Sigma|b_i(\mu_i - \hat{\mu}_i)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\Sigma|\ell_i b_i|\sqrt{C_i^*}$$

$$<=> \quad -\frac{1}{\sqrt{n}}\Sigma|\ell_i b_i|\sqrt{C_i^*} \leq \Sigma b_i(\mu_i - \hat{\mu}_i \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\Sigma|\ell_i b_i|\sqrt{C_i^*}$$

$$<=> \quad \Sigma b_i\hat{\mu}_i - \frac{1}{\sqrt{n}}\Sigma|\ell_i b_i|\sqrt{C_i^*} \leq \Sigma b_i\,\mu_i \leq \Sigma b_i\,\hat{\mu}_i + \frac{1}{\sqrt{n}}\Sigma|\ell_i b_i|\sqrt{C_i^*} \quad \square$$

Como consecuencia de (1) obtenemos los límites de confianza para cada μ_i de la siguiente manera: hagamos $b_1 = 0$, $,\ldots,b_{i-1}=0,\ b_i=1,\ b_{i+1}=0,\ldots,\ b_p=0.$

$$\hat{\mu}_i - \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{i}|\ell_{ij}|\sqrt{C_j^*} \leq \mu_i \leq \hat{\mu}_i + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{i}|\ell_{ij}|\sqrt{C_j^*} \qquad (4)$$

Para encontrar los valores necesarios para las expresiones (1) y (4) supongamos que $S=LL'$, donde L es la matriz triangular inferior, entonces los elementos ℓ_{ij} de L' se relacionan con los elementos s_{ij} de S de la siguiente manera

$$\ell_{i1} = \sqrt{S_{11}}, \quad \ell_{ij} = S_{ij}/\ell_{11} \quad j=2,\ldots,p$$

$$\ell_{ii} = \sqrt{S_{ii} - \sum_{k-1}^{i-1}\ell_{ki}^2} \qquad i=2,\ldots,n$$

$$\ell_{ij} = (s_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ki}\, \ell_{kj}) / \ell_{ii} \qquad j=i+1,\dots, n; i=2,\dots n,$$

de esta manera, a partir de S obtenemos L'. Continuamos expli cando con un ejemplo. Sea S la siguiente matriz

$$S = \begin{bmatrix} 56.97 & 38.72 & 45.97 & 52.51 \\ 38.72 & 32.14 & 34.39 & 42.35 \\ 45.97 & 34.39 & 50.09 & 43.76 \\ 52.51 & 42.35 & 43.76 & 61.06 \end{bmatrix} \qquad \text{———}(5)$$

$\ell_{11}=(56.97)^{1/2}=7.55$; $\ell_{12}=38.72/7.55=5.13$; $\ell_{13}=45.97/7.55=6.09$; $\ell_{14}=52.51/7.55=6.96$; $\ell_{22}=(32.14-(5.13)^2)^{1/2}=2.41$; $\ell_{22}=(32.14-5.13^2)^{1/2}=2.41$, $\ell_{23}=[34.39-(5.13)(6.09)]/2.41=1.30$; $\ell_{24}=42.35-(5.13)(6.96)]/2.41=2.76$; $\ell_{33}=[50.09-(6.09)^2-(1.30)^2]^{1/2}=3.36$; $\ell_{34}=[43.76-(6.09)(6.96)-(1.30)(2.76)]/3.36=-.66$; $\ell_{44}=(61.06-6.96-2.76-0.66^2)^{1/2}=2.15$, es decir en resumen tendremos

$$L' = \begin{bmatrix} 7.55 & 5.13 & 6.09 & 6.96 \\ 0 & 2.41 & 1.30 & 2.76 \\ 0 & 0 & 3.36 & -.66 \\ 0 & 0 & 0 & 2.15 \end{bmatrix} \qquad \text{———}(6)$$

Supóngase que el vector de medias es

$$\hat{\mu}'=(1.56, 1.35, 1.55, 1.02, \hat{\mu}_5) \qquad \text{———}(7)$$

que corresponden a cuatro tratamientos esperimentales y un control, donde el primer tratamiento, $\hat{\mu}_1$, es de interés primario. Suponga que se utilizó un diseño de bloques al azar con 3 repeticiones. La variable de respuesta y_{ijk} corresponde a la i-ésima unidad de medición al i-ésimo tratamiento y a la k-ésima repetición; i=1,...,15; j=1,2,...,5; k=1, 2,3. Los datos en encontrados se han dado en (5),(6) y (7)

Si, por ejemplo, deseamos comparar μ_1 v.s. μ_3 tendremos

$$\mu_1 - \mu_3 \in \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_3 \pm 2.5304$$

$$<=> \qquad \mu_1 - \mu_3 \in .0159 \pm 2.5304$$

9. Comparaciones Multiples para Diseños Desbalanceados (Gabriel, 1978)

Las extensiones a la prueba de Tukey, para casos de diseños desbalanceados, se describieron en el capítulo III. Los principales trabajos de estas extensiones fueron hechas por Hochberg (1974, 1975), Spjøtvoll y Stoline(1973). Tomando en cuenta estos trabajos, Gabriel (1978) elabora un método muy sencillo de comparaciones múltiples de medias para diseños desbalanceados, haciendo uso de la distribución del módulo máximo estudentizado, y solamente cuando los tamaños de muestra sean iguales se usa la distribución de rangos es tudentizados en cuyo caso resulta equivalente al método de Tukey, conocido como método T.

Considere las medias estimadas $\hat{\mu}_1,\ldots,\hat{\mu}_k$ de k muestras independiente de tamaños $n_1,\ldots,n_k$ respectivamente, provenientes de k distribuciones normales con la misma varianza. σ^2, desconocida. Sea s^2 igual a la SCE, independiente de σ^2, con ν g.l. Denotemos con $M^{\alpha}_{k^*;\nu}$ el cuantil superior α de una distribución de Módulo Máximo Estudentizado de $k^*=\binom{k}{2}$ poblaciones normales y ν g.l. (Ver tabla XIX tomada de Stoline y Ury, 1979), entonces los intervalos son de la forma

$$\hat{\mu}_i - M^{\alpha}_{k^*;\nu}\, S/\sqrt{2n} < \mu_i < \hat{\mu}_i + M^{\alpha}_{k^*;\nu}\, S/\sqrt{2n_i}\,. \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_}(1)$$

Si se desea hacer comparaciones por parejas, entonces los intervalos serán de la forma

$$(\hat{\mu}_i-\hat{\mu}_j)-M^{\alpha}_{k^*;\nu}\, S/(\sqrt{2n_i}+\sqrt{2n_j}\,) < \mu_i-\mu_j < (\hat{\mu}_i-\mu_j)+$$

$$+\, M^{a}_{k^*;\nu}\, S/(\sqrt{2n_i}+\sqrt{2n_j}\,) \qquad \text{\_\_\_\_}(2)$$

Para hacer inferencias sobre contrastes en general, note que cualquier contraste es una diferencia entre dos funciones lineales de las μ(s) con pesos positivos (se sigue la misma notación que la usada en la prueba de Tukey, Capítulo I), es decir

$$\sum_{1}^{k} C_i\mu_i = \sum_{C_i>0} C_i\mu_i - \sum_{C_{i'}<0} |C_{i'}|\ \mu_{i'} \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}(3)$$

Con probabilidad $1-\alpha$ se tiene:

$$\sum_{C_i>} C_i\mu_i - \sum_{C_{i'}<0} |C_{i'}|\mu_{i'} \in \sum_{C_i>0} C_i\hat{\mu}_i - \sum_{C_{i'}<0} |C_{i'}|\hat{\mu}_{i'} \pm$$

$$M^{\alpha}_{k^*,\nu}\ S \left[\sum_{C_i>0} |C_i|/(2n_i)^{1/2} + \sum_{C_{i'}<0} |C_{i'}|/(2n_{i'})^{1/2}\right]$$

usando la expresión (3) obtenemos

$$\sum_{1}^{k} C_i\mu_i \in \sum_{1}^{n} C_i\ \hat{\mu}_i \pm M^{\alpha}_{k^*,\nu}\ S \left[\sum_{1}^{k} |C_i|/(2n_i)^{1/2}\right] \text{\_\_\_\_}(4)$$

Las diferencias dos a dos se tratan como un caso especial de la expresión (4) para $C_1=1$, $C_2=-1$ y $C_i=0$ para $i\geq 3$.

UN EJEMPLO

Para ilustrar este método considere los siguientes datos de las tasas estronio/calcio, en logaritmos, observadas en huesos humanos de varios continentes.

Continente	Europa	Norte Amer.	Amer. del sur	Asia Oriental
i	1	2	3	5
n_i	56	61	100	53
$\hat{\mu}_i$	-1.3571	.4918	1.5900	2.0566

donde el error estándar estimado es S=2,699 con ν=266 g.l. Para una α=.01 la tabla XIX se tiene $M^{.01}_{4^*,266}$ = 2.392. Usando los intervalos (1) obtenemos

$$-1.967=-1.3571-(2.392)(2.699)/\sqrt{2(56)} < \mu_1 < -1.3571+$$

$$(2.392)(2.699)/\sqrt{2(56)} = -.747$$

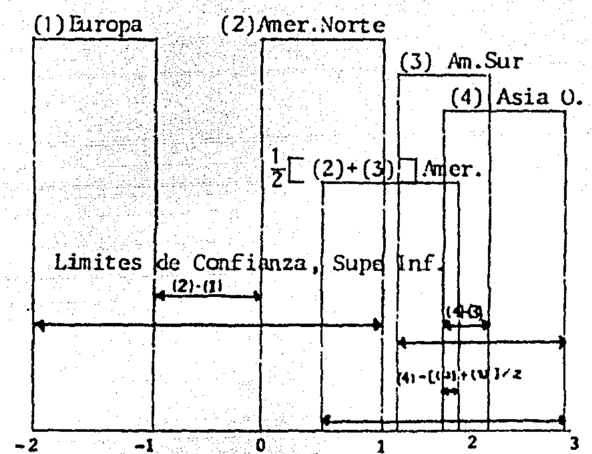
Análogamente

$$-.093 < \mu_2 < 1.076$$

$$1.134 < \mu_3 < 2.046$$

$$1.429 < \mu_4 < 2.684$$

usando estos intervalos obtenemos la siguiente gráfica



Usando la expresión (2) obtenemos

$$.654 = -.093-(-.747) \leq \mu_2 - \mu_1 \leq 1.076-(-1.967) = 3.043$$

estos límites están representados en la parte inferior de la gráfica (representados con una fecha que parte del límite superior de [1] al límite inferior de [2] para la cota inferior; y del límite inferior de [1] al límite superior de [2] para la cota superior). De manera análoga

$$-0.617 = 1.429-2.046 \leq \mu_4 - \mu_3 \leq 2.684 - 1.134 = 1.550 \quad \text{\_\_(5)}$$

cuyas respectivas flechas se muestran en la gráfica.

Para lograr un contraste con tres tratamientos, consideremos la diferencia entre Asia Oriental y el promedio de America del Norte con America del sur; es decir, $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{1}{2}$, $C_3 = -\frac{1}{2}$, $C_4 = 1$.

$$\sum_1^4 C_i \hat{\mu}_i = (0)(-1.3571) - \frac{1}{2}(.4918) - \frac{1}{2}(1.59) + 1(2.0566) = 1.016$$

$$M^{.01}_{4,16}\, S\left[\sum_1^k |C_i|/(2n_i)^{1/2}\right] = (2.392)(2.699)\left[.5/\sqrt{2(61)} + \ldots + 1/\sqrt{2(53)}\right] = 1.148$$

por lo que tendremos

$$-.132 = 1.016 - 1.148 \leq \mu_4 - (\mu_3 + \mu_2)/2 \leq 1.016 + 1.148 = 2.163$$

estos intervalos se encuentran graficados en la parte inferior.

Usando las comparaciones dos a dos concluimos, de la expresión (5), que todos los grupos son distintos excepto los últimos dos i.e. América del Sur y Asia Oriental

10. Comparaciones Multiples Mediante la Construccion de Zonas de Indiferencia. (Reading, 1975).

En realidad las pruebas de significancia aportan poca o nula información: si se tienen dos medias de tratamientos po demos declararlas distintas al escoger un tamaño de muestra suficientemente grande; en este caso muchos investigadores piensan que tal significancia tiene alguna importancia práctica. Sin embargo no sucede así; puede existir cierta discrepancia entre las medias de dos tratamientos y no obstante éstas pueden ser estadísticamente iguales. Reading (1975) desarrolla una prueba de comparaciones múltiples de parejas medias, haciendo uso de la construcción de zonas de indiferencia. El experimentador especifica tres cantidades: P^* (la probabilidad de que todas las decisiones sobre pares de medias, sean correctas), δ^* (la cantidad más pequeña para que el investigador declare a las medias como distintas) y δ_* (la cantidad más grande para que el investigador declare a las medias como iguales). El intervalo (δ_*, δ^*) es conocido como zona de indiferencia. Una vez determinadas estas tres cantidades, Reading proporciona las tablas para el tamaño de muestra necesario y los valores críticos que debe exceder la diferencia de dos medias de tratamientos, para que sean declaradas distintas.

Supóngase que se tienen k poblaciones; las observaciones de la k-ésima población se suponen independientes y distribuidas normalmente, con media desconocida μ_i y varianza conocida σ^2. (Esta prueba tiene la desventaja de que σ^2 debe ser conocida).

Definimos $\delta_{ij} = \mu_j - \mu_i \geq 0$ para $i<j$, donde $\mu_j \geq \mu_i$.

El experimentador fija de antemano los parámetros P^*, δ^* y δ^*, descritos con anterioridad. Note que $\delta_* < \delta^*$ y si dos medias difieren por cierta cantidad a la longitud del intervalo (δ_*, δ^*), entonces debe declararse que las dos medias son -- significativas.

Una vez que el experimentador a elegido los tres parámetros arriba especificados, se calcula $\delta\delta^* = \delta_*/\delta^*$ para encontrar, en la tabla XX, tomada de Reading (1975), el tamaño de muestra n y el valor crítico, C. De esta manera se toman las n observaciones de cada una de las k poblaciones y se -- calculan las medias muestrales $\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_k$. Si $Y_{ij} = \hat{\mu}_j - \hat{\mu}_i$, $i<j$, se comparan todas las Y_{ij} contra el valor crítico C, $(\delta_* < C < \delta^*)$. La pareja μ_i, μ_j se declara igual (o cercana) si $|Y_{ij}| \leq c$ o $Y_{ij} < -c$. Se toma una decisión correcta si para toda $|\mu_j - \mu_i| \leq \delta_*$ se declara "cercana" y toda $|\mu_j - \mu_i| \geq \delta^*$ se declara "lejana" con su signo respectivo. De esta manera si $\mu_j - \mu_i > \delta^*$, entonces $Y_{ij} < -c$ dan como resultado una decisión correcta.

La manera de usar la tabla XX, tomada de Reading, es la siguiente: Para una k dada escogemos los valores δ^*, δ_* y P^* Calcular $\delta\delta^* = \delta_*/\delta^*$ y se utiliza esta valor para entrar a la tabla XX en la columna adecuada ($P^* = .95$ ó $P^* = .99$), de esta manera obtenemos n_o y Co. Entonces calculamos finalmente - $n = [n_o\sigma^2/(\delta^*)^2] + 1$, donde $[n_o\sigma^2/(\delta^*)^2]$ denota el mayor entero en $n_o\sigma^2/(\delta^*)^2$, y $C = C_o\delta^*$.

Por ejemplo supóngase que se tienen tres poblaciones a comparar con varianza común $\sigma^2=2$. Dos medias de poblaciones se consideran distintas si éstas difieren en más de 3 unidades y se consideran iguales si la diferencia no es mayor -- que .3 unidades. Por otro lado $P^*=.99$, así tendremos $\delta^*=3$, $\delta_*=.3$ y $k=3$. Por lo que $\delta\delta^*=.3/3=.1$ y para $k=3$ en la tabla- XXb de Reading en la columna $p^*=.99$ y $\delta\delta^*=.1$ tenemos que $n_o=$ $=71.16$ y $C_o=.537$ por lo que el tamaño de muestra adecuado es $n=[71.16(2)/3^2]+1 = [15.9] + 1 = 15+1=16$ y $C=(.537)(3)=1.61$.

Si las medias muestrales del experimento fueran 10.37, 11.21 y 13.04, entonces

$$\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1 = 11.21-10.37 = .84 < 1.61 = c$$

$$\hat{\mu}_3 - \hat{\mu}_1 = 13.04-10.37 = 2.67 > 1.61 = c$$

$$\hat{\mu}_3 - \hat{\mu}_2 = 13.04-11.21 = 1.83 > 1.61 = c,$$

por lo que las poblaciones 1 y 2 son iguales, en tanto 3 con 1 y 3 con 2 son distintas.

Debe subrayarse que el procedimiento anterior es válido si σ^2 es conocida. Si σ^2 es desconocida puede utilizarse su estimador puede seguirse el proceso ya descrito, pero la --- prueba pierde potencia; lo que se sugiere en este último caso es determinar una cota superior para σ^2. Otro hecho que debe notarse es que Reading solamente calculó tablas para -- $k=2,3$ y 4; sin embargo el autor proporciona un método para - calcular los cuantiles necesarios n_o y C_o, para $k\geq 5$.

En el caso de que las poblaciones Tengan varianzas desiguales, pero conocidas el autor, basado en Bechhofer (1954), propone el siguiente procedimiento: Sea σ_i^2 la varianza de la población i-ésima de tal manera que $\sigma_i^2 = \alpha_i\ \sigma^2$ para $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$ y σ conocida. El método consiste en elegir los tamaños de muestra adecuados para que las varianzas de las medias muestrales sean iguales; esto es, escoger n_i de tal manera que

$$\sigma_i^2\ /n_i = \sigma_2^2/n_2 = \ldots = \sigma_k^2/n_k,$$

el procedimiento descrito con anterioridad se puede retomar, para k poblaciones con varianza σ^2 conocida y constante. Si n' es el tamaño de muestra para cada población, entonces el tamaño total de muestra es n=kn'. Entonces el conjunto

$$\sigma^2/n' = \sigma_i^2/n_i = (\alpha_i/n_i)\ \sigma^2$$

por lo que n_i se elige de tal manera que

$$n_i = [\alpha_i\ n_i] + 1$$

donde $[\alpha_i\ n_i]$ es el mayor entero menor o igual que $\alpha_i n_i$. El autor afirma que esta variante del método original, es menos robusta, por lo que no la recomienda ampliamente.

11. Comparaciones Multiples en Diseños con Efectos Fijos y Aleatorios (Harville, 1976).

Los modelos que involucran factores fijos y aleatorios son muy frecuentes en problemas agrícolas o biológicos. En estos casos generalmente se tiene interés en comparar los efectos, fijos y/o aleatorios. La mayoría de las pruebas - de comparaciones múltiples de medias, están pensadas para - contrastar efectos sin importar si éstos son fijos o aleatorios; Harville (1976) construye un procedimiento para comparar efectos fijos o aleatorios, bajo la suposición de que - los componentes de varianzas son conocidos aunque los verdaderos valores de los componentes de varianza son desconocidos se pueden utilizar sus estimaciones.

Considere el modelo

$$Y = X\alpha + Zb + e$$

dónde Y es un vector, de orden nx1, de variables aleatorias; X y Z son las matrices diseño de dimensiones nxp y nxq respectivamente; α es el vector px1 de efectos fijos; b es el vector qx1 de efectos aleatorios; e es el vector nx1 de -- errores. Por otro lado se tiene $E(b)=E(e)=0$ y $cov(b,e)=0$. Se supone además que $var(b)=\sigma^2 D$ y $var(e)=\sigma^2 R$, donde σ^2 es una constante desconocida $\sigma^2>o$, mientras que D y R son matrices no singulares conocidas. Hagamos que $p^*=$ rango (X).

Puesto que el vector b es de efectos aleatorios, denotemos por β al vector muestral obtenido. Hagamos que $\tau = \Lambda_1'\alpha + \Lambda_2'\beta$, donde Λ_1 y Λ_2 son dos matrices de orden pxm y qxm respectivamente, para m combinaciones lineales independientes de los efectos fijos y observaciones de los efectos aleatorios. Se supone que $\Lambda_1' = A'X$ para alguna matriz A, de dimensiones nxm, de tal manera que $\Lambda_1'\alpha$ sea estimable. El estimador propuesto es $\hat{\tau}=\Lambda_1'\hat{\alpha}+\Lambda_2'\hat{\beta}$ donde $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ comprenden cualquier solución a las ecuaciones normales extendidas

$$\begin{bmatrix} X'R^{-1}X & X'R^{-1}Z \\ Z'R^{-1}X & D^{-1}+Z'R^{-1}Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'R^{-1}Y \\ Z'R^{-1}Y \end{bmatrix} . \qquad \text{\_\_(1)}$$

Por otro lado el estimador insesgado de σ^2 es

$$\sigma^2 = (Y-X\hat{\alpha})'(R+XDZ')^{-1}(Y-X\hat{\alpha}) \; / \; (n-p^*).$$

Haciendo $C=\Lambda'G\Lambda$, donde $\Lambda'=(\Lambda_1',\Lambda_2')$ y G la inversa generalizada de la matriz coeficiente en (1), tendremos que $\text{var}(\hat{\tau}-t)=$ $\sigma^2 C$, para $\hat{\tau}=\Lambda_1'\hat{\alpha}+\Lambda_2'\tilde{\beta}$ y $t = \Lambda_1'\alpha + \Lambda_2'b$.

Puesto que b y e tienen la distribución normal multivariada, entonces $(\hat{\tau}-t)$ también tendrán distribución normal - multivariada. Luego entonces

$$(\hat{\tau}-t)'C^{-1}(\hat{\tau}-t)/\sigma^2 \sim \chi^2_m$$

y

$$(n - p^*)\ \hat{\sigma}^2 \ / \ \sigma^2 \sim \chi^2_{n-p^*},$$

puesto que $(\hat{\tau}-t)$ y $(Y-x\hat{\alpha})$ son independientes, entonces

$$(\tau-t)'C^{-1}(\hat{\tau}-t)/m\ \hat{\sigma}^2 \sim F^{\alpha}_{m,n-p^*};$$

por lo tanto los intervalos de confianza están determinados por

$$(\hat{\tau}-t)'\ C^{-1}(\hat{\tau}-t) \leq m\ \hat{\sigma}^2\ F^{\alpha}_{m,n-p^*}$$

donde $F^{\alpha}_{m,n-p^*}$ es el cuantil con un nivel de significancia $\alpha \times 100\%$ y con $m,n-p^*$ grados de libertad, de una distribución F.

APENDICE

Tabla I. Cuantiles de la Distribución de Rangos Estudentizados $q^{\alpha}_{r,\nu}$.
(Cap. I, secc. 2 y 3, Cap. III, secc 1.2, para referencias)

$\alpha = .05$

$\nu \backslash r$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	17.97	26.98	32.82	37.08	40.41	43.12	45.40	47.36	49.07
2	6.085	8.331	9.798	10.88	11.74	12.44	13.03	13.54	13.99
3	4.501	5.910	6.825	7.502	8.037	8.478	8.853	9.177	9.462
4	3.927	5.040	5.757	6.287	6.707	7.053	7.347	7.602	7.826
5	3.635	4.602	5.218	5.673	6.033	6.330	6.582	6.802	6.995
6	3.461	4.339	4.896	5.305	5.628	5.895	6.122	6.319	6.493
7	3.344	4.165	4.681	5.060	5.359	5.606	5.815	5.998	6.158
8	3.261	4.041	4.529	4.886	5.167	5.399	5.597	5.767	5.918
9	3.199	3.949	4.415	4.756	5.024	5.244	5.432	5.595	5.739
10	3.151	3.877	4.327	4.654	4.912	5.124	5.305	5.461	5.599
11	3.113	3.820	4.256	4.574	4.823	5.028	5.202	5.353	5.487
12	3.082	3.773	4.199	4.508	4.751	4.950	5.119	5.265	5.395
13	3.055	3.735	4.151	4.453	4.690	4.885	5.049	5.192	5.318
14	3.033	3.702	4.111	4.407	4.639	4.829	4.990	5.131	5.254
15	3.014	3.674	4.076	4.367	4.595	4.782	4.940	5.077	5.198
16	2.998	3.649	4.046	4.333	4.557	4.741	4.897	5.031	5.150
17	2.984	3.628	4.020	4.303	4.524	4.705	4.858	4.991	5.108
18	2.971	3.609	3.997	4.277	4.495	4.673	4.824	4.956	5.071
19	2.960	3.593	3.977	4.253	4.469	4.645	4.794	4.924	5.038
20	2.950	3.578	3.958	4.232	4.445	4.620	4.768	4.896	5.008
24	2.919	3.532	3.901	4.166	4.373	4.541	4.684	4.807	4.915
30	2.888	3.486	3.845	4.102	4.302	4.464	4.602	4.720	4.824
40	2.858	3.442	3.791	4.039	4.232	4.389	4.521	4.635	4.735
60	2.829	3.399	3.737	3.977	4.163	4.314	4.441	4.550	4.646
120	2.800	3.356	3.685	3.917	4.096	4.241	4.363	4.468	4.560
∞	2.772	3.314	3.633	3.858	4.030	4.170	4.286	4.387	4.474

$\nu \backslash r$	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	50.59	51.96	53.20	54.33	55.36	56.32	57.22	58.04	58.83
2	14.39	14.75	15.08	15.38	15.65	15.91	16.14	16.37	16.57
3	9.717	9.946	10.15	10.35	10.53	10.69	10.84	10.98	11.11
4	8.027	8.208	8.373	8.525	8.664	8.794	8.914	9.028	9.134
5	7.168	7.324	7.466	7.596	7.717	7.828	7.932	8.030	8.122
6	6.649	6.789	6.917	7.034	7.143	7.244	7.338	7.426	7.508
7	6.302	6.431	6.550	6.658	6.759	6.852	6.939	7.020	7.097
8	6.054	6.175	6.287	6.389	6.483	6.571	6.653	6.729	6.802
9	5.867	5.983	6.089	6.186	6.276	6.359	6.437	6.510	6.579
10	5.722	5.833	5.935	6.028	6.114	6.194	6.269	6.339	6.405
11	5.605	5.713	5.811	5.901	5.984	6.062	6.134	6.202	6.265
12	5.511	5.615	5.710	5.798	5.878	5.953	6.023	6.089	6.151
13	5.431	5.533	5.625	5.711	5.789	5.862	5.931	5.995	6.055
14	5.364	5.463	5.554	5.637	5.714	5.786	5.852	5.915	5.974
15	5.306	5.404	5.493	5.574	5.649	5.720	5.785	5.846	5.904
16	5.256	5.352	5.439	5.520	5.593	5.662	5.727	5.786	5.843
17	5.212	5.307	5.392	5.471	5.544	5.612	5.675	5.734	5.790
18	5.174	5.267	5.352	5.429	5.501	5.568	5.630	5.688	5.743
19	5.140	5.231	5.315	5.391	5.462	5.528	5.589	5.647	5.701
20	5.108	5.199	5.282	5.357	5.427	5.493	5.553	5.610	5.663
24	5.012	5.099	5.179	5.251	5.319	5.381	5.439	5.494	5.545
30	4.917	5.001	5.077	5.147	5.211	5.271	5.327	5.379	5.429
40	4.824	4.904	4.977	5.044	5.106	5.163	5.216	5.266	5.313
60	4.732	4.808	4.878	4.942	5.001	5.056	5.107	5.154	5.199
120	4.641	4.714	4.781	4.842	4.898	4.950	4.998	5.044	5.086
∞	4.552	4.622	4.685	4.743	4.796	4.845	4.891	4.934	4.974

