

Ref. 21

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

APLICACION DE METODOS CONTEMPORANEOS  
A PROBLEMAS CLASICOS EN GEOMETRIA.  
EL PORISMA DE PONCELET

T E S I S

Que para obtener el grado de

MATEMATICO

P r e s e n t a

FERMIN REVUELTAS VALLE

Becario del programa de superación del personal académico de la UNAM.

Tesis dirigida por Rodolfo San Agustín Chi

MEXICO, D.F.

1983



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INTRODUCCION

Consideremos un par de cónicas propias  $S$  y  $S_1$  en algún plano proyectivo. Nos preguntamos si es posible contruir un polígono cerrado inscrito en  $S$  y circunscrito a  $S_1$ . Procediendo ingenuamente podríamos elegir un punto  $x_0$  en  $S$  y una tangente a  $S_1$  que pase por él a fin de determinar un punto  $x_1$  en  $S$  de tal manera que la recta  $\overline{x_0 x_1}$  sea tangente a  $S_1$ ; después localizamos a  $x_2$  en  $S$ , distinto de  $x_1$  con  $\overline{x_1 x_2}$  tangente a  $S_1$  y de esta manera vamos construyendo un polígono a la vez circunscrito a  $S_1$  e inscrito en  $S$  que pudiera en algún momento cerrar o bien, la construcción podría continuar indefinidamente. El que un polígono cónstruido de esta manera llegase a cerrar parece depender de dos factores, a saber:

- 1) La posición relativa de las cónicas
- 2) La elección del punto inicial " $x_0$ ".

Un resultado interesante es el hecho de que la construcción sólo depende de la posición de las cónicas. En otras palabras, si un polígono cierra, entonces cierran todos. Dicho teorema, en el plano proyectivo real, fué publicado por J. V. Poncelet en su célebre "Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras" en 1822 y se le menciona en la literatura como "el Porisma de Poncelet". La prueba que da Poncelet a su porisma utiliza argumentos clásicos de la geometría proyectiva y se desprende como corolario a una proposición que pruebo en el capítulo 2.

Tiempo después, en 1835, Jacobi publica una demostración, también para el caso del plano proyectivo real, donde la técnica de la demostración echa mano del teorema clásico de adición de integrales elípticas. Ninguno de los trabajos mencionados encuentra condiciones explícitas que determinen cuándo los polígonos cierran. Sin embargo Cayley dedica una serie de artículos sobre este problema los cuales se publican en 1861.

Otra referencia al citado porisma aparece en el libro de Semple y Kneebone: "Algebraic projective Geometry" (1952). El argumento se basa en un artículo del segundo autor sobre "correspondencias algebraicas". Si bien la prueba es incompleta y existe un error técnico en ella, el argumento es esencialmente correcto y prueba el porisma en condiciones más generales. El interés por el resultado se renueva en 1977. En ese año aparecen dos artículos de Griffiths y Harris. El primer escrito da una demostración del porisma en el plano proyectivo complejo adaptando y depurando el argumento de Jacobi con técnicas de superficies de Riemann. En dicho artículo se menciona también una versión del porisma en el espacio. El segundo artículo utiliza las mismas técnicas para obtener una demostración "moderna" de las condiciones encontradas por Cayley. Llama la atención en el trabajo de Griffiths y Harris la hipótesis adicional que exige que las cónicas se corten transversalmente. Como veremos más tarde, esta hipótesis sólo se requiere para poder usar las técnicas de superficies.

El presente trabajo está dividido en tres partes. En la

primera se expone el argumento de Griffiths y Harris añadiendo una parametrización que, desde mi punto de vista, hace que el argumento gane en claridad. En la segunda parte presento un argumento que destaca la conexión entre todas las técnicas mencionadas. Finalmente, el tercer capítulo expone las condiciones de cierre en los casos que no reportan las publicaciones citadas.

## ADVERTENCIA Y NOTACION

$\mathbb{P}^n$  denotará el espacio proyectivo de dimensión  $n$  sobre un campo algebraicamente cerrado de característica cero.

$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  denotará al espacio proyectivo complejo de dimensión  $n$ .

Cuando un símbolo denote una curva, una recta, un punto, etc., el mismo símbolo se usará para denotar su representación matricial en algún sistema de coordenadas permisibles. Tanto la representación matricial como el sistema de coordenadas se mantienen fijos.

En términos generales se usa la misma notación a lo largo de cada capítulo.

Los puntos de  $\mathbb{P}^n$  se representan con vectores columna, los hiperplanos con vectores fila y las cónicas con matrices simétricas.

Los campos se suponen algebraicamente cerrados de característica cero. Gran parte de los resultados son válidos también en campos más generales. Sin embargo la hipótesis adicional evita estar señalando excepciones.

$S^*$  denota la cónica dual a la cónica  $S$ , o bien la adjunta de la matriz  $S$ .

Símbolos que aparecen en el texto encerrados entre "[ ]" hacen referencia a la bibliografía.

## CAPITULO I

## § 1 Preliminares.

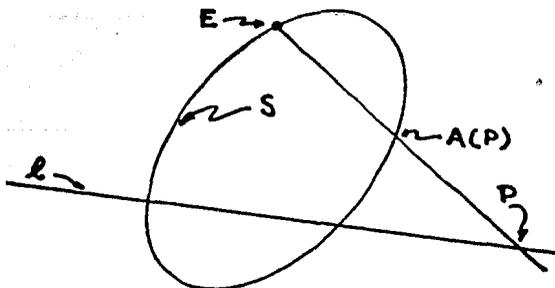
Consideremos una cónica propia "S", "E" un punto en la cónica y "ℓ" una recta que no contiene a E. A cada punto P en ℓ, le asociamos un punto A(P) en la cónica de la manera siguiente:

Si P está en la intersección de ℓ con la tangente a la cónica por E, definimos  $A(P) = E$ . En caso contrario la recta  $\overline{EP}$  corta a la cónica en algún punto distinto de E al cual llamaremos A(P). (figura)

