Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

LA CATEGORIA DE LUSTERNIK SCHNIERELMANN.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

EDUARDO QUIÑONEZ RICO.

MEXICO, D. F. 1983

Índice

Introducción.

El propósito de ésta tesis es de estudiar la categoría de Lusternik - Schnirelmann, la cual se define para un subconjunto X de un espacio topológico M como el mínimo de las cardinalidades de los cubiertos de X cuyos elementos tienen una vecindad la cual es contraíble en M.

Muchos fenómenos pueden entenderse en términos de la minimización de una funcional sobre una clase apropiada de objetos, por ejemplo en los problemas de la Física - Matemática: transiciones de fase, inestabilidad elástica y difracción de la luz, están entre los fenómenos que pueden estudiarse desde este punto de vista, de hecho la caracterización de los fenómenos físicos por principios variacionales ha sido un punto clave en la transición de la física clásica en la contemporanea. Una de las teorias más exitosas en el estudio de puntos críticos ha sido la teoría Morse, que dá una caracterización completa de una funcional en una vecindad de un punto crítico no degenerado, sin embargo en muchos ocasiones es importante el estudio de puntos críticos independientemente de que sean ó no degenerados. Dicha teoría fué formulada por los matemáticos rusos Lusternik y L. Schnirelmann. En el trabajo de Lusternik-Schnirelmann uno de los resultados más importantes es el de encontrar una cota inferior para el conjunto de puntos críticos de una funcional, ésta cota se define en términos de un índice asociado a los subconjuntos cerrados del dominio, dicho índice se conoce como la categoría de Lusternik - Schnirelmann. [6]

Dado que éste índice resulta ser un invariante del tipo de homotopía resulta importante para la clasificación de espacios topológicos. Por esta razón y lo anteriormente dicho estamos interesados en el estudio topológico de éste índice y de índices análogos que nos permitan profundizar en la descripción de éstos

Aunque la categoría ocupa un lugar importante en el cálculo de variaciones, el tratamiento que se da aquí no es en éste sentido que se dirije, sino topológico.

El tratamiento está dirigido a introducir índices por medio del cubrimiento de espacios con abiertos "simples" (donde simple significa contraíble, h_n-contraíble, H_n-contraíble y H-contraíble).

Este trabajo está basado fundamentalmente en el artículo "On the Lusternik-Schnirelman Category" de Ralph H. Fox.

En el capítulo I se define categoría en términos de homotopía y se abstrae inmediatamente el concepto de contractibilidad en cualquier relación de equivalencia, se dan resultados generales en este sentido relacionados con la dimensionalización del espacio como posibles cotas para el cálculo de la categoría.

Este capítulo se escribe de tal manera que los resultados sean válidos en los capítulos II y III donde se introducen ya relaciones más específicas.

En el capítulo II se define la relación de equivalencia homotopía en dimensión n $(n \in \mathbb{N})$

introduciendo así la correspondiente categoría n-dimensional de homotopía. Se dan algunos resultados que relacionan categoría y categoría n-dimensional y varias invariantes clásicos son desarrollados.

El capítulo III está dedicado a la categoría de homología en dimensión n y categoría de homología y en particular se estudia las categorías de homología en dimensión k de los espacios proyectivos.

Finalmente en el capítulo IV se considera lo que es conocido como categorías fuertes (de homotopía, n-homotopía, homología y n-homología).

I Categoría de Homotopía

1 Definiciones.

A través de todo éste trabajo, a menos de que se diga lo contrario, todos los espacios topológicos considerados serán espacios métricos separables.

1.1 Si X y M son dos espacios topológicos denotaremos por M^X al conjunto de funciones continuas $f: X \to M$.

1.2 Sean X y M espacios topológicos y $f_0, f_1 \in M^X$, f_0 y f_1 son llamadas homotópicas en M ($f_0 \sim f_1$ en M) si existe $H \in M^{X \times I}$ tal que $H(x,0) = f_0(x)$ y $H(x,1) = f_1(x)$ para toda $x \in X$. La función H es llamada una homotopía entre f_0 y f_1.

1.3 Sea $X \subset M$. Se dice que X es deformable en M dentro de $Y \subseteq M$ si existe $f_0 \in M^X$ con $f_0(X) \subset Y$ la cual es homotópica en M a $i: X \hookrightarrow M$ la inclusión de X en M. A tal homotopía la llamaremos una deformación de X en Y

1.4 Si existe $m \in M$ tal que $X \subseteq M$ puede ser deformado en M dentro de $\{m\}$, se dirá que X es contraíble en M. La deformación de X dentro de $\{m\}$ es llamada una contracción.

1.5 Diremos que X es contraíble si es deformable en X a $\{x\}$ para algún $x \in X$.

1.6 $A \subset M$ es llamado subconjunto categórico de M si existe un conjunto abierto $U \subseteq M$ tal que $A \subseteq U$ y U es contraíble en M.

1.7 Una cubierta de $X \subseteq M$ constituida por subconjuntos categóricos de M será llamada cubierta categórica de X en M. Denotaremos a la colección de cubiertas categóricos de X en M por $C_M(X)$.

1.8 Si σ es una cubierta de X denotaremos por $|\sigma|$ la cardinalidad de σ.

1.9 Sea $X \subset M$. La categoría de X en M, denotada por $\operatorname{cat}_M X$ se define como

$$\operatorname{cat}_M X = \inf\{|\sigma| : \sigma \in C_M(X)\}.$$

1.10 Una cubierta $\sigma \in C_M(X)$ será llamada minimal si $|\sigma| = \operatorname{cat}_M X$.

2 Base para la abstracción.

A través del capítulo I no se utiliza plenamente el caracter escencial de la definición de homotopía, por ésta razón, sustituimos la relación de homotopía por cualquier relación de equivalencia $\sim$ que satisfaga ciertas condiciónes que a continuación enunciaremos; posteriormente se introducirán relaciones de equivalencia como h_n (homotopía en dimensión n), H (homología), H_n (homología en dimensión n) las cuales tendrán éstas propiedades. Las condiciónes son:

(2.1) Si $\phi_0, \phi_1 \in X^P$ y $f_0, f_1 \in M^X$ son tales que $\phi_0 \sim \phi_1$, $f_0 \sim f_1$ entonces $f_0\phi_0 \sim f_1\phi_1$.

(2.2) Si A y B están mutuamente separados, es decir $A \cap B = \phi$ con A y B abiertos en $A \cup B$, y $f_0, f_1 \in M^{A \cup B}$ son tales que $f_0/A \sim f_1/A$ y $f_0/B \sim f_1/B$ entonces $f_0 \sim f_1$.

(2.3) Si $f_0, f_1 \in M^X$ son dos funciones constantes con valor x_0 y x_1 respectivamente entonces $f_0 \sim f_1$ si y solo si x_0 y x_1 están en la misma componente por trayectorias en M.

(2.4) Si $\phi_i, \psi_i \in M_i^{X_i}$ $(i = 1, 2)$ son tales que $\phi_1 \sim \psi_1$, $\phi_2 \sim \psi_2$ entonces $\phi \sim \psi$ donde $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in M^X$ con $M = M_1 \times M_2$, $X = X_1 \times X_2$.

Es claro que la relación de homotopía tiene éstas propiedades. En el resto de éste capítulo las definiciones de la sección anterior tales como deformación, contracción, categoría etc, serán leídos en el sentido que determina la relación de equivalencia considerada, en particular $\sim$ podría ser h, h_n, H ó H_n.

Algunos consecuencias de éstos axiomas son:

(2.5) Proposición. (a) $f_0 \sim f_1$ en K entonces $f_0 \sim f_1$ en M para todo M el cual contiene a K.

(b) Si $f_0, f_1 \in M^X$, $f_0 \sim f_1$ y $\ddot{x} \in X$ entonces $f_0(w)$ y $f_1(w)$ están en la misma componente por trayectorias de M.

(c) Si $f_0, f_1 \in M^X$ son tales que $f_0 \sim f_1$ y $A \subset X$ entonces $f_0/A \sim f_1/A$.

Demostración. (a) Basta componer las funciones f_0 y f_1 con la inclusión $i_K : K \hookrightarrow M$. y aplicamos (2.1).

(b) por (a) y (2.3)

(c) Elijamos $P = A \subset X$ $\phi_0 = \phi_1 = i_A : A \hookrightarrow X$ la inclusión, por lo tanto $f_0\phi_0 \sim f_1\phi_1$ de aquí $f_0/A \sim f_1/A$.

Existen espacios métricos para los cuales $cat_M X$ no existe, por ejemplo si $\sim$ es la relación de homotopía sea $M = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ y $X = \{0\}$ claramente X no tiene una cubierta categórica, de aquí que $cat_M X$ no esté definida. De ahora en adelante supondremos que $C_n(M)$ es no vacío, ésta condición es satisfecha por ejemplo cuando M es localmente contraible, es decir, si para todo $x \in M$ y $U \subseteq M$ abierto, existe $V \subseteq M$, con $x \in V \subseteq U$ y V contraible en U.

3 Relaciones Elementales.

En ésta sección estudiaremos ciertas propiedades elementales de la categoría.

(3.1) Proposición. (a) Si $X \subset Y \subset M$ entonces

$$cat_M(X) \leq cat_M(Y).$$

(b) Si M es abierto en N y $X \subset M$ entonces

$$\mathrm{cat}_M(X) \geq \mathrm{cat}_N(X).$$

Demostración: (a) Puesto que $C_M(X) \supseteq C_M(Y)$ se sigue que $\mathrm{cat}_M X \leq \mathrm{cat}_M Y$.

(b) Dado que $U \subset M$ categórico en M implica que es categórico en N, $C_M(X) \subseteq C_N(X)$ por lo tanto $\mathrm{cat}_N(X) \leq \mathrm{cat}_M(X)$.

(3.2) Proposición. Existe una cubierta minimal que pertenece a $C_M(X)$ la cual es abierta.

Demostración: Sea $\sigma \in C_M(X)$ minimal, entonces para cada $X_i \in \sigma$ existe $U_i \subset M$ abierto tal que $X_i \subset U_i$ y U_i es contraible en M, pero U_i es tambien un conjunto categórico, por lo tanto $\sigma' = \{U_i\} \in C_M(X)$ y $|\sigma| = |\sigma'|$.

Antes de probar una proposición referente a cubiertos categoricos cerrados probaremos el siguiente lema

(3.3) Lema. Sea $\{A_i\}_{i=1}^n$ una cubierta abierta de un subconjunto cerrado Y en un espacio normal X, entonces existe una cubierta abierta $\{B_i\}_{i=1}^n$ de Y tal que $\bar{B}_i \subset A_i$, $i=1,\dots,n$.

Demostración: Sea $C = Y^c \cup (\bigcup_{i=2}^n A_i)$ el cual es abierto. Claramente $A_1^c \subset C$ por lo tanto $C^c \subseteq A_1$, puesto que X es un espacio normal, existe $B_1 \subset X$ abierto tal que

$$C^c \subseteq B_1 \subseteq \bar{B}_1 \subseteq A_1.$$

Se afirma que $\{B_1, A_2, \dots, A_n\}$ es una cubierta abierta de Y. En efecto:

$$Y \subset C^c \cup C \subseteq C \cup V_1 = Y^c \cup (\bigcup_{i=2}^n A_i) \cup V_1 = V_1 \cup (\bigcup_{i=2}^n A_i)$$

Aplicamos el mismo procedimiento para la cubierta $\{A_2, B_1, A_3, \dots, A_n\}$ y procedemos inductivamente.

(3.4) Proposición. Si $X \subset M$ es cerrado y $\mathrm{cat}_M X$ es finito existe siempre una cubierta minimal en $C_M(X)$ la cual es cerrada.

Demostración. Sea $\sigma \in C_M(X)$ abierta y minimal, $\sigma = \{V_i\}_{i=1}^n$

por (3.3) existen $B_i \subset U_i$ $i=1,\dots,n$ cerrados tales que $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ por lo tanto $\{B_i\} \in C_M(X)$ es cerrada, claramente $|\{B_i\}| = |\sigma|$ $\therefore$ $\{B_i\}$ es minimal y así la proposición queda probada.

(3.5) Proposición: Si $X \subset M$ es cerrado y M es un complejo finito, hay una cubierta minimal en $C_M(X)$ cuyos conjuntos son subcomplejos de M en una cierta subdivisión.

Demostración. Si $\{U_i\} \in C_M(X)$ abierta y minimal, podemos tomar un número de Lebesgue δ para ésta cubierta, entonces podemos hacer una subdivisión en M tal que el diámetro de sus simplejos de ésta nueva subdivisión sea menor que δ, de aquí que cada simplejo de la nueva subdivisión está contenido en algun U_i. tomando X_i como la unión de todos los simplejos contenidos U_i, obtenemos que $\{X_i\}$ es la cubierta con la propiedad pedida.

(3.6) Proposición. Si $X \subset M$ es compacto, entonces $\operatorname{cat}_M X$ es finito.

Demostración. Inmediata.

(3.7) Proposición. Para cualquier colección $\{X_\alpha\}$ de subconjuntos de M $\operatorname{cat}_M(\bigcup X_\alpha) \leq \sum \operatorname{cat}_M(X_\alpha)$.

Demostración. Si para cada α $\sigma_\alpha \in C_M(X_\alpha)$ es minimal, entonces $\sigma = \bigcup \sigma_\alpha \in C_M(\bigcup X_\alpha)$ por lo tanto

$$\operatorname{cat}_M(\bigcup X_\alpha) \leq |\sigma| \leq \sum \operatorname{cat}_M(X_\alpha).$$

(3.8) Proposición. Si X y Y contenidos en M están mutuamente separados entonces

(a) $\bar{X} \cap Y = X \cap \bar{Y} = \phi$

(b) Existen abiertos $U, V \subset M$ ajenos tales que $X \subset U$, $Y \subset V$.

Demostración: (a) Supongamos que $\bar{X} \cap Y \neq \phi$, sea $x \in \bar{X} \cap Y$. entonces $x \in \bar{X} \cap (X \cup Y)$ por lo tanto $x \in \tau_{X \cup Y}$-cerradura de $\bar{X}$, como $x \in Y \subset Y \cup \bar{X}$ que es abierto en $\bar{X} \cup Y$ se sigue que $\bar{X} \cap Y \neq \phi$, una contradicción, por lo tanto $\bar{X} \cap Y = \phi$. Analogamente se muestra que $X \cap \bar{Y} = \phi$.

(b) Sean

$$U = \{x \in M \mid d(x, X) < d(x, \bar{Y})\}$$
$$V = \{x \in M \mid d(x, Y) < d(x, \bar{X})\}.$$

puesto que $d(\_, N) : M \longrightarrow \mathbb{R}$ para todo $N \subset M$ es una función continua, se sigue que U y V son abiertos en M. además se tiene:

$X \cap \bar{Y} = \phi$ implica $d(X, \bar{Y}) > 0$ implica $X \subseteq U$

$\bar{X} \cap Y = \phi$ implica $d(\bar{X}, Y) > 0$ implica $Y \subseteq V$

claramente $U \cap V = \phi$. Así la proposición queda demostrada.

Obsérvese que ésta prueba puede ser utilizada para probar que un espacio métrico es normal.

(3.9) Proposición. Si M es arco conexo y $X, Y \subset M$ están mutuamente separados entonces:

$$\text{cat}_M (X \cup Y) = \max \{\text{cat}_M X, \text{cat}_M Y\}.$$

Demostración: Puesto que X y Y están mutuamente separados existen abiertos ajenos U y V tales que $X \subset U$, $Y \subset V$. Sean $\sigma = \{U_i\}_{i \in I} \in C_M(X)$ y $\sigma' = \{V_i\}_{i \in J} \in C_M(Y)$ abiertos y minimales, podemos suponer sin pérdida de generalidad que sus elementos están contenidos en U y V respectivamente. Supongamos que $|\sigma| \leq |\sigma'|$ y consideremos la cubierta

$$\sigma'' = \{U_i \cup V_i\}_{i \in I} \cup \{V_i\}_{i \in J - I}.$$

puesto que U_i y V_i son categóricos y están separados se sigue (2.2) y (2.3) que $U_i \cup V_i$ es categórico, por lo tanto $\sigma'' \in C_M(X \cup Y)$, además

$$|\sigma''| \leq \max \{|\sigma|, |\sigma'|\} \text{ y de aquí}$$
$$\text{cat}_M (X \cup Y) \leq \max \{\text{cat}_M X, \text{cat}_M Y\}.$$

Pero por (3.1)

$$\text{cat}_M(X), \text{cat}_M(Y) \leq \text{cat}_M (X \cup Y)$$

por lo tanto $\max\{cat_M X, cat_M Y\} \leq cat_M (X \cup Y)$.

y así
$$cat_M (X \cup Y) = \max\{cat_M X, cat_M Y\}.$$

(3.10) Definición: Un espacio $M \subset N$ es llamado divisor de N si para cualquier $X \subset M$ y $f, g \in M^X$ $f \sim g$ en N implica $f \sim g$ en M.

(3.11) Definición. Sea $M \subseteq N$, una función continua $r \in M^N$ tal que $r(x) = x$ para todo $x \in M$ es llamada una retracción de N en M, en tal caso decimos que M es retracto de N.