$\alpha = .01$

$\nu \backslash r$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	90.03	135.0	164.3	185.6	202.2	215.8	227.2	237.0	245.6
2	14.04	19.02	22.29	24.72	26.63	28.20	29.53	30.68	31.69
3	8.261	10.62	12.17	13.33	14.24	15.00	15.64	16.20	16.69
4	6.512	8.120	9.173	9.958	10.58	11.10	11.55	11.93	12.27
5	5.702	6.976	7.804	8.421	8.913	9.321	9.669	9.972	10.24
6	5.243	6.331	7.033	7.556	7.973	8.318	8.613	8.869	9.097
7	4.949	5.919	6.543	7.005	7.373	7.679	7.939	8.166	8.368
8	4.746	5.635	6.204	6.625	6.960	7.237	7.474	7.681	7.863
9	4.596	5.428	5.957	6.348	6.658	6.915	7.134	7.325	7.495
10	4.482	5.270	5.769	6.136	6.428	6.669	6.875	7.055	7.213
11	4.392	5.146	5.621	5.970	6.247	6.476	6.672	6.842	6.992
12	4.320	5.046	5.502	5.836	6.101	6.321	6.507	6.670	6.814
13	4.260	4.964	5.404	5.727	5.981	6.192	6.372	6.528	6.667
14	4.210	4.895	5.322	5.634	5.881	6.085	6.258	6.409	6.543
15	4.168	4.836	5.252	5.556	5.796	5.994	6.162	6.309	6.439
16	4.131	4.786	5.192	5.489	5.722	5.915	6.079	6.222	6.349
17	4.099	4.742	5.140	5.430	5.659	5.847	6.007	6.147	6.270
18	4.071	4.703	5.094	5.379	5.603	5.788	5.944	6.081	6.201
19	4.046	4.670	5.054	5.334	5.554	5.735	5.889	6.022	6.141
20	4.024	4.639	5.018	5.294	5.510	5.688	5.839	5.970	6.087
24	3.956	4.546	4.907	5.168	5.374	5.542	5.685	5.809	5.919
30	3.889	4.455	4.799	5.048	5.242	5.401	5.536	5.653	5.756
40	3.825	4.367	4.696	4.931	5.114	5.265	5.392	5.502	5.599
60	3.762	4.282	4.595	4.818	4.991	5.133	5.253	5.356	5.447
120	3.702	4.200	4.497	4.709	4.872	5.005	5.118	5.214	5.299
∞	3.643	4.120	4.403	4.603	4.757	4.882	4.987	5.078	5.157

$\nu \backslash r$	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	253.2	260.0	266.2	271.8	277.0	281.8	286.3	290.4	294.3
2	32.59	33.40	34.13	34.81	35.43	36.00	36.53	37.03	37.50
3	17.13	17.53	17.89	18.22	18.52	18.81	19.07	19.32	19.55
4	12.57	12.84	13.09	13.32	13.53	13.73	13.91	14.08	14.24
5	10.48	10.70	10.89	11.08	11.24	11.40	11.55	11.68	11.81
6	9.301	9.485	9.653	9.808	9.951	10.08	10.21	10.32	10.43
7	8.548	8.711	8.860	8.997	9.124	9.242	9.353	9.456	9.554
8	8.027	8.176	8.312	8.436	8.552	8.659	8.760	8.854	8.943
9	7.647	7.784	7.910	8.025	8.132	8.232	8.325	8.412	8.495
10	7.356	7.485	7.603	7.712	7.812	7.906	7.993	8.076	8.153
11	7.128	7.250	7.362	7.465	7.560	7.649	7.732	7.809	7.883
12	6.943	7.060	7.167	7.265	7.356	7.441	7.520	7.594	7.665
13	6.791	6.903	7.006	7.101	7.188	7.269	7.345	7.417	7.485
14	6.664	6.772	6.871	6.962	7.047	7.126	7.199	7.268	7.333
15	6.555	6.660	6.757	6.845	6.927	7.003	7.074	7.142	7.204
16	6.462	6.564	6.658	6.744	6.823	6.898	6.967	7.032	7.093
17	6.381	6.480	6.572	6.656	6.734	6.806	6.873	6.937	6.997
18	6.310	6.407	6.497	6.579	6.655	6.725	6.792	6.854	6.912
19	6.247	6.342	6.430	6.510	6.585	6.654	6.719	6.780	6.837
20	6.191	6.285	6.371	6.450	6.523	6.591	6.654	6.714	6.771
24	6.017	6.106	6.186	6.261	6.330	6.394	6.453	6.510	6.563
30	5.849	5.932	6.008	6.078	6.143	6.203	6.259	6.311	6.361
40	5.686	5.764	5.835	5.900	5.961	6.017	6.069	6.119	6.165
60	5.528	5.601	5.667	5.728	5.785	5.837	5.886	5.931	5.974
120	5.375	5.443	5.505	5.562	5.614	5.662	5.708	5.750	5.790
∞	5.227	5.290	5.348	5.400	5.448	5.493	5.535	5.574	5.611

Tabla I. Cuantiles de la Distribución de Rangos Estudentizados $q^{\alpha}_{r,\nu}$
(Cap. I, secc. 2 y 3, Cap. III, secc 1.2, para referencias)

ν \ r	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	17.97	26.98	32.82	37.08	40.41	43.12	45.40	47.36	49.07
2	6.085	8.331	9.798	10.88	11.74	12.44	13.03	13.54	13.99
3	4.501	5.910	6.825	7.502	8.037	8.478	8.853	9.177	9.462
4	3.927	5.040	5.757	6.287	6.707	7.053	7.347	7.602	7.826
5	3.635	4.602	5.218	5.673	6.033	6.330	6.582	6.802	6.995
6	3.461	4.339	4.896	5.305	5.628	5.895	6.122	6.319	6.493
7	3.344	4.165	4.681	5.060	5.359	5.606	5.815	5.998	6.158
8	3.261	4.041	4.529	4.886	5.167	5.399	5.597	5.767	5.918
9	3.199	3.949	4.415	4.756	5.024	5.244	5.432	5.595	5.739
10	3.151	3.877	4.327	4.654	4.912	5.124	5.305	5.461	5.599
11	3.113	3.820	4.256	4.574	4.823	5.028	5.202	5.353	5.487
12	3.082	3.773	4.199	4.508	4.751	4.950	5.119	5.265	5.395
13	3.055	3.735	4.151	4.453	4.690	4.885	5.049	5.192	5.318
14	3.033	3.702	4.111	4.407	4.639	4.829	4.990	5.131	5.254
15	3.014	3.674	4.076	4.367	4.595	4.782	4.940	5.077	5.198
16	2.998	3.649	4.046	4.333	4.557	4.741	4.897	5.031	5.150
17	2.984	3.628	4.020	4.303	4.524	4.705	4.858	4.991	5.108
18	2.971	3.609	3.997	4.276	4.494	4.673	4.824	4.955	5.071
19	2.960	3.593	3.977	4.253	4.468	4.645	4.794	4.924	5.038
20	2.950	3.578	3.958	4.232	4.445	4.620	4.768	4.895	5.008
24	2.919	3.532	3.901	4.166	4.373	4.541	4.684	4.807	4.915
30	2.888	3.486	3.845	4.102	4.302	4.464	4.602	4.720	4.824
40	2.858	3.442	3.791	4.039	4.232	4.389	4.521	4.635	4.735
60	2.829	3.399	3.737	3.977	4.163	4.314	4.441	4.550	4.646
120	2.800	3.356	3.685	3.917	4.096	4.241	4.363	4.468	4.560
∞	2.772	3.314	3.633	3.858	4.030	4.170	4.286	4.387	4.474

ν \ r	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	50.59	51.96	53.20	54.33	55.36	56.32	57.22	58.04	58.83
2	14.39	14.75	15.08	15.38	15.65	15.91	16.14	16.37	16.57
3	9.717	9.946	10.15	10.35	10.53	10.69	10.84	10.98	11.11
4	8.027	8.208	8.373	8.525	8.664	8.794	8.914	9.028	9.134
5	7.168	7.324	7.466	7.596	7.717	7.828	7.932	8.030	8.122
6	6.649	6.789	6.917	7.034	7.143	7.244	7.338	7.426	7.508
7	6.302	6.431	6.550	6.658	6.759	6.852	6.939	7.020	7.097
8	6.054	6.175	6.287	6.389	6.483	6.571	6.653	6.729	6.802
9	5.867	5.983	6.089	6.186	6.276	6.359	6.437	6.510	6.579
10	5.722	5.833	5.935	6.028	6.114	6.194	6.269	6.339	6.405
11	5.605	5.713	5.811	5.901	5.984	6.062	6.134	6.202	6.265
12	5.511	5.615	5.710	5.798	5.878	5.953	6.023	6.089	6.151
13	5.431	5.533	5.625	5.711	5.789	5.862	5.931	5.995	6.055
14	5.364	5.463	5.554	5.637	5.714	5.786	5.852	5.915	5.974
15	5.306	5.404	5.493	5.574	5.649	5.720	5.785	5.846	5.904
16	5.256	5.352	5.439	5.520	5.593	5.662	5.727	5.786	5.843
17	5.212	5.307	5.392	5.471	5.544	5.612	5.675	5.734	5.790
18	5.174	5.267	5.352	5.429	5.501	5.568	5.630	5.688	5.743
19	5.140	5.231	5.315	5.391	5.462	5.528	5.589	5.647	5.701
20	5.108	5.199	5.282	5.357	5.427	5.493	5.553	5.610	5.663
24	5.012	5.099	5.179	5.251	5.319	5.381	5.439	5.494	5.545
30	4.917	5.001	5.077	5.147	5.211	5.271	5.327	5.379	5.429
40	4.824	4.904	4.977	5.044	5.106	5.163	5.216	5.266	5.313
60	4.732	4.808	4.878	4.942	5.001	5.056	5.107	5.154	5.199
120	4.641	4.714	4.781	4.842	4.898	4.950	4.998	5.044	5.086
∞	4.552	4.622	4.685	4.743	4.796	4.845	4.891	4.934	4.974

ν \ r	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	90.03	135.0	164.3	185.6	202.2	215.8	227.2	237.0	245.6
2	14.04	19.02	22.29	24.72	26.63	28.20	29.53	30.68	31.69
3	8.261	10.62	12.17	13.33	14.24	15.00	15.64	16.20	16.69
4	6.512	8.120	9.173	9.958	10.58	11.10	11.55	11.93	12.27
5	5.702	6.976	7.804	8.421	8.913	9.321	9.669	9.972	10.24
6	5.243	6.331	7.033	7.556	7.973	8.318	8.613	8.869	9.097
7	4.949	5.919	6.543	7.005	7.373	7.679	7.939	8.166	8.368
8	4.746	5.635	6.204	6.625	6.960	7.237	7.474	7.681	7.863
9	4.596	5.428	5.957	6.348	6.658	6.915	7.134	7.325	7.495
10	4.482	5.270	5.769	6.136	6.428	6.669	6.875	7.055	7.213
11	4.392	5.146	5.621	5.970	6.247	6.476	6.672	6.842	6.992
12	4.320	5.046	5.502	5.836	6.101	6.321	6.507	6.670	6.814
13	4.260	4.964	5.404	5.727	5.981	6.192	6.372	6.528	6.667
14	4.210	4.895	5.322	5.634	5.881	6.085	6.258	6.409	6.543
15	4.168	4.836	5.252	5.556	5.796	5.994	6.162	6.309	6.439
16	4.131	4.786	5.192	5.489	5.722	5.915	6.079	6.222	6.349
17	4.099	4.742	5.140	5.430	5.659	5.847	6.007	6.147	6.270
18	4.071	4.703	5.094	5.379	5.603	5.787	5.944	6.081	6.201
19	4.046	4.670	5.054	5.334	5.554	5.735	5.889	6.022	6.141
20	4.024	4.639	5.018	5.294	5.510	5.688	5.839	5.970	6.087
24	3.956	4.546	4.907	5.168	5.374	5.542	5.685	5.809	5.919
30	3.889	4.455	4.799	5.048	5.242	5.401	5.536	5.653	5.756
40	3.825	4.367	4.696	4.931	5.114	5.265	5.392	5.502	5.599
60	3.762	4.282	4.595	4.818	4.991	5.133	5.253	5.356	5.447
120	3.702	4.200	4.497	4.709	4.872	5.005	5.118	5.214	5.299
∞	3.643	4.120	4.403	4.603	4.757	4.882	4.987	5.078	5.157

ν \ r	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	253.2	260.0	266.2	271.8	277.0	281.8	286.3	290.4	294.3
2	32.59	33.40	34.13	34.81	35.43	36.00	36.53	37.03	37.50
3	17.13	17.53	17.89	18.22	18.52	18.81	19.07	19.32	19.55
4	12.57	12.84	13.09	13.32	13.53	13.73	13.91	14.08	14.24
5	10.48	10.70	10.89	11.08	11.24	11.40	11.55	11.68	11.81
6	9.301	9.485	9.653	9.808	9.951	10.08	10.21	10.32	10.43
7	8.548	8.711	8.860	8.997	9.124	9.242	9.353	9.456	9.554
8	8.027	8.176	8.312	8.436	8.552	8.659	8.760	8.854	8.943
9	7.647	7.784	7.910	8.025	8.132	8.232	8.325	8.412	8.495
10	7.356	7.485	7.603	7.712	7.812	7.906	7.993	8.076	8.153
11	7.128	7.250	7.362	7.465	7.560	7.649	7.732	7.809	7.883
12	6.943	7.060	7.167	7.265	7.356	7.441	7.520	7.594	7.665
13	6.791	6.903	7.006	7.101	7.188	7.269	7.345	7.417	7.485
14	6.664	6.772	6.871	6.962	7.047	7.126	7.199	7.268	7.333
15	6.555	6.660	6.757	6.845	6.927	7.003	7.074	7.142	7.204
16	6.462	6.564	6.658	6.744	6.823	6.898	6.967	7.032	7.093
17	6.381	6.480	6.572	6.656	6.734	6.806	6.873	6.937	6.997
18	6.310	6.407	6.497	6.579	6.655	6.725	6.792	6.854	6.912
19	6.247	6.342	6.430	6.510	6.585	6.654	6.719	6.780	6.837
20	6.191	6.285	6.371	6.450	6.523	6.591	6.654	6.714	6.771
24	6.017	6.106	6.186	6.261	6.330	6.394	6.453	6.510	6.563
30	5.849	5.932	6.008	6.078	6.143	6.203	6.259	6.311	6.361
40	5.686	5.764	5.835	5.900	5.961	6.017	6.069	6.119	6.165
60	5.528	5.601	5.667	5.728	5.785	5.837	5.886	5.931	5.974
120	5.375	5.443	5.505	5.562	5.614	5.662	5.708	5.750	5.790
∞	5.227	5.290	5.348	5.400	5.448	5.493	5.535	5.574	5.611

Tabla I. (Continuación)

$\alpha = .05$

ν \ r	20	22	24	26	28	30	32	34	36
1	59.56	60.91	62.12	63.22	64.23	65.15	66.01	66.81	67.56
2	16.77	17.13	17.45	17.75	18.02	18.27	18.50	18.72	18.92
3	11.24	11.47	11.68	11.87	12.05	12.21	12.36	12.50	12.63
4	9.233	9.418	9.584	9.736	9.875	10.00	10.12	10.23	10.34
5	8.208	8.368	8.512	8.643	8.764	8.875	8.979	9.075	9.165
6	7.587	7.730	7.861	7.979	8.088	8.189	8.283	8.370	8.452
7	7.170	7.303	7.423	7.533	7.634	7.728	7.814	7.895	7.972
8	6.870	6.995	7.107	7.212	7.307	7.395	7.477	7.554	7.625
9	6.644	6.763	6.871	6.970	7.061	7.145	7.222	7.295	7.363
10	6.467	6.582	6.685	6.781	6.868	6.948	7.023	7.093	7.159
11	6.326	6.436	6.536	6.628	6.712	6.790	6.863	6.930	6.994
12	6.209	6.317	6.414	6.503	6.585	6.660	6.731	6.796	6.858
13	6.112	6.217	6.312	6.398	6.478	6.551	6.620	6.684	6.744
14	6.029	6.132	6.224	6.309	6.387	6.459	6.526	6.588	6.647
15	5.958	6.059	6.149	6.233	6.309	6.379	6.445	6.506	6.564
16	5.897	5.995	6.084	6.166	6.241	6.310	6.374	6.434	6.491
17	5.842	5.940	6.027	6.107	6.181	6.249	6.313	6.372	6.427
18	5.794	5.890	5.977	6.055	6.128	6.195	6.258	6.316	6.371
19	5.752	5.846	5.932	6.009	6.081	6.147	6.209	6.266	6.321
20	5.714	5.807	5.891	5.968	6.039	6.104	6.165	6.222	6.275
24	5.594	5.683	5.764	5.838	5.906	5.968	6.027	6.081	6.132
30	5.475	5.561	5.638	5.709	5.774	5.833	5.889	5.941	5.990
40	5.358	5.439	5.513	5.581	5.642	5.700	5.753	5.803	5.849
60	5.241	5.319	5.389	5.453	5.512	5.566	5.617	5.664	5.708
120	5.126	5.200	5.266	5.327	5.382	5.434	5.481	5.526	5.568
∞	5.012	5.081	5.144	5.201	5.253	5.301	5.346	5.388	5.427

ν \ r	38	40	50	60	70	80	90	100
1	68.26	68.92	71.73	73.97	75.82	77.40	78.77	79.98
2	19.11	19.28	20.05	20.66	21.16	21.59	21.96	22.29
3	12.75	12.87	13.36	13.76	14.08	14.36	14.61	14.82
4	10.44	10.53	10.93	11.24	11.51	11.73	11.92	12.09
5	9.250	9.330	9.674	9.949	10.18	10.38	10.54	10.69
6	8.529	8.601	8.913	9.163	9.370	9.548	9.702	9.839
7	8.043	8.110	8.400	8.632	8.824	8.989	9.133	9.261
8	7.693	7.756	8.029	8.248	8.430	8.586	8.722	8.843
9	7.428	7.488	7.749	7.958	8.132	8.281	8.410	8.526
10	7.220	7.279	7.529	7.730	7.897	8.041	8.166	8.276
11	7.053	7.110	7.352	7.546	7.708	7.847	7.968	8.075
12	6.916	6.970	7.205	7.394	7.552	7.687	7.804	7.909
13	6.800	6.854	7.083	7.267	7.421	7.552	7.667	7.769
14	6.702	6.754	6.979	7.159	7.309	7.438	7.550	7.650
15	6.618	6.669	6.888	7.065	7.212	7.339	7.449	7.546
16	6.544	6.594	6.810	6.984	7.128	7.252	7.360	7.457
17	6.479	6.529	6.741	6.912	7.054	7.176	7.283	7.377
18	6.422	6.471	6.680	6.848	6.989	7.109	7.213	7.307
19	6.371	6.419	6.626	6.792	6.930	7.048	7.152	7.244
20	6.325	6.373	6.576	6.740	6.877	6.994	7.097	7.187
24	6.180	6.226	6.421	6.579	6.710	6.822	6.920	7.008
30	6.037	6.080	6.267	6.417	6.543	6.650	6.744	6.827
40	5.893	5.934	6.112	6.255	6.375	6.477	6.566	6.645
60	5.750	5.789	5.958	6.093	6.206	6.303	6.387	6.462
120	5.607	5.644	5.802	5.929	6.035	6.126	6.205	6.275
∞	5.463	5.498	5.646	5.764	5.863	5.947	6.020	6.085

$\alpha = .01$

ν \ r	20	22	24	26	28	30	32	34	36
1	298.0	304.7	310.8	316.3	321.3	326.0	330.3	334.3	338.0
2	37.95	38.76	39.49	40.15	40.76	41.32	41.84	42.33	42.78
3	19.77	20.17	20.53	20.86	21.16	21.44	21.70	21.95	22.17
4	14.40	14.68	14.93	15.16	15.37	15.57	15.75	15.92	16.08
5	11.93	12.16	12.36	12.54	12.71	12.87	13.02	13.15	13.28
6	10.54	10.73	10.91	11.06	11.21	11.34	11.47	11.58	11.69
7	9.646	9.815	9.970	10.11	10.24	10.36	10.47	10.58	10.67
8	9.027	9.182	9.322	9.450	9.569	9.678	9.779	9.874	9.964
9	8.573	8.717	8.847	8.966	9.075	9.177	9.271	9.360	9.443
10	8.226	8.361	8.483	8.595	8.698	8.794	8.883	8.966	9.044
11	7.952	8.080	8.196	8.303	8.400	8.491	8.575	8.654	8.728
12	7.731	7.853	7.964	8.066	8.159	8.246	8.327	8.402	8.473
13	7.548	7.665	7.772	7.870	7.960	8.043	8.121	8.193	8.262
14	7.395	7.508	7.611	7.705	7.792	7.873	7.948	8.018	8.084
15	7.264	7.374	7.474	7.566	7.650	7.728	7.800	7.869	7.932
16	7.152	7.258	7.356	7.445	7.527	7.602	7.673	7.739	7.802
17	7.053	7.157	7.253	7.340	7.420	7.493	7.563	7.627	7.687
18	6.968	7.069	7.163	7.247	7.325	7.398	7.465	7.528	7.587
19	6.891	6.990	7.082	7.166	7.242	7.313	7.379	7.440	7.498
20	6.823	6.920	7.011	7.092	7.168	7.237	7.302	7.362	7.419
24	6.612	6.703	6.789	6.865	6.936	7.001	7.062	7.119	7.173
30	6.407	6.494	6.572	6.644	6.710	6.772	6.828	6.881	6.932
40	6.209	6.289	6.362	6.429	6.490	6.547	6.600	6.650	6.697
60	6.015	6.090	6.158	6.220	6.277	6.330	6.378	6.424	6.467
120	5.827	5.897	5.959	6.016	6.069	6.117	6.162	6.204	6.244
∞	5.645	5.709	5.766	5.818	5.866	5.911	5.952	5.990	6.026

ν \ r	38	40	50	60	70	80	90	100
1	341.5	344.8	358.9	370.1	379.4	387.3	394.1	400.1
2	43.21	43.61	45.33	46.70	47.83	48.80	49.64	50.38
3	22.39	22.59	23.45	24.13	24.71	25.19	25.62	25.99
4	16.23	16.37	16.98	17.46	17.86	18.20	18.50	18.77
5	13.40	13.52	14.00	14.39	14.72	14.99	15.23	15.45
6	11.80	11.90	12.31	12.65	12.92	13.16	13.37	13.55
7	10.77	10.85	11.23	11.52	11.77	11.99	12.17	12.34
8	10.05	10.13	10.47	10.75	10.97	11.17	11.34	11.49
9	9.521	9.594	9.912	10.17	10.38	10.57	10.73	10.87
10	9.117	9.187	9.485	9.726	9.927	10.10	10.25	10.39
11	8.798	8.864	9.148	9.377	9.568	9.732	9.875	10.00
12	8.539	8.603	8.875	9.094	9.277	9.434	9.571	9.693
13	8.326	8.387	8.648	8.859	9.035	9.187	9.318	9.436
14	8.146	8.204	8.457	8.661	8.832	8.978	9.106	9.219
15	7.992	8.049	8.295	8.492	8.658	8.800	8.924	9.035
16	7.860	7.916	8.154	8.347	8.507	8.646	8.767	8.874
17	7.745	7.799	8.031	8.219	8.377	8.511	8.630	8.735
18	7.643	7.696	7.924	8.107	8.261	8.393	8.508	8.611
19	7.553	7.605	7.828	8.008	8.159	8.288	8.401	8.502
20	7.473	7.523	7.742	7.919	8.067	8.194	8.305	8.404
24	7.223	7.270	7.476	7.642	7.780	7.900	8.004	8.097
30	6.978	7.023	7.215	7.370	7.500	7.611	7.709	7.796
40	6.740	6.782	6.960	7.104	7.225	7.328	7.419	7.500
60	6.507	6.546	6.710	6.843	6.954	7.050	7.133	7.207
120	6.281	6.316	6.467	6.588	6.689	6.776	6.852	6.919
∞	6.060	6.092	6.228	6.338	6.429	6.507	6.575	6.636

Tabla II. Cuantiles de la Distribución de Rangos Múltiples,
Prueba de Duncan $q_{p,\nu}^{\alpha_p}$, $\alpha_p = 1-(1-\alpha)^{p-1}$

$\alpha = .05$

ν \ p	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97
2	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085
3	4.501	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516
4	3.927	4.013	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033
5	3.635	3.749	3.797	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814
6	3.461	3.587	3.649	3.680	3.694	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697
7	3.344	3.477	3.548	3.588	3.611	3.622	3.625	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626
8	3.261	3.399	3.475	3.521	3.549	3.566	3.575	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579
9	3.199	3.339	3.420	3.470	3.502	3.523	3.536	3.544	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547
10	3.151	3.293	3.376	3.430	3.465	3.489	3.505	3.516	3.522	3.525	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526
11	3.113	3.256	3.342	3.397	3.435	3.462	3.480	3.493	3.501	3.506	3.509	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510
12	3.082	3.225	3.313	3.370	3.410	3.439	3.459	3.474	3.484	3.491	3.496	3.498	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499
13	3.055	3.200	3.289	3.348	3.389	3.419	3.442	3.458	3.470	3.478	3.484	3.488	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490
14	3.033	3.178	3.268	3.329	3.372	3.403	3.426	3.444	3.457	3.467	3.474	3.479	3.482	3.484	3.484	3.484	3.484	3.484	3.484
15	3.014	3.160	3.250	3.312	3.356	3.389	3.413	3.432	3.446	3.457	3.465	3.471	3.476	3.478	3.480	3.481	3.481	3.481	3.481
16	2.998	3.144	3.235	3.298	3.343	3.376	3.402	3.422	3.437	3.449	3.458	3.465	3.470	3.473	3.477	3.478	3.478	3.478	3.478
17	2.984	3.130	3.222	3.285	3.331	3.366	3.392	3.412	3.429	3.441	3.451	3.459	3.465	3.469	3.473	3.475	3.476	3.476	3.476
18	2.971	3.118	3.210	3.274	3.321	3.356	3.383	3.405	3.421	3.435	3.445	3.454	3.460	3.465	3.470	3.472	3.474	3.474	3.474
19	2.960	3.107	3.199	3.264	3.311	3.347	3.375	3.397	3.415	3.429	3.440	3.449	3.456	3.462	3.467	3.470	3.472	3.473	3.474
20	2.950	3.097	3.190	3.255	3.303	3.339	3.368	3.391	3.409	3.424	3.436	3.445	3.453	3.459	3.464	3.467	3.470	3.472	3.473
24	2.919	3.066	3.160	3.226	3.276	3.315	3.345	3.370	3.390	3.406	3.420	3.432	3.441	3.449	3.456	3.461	3.465	3.469	3.471
30	2.888	3.035	3.131	3.199	3.250	3.290	3.322	3.349	3.371	3.389	3.405	3.418	3.430	3.439	3.447	3.454	3.460	3.466	3.470
40	2.858	3.006	3.102	3.171	3.224	3.266	3.300	3.328	3.352	3.373	3.390	3.405	3.418	3.429	3.439	3.448	3.456	3.463	3.469
60	2.829	2.976	3.073	3.143	3.198	3.241	3.277	3.307	3.333	3.355	3.374	3.391	3.406	3.419	3.431	3.442	3.451	3.460	3.467
120	2.800	2.947	3.045	3.116	3.172	3.217	3.254	3.287	3.314	3.337	3.359	3.377	3.394	3.409	3.423	3.435	3.446	3.457	3.466
∞	2.772	2.918	3.017	3.089	3.146	3.193	3.232	3.265	3.294	3.320	3.343	3.363	3.382	3.397	3.414	3.428	3.442	3.454	3.466