Definimos:

$$A: \ell \rightarrow S$$

$$P \rightarrow A(P)$$



En otras palabras, la función A es la inversa de la proyección estereográfica desde E y las coordenadas de A(P) están dadas por:

$$A(P) = 2(E^t SP)P - (P^t SP)E$$

Sean  $U, V$  puntos fijos distintos en  $\ell$ . Definimos:

$$B: \mathbb{P} \rightarrow \ell$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \rightarrow x_0 U + x_1 V$$

Así, la composición  $A \circ B: \mathbb{P} \rightarrow S$  parametriza a la cónica  $S$  con los puntos de la recta proyectiva. En forma análoga podemos parametrizar a  $S^*$ . Para ello bastará asociar a cada punto  $X$  de  $\mathbb{P}$  la tangente a  $S$  en el punto  $(A \circ B)(X)$ . Para ser más explícitos definimos:

$$K: \mathbb{P} \rightarrow S^*$$

$$X \rightarrow (A \circ B(X))^t S$$

Dadas las cónicas no singulares  $S$  y  $S_1$ , consideremos el conjunto:

$$I := \left\{ (x, y) \in S \times S_1^* \mid x \in y \right\}$$

Notemos que en términos generales por cada punto  $x \in S$  pasan dos tangentes a  $S_1$ , digamos  $y_1$  y  $y_2$ ; definimos entonces  $g(x, y_1) := (x, y_2)$ . De esta manera determinamos una involución "g" en  $I$  (i.e.  $g \circ g = 1_I$ ) la cual tiene a lo más cuatro puntos fijos. (Hay a lo más 4 puntos distintos en  $S \cap S_1$ ).

Análogamente, cada tangente  $y \in S_1^*$  cortará a  $S$  en dos puntos  $x_1$  y  $x_2$ ; definimos  $h(x_1, y) = h(x_2, y)$ . Por supuesto "h" es una involución en  $I$  y también cumple la propiedad de tener a lo más cuatro puntos fijos, que corresponden a las tangentes

comunes a  $S$  y  $S_1$ .

Iniciemos la construcción de un polígono inscrito en  $S$  y circunscrito a  $S_1$ . Para ello elegimos un punto en  $S$  y una recta en  $S_1^*$  que pase por el punto, es decir, partimos de un elemento de  $I$  y continuamos la construcción aplicando alternadamente las funciones  $h$  y  $g$ . El polígono cierra si y sólo si para algún natural " $n$ "  $(g \circ h)^n$  deja fijo al par inicial.

Consideremos  $i_1: \mathbb{P} \rightarrow S$ ;  $i_2: \mathbb{P} \rightarrow S_1^*$  parametrizaciones como las descritas anteriormente y construyamos la función:

$$(i_1^{-1}, i_2^{-1}): S \times S_1^* \rightarrow \mathbb{P} \times \mathbb{P}$$

$$(x, y) \rightarrow (i_1^{-1}(x), i_2^{-1}(y))$$

Definase  $J := (i_1^{-1}, i_2^{-1})(I)$ . Aseguramos que  $J$  es un conjunto algebraico. En efecto, sean  $E \in S$ ;  $U, V \in \mathcal{L}$ ;  $E_1 \in S_1$ ;  $U_1, V_1 \in \mathcal{L}$ ;  $P = x_0 U + x_1 V$ ,  $P_1 = y_0 U_1 + y_1 V_1$  los elementos que determinan a las parametrizaciones  $i_1$  e  $i_2$ . Entonces, de acuerdo con los cálculos anteriores, un punto  $((x_0, x_1), (y_0, y_1)) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}$  está en  $J$  si y sólo si:

$$(2(E_1^t S_1 P_1)P_1 - (P_1^t S_1 P_1)E_1)^t S_1(2(E^t SP)P - (P^t SP)E) = 0$$

Observemos que al desarrollar esta expresión obtenemos un polinomio de grado cuatro en  $x_0, x_1, y_0, y_1$ ; homogéneo de grado 2 en  $x_0, x_1$  que es también homogéneo de grado 2 en  $y_0, y_1$ .

§ 2. La demostración de Griffiths y Harris en el plano proyectivo complejo.

Ahora vamos a suponer que las cónicas  $S$  y  $S_1$  se intersectan transversalmente y que el campo subyacente es el de los complejos. En estas circunstancias  $J$  resulta una superficie de Riemann. En efecto, ya que  $J$  está dado por un polinomio, sólo resta verificar que no existan singularidades. [S1].

Consideremos un polinomio como el mencionado en la sección anterior, es decir  $F(x_0, x_1, y_0, y_1)$  homogéneo de grado 2 en  $x_0, x_1$ , homogéneo de grado 2 en  $y_0, y_1$  y por lo tanto homogéneo de grado 4 en  $x_0, x_1, y_0, y_1$ .

Si definimos  $f_{(x_0, x_1)}(y_0, y_1) := F(x_0, x_1, y_0, y_1)$  para cada  $x_0, x_1$  fijos, entonces  $f_{(x_0, x_1)} \in \mathbb{C}[y_0, y_1]$  y podemos escribir  $f_{(x_0, x_1)}(y_0, y_1) = \phi_0 y_0^2 + 2\phi_1 y_0 y_1 + \phi_2 y_1^2$  con  $\phi_0, \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{C}$ . En consecuencia,

$$f_{(x_0, x_1)}((y_0, y_1) + (w_0, w_1)) = f_{(x_0, x_1)}(y_0, y_1) + 2(\phi_0 y_0 + \phi_1 y_1)w_0 + 2(\phi_1 y_0 + \phi_2 y_1)w_1 + f_{(x_0, x_1)}(w_0, w_1)$$

que es un desarrollo de Taylor finito.