(3.12) Un ejemplo de divisor es cuando M es un retracto de N. En efecto: si $X \subset M$, $f, g \in M^X$ tal que $f \sim g$ en N, por (2.1) $f i_X r \sim g i_X r$ de aquí $f \sim g$ en M.

(3.13) Proposición. Si M es divisor de N entonces
$$cat_M X \leq cat_N Y$$
Demostración: Sea $\sigma = \{X_i\} \in C_N(X)$ entonces $\sigma \cap M = \{X_i \cap M\}$ es una cubierta categórica de X en N, puesto que M es divisor de N, $\sigma \cap M \in C_M(X)$ por lo tanto
$$cat_M X \leq |\sigma \cap M| \leq cat_N (X).$$

(3.14) Proposición: Si M_1 y M_2 están mutuamente separados y $X \subset M_1$ entonces
$$cat_{M_1 \cup M_2} (X) = cat_{M_1} X.$$

Demostración: Puesto que $M_1 \subset M_1 \cup M_2$ y M_1 es abierto en $M_1 \cup M_2$ de (3.1) se sigue que
$$cat_{M_1 \cup M_2} X \leq cat_{M_1} X.$$
pero M_1 es un retracto de $M_1 \cup M_2$: Definiendo,
$$r : M_1 \cup M_2 \longrightarrow M_1 \quad \text{tal que}$$
$$r(x) = \begin{cases} x & x \in M_1 \\ x_0 & x \in M_2 \qquad x_0 \in M_1, \end{cases}$$
puesto que M_1 y M_2 son abiertos en $M_1 \cup M_2$ r es una

función continua y una retracción por (3.13), (3.12)

$$\mathrm{cat}_{M_1}(X) \leq \mathrm{cat}_{M_1 \cup M_2}(X).$$

por lo tanto

$$\mathrm{cat}_{M_1}(X) = \mathrm{cat}_{M_1 \cup M_2}(X).$$

(3.15) Proposición. Si $X = X_1 \cup X_2$, $M = M_1 \cup M_2$, $X_1 \subset M_1$ y $X_2 \subset M_2$ y M_1, M_2 están mutuamente separados entonces

$$\mathrm{cat}_M X = \mathrm{cat}_{M_1} X_1 + \mathrm{cat}_{M_2} X_2.$$

Demostración: Primeramente mostraremos que si $A \subset X$ es un conjunto categórico en M entonces $A \subset X_1$ ó $A \subset X_2$.
A categórico entonces existe $m \in M$ tal que

$\delta_m : A \longrightarrow M$ la función constante m.

y $\quad i_A : A \hookrightarrow M$ la inclusión.

$i_A \sim \delta_m$ en M.

(2.3) nos dice que A está en una componente por trayectorias de M. de aquí que $A \subset X_1$ ó $A \subset X_2$. Sea $\sigma = \{U_k\} \in C_M(X)$ minimal $\sigma' = \{U_k \cap X\}$ es tal que $|\sigma| = |\sigma'|$ por lo anterior podemos considerar σ_1 y σ_2 cubiertas categóricos de X_1 y X_2 en M respectivamente con $|\sigma_1| + |\sigma_2| = |\sigma'|$ por lo tanto $\mathrm{cat}_M X_1 + \mathrm{cat}_M X_2 \leq |\sigma_1| + |\sigma_2| = \mathrm{cat}_M X$.
por (3.7) y (3.14)

$$\mathrm{cat}_M X \leq \mathrm{cat}_M X_1 + \mathrm{cat}_M X_2 = \mathrm{cat}_{M_1} X_1 + \mathrm{cat}_{M_2} X_2.$$

y así $\quad \mathrm{cat}_M X = \mathrm{cat}_{M_1} X_1 + \mathrm{cat}_{M_2} X_2.$

(3.16) Corolario. Si M es localmente conectable por trayectorias $\quad \mathrm{cat}_M X \leq \sum \mathrm{cat}_{M_i}(X \cap X_i).$
donde la suma corre sobre el conjunto de componentes por trayectorias de M que intersectan a X.
Demostración: Las componentes por trayectorias son abiertas y cerradas y el corolario se sigue de (3.15).

4. Un poco de Teoria de la Dimensión.

Vamos a repasar en ésta sección un poco sobre Teoria de la dimensión. Recordemos que todos nuestros espacios son métricos separables.

(4.1) Definición. A un espacio X le asignamos un entero $n \geq -1$ ó ∞ llamado la dimensión de X y denotada $\dim X$. Si $p \in X$, el símbolo $\dim_p X$ denota la dimensión de X en el punto p, que se definirá también inductivamente. Las tres condiciones siguientes definen la dimensión inductivamente:

(1) $\dim X = -1$ si y solo si $X = \phi$.

(2) Si $X \neq \phi$, entonces $\dim X = \sup \dim_p X$ $p \in X$.

(3) $\dim_p X \leq n+1$ si y solo si p tiene vecindades arbitrariamente pequeños cuya frontera tiene dimensión $\leq n$.

(4.2) Observación: Dado un conjunto $E \subset X$ y $p \in E$ la condición $\dim_p E \leq n+1$ significa por (3) que existen vecindades arbitrariamente pequenos de p relativos a E cuya frontera relativa a E tiene dimensión $\leq n$. En otras palabras, existen vecindades de p en X arbitrariamente pequeños G tq que

$$\dim (E \cap (\overline{E \cap G} - G)) \leq n.$$

ya que la frontera de $E \cap G$ relativa a E es

$$E \cap (\overline{E \cap G} - E \cap G) = E \cap (\overline{E \cap G} - G).$$

(4.3) Proposición. Si $E \subset X$ entonces $\dim E \leq \dim X$, en particular si $p \in E$ $\dim_p E \leq \dim_p X$.

Demostración: Procediendo por inducción podemos suponer que la proposición es válida para un espacio de dimensión n y que $\dim_p X \leq n+1$. Sea G una vecindad abierta en X con $\dim Fr G \leq n$ Tenemos que mostrar que la frontera relativa de $E \cap G$ en E tiene dimensión menor ó igual que n, ésta frontera relativa es igual a

$$E \cap (\overline{E \cap G} - G) \subset \bar{G} - G = Fr\, G.$$

por hipótesis de inducción

$$\dim E \cap (\overline{E \cap G} - G) \leq \dim \bar{G} - G \leq n.$$

(4.4) Proposición. Sea $p \in E \subseteq X$

$\dim_p E \leq n+1$ si y solo si existen vecindades G de p en X arbitrariamente pequeñas tales que

$$\dim (E \cap Fr\, G) \leq n.$$

Demostración: Supongamos que $\dim_p E \leq n+1$ entonces existe un conjunto abierto H en E tal que

$$\dim (E \cap (\bar{H} - H)) \leq n.$$

los conjuntos H y $E \cap \bar{H}^c$ están mutuamente separados, entonces podemos encontrar un abierto G de X tal que

$$H \subseteq G \quad y \quad \bar{G} \cap (E - \bar{H}) = \phi.$$

de aquí que

$E \cap (\bar{G} - G) \subseteq E \cap (\bar{H} - H)$, por (4.3) tenemos que

$$\dim (E \cap (\bar{G} - G)) \leq \dim E \cap (\bar{H} - H) \leq n.$$

finalmente el diámetro de G se puede seleccionar arbitrariamente cercano al de H, esto se puede ver de la construcción de G en (3.8).

Inversamente, sea G el conjunto en cuestión y sea $H = E \cap G$, entonces

$$E \cap (\bar{H} - H) = E \cap (\overline{E \cap G} - G) \subseteq E \cap (\bar{G} - G) = Fr\, G \cap E,$$

y $\dim E \cap (\bar{H} - H) \leq \dim Fr\, G \leq n.$

de donde $\dim_p E \leq n+1.$

(4.5) Definición. Sea $E \subset X$, p pertenece a $E_{(n)}$ si $\dim_p (E \cup \{p\}) \leq n$, es decir si p tiene vecindades arbitrariamente pequeñas tales que $\dim (E \cap Fr\, G) \leq n-1.$

En particular, si $E = X$, $E_{(n)}$ es el conjunto de puntos donde el espacio tiene dimensión $\leq n$. La inclusión $E \subseteq E_{(n)}$ es equivalente a decir que $\dim E \leq n.$

(4.6) Proposición. Dado un entero n, existe una colección

$D_1, D_2, \ldots$ de conjuntos abiertos tales que:

(i) $\mathrm{Dim}\,(E \cap \mathrm{Fr}\, D_i) \leq n-1$.

(ii) los conjuntos $E_{(n)} \cap D_i$ forman una base para la topología de $E_{(n)}$, es decir para todo $p \in E_{(n)}$ existe un conjunto D_i que contiene a p de diámetro arbitrariamente pequeño.

(iii) Si ponemos $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fr}\, D_i$ entonces

$$E_{(n)} \subset (E - S)_{(0)} \text{ y } \dim (E_{(n)} - S) \leq 0.$$

Demostración: Sea K fijo. Para cada $p \in E_{(n)}$ existe $G(p)$ abierto que contiene a p tal que

$$\dim E \cap \mathrm{Fr}\, G(p) \leq n-1 \text{ y } \delta(G(p)) < 1/K.$$

Por el Teorema de Lindelöf existe una colección numerable $\{D_{K,1}, D_{K,2}, \ldots\}$ de los conjuntos $G(p)$ cuya unión es igual a la de los $G(p)$. Reordenando ésta doble sucesión en una sucesión simple obtenemos la colección deseada $\{D_i\}$. Como cada punto de $E_{(n)}$ está contenido en un conjunto arbitrariamente pequeño $G(p)$, de aquí existe un D_i tal que $p \in D_i \subseteq G(p)$ y la condición (ii) se sigue. La condición (iii) es consecuencia de la fórmula:

$$(E-S) \cap \mathrm{Fr}\, D_i = \emptyset = (E_{(n)} - S) \cap \mathrm{Fr}\, D_i.$$

(4.7) Corolario. Todo espacio n-dimensional $\mathfrak{X}$ contiene una base numerable compuesta de conjuntos abiertos cuyas fronteras tienen dimensión $\leq n-1$.

Demostración. Puesto que $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_{(n)}$ el corolario se sigue de (4.6)

(4.8) Corolario. Todo espacio $\mathfrak{X}$ de dimensión cero contiene una base numerable compuesta de conjuntos los cuales son abiertos y cerrados.

Demostración: Se sigue inmediatamente de (4.7)

(4.9) Proposición: En un espacio $\mathfrak{X}$ de dimensión cero todo subconjunto abierto es la unión numerable de una colección de conjuntos ajenos los cuales son abiertos y cerrados que tienen diámetros arbitraria-mente pequeños.

Demostración: De acuerdo a (4.8)

$$G = F_1 \cup F_2 \cup \cdots$$

donde los F_i son abiertos y cerrados y tienen diámetros arbitrariamente pequeños, pero

$$G = F_1 \cup (F_2 - F_1) \cup (F_3 - F_1 - F_2) \cup \cdots$$

ésto último representa la descomposición deseada.

(4.10) Proposición. Si $\{G_0, G_1, \ldots\}$ es una colección numerable (finita ó infinita) de conjuntos abiertos en un espacio $\mathfrak{X}$ de dimensión cero entonces existe una sucesión de conjuntos abiertos ajenos $\{H_0, H_1, \ldots\}$ tal que $H_i \subseteq G_i$ y $\bigcup_{i=0}^{\infty} H_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$. Consecuentemente si $\mathfrak{X} = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ entonces los conjuntos H_i son abiertos y cerrados.

Demostración: Sea $G_i = \bigcup_{j=0}^{\infty} F_{ij}$ donde los F_{ij} son abiertos y cerrados. Reordenado la doble sucesión $\{i,j\}$ en una sucesión simple. Sea $n = \varphi(i,j)$ el entero correspondiente en la sucesión simple al par (i,j).

Sea $F_{ij}^* = F_{i,j} - \bigcup F_{k,l}$

donde la unión está tomada para todos los pares (k,l) tal que $\varphi(k,l) < \varphi(i,j)$. Claramente

$$\bigcup_{i,j=0}^{\infty} F_{ij}^* = \bigcup_{i,j=0}^{\infty} F_{ij} = \bigcup_{i=0}^{\infty} G_i$$

Sea $H_i = \bigcup_{j=0}^{\infty} F_{ij}^*$. Entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$

y $H_i \subseteq F_{i,0} \cup F_{i,1} \cup \ldots = G_i$.

Como los F_{ij}^* son mutuamente ajenos, también lo son los H_i y así la proposición queda probada.

(4.11) Proposición. Si $\{F_0, F_1, \ldots\}$ es una colección numerable (finita ó infinita) de conjuntos cerrados en un espacio $\mathfrak{X}$ de dimensión cero tal que

$$F_0 \cap F_1 \cap \ldots = \phi$$

entonces existe una colección de conjuntos $\{E_0, E_1, \ldots\}$ abiertos y cerrados tal que

$$F_i \subseteq E_i \quad \text{y} \quad E_0 \cap E_1 \cap \ldots = \phi.$$

En particular, si A y B son dos conjuntos cerrados ajenos, existe un conjunto $E \subseteq X$ cerrado y abierto tal que

$$A \subseteq E \quad \text{y} \quad E \cap B = \phi.$$

Demostración: Aplicando (4.9) a

$$G_i = X - F_i \quad \text{y} \quad E_i = X - H_i.$$

por hipótesis

$$\bigcup G_i = X - \bigcap_{i=0}^{\infty} F_i = X = \bigcup H_i$$

de donde los H_i y los E_i son abiertos y cerrados. Aún más la última identidad implica que $\bigcap_{i=0}^{\infty} E_i = \phi$ y la inclusión $H_i \subseteq G_i$ da $F_i \subseteq E_i$.

(4.12) Proposición. Si $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, con A_i cerrados, los cuales son de dimensión cero excepto posiblemente A_1 y éste tiene dimensión cero en un punto p entonces el espacio X tiene dimensión cero en p.

Demostración: Sea B una bola con centro en p, deseamos encontrar un conjunto $G \subset X$ abierto y cerrado con

$$p \in G \subseteq B.$$

El conjunto G será definido como la unión creciente de una colección de conjuntos abiertos G_n.

Los conjuntos G_n serán definidos inductivamente juntamente con subconjuntos abiertos H_n que tengan las propiedades siguientes

(i) $\bar{H}_n \subseteq H_{n+1}$, $\quad \bar{G}_n \subseteq G_{n+1}$

(ii) $\bar{G}_n \cap \bar{H}_n = 0$.

(iii) $H_n \subseteq G_n \cup H_n$

Dado que A_1 tiene dimensión cero en el punto p existe un conjunto F_1 que contiene a p abierto y cerrado relativamente a A_1. Dado que A_1 es cerrado. se sigue que F_1 y $A_1 - F_1$ son cerrados en X. Aún más podemos suponer que F_1 está contenido en B, así los conjuntos F_1 y $(A_1 - F_1) \cup (X - B)$ son dos cerrados ajenos. Aplicando la normalidad del espacio deducimos la existencia de dos conjuntos abiertos G_1 y H_1 tales que

$$F_1 \subseteq G_1 \; , \; (A_1 - F_1) \cup (X - B) \subseteq H_1 \quad y \quad \bar{G}_1 \cap \bar{H}_1 = \phi .$$

las condiciones (ii) y (iii) están satisfechas para $n=1$.

Supongamos que las condiciones (i), (ii) y (iii) están satisfechas para $n \geq 1$. Dado que los conjuntos $A_{n+1} \cap \bar{G}_n$ y $A_{n+1} \cap \bar{H}_n$ son cerrados ajenos y A_{n+1} tiene dimensión cero, por (4.11) existe un conjunto F_{n+1} abierto y cerrado en A_{n+1} con

$$A_{n+1} \cap \bar{G}_n \subseteq F_{n+1} \quad , \quad F_{n+1} \cap \bar{H}_n = \phi .$$

Como los conjuntos F_{n+1} y $A_{n+1} - F_{n+1}$ son cerrados (dado que $A_{n+1} - F_{n+1}$ es cerrado en A_{n+1} el cual es cerrado en X), los conjuntos

$$\bar{G}_n \cup F_{n+1} \quad y \quad \bar{H}_n \cup (A_{n+1} \cup F_{n+1})$$

son cerrados ajenos, entonces existen dos conjuntos abiertos H_{n+1} y G_{n+1} con $\overline{G_{n+1}} \cap \bar{H}_{n+1} = 0$ y tal que:

$$\bar{G}_n \cup F_{n+1} \subseteq G_{n+1} \quad y \quad \bar{H}_n \cup (A_{n+1} - F_{n+1}) \subseteq H_{n+1}$$

Claramente las condiciones (i), (ii) y (iii) están satisfechas para $n+1$, con esto terminamos la inducción.

Por (ii) la condición $G_n \cap H_n = \phi$ implica que $G_n \cap H_m = \phi$ para cualquier n, m. Consecuentemente si ponemos

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \quad y \quad H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$$

entonces $G \cap H = \emptyset$.

Por otro lado, por (iii)

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \cup H_n) = G \cup H . \text{ De aquí}$$

$H = X - G$. Dado que G y H son abiertos, se sigue que G es abierto y cerrado.