ν \ p	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	50	60	100
1	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97
2	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085
3	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516
4	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033
5	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814
6	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697
7	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626
8	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579
9	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547
10	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526
11	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510
12	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499
13	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490
14	3.484	3.484	3.484	3.484	3.484	3.484	3.484	3.484	3.484	3.484	3.484	3.484	3.484
15	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481
16	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478
17	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476
18	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474
19	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474
20	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474
24	3.475	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477
30	3.477	3.481	3.484	3.486	3.486	3.486	3.486	3.486	3.486	3.486	3.486	3.486	3.486
40	3.479	3.486	3.492	3.497	3.500	3.503	3.504	3.504	3.504	3.504	3.504	3.504	3.504
60	3.481	3.492	3.501	3.509	3.515	3.521	3.525	3.529	3.531	3.534	3.537	3.537	3.537
120	3.483	3.498	3.511	3.522	3.532	3.541	3.548	3.555	3.561	3.566	3.583	3.596	3.600
∞	3.486	3.505	3.522	3.536	3.550	3.562	3.574	3.584	3.594	3.603	3.640	3.668	[illegible]

(Referencias: Cap. I, secc. 5, Cap. III, secc. 1.1, Cap. III, secc 3, 8 y 9)

$\alpha = .01$

ν \ p	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03
2	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04
3	8.261	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321
4	6.512	6.677	6.740	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756
5	5.702	5.893	5.989	6.040	6.065	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074
6	5.243	5.439	5.549	5.614	5.655	5.680	5.694	5.701	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703
7	4.949	5.145	5.260	5.334	5.383	5.416	5.439	5.454	5.464	5.470	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472
8	4.746	4.939	5.057	5.135	5.189	5.227	5.256	5.276	5.291	5.302	5.309	5.314	5.316	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317
9	4.596	4.787	4.906	4.986	5.043	5.086	5.118	5.142	5.160	5.174	5.185	5.193	5.199	5.203	5.205	5.206	5.206	5.206	5.206
10	4.482	4.671	4.790	4.871	4.931	4.975	5.010	5.037	5.058	5.074	5.088	5.098	5.106	5.112	5.117	5.120	5.122	5.123	5.124
11	4.392	4.579	4.697	4.780	4.841	4.887	4.924	4.952	4.975	4.994	5.009	5.021	5.031	5.039	5.045	5.050	5.054	5.057	5.059
12	4.320	4.504	4.622	4.706	4.767	4.815	4.852	4.883	4.907	4.927	4.944	4.958	4.969	4.978	4.986	4.993	4.998	5.002	5.005
13	4.260	4.442	4.560	4.644	4.706	4.755	4.793	4.824	4.850	4.872	4.889	4.904	4.917	4.928	4.937	4.944	4.950	4.956	4.960
14	4.210	4.391	4.508	4.591	4.654	4.704	4.743	4.775	4.802	4.824	4.843	4.859	4.872	4.884	4.894	4.902	4.910	4.916	4.921
15	4.168	4.347	4.463	4.547	4.610	4.660	4.700	4.733	4.760	4.783	4.803	4.820	4.834	4.846	4.857	4.866	4.874	4.881	4.887
16	4.131	4.309	4.425	4.509	4.572	4.622	4.663	4.696	4.724	4.748	4.768	4.786	4.800	4.813	4.825	4.835	4.844	4.851	4.858
17	4.099	4.275	4.391	4.475	4.539	4.589	4.630	4.664	4.693	4.717	4.738	4.756	4.771	4.785	4.797	4.807	4.816	4.824	4.832
18	4.071	4.246	4.362	4.445	4.509	4.560	4.601	4.635	4.664	4.689	4.711	4.729	4.745	4.759	4.772	4.783	4.792	4.801	4.808
19	4.046	4.220	4.335	4.419	4.483	4.534	4.575	4.610	4.639	4.665	4.686	4.705	4.722	4.736	4.749	4.761	4.771	4.780	4.788
20	4.024	4.197	4.312	4.395	4.459	4.510	4.552	4.587	4.617	4.642	4.664	4.684	4.701	4.716	4.729	4.741	4.751	4.761	4.769
24	3.956	4.126	4.239	4.322	4.386	4.437	4.480	4.516	4.546	4.573	4.596	4.616	4.634	4.651	4.665	4.678	4.690	4.700	4.710
30	3.889	4.056	4.168	4.250	4.314	4.366	4.409	4.445	4.477	4.504	4.528	4.550	4.569	4.586	4.601	4.615	4.628	4.640	4.650
40	3.825	3.988	4.098	4.180	4.244	4.296	4.339	4.376	4.408	4.436	4.461	4.483	4.503	4.521	4.537	4.553	4.566	4.579	4.591
60	3.762	3.922	4.031	4.111	4.174	4.226	4.270	4.307	4.340	4.368	4.394	4.417	4.438	4.456	4.474	4.490	4.504	4.518	4.530
120	3.702	3.858	3.965	4.044	4.107	4.158	4.202	4.239	4.272	4.301	4.327	4.351	4.372	4.392	4.410	4.426	4.442	4.456	4.469
∞	3.643	3.796	3.900	3.978	4.040	4.091	4.135	4.172	4.205	4.235	4.261	4.285	4.307	4.327	4.345	4.363	4.379	4.394	4.408

ν \ p	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	50	60	100
1	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03
2	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04
3	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321
4	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756
5	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074
6	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703
7	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472
8	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317
9	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206
10	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124
11	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061
12	5.010	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011
13	4.966	4.970	4.972	4.972	4.972	4.972	4.972	4.972	4.972	4.972	4.972	4.972	4.972
14	4.929	4.935	4.938	4.940	4.940	4.940	4.940	4.940	4.940	4.940	4.940	4.940	4.940
15	4.897	4.904	4.909	4.912	4.914	4.914	4.914	4.914	4.914	4.914	4.914	4.914	4.914
16	4.869	4.877	4.883	4.887	4.890	4.892	4.892	4.892	4.892	4.892	4.892	4.892	4.892
17	4.844	4.853	4.860	4.865	4.869	4.872	4.873	4.874	4.874	4.874	4.874	4.874	4.874
18	4.821	4.832	4.839	4.846	4.850	4.854	4.856	4.857	4.858	4.858	4.858	4.858	4.858
19	4.802	4.812	4.821	4.828	4.833	4.838	4.841	4.843	4.844	4.845	4.845	4.845	4.845
20	4.784	4.795	4.805	4.813	4.818	4.823	4.827	4.830	4.832	4.833	4.833	4.833	4.833
24	4.727	4.741	4.752	4.762	4.770	4.777	4.783	4.788	4.791	4.794	4.802	4.802	4.802
30	4.669	4.685	4.699	4.711	4.721	4.730	4.738	4.744	4.750	4.755	4.772	4.777	4.777
40	4.611	4.630	4.645	4.659	4.671	4.682	4.692	4.700	4.708	4.715	4.740	4.754	4.761
60	4.553	4.573	4.591	4.607	4.620	4.633	4.645	4.655	4.665	4.673	4.707	4.730	[illegible]
120	4.494	4.515	4.535	4.552	4.568	4.583	4.596	4.609	4.619	4.630	4.673	4.703	4.731
∞	4.434	4.457	4.478	4.497	4.514	4.530	4.545	4.559	4.572	4.584	4.635	4.675	4.787

Tabla III. Cuantiles para Estadística de Bonferroni, $t_{\nu}^{\alpha/2k}$, donde $P(T_{\nu} > t_{\nu}^{\alpha/2k}) = \frac{1}{2}(\alpha/k)$ (Cap.I,secc.6,CapII.,secc2,Cap.III,secc.11)

$\alpha = 0.05$

ν \ k:	1	2	$3=\binom{3}{2}$	4	5	$6=\binom{4}{2}$	7	8	9	$10=\binom{5}{2}$
$100\alpha/k$:	5.0000	2.5000	1.6667	1.2500	1.0000	0.8333	0.7143	0.6250	0.5556	0.5000
2	4.3027	6.2053	7.6488	8.8602	9.9248	10.8859	11.7687	12.5897	13.3604	14.0890
3	3.1824	4.1765	4.8567	5.3919	5.8409	6.2315	6.5797	6.8952	7.1849	7.4533
4	2.7764	3.4954	3.9608	4.3147	4.6041	4.8510	5.0675	5.2611	5.4366	5.5976
5	2.5706	3.1634	3.5341	3.8100	4.0321	4.2193	4.3818	4.5257	4.6553	4.7733
6	2.4469	2.9687	3.2875	3.5212	3.7074	3.8630	3.9971	4.1152	4.2209	4.3168
7	2.3646	2.8412	3.1276	3.3353	3.4995	3.6358	3.7527	3.8552	3.9467	4.0293
8	2.3060	2.7515	3.0158	3.2060	3.3554	3.4789	3.5844	3.6766	3.7586	3.8325
9	2.2622	2.6850	2.9333	3.1109	3.2498	3.3642	3.4616	3.5465	3.6219	3.6897
10	2.2281	2.6338	2.8701	3.0382	3.1693	3.2768	3.3682	3.4477	3.5182	3.5814
11	2.2010	2.5931	2.8200	2.9809	3.1058	3.2081	3.2949	3.3702	3.4368	3.4966
12	2.1788	2.5600	2.7795	2.9345	3.0545	3.1527	3.2357	3.3078	3.3714	3.4284
13	2.1604	2.5326	2.7459	2.8961	3.0123	3.1070	3.1871	3.2565	3.3177	3.3725
14	2.1448	2.5096	2.7178	2.8640	2.9768	3.0688	3.1464	3.2135	3.2727	3.3257
15	2.1314	2.4899	2.6937	2.8366	2.9467	3.0363	3.1118	3.1771	3.2346	3.2860
16	2.1199	2.4729	2.6730	2.8131	2.9208	3.0083	3.0821	3.1458	3.2019	3.2520
17	2.1098	2.4581	2.6550	2.7925	2.8982	2.9840	3.0563	3.1186	3.1735	3.2224
18	2.1009	2.4450	2.6391	2.7745	2.8784	2.9627	3.0336	3.0948	3.1486	3.1966
19	2.0930	2.4334	2.6251	2.7586	2.8609	2.9439	3.0136	3.0738	3.1266	3.1737
20	2.0860	2.4231	2.6126	2.7444	2.8453	2.9271	2.9958	3.0550	3.1070	3.1534
21	2.0796	2.4138	2.6013	2.7316	2.8314	2.9121	2.9799	3.0382	3.0895	3.1352
22	2.0739	2.4055	2.6912	2.7201	2.8188	2.8985	2.9655	3.0231	3.0737	3.1188
23	2.0687	2.3979	2.5820	2.7097	2.8073	2.8863	2.9525	3.0095	3.0595	3.1040
24	2.0639	2.3909	2.5736	2.7002	2.7969	2.8751	2.9406	2.9970	3.0465	3.0905
25	2.0595	2.3846	2.5660	2.6916	2.7874	2.8649	2.9298	2.9856	3.0346	3.0782
26	2.0555	2.3788	2.5589	2.6836	2.7787	2.8555	2.9199	2.9752	3.0237	3.0669
27	2.0518	2.3734	2.5525	2.6763	2.7707	2.8469	2.9107	2.9658	3.0137	3.0565
28	2.0484	2.3685	2.5465	2.6695	2.7633	2.8389	2.9023	2.9567	3.0045	3.0469
29	2.0452	2.3638	2.5409	2.6632	2.7564	2.8316	2.8945	2.9485	2.9959	3.0380
30	2.0423	2.3596	2.5357	2.6574	2.7500	2.8247	2.8872	2.9409	2.9880	3.0298
35	2.0301	2.3420	2.5145	2.6334	2.7238	2.7966	2.8575	2.9097	2.9554	3.9960
40	2.0211	2.3289	2.4989	2.6157	2.7045	2.7759	2.8355	2.8867	2.9314	2.9712
45	2.0141	2.3189	2.4868	2.6021	2.6896	2.7599	2.8187	2.8690	2.9130	2.9521
50	2.0086	2.3109	2.4772	2.5913	2.6778	2.7473	2.8053	2.8550	2.8984	2.9370
55	2.0040	2.3044	2.4694	2.5825	2.6682	2.7370	2.7944	2.8436	2.8866	2.9247
60	2.0003	2.2990	2.4630	2.5752	2.6603	2.7286	2.7855	2.8342	2.8768	2.9146
70	1.9944	2.2906	2.4529	2.5639	2.6479	2.7153	2.7715	2.8195	2.8615	2.8987
80	1.9901	2.2844	2.4454	2.5554	2.6387	2.7054	2.7610	2.8086	2.8502	2.8870
90	1.9867	2.2795	2.4395	2.5489	2.6316	2.6978	2.7530	2.8002	2.8414	2.8779
100	1.9840	2.2757	2.4349	2.5437	2.6259	2.6918	2.7466	2.7935	2.8344	2.8707
110	1.9818	2.2725	2.4311	2.5394	2.6213	2.6868	2.7414	2.7880	2.8287	2.8648
120	1.9799	2.2699	2.4280	2.5359	2.6174	2.6827	2.7370	2.7835	2.8240	2.8599
250	1.9695	2.2550	2.4102	2.5159	2.5958	2.6594	2.7124	2.7577	2.7972	2.8322
500	1.9647	2.2482	2.4021	2.5068	2.5857	2.6488	2.7012	2.7460	2.7850	2.8195
1000	1.9623	2.2448	2.3980	2.5022	2.5808	2.6435	2.6957	2.7402	2.7790	2.8133
∞	1.9600	2.2411	2.3940	2.4977	2.5758	2.6383	2.6901	2.7344	2.7729	2.8070

Tabla III. (Continuación)

					$\alpha = 0.05$				
k:	11	12	13	14	$15 = \binom{6}{2}$	16	17	18	19
ν $100\alpha/k$:	0.4545	0.4167	0.3846	0.3571	0.3333	0.3125	0.2941	0.2778	0.2632
2	14.7818	15.4435	16.0780	16.6883	17.2772	17.8466	18.3984	18.9341	19.4551
3	7.7041	7.9398	8.1625	8.3738	8.5752	8.7676	8.9521	9.1294	9.3001
4	5.7465	5.8853	6.0154	6.1380	6.2541	6.3643	6.4693	6.5697	6.6659
5	4.8819	4.9825	5.0764	5.1644	5.2474	5.3259	5.4005	5.4715	5.5393
6	4.4047	4.4858	4.5612	4.6317	4.6979	4.7604	4.8196	4.8759	4.9295
7	4.1048	4.1743	4.2388	4.2989	4.3553	4.4084	4.4586	4.5062	4.5514
8	3.8999	3.9618	4.0191	4.0724	4.1224	4.1693	4.2137	4.2556	4.2955
9	3.7513	3.8079	3.8602	3.9088	3.9542	3.9969	4.0371	4.0752	4.1114
10	3.6388	3.6915	3.7401	3.7852	3.8273	3.8669	3.9041	3.9394	3.9728
11	3.5508	3.6004	3.6462	3.6887	3.7283	3.7654	3.8004	3.8335	3.8648
12	3.4801	3.5274	3.5709	3.6112	3.6489	3.6842	3.7173	3.7487	3.7783
13	3.4221	3.4674	3.5031	3.5478	3.5838	3.6176	3.6493	3.6793	3.7076
14	3.3738	3.4173	3.4578	3.4949	3.5296	3.5621	3.5926	3.6214	3.6487
15	3.3325	3.3749	3.4139	3.4501	3.4837	3.5151	3.5447	3.5725	3.5989
16	3.2973	3.3386	3.3765	3.4116	3.4443	3.4749	3.5036	3.5306	3.5582
17	3.2667	3.3070	3.3440	3.3783	3.4102	3.4400	3.4680	3.4944	3.5193
18	3.2399	3.2794	3.3156	3.3492	3.3804	3.4095	3.4369	3.4626	3.4870
19	3.2163	3.2550	3.2906	3.3235	3.3540	3.3826	3.4094	3.4347	3.4585
20	3.1952	3.2333	3.2683	3.3006	3.3306	3.3587	3.3850	3.4098	3.4332
21	3.1764	3.2139	3.2483	3.2802	3.3097	3.3373	3.3632	3.3876	3.4106
22	3.1595	3.1965	3.2304	3.2618	3.2909	3.3181	3.3436	3.3676	3.3903
23	3.1441	3.1807	3.2142	3.2451	3.2739	3.3007	3.3259	3.3495	3.3719
24	3.1302	3.1663	3.1994	3.2300	3.2584	3.2849	3.3097	3.3331	3.3552
25	3.1175	3.1532	3.1859	3.2162	3.2443	3.2705	3.2950	3.3181	3.3400
26	3.1058	3.1412	3.1738	3.2035	3.2313	3.2572	3.2815	3.3044	3.3260
27	3.0951	3.1301	3.1622	3.1919	3.2194	3.2451	3.2691	3.2918	3.3132
28	3.0852	3.1199	3.1517	3.1811	3.2084	3.2339	3.2577	3.2801	3.3013
29	3.0760	3.1105	3.1420	3.1712	3.1982	3.2235	3.2471	3.2694	3.2904
30	3.0675	3.1017	3.1330	3.1620	3.1888	3.2138	3.2373	3.2594	3.2802
35	3.0326	3.0658	3.0962	3.1242	3.1502	3.1744	3.1971	3.2185	3.2386
40	3.0069	3.0393	3.0690	3.0964	3.1218	3.1455	3.1676	3.1884	3.2081
45	2.9872	3.0191	3.0482	3.0751	3.1000	3.1232	3.1450	3.1654	3.1846
50	2.9716	3.0030	3.0318	3.0582	3.0828	3.1057	3.1271	3.1472	3.1661
55	2.9589	2.9900	3.0184	3.0446	3.0688	3.0914	3.1125	3.1324	3.1511
60	2.9485	2.9792	3.0074	3.0333	3.0573	3.0796	3.1005	3.1202	3.1387
70	2.9321	2.9624	2.9901	3.0156	3.0393	3.0613	3.0818	3.1012	3.1194
80	2.9200	2.9500	2.9773	3.0026	3.0259	3.0478	3.0679	3.0870	3.1050
90	2.9106	2.9403	2.9675	2.9924	3.0156	3.0371	3.0572	3.0761	3.0939
100	2.9032	2.9327	2.9596	2.9844	3.0073	3.0287	3.0487	3.0674	3.0851
110	2.8971	2.9264	2.9532	2.9778	3.0007	3.0219	3.0417	3.0604	3.0779
120	2.8921	2.9212	2.9479	2.9724	2.9951	3.0162	3.0360	3.0545	3.0720
250	2.8635	2.8919	2.9178	2.9416	2.9637	2.9842	3.0034	3.0213	3.0383
500	2.8505	2.8785	2.9041	2.9276	2.9494	2.9696	2.9885	3.0063	3.0230
1000	2.8440	2.8719	2.8973	2.9207	2.9423	2.9624	2.9812	2.9988	3.0154
	2.8376	2.8653	2.8905	2.9137	2.9352	2.9552	2.9738	2.9913	3.0078

Tabla III. (Continuación)

	$\alpha = 0.05$							
k:	20	$21 = \binom{7}{2}$	$28 = \binom{8}{2}$	$36 = \binom{9}{2}$	$45 = \binom{10}{2}$	$55 = \binom{11}{2}$	$66 = \binom{12}{2}$	$78 = \binom{13}{2}$
ν $100\alpha/k$:	0.2500	0.2381	0.1786	0.1389	0.1111	0.0909	0.0758	0.0641
2	19.9625	20.4573	23.6328	26.8049	29.9750	33.1436	36.3112	39.4778
3	9.4649	9.6242	10.6166	11.5632	12.4715	13.3471	14.1943	15.0165
4	6.7583	6.8471	7.3924	7.8998	8.3783	8.8271	9.2558	9.6655
5	5.6042	5.6665	6.0447	6.3914	6.7126	7.0128	7.2952	7.5625
6	4.9807	5.0297	5.3255	5.5937	5.8399	6.0680	6.2810	6.4813
7	4.5946	4.6359	4.8839	5.1068	5.3101	5.4973	5.6712	5.8339
8	4.3335	4.3699	4.5869	4.7810	4.9570	5.1183	5.2675	5.4065
9	4.1458	4.1786	4.3744	4.5485	4.7058	4.8494	4.9818	5.1048
10	4.0045	4.0348	4.2150	4.3747	4.5184	4.6492	4.7695	4.8810
11	3.8945	3.9229	4.0913	4.2400	4.3735	4.4947	4.6059	4.7087
12	3.8065	3.8334	3.9925	4.1327	4.2582	4.3719	4.4761	4.5722
13	3.7345	3.7602	3.9118	4.0452	4.1643	4.2721	4.3706	4.4614
14	3.6746	3.6992	3.8448	3.9725	4.0865	4.1894	4.2833	4.3698
15	3.6239	3.6477	3.7882	3.9113	4.0209	4.1198	4.2099	4.2928
16	3.5805	3.6036	3.7398	3.8589	3.9649	4.0604	4.1473	4.2272
17	3.5429	3.5654	3.6980	3.8137	3.9165	4.0091	4.0933	4.1706
18	3.5101	3.5321	3.6614	3.7742	3.8744	3.9644	4.0463	4.1214
19	3.4812	3.5027	3.6292	3.7395	3.8373	3.9251	4.0050	4.0781
20	3.4554	3.4765	3.6006	3.7087	3.8044	3.8903	3.9683	4.0398
21	3.4325	3.4532	3.5751	3.6812	3.7750	3.8593	3.9357	4.0056
22	3.4118	3.4322	3.5522	3.6564	3.7487	3.8314	3.9064	3.9750
23	3.3931	3.4132	3.5314	3.6341	3.7249	3.8062	3.8800	3.9474
24	3.3761	3.3960	3.5126	3.6139	3.7033	3.7834	3.8560	3.9223
25	3.3606	3.3803	3.4955	3.5954	3.6836	3.7626	3.8342	3.8995
26	3.3464	3.3659	3.4797	3.5785	3.6656	3.7436	3.8142	3.8787
27	3.3334	3.3526	3.4653	3.5629	3.6491	3.7261	3.7959	3.8595
28	3.3214	3.3404	3.4520	3.5486	3.6338	3.7101	3.7790	3.8419
29	3.3102	3.3291	3.4397	3.5354	3.6198	3.6952	3.7634	3.8256
30	3.2999	3.3186	3.4282	3.5231	3.6067	3.6814	3.7489	3.8105
35	3.2577	3.2758	3.3816	3.4730	3.5534	3.6252	3.6900	3.7490
40	3.2266	3.2443	3.3473	3.4362	3.5143	3.5840	3.6468	3.7040
45	3.2028	3.2201	3.3211	3.4081	3.4845	3.5525	3.6138	3.6696
50	3.1840	3.2010	3.3003	3.3858	3.4609	3.5277	3.5878	3.6425
55	3.1688	3.1856	3.2836	3.3679	3.4418	3.5076	3.5668	3.6206
60	3.1562	3.1728	3.2697	3.3530	3.4260	3.4910	3.5494	3.6025
70	3.1366	3.1529	3.2481	3.3299	3.4015	3.4652	3.5224	3.5744
80	3.1220	3.1381	3.2321	3.3127	3.3833	3.4460	3.5024	3.5536
90	3.1108	3.1267	3.2197	3.2995	3.3693	3.4313	3.4870	3.5375
100	3.1018	3.1176	3.2099	3.2890	3.3582	3.4196	3.4747	3.5248
110	3.0945	3.1102	3.2018	3.2804	3.3491	3.4100	3.4648	3.5144
120	3.0885	3.1041	3.1952	3.2733	3.3416	3.4021	3.4565	3.5058
250	3.0543	3.0694	3.1577	3.2332	3.2991	3.3575	3.4099	3.4573
500	3.0387	3.0537	3.1406	3.2150	3.2798	3.3373	3.3887	3.4354
1000	3.0310	3.0459	3.1322	3.2059	3.2703	3.3272	3.3783	3.4245
∞	3.0233	3.0381	3.1237	3.1970	3.2608	3.3172	3.3678	3.4136

Tabla III. (Continuación)

	$\alpha = 0.05$						
k	$91 = \binom{14}{2}$	$105 = \binom{15}{2}$	$120 = \binom{16}{2}$	$136 = \binom{17}{2}$	$153 = \binom{18}{2}$	$171 = \binom{19}{2}$	$190 = \binom{20}{2}$
ν \ $100\,\alpha/k$	0.0549	0.0476	0.0417	0.0368	0.0327	0.0292	0.0263
2	42.6439	45.8094	48.9745	52.1392	55.3037	58.4679	61.6320
3	15.8165	16.5964	17.3582	18.1035	18.8336	19.5497	20.2528
4	10.0585	10.4367	10.8016	11.1545	11.4966	11.8288	12.1519
5	7.8166	8.0591	8.2913	8.5143	8.7290	8.9362	9.1365
6	6.6705	6.8500	7.0210	7.1844	7.3410	7.4914	7.6363
7	5.9868	6.1313	6.2684	6.3990	6.5236	6.6430	6.7577
8	5.5368	5.6594	5.7755	5.8857	5.9906	6.0909	6.1869
9	5.2197	5.3276	5.4295	5.5260	5.6177	5.7051	5.7888
10	4.9849	5.0823	5.1740	5.2608	5.3431	5.4215	5.4963
11	4.8044	4.8939	4.9781	5.0576	5.1330	5.2046	5.2729
12	4.6615	4.7450	4.8233	4.8972	4.9672	5.0336	5.0969
13	4.5457	4.6243	4.6981	4.7675	4.8332	4.8956	4.9549
14	4.4500	4.5247	4.5947	4.6606	4.7228	4.7818	4.8379
15	4.3695	4.4410	4.5079	4.5708	4.6302	4.6865	4.7400
16	4.3011	4.3698	4.4341	4.4946	4.5516	4.6056	4.6568
17	4.2421	4.3085	4.3706	4.4289	4.4839	4.5360	4.5853
18	4.1907	4.2551	4.3154	4.3719	4.4251	4.4755	4.5232
19	4.1456	4.2083	4.2669	4.3218	4.3736	4.4225	4.4688
20	4.1057	4.1669	4.2240	4.2776	4.3280	4.3756	4.4208
21	4.0701	4.1300	4.1858	4.2381	4.2874	4.3339	4.3780
22	4.0382	4.0969	4.1516	4.2028	4.2510	4.2966	4.3397
23	4.0095	4.0671	4.1207	4.1710	4.2183	4.2629	4.3052
24	3.9834	4.0400	4.0928	4.1422	4.1886	4.2325	4.2739
25	3.9597	4.0154	4.0674	4.1160	4.1616	4.2047	4.2455
26	3.9380	3.9929	4.0441	4.0920	4.1370	4.1794	4.2196
27	3.9181	3.9723	4.0228	4.0700	4.1144	4.1562	4.1958
28	3.8997	3.9533	4.0032	4.0498	4.0936	4.1349	4.1739
29	3.8828	3.9357	3.9850	4.0311	4.0744	4.1151	4.1537
30	3.8671	3.9195	3.9682	4.0138	4.0566	4.0969	4.1350
35	3.8032	3.8533	3.8999	3.9434	3.9842	4.0226	4.0590
40	3.7564	3.8049	3.8499	3.8919	3.9314	3.9684	4.0035
45	3.7208	3.7680	3.8118	3.8527	3.8911	3.9271	3.9612
50	3.6926	3.7389	3.7818	3.8218	3.8594	3.8946	3.9279
55	3.6699	3.7154	3.7576	3.7969	3.8337	3.8684	3.9010
60	3.6511	3.6960	3.7376	3.7763	3.8126	3.8467	3.8789
70	3.6220	3.6658	3.7065	3.7444	3.7798	3.8131	3.8445
80	3.6004	3.6435	3.6835	3.7207	3.7555	3.7883	3.8191
90	3.5837	3.6263	3.6658	3.7025	3.7369	3.7691	3.7995
100	3.5705	3.6127	3.6517	3.6880	3.7220	3.7539	3.7840
110	3.5598	3.6016	3.6403	3.6763	3.7100	3.7416	3.7714
120	3.5509	3.5924	3.6308	3.6665	3.7000	3.7313	3.7609
250	3.5007	3.5405	3.5774	3.6117	3.6437	3.6737	3.7020
500	3.4779	3.5170	3.5532	3.5868	3.6182	3.6477	3.6754
1000	3.4666	3.5054	3.5412	3.5745	3.6056	3.6348	3.6622
∞	3.4554	3.4938	3.5293	3.5623	3.5931	3.6219	3.6491