Supongamos ahora que  $(a_0, a_1)$  satisface el polinomio  $f_{(x_0, x_1)}$  y que en este punto se anulan ambas parciales, entonces  $f_{(x_0, x_1)}((a_0, a_1) + (w_0, w_1)) = 0 + 2(0)w_0 + 2(0)w_1 + f_{(x_0, x_1)}(w_0, w_1) = f_{(x_0, x_1)}(w_0, w_1)$ ; gracias a esto podemos enunciar el:

LEMA 1 Si  $(x_0, x_1, a_0, a_1)$  y  $(x_0, x_1, b_0, b_1)$  son tales que:

$$1) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} \text{ en } P_C$$

$$2) \frac{\partial F}{\partial y_0} = \frac{\partial F}{\partial y_1} = 0 \text{ en } (x_0, x_1, a_0, a_1)$$

$$2) (x_0, x_1, a_0, a_1), (x_0, x_1, b_0, b_1) \text{ anulan a } F$$

entonces para cualesquiera  $w_0, w_1$ , tenemos  $F(x_0, x_1, w_0, w_1) = 0$

DEMOSTRACION.

En virtud de la propiedad (1) existen complejos  $\alpha$  y  $\beta$  tales que  $(w_0, w_1) = \alpha(a_0, a_1) + \beta(b_0, b_1)$ . Si  $\alpha = 0$ , el lema se cumple; si no, aplicamos las observaciones anteriores y tenemos:

$$F(x_0, x_1, w_0, w_1) = f_{(x_0, x_1)}(\alpha(a_0, a_1) + \beta(b_0, b_1)) =$$

$$\alpha^2 f_{(x_0, x_1)}((a_0, a_1) + \frac{\beta}{\alpha}(b_0, b_1)) = \alpha^2 f_{(x_0, x_1)}\left(\frac{\beta}{\alpha}(b_0, b_1)\right) =$$

$$\beta^2 f_{(x_0, x_1)}(b_0, b_1) = 0 \blacksquare$$

Regresemos al estudio de  $J$ . Lo que probamos anteriormente quiere decir que la diferencial del polinomio que determina a  $J$  no se anula sobre dicho conjunto. Para ver esto, supongamos que existen puntos  $(x_0, x_1, a_0, a_1)$ ,  $(x_0, x_1, b_0, b_1)$  en  $J$  que cumplen las hipótesis del lema 1. Esto querría decir que existe un punto en la cónica  $S$  por el cual pasan todas las tangentes a  $S_1$  (contradicción). Así que para los puntos en  $S$  por los cuales pasa un par de tangentes distintas a  $S_1$ , sus puntos

asociados en  $J$  no anulan las parciales  $\frac{\partial F}{\partial y_0}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y_1}$ . Sin embargo, no todos los puntos de  $J$  son de este tipo ya que existen exactamente cuatro puntos distintos en  $S \cap S_1$  (recuérdese la transversalidad) que por supuesto sólo admiten una tangente. Recordemos que éstos no son puntos de contacto doble; por lo tanto, cada tangente a  $S_1$  que contiene a alguno de ellos corta a  $S$  en algún otro punto. Luego, aplicando el argumento dual, tenemos que las excepciones quedan cubiertas.

En resumen, hemos logrado demostrar que efectivamente  $J$  es una superficie de Riemann que además es compacta.

Recordemos un par de teoremas:

TEOREMA 1.1 [ $S_1$ ]. En una superficie de Riemann compacta, el número de puntos de ramificación es par; además:

$$\text{genero} = \frac{1}{2} (\text{número de puntos de ramificación}) - (\text{número de hojas}) + 1.$$

TEOREMA 1.2 [ $S_1$ ] [ $M_1$ ]. Sea " $V$ " una superficie de Riemann compacta de género uno. Existe una diferencial " $\omega$ " holomorfa de periodos independientes tal que la función:

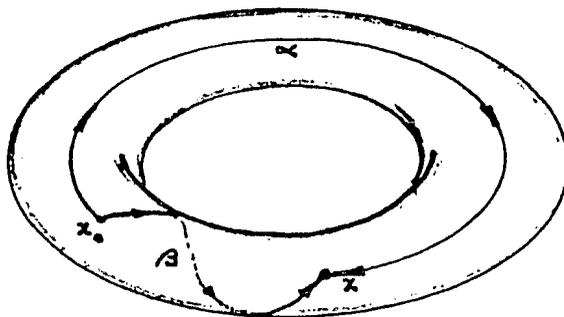
$$\mu : V \longrightarrow \mathbb{C}/\Lambda$$

$$x \longrightarrow \int_{x_0}^x \omega \pmod{\Lambda}$$

donde  $\Lambda$  es la latiz de periodos de  $\omega$  y  $x_0$  es un punto fijo en  $V$ , es un isomorfismo analítico de superficies de Riemann.

Sea  $\pi_1$  la primera proyección canónica de  $\mathbb{P}_c \times \mathbb{P}_c$  sobre  $\mathbb{P}_c$ . Entonces  $\pi_1|_J$  es suprayectiva, analítica y, en términos generales, envía dos puntos a la misma imagen, salvo los cuatro puntos que corresponden a la intersección de las cónicas. Así que, de acuerdo al teorema 1.1, tenemos que el género de  $J$  es 1. En otras palabras,  $J$  es un "Toro". Además, las involuciones  $h$  y  $g$  definidas en la sección anterior resultan analíticas (las podemos ver como intercambio de hojas).

Ahora concentremos nuestra atención en el teorema 1.2. Fijemos un punto  $x_0$  en  $J$ , sea  $x$  un punto cualquiera en  $J$  y  $\alpha, \beta$  un par de trayectorias de  $x_0$  a  $x$  (figura).