Resta solo probar que $p \in G \subseteq B$.

Por definición de G_1 $p \in F_1 \subset G_1 \subset G$. Dado que los conjuntos G y H_1 son ajenos y por definición de H_1, $X - B \subseteq H$, se sigue que $X - H_1 \subseteq B$ y por lo tanto

$$G \subseteq X - H_1 \subseteq B .$$

(4.13) Definición: Un conjunto es llamado F_σ si es una unión numerable de conjuntos cerrados; y es llamado G_δ si es intersección numerable de abiertos.

(4.14) Corolario. La unión de una familia numerable de conjuntos cerrados de dimensión cero, ó más generalmente conjuntos F_σ 0-dimensionales es de dimensión cero.

(4.15) Corolario. La unión de dos conjuntos de dimensión cero uno de los cuales es F_σ y G_δ es cero dimensional.

(4.16) Corolario. Si un punto singular es unido a un conjunto de dimensión cero la dimensión no cambia: Si $\dim A = 0$ entonces $A_{(0)} = \mathfrak{X}$.

(4.17) Proposición: Sea $Q \subseteq \mathfrak{X}$. Si $\dim(\mathfrak{X} - Q) = n$ y $\dim Q = 0$ entonces $\dim \mathfrak{X} \leq n+1$.

Demostración: Por (4.16) el conjunto $Q \cup \{p\}$ tiene dimensión cero, para toda $p \in \mathfrak{X}$, de aquí, por (4.4) existen vecindades arbitrariamente pequeños G de p en $\mathfrak{X}$ con $Q \cap Fr\, G = \emptyset$, es decir $Fr\, G \subseteq \mathfrak{X} - Q$. De donde $\dim Fr\, G \leq n$. y por lo tanto $\dim \mathfrak{X} \leq n+1$.

(4.18) Proposición. Si un espacio puede ser representado como una unión (finita ó infinita) de conjuntos cerrados de dimensión n: $\mathfrak{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ entonces el espacio es n-dimensional.

Demostración: Procedemos inductivamente:

Para el caso $n=0$ el enunciado es válido por (4.14)

Supongamos válida la proposición para $n-1$ y sea $B_1 = A_1$ y $B_K = A_K - \bigcup_{i<K} A_i$. Afirmamos que los conjuntos B_K son F_σ y ajenos. En efecto:

$A \subset \mathfrak{X}$ abierto entonces A es F_σ.

Para todo $x \in A$, $\{x\} \cap A_i^c = \phi$, entonces existe G_x abierto tal que $\{x\} \subset G_x$ y $\bar{G}_x \cap A^c = \phi$. Por lo tanto

$$A = \bigcup G_x = \bigcup \bar{G}_x.$$

pero $$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_{x_i} = \bigcup \bar{G}_{x_i}$$

por lo tanto A es F_σ.

$$B_K = A_K - \bigcup_{i<K} A_i = A_K \cap (\cap A_K^c) = (\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \cap (\cap A_K^c)$$
$$= \bigcup (F_i \cap (\cap A_K^c))$$

$\therefore$ B_K es F_σ.

Además $X = \bigcup_{K=1}^{\infty} B_K$, $\dim B_K \leq n$.

Pongamos $B_K = E \in E_{n}$ y $S_K = B_K \cap S$ en la proposición (4.6). Deducimos que los conjuntos S_K son una unión numerable de conjuntos de dimensión $\leq n-1$, cerrados en B_K y tales que $\dim (B_K - S_K) \leq 0$. Como B_K es un conjunto F_σ de aquí, conjuntos cerrados en B_K son F_σ. Dado que una unión numerable de conjuntos F_σ de dimensión $(n-1)$ es por hipótesis de inducción $(n-1)$-dimensional se sigue que $\dim S_K \leq n-1$ y por la misma razón $\dim \bigcup_{K=1}^{\infty} S_K \leq n-1$. Como los conjuntos B_K son ajenos se sigue que $B_i \cap (\bigcup_{K=1}^{\infty} (B_K - S_K)) = \bigcup_{K=1}^{\infty} (B_i \cap B_K - S_K) = B_i - S_i$. Es visto que el conjunto $\bigcup_{K=1}^{\infty} (B_K - S_K)$ siendo la intersección de F_σ con el conjunto $\bigcup_{K=1}^{\infty} (B_K - S_K)$ es un conjunto F_σ, de donde $\bigcup_{K=1}^{\infty} (B_K - S_K)$ es la unión de una colección de conjuntos F_σ de dimensión cero. Consecuentemente

$$\dim (\bigcup (B_K - S_K)) \leq 0.$$

La formula:

$$X = \bigcup_{K=1}^{\infty} B_K = \bigcup_{K=1}^{\infty} S_K \cup (\bigcup_{K=1}^{\infty} (B_K - S_K))$$

da una descomposición del espacio en una unión de un conjunto de dimensión $\leq n-1$ y un conjunto de dimensión cero por (4.17) el espacio tiene de $\dim \leq n$.

(4.19) Corolario. La adjunción de un punto singular a un espacio no vacio no cambia su dimensión.

(4.20) Proposición. Sea $F \subseteq X$ cerrado, entonces existe un espacio métrico separable X^* y una función continua $f: X \to X^*$ suprayectiva, la cual mapea a F en un punto singular el cual no pertenece a $f(X-F)$ y es un homeomorfismo en $X-F$.

Demostración: Por el Teorema de Urysohn podemos suponer que $X \subset \mathbb{R}^N$ (producto numerable de rectas reales con la topología producto) es decir, podemos considerar a los puntos $x \in X$ como sucesiones de números reales $x = (x^1, x^2, \dots)$. Por brevedad escribiremos $\delta(x) = \rho(x, F)$ la distancia de x a F. Sea $f(x)$ el punto de $\mathbb{R}^N$ definido por:

$$f(x) = (\delta(x), x^1\delta(x), \dots).$$

Si $x \in F$ entonces $f(x) = (0, 0, \dots)$ e inversamente si $f(x) = (0, 0, \dots)$ entonces $\delta(x) = 0$, puesto que F es cerrado se sigue que $x \in F$. Dado que cada función coordenada de f es una función continua se sigue que f es una función continua. Resta solo probar que f es un homeomorfismo de $X-F$ sobre imagen. Claramente f es inyectiva en $X-F$, probaremos pues que es abierta en $X-F$.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(x_n) = \delta(x)$

y $\lim x_n^k \delta(x_n) = x^k \delta(x)$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Si $x \notin F$ entonces $\delta(x) \neq 0$ de aquí $\delta(x_n) \neq 0$ para toda $n \geq N$ con N suficientemente grande. Se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} x_n^k = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^k \delta(x_n)}{\delta(x_n)} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n^k \delta(x_n)}{\lim_{n\to\infty} \delta(x_n)} = \frac{x^k \delta(x)}{\delta(x)} = x^k.$$

de donde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \to x$.

Ahora procedemos de manera estándar:

Sea $B(x,\epsilon) \subset X-F$ y supongamos que $f(B(x,\epsilon))$ no es abierto en $f(X-F)$ entonces existe $y = f(x_0)$, $x_0 \in B(x,\epsilon)$ tal que para cada $\epsilon_n = \{1/n\}$ existe $\{y_n = f(x_n)\}$ tal que $y_n \in B(y, 1/n)$ y $x_n \notin B(x,\epsilon)$ de aquí $\{y_n\}$ converge a $f(x) = y$ sin embargo la sucesión $\{x_n\}$ no converge a x, lo cual es una contradicción con lo antes probado; entonces $f|X-F$

es abierta, por lo tanto $f|_{X-F}$ es un homeomorfismo sobre su imagen.

(4.21) Corolario. Dados n subconjuntos cerrados $F_1, F_2, \ldots, F_n$ de X ajenos dos a dos, entonces existe un espacio métrico separable X^* y una función continua $f: X \to X^*$ que reduce a los conjuntos $F_1, \ldots, F_n$ a n puntos distintos ninguno de los cuales pertenece a $f(X - \bigcup_{i=1}^{n} F_i)$ y la función f es un homeomorfismo en $X - \bigcup_{i=1}^{n} F_i$

Demostración: Se sigue de (4.20) y utilizando inducción

(4.22) Proposición: Si A y B son dos conjuntos cerrados ajenos en un espacio X de dimensión n entonces existe $G \subseteq X$ abierto tal que:

$$A \subseteq G, \; \bar{G} \cap B = \phi \text{ y } \dim Fr\, G \leq n-1.$$

Demostración: Por (4.21) existe una función continua $f: X \to X^*$ suprayectiva que contiene dos puntos $a, b \in X^*$ tales que $f^{-1}(a) = A$ y $f^{-1}(b) = B$ y f es un homeomorfismo en $X - (A \cup B)$ de donde

$$\dim f(X - (A \cup B)) = \dim (X - (A \cup B)) \leq n.$$

dado que

$$f(X) \cup \{a,b\} = f(X - (A \cup B)) \cup \{a,b\}$$

obtenemos por (4.19) $\dim X^* = \dim X \leq n$.

Por (4.3) existe un conjunto abierto $G_0 \subset X^*$ con $a \in \bar{G}_0$, $b \in X^* - G_0$ y $\dim Fr\, G_0 \leq n-1$. Sea $G = f^{-1}(G_0)$

$A \subset G$ puesto que $a \in G_0$

$\bar{G} \cap B$ puesto que $b \in X^* - \bar{G}_0$

Finalmente $\bar{G} - G$ y $f^{-1}(\bar{G}_0 - G)$ es un homeomorfismo ya que $f^{-1}(\bar{G}_0 - G) \subseteq X - A \cup B$, tenemos que

$$\dim Fr\, G \leq n-1,$$

y así la proposición queda demostrada.

5 Sucesiones Categóricas.

El propósito de esta sección es establecer una cota superior para la categoría en términos de la dimensión; es decir, $\operatorname{cat}_M X \leq \dim X + 1$.

5.1 Definición. Se dice que una sucesión finita $\{A_1, \ldots, A_k\}$ de subconjuntos cerrados de $X \subseteq M$ es una sucesión categórica para X en M cuando $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_k = X$ y A_1, $A_2 - A_1, \ldots, A_k - A_{k-1}$ son subconjuntos categóricos de M. La longitud de la sucesión $\{A_1, \ldots, A_k\}$ es k.

5.2 Teorema. Si M es arco conexo y $\operatorname{cat}_M X$ es finito entonces $\operatorname{cat}_M X$ es el ínfimo de las longitudes de las sucesiones categóricas para X en M. Más aún, si X es de dimensión finita, puede elegirse una sucesión categórica $\{A_1, \ldots, A_k\}$ de mínima longitud tal que

$$\dim A_1 < \dim A_2 < \cdots < \dim A_k .$$

Demostración: Primeramente mostraremos que si $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ es una sucesión categórica para X en M de longitud k entonces $\operatorname{cat}_M X \leq k$. En efecto:

Sea $X_1 = A_1$ y $X_i = A_i - A_{i-1}$ $\quad i = 2, \ldots, k$.

Claramente $X = \bigcup_{i=1}^{k} X_i$ por lo tanto $\{X_i\}$ es una cubierta categórica para X en M.

Ahora bien si $\{X_1, \ldots, X_r\}$ es una cubierta categórica minimal definimos los conjuntos

$$A_i = X - \bigcup_{j>i} X_j$$

es claro que $\{A_1, \ldots, A_r\}$ es una sucesión categórica para X en M de longitud $\leq \operatorname{cat}_M X$. Con esto se sigue la primera parte del teorema.

Para mostrar la segunda parte, procedamos por inducción sobre $\operatorname{cat}_M X$, el cual es inmediato si $\operatorname{cat}_M X = 1$. Supongamos válida la afirmación para cualquier entero menor que n y consideremos $\{X_1, \dots, X_n\}$ una cubierta abierta minimal en $C_n(X)$.

Sea $F_1 = \bigcap_{j>1} X_j^c$

por lo tanto $F_1 \cap X_1^c = \phi$

por (4.22) existe $G_1 \subseteq X$ abierto tal que $\dim Fr\, G_1 \leq n-1$ y $F_1 \subseteq G_1$, $\bar{G}_1 \cap X_1^c = \phi$

$Fr\, G_1 = \bar{G}_1 - G_1 \subseteq X_1 - F_1 = X_1 \cap (\bigcap_{j>1} X_j^c)^c \subseteq \bigcup_{j>1} X_j$

de aqui $cat_n\, Fr\, G_1 \leq n-1$

Supongamos construidos k conjuntos abiertos $G_1, \dots, G_k$ en X tales que:

$\dim Fr\, G_i \leq n-1$ y $F_i \subseteq G_i$ $\bar{G}_i \cap X_{i}^c = \phi$ $i = 1, \dots, k$.

(donde $F_i = \bigcap_{j=1}^{i-1} G_j^c \cap (\bigcap_{j>i} X_j^c)$)

entonces consideremos

$$F_{k+1} = (\bigcap_{j=1}^{k} G_j^c) \cap (\bigcap_{j>k} X_j^c)$$

se tiene que $F_{k+1} \cap X_{k+1}^c = \phi$. En efecto:

$$F_{k+1} \cap X_{k+1}^c = (\bigcap_{i=1}^{k} G_i^c) \cap (\bigcap_{j>k} X_j^c) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} F_i^c \cap (\bigcap_{j>k} X_j^c)$$

Obsérvese que $F_k \subseteq F_{k-1} \subseteq \dots \subseteq F_1$ por lo tanto la ultima parte de la cadena de contenciones se transforma en $F_1^c \cap (\bigcap_{j>k} X_j^c)$

$$F_1^c \cap (\bigcap_{j>k} X_j^c) = (\bigcap_{j>1} X_j^c)^c \cap (\bigcap_{j>1} X_j^c) \subseteq (\bigcap_{j>k} X_j^c)^c \cap (\bigcap_{j>k} X_j^c) = \phi.$$

por lo tanto existe $G_{k+1} \subseteq X$ abierto tal que $\dim Fr\, G_{k+1} \leq n-1$ $F_{k+1} \subseteq G_{k+1}$ y $\bar{G}_{k+1} \cap X_{k+1}^c = \phi$.

Así pues hemos construído n conjuntos abiertos G_i que tienen las siguientes propiedades

(1) $F_i \subseteq G_i$

(2) $\dim Fr\, G_i \leq n-1$

(3) $\bar{G}_i \cap X_i^c = \phi$.

se sigue pues que

$$\bigcup_{i=1}^{n-1} Fr\, G_i \subseteq \bigcup_{i>1} X_i, \quad \text{ademas } \dim (\bigcup_{i=1}^{n} Fr\, G_i) \leq n-1$$

ya que $Fr\,G_i$ es cerrado en X. Por hipótesis de inducción existe una sucesión categórica $\{A_1, \ldots, A_s\}$ $(s \leq r)$ para $\bigcup Fr\,G_i$ en M, es decir $A_1, A_2, \ldots, A_s$ son cerrados en $\bigcup_{i=1}^{r} Fr\,G_i$ y $\dim A_1 < \dim A_2 < \cdots < \dim A_s$.

Se afirma que $\{A_1, A_2, \ldots, A_s, X\}$ es una sucesión categórica para X en M. Todas las condiciones quedan completamente satisfechas excepto posiblemente que $X - A_s = X - \bigcup Fr\,G_i$ es un conjunto categórico, pero esto se sigue de la construcción de los G_i.

(6.3) Corolario. $\mathrm{cat}_M X \leq \dim X + 1$.

Demostración: Si $\dim X$ es infinita no hay nada que probar. Si $\dim X < \infty$ el corolario es una consecuencia inmediata del Teorema anterior.

7. Deformación

En esta sección estudiaremos como se comporta la categoría bajo deformación

7.1 Proposición. Si $X \subset M$ es abierto y X puede ser deformado en M dentro de Y entonces

$$\mathrm{cat}_M X \leq \mathrm{cat}_M Y.$$

Demostración. Por hipótesis existe $f_0 : X \to M$ continua tal que $f_0(X) \subseteq Y$ y $f_0 \sim i_X$ la inclusión. Consideremos $\sigma = \{Y_i\}$ en $C_M(Y)$ abierta y minimal y sea $\{X_i = f_0^{-1}(Y_i)\}$ la cual es una cubierta abierta de X y por lo tanto abierta en M. Pero X_i es contraíble en M ya que su imagen bajo f_0 está contenida en Y_i el cual es contraíble en M, por tanto X_i es contraíble en M, así $\{X_i\}$ es una cubierta categórica de X en M, y de aquí que

$$\mathrm{cat}_M X \leq \mathrm{cat}_M Y$$

7.2 Definición: Una propiedad es llamada inductiva si siempre que cada sucesión decreciente de conjuntos compactos que tengan la propiedad entonces su intersección tiene la propiedad.

7.3 Proposición. Si $\{X_i\}_{i\in N}$ es una sucesión decreciente de conjuntos compactos no vacios de M existe i_0 tal que $cat_M X_i \leq cat_M X$, para todo $i \geq i_0$ donde $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$

Demostración. Primeramente mostraremos que $X \neq \phi$.