Tabla III. (Continuación)

	$\alpha = 0.01$									
k:	1	2	$3=\binom{3}{2}$	4	5	$6=\binom{4}{2}$	7	8	9	$10=\binom{5}{2}$
ν / $100\alpha/k$:	1.0000	0.5000	0.3333	0.2500	0.2000	0.1667	0.1429	0.1250	0.1111	0.1000
2	9.9248	14.0890	17.2772	19.9625	22.3271	24.4843	26.4292	28.2577	29.9750	31.5991
3	5.8409	7.4533	8.5752	9.4649	10.2145	10.8688	11.4532	11.9838	12.4715	12.9240
4	4.6041	5.5976	6.2541	6.7583	7.1732	7.5287	7.8414	8.1216	8.3763	8.6103
5	4.0321	4.7733	5.2474	5.6042	5.8934	6.1384	6.3518	6.5414	6.7126	6.8688
6	3.7074	4.3168	4.6979	4.9807	5.2076	5.3982	5.5632	5.7090	5.8399	5.9588
7	3.4995	4.0293	4.3553	4.5946	4.7893	4.9445	5.0815	5.2022	5.3101	5.4079
8	3.3554	3.8325	4.1224	4.3335	4.6000	4.6398	4.7590	4.8636	4.9570	5.0413
9	3.2498	3.6897	3.9542	4.1458	4.2968	4.4219	4.5288	4.6224	4.7058	4.7809
10	3.1693	3.5814	3.8273	4.0045	4.1497	4.2586	4.3567	4.4423	4.5184	4.5869
11	3.1058	3.4966	3.7283	3.8945	4.0747	4.1319	4.2232	4.3020	4.3735	4.4370
12	3.0545	3.4284	3.6489	3.8065	3.9200	4.0308	4.1169	4.1918	4.2582	4.3178
13	3.0123	3.3725	3.5838	3.7345	3.8620	3.9484	4.0302	4.1013	4.1643	4.2208
14	2.9768	3.3257	3.5296	3.6746	3.7874	3.8798	3.9582	4.0263	4.0865	4.1405
15	2.9467	3.2860	3.4837	3.6239	3.7320	3.8220	3.8975	3.9630	4.0209	4.0728
16	2.9208	3.2520	3.4443	3.5805	3.6860	3.7725	3.8456	3.9089	3.9649	4.0150
17	2.8982	3.2224	3.4102	3.5429	3.6406	3.7297	3.8007	3.8623	3.9165	3.9651
18	2.8784	3.1966	3.3804	3.5101	3.6106	3.6924	3.7616	3.8215	3.8744	3.9216
19	2.8609	3.1737	3.3540	3.4812	3.5704	3.6595	3.7271	3.7857	3.8373	3.8834
20	2.8453	3.1534	3.3306	3.4554	3.5518	3.6303	3.6966	3.7539	3.8044	3.8495
21	2.8314	3.1352	3.3097	3.4325	3.5320	3.6043	3.6693	3.7255	3.7750	3.8193
22	2.8188	3.1188	3.2909	3.4118	3.5060	3.5808	3.6448	3.7000	3.7487	3.7921
23	2.8073	3.1040	3.2739	3.3931	3.4860	3.5597	3.6226	3.6770	3.7249	3.7676
24	2.7969	3.0905	3.2584	3.3761	3.4668	3.5405	3.6025	3.6561	3.7033	3.7454
25	2.7874	3.0782	3.2443	3.3606	3.4502	3.5230	3.5842	3.6371	3.6836	3.7251
26	2.7787	3.0669	3.2313	3.3464	3.4080	3.5069	3.5674	3.6197	3.6656	3.7066
27	2.7707	3.0565	3.2194	3.3334	3.4010	3.4922	3.5520	3.6037	3.6491	3.6896
28	2.7633	3.0469	3.2084	3.3214	3.4088	3.4786	3.5378	3.5889	3.6338	3.6739
29	2.7564	3.0380	3.1982	3.3102	3.3808	3.4660	3.5247	3.5753	3.6198	3.6594
30	2.7500	3.0298	3.1888	3.2999	3.3880	3.4544	3.5125	3.5626	3.6067	3.6460
35	2.7238	2.9960	3.1502	3.2577	3.3400	3.4068	3.4628	3.5110	3.5534	3.5911
40	2.7045	2.9712	3.1218	3.2266	3.3069	3.3718	3.4263	3.4732	3.5143	3.5510
45	2.6896	2.9521	3.1000	3.2028	3.2918	3.3451	3.3984	3.4442	3.4845	3.5203
50	2.6778	2.9370	3.0828	3.1840	3.2819	3.3239	3.3763	3.4214	3.4609	3.4960
55	2.6682	2.9247	3.0688	3.1688	3.2451	3.3068	3.3585	3.4029	3.4418	3.4764
60	2.6603	2.9146	3.0573	3.1562	3.2010	3.2927	3.3437	3.3876	3.4260	3.4602
70	2.6479	2.8987	3.0393	3.1366	3.210[illegible]	3.2707	3.3208	3.3638	3.4015	3.4360
80	2.6387	2.8870	3.0259	3.1220	3.190[illegible]	3.2543	3.3037	3.3462	3.3833	3.4165
90	2.6316	2.8779	3.0156	3.1108	3.19[illegible]	3.2417	3.2906	3.3326	3.3693	3.4019
100	2.6259	2.8707	3.0073	3.1018	3.1787	3.2317	3.2802	3.3218	3.3582	3.3905
110	2.6213	2.8648	3.0007	3.0945	3.166[illegible]	3.2235	3.2717	3.3130	3.3491	3.3812
120	2.6174	2.8599	2.9951	3.0885	3.169[illegible]	3.2168	3.2646	3.3057	3.3416	3.3735
250	2.5956	2.8322	2.9637	3.0543	3.129[illegible]	3.1785	3.2248	3.2644	3.2991	3.3299
500	2.5857	2.8195	2.9494	3.0387	3.104[illegible]	3.1612	3.2067	3.2457	3.2798	3.3101
1000	2.5808	2.8133	2.9423	3.0310	3.09[illegible]	3.1526	3.1977	3.2365	3.2703	3.3003
∞	2.5758	2.8070	2.9352	3.0233	3.09[illegible]	3.1440	3.1888	3.2272	3.2606	3.2905

Tabla III. (Continuación)

	$\alpha = 0.01$								
k:	11	12	13	14	$15 = \binom{6}{2}$	16	17	18	19
ν $100\,\alpha/k$:	0.0909	0.0833	0.0769	0.0714	0.0667	0.0625	0.0588	0.0556	0.0526
2	33.1436	34.6194	36.0347	37.3965	38.7105	39.9812	41.2129	42.4087	43.5718
3	13.3471	13.7450	14.1214	14.4787	14.8194	15.1451	15.4575	15.7577	16.0471
4	8.8271	9.0294	9.2192	9.3983	9.5679	9.7291	9.8828	10.0298	10.1708
5	7.0128	7.1464	7.2712	7.3884	7.4990	7.6037	7.7032	7.7981	7.8888
6	6.0680	6.1690	6.2630	6.3510	6.4338	6.5121	6.5862	6.6568	6.7240
7	5.4973	5.5799	5.6565	5.7282	5.7954	5.8588	5.9188	5.9757	6.0300
8	5.1183	5.1892	5.2549	5.3162	5.3737	5.4278	5.4789	5.5274	5.5735
9	4.8494	4.9124	4.9706	5.0249	5.0757	5.1235	5.1686	5.2114	5.2520
10	4.6492	4.7065	4.7594	4.8087	4.8547	4.8980	4.9388	4.9774	5.0141
11	4.4947	4.5477	4.5966	4.6420	4.6845	4.7244	4.7620	4.7975	4.8312
12	4.3719	4.4215	4.4673	4.5099	4.5496	4.5868	4.6219	4.6551	4.6865
13	4.2721	4.3191	4.3624	4.4026	4.4401	4.4752	4.5083	4.5396	4.5693
14	4.1894	4.2342	4.2755	4.3138	4.3495	4.3829	4.4144	4.4442	4.4724
15	4.1198	4.1628	4.2024	4.2391	4.2733	4.3054	4.3355	4.3640	4.3910
16	4.0604	4.1018	4.1400	4.1754	4.2084	4.2393	4.2683	4.2958	4.3217
17	4.0091	4.0493	4.0863	4.1205	4.1525	4.1823	4.2104	4.2369	4.2620
18	3.9644	4.0035	4.0394	4.0727	4.1037	4.1327	4.1600	4.1857	4.2101
19	3.9251	3.9632	3.9983	4.0307	4.0609	4.0892	4.1157	4.1408	4.1645
20	3.8903	3.9276	3.9618	3.9935	4.0230	4.0506	4.0765	4.1010	4.1241
21	3.8593	3.8958	3.9293	3.9603	3.9892	4.0162	4.0416	4.0655	4.0881
22	3.8314	3.8672	3.9001	3.9306	3.9589	3.9854	4.0103	4.0337	4.0559
23	3.8062	3.8414	3.8738	3.9037	3.9316	3.9576	3.9820	4.0050	4.0268
24	3.7834	3.8181	3.8499	3.8794	3.9068	3.9324	3.9564	3.9790	4.0004
25	3.7626	3.7968	3.8282	3.8572	3.8842	3.9094	3.9331	3.9554	3.9765
26	3.7436	3.7773	3.8083	3.8369	3.8635	3.8884	3.9118	3.9337	3.9545
27	3.7261	3.7595	3.7900	3.8183	3.8446	3.8692	3.8922	3.9139	3.9344
28	3.7101	3.7430	3.7732	3.8012	3.8271	3.8514	3.8742	3.8956	3.9159
29	3.6952	3.7278	3.7577	3.7853	3.8110	3.8350	3.8575	3.8787	3.8987
30	3.6814	3.7136	3.7433	3.7706	3.7961	3.8198	3.8421	3.8631	3.8829
35	3.6252	3.6561	3.6845	3.7108	3.7352	3.7579	3.7792	3.7993	3.8183
40	3.5840	3.6140	3.6415	3.6670	3.6906	3.7126	3.7333	3.7527	3.7710
45	3.5525	3.5818	3.6087	3.6335	3.6565	3.6780	3.6982	3.7171	3.7350
50	3.5277	3.5564	3.5828	3.6071	3.6297	3.6508	3.6705	3.6890	3.7068
55	3.5076	3.5359	3.5618	3.5858	3.6080	3.6287	3.6481	3.6664	3.6836
60	3.4910	3.5189	3.5445	3.5682	3.5901	3.6105	3.6297	3.6477	3.6646
70	3.4652	3.4926	3.5176	3.5408	3.5622	3.5822	3.6010	3.6186	3.6352
80	3.4460	3.4730	3.4977	3.5205	3.5416	3.5613	3.5797	3.5970	3.6134
90	3.4313	3.4579	3.4823	3.5048	3.5257	3.5451	3.5633	3.5804	3.5966
100	3.4196	3.4460	3.4701	3.4924	3.5131	3.5323	3.5503	3.5673	3.5832
110	3.4100	3.4362	3.4602	3.4823	3.5028	3.5219	3.5398	3.5565	3.5724
120	3.4021	3.4281	3.4520	3.4739	3.4943	3.5132	3.5310	3.5477	3.5634
250	3.3575	3.3826	3.4055	3.4267	3.4462	3.4645	3.4815	3.4976	3.5127
500	3.3373	3.3619	3.3845	3.4052	3.4245	3.4424	3.4591	3.4749	3.4897
1000	3.3272	3.3517	3.3740	3.3946	3.4137	3.4314	3.4480	3.4636	3.4783
∞	3.3172	3.3415	3.3636	3.3840	3.4029	3.4205	3.4370	3.4524	3.4670

Tabla III. (Continuación)

	$\alpha = 0.01$							
k:	20	$21 = \binom{7}{2}$	$28 = \binom{8}{2}$	$36 = \binom{9}{2}$	$45 = \binom{10}{2}$	$55 = \binom{11}{2}$	$60 = \binom{12}{2}$	$78 = \binom{13}{2}$
ν $100\alpha/k$:	0.0500	0.0476	0.0357	0.0278	0.0222	0.0182	0.0152	0.0128
2	44.7046	45.8094	52.8009	59.9875	67.0709	74.1519	81.2312	88.3091
3	16.3263	16.5964	18.2806	19.8889	21.4337	22.9239	24.3867	25.7075
4	10.3063	10.4367	11.2378	11.9851	12.6881	13.3540	13.9882	14.5946
5	7.9757	8.0591	8.5667	9.0332	9.4685	9.8722	10.2548	10.6168
6	6.7883	6.8500	7.2226	7.5617	7.8737	8.1636	8.4348	8.6901
7	6.0818	6.1313	6.4295	6.6987	6.9448	7.1721	7.3837	7.5819
8	5.6174	5.6594	5.9114	6.1375	6.3432	6.5323	6.7076	6.8712
9	5.2907	5.3276	5.5484	5.7458	5.9245	6.0883	6.2395	6.3803
10	5.0490	5.0823	5.2810	5.4578	5.6175	5.7634	5.8978	6.0225
11	4.8633	4.8939	5.0761	5.2378	5.3833	5.5160	5.6379	5.7509
12	4.7165	4.7450	4.9144	5.0644	5.1991	5.3216	5.4340	5.5380
13	4.5975	4.6243	4.7837	4.9244	5.0506	5.1651	5.2700	5.3670
14	4.4992	4.5247	4.6759	4.8091	4.9284	5.0364	5.1354	5.2266
15	4.4166	4.4410	4.5854	4.7125	4.8261	4.9289	5.0229	5.1094
16	4.3463	4.3698	4.5086	4.6305	4.7393	4.8377	4.9275	5.0102
17	4.2858	4.3085	4.4425	4.5600	4.6648	4.7594	4.8457	4.9251
18	4.2332	4.2551	4.3850	4.4987	4.6001	4.6915	4.7748	4.8514
19	4.1869	4.2083	4.3345	4.4450	4.5434	4.6320	4.7127	4.7868
20	4.1460	4.1669	4.2900	4.3976	4.4933	4.5795	4.6579	4.7299
21	4.1096	4.1300	4.2503	4.3554	4.4487	4.5328	4.6092	4.6794
22	4.0769	4.0969	4.2147	4.3175	4.4089	4.4910	4.5657	4.6342
23	4.0474	4.0671	4.1826	4.2835	4.3730	4.4534	4.5265	4.5935
24	4.0207	4.0400	4.1536	4.2527	4.3405	4.4194	4.4911	4.5567
25	3.9964	4.0154	4.1272	4.2246	4.3109	4.3885	4.4589	4.5233
26	3.9742	3.9929	4.1031	4.1990	4.2840	4.3602	4.4295	4.4928
27	3.9538	3.9723	4.0809	4.1755	4.2592	4.3344	4.4025	4.4649
28	3.9351	3.9533	4.0603	4.1539	4.2365	4.3106	4.3778	4.4392
29	3.9177	3.9357	4.0418	4.1339	4.2155	4.2886	4.3549	4.4155
30	3.9016	3.9195	4.0243	4.1154	4.1960	4.2683	4.3337	4.3936
35	3.8362	3.8533	3.9534	4.0403	4.1170	4.1857	4.2479	4.3047
40	3.7884	3.8049	3.9017	3.9855	4.0594	4.1256	4.1854	4.2399
45	3.7519	3.7680	3.8622	3.9437	4.0156	4.0798	4.1378	4.1907
50	3.7231	3.7389	3.8311	3.9108	3.9811	4.0438	4.1004	4.1520
55	3.6999	3.7154	3.8060	3.8843	3.9532	4.0147	4.0702	4.1208
60	3.6807	3.6960	3.7853	3.8624	3.9303	3.9908	4.0454	4.0951
70	3.6509	3.6658	3.7531	3.8284	3.8946	3.9537	4.0069	4.0553
80	3.6288	3.6435	3.7293	3.8033	3.8683	3.9262	3.9784	4.0259
90	3.6118	3.6263	3.7110	3.7839	3.8480	3.9051	3.9565	4.0032
100	3.5983	3.6127	3.6964	3.7686	3.8319	3.8883	3.9391	3.9853
110	3.5874	3.6016	3.6846	3.7561	3.8189	3.8747	3.9250	3.9707
120	3.5783	3.5924	3.6748	3.7458	3.8080	3.8634	3.9133	3.9586
250	3.5270	3.5405	3.6196	3.6875	3.7471	3.8000	3.8475	3.8907
500	3.5037	3.5170	3.5946	3.6612	3.7195	3.7713	3.8179	3.8601
1000	3.4922	3.5054	3.5822	3.6481	3.7059	3.7571	3.8032	3.8449
∞	3.4808	3.4938	3.5699	3.6352	3.6923	3.7430	3.7888	3.8299

Tabla III. (Continuación)

	$\alpha = 0.01$						
k:	$91 = \binom{14}{2}$	$105 = \binom{15}{2}$	$120 = \binom{16}{2}$	$136 = \binom{17}{2}$	$153 = \binom{18}{2}$	$171 = \binom{19}{2}$	$190 = \binom{20}{2}$
ν \ $100\,\alpha/k$	0.0110	0.0095	0.0083	0.0074	0.0065	0.0058	0.0053
2	95.3861	102.4622	109.5377	116.6120	123.6871	130.7612	137.8350
3	27.1309	28.4606	29.7598	31.0310	32.2766	33.4985	34.6984
4	15.1768	15.7375	16.2788	16.8026	17.3105	17.8040	18.2841
5	10.9816	11.2910	11.6067	11.9102	12.2025	12.4848	12.7578
6	8.9317	9.1612	9.3800	9.5893	9.7001	9.9931	10.1682
7	7.7685	7.9452	8.1130	8.2729	8.4258	8.5724	8.7132
8	7.0248	7.1696	7.3069	7.4373	7.5617	7.6806	7.7947
9	6.5121	6.6361	6.7533	6.8645	6.9703	7.0713	7.1679
10	6.1391	6.2485	6.3517	6.4495	6.5423	6.6308	6.7154
11	5.8562	5.9550	6.0480	6.1359	6.2193	6.2957	6.3745
12	5.6348	5.7254	5.8107	5.8911	5.9674	6.0399	6.1091
13	5.4571	5.5413	5.6204	5.6951	5.7658	5.8329	5.8969
14	5.3113	5.3904	5.4647	5.5347	5.6009	5.6637	5.7235
15	5.1897	5.2647	5.3350	5.4011	5.4637	5.5230	5.5794
16	5.0869	5.1583	5.2252	5.2882	5.3478	5.4042	5.4578
17	4.9966	5.0671	5.1313	5.1916	5.2486	5.3025	5.3538
18	4.9222	4.9882	5.0500	5.1080	5.1628	5.2146	5.2639
19	4.8554	4.9182	4.9789	5.0350	5.0879	5.1379	5.1854
20	4.7965	4.8584	4.9163	4.9707	5.0219	5.0704	5.1163
21	4.7442	4.8044	4.8607	4.9136	4.9633	5.0104	5.0551
22	4.6974	4.7552	4.8111	4.8625	4.9111	4.9569	5.0004
23	4.6553	4.7128	4.7664	4.8167	4.8641	4.9089	4.9513
24	4.6173	4.6736	4.7261	4.7753	4.8217	4.8654	4.9070
25	4.5828	4.6380	4.6894	4.7377	4.7831	4.8261	4.8667
26	4.5513	4.6055	4.6560	4.7034	4.7480	4.7901	4.8300
27	4.5224	4.5757	4.6255	4.6721	4.7159	4.7573	4.7965
28	4.4959	4.5484	4.5974	4.6432	4.6864	4.7271	4.7657
29	4.4714	4.5232	4.5714	4.6166	4.6591	4.6993	4.7372
30	4.4487	4.4998	4.5475	4.5921	4.6340	4.6735	4.7110
35	4.3569	4.4053	4.4503	4.4924	4.5320	4.5694	4.6047
40	4.2901	4.3365	4.3797	4.4201	4.4580	4.4937	4.5275
45	4.2393	4.2843	4.3261	4.3651	4.4018	4.4363	4.4689
50	4.1994	4.2432	4.2840	4.3220	4.3577	4.3913	4.4230
55	4.1672	4.2101	4.2500	4.2872	4.3222	4.3550	4.3860
60	4.1408	4.1829	4.2221	4.2586	4.2929	4.3252	4.3556
70	4.0997	4.1407	4.1788	4.2143	4.2476	4.2790	4.3085
80	4.0694	4.1096	4.1469	4.1816	4.2142	4.2449	4.2738
90	4.0461	4.0856	4.1223	4.1565	4.1886	4.2187	4.2471
100	4.0276	4.0666	4.1028	4.1366	4.1682	4.1979	4.2260
110	4.0126	4.0512	4.0870	4.1204	4.1517	4.1811	4.2088
120	4.0001	4.0384	4.0739	4.1070	4.1380	4.1671	4.1946
250	3.9303	3.9667	4.0004	4.0318	4.0612	4.0889	4.1149
500	3.8987	3.9343	3.9673	3.9980	4.0266	4.0536	4.0790
1000	3.8831	3.9183	3.9509	3.9812	4.0095	4.0362	4.0612
∞	3.8676	3.9024	3.9346	3.9646	3.9926	4.0189	4.0436

Tabla IV. Cuantiles.

Módulo Máximo Estudentizado

$|m|^{\alpha}_{k,\nu}$ (Cap. I, secc 7)

$\alpha = .05$

ν \ k	1	2	3	4	5	6	7	8
5	2.57	3.09	3.40	3.62	3.78	3.92	4.04	4.14
10	2.23	2.61	2.83	2.98	3.10	3.19	3.28	3.35
15	2.13	2.47	2.67	2.81	2.91	2.99	3.06	3.12
20	2.09	2.41	2.59	2.72	2.82	2.90	2.97	3.02
24	2.06	2.38	2.56	2.68	2.78	2.84	2.91	2.96
30	2.04	2.35	2.52	2.64	2.73	2.80	2.86	2.91
40	2.02	2.32	2.49	2.60	2.69	2.76	2.82	2.86
60	2.00	2.29	2.46	2.56	2.65	2.72	2.77	2.82
120	1.98	2.26	2.43	2.53	2.61	2.68	2.73	2.77
∞	1.96	2.23	2.39	2.49	2.57	2.64	2.69	2.73

Tabla V. Cuantiles para la Prueba de Dunnett

$d^{\alpha}_{k,\nu}$. Una Cola.

(Referencia: Cap. II, secc 4 y 5)

ν \ k	1 ($\alpha = .05$)	2	3	4	5	6	7	8	9	1 ($\alpha = .01$)	2	3	4	5	6	7	8	9
5	2.02	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
10	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
11	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
12	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
13	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
14	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
15	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
16	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
17	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
18	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
19	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
20	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
24	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
30	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
40	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
60	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
120	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
∞	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Tabla V. (Continuación) Dos Colas.

$\alpha = .05$

ν \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20
5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
10	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
11	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
12	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
13	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
14	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
15	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
16	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
17	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
18	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
19	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
20	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
24	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
30	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
40	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
60	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
120	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
∞	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Tabla V. (Continuación) Dos Colas.

$\alpha = .01$

ν \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20
5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
10	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
11	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
12	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
13	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
14	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
15	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
16	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
17	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
18	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
19	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
20	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
24	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
30	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
40	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
60	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
120	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
∞	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

TABLA VI. CUANTILES DE LA PRIMERA PRUEBA DE WILLIAMS.