Observemos que:

$$\int_{\alpha} \omega - \int_{\beta} \omega = \int_{\alpha} \omega + \int_{\beta^{-1}} \omega = \int_{\alpha \circ \beta^{-1}} \omega$$

La última es una integral sobre una curva cerrada basada en  $x_0$ . Como el grupo fundamental del toro es  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ( $\{G_1\}$ ), podemos considerar un par de curvas  $\gamma_1, \gamma_2$  cuyas clases de homotopía

pía generan el grupo; además, la integral respeta las clases de homotopia, por tanto:

$$\int_{\alpha \circ \beta^{-1}(n\gamma_1) \circ (m\gamma_2)} \omega = \int_{n\gamma_1} \omega + \int_{m\gamma_2} \omega = n \int_{\gamma_1} \omega + m \int_{\gamma_2} \omega$$

en donde  $n, m$  son enteros tales que la clase de  $\alpha \circ \beta^{-1}$  es la misma que la de  $(n\gamma_1) \circ (m\gamma_2)$ . Los complejos  $\int_{\gamma_1} \omega$  y  $\int_{\gamma_2} \omega$  son precisamente lo que llamamos los periodos de  $\omega$  y que designaremos en lo sucesivo por  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . Definimos la latiz de periodos de  $\omega$  como el conjunto de todos los elementos de  $\mathbb{C}$  que se escriben como  $n\lambda_1 + m\lambda_2$  con  $n, m$  enteros. A dicho conjunto le llamaremos  $\Lambda$ .

Es claro que  $\Lambda$  es un subgrupo aditivo de  $\mathbb{C}$  y ya que las integrales sobre cualesquiera dos trayectorias de  $x_0$  a  $x$  difieren por un elemento de  $\Lambda$ , tiene sentido, pues, definir:

$$\begin{aligned} \mu : J &\rightarrow \mathbb{C}/\Lambda \\ x &\rightarrow \int_{x_0}^x \omega \pmod{\Lambda} \end{aligned}$$

Lo que asegura el teorema 1.2 es que existe  $\omega$  con la propiedad de que  $\mu$  es isomorfismo analítico y que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son  $\mathbb{R}$ -linealmente independientes.

Así que existe un isomorfismo de superficies de Riemann  $\mu : J \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ , Definimos  $g_1 := \mu g \mu^{-1}$  y  $h_1 := \mu h \mu^{-1}$  entonces los siguientes diagramas de isomorfismos analíticos conmutan.

$$\begin{array}{ccc}
 J & \xrightarrow{g} & J \\
 \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\
 \mathbb{C}/\Lambda & \xrightarrow{g_1} & \mathbb{C}/\Lambda
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 J & \xrightarrow{h} & J \\
 \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\
 \mathbb{C}/\Lambda & \xrightarrow{h_1} & \mathbb{C}/\Lambda
 \end{array}$$

Sabemos que  $\mathbb{C}$  es el cubriente universal de  $\mathbb{C}/\Lambda$  y que esto se realiza por medio de la proyección canónica "p" al cociente.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \mathbb{C} \\
 & & & & \downarrow p \\
 \mathbb{C} & \xrightarrow{p} & \mathbb{C}/\Lambda & \xrightarrow{h_1} & \mathbb{C}/\Lambda
 \end{array}$$

Como  $\mathbb{C}$  es simplemente conexo, los morfismos inducidos en los grupos fundamentales por  $h_1 \circ p$  y  $p$  son los morfismos cero. Por lo tanto se verifica  $(h_1 \circ p)_* (\pi_1(\mathbb{C})) \subset p_* (\pi_1(\mathbb{C}))$ , es decir,  $h_1 \circ p$  satisface el criterio de levantamiento [G1]; luego, existe  $h_2$  que hace conmutar el diagrama. De hecho, la existencia de  $h_2$  está implícita al decir que  $h_1$  es analítica, pero resulta conveniente destacar que se obtiene por el proceso anterior. De la misma manera, existe  $g_2$  tal que:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C} & \xrightarrow{g_2} & \mathbb{C} \\
 p \downarrow & & \downarrow p \text{ conmuta} \\
 \mathbb{C}/\Lambda & \xrightarrow{g_1} & \mathbb{C}/\Lambda
 \end{array}$$

Demostremos que  $h_2$  y  $g_2$  son funciones lineales (del tipo  $az + b$  con  $a$  y  $b$  constantes). Trabajemos con  $h_2$ . Para cada

$x \in \Lambda$  existe  $y \in \Lambda$  tal que, para toda  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $h_2(z_0 + x) = h_2(z_0) + y$ . Como las cartas de  $\mathbb{C}/\Lambda$  están inducidas por  $p$ ,  $h_2$  es analítica y, en virtud de la igualdad anterior,  $\left. \frac{dh_2}{dz} \right|_{z_0 + x} = \left. \frac{dh_2}{dz} \right|_{z_0}$ . En otras palabras el valor de la derivada de  $h_2$  no se altera al trasladar por un elemento de  $\Lambda$ . Entonces la imagen de  $\mathbb{C}$  bajo la derivada será la misma que la del paralelogramo de vértices  $0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2$ ; dicha imagen es acotada. Luego, la derivada es constante, lo cual nos dice que existen complejos  $a, b$  ( $a \neq 0$ ) tales que  $h_2'(z) = az + b$ .

Recordemos que  $h_2 \circ h_2 = 1_{\mathbb{C}/\Lambda}$ , por lo tanto  $h_2 \circ h_2$  debe ser una transformación cubriente. Observemos que  $h_2 \circ h_2(0) = ab + b$ , de donde  $ab + b \in \Lambda$ ; así que  $h_2^2(z) - z = (a^2 - 1)z + ab + b \in \Lambda$ . Esto nos dice que, para toda  $z \in \mathbb{C}$ ,  $(a^2 - 1)z \in \Lambda$ ; de donde,  $a^2 - 1 = 0$ . Es decir  $h_2(z) = -z + b$  o bien  $h_2(z) = z + b$ .

Si  $h_2(z) = z + b$  entonces, para que  $h_1$  tenga puntos fijos, (los tiene, recordemos las tangentes comunes) debe existir alguna  $z$  tal que  $(z + b) - z = b \in \Lambda$ ; pero de ocurrir esto todos los puntos serían fijos, situación que no corresponde al problema que estudiamos.