Si X_1 es finito no hay nada que probar. Supongamos pues que X_1 es infinito y que $X = \phi$.

para toda $x \in X_1$ existe $i_x \in N$ tal que $x \notin X_i$ $i \geq i_x$. por lo tanto existe $U_x \subseteq M$ abierto tal que $x \in U_x$ y $U_x \cap X_i = 0$ $i \geq i_x$, entonces $\{U_x\}$ es una cubierta abierta de X_1 pero claramente no podemos sustraer una cubierta finita de X_1 contradiciendo así la compacidad de X_1, por lo tanto $X \neq \phi$.

Existe un conjunto abierto U que contiene a X tal que $cat_M U = cat_M X$, por ejemplo tomando la unión de los elementos de una cubierta abierta minimal de X. Puesto que X es compacto y $X \subseteq U$ existe $i_0 \in N$ tal que $X_i \subseteq U$ para toda $i \geq i_0$, entonces por (3.1).

$$cat_M X_i \leq cat_M U = cat_M X. \quad i \geq i_0.$$

como queríamos probar.

(7.4) Corolario. La propiedad $cat_M X = n$ para M fijo y X compacto es inductiva.

Demostración. Se sigue de (7.3)

(7.5) Definición. Un conjunto $A \subseteq M$ es llamado esencial en M si ninguna vecindad de A puede ser deformada en M dentro de un subconjunto propio cerrado de A.

(7.6) Ejemplos:

7.6.1 Si $A = \{*\} \subseteq M$.

7.6.2 $A = M = S^1$

7.6.3 $A = M = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$

(7.7) Proposición. Si $\mathfrak{X}$ es compacto, existe un subconjunto cerrado A de $\mathfrak{X}$ el cual es escencial en M y cuya categoría en M es igual a $\text{cat}_M \mathfrak{X}$.

Demostración. Consideremos la familia $\beta = \{A \subseteq \mathfrak{X} / A$ es cerrado y $\text{cat}_M A = \text{cat}_M \mathfrak{X}\}$. La familia β es no vacía puesto que $\mathfrak{X} \in \beta$, además por (7.4) toda cadena descendente tiene un elemento minimal, de aquí y por el lema de Zorn β tiene un elemento minimal, digamos A, el cual claramente satisface la propiedad de ser escencial.

(7.8) Un conjunto cerrado $\mathfrak{X}$ es llamado escencial en M en dimensión n si $\mathfrak{X}$ tiene un subconjunto cerrado n-dimensional el cual es escencial en M; $\mathfrak{X}$ es llamado escencial en exactamente $r+1$ dimensiones si existe una sucesión de enteros $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_r$ tal que $\mathfrak{X}$ es escencial en M en las dimensiones $n_0, n_1, n_2, \ldots, n_r$. y solamente en esas

7.9 Teorema. Si M es arco conexo y el conjunto compacto $\mathfrak{X}$ es escencial en M en exactamente $r+1$ dimensiones, entonces $\text{cat}_M \mathfrak{X} \leq r+1$.

Demostración. Hagamos la prueba por inducción sobre r. Si $r=0$ por definición existe $A_0 \subseteq \mathfrak{X}$ cerrado de dimensión cero el cual es escencial en M, pero por (7.7) existe un subconjunto cerrado $A \subset \mathfrak{X}$ el cual es escencial en M y tal que $\text{cat}_M A = \text{cat}_M \mathfrak{X}$, por definición e hipotesis $\dim A = 0$, por (5.3)

$$\text{cat}_M \mathfrak{X} \leq 1 + \dim \mathfrak{X} = 1 + \dim A = 1.$$

y esto prueba el teorema para $r=0$.

Supongamos que el teorema es válido para $r<m$. y consideremos un conjunto compacto $\mathfrak{X}$ el cual es escencial en M en exactamente $m+1$ dimensiones, $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_m$. por (7.7) existe un conjunto cerrado $A \subseteq \mathfrak{X}$ y por lo tanto compacto, el cual es escencial en M y tal que

$\mathrm{cat}_M A = \mathrm{cat}_M X$. Dado que X es inesencial en dimensiones mayores que $n m$ se sigue que $\dim A = k \leq m$. Puesto que A es de dimensión finita existe una sucesión categórica $\{A_1, \ldots, A_k\}$ para A en M de longitud k tal que

$$\dim A_1 < \dim A_2 < \ldots < \dim A_k$$

Dado que $\dim A_{k-1} < \dim A \leq m$ el conjunto compacto A_{k-1} es esencial en a lo más m dimensiones. De aquí, y por hipótesis de inducción, $\mathrm{cat}_M A_{k-1} \leq m$. Así

$$\mathrm{cat}_M A \leq \mathrm{cat}_M A_{k-1} + \mathrm{cat}_M (A_k - A_{k-1}) \leq m+1$$

completando así la inducción.

§ Categoría absoluta.

De particular interés es la categoría absoluta $\mathrm{cat}\, M = \mathrm{cat}_M (M)$.

(8.1) Proposición. Si M y N son abiertos en $M \cup N$ entonces $\mathrm{cat}(M \cup N) \leq \mathrm{cat}\, M + \mathrm{cat}\, N$.

Demostración:

$$\mathrm{cat}_{M\cup N} (M \cup N) \leq \mathrm{cat}_{M \cup N} (M) + \mathrm{cat}_{M\cup N} (N)$$

$$\leq \mathrm{cat}_M M + \mathrm{cat}_N (N)$$

(8.2) Proposición. Si M es abierto en N y N puede ser deformado en él mismo dentro de M entonces

$$\mathrm{cat}\, N \leq \mathrm{cat}\, M$$

Demostración: $\mathrm{cat}_N N \leq \mathrm{cat}_N M \leq \mathrm{cat}_M M$.

(8.3) Proposición. Si M es divisor de N entonces

$$\mathrm{cat}\, M \leq \mathrm{cat}\, N$$

Demostración: $\mathrm{cat}_M M \leq \mathrm{cat}_N M \leq \mathrm{cat}_N N$.

9. Productos de Espacios.

El propósito de ésta sección es estudiar como se comporta la categoría bajo productos.

9.1 Teorema. Si $M = M_1 \times M_2$ es arco conexo y cat M_1, y cat M_2 son finitos entonces

$$\max\{\text{cat } M_1, \text{cat } M_2\} \leq \text{cat } M \leq \text{cat } M_1 + \text{cat } M_2 - 1.$$

Demostración. $\max\{\text{cat } M_1, \text{cat } M_2\} \leq \text{cat } M$ puesto $M_1 \times \{x_0\}$ y $\{x_1\} \times M_2$ son retractos de $M_1 \times M_2$ por lo tanto $M_1 \times \{x_0\}$ y $\{x_1\} \times M_2$ son divisores de M así

$$\text{cat } M_1 \leq \text{cat } M \text{ y } \text{cat } M_2 \leq \text{cat } M.$$

Para probar la segunda desigualdad en el enunciado supongamos que cat $M_1 = m$ y cat $M_2 = n$. con $m \leq n$. Entonces existen sucesiones categóricas $\{A_1, \ldots, A_m\}$ y $\{B_1, \ldots, B_m\}$ para M_1 y M_2 respectivamente.

Definimos

$$C_k = \bigcup_{i+j=k+1} A_i \times B_j \qquad k = 1, \ldots, m+n-1.$$

Mostraremos que $\{C_1, \ldots, C_{m+n-1}\}$ es una sucesión categórica para M en M. Los conjuntos C_k son subconjuntos cerrados en M puesto los A_i y B_i lo son en M_1 y M_2 respectivamente.

Sea $A_i \times B_j$ con $i+j = k+1$ por lo tanto

$A_i \times B_j \subseteq A_{i+1} \times B_j$ de aquí $C_k \subseteq C_{k+1}$.

Solo falta verificar que los conjuntos cerrados $C_k - C_{k-1}$ para $k = 1, \ldots, m+n-2$ son categóricos en M. pero $C_{k+1} - C_k = \bigcup_{i+j=k+2} (A_i - A_{i-1}) \times (B_j - B_{j-1})$

de (2.3) se sigue que $(A_i - A_{i-1}) \times (B_i - B_{j-1})$ son categóricos de M, aún mas estos estan mutuamente separados. En efecto: si $i < i'$ y $j > j'$

$$[(A_i - A_{i-1}) \times (B_j - B_{j-1})] \cap [(A_{i'} - A_{i'-1}) \times (B_{j'} - B_{j'-1})] \subseteq$$
$$(\overline{A_i - A_{i-1}}) \cap (A_{i'} - A_{i'-1}) \times M_2 \subseteq A_i \cap \underline{(A_{i'} - A_i) \times M_2} = \phi.$$

Analogamente $(\overline{A_i - A_{i-1}}) \times (B_j - B_{j-1}) \cap [(A_{i'} - A_{i'-1}) \times (B_{j'} - B_{j'-1})] = \phi$

Entonces $C_{k+1} - C_k$ es unión de conjuntos categóricos mutuamente separados, por (9.9) $C_k - C_{k-1}$ es un conjunto categórico y así por (5.2).

$$\operatorname{cat} M \leq n+m-1$$

10 Tipo de Homotopía.

Se probará que la categoría absoluta es un invariante del tipo de homotopía.

10.1 Proposición. Si $f \in N^M$ y $g \in M^N$ son tales que $gf \in M^M$ es homotópica a la identidad entonces

$$\operatorname{cat} M \leq \operatorname{cat} N$$

Demostración. Sea $\sigma = \{Y_i\} \in C_N(N)$ abierta y minimal y sea $f^{-1}(\sigma) = \{X_i = f^{-1}Y_i\}$ es una cubierta abierta de M. Si i_{Y_i} es la inclusión de Y_i en N, entonces $i_{Y_i} \sim cte$ implica $g/_{Y_i} \sim cte$, y de aquí $gf/_{X_i} \sim cte$. Pero $gf/X_i \sim i_{X_i}$ ya que $gf \sim 1_M$. Por lo tanto $f^{-1}(\sigma)$ es una cubierta abierta categórica de M, con esto

$$\operatorname{cat} M \leq \operatorname{cat} N.$$

10.2 Corolario. Si X y Y son dos espacios del mismo tipo de homotopía entonces

$$\operatorname{cat} M = \operatorname{cat} N.$$

11 Una caracterización de Categoría

Ha sido probado que cuando M es un espacio topológico para el cual $C(M) \neq \phi$ la categoría tiene las siguientes propiedades.

(i) Si X es un punto $\operatorname{cat}_M X = 1$

(ii) Si $Y \subseteq X$ entonces $\operatorname{cat}_M(Y) \leq \operatorname{cat}_M(X)$

(iii) $\operatorname{cat}_M(\cup X_\alpha) \leq \sum \operatorname{cat}_M(X_\alpha)$

(iv) Si $X \subset M$ abierto puede ser deformado en M dentro de $Y \subset M$ entonces $\operatorname{cat}_M X \leq \operatorname{cat}_M Y$

Éstas cuatro. propiedades caracterizan en cierto sentido la función de conjuntos $\mathrm{cat}_M X$.

El conjunto de funciones con valores en los enteros positivos $\lambda(X)$ definida en subconjuntos de M que satisfacen:

(i) Si X es un punto $\lambda(X)=1$.

(ii) $Y\subseteq X$ entonces $\lambda(X)\geq\lambda(Y)$.

(iii) $\lambda(\bigcup X_\alpha)\leq\sum\lambda(X_\alpha)$.

(iv) Si X es abierto y puede ser deformado en M dentro de $Y\subseteq M$ entonces $\lambda(X)\leq\lambda(Y)$.

es un conjunto parcialmente ordenado por la regla $\lambda_1\leq\lambda_2$ si y solo si $\lambda_1(X)\leq\lambda_2(X)$ para todo $X\subseteq M$; la categoría es el elemento más grande de este conjunto parcialmente ordenado. Puesto que si $\{X_\alpha\}$ es una cubierta abierta minimal de X la cual es contraíble, por (iv) y (i) $\lambda(X_\alpha)=1$. para cada α. Por (ii) y (iii)

$$\lambda(X)\leq\lambda(\bigcup X_\alpha)\leq\sum\lambda(X_\alpha)=|\alpha|=\mathrm{cat}_M X.$$

12 Mínimos de funciones de Conjunto

Sea g una función definida para subconjuntos de M con valores reales que satisface:

(i*) Si $Y\subseteq X$ entonces $g(Y)\leq g(X)$.

Denotamos por $\mathfrak{M}^n$ la colección de subconjuntos X de M para los cuales $\mathrm{cat}_M X\geq n$ y sea

$$C_n=\inf g(X)\quad X\in\mathfrak{M}^n$$

Un conjunto es llamado minimal relativo a $\mathfrak{M}^n$ y g si $g(X)=C_n$.

12.1 Teorema. Si $C_m=C_n=C$ con $(m<n)$ y existe al menos un cerrado minimal relativo a $\mathfrak{M}^n$ y $D\subseteq M$ es un cerrado cuya categoría en M es menor ó igual que $n-m$ entonces existe un conjunto cerrado minimal relativo a $\mathfrak{M}^m$ ajeno a D.

Demostración. Existe un conjunto abierto $U \supseteq D$ tal que $\mathrm{cat}_M U = \mathrm{cat}_M D$. Por hipótesis existe un conjunto X cerrado y minimal relativo a $\mathcal{M}^n$. El conjunto cerrado $Y = X \cap (M - U)$ es por construcción ajeno a D. Resta solo probar que Y es minimal relativo a $\mathcal{M}^m$. Dado que $X \in \mathcal{M}^n$ entonces $\mathrm{cat}_M X \geq n$. pero $X \subset Y \cup U$ por lo tanto

$$\mathrm{cat}_M X \leq \mathrm{cat}_M (Y \cup U) \leq \mathrm{cat}_M Y + \mathrm{cat}_M U \leq \mathrm{cat}_M Y + (n-m)$$

De aquí que la categoría de Y es mayor que m. así que $Y \in \mathcal{M}^m$. Dado que $Y \in \mathcal{M}^m$ se sigue que $g(Y) \geq c$, pero $Y \subseteq X$ entonces

$$g(Y) \leq g(X) = c.$$

por lo tanto $g(Y) = c$. y Y es conjunto cerrado minimal relativo a $\mathcal{M}^n$ ajeno D.

13 Cota para la categoria.

(13.1) Definición: Un espacio compacto M es llamado una membrana homotópica en dimensión k si todo subconjunto cerrado a lo más k-dimensional es contraíble en M.

(13.2) Proposición. Si M es una membrana homotópica en dimensión k el cual es también un ANR es inescencial en todas las dimensiones $\leq k$ (para definiciones de inescencial y ANR vease (7.5) y (II.3))

Demostración

Sea $X \subseteq M$ tal que $\dim X \leq k$ deseamos probar que existe una vecindad de X en M la cual se deforma en un subconjunto propio de X. En efecto por ser M una membrana homotópica y $\dim X \leq k$ se sigue que X es contraíble, por ser M ANR se sigue que X es un subconjunto categórico, y así existe $m \in M$

y $U \subseteq M$ abierto tal que $X \subseteq U$ y $i_U \simeq d_m$, d_m la función constante con valor m, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $m \in X$, y así la prueba está completa

(13.3) Proposición. Si M es un ANR, conexo, de dimensión m y una membrana homotópica de dimensión $k \leq m$ entonces $\operatorname{cat} M \leq m-k+1$

Demostración. Por (13.2) implica que M es esencial en a lo mas $m-k+1$ dimensiones, luego por (7.9)

$$\operatorname{cat} M \leq m-k+1.$$

(13.4) Definicción: Un espacio X es llamado n-conexo si $\pi_r(X)=0$ para $r=0,1,\dots,n$.

(13.5) Teorema de Hurewicz. Si M es un ANR, simplemente conexo y $H_i(M)=0$ para $0 \leq i \leq k$, entonces M es k-conexo. Más aún $\pi_{n+1}(X) \cong H_{n+1}(X)$.

(13.6) Teorema: Si M es un ANR, k-conexo y $\dim M = m$ entonces $\operatorname{cat} M \leq m-k+1$.

Demostración: Puesto que M es k-conexo entonces M es una membrana homotópica en dimensión k [ ] por lo tanto es Inesencial en todas las dimensiones $\leq k$ por (13.3)

$$\operatorname{cat} M \leq m-k+1.$$

(13.7) Corolario. Sea M un ANR simplemente conexo tal que $H_i(M)=0$ $i \leq k$, entonces

$$\operatorname{cat} M \leq m-k+1$$

Demostración: Es una consecuencia inmediata del Teorema de Hurewicz y (13.6).

II La Categoría n-dimensional.

1 Homotopía en dimensión n.

Si un espacio X tiene el mismo tipo de homotopía de un punto, $\pi_n(X)=0$ para toda n; ahora bien si X es un retracto de vecindad absoluta (ANR) y $\pi_n(X)=0$ entonces X es contraíble, es decir, los espacios ANR contraíbles están caracterizados por el anulamiento de sus grupos de homotopía. Esto se prueba de la siguiente manera:

Puesto que los espacios ANR tienen el mismo tipo de homotopía de un complejo CW, entonces basta ver que si X es un complejo CW y $f: X \to *$ es una equivalencia homotópica débil, es decir

$$f_*: \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(*)$$

es un isomorfismo para toda $n \geq 0$, entonces f es una equivalencia homotópica, pero esto es precisamente lo que nos afirma el Teorema de Whitehead-Hurewicz.