Valores de $\bar{t}_{k,5}$ de una distribución de $\bar{t}_k$ cuando se supone que todas las K+1 medias, son iguales. α =0.95.

g. L. V	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	2.02	2.14	2.19	2.21	2.22	2.23	2.24	2.24	2.25	2.25
6	1.94	2.06	2.10	2.12	2.13	2.14	2.14	2.15	2.15	2.15
7	1.89	2.00	2.04	2.06	2.07	2.08	2.08	2.09	2.09	2.09
8	1.86	1.96	2.00	2.01	2.02	2.03	2.04	2.04	2.04	2.04
9	1.83	1.93	1.96	1.98	1.99	2.00	2.00	2.01	2.01	2.01
10	1.81	1.91	1.94	1.96	1.97	1.97	1.98	1.98	1.98	1.98
11	1.80	1.89	1.92	1.94	1.94	1.95	1.95	1.96	1.96	1.96
12	1.78	1.87	1.90	1.92	1.93	1.93	1.94	1.94	1.94	1.94
13	1.77	1.86	1.89	1.90	1.91	1.92	1.92	1.93	1.93	1.93
14	1.76	1.85	1.88	1.89	1.90	1.91	1.91	1.91	1.92	1.92
15	1.75	1.84	1.87	1.88	1.89	1.90	1.90	1.90	1.90	1.91
16	1.75	1.83	1.86	1.87	1.88	1.89	1.89	1.89	1.90	1.90
17	1.74	1.82	1.85	1.87	1.87	1.88	1.88	1.89	1.89	1.89
18	1.73	1.82	1.85	1.86	1.87	1.87	1.88	1.88	1.88	1.88
19	1.73	1.81	1.84	1.85	1.86	1.87	1.87	1.87	1.87	1.88
20	1.72	1.81	1.83	1.85	1.86	1.86	1.86	1.87	1.87	1.87
22	1.72	1.80	1.83	1.84	1.85	1.85	1.85	1.86	1.86	1.86
24	1.71	1.79	1.82	1.83	1.84	1.84	1.85	1.85	1.85	1.85
26	1.71	1.79	1.81	1.82	1.83	1.84	1.84	1.84	1.84	1.85
28	1.70	1.78	1.81	1.82	1.83	1.83	1.83	1.84	1.84	1.84
30	1.70	1.78	1.80	1.81	1.82	1.83	1.83	1.83	1.83	1.83
35	1.69	1.77	1.79	1.80	1.81	1.82	1.82	1.82	1.82	1.83
40	1.68	1.76	1.79	1.80	1.80	1.81	1.81	1.81	1.82	1.82
60	1.67	1.75	1.77	1.78	1.79	1.79	1.80	1.80	1.80	1.80
120	1.66	1.73	1.75	1.77	1.77	1.78	1.78	1.78	1.78	1.78
∞	1.645	1.716	1.739	1.750	1.756	1.760	1.763	1.765	1.767	1.768

(Referencia; Cap. II, secc. 2)

TABLA VI. (CONTINUACION) $\alpha = 0.99$

g. L. ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	3.36	3.50	3.55	3.57	3.59	3.60	3.60	3.61	3.61	3.61
6	3.14	3.26	3.29	3.31	3.32	3.33	3.34	3.34	3.34	3.35
7	3.00	3.10	3.13	3.15	3.16	3.16	3.17	3.17	3.17	3.17
8	2.90	2.99	3.01	3.03	3.04	3.04	3.05	3.05	3.05	3.05
9	2.82	2.90	2.93	2.94	2.95	2.95	2.96	2.96	2.96	2.96
10	2.76	2.84	2.86	2.88	2.88	2.89	2.89	2.89	2.90	2.90
11	2.72	2.79	2.81	2.82	2.83	2.83	2.84	2.84	2.84	2.84
12	2.68	2.75	2.77	2.78	2.79	2.79	2.79	2.80	2.80	2.80
13	2.65	2.72	2.74	2.75	2.75	2.76	2.76	2.76	2.76	2.76
14	2.62	2.69	2.71	2.72	2.72	2.73	2.73	2.73	2.73	2.73
15	2.60	2.66	2.68	2.69	2.70	2.70	2.70	2.71	2.71	2.71
16	2.58	2.64	2.66	2.67	2.68	2.68	2.68	2.68	2.68	2.69
17	2.57	2.63	2.64	2.65	2.66	2.66	2.66	2.66	2.67	2.67
18	2.55	2.61	2.63	2.64	2.64	2.64	2.65	2.65	2.65	2.65
19	2.54	2.60	2.61	2.62	2.63	2.63	2.63	2.63	2.63	2.63
20	2.53	2.58	2.60	2.61	2.61	2.62	2.62	2.62	2.62	2.62
22	2.51	2.56	2.58	2.59	2.59	2.59	2.60	2.60	2.60	2.60
24	2.49	2.55	2.56	2.57	2.57	2.57	2.58	2.58	2.58	2.58
26	2.48	2.53	2.55	2.55	2.56	2.56	2.56	2.56	2.56	2.56
28	2.47	2.52	2.53	2.54	2.54	2.55	2.55	2.55	2.55	2.55
30	2.46	2.51	2.52	2.53	2.53	2.54	2.54	2.54	2.54	2.54
35	2.44	2.49	2.50	2.51	2.51	2.51	2.51	2.52	2.52	2.52
40	2.42	2.47	2.48	2.48	2.49	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50
60	2.39	2.43	2.45	2.45	2.46	2.46	2.46	2.46	2.46	2.46
120	2.36	2.40	2.41	2.42	2.42	2.42	2.42	2.42	2.42	2.43
∞	2.326	2.366	2.377	2.382	2.385	2.386	2.387	2.388	2.389	2.389

TABLA VII. CUANTILES DE LA SEGUNDA PRUEBA DE WILLIAMS.

Valores de $\bar{t}_{i,\alpha}$ para w = 1 y un coeficiente de extrapolación β (dado en el suscrito superior) para α = 0.050.

g. L. ν	NIVEL DE DOSIS 2	3	4	5	6	8	10
5	2.142^{2}	2.186^{4}	2.209^{5}	2.223^{5}	2.232^{6}	2.243^{6}	2.250^{6}
6	2.058^{2}	2.098^{4}	2.119^{5}	2.131^{5}	2.139^{6}	2.149^{6}	2.154^{6}
7	2.002^{2}	2.039^{4}	2.058^{5}	2.069^{5}	2.076^{6}	2.085^{6}	2.091^{7}
8	1.962^{2}	1.997^{4}	2.014^{5}	2.024^{5}	2.031^{6}	2.040^{6}	2.045^{7}
9	1.931^{2}	1.965^{4}	1.981^{5}	1.991^{5}	1.998^{6}	2.006^{6}	2.010^{7}
10	1.908^{3}	1.940^{4}	1.956^{5}	1.965^{5}	1.971^{6}	1.979^{6}	1.983^{7}
11	1.889^{3}	1.920^{4}	1.935^{5}	1.944^{5}	1.950^{6}	1.958^{6}	1.962^{7}
12	1.873^{3}	1.903^{4}	1.918^{5}	1.927^{5}	1.933^{6}	1.940^{6}	1.944^{7}
13	1.860^{3}	1.890^{4}	1.904^{5}	1.913^{5}	1.919^{6}	1.926^{6}	1.930^{7}
14	1.849^{3}	1.878^{4}	1.892^{5}	1.901^{5}	1.906^{6}	1.913^{6}	1.917^{7}
15	1.840^{3}	1.868^{4}	1.882^{5}	1.891^{5}	1.896^{6}	1.903^{6}	1.907^{7}
16	1.831^{3}	1.860^{4}	1.873^{5}	1.882^{5}	1.887^{6}	1.893^{6}	1.897^{7}
17	1.824^{3}	1.852^{4}	1.866^{5}	1.874^{5}	1.879^{6}	1.885^{6}	1.889^{7}
18	1.818^{3}	1.845^{4}	1.859^{5}	1.867^{5}	1.872^{6}	1.878^{6}	1.882^{7}
19	1.812^{3}	1.840^{4}	1.853^{5}	1.861^{5}	1.866^{6}	1.872^{6}	1.876^{7}
20	1.807^{3}	1.834^{4}	1.847^{5}	1.855^{5}	1.860^{6}	1.866^{6}	1.870^{7}
22	1.798^{3}	1.825^{4}	1.838^{5}	1.846^{5}	1.851^{6}	1.857^{6}	1.860^{7}
24	1.791^{3}	1.818^{4}	1.830^{5}	1.838^{5}	1.843^{6}	1.849^{6}	1.852^{7}
26	1.785^{3}	1.811^{4}	1.824^{5}	1.831^{5}	1.836^{6}	1.842^{6}	1.846^{7}
28	1.780^{3}	1.806^{4}	1.819^{5}	1.826^{5}	1.831^{6}	1.836^{6}	1.840^{7}
30	1.776^{3}	1.801^{4}	1.814^{5}	1.821^{5}	1.826^{6}	1.832^{6}	1.835^{7}
35	1.767^{3}	1.792^{4}	1.804^{5}	1.811^{5}	1.816^{6}	1.822^{6}	1.825^{7}
40	1.761^{3}	1.785^{4}	1.797^{5}	1.804^{5}	1.809^{6}	1.814^{6}	1.818^{7}
60	1.746^{3}	1.770^{4}	1.781^{5}	1.788^{5}	1.792^{6}	1.798^{6}	1.801^{7}
120	1.731^{3}	1.754^{4}	1.765^{5}	1.772^{5}	1.776^{6}	1.781^{6}	1.784^{7}
∞	1.716^{3}	1.739^{4}	1.750^{5}	1.756^{5}	1.760^{6}	1.765^{6}	1.768^{7}

(Referencia: Cap.II, secc.3)

TABLA VII. (CONTINUACION) $\alpha = 0.025$

g. L. ν	NIVEL DE DOSIS 2	3	4	5	6	8	10
5	2.699^{3}	2.743^{5}	2.766^{6}	2.779^{6}	2.788^{7}	2.799^{7}	2.806^{8}
6	2.559^{3}	2.597^{5}	2.617^{6}	2.628^{6}	2.635^{7}	2.645^{7}	2.650^{8}
7	2.466^{3}	2.501^{5}	2.518^{6}	2.528^{6}	2.535^{7}	2.543^{7}	2.548^{8}
8	2.400^{3}	2.432^{5}	2.448^{6}	2.457^{6}	2.463^{7}	2.470^{7}	2.475^{8}
9	2.351^{3}	2.381^{5}	2.395^{6}	2.404^{6}	2.410^{7}	2.416^{7}	2.421^{8}
10	2.313^{3}	2.341^{5}	2.355^{6}	2.363^{6}	2.368^{6}	2.375^{7}	2.379^{7}
11	2.283^{3}	2.310^{5}	2.323^{6}	2.330^{6}	2.335^{6}	2.342^{7}	2.345^{7}
12	2.258^{3}	2.284^{5}	2.297^{6}	2.304^{6}	2.309^{6}	2.315^{7}	2.318^{7}
13	2.238^{3}	2.263^{5}	2.275^{5}	2.282^{6}	2.286^{6}	2.292^{7}	2.295^{7}
14	2.200^{3}	2.245^{5}	2.256^{5}	2.263^{6}	2.268^{6}	2.273^{7}	2.276^{7}
15	2.205^{3}	2.229^{5}	2.241^{5}	2.247^{6}	2.252^{6}	2.257^{7}	2.260^{7}
16	2.193^{3}	2.216^{5}	2.227^{5}	2.234^{6}	2.238^{6}	2.243^{7}	2.246^{7}
17	2.181^{3}	1.204^{4}	2.215^{5}	2.222^{6}	2.226^{6}	2.231^{7}	2.234^{7}
18	2.170^{3}	2.194^{4}	2.205^{5}	2.211^{6}	2.215^{6}	2.220^{7}	2.223^{7}
19	2.163^{3}	2.185^{4}	2.195^{5}	2.202^{6}	2.205^{6}	2.210^{7}	2.213^{7}
20	2.155^{3}	2.177^{4}	2.187^{5}	2.193^{6}	2.197^{6}	2.202^{7}	2.205^{7}
22	2.141^{3}	2.163^{4}	2.173^{5}	2.179^{6}	2.183^{6}	2.187^{7}	2.190^{7}
24	2.130^{3}	2.151^{4}	2.161^{5}	2.167^{6}	2.171^{6}	2.175^{7}	2.178^{7}
26	2.121^{3}	2.142^{4}	2.151^{5}	2.157^{6}	2.161^{6}	2.165^{7}	2.168^{7}
28	2.113^{3}	2.113^{4}	2.143^{5}	2.149^{6}	2.152^{6}	2.156^{7}	2.159^{7}
30	2.106^{3}	2.126^{4}	2.136^{5}	2.141^{6}	2.145^{6}	2.149^{7}	2.151^{7}
35	2.093^{3}	2.112^{4}	2.122^{5}	2.127^{6}	2.130^{6}	2.134^{7}	2.137^{7}
40	2.083^{3}	2.102^{4}	2.111^{5}	2.116^{6}	2.119^{6}	2.123^{6}	2.126^{7}
60	2.060^{3}	2.078^{4}	2.087^{5}	2.092^{6}	2.095^{6}	2.099^{6}	2.101^{7}
120	2.037^{3}	2.055^{4}	2.063^{5}	2.068^{6}	2.071^{6}	2.074^{6}	2.076^{7}
∞	2.015^{3}	2.032^{4}	2.040^{5}	2.044^{6}	2.047^{6}	2.050^{6}	2.052^{6}

TABLA VII (CONTINUACION) $\alpha = 0.010$

g. L. ν	NIVEL DE DOSIS 2	3	4	5	6	8	10
5	3.501^{4}	3.548^{6}	3.572^{7}	3.586^{8}	3.595^{9}	3.607^{9}	3.613^{9}
6	3.256^{4}	3.294^{6}	3.313^{7}	3.324^{8}	3.332^{8}	3.341^{9}	3.347^{9}
7	3.097^{4}	3.130^{6}	3.146^{7}	3.155^{7}	3.161^{8}	3.169^{8}	3.175^{9}
8	2.985^{4}	3.015^{6}	3.029^{6}	3.037^{7}	3.042^{7}	3.049^{8}	3.051^{9}
9	2.903^{4}	2.930^{5}	2.943^{6}	2.950^{7}	2.955^{7}	2.961^{8}	2.962^{8}
10	2.840^{3}	2.865^{5}	2.877^{6}	2.883^{7}	2.888^{7}	2.893^{8}	2.895^{8}
11	2.791^{3}	2.814^{5}	2.824^{6}	2.831^{7}	2.835^{7}	2.840^{7}	2.845^{7}
12	2.750^{3}	2.772^{5}	2.782^{6}	2.788^{6}	2.792^{7}	2.797^{7}	2.799^{7}
13	2.717^{3}	2.738^{5}	2.747^{6}	2.753^{6}	2.757^{7}	2.761^{7}	2.764^{7}
14	2.689^{3}	2.709^{5}	2.718^{6}	2.723^{6}	2.727^{7}	2.731^{7}	2.733^{7}
15	2.665^{3}	2.684^{5}	2.693^{6}	2.698^{6}	2.701^{7}	2.705^{7}	2.706^{7}
16	2.644^{3}	2.663^{5}	2.671^{6}	2.676^{6}	2.680^{7}	2.683^{7}	2.685^{7}
17	2.626^{3}	2.644^{5}	2.653^{6}	2.658^{6}	2.661^{6}	2.664^{7}	2.666^{7}
18	2.610^{3}	2.628^{5}	2.636^{5}	2.641^{6}	2.644^{6}	2.647^{7}	2.650^{7}
19	2.596^{3}	2.614^{5}	2.622^{5}	2.626^{6}	2.629^{6}	2.633^{7}	2.635^{7}
20	2.584^{3}	2.601^{5}	2.609^{5}	2.613^{6}	2.616^{6}	2.619^{7}	2.621^{7}
22	2.563^{3}	2.579^{5}	2.586^{5}	2.591^{6}	2.593^{6}	2.597^{7}	2.599^{7}
24	2.545^{3}	2.561^{5}	2.568^{5}	2.572^{6}	2.575^{6}	2.578^{6}	2.580^{7}
26	2.531^{3}	2.546^{4}	2.553^{5}	2.557^{6}	2.559^{6}	2.562^{6}	2.564^{6}
28	2.518^{3}	2.533^{4}	2.540^{5}	2.544^{6}	2.546^{6}	2.549^{6}	2.551^{6}
30	2.507^{3}	2.522^{4}	2.529^{5}	2.533^{6}	2.535^{6}	2.538^{6}	2.540^{6}
35	2.486^{3}	2.501^{4}	2.507^{5}	2.511^{6}	2.513^{6}	2.516^{6}	2.517^{6}
40	2.471^{3}	2.484^{4}	2.491^{5}	2.494^{5}	2.496^{6}	2.499^{6}	2.500^{6}
60	2.453^{3}	2.448^{4}	2.435^{5}	2.457^{5}	2.459^{5}	2.461^{6}	2.462^{6}
120	2.400^{3}	2.412^{4}	2.417^{5}	2.420^{5}	2.422^{5}	2.424^{5}	2.425^{6}
∞	2.366^{3}	2.377^{4}	2.382^{5}	2.385^{5}	2.386^{5}	2.388^{5}	2.389^{5}

TABLA VII. (CONTINUACION) $\alpha = 0.005$

g. L. ν	NIVEL DE DOSIS 2	3	4	5	6	8	10
5	4.179^{5}	4.229^{7}	4.255^{9}	4.270^{10}	4.279^{10}	4.292^{11}	4.299^{11}
6	3.825^{5}	3.864^{7}	3.883^{8}	3.895^{9}	3.902^{9}	3.912^{10}	3.917^{10}
7	3.599^{4}	3.631^{6}	3.647^{7}	3.657^{8}	3.663^{9}	3.670^{9}	3.674^{10}
8	3.443^{4}	3.471^{6}	3.484^{7}	3.492^{8}	3.497^{8}	3.504^{9}	3.507^{9}
9	3.329^{4}	3.354^{6}	3.366^{7}	3.373^{7}	3.377^{8}	3.383^{8}	3.886^{9}
10	3.242^{4}	3.265^{6}	3.275^{6}	3.281^{7}	3.286^{7}	3.290^{8}	3.293^{8}
11	3.173^{4}	3.194^{5}	3.204^{6}	3.210^{7}	3.214^{7}	3.218^{8}	3.221^{8}
12	3.118^{4}	3.138^{5}	3.147^{6}	3.152^{7}	3.156^{7}	3.160^{7}	3.162^{8}
13	3.073^{4}	3.091^{5}	3.100^{6}	3.105^{6}	3.108^{7}	3.112^{7}	3.114^{7}
14	3.035^{4}	3.052^{5}	3.060^{6}	3.065^{6}	3.068^{6}	3.072^{7}	3.074^{7}
15	3.003^{3}	3.019^{5}	3.027^{6}	3.031^{6}	3.034^{6}	3.037^{7}	3.039^{7}
16	2.957^{3}	2.991^{5}	2.998^{5}	3.002^{6}	3.005^{6}	3.008^{7}	3.010^{7}
17	2.951^{3}	2.966^{5}	2.973^{5}	2.977^{6}	2.980^{6}	2.938^{7}	2.984^{7}
18	2.929^{3}	2.944^{5}	2.951^{5}	2.955^{6}	2.958^{6}	2.960^{6}	2.962^{7}
19	2.911^{3}	2.925^{4}	2.932^{5}	2.936^{6}	2.938^{6}	2.941^{6}	2.942^{7}
20	2.894^{3}	2.908^{4}	2.915^{5}	2.918^{6}	2.920^{6}	2.923^{6}	2.925^{7}
22	2.866^{3}	2.879^{4}	2.885^{5}	2.889^{6}	2.891^{6}	2.893^{6}	2.895^{6}
24	2.842^{3}	2.855^{4}	2.861^{5}	2.864^{5}	2.866^{6}	2.869^{6}	2.870^{6}
26	2.823^{3}	2.835^{4}	2.841^{5}	2.844^{5}	2.846^{6}	2.848^{6}	2.850^{6}
28	2.806^{3}	2.819^{4}	2.824^{5}	2.827^{5}	2.829^{5}	2.831^{6}	2.832^{6}
30	2.792^{3}	2.804^{4}	2.809^{5}	2.812^{5}	2.814^{5}	2.816^{6}	2.817^{6}
35	2.764^{3}	2.776^{4}	2.781^{5}	2.783^{5}	2.785^{5}	2.787^{5}	2.788^{5}
40	2.744^{3}	2.755^{4}	2.759^{5}	2.762^{5}	2.764^{5}	2.765^{5}	2.766^{5}
60	2.697^{3}	2.707^{4}	2.711^{4}	2.713^{5}	2.715^{5}	2.716^{5}	2.717^{5}
120	2.651^{3}	2.660^{4}	2.664^{4}	2.666^{4}	2.667^{5}	2.669^{5}	2.699^{5}
∞	2.607^{3}	2.615^{4}	2.618^{4}	2.620^{4}	2.621^{4}	2.623^{5}	2.623^{5}

TABLA VIII. CUANTILES DE LA PRUEBA DE PAULSON.

valores de $\Gamma(\bar{\lambda})$

α / K+1	.02	.05
3	$\bar{\lambda}=2.326$ $.981\geq P(\bar{\lambda})\geq .98$	$\bar{\lambda}=1{,}960$ $.955\geq P(\bar{\lambda})\geq .95$
6	$\bar{\lambda}=2.652$ $.984\geq P(\bar{\lambda})\geq .98$	$\bar{\lambda}=2.326$ $.963\geq P(\bar{\lambda})\geq .95$

LIMITE SUPERIOR PARA $1-P(\alpha;\ \bar{\lambda};\ k+1,\Delta)$

K+1	β / α	.05	.02
3	.20	.2025	.2008
	.05	.0502	.0500
6	.20	.2031	.2010
	.05	.0501	.0500

(Referencia: CapII,secc.4)

TAGLA IX. CUANTILES PARA LA PRUEBA DE GUPTA & SOBEL*

P	P*			
	.75	.90	.95	.99
1	0.95	1.81	2.33	3.20
2	1.43	2.23	2.71	3.42
3	1.68	2.45	2.92	3.80
4	1.85	2.60	3.06	3.92
5	1.97	2.71	3.16	4.01
6	2.06	2.80	3.21	4.09
7	2.14	2.87	3.31	4.15
8	2.21	2.93	3.37	4.20
9	2.26	2.98	3.42	4.25
10	2.31	3.03	3.46	4.29
15	2.50	3.20	3.63	4.41
20	2.6[illegible]	3.32	3.74	4.54
30	2.79	3.48	3.89	4.68
40	2.90	3.58	4.00	4.73
50	2.99	3.67	4.08	4.85

(Referencia: Cap.II,secc.6)

*La Tabla IX-A, aparece al final del Apéndice.

Tabla X. Cuantiles de la Distribución Aumentada de Rangos Estudentizados $q_{\alpha,k,\nu}$

$\alpha = 0.01$

ν	k = 2	3	4	5	6	7	8
5	5.903 (5.702)	7.030 (6.976)	7.823 (7.804)	8.429 (8.421)	8.916 (8.913)	9.322 (9.321)	9.669
7	5.063 (4.949)	5.947 (5.919)	6.551 (6.543)	7.008 (7.005)	7.374 (7.373)	7.679	7.939
10	4.550 (4.482)	5.284 (5.270)	5.773 (5.769)	6.138 (6.136)	6.428	6.669	6.875
12	4.373 (4.320)	5.056 (5.046)	5.505 (5.502)	5.837 (5.836)	6.101	6.321	6.507
16	4.169 (4.131)	4.792 (4.786)	5.194 (5.192)	5.489	5.722	5.915	6.079
20	4.055 (4.024)	4.644 (4.639)	5.019 (5.018)	5.294	5.510	5.688	5.839
24	3.982 (3.956)	4.549 (4.546)	4.908 (4.907)	5.169 (5.168)	5.374	5.542	5.685
30	3.912 (3.889)	4.458 (4.455)	4.800 (4.799)	5.048	5.242	5.401	5.536
40	3.844 (3.825)	4.370 (4.367)	4.696	4.931	5.115 (5.114)	5.265	5.392
60	3.778 (3.762)	4.284 (4.282)	4.595	4.818	4.991	5.133	5.253
120	3.714 (3.702)	4.201 (4.200)	4.497	4.709	4.872	5.005	5.118
∞	3.653 (3.643)	4.121 (4.120)	4.403	4.603	4.757	4.882	4.987

$\alpha = 0.05$

ν	k = 2	3	4	5	6	7
5	3.832 (3.635)	4.654 (4.602)	5.236 (5.218)	5.680 (5.673)	6.036 (6.033)	6.331 (6.330)
7	3.486 (3.344)	4.198 (4.165)	4.692 (4.681)	5.064 (5.060)	5.360 (5.359)	5.606
10	3.259 (3.151)	3.899 (3.877)	4.333 (4.327)	4.656 (4.654)	4.913 (4.912)	5.124
12	3.177 (3.082)	3.791 (3.773)	4.204 (4.199)	4.509 (4.508)	4.751	4.950
16	3.080 (2.998)	3.663 (3.649)	4.050 (4.046)	4.334 (4.333)	4.557	4.741
20	3.024 (2.950)	3.590 (3.578)	3.961 (3.958)	4.233 (4.232)	4.446 (4.445)	4.620
24	2.988 (2.919)	3.542 (3.532)	3.904 (3.901)	4.167 (4.166)	4.373	4.541
30	2.952 (2.888)	3.496 (3.486)	3.847 (3.845)	4.103 (4.102)	4.302	4.464
40	2.918 (2.858)	3.450 (3.442)	3.792 (3.791)	4.040 (4.039)	4.232	4.389
60	2.884 (2.829)	3.406 (3.399)	3.738 (3.737)	3.978 (3.977)	4.163	4.314
120	2.851 (2.800)	3.362 (3.356)	3.686 (3.685)	3.917	4.098	4.241
∞	2.819 (2.772)	3.320 (3.314)	3.634 (3.633)	3.858	4.030	4.170

(Referencia: Cap.III, secc.4; *la Tabla XI, aparece al final)

$\alpha = 0.10$

ν	k = 2	3	4	5	6	7	8
5	3.060 (2.850)	3.772 (3.717)	4.282 (4.264)	4.671 (4.664)	4.982 (4.979)	5.239 (5.238)	5.458
7	2.848 (2.680)	3.491 (3.451)	3.943 (3.931)	4.285 (4.280)	(4.556) (4.555)	4.781 (4.780)	4.972
10	2.704 (2.563)	3.300 (3.270)	3.712 (3.704)	4.021 (4.018)	4.265 (4.264)	4.460 (4.465)	4.636
12	2.651 (2.521)	3.230 (3.204)	3.628 (3.621)	3.924 (3.922)	4.157 (4.156)	4.349	4.511
16	2.588 (2.469)	3.146 (3.124)	3.526 (3.520)	3.806 (3.804)	4.027 (4.026)	4.207	4.360
20	2.551 (2.439)	3.097 (3.078)	3.466 (3.462)	3.738 (3.736)	3.950	4.124	4.271
24	2.527 (2.420)	3.065 (3.047)	3.427 (3.423)	3.693 (3.692)	3.901 (3.900)	4.070	4.213
30	2.503 (2.400)	3.034 (3.017)	3.389 (3.386)	3.649 (3.648)	3.851	4.016	4.155
40	2.480 (2.381)	3.003 (2.988)	3.352 (3.349)	3.605	3.803	3.963	4.099
60	2.457 (2.363)	2.972 (2.959)	3.315 (3.312)	3.563 (3.562)	3.755	3.911	4.042
120	2.434 (2.344)	2.943 (2.930)	3.278 (3.276)	3.520	3.707	3.859	3.987
∞	2.412 (2.326)	2.913 (2.902)	3.243 (3.240)	3.479 (3.478)	3.661	3.808	3.931

$\alpha = 0.20$

ν	k = 2	3	4	5	6	7	8
5	2.326 (2.087)	2.935 (2.872)	3.379 (3.358)	3.718 (3.712)	3.991 (3.988)	4.215 (4.214)	4.406 (4.405)
7	2.213 (2.001)	2.763 (2.731)	3.195 (3.170)	3.508 (3.503)	3.757 (3.756)	3.963 (3.962)	4.137 (4.136)
10	2.133 (1.941)	2.676 (2.632)	3.066 (3.053)	3.359 (3.355)	3.592 (3.590)	3.783 (3.782)	3.944
12	2.103 (1.918)	2.636 (2.596)	3.017 (3.006)	3.303 (3.300)	3.530 (3.529)	3.715	3.672
16	2.066 (1.891)	2.587 (2.551)	2.958 (2.948)	3.235 (3.232)	3.453 (3.452)	3.632 (3.631)	3.782
20	2.045 (1.874)	2.558 (2.524)	2.923 (2.914)	3.195 (3.192)	3.408 (3.407)	3.582	3.729
24	2.031 (1.864)	2.539 (2.507)	2.900 (2.892)	3.168 (3.166)	3.378 (3.377)	3.549	3.694
30	2.017 (1.853)	2.521 (2.490)	2.877 (2.870)	3.142 (3.140)	3.348	3.517	3.659
40	2.003 (1.843)	2.502 (2.473)	2.855 (2.848)	3.116 (3.114)	3.319 (3.318)	3.485 (3.484)	3.624
60	1.990 (1.833)	2.464 (2.456)	2.833 (2.826)	3.090 (3.089)	3.290	3.453 (3.452)	3.589
120	1.976 (1.822)	2.466 (2.440)	2.811 (2.805)	3.064 (3.063)	3.261 (3.260)	3.421 (3.420)	3.554
∞	1.963 (1.812)	2.448 (2.424)	2.789 (2.784)	3.039 (3.037)	3.232	3.389	3.520

Tabla XII. Cuantiles de la Distribución de Q_p para k grupos y ν g.l.
(Referencia: Cap.III,secc.5; Cap.IV,secc.7)