En conclusión, podemos afirmar que existen complejos  $b$  y  $c$  tales que  $h_2(z) = -z + b$  y  $g_2(z) = -z + c$ . Nosotros querríamos estudiar el comportamiento de  $(g \circ h)^n$ . Fijémonos en  $(g_2 \circ h_2)^n(z) = z + n(b - c)$ . Para que el polígono cierre debemos tener que  $n(b - c)$  esté en  $\Lambda$ , pero esto no depende del

punto inicial. Es decir, hemos probado el:

**TEOREMA 1.3** Si  $S$  y  $S_1$  son cónicas propias, en el plano proyectivo complejo, que se intersectan transversalmente y existe un polígono a la vez inscrito en  $S$  y exscrito a  $S_1$ , entonces, desde cualquier punto de  $S$  es posible trazar uno de tales polígonos y todos tienen el mismo número de lados.

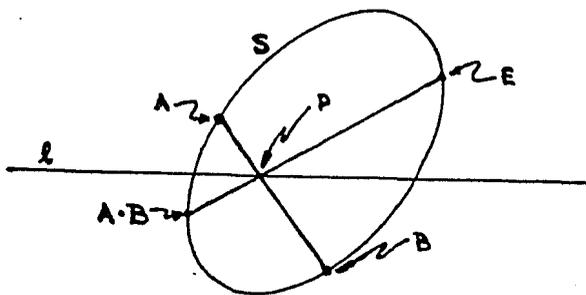
## CAPITULO 2

"Una demostración proyectiva en campos algebraicamente cerrados de característica cero"

## § 1. Las cónicas como campo.

Consideremos una cónica propia  $S$ ,  $\ell$  una recta y  $E$  un punto en  $S$  que no está en  $\ell$ .

Sean  $A, B \in S - \ell$ ; la recta  $\overline{AB}$  intersectará a  $\ell$  en un punto  $P$ . Definimos  $A \cdot B$  como la intersección residual de  $\overline{EP}$  con  $S$ .



También definimos  $A \cdot B := B \cdot A := B$  en el caso en que  $A \in S - \ell$  y  $B \in S \cap \ell$

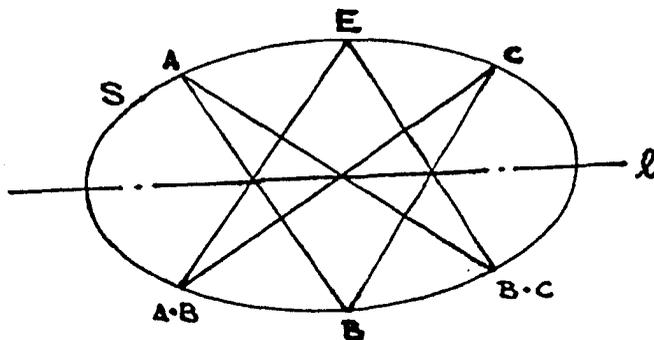
Definimos

$$: (S - \ell) \times (S - \ell) \longrightarrow (S - \ell)$$

$$(A, B) \longrightarrow A \cdot B$$

Se afirma que  $(S - \ell, \cdot)$  es grupo abeliano. En efecto, la operación " $\cdot$ " es cerrada ya que si  $A \cdot B \in S \cap \ell$  entonces  $\overline{P(A \cdot B)} = \ell$  y  $\ell$  contendría a  $E$  (contradicción). Claramente la operación es conmutativa,  $E$  es el idéntico y  $A^{-1}$  se obtiene como la intersección residual de la cónica  $S$  con la recta determinada por  $A$  y el punto de intersección de la tangente por  $A$  y  $\ell$ .

Resta sólo demostrar la asociatividad. Sean  $A, B, C$  en  $(S - \ell)$ ; consideremos el hexágono  $A, B, C, A \cdot B, E, B \cdot C$ . Los puntos  $((\overline{A \cdot B}) \cap \overline{AE})$ ,  $((\overline{B \cdot C}) \cap \overline{BE})$  determinan la recta de Pascal del hexágono y por la construcción de la operación también pertenecen a  $\ell$ . Por lo tanto  $\ell$  es la recta de Pascal del hexágono, de lo cual se sigue que  $((\overline{B \cdot C}) \cap \overline{AE}) \cap (\overline{A \cdot B}) \cap \overline{CE}$  está en  $\ell$ , lo que implica  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ .



Lo que hemos hecho es, en esencia, presentar el teorema de Pascal como la ley asociativa en un grupo. Esto tiene aplicaciones interesantes una de las cuales es el porisma de Poncelet.

Realizaremos ahora una construcción un poco más elaborada. De nuevo consideramos una cónica propia  $S$  y  $E_0, E_1, E_\infty$  tres puntos distintos en ella; llamemos " $m$ " a la recta determinada por

$E_0$  y  $E_\infty$ , " $a$ " a la tangente por  $E_\infty$  y " $M$ " al polo de  $m$ .

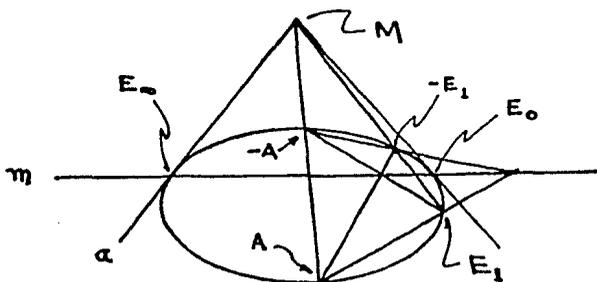
Denotemos con "+" a la operación definida en  $S$  mediante el punto  $E_0$  y la recta  $a$ ; y con " $\cdot$ " a la operación definida mediante el punto  $E_1$  y la recta  $m$ .

TEOREMA 2.1  $(S - \{E_\infty\}, +, \cdot)$  es campo.