Esto sugiere, de alguna manera, la posibilidad de caracterizar los subconjuntos contraíbles en un ANR, más precisamente, podríamos establecer:

Sea X un ANR, entonces A es contraíble en X si y solo si

$$i_*: \pi_n(A) \longrightarrow \pi_n(X)$$

es el homomorfismo trivial para toda $n \geq 0$. Sin embargo se tiene que esto no es verdadero. Para esto consideremos el siguiente ejemplo:

Sea $A = S^1 \times S^1$ el toro de dimensión dos y X el complejo que se obtiene de A pegándole dos 2-discos en el meridiano y en el ecuador respectivamente. Sea $i_*: \pi_n(A) \longrightarrow \pi_n(X)$ el homomorfismo inducido por la inclusión $i: A \hookrightarrow \mathfrak{X}$.

Como $\pi_n(S^1 \times S^1) \cong \pi_n(S^1) \times \pi_n(S^1)$ se sigue que $\pi_n(A) = 0$ para todo $i \geq 2$, $i = 0$ y $\pi_1(S^1 \times S^1)$ tiene dos generadores representados por el meridiano y el ecuador los cuales al incluirlos en $\mathfrak{X}$ se contraen, se sigue que $i_\#$ es el homomorfismo trivial para toda $n \geq 0$; sin embargo A no es contraíble en M, para esto consideremos la siguiente sucesión exacta:

$$\longrightarrow H_3(\mathfrak{X}, A) \longrightarrow H_2(A) \xrightarrow{i_*} H_2(\mathfrak{X}) \longrightarrow$$

$H_2(A) \cong \mathbb{Z}$ y $H_3(\mathfrak{X}, A) \cong H_3(\mathfrak{X}/A)$ ($(\mathfrak{X}, A)$ es un complejo CW relativo), pero $\mathfrak{X}/A \cong S^2 \vee S^2$ por lo tanto

$$H_3(\mathfrak{X}, A) \cong H_3(S^2 \vee S^2) \cong H_3(S^2) \oplus H_3(S^2) = 0.$$

por lo tanto i_* no puede ser el homomorfismo trivial, por lo tanto A no es contraíble en M.

Entonces, la contractibilidad de un subconjunto de un ANR no puede determinarse por la anulación de sus grupos de homotopía. De cualquier manera, la contractibilidad es una clase muy especial de homotopía. La caracterización de contractibilidad por medio de funciones continuas de complejos será extendida, esto conduce a la noción importante de homotopía en dimensión n.

2 Definiciones

2.1 Dos funciones $\phi, \psi \in M^{\mathfrak{X}}$ son llamados homotópicos en dimensión n ó n-homotópicos si para toda función continua $f \in \mathfrak{X}^P$ y todo complejo P de dimensión menor ó igual a n las funciones ϕf y ψf son homotópicas.

2.2 Un conjunto A de M es llamado h_n-deformable en M dentro de $B \subseteq M$ si existe $h_0 \in M^A$ con $h(A) \subseteq B$ la cual es h_n-homotopica a la inclusión $i_A: A \hookrightarrow M$. Diremos que A es h_n-contraible si existe $m \in M$ tal que A puede ser h_n-deformado en M dentro de $\{m\}$

2.3. Un subconjunto $A \subset M$ es llamado un subconjunto h_n-categórico de M si existe un subconjunto abierto U de M el cual contiene a A y es h_n-contraíble en M.

2.4 Si $X \subseteq M$, una cubierta de X por conjuntos h_n-categóricos de M será llamada una cubierta h_n-categórica de X en M. Denotaremos la colección de tales cubiertas por $h_n C_M(X)$.

2.5 La categoría n-dimensional denotada $h_n\text{-cat}_M(X)$ de X en M está definida como el ínfimo de los números cardinales $|\sigma|$ cuando σ corre sobre $h_n C_M(X)$:

$$h_n\text{-cat}_M(X) = \inf \{ |\sigma| \mid \sigma \in h_n C_M(X) \}.$$

Una cubierta $\sigma \in h_n C_M(X)$ será llamada minimal si $|\sigma| = h_n\text{-cat}_M(X)$.

(2.6) Observaciones:

2.6.1 Dos funciones continuas las cuales son homotópicas son homotópicas en toda dimensión.

2.6.2. Homotopía en dimensión n implica homotopía en dimensión $m \leq n$.

Los resultados del capítulo I han sido establecidos para ser aplicados a la categoría n-dimensional, basta sustituir homotopía en dimensión n por $\sim$ en el capítulo I y hacer los cambios implicados. Para ver que esto es así, es suficiente demostrar que homotopía en dimensión n es una relación de equivalencia que tiene las propiedades (2.1) – (2.4) en el capítulo I

Estas propiedades son evidentes, únicamente mostraremos la propiedad (2.4)

Sean $\phi_1, \psi_1 \in M_1^{X_1}$ homotópicas y también $\phi_2, \psi_2 \in M_2^{X_2}$, entonces $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ y $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in M^X$, con $X = X_1 \times X_2$, $M = M_1 \times M_2$ son homotópicas en dimensión n.

Sea P un complejo de dimensión $\leq n$ y $f \in X^P$, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
X_1 & \xleftarrow{\pi_1} & X_1 \times X_2 & \xrightarrow{\pi_2} & X_2 \\
\phi_1 \big\downarrow \big\downarrow \psi_1 & & \phi \big\downarrow \big\downarrow \psi & & \phi_2 \big\downarrow \big\downarrow \psi_2 \\
M_1 & \longleftarrow & M_1 \times M_2 & \longrightarrow & M_2
\end{array}$$

Entonces $\phi f = (\phi_1 \pi_1 f, \phi_2 \pi_2 f)$ y $\psi f = (\psi_1 \pi_1 f, \psi_2 \pi_2 f)$. por hipótesis $\phi_1 \pi_1 f$ y $\psi_1 \pi_1 f$ son homotópicos, así mismo $\phi_2 \pi_2 f$ y $\psi_2 \pi_2 f$. De aquí obtenemos una homotopía de ϕf y ψf:

$$P \times I \xrightarrow{H_1} M_1 \qquad\qquad P \times I \xrightarrow{H_2} M_2$$

$$\phi_1 \pi_1 f \simeq \psi_1 \pi_1 f \qquad\qquad \phi_2 \pi_2 f \simeq \psi_2 \pi_2 f.$$

Sea $\tilde{H}: P \times I \longrightarrow M$ tal que
$\tilde{H}(x,t) = (H_1(x,t), H_2(x,t))$. por lo Tanto
$\phi \overset{\tilde{H}}{\simeq} \psi$.

Convendría ahora estudiar bajo qué condiciones un espacio h_n- contraíble en M para todo n es contraíble en M para esto repasaremos un poco sobre ANR's. Estos resultados también serán utilizados en el capítulo IV.

3 ANR's.

3.1 Definición. Un espacio métrico X es llamado retracto absoluto, AR, si para cada encaje cerrado $h: X \longrightarrow Y$, Y un espacio metrizable, el conjunto $h(X)$ es un retracto de Y. Similarmente un espacio métrico X es llamado un retracto de vecindad absoluta, ANR si para cada encaje cerrado $h: X \longrightarrow Y$, Y espacio métrico $h(X) \subseteq Y$ es retracto de una vecindad de Y.

Un teorema importante que enunciaremos aquí sin demostración es el teorema de Tietze generalizado. Para una demostración vease [ ] pag 77.

Si Y es un espacio Topológico lineal y para cada

$y \in Y$ y cada vecindad V de y existe una vecindad convexa U de Y contenida en V, entonces decimos que Y es un espacio localmente convexo, por ejemplo un espacio lineal normado es de este tipo.

(3.2) Teorema de Tietze generalizado. Sea A un subconjunto cerrado de un espacio métrico X y Y un espacio lineal localmente convexo. Para toda función continua $f: A \to Y$ existe una extensión continua $\bar{F}: X \to Y$ de f. Más aún todos los valores de $\bar{f}$ pueden ser tomados en el cosco convexo.

(3.3) Proposición. Sea Y un espacio métrico, entonces:
(a) Y es un AR si y solo si, para cada subconjunto cerrado X de un espacio métrico X', toda función continua $f: X \longrightarrow Y$ admite una extensión continua $f': X' \longrightarrow Y$.
(b) Y es un ANR si y solo si para cada subconjunto cerrado X de un espacio métrico X', toda función continua $f: X \longrightarrow Y$ admite una extensión continua a una vecindad V de X en X'.
Demostración: Dado que Y es métrico, por un teorema de Kuratowski y Wajdyslawski [ ] podemos suponer que Y es un subconjunto cerrado de un espacio lineal normado E.

Por el teorema de Tietze generalizado para cada función continua $f: X \longrightarrow Y$ existe una función continua $f'': X' \longrightarrow E$ tal que $f''(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. Si suponemos que Y es un AR entonces existe una retracción $r: E \longrightarrow Y$ y entonces deducimos que $f' = r f''$ es la extensión requerida de f.

Si Y es un ANR entonces existe una vecindad V de Y en E y una retracción $r: V \longrightarrow Y$. Poniendo $U = f''^{-1}(V)$ y definimos f' por $f'(x) = r f''(x)$ para toda $x \in U$, obtenemos una extensión f' de f mapeando U en Y como se deseaba. Esto prueba la necesidad de (a) y (b)

Para probar la suficiencia de (a) supongamos que toda función continua f de un subconjunto cerrado X de un espacio métrico X' de Y tiene una extensión continua $f': X' \longrightarrow Y$, entonces en particular la identidad $1_Y: Y \rightarrow Y$ admite una extensión a todo Y' el cual contiene a Y como cerrado, por lo tanto Y es un retracto de Y' y así Y es un AR. Análogamente se prueba la suficiencia de (b) y así la proposición queda totalmente demostrada.

(3.4) Proposición. Si Y es un ANR compacto y $\epsilon > 0$, entonces existe $\eta > 0$ tal que para todo subconjunto cerrado X_0 de un espacio métrico X y para todo par de funciones continuas $f_1, f_2 \in Y^{X_0}$ con $\rho(f_1, f_2) \leq \eta$, si f_1 tiene tiene una extensión $f_1' \in Y^X$ entonces f_2 tiene una extensión $f_2 \in Y^X$ tal que $\rho(f_1', f_2') < \epsilon$

Demostración: Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $Y \subseteq Q \subseteq E$, donde Q es el cubo de Hilbert y E el espacio de Hilbert del conjunto de sucesiones reales $\{x_k\}$ tal que Σx_k^2 converge. (Y cerrado). Dado que Y es un ANR existe una vecindad V de Y en E y una retracción $r: V \longrightarrow Y$. Dado que Y es compacto, existe $\eta > 0$ tal que $\eta \leq \frac{1}{2}\epsilon$ y tal que la bola generalizada

$$K = \{y \in E \mid \rho(y, Y) \leq \eta\}$$

está contenida en V y que $\rho(y, r(y)) \leq \frac{1}{2}\epsilon$ para todo $y \in K$. Si ponemos $\varphi(x) = f_1(x) - f_2(x)$ para todo $x \in X_0$, se sigue que la imagen de φ es un subconjunto de la bola $K_0 = \{y \in E;\ d(y, 0) \leq \eta\}$, esto es porque $\rho(f_1, f_2) \leq \eta$. Dado que K_0 es convexo se sigue del teorema generalizado de Tietze que existe una extensión continua $\varphi': X \longrightarrow K_0$ de φ. Consecuentemente, si f_1' es una extensión de f_1 entonces:

(*) $\rho(f_1'(x), f_1'(x) - \varphi'(x)) = \rho(0, \varphi'(x)) \leq \eta$ para todo

$x\in X$, de donde $f_1'(x)-\varphi'(x)\in K$. De aquí la fórmula

$$f_2'(x)=r\,(f_1'(x)-\varphi'(x))$$

define una función continua $f_2': X\longrightarrow Y$ la cual extiende a f_2 porque si $x\in X_0$ tenemos que $f_2'(x)=rf_2(x)=f_2(x)$. Aún más, la ecuación $(*)$ y la desigualdad $\rho(y,r(y))\leq 1/2$ implica que $\rho(f_1'(x),f_2'(x))\leq\epsilon$ para todo $x\in X$, y así la demostración está completa.

(3.5) Lema. Si X es un subconjunto cerrado de un espacio métrico X' entonces para toda vecindad V del conjunto

$$Z:=X'\times\{0\}\cup X\times I$$

en el espacio $Z'=X'\times I$, existe una función continua $\varphi: Z'\longrightarrow V$ tal que conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "\varphi"] & V \\ Z \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

i,j inclusiones

Demostración: asignemos a todo $x\in X$ el segmento $L_x:=\{x\}\times I$ en Z. Dado que L_x es compacto y V es una vecindad de Z, existe una vecindad abierta U_x de x en X' tal que $U_x\times I\subseteq V$. Entonces el conjunto $U=\bigcup_{x\in X}U_x$ es una vecindad abierta de X en X' y de aquí $U\times I$ es una vecindad abierta en Z' y está contenida en V.

Consideremos la función continua

$$\alpha: X'\longrightarrow I \quad \text{tal que}$$

$$\alpha(x)=\begin{cases}0 & x\in X'-U\\ 1 & x\in X\end{cases}$$

Si consideramos $\varphi: Z'\longrightarrow V$ tal que

$$\varphi(x,t)=(x,\alpha(x)t)$$

es la función continua que satisface claramente las condiciones pedidas en el lema.

(3.6) Proposición. Sea X un subconjunto cerrado de un espacio métrico $\mathfrak{X}'$ y $\mathcal{Y}$ es un ANR. Sea $H: \mathfrak{X}\times I \to \mathcal{Y}$ una función continua tal que $f_0(x) = H(x,0)$ tiene una extensión continua $f_0': \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$. Entonces existe una función continua $H': \mathfrak{X}'\times I \longrightarrow \mathcal{Y}$ tal que H' extiende a H y $H'(x,0) = f_0'(x)$.

Demostración: Utilizando la notación de (3.5) consideremos la función continua

$$f: Z \longrightarrow \mathcal{Y} \text{ tal que}$$
$$f(x,0) = f_0'(x) \quad x \in \mathfrak{X}'$$
$$f(x,t) = H(x,t) \quad x \in \mathfrak{X}\times I$$

Dado que $\mathcal{Y}$ es un ANR y Z es cerrado en Z' existe una función continua f' extensión de f a una vecindad W de Z en Z' la cual tiene valores en $\mathcal{Y}$. Si $\varphi: Z' \longrightarrow W$ es la función continua de (3.5), sea

$$H': Z \longrightarrow \mathcal{Y} \text{ tal que}$$
$$H'(x,t) = f'(\varphi(x,t)).$$

y claramente obtenemos la extensión requerida.

(3.7) Proposición. Un espacio $\mathfrak{X}$ es AR si y solo si es ANR y contraible

Demostración: Supongamos que $\mathfrak{X}$ es AR, en particular es un ANR y puesto que la función continua $h: \mathfrak{X}\times\{0\} \cup \mathfrak{X}\times\{1\} \longrightarrow \mathfrak{X}$ tal que

$h(x,0) = x$, $h(x,1) = x_0$ $(x_0 \in \mathfrak{X})$ tiene una extensión continua $H: \mathfrak{X}\times I \longrightarrow \mathfrak{X}$ ((3.6) ó (3.3)) que es una contracción de $\mathfrak{X}$.

Inversamente supongamos que $\mathfrak{X}$ es un ANR y que existe una función continua

$$H: \mathfrak{X}\times I \longrightarrow \mathfrak{X} \text{ tal que}$$

$H(x,0) = x$ y $H(x,1) = x_0$ $x \in \mathfrak{X}$ $(x_0 \in \mathfrak{X})$.

Supongamos también que $\mathfrak{X}$ es un subconjunto cerrado de un espacio métrico Z.

Sea $f_0: Z \longrightarrow \mathfrak{X}$ tal que

$f_0(z) = x_0$ para toda $z \in Z$, obteniendo así una extensión continua de $f_1(x) = H(x,1)$. Por (3.6) existe $H': Z\times I \longrightarrow X$ extensión continua de H y $H'(x,0) = f_0'(x)$. Sea $f_0': Z \longrightarrow X$ tal que

$$f_0'(x) = H(x,0)$$

f_0' es la retracción buscada, por lo tanto X es AR y así la proposición queda totalmente demostrada.

(3.8) Proposición. Sea C un espacio métrico, $C = A \cup B$, A, B cerrados en C y $A \cap B$ retracto de C. Bajo estas condiciones para que C sea AR es necesario y suficiente que A y B lo sean.

Demostración: Admitamos que A y B son AR y sea E un espacio métrico que contiene a C como cerrado.

Los conjuntos $(A-B)$ y $(B-A)$ son tales que $\overline{(A-B)} \cap (B-A) = (A-B) \cap \overline{(B-A)} = \emptyset$ (cerradura en E).