$\alpha = 0.05$

ν	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=10$	$k=12$	$k=16$	$k=20$
						$p=1$					
2	7·96	11·00	12·99	14·46	15·61	16·50	17·36	18·65	19·68	21·23	22·40
3	5·42	7·18	8·33	9·17	9·84	10·39	10·86	11·63	12·22	13·14	13·83
4	4·51	5·84	6·69	7·32	7·82	8·23	8·58	9·15	9·61	10·30	10·82
5	4·06	5·17	5·88	6·40	6·82	7·16	7·45	7·93	8·30	8·88	9·32
6	3·79	4·78	5·40	5·86	6·23	6·53	6·78	7·20	7·53	8·04	8·43
7	3·62	4·52	5·09	5·51	5·84	6·11	6·34	6·72	7·03	7·49	7·84
8	3·49	4·34	4·87	5·26	5·57	5·82	6·03	6·39	6·67	7·10	7·43
10	3·32	4·10	4·58	4·93	5·21	5·43	5·63	5·94	6·19	6·58	6·87
12	3·22	3·95	4·40	4·73	4·98	5·19	5·37	5·67	5·90	6·26	6·53
14	3·15	3·85	4·28	4·59	4·83	5·03	5·20	5·48	5·70	6·03	6·29
16	3·10	3·77	4·19	4·49	4·72	4·91	5·07	5·34	5·55	5·87	6·12
18	3·06	3·72	4·12	4·41	4·63	4·82	4·98	5·23	5·44	5·75	5·98
20	3·03	3·67	4·07	4·35	4·57	4·75	4·90	5·15	5·35	5·65	5·88
24	2·98	3·61	3·99	4·26	4·47	4·65	4·79	5·03	5·22	5·51	5·73
30	2·94	3·55	3·91	4·18	4·38	4·54	4·69	4·91	5·09	5·37	5·58
40	2·89	3·49	3·84	4·09	4·29	4·45	4·58	4·80	4·97	5·23	5·43
60	2·85	3·43	3·77	4·01	4·20	4·35	4·48	4·69	4·85	5·10	5·29
120	2·81	3·37	3·70	3·93	4·11	4·26	4·38	4·58	4·72	4·97	5·15
						$p=2$					
2	9·60	13·18	15·59	17·36	18·75	19·89	20·86	22·42	23·66	25·54	26·94
3	6·21	8·27	9·60	10·59	11·37	12·01	12·56	13·44	14·15	15·22	16·02
4	5·04	6·54	7·51	8·23	8·80	9·26	9·66	10·31	10·83	11·61	12·21
5	4·45	5·68	6·48	7·06	7·52	7·90	8·23	8·76	9·18	9·83	10·31
6	4·10	5·18	5·87	6·37	6·77	7·10	7·38	7·84	8·21	8·77	9·20
7	3·87	4·85	5·47	5·92	6·28	6·58	6·83	7·24	7·57	8·08	8·46
8	3·70	4·61	5·19	5·61	5·94	6·21	6·44	6·82	7·12	7·59	7·94
10	3·49	4·31	4·82	5·19	5·49	5·73	5·93	6·27	6·54	6·95	7·26
12	3·35	4·12	4·59	4·93	5·20	5·43	5·62	5·92	6·17	6·55	6·83
14	3·26	3·99	4·44	4·76	5·01	5·22	5·40	5·69	5·92	6·27	6·54
16	3·19	3·90	4·32	4·63	4·88	5·07	5·24	5·52	5·74	6·07	6·33
18	3·14	3·82	4·24	4·54	4·77	4·96	5·13	5·39	5·60	5·92	6·17
20	3·10	3·77	4·17	4·46	4·69	4·88	5·03	5·29	5·49	5·81	6·04
24	3·04	3·69	4·08	4·35	4·57	4·75	4·90	5·14	5·34	5·63	5·86
30	2·99	3·61	3·98	4·25	4·46	4·62	4·77	5·00	5·18	5·46	5·68
40	2·93	3·53	3·89	4·15	4·34	4·50	4·64	4·86	5·04	5·30	5·50
60	2·88	3·46	3·80	4·05	4·24	4·39	4·52	4·73	4·89	5·14	5·33
120	2·82	3·38	3·72	3·95	4·13	4·28	4·40	4·60	4·75	4·99	5·17
						$p=3$					
2	10·83	15·06	17·82	19·85	21·45	22·76	23·86	25·66	27·08	29·23	30·83
3	6·92	9·23	10·73	11·84	12·72	13·44	14·06	15·05	15·84	17·05	17·95
4	5·51	7·18	8·25	9·05	9·67	10·19	10·63	11·35	11·92	12·79	13·45
5	4·81	6·16	7·02	7·66	8·17	8·58	8·94	9·52	9·98	10·69	11·22
6	4·38	5·55	6·30	6·84	7·28	7·64	7·94	8·44	8·83	9·44	9·90
7	4·11	5·16	5·82	6·31	6·70	7·01	7·29	7·73	8·08	8·63	9·03
8	3·91	4·88	5·49	5·93	6·29	6·58	6·83	7·23	7·55	8·05	8·42
10	3·65	4·51	5·05	5·44	5·75	6·01	6·22	6·58	6·86	7·29	7·62
12	3·48	4·28	4·78	5·14	5·42	5·65	5·85	6·17	6·42	6·82	7·12
14	3·37	4·13	4·59	4·93	5·19	5·41	5·59	5·89	6·13	6·50	6·78
16	3·29	4·01	4·46	4·78	5·03	5·23	5·41	5·69	5·92	6·27	6·53
18	3·23	3·93	4·35	4·66	4·90	5·10	5·27	5·54	5·76	6·09	6·34
20	3·18	3·86	4·28	4·57	4·81	5·00	5·16	5·42	5·63	5·96	6·20
24	3·11	3·76	4·16	4·44	4·67	4·85	5·00	5·25	5·45	5·75	5·98
30	3·04	3·67	4·05	4·32	4·53	4·70	4·85	5·08	5·27	5·56	5·78
40	2·97	3·57	3·94	4·20	4·40	4·56	4·70	4·92	5·10	5·37	5·57
60	2·90	3·49	3·83	4·08	4·27	4·42	4·56	4·77	4·93	5·19	5·38
120	2·84	3·40	3·73	3·97	4·15	4·30	4·42	4·62	4·77	5·01	5·19

Tabla XII. (Continuación), $\alpha = 0.05$

ν	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=10$	$k=12$	$k=16$	$k=20$
						$p=1$					
2	19·09	26·02	30·67	33·03	36·68	38·70	40·60	43·59	45·95	49·55	52·24
3	10·28	13·32	15·32	16·60	17·08	18·95	19·77	21·12	22·10	23·82	25·05
4	7·08	9·64	10·93	11·89	12·05	13·28	13·82	14·70	15·40	16·48	17·29
5	6·49	7·99	8·97	9·70	10·28	10·70	11·17	11·84	12·38	13·20	13·83
6	5·83	7·08	7·88	8·48	8·00	9·36	9·70	10·25	10·70	11·38	11·90
7	5·41	6·50	7·20	7·72	8·14	8·48	8·77	9·26	9·64	10·24	10·69
8	5·12	6·11	6·74	7·20	7·58	7·88	8·16	8·58	8·92	9·40	9·87
10	4·76	5·61	6·15	6·55	6·86	7·13	7·35	7·72	8·01	8·47	8·83
12	4·54	5·31	5·79	6·15	6·43	6·67	6·87	7·20	7·46	7·87	8·18
14	4·39	5·11	5·56	5·89	6·15	6·36	6·55	6·85	7·09	7·47	7·75
16	4·28	4·96	5·39	5·70	5·95	6·15	6·32	6·60	6·83	7·18	7·45
18	4·20	4·86	5·26	5·56	5·79	5·99	6·16	6·42	6·63	6·96	7·22
20	4·14	4·77	5·17	5·45	5·68	5·86	6·02	6·27	6·48	6·80	7·04
24	4·05	4·65	5·02	5·29	5·50	5·68	5·83	6·07	6·26	6·56	6·78
30	3·96	4·54	4·89	5·14	5·34	5·50	5·64	5·87	6·05	6·32	6·53
40	3·88	4·43	4·76	5·00	5·19	5·34	5·47	5·68	5·85	6·10	6·30
60	3·79	4·32	4·64	4·86	5·04	5·18	5·30	5·50	5·65	5·89	6·07
120	3·72	4·22	4·52	4·73	4·89	5·03	5·14	5·32	5·47	5·69	5·85
						$p=2$					
2	23·11	31·55	37·09	41·19	44·41	47·06	49·31	52·94	55·82	60·20	63·47
3	11·97	15·56	17·91	19·66	21·05	22·19	23·16	24·75	26·01	27·93	29·38
4	8·69	10·95	12·43	13·54	14·41	15·14	15·76	16·77	17·58	18·81	19·74
5	7·20	8·89	9·99	10·81	11·47	12·01	12·47	13·23	13·84	14·77	15·47
6	6·36	7·75	8·64	9·31	9·85	10·29	10·66	11·28	11·77	12·54	13·11
7	5·84	7·03	7·80	8·37	8·83	9·21	9·53	10·06	10·49	11·14	11·64
8	5·48	6·54	7·23	7·74	8·14	8·48	8·76	9·23	9·61	10·19	10·63
10	5·02	5·93	6·51	6·93	7·27	7·55	7·79	8·19	8·50	8·99	9·36
12	4·74	5·56	6·07	6·45	6·75	7·00	7·21	7·56	7·84	8·27	8·60
14	4·56	5·31	5·78	6·13	6·40	6·63	6·82	7·14	7·40	7·79	8·09
16	4·42	5·14	5·58	5·90	6·16	6·37	6·55	6·85	7·08	7·45	7·73
18	4·32	5·00	5·43	5·73	5·98	6·18	6·35	6·63	6·85	7·19	7·46
20	4·25	4·90	5·31	5·60	5·84	6·03	6·19	6·46	6·67	7·00	7·25
24	4·14	4·76	5·14	5·42	5·63	5·81	5·96	6·21	6·41	6·71	6·95
30	4·03	4·62	4·98	5·24	5·44	5·61	5·75	5·98	6·16	6·44	6·66
40	3·93	4·48	4·82	5·07	5·26	5·41	5·54	5·76	5·93	6·19	6·38
60	3·83	4·36	4·68	4·90	5·08	5·22	5·35	5·54	5·70	5·94	6·12
120	3·73	4·24	4·54	4·75	4·91	5·05	5·16	5·35	5·49	5·71	5·88
						$p=3$					
2	26·54	36·26	42·64	47·36	51·07	54·13	56·71	60·90	64·21	69·25	73·01
3	13·45	17·51	20·17	22·15	23·72	25·01	26·11	27·90	29·32	31·50	33·13
4	9·59	12·11	13·77	15·00	15·98	16·79	17·47	18·60	19·50	20·87	21·91
5	7·83	9·70	10·92	11·82	12·54	13·14	13·65	14·48	15·15	16·17	16·95
6	6·85	8·36	9·34	10·07	10·65	11·13	11·54	12·22	12·75	13·59	14·21
7	6·23	7·52	8·36	8·98	9·47	9·88	10·23	10·80	11·26	11·97	12·51
8	5·81	6·95	7·69	8·23	8·67	9·03	9·33	9·84	10·24	10·87	11·34
10	5·27	6·23	6·84	7·30	7·66	7·96	8·21	8·63	8·96	9·48	9·88
12	4·94	5·80	6·34	6·74	7·05	7·31	7·54	7·90	8·20	8·65	9·00
14	4·72	5·51	6·00	6·36	6·65	6·89	7·09	7·42	7·69	8·10	8·41
16	4·56	5·30	5·76	6·10	6·37	6·59	6·77	7·08	7·33	7·71	8·00
18	4·44	5·15	5·59	5·90	6·16	6·36	6·54	6·83	7·06	7·42	7·69
20	4·35	5·03	5·45	5·75	5·99	6·19	6·36	6·63	6·85	7·19	7·45
24	4·22	4·86	5·25	5·54	5·76	5·94	6·10	6·35	6·55	6·87	7·11
30	4·10	4·70	5·06	5·33	5·54	5·71	5·85	6·08	6·27	6·56	6·78
40	3·98	4·54	4·88	5·13	5·32	5·48	5·61	5·83	6·00	6·27	6·47
60	3·86	4·39	4·72	4·95	5·12	5·27	5·39	5·59	5·75	6·00	6·18
120	3·75	4·25	4·55	4·77	4·94	5·07	5·18	5·37	5·51	5·74	5·90

Tabla XIII. Valores de c para $1 - \alpha = 0.95$ (Referencia: Cap.I, secc.1; Cap.III, secc.6)

$$\int_{-\infty}^{c} f^{(\nu)}(t)\,dt = 1 - \frac{.05}{2m}$$

m \ ν	5	7	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
2	3.17	2.84	2.64	2.56	2.49	2.42	2.39	2.36	2.33	2.30	2.27	2.24
3	3.54	3.13	2.87	2.78	2.69	2.61	2.58	2.54	2.50	2.47	2.43	2.39
4	3.81	3.34	3.04	2.94	2.84	2.75	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54	2.50
5	4.04	3.50	3.17	3.06	2.95	2.85	2.80	2.75	2.71	2.66	2.62	2.58
6	4.22	3.64	3.28	3.15	3.04	2.93	2.88	2.83	2.78	2.73	2.68	2.64
7	4.38	3.76	3.37	3.24	3.11	3.00	2.94	2.89	2.84	2.79	2.74	2.69
8	4.53	3.86	3.45	3.31	3.18	3.06	3.00	2.94	2.89	2.84	2.79	2.74
9	4.66	3.95	3.52	3.37	3.24	3.11	3.05	2.99	2.93	2.88	2.83	2.77
10	4.78	4.03	3.58	3.43	3.29	3.16	3.09	3.03	2.97	2.92	2.86	2.81
15	5.25	4.36	3.83	3.65	3.48	3.33	3.26	3.19	3.12	3.06	2.99	2.94
20	5.60	4.59	4.01	3.80	3.62	3.46	3.38	3.30	3.23	3.16	3.09	3.02
25	5.89	4.78	4.15	3.93	3.74	3.55	3.47	3.39	3.31	3.24	3.16	3.09
30	6.15	4.95	4.27	4.04	3.82	3.63	3.54	3.46	3.38	3.30	3.22	3.15
35	6.36	5.09	4.37	4.13	3.90	3.70	3.61	3.52	3.43	3.34	3.27	3.19
40	6.56	5.21	4.45	4.20	3.97	3.76	3.66	3.57	3.48	3.39	3.31	3.23
45	6.70	5.31	4.53	4.26	4.02	3.80	3.70	3.61	3.51	3.42	3.34	3.26
50	6.86	5.40	4.59	4.32	4.07	3.85	3.74	3.65	3.55	3.46	3.37	3.29
100	8.00	6.08	5.06	4.73	4.42	4.15	4.04	3.90	3.79	3.69	3.58	3.48
250	9.68	7.06	5.70	5.27	4.90	4.56	4.4*	4.3*	4.1*	3.97	3.83	3.72

Tabla XIII. (Continuación) $1 - \alpha = 0.99$

$$\int_{-\infty}^{c} f^{(\nu)}(t)\,dt = 1 - \frac{.01}{2m}$$

m \ ν	5	7	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
2	4.78	4.03	3.58	3.43	3.29	3.16	3.09	3.03	2.97	2.92	2.86	2.81
3	5.25	4.36	3.83	3.65	3.48	3.33	3.26	3.19	3.12	3.06	2.99	2.94
4	5.60	4.59	4.01	3.80	3.62	3.46	3.38	3.30	3.23	3.16	3.09	3.02
5	5.89	4.78	4.15	3.93	3.74	3.55	3.47	3.39	3.31	3.24	3.16	3.09
6	6.15	4.95	4.27	4.04	3.82	3.63	3.54	3.46	3.38	3.30	3.22	3.15
7	6.36	5.09	4.37	4.13	3.90	3.70	3.61	3.52	3.43	3.34	3.27	3.19
8	6.56	5.21	4.45	4.20	3.97	3.76	3.66	3.57	3.48	3.39	3.31	3.23
9	6.70	5.31	4.53	4.26	4.02	3.80	3.70	3.61	3.51	3.42	3.34	3.26
10	6.86	5.40	4.59	4.32	4.07	3.85	3.74	3.65	3.55	3.46	3.37	3.29
15	7.51	5.79	4.86	4.56	4.29	4.03	3.91	3.80	3.70	3.59	3.50	3.40
20	8.00	6.08	5.06	4.73	4.42	4.15	4.04	3.90	3.79	3.69	3.58	3.48
25	8.37	6.30	5.20	4.86	4.53	4.25	4.1*	3.98	3.88	3.76	3.64	3.54
30	8.68	6.49	5.33	4.95	4.61	4.33	4.2*	4.13	3.93	3.81	3.69	3.59
35	8.95	6.67	5.44	5.04	4.71	4.39	4.3*	4.26	3.97	3.84	3.73	3.63
40	9.19	6.83	5.52	5.12	4.78	4.46	4.3*	4.1*	4.01	3.89	3.77	3.66
45	9.41	6.93	5.60	5.20	4.84	4.52	4.3*	4.2*	4.1*	3.93	3.80	3.69
50	9.68	7.06	5.70	5.27	4.90	4.56	4.4*	4.2*	4.1*	3.97	3.83	3.72
100	11.04	7.80	6.20	5.70	5.20	4.80	4.7*	4.4*	4.5*		4.00	3.89
250	13.26	8.83	6.9*	6.3*	5.8*	5.2*	5.0*	4.9*	4.8*			4.11

Tabla XIV. Estimación para P(S s).
Extensión de la Prueba de Tukey para
Diseños de Bloques completamente al Azar.
(Referencia: Cap.III,secc.7)

	t									
	3		4		5		6		7	
	Nominal P(S ≡ s)									
r	.90	.95	.90	.95	.90	.95	.90	.95	.90	.95
2	.671	.838	.688	.729	.669	.743	.714	.771	.788	.853
3	.786	.786	.835	.874	.791	.843	.828	.888	.809	.869
4	.841	.868	.825	.884	.804	.868	.856	.901	.848	.896
5	.843	.898	.854	.900	.848	.901	.873	.920	.864	.924
6	.839	.896	.840	.893	.853	.905	.859	.913	.864	.924
10	.866	.923	.880	.925	.880	.931	.878	.929	.875	.935
15	.860	.911	.879	.930	.880	.931	.859	.925	.898	.949
20	.863	.929	.878	.946	.889	.948	.896	.958	.910	.953
30	.884	.930	.900	.946	.876	.924	.858	.925	.898	.949
40	.879	.933	.893	.943	.901	.953	.910	.944	.901	.948
50	.890	.939								
60	.913	.960								
70	.896	.945								
80	.918	.956								

Tabla XV. Comparación de los Puntos Críticos
del Método de Scheffè y Johnson
(Referencia: Cap.III,secc.9)

p	q	$pqF_{.05;pq,\infty}$	$U_{.05,p,q,\infty}$	$u_1F_{.05,u,\infty}$
2	2	9.48	8.39	8.60
2	3	12.60	10.74	10.72
2	4	15.52	12.68	12.67
2	5	18.30	14.49	14.17
2	9	28.89	21.06	20.99
3	3	16,92	13.11	13.18
3	4	21.00	15.24	15.06
3	5	25.05	17.22	17.53
3	9	40.23	24.31	24.09
4	4	26.24	17.52	17.34
4	5	31.40	19.63	18.84
4	9	51.26	27.15	27.59
5	5	37.75	21.85	21.60
5	9	61.87	29.75	29,08

Tabla XVI. Cuantiles para la Prueba de Kurtz. Para un Diseño con un Criterio de Clasificación, los valores deben ser multiplicados por la suma de rangos dentro de grupos.

(Referencia: Cap.IV, secc.2)

$\alpha = .05$

Number in group = Number per range	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	3.43	2.35	1.74	1.39	1.15*	.99	.87	.77	.70	.63	.58	.54	.50	.47
3	1.90	1.41	1.14	.94	.80	.70	.62	.56	.51	.47	.43	.40	.38	.35
4	1.62	1.25	1.01	.84	.72	.63	.57	.51	.47	.43	.40	.37	.35	.33
5	1.53	1.10	.96	.81	.70	.61	.55	.50	.45	.42	.39	.36	.34	.32
6	1.50	1.17	.95	.80	.69	.61	.55	.49	.45	.42	.39	.36	.34	.32
7	1.49	1.17	.95	.80	.69	.61	.55	.50	.45	.42	.39	.36	.34	.32
8	1.49	1.18	.96	.81	.70	.62	.55	.50	.46	.42	.39	.37	.35	.33
9	1.50	1.19	.97	.82	.71	.62	.56	.51	.47	.43	.40	.37	.35	.33
10	1.52	1.20	.98	.83	.72	.63	.57	.52	.47	.44	.41	.38	.36	.34
11	1.54	1.22	.99	.84	.73	.64	.58	.52	.48	.44	.41	.38	.36	.34
12	1.56	1.23	1.01	.85	.74	.65	.58	.53	.49	.45	.42	.39	.37	.35
13	1.58	1.25	1.02	.86	.75	.66	.59	.54	.49	.46	.42	.40	.37	.35
14	1.60	1.26	1.03	.87	.76	.67	.60	.55	.50	.46	.43	.40	.38	.36
15	1.62	1.28	1.05	.89	.77	.68	.61	.55	.51	.47	.44	.41	.38	.36
16	1.64	1.30	1.06	.90	.78	.69	.62	.56	.52	.48	.44	.41	.39	.37
17	1.66	1.32	1.08	.91	.79	.70	.63	.57	.52	.48	.45	.42	.39	.37
18	1.68	1.33	1.09	.92	.80	.71	.64	.58	.53	.49	.46	.43	.40	.38
19	1.70	1.35	1.10	.93	.81	.72	.64	.59	.54	.50	.46	.43	.41	.38
20	1.72	1.36	1.12	.95	.82	.73	.65	.59	.54	.50	.47	.44	.41	.39
30	1.92	1.52	1.24	1.05	.91	.81	.73	.66	.60	.56	.52	.49	.46	.43
40	2.08	1.66	1.35	1.11	.99	.88	.79	.72	.66	.61	.57	.53	.50	.47
50	2.23	1.77	1.45	1.22	1.06	.94	.85	.77	.71	.65	.61	.57	.53	.50
100	2.81	2.23	1.83	1.55	1.34	1.19	1.07	.97	.89	.83	.77	.72	.67	.64
200	3.61	2.88	2.35	1.99	1.73	1.53	1.38	1.25	1.15	1.06	.99	.93	.87	.83
500	5.15	4.10	3.35	2.84	2.47	2.19	1.97	1.79	1.64	1.52	1.42	1.33	1.24	1.17
1000	6.81	5.43	4.44	3.77	3.28	2.90	2.61	2.37	2.18	2.02	1.88	1.76	1.65	1.56

* Also the factors from [(total range)/(number in group)] to allowances for means in a one-way classification.

** All confidence statements will be correct in each of 95% of one-way classifications to which applied.

Number in group = Number per range	16	17	18	19	20	30	40	50	100	200	500	1000
2	.443	.418	.396	.376	.358	.245	.187	.151	.079	.042	.0177	.0093
3	.335	.317	.301	.287	.274	.189	.146	.119	.063	.033	.0143	.0075
4	.310	.294	.279	.266	.254	.177	.136	.112	.060	.0316	.0136	.0071
5	.303	.287	.273	.260	.249	.173	.134	.110	.059	.0312	.0134	.0070
6	.302	.287	.273	.260	.249	.174	.135	.110	.059	.0314	.0135	.0071
7	.304	.289	.275	.262	.251	.175	.136	.111	.060	.032	.0137	.0072
8	.308	.292	.278	.265	.254	.178	.138	.113	.061	.032	.0139	.0073
9	.312	.297	.282	.269	.258	.180	.140	.115	.062	.033	.0141	.0074
10	.317	.301	.287	.274	.262	.183	.142	.117	.063	.033	.0143	.0075
11	.322	.306	.291	.278	.266	.186	.145	.119	.064	.034	.0146	.0077
12	.327	.311	.296	.282	.270	.189	.147	.121	.065	.034	.0148	.0078
13	.332	.316	.300	.287	.274	.192	.149	.122	.066	.035	.0151	.0079
14	.337	.320	.305	.291	.279	.195	.152	.124	.067	.036	.0153	.0080
15	.343	.325	.310	.295	.283	.198	.154	.126	.068	.036	.0156	.0082
16	.348	.330	.314	.300	.287	.201	.156	.128	.069	.037	.0158	.0083
17	.352	.335	.319	.304	.291	.204	.158	.130	.070	.037	.0160	.0084
18	.357	.339	.323	.308	.295	.207	.161	.132	.071	.038	.0162	.0085
19	.362	.344	.327	.312	.299	.210	.163	.134	.072	.038	.0165	.0087
20	.367	.348	.332	.317	.303	.212	.165	.135	.073	.039	.0167	.0088
30	.408	.387	.369	.352	.337	.237	.184	.151	.081	.043	.0187	.0098
40	.444	.422	.402	.384	.367	.258	.201	.165	.089	.047	.0204	.0107
50	.476	.453	.431	.412	.394	.277	.216	.177	.095	.051	.0219	.0115
100	.60	.573	.546	.521	.499	.351	.273	.224	.121	.064	.0277	.0146
200	.78	.74	.70	.67	.64	.454	.353	.290	.156	.083	.0358	.0188
500	1.11	1.06	1.01	.96	.92	.65	.504	.414	.223	.119	.0513	.0269
1000	1.47	1.40	1.33	1.27	1.22	.86	.669	.549	.296	.158	.068	.0357

* Also the factors from [(total range)/(number in group)] to allowances for means in a one-way classification.

** All confidence statements will be correct in each of 95% of one-way classifications to which applied.

Tabla XVI. (Continuación) Los valores se multiplican por la Media de los Rangos dentro de Grupos.

$\alpha = 0.05$

Number in group = Number per range	10	15	20	30	40	50	100	200	500	1000
2	7.0	7.1	7.2	7.3	7.5	7.6	7.9	8.3	8.8	9.3
3	5.1	5.3	5.5	5.7	5.8	6.0	6.3	6.7	7.2	7.5
4	4.7	4.9	5.1	5.3	5.5	5.6	6.0	6.3	6.8	7.1
5	4.5	4.8	5.0	5.2	5.4	5.5	5.9	6.2	6.7	7.0
6	4.5	4.8	5.0	5.2	5.4	5.5	5.9	6.3	6.7	7.1
7	4.5	4.8	5.0	5.3	5.4	5.6	6.0	6.4	6.8	7.2
8	4.6	4.9	5.1	5.3	5.5	5.6	6.1	6.4	6.9	7.3
9	4.6	4.9	5.1	5.4	5.6	5.7	6.2	6.6	7.1	7.4
10	4.7	5.0	5.2	5.5	5.7	5.8	6.3	6.7	7.2	7.6
11	4.8	5.1	5.3	5.6	5.8	5.9	6.4	6.8	7.3	7.7
12	4.9	5.2	5.4	5.7	5.9	6.0	6.5	6.9	7.4	7.8
13	4.9	5.3	5.5	5.8	6.0	6.1	6.6	7.0	7.5	7.9
14	5.0	5.3	5.6	5.9	6.1	6.2	6.7	7.1	7.7	8.0
15	5.1	5.4	5.6	5.9	6.2	6.3	6.8	7.2	7.8	8.2
16	5.1	5.5	5.7	6.0	6.2	6.4	6.9	7.3	7.9	8.3
17	5.2	5.6	5.8	6.1	6.3	6.5	7.0	7.4	8.0	8.4
18	5.3	5.6	5.9	6.2	6.4	6.6	7.1	7.5	8.1	8.5
19	5.4	5.7	6.0	6.3	6.5	6.7	7.2	7.7	8.2	8.7
20	5.4	5.8	6.0	6.4	6.6	6.8	7.3	7.8	8.3	8.8
30	6.0	6.5	6.7	7.1	7.4	7.6	8.1	8.7	9.3	9.8
40	6.6	7.0	7.3	7.8	8.0	8.2	8.9	9.5	10.2	10.7
50	7.1	7.5	7.9	8.3	8.6	8.9	9.5	10.2	10.9	11.5
100	8.9	9.6	10.0	10.5	10.9	11.2	12.1	12.9	13.9	14.6
200	11.5	12.3	12.9	13.6	14.1	14.5	15.6	16.6	17.9	18.8
500	16.4	17.6	18.4	19.5	20.2	20.7	23.3	23.8	25.6	26.9
1000	21.8	23.4	24.4	25.8	26.8	27.5	29.6	31.6	34.0	35.7

* Also the factors from [(mean range)/(number in group)] to allowances for means in a one-way classification.