Sólo queda por probar la distributividad. Dividiremos la la demostración en dos partes.

$$1) (-E_1) \cdot A = -A$$

En efecto, observemos que si el punto  $A \in S$  es diferente de  $E_\infty$  entonces  $A$ ,  $-A$  y  $M$  son colineales.  $M$  y  $((\overline{E_1(-A)}) \cap (\overline{A(-E_1)}))$  son puntos diagonales del cuadrángulo  $E_1, -E_1, -A, A$ . Esto significa que  $((\overline{E_1(-A)}) \cap (\overline{A(-E_1)}))$  está en  $m$  o, equivalentemente,  $(-E_1) \cdot A = -A$ .



Observación El inciso uno implica  $A \cdot (-C) = -(A \cdot C)$

2)  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ . No perdemos generalidad si consideramos que ninguno de los puntos  $A, B, C \in (S - \{E_\infty\})$  es  $E_0$ .

Es claro que sumar un elemento constante diferente de  $E_\infty$  o bien multiplicar por un elemento distinto de  $E_0$  o  $E_\infty$  establece una homografía en la cónica (i.e., una transformación que preserve razones cruzadas).

Consideremos los puntos  $E_0, -C, E_\infty, B$ . Al sumar el punto  $C$  obtenemos  $C, E_0, E_\infty, (B + C)$  respectivamente y al multiplicar por  $A$  obtenemos  $A \cdot C, E_0, E_\infty, A \cdot (B + C)$ ; es decir existe una homografía descrita por :

$$\begin{array}{cccc} E_0 & - C & E_\infty & B \\ A \cdot C & E_0 & E_\infty & A \cdot (B + C) \end{array}$$

Ahora multipliquemos  $E_0, -C, E_\infty, B$  por  $A$ , resultando  $E_0, - (A \cdot C), E_\infty, A \cdot B$ . Sumando  $A \cdot C$  tenemos  $A \cdot C, E_0, E_\infty, (A \cdot B + A \cdot C)$ . En otras palabras, tenemos una homografía:

$$\begin{array}{cccc} E_0 & - C & E_\infty & B \\ A \cdot C & E_0 & E_\infty & (A \cdot B + A \cdot C). \end{array}$$

Comparando ambas se tiene  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ .

La simplicidad de la construcción de estas operaciones en la cónica (sólo usamos regla) nos permite relacionar polinomios con construcciones. Por ejemplo el polinomio  $x + y$ , con el cual ya hemos trabajado, es tal que la pareja  $(A, B)$  anula el polinomio si y solo si  $M \in \overline{AB}$ .

A estas alturas habremos notado ya que los puntos  $E_0$ ,  $E_1$ ,  $E_\infty$  funcionan precisamente como los elementos  $0$ ,  $1$ ,  $\infty$  de un campo extendido. Así que no hay impedimento para extender los valores de nuestros polinomios, de la manera usual, para poderlos valuar en  $E_\infty$ . De hecho contaremos con ello a lo largo de este capítulo sin mencionarlo explícitamente.

Consideremos un sistema de coordenadas proyectivas tal que:

$$\begin{array}{cccc}
 & 0 & & 1 & & & & 1 \\
 E_0 = & 0 & M = & 1 & E_\infty = & 0 & E_1 = & 1 \\
 & 1 & & 0 & & 0 & & 1
 \end{array}$$

En este sistema, nuestra cónica está dada por la ecuación  $y^2 = xz$  que escribimos como  $(y/z)^2 = x/z$ . Si definimos el parámetro  $\theta := y/z$  entonces los puntos de la cónica quedan descritos por

$$\begin{array}{c}
 \theta^2 \\
 \theta \\
 1
 \end{array}$$

Un simple cálculo muestra que:

$(1 - (x + y) \quad xy)$  es la recta que une los puntos que corresponden a los valores  $x$  y  $y$  del parámetro;  $m = (0 \ 1 \ 0)$ ,  $a = (0 \ 0 \ 1)$  y los valores  $0$ ,  $1$ ,  $\infty$  corresponden a  $E_0$ ,  $E_1$ ,  $E_\infty$ .

Denotemos  $\begin{array}{c} \theta^2 \\ \theta \\ 1 \end{array}$  como  $E_\theta$ .

La cónica  $S$  pertenece a algún plano proyectivo sobre un campo  $K$ ; con esto en mente enunciamos el:

TEOREMA 2.2 El campo del teorema 2.1 y  $K$  son isomorfos. (Se menciona de manera indirecta en [S2] pag. 257).

Demostración. La biyección se establece mediante el parámetro. Revisemos el comportamiento de las operaciones.

Las rectas  $\overline{E_x E_y}$ ,  $\overline{E_1 E_{xy}}$ ,  $m$  concurren. En efecto:

$$\begin{vmatrix} 1 & - (x + y) & xy \\ 1 & - (1 + xy) & xy \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Así que  $E_x \cdot E_y = E_{xy}$ .

Análogamente las rectas  $\overline{E_x E_y}$ ,  $\overline{E_0 E_{x+y}}$  y  $a$  concurren. Por tanto  $E_x + E_y = E_{x+y}$  y el teorema está probado.

La parametrización que hemos estudiado se llama "parametrización canónica" de  $S$ . Esta induce una geometría subordinada en  $S$  donde las coordenadas permisibles están dadas por transformaciones de Moebius en el parámetro canónico. De ello resulta que lo que discutamos en cuanto a uno u otro parámetro en términos de polinomios es esencialmente lo mismo.

TEOREMA 2.3 Sea  $P(x, y)$  un polinomio simétrico (i.e.  $P(x, y) = P(y, x)$ ) de grado dos en  $x$  que toma valores en un parámetro permisible de  $S$ . Entonces:

- a) Existe una cónica  $S_1$  tal que  $P(x, y) = 0$  si y sólo si  $\overline{E_x E_y}$  es tangente a  $S_1$ .