En efecto:

$(\overline{A-B}) \cap (B-A) = \overline{(A\cap B^c)} \cap (B\cap A^c) \subseteq (\bar{A} \cap \bar{B}^c) \cap (B \cap A^c)$
$= A \cap \bar{B}^c \cap (B \cap A^c) = \emptyset$.

Entonces existe un abierto $U \subseteq E$ tal que

(1) $(A-B) \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq E - (B-A) = (E-B) \cup (A-B)$.

Pongamos

(2) $P = \overline{U} \cup (A\cap B)$ y $Q = (E-U) \cup (A\cap B)$

los conjuntos P, Q y $P\cap Q$ son cerrados en E y se tiene

(3) $A \subseteq P$ y $B \subseteq Q$.

(4) $E = P \cup Q$.

(5) $A \cap P \cap Q = B \cap P \cap Q = A \cap B$.

Como $A\cap B$ es un retracto de C es también retracto de A, por lo tanto, puesto que A es AR se sigue $A \cap B$ lo es. De (2) se sigue la existencia de una función continua $\varphi: P\cap Q \rightarrow A \cap B$ que es una retracción de $A\cap B$. De (5), sean

$$f_1 : A \cup (P\cap Q) \longrightarrow A \text{ y } f_2 : B \cup (P \cap Q) \rightarrow B$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \in P\cap Q \\ x & x\in A \end{cases}; \quad f_2(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \in P\cap Q \\ x & x \in B. \end{cases}$$

las cuales están bien definidas y por lo tanto continuas.

Siendo A un AR existe una extensión φ_1 de f_1 sobre P y analogamente una extensión φ_2 de f_2 sobre Q.

Sea $\varphi: E \longrightarrow C$ tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & x \in P \\ \varphi_2(x) & x \in Q. \end{cases}$$

por lo tanto está bien definida y es continua, más aún, φ es un retracto de C. Por lo tanto C es AR.

Inversamente, supongamos que C es un AR. Puesto que $A \cap B$ es un retracto de C sea

$$\varphi: C \longrightarrow A \cap B$$

una retracción. Sean

$\varphi_1: C \longrightarrow A$ y $\varphi_2: C \longrightarrow B$ tales que:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x & x \in A \\ \varphi_1(x) & x \in B \end{cases} \quad ; \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} x & x \in B. \\ \varphi_1(x) & x \in A \end{cases}$$

por lo tanto φ_1, φ_2 están bien definidos y son continuos, de aquí A y B son retractos de C el cual es un AR y así A, B son AR. Con esto terminamos la demostración.

(3.9) Proposición. Supongamos que un espacio métrico X es la unión de subconjuntos cerrados X_1 y X_2, sea $X_0 = X_1 \cap X_2$. Entonces si X_0, X_1, X_2 son ANR entonces X es un ANR.

Demostración: Necesitamos mostrar que si X es un subconjunto cerrado de un espacio métrico Z y si X_0, X_1, X_2 son ANR entonces existe una vecindad U de X en Z tal que X es un retracto de Z.

Consideremos los conjuntos

$$Z_0 = \{z \in Z \mid \rho(z, X_1) = \rho(z, X_2)\}.$$
$$Z_1 = \{x \in Z \mid \rho(z, X_1) < \rho(z, X_2)\}.$$
$$Z_2 = \{z \in Z \mid \rho(z, X_1) > \rho(z, X_2)\}.$$

Claramente $Z = Z_0 \cup Z_1 \cup Z_2$ y X_0 es un subconjunto cerrado de Z_0, de aquí existe una vecindad W_0 de X_0 en Z_0, cerrada en Z_0 (por normalidad) y una retracción $r_1: W_0 \longrightarrow X_0$.

pongamos $\quad r_i(z) = \begin{cases} r_0(z) & z \in W_0 \\ z & z \in X_i \end{cases}$

y obtenemos una retracción r_i del conjunto $X_i \cup W_0$ (el cual es cerrado en $Z_0 \cup Z_i$) en el conjunto X_i $i=1,2$.

Dado que X_i es ANR, entonces existe una extensión continua r_i' de r_i a una vecindad de $X_i \cup W_0$ en $Z_0 \cup Z_i$ tomando valores en X_i. Es claro que V_i contiene una vecindad cerrada U_i de X_i en $Z_0 \cup Z_i$ tal que $U_i \subseteq Z_0 \subseteq X_i$. Dado que

$$U_1 \cap U_2 \subseteq U_1 \cap (Z_0 \cup Z_1) \cap (Z_0 \cup Z_2) = U_1 \cap Z_0 \subseteq W_0$$

la fórmula

$$r(z) = r_i'(z) \quad z \in X_i \quad i=1,2.$$

define una retracción del conjunto $U = U_1 \cup U_2$ el cual es una vecindad de X en Z, dentro de X.

Con esto terminamos nuestro breve reposo de ANR's y volvemos al estudio de la categoría n-dimensional. Queremos ver bajo qué condiciones h_n-contraible para toda n si y solo si h-contraible, a continuación una respuesta a este problema.

3.10 Proposición. Sea A un subconjunto cerrado de un ANR X y sean $\phi, \psi \in M^X$. Si existe una vecindad U de A tal que ϕ/U y ψ/U son homotópicos en toda dimensión menor que $1+\dim X$ entonces ϕ/A y ψ/A son homotópicos.

Demostración: Supongamos que $\dim X = n$. Para todo $\epsilon > 0$ existe $f: P \to X$, P un complejo de dimensión $\leq n$ y una función continua $g: X \to P$ tal que $f \circ g \in X^X$ es homotópica a la identidad 1_X y $d(x, fg(x)) < \epsilon$ para todo $x \in X$ [ ]. Elijamos $\epsilon < \frac{d(A, X-U)}{2}$. Por lo tanto $fg(A) \subseteq U$

Así pues las funciones continuas

$$\phi f/_{f^{-1}U} \quad y \quad \psi f/_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to M$$

son homotópicos. De aquí $\phi f g/_A$ y $\psi f g/_A$ son homotópicos. Pero $\phi f g/_A$ es homotópico a ϕ/A y $\psi f g/A$ es homotópica a ψ/A. De aquí $\phi/A \sim \psi/A$.

(3.11) Teorema: Sea A un subconjunto cerrado de un ANR M. A es contraíble en M si y solo si existe una vecindad de A la cual es contraíble en M en toda dimensión $< 1 + \dim M$.

Demostración: Ponemos en (3.10) ϕ = identidad, ψ = cte y $X = M$. Se sigue que A es contraíble en M. La segunda parte se sigue de la siguiente proposición:

(3.12) Proposición: Si M es un ANR entonces un subconjunto cerrado A en M es categórico en M si y solo si A es contraíble en M.

Demostración: Claramente si A es categórico en M implica que A es contraíble.

Ahora bien supongamos que A es contraíble en M, entonces existe $m \in M$ y $h: A \times I \to M$ una función continua tal que $h(x,0) =$ y $h(x,1) =$ para toda $x \in A$. Sea $h': M \times \{0\} \cup A \times I \cup M \times \{1\} \to M$ tal que

$$h'(x,0) = m \qquad m \in M.$$
$$h'(x,1) = x \qquad x \in M.$$
$$h'(x,t) = h(x,t), \ (x,t) \in A \times I.$$

por lo tanto h' es continua.

Dado que M es un ANR y $M \times \{0\} \cup A \times I \cup M \times \{1\} \subset M \times I$ es cerrado por ( ), h' puede ser extendida a una función continua: $h'': G \to M$, donde G es una vecindad de $M \times \{0\} \cup A \times I \cup M \times \{1\}$ en $M \times I$.

Sea V una vecindad abierta de A en M tal que $V \times I \subseteq G$ claramente $h''/V \times I$ es una contracción de

V en M dentro de $\{m\}$. Así A es categórico.

(3.13) Corolario. Si A es un subconjunto cerrado de un ANR M. Entonces, si A es h_n-contraible si y solo si es h-contraible y si y solo si es h-categórico

(3.14) El análogo de la proposición (3.12) no es cierto para homotopía en dimensión n, para esto consideremos el siguiente ejemplo:

Sea M el anillo circular que se obtiene de identificar en el rectángulo $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2/\pi$ y $|y| \leq 1\}$ los puntos $(-2/\pi, y)$ y $(2/\pi, y)$. Sea A la imagen bajo ésta identificación de la cerradura de la curva $y = \cos 1/x$ $|x| \leq 2/\pi$, entonces A es h_1-contraible en M pero no es h_1-categórico.

4 Espacios LC^n y h_n-categoría

A continuación estudiaremos bajo que condiciones se obtiene que h_n-contraible es equivalente a h_n-categórico.

(4.1) Definición: Un espacio métrico M es llamado de clase uniforme LC^n si para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda función continua

$$f: \mathbb{S}^k \longrightarrow M \qquad k \leq n$$

tal que el diametro de $f(\mathbb{S}^k)$ es menor que δ, admite una extensión continua

$$\bar{f}: \mathbb{D}^{k+1} \longrightarrow M \quad \text{tal que}$$

$\rho(\bar{f}(\mathbb{D}^{k+1})) < \epsilon$.

(4.2) Proposición. Si Y es un ANR compacto entonces Y es LC^n para toda $n=0,1,\ldots$

Demostración. Se sigue inmediatamente de (3.4)

(4.3) Observación. Puesto que todo complejo CW es ANR en particular todo poliedro es LC^n $n=0,1,\ldots$

(4.4) Lema. Si M es de clase uniforme LC^n, existe $\epsilon>0$ tal que si $f,g\in M^P$ con $d(f,g)<\epsilon$, donde P es un complejo de dimensión menor ó igual que n, entonces f,g son homotópicos.

Demostración: Sean $f,g:P\to M$ funciones continuas tales que $d(f,g)<\epsilon$, donde $\epsilon>0$ se construye inductivamente sobre la dimensión de P por un proceso que a continuación describimos.

Deseamos demostrar que existe una función continua $H:P\times I\longrightarrow M$ tal que

$H(x,0)=f(x)$ y $H(x,1)=g$.

es decir, deseamos encontrar una extensión a todo $P\times I$ de la función parcialmente definida en $P\times\{0\}$ y $P\times\{1\}$ por f y g respectivamente. Sea $\epsilon_0>0$ entonces existe $\epsilon_1>0$ tal que para todo par de funciones continuas f,g definidas parcialmente en todo simplejo de dimensión cero con $d(f,g)<\epsilon_1$ existe una extensión a $P_0\times I$ donde P_0 es la 0-estructura de P ó 0-esqueleto. Además el diámetro de esta extensión es menor que ϵ_0

Supongamos que hemos extendido nuestra homotopía a $P_k\times I$ donde P_k es el k esqueleto de P $k\geq 0$, tal que ϵ_k existe, dada ϵ_{k-1}, y el diámetro de la extensión es menor que ϵ_k. Podemos extender nuestra homotopía a $P_{k+1}\times I$ si dada ϵ_{k+1} existe ϵ_k tal que el diámetro de $H/_{P_k\times I}$ es menor que ϵ_k con el diámetro de la extensión menor que ϵ_{k+1}.

Así pues si tomamos $\epsilon=\epsilon_n$ se sigue que éstos son homotópicos.

(4.5) Proposición. Si M es de clase uniforme LC^n entonces un subconjunto A de clase uniforme LC^{n-1} es un subconjunto h_n-categórico si y solo si es h_n-contraible.

Demostración: Dado que M es de clase uniforme LC^n podemos encontrar $\epsilon > 0$ tal que para todo par de funciones $f, g: P \to M$ tales que su distancia es menor que ϵ se sigue que son homotópicos. Puesto que A es de clase LC^{n-1} procediendo de manera análoga a la de (4.4) podemos encontrar $\eta > 0$ tal que si P es un poliedro de dimensión menor ó igual que n y f es una función continua definida parcialmente en la 0-estructura de P con diámetro menor que η podemos encontrar una extensión $\bar{f}$ de f a todo P, de diámetro menor que $\epsilon/3$. Sea

$$V = \{x \in M : d(x, A) < \eta\}$$

Claramente $A \subseteq V$ y es abierto en M.

Deseamos demostrar que V es h_n-contraible en M. En efecto sea $f: P \to V$ continua, donde P es un poliedro de dimensión $\leq n$. Podemos subdividir P tan finamente tal que la imagen de todo simplejo es de diámetro menor que $\eta/3$. Para cada vértice p de esta nueva subdivisión podemos encontrar $x \in A$ tal que $d(f(p), x) < \eta/3$, entonces definimos $f'(p) = x$ para todo vértice p. Claramente el diámetro de ésta realización parcial es menor que η. Así pues, podemos completar a una realización parcial total f'' tal que su diámetro sea menor que $\epsilon/3$. Entonces $f'': P \to A$ y $d(f, f'') \leq \eta/3 + \eta/3 + \epsilon/3 < \epsilon$ así que f y f'' son homotópicas, pero por hipótesis, f'' es homotópica a una constante en M, por lo tanto f lo es, así V es h_n-contraible y A es h_n-categórico.

(4.6) Corolario. Si M y A son ANR compactos, entonces A es h_n-categórico si y solo si es h_n-contraible.

5. Productos de espacios

A continuación estudiaremos el efecto de la categoría sobre el producto de espacios

(5.1) Proposición. Si $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_k$ es arco conexo entonces

$$\max\{\operatorname{Cat} M_i\} \leq \operatorname{cat} M \leq 1 + \sum_{i=1}^{k} (\operatorname{cat} M_i - 1)$$

$$\max\{\text{hn-cat } M_i\} \leq \text{hn-cat } M \leq 1 + \sum_{i=1}^{k} (\text{hn-cat } M_i - 1).$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata de (I.9.1) —

Denotemos por $\Pi^n X$ el producto $\underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n\text{-veces}}$

(5.2) Proposición. Si $\Delta^n_X : X \longrightarrow \Pi^n X$ es el morfismo diagonal y si $a \in X$, $T^n(X) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \Pi^n X : x_i = a$ para alguna $i = 1, \ldots, n\}$. Entonces $\operatorname{cat} X \leq n$ si y solo si Δ^X_n es homotópico a alguna $g : X \longrightarrow \Pi^n X$ continua con $g(X) \subseteq T^n X$ para alguna $a \in X$.

Demostración. Sea $H : X \times I \longrightarrow \Pi^n X$ una función continua tal que

$$H(x,0) = \Delta^X_n(x) \quad \text{y} \quad H(x,1) = g(x). \text{ para toda } x \in X.$$

Sea $U_i = (p_i g)^{-1}(N) \subseteq X$ donde N es una vecindad de a la cual es contraíble y $p_i : \Pi^n X \longrightarrow X$ es la i-esima proyección. Demostraremos que $\{U_i\}_{i=1}^n$ es una cubierta categórica de X.

$1_X = p_i \Delta^n_X \simeq p_i g$.

Puesto que $p_i g$ mapea U_i en N, de la contractibilidad de N se sigue que U_0 es contraible por lo tanto categórico. Finalmente $\{U_i\}$ es una cubierta de X ya que $x \in U \Leftrightarrow x \in U_i$ para alguna i, si y solo si $p_i g(x) \in N$ pero $g(x) \in T^n X$ entonces para alguna coordenada de $g(x)$ es igual a a así $p_i g \in N$ para alguna i y por lo tanto $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ de aquí $\operatorname{cat} X \leq n$.

Inversamente, supongamos que $\{V_i\}_{i=1}^{n}$ es una cubierta categórica minimal de X, puesto que $\bigcap V_i \neq \phi$, sin perdida de generalidad podemos suponer que los V_i se contraen a un punto común a, aún más, podemos suponer que $k=n$

Sean $H_i : V_i \times I \longrightarrow X$ $\quad i=1,\ldots,n.$

contracciones de V_i al punto comun a.

Sea $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ una cubierta cerrada de X tal que $A_i \subseteq V_i$, por normalidad de X podemos encontrar abiertos W_i, $i=1,\ldots,n$ tales que $A_i \subseteq W_i \subseteq \overline{W}_i \subseteq V_i$ y funciones continuas $\tau_i : X \rightarrow I$ tales que $\tau_i(A)=1$ y $\tau_i(X-W_i)=0$

Definimos las funciones continuas

$$F_i : X \times I \longrightarrow X \quad \text{tal que}$$

$$F_i(x,t) = \begin{cases} x & x \in X - \overline{W}_i \\ H_i(x, t\,\tau_i(x)) & x \in V_i \end{cases}$$

Claramente F_i está bien definida y es continua.

Sea $H : X \times I \longrightarrow \Pi^n X$ tal que

$$H(x,t) = (F_1(x,t), F_2(x,t), \ldots, F_n(x,t)).$$

por lo tanto H es continua y es tal que

$$H(x,0) = (F_1(x,0), \ldots, F_n(x,0)) = (x, \ldots, x).$$

Finalmente

$H(x,1) \in T^n X$ si y solo si $F_i(x,1) = a$ para alguna i, en efecto: sea $x \in X$ entonces $x \in A_i \subseteq V_i$ para alguna i, por lo tanto $F_i(x,t) = H_i(x, \tau_i(x)) = H_i(x,1) = a$.

· Así la proposición queda totalmente demostrada.

En la siguiente proposición utilizaremos la misma notación de la proposición anterior.