** All confidence statements will be correct in each of 95% of one-way classifications to which applied.

Tabla XVI. (Continuación) Diseño de Dos Criterios de Clasificación de acuerdo al Método Intermedio.

$\alpha = 0.05$

Number of differences per range = Number of rows	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	12.71	3.79	2.31	1.69	1.34	1.11	.96	.84	.75
	12.71	3.39	2.15	1.66	1.39	1.22	1.09	1.00	.93
3	3.91	1.98	1.40	1.09	.90	.77	.69	.60	.54
	4.37	1.98	1.43	1.17	1.01	.90	.82	.75	.70
4	2.87	1.66	1.21	.97	.81	.70	.61	.55	.50
	3.07	1.62	1.21	1.00	.88	.79	.72	.67	.62
5	2.53	1.54	1.15	.92	.78	.67	.59	.53	.48
	2.57	1.45	1.10	.92	.81	.73	.67	.62	.58
6	2.38	1.50	1.13	.91	.77	.66	.59	.53	.48
	2.29	1.35	1.04	.87	.77	.69	.63	.59	.55
7	2.32	1.49	1.12	.91	.77	.67	.59	.53	.48
	2.13	1.28	.99	.84	.74	.67	.61	.57	.53
8	2.30	1.49	1.12	.91	.77	.67	.59	.53	.49
	2.01	1.23	.96	.81	.71	.65	.59	.55	.52
9	2.29	1.49	1.13	.92	.78	.68	.60	.54	.49
	1.93	1.19	.93	.79	.70	.63	.58	.54	.51
10	2.30	1.51	1.15	.93	.79	.69	.61	.55	.50
	1.87	1.16	.91	.78	.68	.62	.57	.53	.50
11	2.31	1.52	1.16	.94	.80	.70	.62	.56	.51
	1.81	1.14	.90	.76	.67	.61	.56	.52	.49
12	2.33	1.54	1.17	.96	.81	.71	.63	.56	.51
	1.77	1.12	.88	.75	.66	.60	.55	.52	.49
13	2.35	1.56	1.19	.97	.82	.72	.64	.57	.52
	1.74	1.10	.87	.74	.66	.60	.55	.51	.48
14	2.37	1.57	1.20	.98	.83	.73	.65	.58	.53
	1.71	1.09	.86	.73	.65	.59	.54	.51	.48

* Lower entries are also factors from mean range of differences to allowances for *row* means; upper entries are also factors from [(total range)/(number of rows)] to allowances for *column* means.

** All confidence statements about *column* totals will be correct in each of 95% of two-way classifications to which applied: similar result holds for *row* totals, hence all statements about *all* totals will be correct in each of over 90% of all two-way classifications.

Tabla XVI. (Continuación) $\alpha = .05$

Number of differences per range = Number of rows	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	.68 .87	.62 .82	.57 .78	.53 .74	.49 .71	.461 .68	.434 .66	.410 .64	.388 .62	.369 .597
3	.50 .66	.46 .63	.42 .60	.39 .57	.37 .55	.347 .53	.328 .51	.311 .49	.296 .48	.282 .466
4	.45 .59	.42 .56	.39 .53	.36 .51	.34 .49	.321 .47	.304 .46	.288 .44	.274 .43	.262 .416
5	.44 .55	.41 .52	.38 .50	.35 .48	.33 .46	.314 .44	.297 .43	.282 .41	.268 .40	.256 .389
6	.44 .52	.41 .50	.38 .47	.35 .45	.33 .44	.313 .42	.296 .41	.281 .39	.268 .38	.256 .372
7	.44 .50	.41 .48	.38 .46	.36 .44	.33 .42	.315 .41	.298 .39	.283 .38	.270 .37	.258 .360
8	.45 .49	.41 .47	.38 .45	.36 .43	.34 .41	.319 .40	.302 .38	.287 .37	.273 .36	.261 .351
9	.45 .48	.42 .46	.39 .44	.36 .42	.34 .40	.323 .39	.306 .38	.291 .36	.277 .35	.265 .344
10	.46 .47	.42 .45	.39 .43	.37 .41	.35 .40	.328 .38	.311 .37	.295 .36	.281 .35	.269 .338
11	.47 .47	.43 .44	.40 .42	.38 .41	.35 .39	.333 .38	.316 .36	.300 .35	.286 .34	.273 .334
12	.47 .46	.44 .44	.41 .42	.38 .40	.36 .39	.338 .37	.321 .36	.305 .35	.290 .34	.277 .330
13	.48 .45	.44 .43	.41 .41	.39 .40	.36 .38	.344 .37	.326 .36	.309 .35	.295 .34	.282 .326
14	.49 .45	.45 .43	.42 .41	.39 .39	.37 .38	.349 .36	.330 .35	.314 .34	.299 .33	.286 .323

* Lower entries are also factors from mean range of differences to allowances for *row* means; upper entries are also factors from [(total range)/(number of rows)] to allowances for *column* means.

** All confidence statements about *column* totals will be correct in each of 95% of two-way classifications to which applied: similar result holds for *row* totals, hence all statements about *all* totals will be correct in each of over 90% of all two-way classifications.

Tabla XVII. Cuantiles de la Distribución $u = \text{Max.} \mid x_i \mid / s$ con g.l. = 4

(Referencia: Cap.IV,secc.3)

$1-\alpha$	$t_{1-\alpha/2p}$	$t_{(1/2+1/2(1-\alpha)^{1/p})}$	$u_{1-\alpha}$										
			ρ = .0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1.0
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
			a) p = 2										
.50	1.34	1.21	1.15	1.15	1.14	1.14	1.12	1.10	1.08	1.04	1.00	.93	.74
.60	1.53	1.43	1.37	1.37	1.36	1.35	1.34	1.32	1.29	1.25	1.21	1.14	.94
.70	1.78	1.71	1.63	1.63	1.63	1.62	1.60	1.58	1.55	1.52	1.47	1.39	1.19
.80	2.13	2.08	2.01	2.00	2.00	1.99	1.97	1.95	1.92	1.88	1.83	1.75	1.53
.90	2.78	2.75	2.66	2.66	2.65	2.64	2.62	2.60	2.57	2.52	2.47	2.38	2.13
.95	3.50	3.48	3.38	3.38	3.37	3.36	3.34	3.31	3.27	3.23	3.16	3.07	2.77
.975	4.31	4.31	4.20	4.19	4.18	4.17	4.14	4.11	4.07	4.02	3.95	3.83	3.50
.99	5.60	5.60	5.46	5.46	5.45	5.43	5.40	5.36	5.31	5.25	5.16	5.02	4.60
			b) p = 6										
.50	2.30	2.05	1.76	1.76	1.73	1.70	1.66	1.60	1.54	1.45	1.34	1.18	.74
.60	2.50	2.31	2.00	2.00	1.97	1.94	1.90	1.84	1.77	1.68	1.56	1.39	.94
.70	2.78	2.64	2.31	2.30	2.28	2.24	2.20	2.13	2.06	1.96	1.84	1.66	1.19
.80	3.19	3.09	2.74	2.72	2.70	2.67	2.62	2.55	2.47	2.37	2.23	2.01	1.53
.90	3.96	3.91	3.51	3.50	3.47	3.43	3.37	3.30	3.21	3.09	2.93	2.75	2.13
.95	4.85	4.82	4.37	4.36	4.33	4.28	4.21	4.14	4.04	3.92	3.73	3.49	2.78
.975	5.89	5.87	5.35	5.34	5.30	5.25	5.17	5.10	4.99	4.85	4.63	4.32	3.50
.99	7.53	7.53	6.90	6.90	6.90	6.86	6.75	6.63	6.47	6.26	6.00	5.64	4.60
			c) p = 10										
.50	2.78	2.50	2.02	2.01	1.98	1.93	1.88	1.81	1.72	1.61	1.47	1.27	.74
.60	3.00	2.75	2.27	2.26	2.23	2.19	2.13	2.05	1.96	1.85	1.70	1.49	.94
.70	3.30	3.13	2.60	2.59	2.56	2.51	2.45	2.37	2.27	2.15	1.99	1.77	1.19
.80	3.75	3.64	3.06	3.05	3.01	2.96	2.89	2.81	2.70	2.57	2.40	2.10	1.53
.90	4.60	4.54	3.89	3.87	3.83	3.78	3.70	3.60	3.48	3.32	3.07	2.89	2.13
.95	5.60	5.56	4.82	4.80	4.76	4.69	4.60	4.48	4.36	4.20	3.98	3.65	2.78
.975	6.77	6.74	5.88	5.86	5.82	5.76	5.68	5.56	5.39	5.18	4.90	4.51	3.50
.99	8.61	8.61	7.57	7.57	7.55	7.46	7.33	7.15	6.94	6.68	6.34	5.90	4.60
			d) p = 20										
.50	3.50	3.16	2.34	2.32	2.28	2.22	2.15	2.06	1.94	1.81	1.63	1.39	.74
.60	3.75	3.49	2.62	2.60	2.56	2.50	2.42	2.32	2.20	2.06	1.87	1.62	.94
.70	4.09	3.89	2.97	2.95	2.91	2.84	2.76	2.66	2.53	2.37	2.17	1.90	1.19
.80	4.60	4.47	3.47	3.45	3.40	3.33	3.24	3.13	2.99	2.82	2.60	2.34	1.53
.90	5.60	5.52	4.38	4.36	4.31	4.22	4.12	3.98	3.82	3.62	3.36	3.01	2.13
.95	6.77	6.71	5.41	5.38	5.32	5.22	5.10	4.96	4.81	4.57	4.27	3.83	2.78
.975	8.13	8.11	6.59	6.55	6.47	6.36	6.25	6.11	5.88	5.60	5.24	4.78	3.50
.99	10.3	10.3	8.46	8.44	8.41	8.26	8.07	7.84	7.55	7.20	6.77	6.12	4.60

* Columns (1) and (2) give the $1-\alpha/2p$ and $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-\alpha)^{1/p}$ percentage points, respectively, of the Student t distribution. Columns (3) through (13) give the $1-\alpha$ points in the distribution of $u = \max |x_i|/s$, where $x_1, \cdots, x_p$ have a joint normal distribution with zero means, unit variances, and correlations equal to ρ and where νs^2 is independent of $x_1, \cdots, x_p$, and has a Chi-square distribution with ν degrees of freedom.

Tabla XVII. (Continuación)

g.l. = 10

$1-\alpha$	$t_{1-\alpha/2p}$	$t_{(1+(1-\alpha)^{1/p})/2}$	$u_{1-\alpha}$ $\rho=.0$	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1.0
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
							a) $p=2$						
.50	1.22	1.11	1.09	1.09	1.08	1.07	1.06	1.04	1.02	.98	.94	.83	.70
.60	1.37	1.29	1.27	1.27	1.26	1.25	1.24	1.22	1.20	1.16	1.12	1.06	.88
.70	1.56	1.50	1.48	1.48	1.48	1.47	1.45	1.43	1.41	1.38	1.33	1.27	1.09
.80	1.81	1.78	1.76	1.76	1.75	1.74	1.73	1.71	1.69	1.66	1.61	1.55	1.37
.90	2.23	2.21	2.19	2.19	2.19	2.18	2.17	2.15	2.13	2.10	2.06	2.00	1.81
.95	2.63	2.63	2.61	2.61	2.60	2.60	2.59	2.57	2.55	2.52	2.48	2.43	2.23
.975	3.04	3.03	3.02	3.02	3.02	3.01	3.00	2.99	2.96	2.93	2.90	2.86	2.64
.99	3.58	3.58	3.57	3.57	3.57	3.56	3.55	3.53	3.51	3.49	3.45	3.41	3.17
							b) $p=6$						
.50	1.92	1.76	1.65	1.65	1.64	1.61	1.57	1.51	1.45	1.36	1.25	1.10	.70
.60	2.00	1.94	1.84	1.84	1.82	1.79	1.75	1.69	1.63	1.54	1.44	1.28	.88
.70	2.23	2.14	2.06	2.05	2.03	2.00	1.96	1.91	1.84	1.76	1.65	1.50	1.09
.80	2.47	2.41	2.33	2.33	2.31	2.28	2.24	2.19	2.12	2.04	1.94	1.79	1.37
.90	2.87	2.85	2.77	2.77	2.75	2.73	2.69	2.64	2.58	2.50	2.39	2.26	1.81
.95	3.28	3.26	3.20	3.20	3.18	3.16	3.12	3.07	3.01	2.93	2.83	2.70	2.23
.975	3.69	3.69	3.63	3.63	3.61	3.58	3.55	3.50	3.45	3.37	3.29	3.13	2.64
.99	4.26	4.26	4.21	4.21	4.19	4.16	4.13	4.09	4.03	3.96	3.87	3.70	3.17
							c) $p=10$						
.50	2.23	2.05	1.91	1.90	1.88	1.83	1.77	1.70	1.61	1.51	1.38	1.19	.70
.60	2.38	2.23	2.09	2.08	2.05	2.01	1.95	1.90	1.80	1.70	1.58	1.37	.88
.70	2.59	2.44	2.30	2.29	2.27	2.22	2.17	2.10	2.03	1.91	1.78	1.59	1.09
.80	2.76	2.71	2.58	2.57	2.55	2.51	2.46	2.39	2.31	2.20	2.07	1.88	1.37
.90	3.17	3.14	3.03	3.03	3.00	2.96	2.91	2.85	2.77	2.69	2.53	2.37	1.81
.95	3.58	3.57	3.47	3.47	3.44	3.40	3.35	3.29	3.21	3.11	2.97	2.81	2.23
.975	4.01	4.00	3.91	3.90	3.88	3.85	3.79	3.74	3.65	3.55	3.45	3.24	2.64
.99	4.59	4.59	4.50	4.50	4.47	4.45	4.40	4.34	4.25	4.15	4.05	3.82	3.17
							d) $p=20$						
.50	2.63	2.45	2.21	2.19	2.16	2.10	2.03	1.94	1.83	1.70	1.53	1.30	.70
.60	2.76	2.63	2.40	2.38	2.34	2.29	2.21	2.12	2.02	1.88	1.72	1.48	.88
.70	2.93	2.84	2.62	2.60	2.56	2.51	2.44	2.35	2.24	2.11	1.94	1.70	1.09
.80	3.17	3.11	2.90	2.89	2.86	2.80	2.73	2.64	2.53	2.40	2.23	2.00	1.37
.90	3.58	3.55	3.33	3.33	3.32	3.27	3.20	3.11	3.01	2.87	2.70	2.47	1.81
.95	4.01	3.99	3.82	3.82	3.78	3.73	3.66	3.57	3.46	3.33	3.17	2.94	2.23
.975	4.44	4.43	4.28	4.27	4.24	4.18	4.12	4.03	3.92	3.78	3.61	3.38	2.64
.99	5.05	5.05	4.91	4.90	4.86	4.81	4.74	4.66	4.57	4.45	4.26	3.97	3.17

Tabla XVII. (Continuación)

g.l. = 30

$1-\alpha$	$t_{1-\alpha/p}$	$t_{(1+(1-\alpha)^{1/p})/2}$	$u_{1-\alpha}$ $\rho=.0$	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1.0
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
								a) $p=2$					
.50	1.17	1.07	1.07	1.06	1.06	1.05	1.04	1.02	.99	.96	.92	.85	.68
.60	1.31	1.24	1.23	1.23	1.23	1.22	1.21	1.18	1.16	1.13	1.08	1.02	.85
.70	1.48	1.43	1.42	1.42	1.42	1.41	1.39	1.38	1.35	1.32	1.28	1.22	1.05
.80	1.70	1.67	1.66	1.66	1.66	1.65	1.64	1.62	1.60	1.57	1.53	1.48	1.31
.90	2.04	2.03	2.03	2.03	2.02	2.01	2.00	1.99	1.97	1.95	1.94	1.88	1.70
.95	2.36	2.35	2.35	2.35	2.35	2.34	2.33	2.32	2.31	2.29	2.26	2.23	2.04
.975	2.66	2.65	2.66	2.65	2.65	2.65	2.64	2.63	2.62	2.60	2.57	2.53	2.36
.99	3.03	3.03	3.03	3.03	3.03	3.03	3.02	3.01	3.00	2.98	2.96	2.94	2.75
								b) $p=6$					
.50	1.79	1.65	1.63	1.63	1.60	1.57	1.52	1.47	1.41	1.32	1.22	1.07	.68
.60	1.90	1.80	1.77	1.77	1.75	1.72	1.68	1.63	1.57	1.49	1.38	1.24	.85
.70	2.04	1.97	1.95	1.95	1.93	1.90	1.86	1.81	1.75	1.68	1.58	1.44	1.05
.80	2.23	2.19	2.17	2.16	2.15	2.12	2.09	2.05	1.99	1.92	1.82	1.69	1.31
.90	2.54	2.52	2.50	2.50	2.49	2.47	2.44	2.40	2.35	2.29	2.20	2.09	1.70
.95	2.82	2.83	2.81	2.80	2.80	2.79	2.76	2.73	2.68	2.62	2.54	2.44	2.04
.975	3.10	3.10	3.09	3.09	3.09	3.07	3.05	3.02	2.98	2.93	2.86	2.75	2.36
.99	3.45	3.45	3.45	3.45	3.46	3.43	3.42	3.40	3.36	3.31	3.27	3.14	2.75
								c) $p=10$					
.50	2.04	1.90	1.86	1.85	1.82	1.78	1.72	1.66	1.57	1.47	1.34	1.16	.68
.60	2.15	2.04	2.00	2.00	1.97	1.93	1.88	1.81	1.73	1.63	1.50	1.32	.85
.70	2.28	2.21	2.17	2.17	2.14	2.10	2.05	1.99	1.91	1.82	1.70	1.52	1.05
.80	2.46	2.41	2.39	2.39	2.36	2.32	2.28	2.22	2.15	2.06	1.94	1.77	1.31
.90	2.75	2.71	2.71	2.71	2.69	2.67	2.63	2.58	2.51	2.43	2.32	2.18	1.70
.95	3.03	3.02	3.01	3.01	2.99	2.97	2.94	2.89	2.84	2.76	2.66	2.43	2.04
.975	3.30	3.30	3.29	3.29	3.28	3.25	3.23	3.19	3.14	3.07	2.97	2.85	2.36
.99	3.66	3.64	3.64	3.64	3.63	3.62	3.60	3.56	3.52	3.45	3.39	3.24	2.75
								d) $p=20$					
.50	2.36	2.22	2.14	2.13	2.10	2.04	1.97	1.88	1.78	1.65	1.48	1.26	.68
.60	2.46	2.36	2.29	2.28	2.24	2.19	2.12	2.04	1.93	1.81	1.65	1.43	.85
.70	2.58	2.51	2.46	2.44	2.41	2.36	2.30	2.22	2.12	2.00	1.84	1.63	1.05
.80	2.75	2.71	2.66	2.65	2.62	2.58	2.52	2.44	2.35	2.24	2.09	1.88	1.31
.90	3.03	3.01	2.98	2.97	2.95	2.91	2.86	2.79	2.71	2.60	2.47	2.27	1.70
.95	3.30	3.29	3.27	3.27	3.25	3.22	3.17	3.11	3.04	2.94	2.81	2.60	2.04
.975	3.56	3.56	3.54	3.54	3.53	3.50	3.46	3.41	3.34	3.25	3.12	2.92	2.36
.99	3.90	3.90	3.89	3.89	3.88	3.86	3.82	3.78	3.72	3.63	3.50	3.31	2.75

Tabla XVII. (Continuación)

g.l. = ∞

$1-\alpha$	$t_{1-\alpha/2p}$	$t_{1/2+1/2(1-\alpha)^{1/p}}$	$u_{1-\alpha}$ $\rho = .0$	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1.0
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
			a) $p=2$										
.50	1.15	1.05	1.05	1.05	1.04	1.04	1.02	1.00	0.98	0.95	0.90	0.84	.67
.60	1.28	1.22	1.22	1.21	1.20	1.20	1.18	1.16	1.14	1.11	1.07	1.01	.84
.70	1.44	1.39	1.39	1.39	1.39	1.38	1.36	1.35	1.32	1.29	1.26	1.20	1.04
.80	1.65	1.62	1.62	1.62	1.61	1.60	1.59	1.58	1.56	1.53	1.49	1.44	1.28
.90	1.98	1.95	1.95	1.95	1.94	1.94	1.93	1.92	1.90	1.88	1.85	1.80	1.65
.95	2.24	2.24	2.24	2.24	2.23	2.23	2.22	2.21	2.20	2.18	2.15	2.11	1.96
.975	2.50	2.50	2.50	2.50	2.49	2.49	2.49	2.48	2.47	2.45	2.43	2.39	2.24
.99	2.81	2.81	2.81	2.81	2.81	2.80	2.80	2.79	2.79	2.77	2.75	2.72	2.58
			b) $p=6$										
.50	1.73	1.60	1.60	1.60	1.58	1.54	1.50	1.45	1.38	1.30	1.20	1.05	.67
.60	1.83	1.74	1.74	1.73	1.72	1.69	1.65	1.60	1.53	1.46	1.36	1.22	.84
.70	1.96	1.90	1.90	1.89	1.88	1.85	1.81	1.77	1.71	1.64	1.54	1.41	1.04
.80	2.13	2.09	2.09	2.09	2.07	2.05	2.02	1.98	1.93	1.86	1.77	1.64	1.28
.90	2.39	2.38	2.38	2.37	2.36	2.35	2.32	2.29	2.25	2.19	2.12	2.00	1.65
.95	2.64	2.63	2.63	2.63	2.62	2.61	2.59	2.57	2.53	2.48	2.41	2.30	1.96
.975	2.87	2.86	2.86	2.86	2.86	2.85	2.83	2.81	2.78	2.74	2.68	2.58	2.24
.99	3.14	3.14	3.14	3.14	3.14	3.13	3.13	3.11	3.09	3.05	3.00	2.90	2.58
			c) $p=10$										
.50	1.96	1.83	1.83	1.82	1.79	1.75	1.70	1.63	1.55	1.44	1.32	1.14	.67
.60	2.08	1.96	1.96	1.95	1.93	1.89	1.84	1.77	1.69	1.60	1.47	1.30	.84
.70	2.17	2.11	2.11	2.10	2.08	2.04	2.00	1.94	1.86	1.77	1.65	1.49	1.04
.80	2.33	2.29	2.29	2.28	2.26	2.23	2.19	2.14	2.08	1.99	1.88	1.73	1.28
.90	2.58	2.56	2.56	2.56	2.54	2.52	2.49	2.45	2.39	2.32	2.22	2.08	1.65
.95	2.81	2.80	2.80	2.80	2.79	2.77	2.75	2.72	2.67	2.61	2.52	2.38	1.96
.975	3.02	3.02	3.02	3.02	3.01	3.00	2.98	2.96	2.92	2.86	2.73	2.60	2.24
.99	3.29	3.29	3.29	3.29	3.29	3.28	3.27	3.25	3.22	3.17	3.10	2.98	2.58
			d) $p=20$										
.50	2.24	2.12	2.12	2.10	2.07	2.01	1.94	1.85	1.74	1.62	1.46	1.24	.67
.60	2.33	2.24	2.24	2.22	2.19	2.14	2.07	1.99	1.89	1.77	1.61	1.40	.84
.70	2.43	2.37	2.37	2.36	2.33	2.28	2.22	2.15	2.05	1.94	1.79	1.59	1.04
.80	2.58	2.54	2.54	2.53	2.51	2.47	2.41	2.35	2.26	2.16	2.02	1.83	1.28
.90	2.81	2.79	2.79	2.79	2.77	2.74	2.70	2.65	2.57	2.48	2.36	2.18	1.65
.95	3.02	3.02	3.02	3.01	3.00	2.98	2.95	2.91	2.85	2.76	2.65	2.48	1.96
.975	3.23	3.22	3.22	3.22	3.21	3.20	3.18	3.14	3.09	3.02	2.91	2.75	2.24
.99	3.48	3.48	3.48	3.48	3.47	3.47	3.45	3.42	3.38	3.32	3.23	3.07	2.58

Tabla XVIII. Cuantiles del Estadístico Q_p, $\nu = nk - k - 1$, al 5 % y 1 %

(Referencia: CapIV, secc.6)

$\nu \backslash k$	2	3	4	5	6	7	8
2	8·09 19·75	11·03 26·20	13·22 30·28	14·43 32·44	15·48 35·00	16·33 36·64	17·17 37·48
3	5·52 10·49	7·30 13·50	8·44 15·59	9·22 17·04	9·90 18·15	10·55 18·91	10·86 19·76
4	4·62 7·83	5·89 9·78	6·61 11·10	7·38 12·08	7·93 12·65	8·28 13·32	8·09 13·98
5	4·11 6·57	5·25 8·02	5·92 9·11	6·51 9·76	6·88 10·43	7·23 10·91	7·56 11·25
6	3·87 5·90	4·86 7·18	5·45 7·90	5·92 8·55	6·32 9·02	6·57 9·41	6·83 9·78
7	3·66 5·50	4·58 6·57	5·15 7·30	5·55 7·78	5·88 8·19	6·20 8·54	6·40 8·88
8	3·55 5·16	4·41 6·16	4·92 6·80	5·31 7·20	5·62 7·61	5·89 7·90	6·07 8·24
9	3·46 4·96	4·24 5·87	4·76 6·44	5·14 6·87	5·40 7·22	5·65 7·50	5·85 7·75
10	3·28 4·79	4·14 5·64	4·64 6·19	4·99 6·60	5·24 6·91	5·48 7·13	5·68 7·42
11	3·32 4·67	4·07 5·47	4·53 5·90	4·87 6·35	5·12 6·66	5·34 6·92	5·52 7·11
12	3·27 4·56	4·00 5·33	4·44 5·85	4·77 6·18	5·02 6·49	5·23 6·71	5·42 6·90
13	3·21 4·48	3·93 5·22	4·30 5·70	4·68 6·02	4·94 6·20	5·15 6·53	5·32 6·73
14	3·20 4·40	3·88 5·13	4·32 5·58	4·62 5·91	4·86 6·16	5·06 6·41	5·23 6·56
15	3·15 4·34	3·85 5·03	4·26 5·47	4·56 5·80	4·80 6·06	5·00 6·26	5·16 6·41
16	3·14 4·29	3·81 4·97	4·22 5·41	4·51 5·71	4·74 5·96	4·94 6·16	5·10 6·32
17	3·11 4·23	3·79 4·89	4·19 5·33	4·47 5·63	4·70 5·87	4·88 6·07	5·05 6·23
18	3·09 4·21	3·73 4·84	4·14 5·25	4·45 5·56	4·66 5·79	4·84 5·99	4·99 6·14
19	3·07 4·15	3·71 4·79	4·12 5·19	4·41 5·49	4·64 5·72	4·80 5·92	4·96 6·07
20	3·06 4·13	3·69 4·77	4·10 5·15	4·36 5·45	4·58 5·67	4·79 5·85	4·91 6·01