- b) Existe una cónica  $T$  tal que  $P(x, y) = 0$  si y sólo si  $E_x$  y  $E_y$  son conjugados respecto de  $T$

Recíprocamente:

- α) Para cada cónica  $S_1$  existe un polinomio simétrico  $P(x, y)$  de grado dos en  $x$  tal que  $P(x, y) = 0$  si y sólo si  $\overline{E_x E_y}$  es tangente a  $S_1$
- β) Para cada cónica  $T$  existe un polinomio simétrico  $P(x, y)$  de grado dos en  $x$  tal que  $P(x, y) = 0$  si y sólo si  $E_x$  y  $E_y$  son conjugados respecto de  $T$ .

Demostración. La demostración sigue el argumento que aparece en [SK]. No perdemos generalidad si suponemos que trabajamos con la parametrización canónica.

La condición para que la recta  $\overline{E_x E_y}$  satisfaga una cónica

$$\text{dual general } S_1^* = \begin{matrix} & A & H & G \\ & H & B & F \\ & G & F & C \end{matrix} \text{ es:}$$

$$\text{i) } \begin{pmatrix} 1 & - & (x + y) & xy \end{pmatrix} \begin{matrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ - (x + y) \\ xy \end{matrix} = 0$$

La condición para que  $E_x$  y  $E_y$  sean conjugados respecto

$$\text{de una cónica general } T = \begin{matrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{matrix} \text{ es:}$$

$$\text{ii) } E_x^t T E_y = 0$$

Recordemos que un polinomio simétrico se escribe en términos de las funciones elementales; así que la forma general de un polinomio  $P(x, y)$  de grado dos en  $x$  es:

$$\text{iii) } P(x, y) = a_1(x + y)^2 + a_2(xy)^2 + a_3(x + y)xy + a_4(x + y) + a_5xy + a_6.$$

Desarrollando las condiciones i) y ii) se obtiene:

$$\text{i) } B(x + y)^2 + C(xy)^2 - 2F(x + y)xy - 2H(x + y) + 2Gxy + A = 0$$

$$\text{ii) } g(x + y)^2 + a(xy)^2 + h(x + y)xy + f(x + y) + (b - 2g)xy + c = 0$$

De lo cual se hace evidente el resultado.

Definición. Sean  $A_0, A_n \in S$ . Decimos que  $A_0, A_n$  son los extremos de una  $n$ -cadena si existen  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \in S$  tales que para toda  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , la recta  $\overline{A_i A_{i+1}}$  es tangente a  $S_1$  y  $A_{i-1} = A_{i+1}$  si y sólo si  $A_i \in S \cap S_1$ .

A partir de este punto supondremos que  $S_1$  es propia.

TEOREMA 2.4 [P1] Dado  $n \in \mathbb{N}$  existe una cónica fija " $S_n$ " tal que una recta une extremos de  $n$ -cadenas si y sólo si es tangente a  $S_n$ . Además  $S_n$  pertenece a la familia determinada por  $S$  y  $S_1$ .

### Demostración

La prueba procede por inducción

Para  $n = 1$  el resultado es evidente y para  $n = 2$  es corolario del teorema 2.3.

Supongamos el resultado para  $n \leq k$ . Por tanto existen polinomios  $P_1, P_2, \dots, P_k$  asociados a las cónicas  $S_1, S_2, \dots, S_k$  que verifican las condiciones del teorema 2.3.

Definimos  $P_0(x, y) := (x - y)^2$ .

Observemos que si  $P_{k-1}(x, y)$  es el cuadrado de un polinomio en  $K[x, y]$ , entonces cualquier par de  $(k - 1)$  - cadenas con un extremo común comparten también el otro extremo. En otras palabras cualesquiera extremos de una  $(k + 1)$  - cadena lo son de una  $(k - 3)$  - cadena. Luego,  $S_{k+1} = S_{k-3}$ .

Consideremos a  $P_k(x, \omega)$  y  $P_1(\omega, y)$  como polinomios en  $K[x, y][\omega]$  y llamemos  $R_k$  a su resultante. Es claro que  $R_k$  es un polinomio simétrico de grado cuatro en  $x$  y grado 4 en  $y$ , que se anula en parejas de parámetros que corresponden a extremos de  $(k - 1)$  - cadenas y de  $(k + 1)$  - cadenas. Por tanto  $R_k(x, y)$  se anula en todas las parejas donde se anula  $P_{k-1}(x, y)$ ; luego cualquier factor irreducible que divida a  $P_{k-1}(x, y)$  divide también a  $R_k(x, y)$ .

$P_{k-1}$  se descompone a lo más en dos irreducibles, ya que si esto no ocurriera, existiría un punto en  $S$  tal que cualquier recta por él sería tangente a  $S_{k-1}$  y por tanto a  $S_1$ , lo que diría

que  $S_1$  es singular.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que si  $P_{k-1}$  se factoriza en un par de irreducibles, éstos son distintos. De todo lo anterior se concluye que  $P_{k-1}$  divide a  $R_k$ . Definimos  $P_{k+1} := R_k / P_{k-1}$ . Es fácil verificar que  $P_{k+1}$  tiene las propiedades requeridas. Sólo resta probar que la cónica  $S_{k+1}$  determinada por  $P_{k+1}$  pertenece a la familia determinada por  $S$  y  $S_1$ . Para ello simplemente observamos que los puntos en  $S \cap S_1$ , contados propiamente, aparecen en  $S \cap S_k$ .

Ahora obtendremos el porisma de Poncelet como corolario al teorema 2.4.

**Corolario.** Sean  $S, S_1$  cónicas propias. Si existe un polígono a la vez inscrito en  $S$  y circunscrito a  $S_1$  entonces, cualquier punto de  $S$  es vértice de uno de tales polígonos.