(5.3) Proposición. Si $X_1, \ldots, X_n$ son no contraibles y $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ es esencial entonces $\operatorname{cat} X > n$.

Demostración. Si $p_i : \Pi^n X \longrightarrow X$ la proyección estas inducen $p : \Pi^n X \longrightarrow \Pi^n X$ a saber $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$. Entonces $p(T^n(\Pi^n X)) \subseteq T^n X$.

Supongamos por un instante que $\operatorname{cat} X \leq n$, entonces

entonces $\Delta_X^n \simeq g$ donde $g: X \longrightarrow \Pi^n X$ continua tal que $g(X) \subseteq T^n(\Pi^n X)$. Pero $1_X = p\Delta_X^n \simeq pg$ donde $pg \subseteq T^n X$ pero T^n es un subconjunto propio de X, dado que X_i es no contraible para toda i, se sigue que, X es inesencial esto es una contradicción. Así $\operatorname{cat} X > n$.

(5.4) Corolario. Si $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ es esencial y si $\operatorname{cat} M_i = 2$ $i = 1, \dots, n$, entonces $\operatorname{cat} X = n+1$.
Demostración; Por (5.1) $\operatorname{cat} X \leq 1 + (\Sigma(\operatorname{cat} X_i - 1)) = n+1$ y por (5.3) $\operatorname{cat} X \geq n+1$. Así $\operatorname{cat} X = n+1$

(5.5) Corolario. Si $X = X_1 \times X_2$ entonces $\operatorname{cat} X = 2$ si y sólo si X puede ser deformado en $T^n X$ y $\operatorname{cat} M_1 = \operatorname{cat} M_2 = 2$.
Demostración. Inmediata de lo anterior.

(5.6) Proposición.
Si $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k$ es un ANR y esencial, si $\{B_1, \dots B_2, \dots, B_k\}$ es una cubierta de X por conjuntos cerrados, donde $\operatorname{cat}_X B_i = \operatorname{cat} M_i - 1$ $i = 1, \dots, k$, entonces para alguna i, p_i mapea a B_i esencialmente en X_i (p_i la iésima proyección).
Demostración: Supongamos que $\Pi_i(B)$ es inesencial para toda $i = 1, \dots, k$, entonces existen funciones contínuas
$H_i: \Pi_i(B) \times I \longrightarrow X_i$. Tales que
$H_i(x, 0) = x$ y $H_i(x, B) \subseteq X$ es un subconjunto cerrado propio de X. Entonces $P_i/_B \sim H(x,1) \cdot P_i/_0 : B_i \longrightarrow X$.

Por ( ) existe una extensión ϕ_i de $h_i \Pi_i/_{B_i}$ la cual es homotópica a p_i. De aquí
$1_X = (\Pi_1, \dots, \Pi_k)$ es homotópica a $(\phi_1, \dots, \phi_k) = \phi$ pero claramente $\phi(X)$ es un subconjunto cerrado propio de X, contradicción.

6. Espacios Cubrientes.

(6.1) Definición. Un espacio X es llamado localmente simplemente conexo si para cada $x \in X$ existe un conjunto V que contiene a x y es abierto tal que toda trayectoria α en V, $\alpha(0) = \alpha(1) = x$, es homotópica a una constante en X.

(6.2) Proposición. Sea X un espacio topológico arco conexo, localmente arco conexo y localmente simplemente conexo. Sea H un subgrupo de $\pi_1(X, x)$. Entonces existe un espacio cubriente $p: \tilde{X} \longrightarrow X$ tal que $p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = H$. En particular si $H = 0$ entonces $\tilde{X}$ es simplemente conexo

Demostración. Sea Ω_H el conjunto de todas las trayectorias en X que empiezan en x y definimos una relación de equivalencia en Ω_H por

$$\alpha \equiv \beta \iff \begin{cases} \alpha(1) = \beta(1) \\ \alpha\beta^{-1} \in H \end{cases}$$

Esta es una relación de equivalencia; en efecto:

(1) $\alpha \equiv \alpha$ porque $\langle \alpha\alpha^{-1} \rangle = \langle e_x \rangle \in H$

(2) $\alpha \equiv \beta$ entonces $\beta \equiv \alpha$ porque $\langle \beta\alpha^{-1} \rangle = \langle \alpha\beta^{-1} \rangle^{-1} \in H$.

(3) Si $\alpha \equiv \beta$ y $\gamma \equiv \alpha$ entonces $\alpha(1) = \beta(1) = \gamma(1)$

$\langle \gamma\beta^{-1} \rangle = \langle \gamma\alpha^{-1}\alpha\beta^{-1} \rangle = \langle \gamma\alpha^{-1} \rangle \langle \alpha\beta^{-1} \rangle \in H$. así $\gamma \equiv \beta$.

Sea $\tilde{X}$ el conjunto de todas éstas clases de equivalencia; para $\alpha \in \Omega_H$, sea $[\alpha]$ la clase de equivalencia de α. Definimos $p: \tilde{X} \longrightarrow X$ tal que $p([\alpha]) = \alpha(1)$, p es suprayectiva ya que X es conectable por trayectorias.

Definimos en $\tilde{X}$ una topología como sigue:

Para cada $[\alpha] \in \tilde{X}$, sea U un conjunto abierto de X el cual contiene a $\alpha(1)$; sea:

$([\alpha], U) = \{[\alpha\beta] : \beta : I \to U$ continua tal que $\beta(0) = \alpha(1)\}$.

La colección de todos los $([\alpha], U)$ juntamente con el vacío forman una base para la topología de $\tilde{X}$.

Verifiquemos que ésta es una base:

(1) $([e_x], X) = \tilde{X}$

(2) para $([\alpha_1], U_1)$, $([\alpha_2], U_2)$ si $[\gamma] \in ([\alpha_1], U_1) \cap ([\alpha_2], U_2)$ entonces $([\gamma], U_1 \cap U_2) \subseteq ([\alpha_1], U_1) \cap ([\alpha_2], U_2)$

y de aquí la familia $\{([\alpha], U)\}$ es una base para la topología en $\tilde{X}$.

La topología en $\tilde{X}$ es Hausdorff: supongamos que $[\alpha_1]$, $[\alpha_2]$ están en $\tilde{X}$ tales que $[\alpha_1] \neq [\alpha_2]$. Si $\alpha_1(1) \neq \alpha_2(1)$ entonces existen conjuntos abiertos U_1 y U_2 de X tales que $U_1 \cap U_2 = \phi$ y $\alpha(1) \in U_1$, $\alpha_2(1) \in U_2$, claramente

$$([\alpha_1], U_1) \cap ([\alpha_2], U_2) = \phi.$$

Supongamos que $\alpha_1(1) = \alpha_2(1)$. Dado que X es localmente simplemente conexo, existe un conjunto abierto U que contiene a $\alpha_1(1) = \alpha_2(1)$ tal que cualquier trayectoria cerrada en U es homotópica en X a una constante, entonces $([\alpha_1], U_1) \cap ([\alpha_2], U) = \phi$. – ya que de otra manera podrían existir trayectorias β, γ en U que iniciaran en $\alpha_1(1) = \alpha_2(1)$ con $[\alpha_1\beta] = [\alpha_2\gamma]$, esto es, con $\alpha_1\beta \equiv \alpha_2\gamma$ entonces $\langle \alpha_1\beta\gamma^{-1}\alpha_2^{-1} \rangle \in H$ pero $\beta\gamma^{-1}$ es una trayectoria cerrada en U, entonces $\beta\gamma^{-1} \sim cte$ y $\langle \alpha_1\alpha_2^{-1} \rangle = \langle \alpha_1\beta\gamma^{-1}\alpha_2^{-1} \rangle \in H$ lo cual es una contradicción

$p : \tilde{X} \longrightarrow X$ es continua:

Si $U \subseteq X$ es abierto; entonces para cada $[\alpha] \in p^{-1}U$, $([\alpha], U)$ es un abierto contenido en $p^{-1}U$.

$\tilde{X}$ es arco conexo.

Sean $[\alpha], [\beta] \in \tilde{X}$, para construir una trayectoria en $\tilde{X}$ de $[\alpha]$ a $[\beta]$, sea $f : I \longrightarrow \tilde{X}$ tal que

$$f(s) = \begin{cases} \alpha((1-2s)t) & 0 \le s \le 1/2 \\ \beta((2s-1)t) & 1/2 \le s \le 1 \end{cases}$$

f es continua porque si $([\gamma], U]$ es un básico de $\tilde{X}$ entonces $f^{-1}([\gamma], U) = \{t_2 \in I : f(t_2) \in ([\gamma], U)\} = A \cup B$

donde

$A = \{ t_2 \in [0, 1/2] : \alpha((1-t_2)t_1) \in ([\gamma]; U) \}$.

$B = \{ t_2 \in [1/2, 1] : \beta((2t_2 - 1)t_1) \in ([\gamma], U) \}$.

primeramente mostraremos que A es abierto. Supongamos que $\bar{t}_2 \in A$ entonces $\alpha_{t_2} = \alpha((1-2\bar{t}_2)t) \in U$. Dado que $t_2 \to \alpha_{t_2}(1)$ es continua existe un intervalo abierto J al rededor de $\bar{t}_2$ tal que $\alpha_{t_2}(1) \in U$ para todo $t \in J$. Aún más, para $t_2 \in J$ $\langle \alpha_{t_2} \rangle = \langle \alpha_{\bar{t}_2} \eta \rangle$ donde η es una trayectoria a lo largo de α de $\alpha_{\bar{t}_2}(1)$ a $\alpha_{t_2}(1)$. Aún más, dado que $\bar{t}_2 \in A$, $[\alpha_{\bar{t}_2}] = [\gamma\xi]$ para alguna trayectoria ξ en U de $\gamma(1)$ a $\alpha_{\bar{t}_2}(1)$; esto es

$\langle \alpha_{\bar{t}_2} \xi^{-1} \gamma^{-1}] \in H$. Pero $\langle \alpha_{t_2} (\gamma \xi \eta)^{-1} \rangle = \langle \alpha_{\bar{t}_2} \eta^{-1} \xi^{-1} \gamma^{-1} \rangle = \langle \alpha_{\bar{t}_2} \xi^{-1} \gamma^{-1} \rangle \in H$

entonces $\alpha_{t_2} \equiv \gamma(\xi\eta)$.

donde $\xi\eta$ es una trayectoria en U de $\gamma(1)$ a $\alpha_{t_2}(1)$; esto es $[\alpha_{t_2}] = [\gamma(\xi\eta)] \in ([\gamma], U)$ para todo $t_2 \in J$.

De aquí J es un conjunto abierto al rededor de $\bar{t}_2$ contenido en A, por lo tanto A es abierto en I. Análogamente se muestra que B es abierto y esto prueba que f es continua y esto completa la demostración de que $\tilde{X}$ es arco conexo.

$p : \tilde{X} \to X$ es un espacio cubriente:

Dado $x_1 \in X$, sea $U \subseteq X$ abierto arco conexo que contiene a x_1 con la propiedad de que toda trayectoria en U es homotópica en X a una constante. Como en la prueba anterior (donde se prueba que $\tilde{X}$ es Hausdorff) vemos que si $[\alpha_1] \neq [\alpha_2]$ es tal que $p[\alpha_1] = p[\alpha_2]$ esto es $\alpha_1(1) = \alpha_2(1)$ entonces $([\alpha_1], U) \cap ([\alpha_2], U) = \phi$.

También dado que U es arco conexo

$$p|_{([\alpha], U)} : ([\alpha], U) \to U \text{ es suprayectiva}$$

para cualquier $[\alpha]$ con $p[\alpha] = \alpha(1)$. Aún más

$p|_{([\alpha], U)}$ es inyectiva. Supongamos que $p([\alpha\beta]) = p([\alpha\gamma])$ para algunas trayectorias β, γ en U que empiezan en x_1. Entonces $\beta(1) = \gamma(1)$ así $\beta\gamma^{-1}$ es una trayectoria cerrada en U y de aquí homotópica a

la trayectoria constante e_{x_1}, esto es
$\langle \alpha\beta(\alpha\delta)^{-1}\rangle = \langle \alpha(\beta\delta^{-1})\alpha^{-1}\rangle = \langle \alpha e_x \alpha^{-1}\rangle = \langle e_x\rangle \in H.$
y $[\alpha\beta]=[\alpha\delta]$

Ahora $p^{-1}U = \bigcup([\alpha],U)$ donde la unión es sobre todo α con $p[\alpha]=x_1$. Porque si α' es una trayectoria con $p[\alpha']=\alpha'(1)\in U$, sea β una trayectoria en U de $\alpha'(1)$ a x_1, entonces $p[\alpha\beta]=x_1$. y $[\alpha']\in([\alpha'\beta],U)$.

Para completar la prueba de que $p:\hat{X}\to X$ es una aplicación cubriente, resta sólo probar que p es una función abierta

Supongamos que $\tilde{U}=([\alpha],U)$ sea $x\in p(\tilde{U})$ digamos que $p[\beta]=\beta(1)=x_1$. para $\beta\in\tilde{U}$, sea U_1 el conjunto de todos los puntos de U los cuales pueden ser unidos con x_1 por trayectorias en U. Dado que X es localmente por trayectorias se sigue que U_1 es una vecindad de x_1 y $U_1\subseteq p(\tilde{U})$, en efecto, $U_1 = p([\beta],U_1)$ aún más $[\beta]=[\alpha\gamma]$ donde γ es la trayectoria contenida en U. Entonces cualquier elemento $[\eta]\in([\beta],U_1)$ es de la forma:

$$[\eta]=[\beta\delta]=[\alpha\gamma\delta]\in([\alpha],U)=\tilde{U}.$$

donde δ es una trayectoria en U_1 de $\beta(1)$ a $\eta(1)$ y $([\beta],U_1)\subseteq\tilde{U}$

Finalmente para completar la prueba de la proposición tenemos que mostrar que $p_*(\pi_1(\hat{X},x))\cong H$. donde $\tilde{x}=e_x$. Para esto sea α cualquier trayectoria en X que empieza en x y $\tilde{\alpha}$ la trayectoria en $\hat{X}$ que empieza en $\tilde{x}$ definida por $\tilde{\alpha}(t_2)=[\alpha_{t_2}]$ donde $\alpha_{t_2}(t_1)=\alpha(t_2t_1)$, $\tilde{\alpha}$ es continua, el argumento es completamente análogo al que se usó para mostrar que $\hat{X}$ es arco conexo, $\tilde{\alpha}$ cubre a α porque:

$p(\tilde{\alpha}(t_2)) = p[\alpha_{t_2}] = \alpha_{t_2}(1) = \alpha(t_2)$.

Ahora supongamos que α es cerrada, esto es $[\alpha]\in\pi_1(X,x)$, entonces.

$\langle \tilde{\alpha} \rangle \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ si y solo si $\tilde{\alpha}$ es una trayectoria cerrada en $\tilde{X}$ si y solo si $[\tilde{\alpha}(1)] = [e_x]$. si y solo si $[\alpha] = [e_x]$ si y solo si $\langle \alpha \rangle \in H$.

Por lo tanto

$$p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) = H.$$

(6.3) Teorema. Sea $\pi : \tilde{M} \to M$ una aplicación cubriente, donde $C(M) \neq \phi$. Sea $X \subseteq M$ y $\tilde{X} = \pi^{-1}(X)$ Entonces $\operatorname{cat}_{\tilde{M}} \tilde{X} \leq \operatorname{cat}_M X$.

Demostración. Si $\{U_i\} \in C_M(X)$ abierta, mostraremos que $\{\tilde{U}_i = \pi^{-1}(U_i)\} \in C_{\tilde{M}}(\tilde{X})$.

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{U}_i \arrow[rr, "i"] \arrow[d] & & \tilde{M} \arrow[d, "\pi"] \\
\tilde{U}_i \times I \arrow[r, "p \times 1"] \arrow[urr, dashed, "\tilde{H}"] & U_i \times I \arrow[r, "H"] & M
\end{tikzcd}$$

donde H es una contracción de U en M. El diagrama es claramente conmutativo. Por lo tanto existe una unica función continua $\tilde{H}$ que hace conmutativo el nuevo diagrama, $\tilde{H}(x, 0) = i$ y $\pi \tilde{H}(x, 1) = H \pi \times 1_I(x, 1) = H(p(x), 1) = *$, por lo tanto $\tilde{H}(x, 1) \in \pi^{-1}(*)$, pero $\pi^{-1}(*)$ es un conjunto discreto de dimensión cero por (1.51) $\pi^{-1}(X)$ es contraible en $\tilde{M}$. Así pues

$$\operatorname{cat}_{\tilde{X}} M \leq \operatorname{cat}_X M.$$

Teorema. Si $\pi : \tilde{M} \to M$ es una aplicación cubriente donde $h_n C_M(X) \neq 0$, $\tilde{X} = \pi^{-1}(X)$ entonces

$$h_n\text{-}\operatorname{cat}_{\tilde{M}}(\tilde{X}) \leq h_n \operatorname{cat}_M(X)$$

Demostración. Por el argumento anterior basta demostrar que si $U \subseteq M$ es h_n-contraible entonces $\pi^{-1} U = \tilde{U} \subseteq \tilde{M}$ es h_n-contraible en $\tilde{M}$. Para esto sea $f : P \to \tilde{U}$ una función continua y P es un complejo de dimensión menor ó igual que n. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_0"'] & \tilde{U} \arrow[r, hook] & \tilde{M} \arrow[d, "\pi"] \\
P \times I \arrow[rr, "H"] \arrow[urr, dashed, "\tilde{H}"] & & M
\end{tikzcd}$$

donde H es una homotopía entre $i_A\, p/_{\tilde{U}}\, f : P \to M$. y una constante $* \in M$.