Tabla XIX. Cuantiles de la Distribución de Modelo Máximo Estudentizado $m_{\alpha, k^*, \nu}$; para $k^* = k(k-1)/2$

(Referencia: Cap.IV, secc.9)

$\alpha = .01$

k	k^* \ ν	5	7	10	12	16	20	24	30	40	60	120	∞
3	3	5.106	4.296	3.801	3.631	3.434	3.323	3.253	3.185	3.119	3.055	2.993	2.934
4	6	5.612	4.814	4.205	3.995	3.753	3.617	3.531	3.447	3.367	3.289	3.215	3.143
5	10	6.334	5.198	4.503	4.263	3.906	3.831	3.732	3.637	3.545	3.456	3.371	3.289
6	15	6.744	5.502	4.739	4.475	4.170	3.999	3.890	3.785	3.683	3.586	3.492	3.402
7	21	7.079	5.752	4.933	4.650	4.322	4.137	4.020	3.906	3.796	3.691	3.590	3.493
8	28	7.362	5.963	5.099	4.799	4.431	4.255	4.130	4.009	3.892	3.780	3.672	3.569
9	36	7.605	6.146	5.242	4.929	4.563	4.357	4.225	4.090	3.975	3.857	3.743	3.634
10	45	7.819	6.307	5.369	5.043	4.662	4.447	4.309	4.176	4.048	3.924	3.805	3.691
11	55	8.008	6.450	5.482	5.145	4.750	4.528	4.385	4.247	4.113	3.984	3.860	3.742
12	66	8.178	6.579	5.584	5.237	4.830	4.601	4.453	4.310	4.172	4.038	3.910	3.787
13	78	8.332	6.696	5.677	5.321	4.903	4.667	4.515	4.368	4.225	4.088	3.955	3.829
14	91	8.473	6.803	5.762	5.398	4.970	4.728	4.572	4.421	4.275	4.133	3.997	3.867
15	105	8.602	6.902	5.841	5.469	5.032	4.785	4.625	4.470	4.320	4.175	4.035	3.901
16	120	8.722	6.994	5.914	5.535	5.090	4.827	4.674	4.516	4.362	4.214	4.070	3.934
17	136	8.813	7.079	5.982	5.597	5.144	4.886	4.720	4.559	4.402	4.250	4.103	3.963
18	153	8.937	7.158	6.045	5.654	5.194	4.932	4.763	4.598	4.437	4.284	4.134	3.991
19	171	9.034	7.233	6.105	5.708	5.242	4.975	4.804	4.636	4.473	4.316	4.173	4.018
20	190	9.126	7.303	6.161	5.760	5.286	5.016	4.842	4.672	4.506	4.346	4.191	4.043

Tabla XIX. (Continuación) $\alpha = .05$

k	k^* \ ν	5	7	10	12	16	20	24	30	40	60	120	∞
3	3	3.399	3.055	2.829	2.747	2.650	2.594	2.558	2.522	2.488	2.454	2.420	2.388
4	6	3.928	3.489	3.199	3.095	2.969	2.897	2.851	2.805	2.760	2.716	2.673	2.631
5	10	4.312	3.805	3.467	3.345	3.199	3.114	3.059	3.005	2.952	2.900	2.849	2.800
6	15	4.610	4.051	3.677	3.540	3.377	3.282	3.220	3.160	3.100	3.041	2.984	2.928
7	21	4.853	4.252	3.848	3.700	3.522	3.419	3.352	3.285	3.220	3.156	3.093	3.031
8	28	5.057	4.421	3.992	3.835	3.645	3.534	3.462	3.391	3.321	3.251	3.183	3.117
9	36	5.232	4.566	4.116	3.951	3.751	3.634	3.557	3.482	3.407	3.334	3.261	3.190
10	45	5.384	4.693	4.225	4.053	3.844	3.721	3.641	3.562	3.483	3.406	3.329	3.254
11	55	5.520	4.806	4.322	4.143	3.926	3.799	3.716	3.633	3.551	3.470	3.389	3.310
12	66	5.641	4.907	4.409	4.225	4.001	3.869	3.783	3.697	3.611	3.527	3.443	3.361
13	78	5.750	4.999	4.488	4.299	4.068	3.933	3.843	3.755	3.667	3.579	3.492	3.407
14	91	5.850	5.083	4.560	4.367	4.130	3.991	3.899	3.808	3.717	3.627	3.537	3.449
15	105	5.942	5.160	4.627	4.429	4.187	4.045	3.951	3.857	3.764	3.671	3.578	3.487
16	120	6.027	5.232	4.688	4.487	4.240	4.095	3.998	3.902	3.807	3.712	3.617	3.523
17	136	6.106	5.290	4.746	4.540	4.289	4.141	4.043	3.945	3.847	3.750	3.652	3.556
18	153	6.179	5.360	4.799	4.591	4.335	4.184	4.084	3.984	3.885	3.785	3.685	3.587
19	171	6.248	5.418	4.849	4.638	4.379	4.225	4.123	4.022	3.920	3.818	3.717	3.615
20	190	6.313	5.472	4.897	[illegible]	4.419	4.264	4.160	4.057	3.953	3.850	3.746	3.643

Tabla XIX. (Continuación) $\alpha = 0.10$

k	k* \ ν	5	7	10	12	16	20	24	30	40	60	120	∞
3	3	2.769	2.555	2.410	2.357	2.293	2.255	2.231	2.207	2.183	2.160	2.137	2.114
4	6	3.239	2.961	2.771	2.701	2.616	2.567	2.534	2.502	2.470	2.439	2.408	2.378
5	10	3.576	3.253	3.029	2.946	2.845	2.786	2.747	2.709	2.671	2.633	2.596	2.560
6	15	3.837	3.478	3.229	3.136	3.022	2.956	2.911	2.868	2.825	2.782	2.739	2.697
7	21	4.048	3.661	3.391	3.290	3.166	3.093	3.044	2.996	2.948	2.901	2.854	2.807
8	28	4.224	3.814	3.527	3.419	3.286	3.208	3.156	3.104	3.052	3.001	2.949	2.898
9	36	4.375	3.945	3.644	3.530	3.390	3.306	3.251	3.196	3.141	3.086	3.031	2.976
10	45	4.506	4.060	3.746	3.627	3.480	3.393	3.335	3.277	3.219	3.160	3.102	3.043
11	55	4.623	4.162	3.836	3.713	3.560	3.469	3.409	3.348	3.287	3.226	3.165	3.103
12	66	4.727	4.252	3.917	3.790	3.633	3.538	3.476	3.413	3.349	3.286	3.221	3.157
13	78	4.821	4.335	3.991	3.860	3.698	3.601	3.536	3.471	3.405	3.339	3.272	3.205
14	91	4.906	4.410	4.058	3.924	3.750	3.658	3.591	3.524	3.456	3.388	3.319	3.249
15	105	4.985	4.479	4.119	3.983	3.813	3.710	3.642	3.573	3.504	3.433	3.362	3.290
16	120	5.058	4.542	4.176	4.037	3.863	3.759	3.689	3.619	3.547	3.475	3.402	3.327
17	136	5.125	4.601	4.229	4.087	3.911	3.804	3.733	3.661	3.588	3.514	3.438	3.362
18	153	5.188	4.657	4.279	4.135	3.955	3.846	3.774	3.700	3.626	3.550	3.473	3.394
19	171	5.247	4.708	4.325	4.179	3.996	3.886	3.812	3.737	3.661	3.584	3.505	3.425
20	190	5.302	4.757	4.369	4.220	4.035	3.923	3.848	3.772	3.695	3.616	3.536	3.453

Tabla XIX. (Continuación) $\alpha = 0.20$

k	k* \ ν	5	7	10	12	16	20	24	30	40	60	120	∞
3	3	2.271	2.056	1.975	1.944	1.907	1.885	1.871	1.857	1.843	1.829	1.815	1.801
4	6	2.592	2.439	2.330	2.289	2.238	2.208	2.188	2.169	2.149	2.130	2.110	2.091
5	10	2.889	2.709	2.579	2.530	2.469	2.433	2.409	2.385	2.361	2.337	2.313	2.289
6	15	3.117	2.916	2.770	2.712	2.646	2.604	2.577	2.549	2.522	2.494	2.466	2.438
7	21	3.299	3.082	2.924	2.863	2.788	2.742	2.712	2.681	2.650	2.619	2.588	2.557
8	28	3.451	3.220	3.052	2.987	2.906	2.857	2.824	2.791	2.758	2.724	2.690	2.655
9	36	3.580	3.338	3.161	3.093	3.007	2.955	2.920	2.885	2.849	2.813	2.776	2.738
10	45	3.693	3.441	3.257	3.185	3.095	3.041	3.004	2.967	2.929	2.890	2.851	2.811
11	55	3.792	3.532	3.341	3.267	3.173	3.116	3.078	3.039	2.999	2.959	2.917	2.874
12	66	3.880	3.613	3.416	3.339	3.243	3.184	3.144	3.104	3.062	3.020	2.976	2.932
13	78	3.960	3.686	3.484	3.405	3.306	3.245	3.204	3.162	3.119	3.075	3.030	2.983
14	91	4.033	3.753	3.546	3.465	3.363	3.301	3.259	3.215	3.171	3.126	3.079	3.030
15	105	4.099	3.814	3.603	3.520	3.416	3.352	3.309	3.264	3.219	3.172	3.123	3.072
16	120	4.161	3.870	3.655	3.571	3.465	3.399	3.355	3.310	3.263	3.215	3.165	3.112
17	136	4.218	3.922	3.704	3.618	3.510	3.443	3.398	3.352	3.304	3.255	3.203	3.149
18	153	4.271	3.971	3.749	3.662	3.552	3.484	3.438	3.391	3.342	3.292	3.239	3.183
19	171	4.321	4.017	3.792	3.703	3.591	3.523	3.476	3.428	3.378	3.327	3.272	3.215
20	190	4.367	4.059	3.832	3.742	3.629	3.559	3.511	3.462	3.412	3.359	3.304	3.245

Tabla IX-A. Valores de D* para el Método Modificado de Gu-ta.
(Referencia: Cap.II,secc.6)

n	k = 3, Δ = .0	.5	1.0	k = 4, .0	.5	1.0	k = 5, .0	.5	1.0	k = 10, .0	.5	1.0
						P* = .99						
3	2.57	1.95	1.36	2.75	2.15	1.57	2.86	2.29	1.71	3.15	2.60	2.06
5	2.39	1.83	1.29	2.59	2.05	1.51	2.72	2.18	1.66	3.05	2.54	2.02
10	2.30	1.78	1.26	2.51	1.99	1.46	2.65	2.14	1.63	3.01	2.50	2.00
∞	2.23	1.73	1.23	2.45	1.95	1.45	2.60	2.10	1.60	2.90	2.48	1.98
						P* = .95						
3	3.30	2.62	1.97	3.42	2.77	2.15	3.49	2.87	2.28	3.67	3.11	2.59
5	2.98	2.40	1.83	3.15	2.58	2.03	3.25	2.70	2.16	3.53	3.01	2.4[illegible]
10	2.82	2.29	1.76	3.02	2.49	1.96	3.14	2.62	2.10	3.47	2.96	2.[illegible]6
∞	2.71	2.21	1.71	2.92	2.42	1.92	3.06	2.56	2.05	3.42	2.92	[illegible].42

* Indifference = d^* = Δ/σ.

Tabla XX. Valores para n y C
para el caso k = 2, 3 y 4
(Referencia: Cap.IV,secc.10)

δδ*	P* = .95, n_*	c_*	P* = .99, n_*	c_*
		a. k = 2		
.001	26.06	544	48.02	.521
.1	27.82	.559	54.08	.541
.2	34.12	601	67.74	.600
.25	38.54	.625	76.88	.621
.33	48.80	.667	97.44	.661
.5	83.32	.750	172.98	.760
.75	346.38	.875	693.40	.875
.80	541.20	.900	1081.12	.900
.90	2163.50	.950	4324.50	.950
		b. k = 3		
.001	39.96	.525	63.40	.519
.1	43.80	.536	71.76	.537
.2	54.40	.576	90.60	.565
.25	61.94	.603	103.10	.610
.33	78.38	.647	129.94	.650
.5−	139.12	.735	231.12	.740
.5+	143.82	.754	234.14	.751
.75	575.28	.876	946.12	.876
.80	893.68	.902	1479.68	.901
.90	3595.52	.951	5856.62	.950
		c. k = 4		
.001	49.28	.521	71.74	.519
.1	54.61	.533	81.36	.533
.2	68.72	.584	102.82	.565
.33	98.80	.653	149.62	.664
.5−	175.83	.740	262.76	.740
.5+	175.36	.742	[illegible]4.39	.743
.75	708.62	.873	1060.15	.871
.8	1108.22	.899	1647.55	.897
.9	4424.91	.949	6643.88	.949

Tabla XI. Valores de
R (m , m , b)
(Referencia: Cap.III,secc.14)

m_1	m_2	b = 1.1	1.3	1.5	2.0	5.0	10
1	2	1.033	1.094	1.152	1.284	1.882	2.581
1	3	1.037	1.106	1.170	1.315	1.962	2.709
1	4	1.039	1.113	1.181	1.335	2.012	2.790
1	5	1.041	1.117	1.188	1.347	2.047	2.846
1	6	1.042	1.120	1.193	1.357	2.072	2.889
1	7	1.043	1.123	1.197	1.364	2.092	2.919
1	8	1.043	1.125	1.200	1.369	2.107	2.944
1	9	1.044	1.126	1.203	1.374	2.119	2.964
2	1	1.033	1.095	1.155	1.291	1.915	2.646
3	1	1.037	1.107	1.173	1.323	1.999	2.784
4	1	1.039	1.114	1.183	1.342	2.049	2.864
5	1	1.041	1.118	1.190	1.354	2.082	2.915
6	1	1.042	1.121	1.195	1.363	2.104	2.952
7	1	1.043	1.124	1.199	1.370	2.121	2.979
8	1	1.043	1.125	1.202	1.374	2.134	2.999
9	1	1.044	1.127	1.204	1.378	2.145	3.017
Kramer's values		1.025	1.072	1.118	1.225	1.732	2.345

BIBLIOGRAFIA

ANDERSON, T.W. (1958). An introduction to multivariate statistical analysis. New York, Wiley.

ANDERSON, V.L. & McLean, R.A. (1974). Design of experiments a realistic approach. Marcel Dekker Inc.

BAILEY, J.R. (1977). "Tables of the Bonferroni t statistic" Jour. Amer. Statis. Assoc. Vol. 72: 469-478.

BANCROFT, T.A. (1968). Topics in intermediate statistical methods V. I. Iowa State Univ. Press.

BARTHOLOMEW, D.J. (1961). "Ordered tests in the analysis of variance". Biometrika 48: 325-352.

BECHHOFER, R.E. (1954). "A single sample multiple decision procedure for ranking means of normal populations -- with known variances". Ann. Math. Statis. No. 23: 16-39.

BOHRER, R. (1974). "Multiple three-decision rules for - - parametric signs". Jour. Amer. Statis. Assoc. Vol. 74: 432-437.

———— & SHEFT, (1979). "Misclassifications propabilities in 2^3 factorial experiments". Journal of Statistical Planning and Inference No. 3: 79-84.

BRADLEY, R.A. & EL-HELBAWY, A.T. (1976). "Treatment contrasts in paired comparisons: Basic procedures with - - - application to factorials". Biometrika 63: 255-262.

BRADU, D. & GABRIEL, K.R. (1974). "Simultaneous statistical inference on interactions in two-way analysis of - - variance". Jour.Amer. Statis. Assoc. 69: 428-436.

BROWN, M.B. & FORSYTHE, A.B. (1974). "The ANOVA and multiple comparisons for data with heterogeneous variances". Biometrics 30: 719-724.

BROWNLEE, K.A. (1960). Statistical theory and methodology in science and engeneering, New York Wiley.

BRYANT, J.L. & BRUVOLD, N.T. (1980). "Multiple camparison procedures in the analysis of covariance". Jour. -- Amer. Statis. Assoc 75: 874-880.

BRYANT, J.L. & PAULSON, A.S. (1976). "An extension of - - Tukey's random of multiple comparisons to experimental designs with random concomitant variables". Biometrika 63: 631-638.

COCHRAN, W.G. & COX, M.G. (1957). Diseños experimentales. - Trillas, México.

CHEW, V. (1977). "Comparisons among treatments means in an analysis of variance". Journal of Agricultural - - - Research Service of United States. Department of - - Agriculture. Headquarters/6.

DUNCAN (1955). "Multiple range and multiple F-tests". Biometrics 11: 1-42.

DUNN, O.J. (1961). "Multiple comparisons among means". - Jour. Amer. Statis. Assoc. 56: 52-64.

———— (1964). "Multiple comparisons using rank sums". Technometrics Vol. 6: 241-252.

———— & MASSEY, F.J. (1965). "Estimation of multiple contrasts using t-distributions". Jour. Amer. Statis. Assoc. 60: 573-583.

DUNNET, C.W. (1955). "A multiple comparisons procedure for comparing several treatments with a control". Jour Amer. Statis. Assoc. 50: 1096-1121.

———— (1964). "New tables for multiple comparisons with a control". Biometrics 20: 482-491.

———— & SOBEL, M. (1955). "Approximations to the -- probability integral and certain percentage points of a multivariate analogue of student's t-distribution". Biometrika 42: 258-260.

EKBOHM, G. (1976a). "Comparing means in the paired case - with missing data on one response". Biometrika 63: 169-172.

———— (1976b). "On comparing means in the paired case with incomplete data on both responses". Biometrika 63: 299-304.

FENECH, A.P. (1979). "Tukey's method of multiple comparison in the randomized blocks model". Jour. Amer. Statis. Assoc. 74: 881-884.

FINNEY, D.J. (1946). "Standard errors of yields adjusted - for regression on an independent measurement". - - Biometrics 2: 53-55.

FISHER, R.A. (1974). The design of experiments. Hatner Press (A division of McMillan Publishing Co. Inc.) Collier McMillan Publishers (London).

GABRIEL, K.R. (1964). "A procedure for testing the - - homogeneity of all sets of means in an analysis of variance". Biometrics 20: 459-477.

————— (1978). "A simple method of multiple comparisons of means". Jour. Amer. Statis. Assoc. 73: 724-729.

GUPTA, S.S. & SOBEL, M. (1957). "On a statistic wich arises in selection and ranking problems". Ann. Math. - - statis. 28: 957-967.

————— (1958). "On selecting a subset each contains all populations better than a standard". Ann. Math. Statis. 29: 235-244.

HALPERIN, M. & GREENHOUSE, S.W. (1958). "A note on multiple comparisons for adjusted means in the analysis of - - covariance". Biometrika 45: 256-259.

HAHN, G.J. & HENDRICKSON, R.W. (1971). "A table of porcentage points of the distribution of the largest absolute - value of k student t variates and its applications. Biometrika 58: 323-332.

HANUMARA, R.C. & THOMSON, W.A. Jr. (1968). "Percentage - - points of the extreme roots of a Wishart Matrix". - Biometrika 55: 505-512.

HARTER, (1960). "Tables of range and studentized range". - Ann, Math. Statis. 31: 1122-1147.

HARVILLE, D.A. (1975). "Extension of the Gauss-Markov theorem to include the estimation of random efects". Ann - - Statis. 4: 384-395.

————— (1976). "Confidence intervals and sets for - linear combwnations of fixed and random efects". Biometrics 32: 403-407.

HOCHBERG, Y. (1974). "The distribution of the range in - - general balanced models". Amer. Statis. 28: 137-138.

————— (1975). "An extension of the T-method to - general unbalanced models of fixed efects". Jour. Roy. Statis. Soc. B-37: 426-433.

____________ (1976). "A modification of the T-method of -- multiple comparisons for a One-way layout with unequal variances". Jour. Amer. Statis. Assoc. 71: 200-203.

____________ & QUADE, D. (1975). "One-sided simultaneous - confidence bounds on regression surfaces with - - - interceps". Jour. Amer. Statis. Assoc 70: 889-891.

IRWIN, J.O. (1925). "On a criterion for the rejection of - outlying observations". Biometrika 17: 238-250.

JELLINEK, E.M. (1946). "Clinical tests on comparatives -- effectivness of analgesic drugs". Biometrics 2: 87-91.

JHONSON, D.E. (1976). "Some new multiple comparisons - - procedure for the two-way AOV model with interaction". Biometrics 32: 929-934.

KESELMAN, H.J.; GAMES, P.A.; ROGAN,J.C.(1979) "An Adendum 'A comparison of the modofied-Tukey and Scheffè Methods of multiple comparisons for Pairwise Contrasts '" Jour Amer Statis. Assoc 74: 626-627.

KESELMAN, H.J.; ROGAN, J.C.(1978)" "A comparison of the modified-Tukey and Scheffè methods of multiple comparisons for pairwise constrasts". Jour. Amer. Statis. Assoc. 73:47-52.

KESSELMAN, H.J.; TOOTHAKER, L.E.; SHOOTER, M. (1975)"An Evaluation of Two Unequals n_k forms of the Tukey multicomparison statistic" Jour, Amer. Statis. Assoc. 70: 584-587.

KURTZ, T.E.; LINK, R.F.; TUKEY, J.W. y WALLACE,D.L.(1965) "Short-cut multiple comparisons for balanced single and doble classifications: Part 1, results" Technometrics, 7: 95-169.

KRAMER, C.Y. (1956) "Extension of multiple range test to group means with uniqual numbers of replications". Biometrics, 12:307-310.

____________ (1957) Extension of multiple range test to group correlated adjusted means. Biometrics 13: 13-18.

LIN, P.E.(1971) "Estimation procedures for difference of means with missing data" Jour. Amer. Statis. Assoc. 66: 364-366.

____________ (1973) "Procedures for testing the difference of means with incomplete data "Jour. Amer. Statis. Assoc. 68: 699-703.

____________ & STIVERS, L.E. (1974) "On difference of means with incomplete data". Biometrika, 61: 325-334.

MARCUS, R. (1976) "The powers of some tests of the equality of normal means against an ordered alternative". Biometrika, 63: 177-183.

____________; PERITZ, E.; GABRIEL, K.R. (1976) "On closed procedures with special reference to ordered analysis of variance". Biometrika 63: 655-660.

MENDEZ, R.I.(1976) "Comparación de medias de población" Vol. 3 Serie A. No. 17 IIMAS, UNAM.

____________; PUZA, S.J.; ROMERO P. (1981) "Comparación mediante simulación de pruebas de F simultáneas en análisis de varianza". Comunicaciones técnicas, serie N. No. 284 IIMAS, UNAM.

MILLER, R.G. (1966) "Simultaneous statistical inference. Mc Graw Hill Book. Co. N.Y.

MOOD, A.F. & GRAYBILL, F.A.(1963) "Introduction to the Theory of statistics. McGraw Hill Book Co.

MUDHOLKAR, G.S. & SUBBAIAH (1976) "Unequal precision multiple comparisons for randomized block designs under nonstandard conditions". Jour. Amer. Statis. Assoc., 71: 429-434.

O'NEILL,R & WETHERILL, G.B. (1971) "The present state of multiple comparison methods" Jour. of the Roy. Statis. Soc. No. 33: 218-250.

OSTLE, B. (1981) "Estadística aplicada. Ed. Limusa, México

PAULSON, E.(1952a) "An optimum solution to the k-sample slippage problem for the normal distribution" Ann. Math. Statis. 23: 610-616.

____________ (1952 b) "On the comparison of several experimental categories with a control" "Ann. Math. Statis. 23: 239-246.

READING, J.C. (1975) "A multiple comparison procedure for classifying all pairs out of K-means as close or distant" Jour. Amer. Statis. Soc., 70:832-838.

RICHMOND, J.(1982) "A general method for constructing simultaneous confidence intervals". Jour. Amer. Statis. Assoc., 77: 455-460.

ROBINS, H.; SIMONS,G. y STARR, N.(1967) "A sequential Analogue of the Beherens-Fisher Problem" Ann. Math. Statis., 38: 1384-1391

SCOTT, A.J. & KNOTT, M.(1974) "A cluster analysis method for grouping means in the analysis of variance". Biometrics, 30:507-512.

SCHAFFER, W.D. & MACREADY, G.B.(1975) "A modification of the Bonferroni procedure on contrasts wich are grouped into internaly independient sets". Biometrics, 31: 227-228.

SCHEFFE, H. (1953) "A method of judging all contrasts in the analysis of variance ". Biometrika, 40:87-104.

____________(1959) The analysis of variance N.Y. John Wiley& sons.

____________(1970) "Multiple testing versus multiple estimation. Improper confidence Sets. Estimation of Directions and ratios" Ann. Math. Statis. 41: 1-29.

____________(1977)"An note on reformulation of the S-method of multiple comparison". Jour. Amer. Statis. Assoc., 72:143-146.

SEN, K.P.(1969) "A generalization of the T-method of multiple comparisons for interactions". Jour. Amer. Statis. Assoc., 64-290-295.

SEEGER, P.(1968) "A note on a method for the analysis of significances en masse" Technometrics, 10:586-593.

SNEDECOR, G.W. & COCHRAN, W.G.(1967) Statistical Methods. Sexta edición, Ames, Iwoa State University Press.

SOBEL, M. & TONG, Y.L. (1971) "Optimal allocation of observations for partitioning a set of normal populations in comparison with a control". Biomatrika, 58: 117-181.

SPJØTVOLL,E. & STOLINE, M.R. (1973) "An Extension of the T-method of multiple comparisons to include the cases with unequal sample sizes". Jour. Amer. Statis. Assoc., 68: 975-978.

STELL, R.G.D. (1961) "Some rank sum multiple comparisons tests". Biometriks, 17: 539-552.

STOLINE, M.R. (1978) "Tables of the Studentized Augmented Range and Aplications to problems of multivariate -- comparisons". Jour. Amer. Statis. Assoc., 73: 656-660.

STOLINE, M.R. y URY, H.K.(1979) "Tables of the Studentized maximum moduls distribution and an application to multiple comparison among means". Technometrics 21: 87-93

STUDENT (1927) "Errors of routine analysis": Biometrika, 19: 151-164.

THIGPEN, CH.C & PAULSON, A.S. (1974) "A multiple range test for analysis of covariance". Biometrika, 61: 479-484.

WELCH, B.L. (1947) "The generalization of student's problem when several different populations variances are involved". Biometrika, 34: 28-35.

WELSCH, R.E. (1977) "Stepwise multiple comparison procedures" Jour. Amer. Statis. Assoc., 72:566-575.

WILLIAMS, D.A.(1971) "A tests for differences between treatment means when several dose levels are compared with a zero dose control". Biometrics., 27: 103-117.

____________ (1972)"The comparison of several dose levels with a zero dose control". Biometrics, 28: 519-531.

GENIZI,A. & HOCHBERG, Y.(1978) "On inproved extention of the T-method of multiple comparisons for unbalanced designs".Jour.Amer.Statis.Assoc. 73:879-884.