**Demostración.** Sea  $n$  el número de vértices del polígono. Sea  $A$  un vértice de dicho polígono. Como  $A$  coincide con ambos extremos de una  $n$ -cadena, la tangente a  $S$  por  $A$  es también tangente a  $S_n$ . Además dicha recta es la única tangente a  $S_n$  que pasa por  $A$ , por tanto  $A \in S \cap S_n$ ; es decir,  $A$  es un punto doble. De lo anterior se obtiene que  $S$  y  $S_n$  comparten por lo menos seis puntos, esto dice que ambas cónicas coinciden. Luego, el resultado está probado.

## CAPITULO 3

## Casos no - transversales

Definimos  $N := \{0, 1, 2, \dots\}$  y conservamos la notación del capítulo 2.

El que hayamos probado el porisma de Poncelet sin suponer la transversalidad de las cónicas  $S$  y  $S_1$  nos lleva a preguntarnos cual ha sido la ganancia efectiva al remover dicha hipótesis. Con el fin de evaluar esto, supondremos, en el presente capítulo, que  $E_\infty$  es un punto de multiplicidad mayor o igual a dos en la intersección de las cónicas propias  $S$  y  $S_1$ . De ello resulta que el polinomio determinado por la cónica  $S_1$  (teorema 2.3) es asociado del polinomio  $P(x, y) = x^2 + (by + f)x + y^2 + fy + c$  ( $b, f, c \in K$ ). En estas condiciones los parámetros de los puntos en  $S \cap S_1$  están dados por  $\infty$  y los elementos en  $K$  que satisfacen:

$$1).- (b^2 - 4)x^2 + 2f(b - 2)x + f^2 - 4c = 0.$$

La condición análoga para  $S^* \cap S_1^*$  es:

$$2).- (b + 2)x^2 + 2fx + c = 0,$$

Observemos que cuando  $b = 2$  existen  $s$  y  $t$  en  $K$  tales que  $P(x, y) = (x + y + s)(x + y + t)$ ; es decir,  $P(x, y)$  representa

dos haces de rectas, por tanto  $S_1$  es degenerada. Además el análisis de las ecuaciones 1) y 2) nos permite concluir que  $E_\infty$  es de multiplicidad mayor o igual a tres si y sólo si  $b = -2$ . Teniendo en cuenta estos hechos y la representación que hemos dado al problema enunciarnos el:

**TEOREMA 3.1** Existen polígonos inscritos en  $S$  y circunscritos a  $S_1$  si y sólo si existe una raíz de la unidad de orden mayor que dos que anule el polinomio  $x^2 + bx + 1$ .

**Demostración.** Sea  $\{x_n\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) una sucesión tal que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_0$  y  $x_n$  son parámetros que corresponden a extremos de alguna  $n$ -cadena. Entonces  $x_n + x_{n+2} = -(bx_{n+1} + f)$ , de donde  $x_{n+3} - (1-b)x_{n+2} + (1-b)x_{n+1} - x_n = 0$ . Es decir, la sucesión  $\{x_n\}$  es recurrente de grado tres con ecuación característica  $x^3 - (1-b)x^2 + (1-b)x - 1 = 0$ , que se factoriza en  $(x-1)(x^2 - bx + 1) = 0$ .

Observemos que la ecuación característica tiene raíces múltiples sólo cuando  $b = 2$  o  $b = -2$ .

Como  $S_1$  es propia el caso  $b = 2$  queda excluido.

Si  $b = -2$  la ecuación característica tiene a 1 como raíz triple. En este caso las sucesiones  $\{1\}$ ,  $\{n\}$ ,  $\{n^2\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) forman una base para el espacio de sucesiones cuya ecuación característica es  $(x-1)^3$ . Por tanto existen  $\alpha, \beta, \gamma \in K$  tales que  $x_n = \alpha + \beta n + \gamma n^2$ . Una sucesión de este tipo es periódica sólo cuando es constante. En otras palabras, la hipótesis de que

$x^2 + bx + 1 = 0$  sea satisfecha por una raíz de la unidad distinta de 1 o - 1, es necesaria.

Si  $b^2 \neq 4$  las raíces de la ecuación característica son todas distintas, digamos 1,  $r$ ,  $1/r$ ; por lo tanto la sucesión  $\{x_n\}$  es generada por las sucesiones  $\{1\}$ ,  $\{r^n\}$ ,  $\{r^{-n}\}$ . Una sucesión de este tipo es periódica si y sólo si  $r$  es raíz de la unidad.

■

**Corolario.** Si  $S \cap S_1$  tiene un punto de multiplicidad mayor o igual a tres no existen polígonos inscritos en  $S$  con lados tangentes a  $S_1$ .

En otras palabras, el porisma de Poncelet se cumple por vacuidad. Además es el único tipo de intersección para lo cual esto ocurre.

El corolario se demuestra observando que la condición sobre la intersección se traduce en  $b = -2$ .

## BIBLIOGRAFIA

- Cayley, Philosophical Magazine, vol. VI (1853), 99-102
- Cayley, Philosophical Trans. Royal Soc. London, vol. CLI (1861), 225-239
- [G1] Greenberg, M. J., Lectures on Algebraic Topology. Benjamin, 1967
- Griffiths, P., y Harris, J., A Poncelet Theorem in space. Comment. Math. Helvetici 52 (1977) 145-160.
- Griffiths, P., y Harris, J., On Cayley's explicit solution to Poncelet's porism. L'Enseignement mathém., t. XXIV, fasc. 1-2. (1977) 31-40.
- Jacobi, Über die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie, Gesammelte Werke, Vol. I (1881) 278-293.
- [M1] Mumford, D., Algebraic geometry I Complex projective Varieties. Springer-Verlag 1976.
- Poncelet, J.V., Traité des propriétés projectives des figures, 2<sup>a</sup> edición, Gauthier-Villars 1865.
- [S2] Seidenberg, E., Elementos de geometría proyectiva. CECSA 1965.
- [SK] Semple y Kneebone, Algebraic projective geometry, Oxford 1963
- [S1] Siegel, Topics in complex function theory. Tracts in Mathematics no. 25, Wiley-Interscience. 1969.