Se sigue inmediatamente que el diagrama es conmutativo. Por lo tanto existe una única $\tilde{H}$ que hace conmutativo el nuevo diagrama.

$\tilde{H}$ es una h_n-deformación de $\tilde{U}$ en un espacio discreto, así $\tilde{U}$ es h_n-contraible. Por lo tanto

$$h_n \operatorname{cat}_{\tilde{M}} \tilde{X} \leq h_n \operatorname{cat}_M X.$$

(6.4) Proposición. Sea $p: E \to B$ una fibración, $F \subseteq E$ la fibra. Si E tiene una cubierta $\{U_1, \ldots, U_n\}$ tal que $p(U_i)$ es contraible en B y si $i: F \hookrightarrow E$ es homotópica a una constante entonces $\operatorname{cat} E \leq n$.

Demostración. Basta demostrar que cada U_i es contraible en E, para esto consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
U_i \arrow[rr, hook, "j"] \arrow[d, "h_0"'] & & E \arrow[d, "p"] \\
U_i \times I \arrow[r, "p \times 1"] \arrow[urr, dashed, "\tilde{H}"] & p(U_i) \times I \arrow[r, "H"] & B
\end{tikzcd}$$

entonces existe una función continua $\tilde{H}$ que hace conmutativo el nuevo diagrama. Esta homotopía empieza en la inclusión j y $\tilde{H}(x,1) \subseteq F$. Pero F es contraible en E. Por lo tanto $H(x,1)(X)$ es con-

traible a un punto. Por lo tanto U_i es contraible
Así $\operatorname{cat} E \leq n$.

(6.5) Observación. Se sigue inmediatamente que hay una proposición análoga a (6.4) para h_n-categoría

7 Identificaciones

En seguida se estudiará el efecto de ciertas identificaciones en la categoría.

(7.1) Teorema. Sean K_1, K_2 subconjuntos de M, M conexo, tales que $K_1 \cap K_2 = \phi$, K_1 y K_2 retractos homeomorfos de M. Sea N el espacio que se obtiene de M al identificar los correspondientes puntos de K_2 y K_1 bajo el homeomorfismo. Entonces $\operatorname{cat} M \leq \operatorname{cat} N$. ($h_n\operatorname{cat} M \leq h_n \operatorname{cat} N$).

Demostración. Sea $h: K_2 \to K_1$ el homeomorfismo y

$M \times \{0\} \xrightarrow{\pi_1} M \times \{0\}/_{\sim} = N$ la proyección natural

donde $(x,0) \sim (h(x),0)$ para toda $x \in K_2$.

Consideremos el conjunto de los números enteros con la topología discreta y

$\pi_2: M \times \mathbb{Z} \longrightarrow M \times \mathbb{Z}/_{\sim} = \tilde{N}$

donde aquí $\sim$ está definida de la siguiente manera:

tenemos homeomorfismos

$h_i : K_2^i \longrightarrow K_1^{i+1}$ tal que

$h_i(x,i) = (h(x), i+1)$.

donde K_2^i y K_1^i son la correspondiente copia de K_2 y K_1 en $M \times \{i\}$, entonces

$(x,i) \sim (h(x), i+1)$. para toda $x \in K_2^i$, $i \in \mathbb{Z}$.

Definimos una función continua

$f: M \times \mathbb{Z} \longrightarrow N$ tal que

$(x,i) \longrightarrow \pi_1(x,0)$.

Claramente ésta es una función continua, aún más ésta factoriza a través de π_2, en efecto:

$(x,i) \sim h_i(x,i)$ para toda $x \in K_2$

$f(x,i) = \pi_1(x,0)$

$f h_i(x,i) = f(h(x), i+1) = \pi_1(h(x),0)$.

pero $(h(x),0) \sim (x,0)$ en la primera relación. Por lo tanto existe una única función continua $\phi: \tilde{N} \longrightarrow N$ tal que conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times \mathbb{Z} \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[dr, "f"'] & \tilde{N} \arrow[d, dashed, "\phi"] \\ & N \end{tikzcd}$$

Afirmamos que ϕ es una aplicación cubriente, es decir, para todo $x \in N$ existe una vecindad abierta V de x en N tal que $\phi^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ con $V_\alpha \subseteq \tilde{N}$ abierto y $V_\alpha \cap V_\beta$ si $\alpha \neq \beta$. En efecto:

Supongamos que x es un representante de alguna clase en N tal que $x \in M-(K_1 \cup K_2)$. Puesto que K_1 y K_2 son retractos en un Hausdorff son cerrados en M, por lo tanto existe $V \subset M$ abierto tal que $x \in V$ y $V \cap (K_1 \cup K_2) = \phi$ y se tienen las siguientes propiedades

(i) $\pi_1(V)$ es abierto en N

(ii) $\pi_1(x) \in \pi_1(V)$

(iii) $\phi^{-1}(\pi_1(V)) = \pi_2(V) \times \mathbb{Z}$.

Ahora supongamos que x es un representante de una clase de N tal que $x \in K_2$ (el caso en que $x \in K_1$ es completamente análogo a éste), entonces existen abiertos $V_1, V_2 \subseteq M$ tales que $V_1 \cap V_2$, $V_1 \cap K_2 = \phi$, $V_2 \cap K_1 = \phi$ y $h(x) \in V_1$, $x \in V_2$. Se tienen las siguientes propiedades:

(i) $V = \pi_1(V_1 \cup V_2) \subseteq N$ es abierto.

(ii) $\pi_1(x) \in V$

(iii) $\phi^{-1}(W) = \pi_2(V_1 \cup V_2) \times \mathbb{Z}$.

(1) Por lo tanto ϕ es una aplicación cubriente.

De acuerdo a (6.3) $\operatorname{cat} \tilde{N} \leq \operatorname{cat} N$ (análogamente $h_n \operatorname{cat} \tilde{N} \leq h_n \operatorname{cat} N$).

sean $r_1: M \to K_1$ y $r_2: M \to K_2$ retracciones.

Sea $f_1: \Pi_2(M \times \{0, \pm 1\}) \longrightarrow \Pi_2(M \times \{0\})$.

Tal que

$$f_1(\Pi_2(x,0)) = \Pi_2(x,0)$$
$$f_1(\Pi_2(x,1)) = \Pi_2(r_2(x),0).$$
$$f_1(\Pi_2(x,-1)) = \Pi_2(r_1(x),0).$$

por lo tanto f_1 está bien definida y es continua

Supongamos definida una retracción

$$f_i: \Pi_2(M \times \{0, \pm 1, \dots, \pm i\}) \longrightarrow \Pi_2(M \times \{0\}).$$

Sea $f_{i+1}: \Pi_2(M \times \{0, \pm 1, \dots, \pm(i+1)\}) \longrightarrow \Pi_2(M \times \{0\})$ tal que

$$f_{i+1} = f_i \text{ en } \Pi_2(M \times \{0, \pm 1, \dots, \pm i\}).$$
$$f_{i+1}\Pi_2(x, i+1) = \Pi_2(r_2(x), 0)$$
$$f_{i+1}\Pi_2(x, -(i+1)) = \Pi_2(r_1(x), 0).$$

por lo tanto f_{i+1} está bien definida y es continua

Sea $f: \tilde{N} \longrightarrow \Pi_2(M \times \{0\})$

$$f(x) = f_i(x) \quad \text{si } x \in \Pi_2(M \times \{i\}).$$

esto define una retracción de $\Pi_2(M \times \{0\})$. Pero $\Pi_2(M \times \{0\})$ es homeomorfo a M. Por lo tanto

(2) $$\operatorname{cat} M \leq \operatorname{cat} \tilde{N} \quad (h_n \operatorname{cat} M \leq h_n \operatorname{cat} \tilde{N})$$

de (1) se sigue que

$$\operatorname{cat} M \leq \operatorname{cat} N \quad (h_n \operatorname{cat} M \leq h_n \operatorname{cat} N)$$

(7.2) Proposición. Si M es arco conexo y $X \in M$. Sea $\sigma = \{X_i\}_{i=1}^{n} \in C_n(X)$ abierta minimal entonces $\bigcap_{i=1}^{n} X_i \neq 0$.

Demostración. Dado que X es un espacio normal existe una cubierta $\sigma' = \{W_1, \dots, W_n\}$ el cual es un refinamiento preciso de σ. Sea T_i $i = 1, \dots, k$ el conjunto de puntos de X los cuales pertenecen al menos $k-i+1$ de los conjuntos $W_1, \dots, W_n$. Entonces tenemos la siguiente sucesión categórica para $X - T_1$ en M: $\{T_2 - T_1, T_3 - T_1, \dots, T_n - T_1\}$. Por (5.2) $\operatorname{cat}_M(X - T_1) \leq k-1$. Puesto que σ' es minimal se sigue que $T_1 \neq \emptyset$ de aquí $X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n \supseteq W_1 \cap \dots \cap W_n \neq \emptyset$; y así la proposición queda probada.

(7.3) Teorema. Sea M un espacio conexo, de clase uniforme LC° y $x, y \in M$ dos puntos distintos. Si $1 < \operatorname{cat} M < \infty$ (ó si $1 < \operatorname{hn} \operatorname{cat} M < \infty$) entonces $\operatorname{cat} M = \operatorname{cat} N$ ($\operatorname{hn} \operatorname{cat} M = \operatorname{hn} \operatorname{cat} N$) donde N es el espacio que se obtiene de M al identificar x con y.

Demostración. Sea $\sigma = \{\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n\} \in C(M)$ abierta minimal. Afirmamos primeramente que podemos encontrar una cubierta $\sigma' \in C(M)$ la cual es abierta y minimal tal que $x \notin \Sigma_1'$ y $y \notin \Sigma_2'$, ($\Sigma_1', \Sigma_2' \in \sigma'$). Supongamos que $x \in \bigcap_{i} \Sigma_i$, $y \in \bigcap \Sigma_i$ entonces la cubierta $\{\Sigma_1 - \{x\}, \Sigma_2 - \{y\}, \Sigma_3, \ldots, \Sigma_n\}$ es un refinamiento preciso de σ' con la propiedad requerida (obsérvese que se está utilizando la hipótesis $\operatorname{cat} M \geq 2$). Así pues existe una cubierta abierta minimal $\sigma = \{\Sigma_i\} \in C(M)$ la cual es abierta y $x \notin \Sigma_1$, $y \notin \Sigma_2$.

Existen conjuntos abiertos V_1, V_2 de M tales que $x \in V_1$, $y \in V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \phi$. Supongamos que $x \in \Sigma_i$, $y \in \Sigma_j$ sean $U_1' = V_1 \cap \Sigma_i$, $U_2' = V_2 \cap \Sigma_j$, más aún, existen abiertos W_1, W_2 de M tales que $x \in W_1$, $W_1 \cap \Sigma_1 = \phi$, $y \in W_2$, $W_2 \cap \Sigma_2 = \phi$. Sean $U_1 = V_1 \cap \Sigma_i \cap W_1$, $U_2 = V_2 \cap \Sigma_j \cap W_2$. U_1 y U son tales que:

(i) $x \in U_1$, $y \in U_2$

(ii) $\Pi(U_1)$, $\Pi_2(U_2)$ son contraibles en N, donde $\Pi: M \to N$ es la proyección natural.

(iii) $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap \Sigma_1 = U_2 \cap \Sigma_2 = \phi$.

Sea $k = \Pi(x) = \Pi(y)$ y consideremos la siguiente cubierta
$\sigma' = \{\Pi(\Sigma_i) - \{k\}, \Pi(U_1 \cup U_2)\}$.

σ' tiene las siguientes propiedades

(1) σ' es una cubierta de N categórica

(2) $|\sigma'| = 1 + \operatorname{cat} M$.

Pero $(\Pi(\Sigma_1) - \{k\} \cap \Pi(\Sigma_2) - \{k\} \cap \Pi(U_1 \cup U_2) = \phi$.
Por la proposición anterior σ' no puede ser minimal. por lo tanto $\operatorname{cat} N \leq \operatorname{cat} M$. Pero $\operatorname{cat} M \leq \operatorname{cat} N$, y así

$$\operatorname{cat} N = \operatorname{cat} M.$$

(7.4) Observación. La hipótesis LC° y conexidad en nos implican conectabilidad por trayectorias lo cual es utilizado en la demostración de (5.2). La demostración de (7.3) para hs. categoría es análoga a ésta.

(7.5) Teorema. Sea M un ANR y K_1, K_2 retractos homeomorfos ajenos de M. Sea N el espacio que se obtiene de M al identificar los correspondientes puntos de K_1 y K_2 mediante un homeomorfismo. Entonces

$$\operatorname{cat} M \leq \operatorname{cat} N \leq \operatorname{cat} M + k.$$

donde $k = \operatorname{cat}_M K_1 = \operatorname{cat}_M K_2$

Demostración. Sea $\sigma \in C_{K_1}(K_1)$ cerrada minimal. Por ( ) $X_i \in \sigma$ es categórico en M y de aquí $\operatorname{cat}_M K_1 \leq \operatorname{cat}_{K_1}(K_1)$; pero $\operatorname{cat} K_1 \leq \operatorname{cat}_M K_1$ porque K_1 es divisor de M, por lo tanto

$$\operatorname{cat} K_1 = \operatorname{cat}_M K_1 = \operatorname{cat}_M K_2 = \operatorname{cat}(K_1) = k.$$

Analogamente $\operatorname{cat}_N K = \operatorname{cat} K = k$. donde $K = \Pi_1(K_1) = \Pi(K_2)$

Dado que $\Pi / _{M-(K_1 \cup K_2)}$ es un homeomorfismo

$$\operatorname{cat}_N (N-K) \leq \operatorname{cat}_M (M-(K_1 \cup K_2)) \leq \operatorname{cat} M.$$

por lo tanto

$$\operatorname{cat} N \leq \operatorname{cat}_N (N-K) + \operatorname{cat}_N (K) \leq \operatorname{cat} M + k.$$

III Categoría de Homología.

1- Definiciones.

(1.1) Dos funciones $\phi, \psi \in M^{X}$ son llamadas homólogas (G) en dimensión $n \geq 1$ ó n-homólogos (G) si para toda $k = 0, 1, \ldots, n$ inducen el mismo homomorfismo en los grupos de homología:

$$\phi_{*} = \psi_{*} : H_k(X; G) \longrightarrow H_k(M; G) \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

(1.2) Un subconjunto X de M será llamado H_n-deformable (G) en M dentro de Y si existe $f \in M^{X}$ tal que $f(X) \subseteq Y$ la cual es n-homóloga a la inclusión $i: X \hookrightarrow M$.
(1.3) Diremos que $X \subseteq M$ es H_n-contraible en M, si existe $m \in M$ tal que X puede ser H_n-deformado (G) en M dentro de $\{m\}$.
(1.4) $X \subseteq M$ será llamado H_n-categórico (G) en M si X está contenido en un conjunto abierto el cual es H_n-contraible (G) en M.
(1.5) Una cubierta de $X \subseteq M$ constituida por conjuntos H_n-categóricos (G) en M será llamada cubierta H_n-categórica (G) de X en M. Denotaremos por $H_n C_M(X; G)$ al conjunto de tales cubiertas.
(1.6) Sea $X \subseteq M$ la H_n-categoría (G) de X en M, denotada por $H_n\text{-cat}(M; G)$ se define como

$$H_n\text{cat}(M; G) = \inf \{ |\sigma| : \sigma \in H_n C_M(X; G) \}.$$

(1.7) Proposición. Si M es un complejo, un subconjunto A es H_n-categórico en M si y sólo si es H_n-contraible.
Demostración: Existe una vecindad abierta U de A que es un retracto fuerte por deformación de A. Se sigue entonces que A es H_n-categórico si y sólo si A es H_n-contraible.

Más definiciones.

(1.8) Dos funciones continuas $\phi, \psi \in M^X$ son llamadas homólogas (G) si son homólogas en toda dimensión. Como antes, definimos H_n-deformable en M dentro de U, H-contraíble (G) en M, H categórico (G) y la categoría de homología $H\,cat_M(X;G)$ en términos de homología

Los resultados del capítulo I pueden ser aplicados también a categoría de homología en dimensión n y categoría de homología. En efecto, homología en dimensión n y homología son relaciones simétricas, reflexiva y transitiva y satisface las condiciones (2.1), a (2.4) en el capítulo I:

(1.9) Proposición:

(a) Si $\phi_0, \phi_1 \in X^P$, $f_0, f_1 \in M^X$ son tales que

$\phi_{0*} = \phi_{1*} : H_K(P) \longrightarrow H_K(X)$, $f_{0*} = f_{1*} : H_K(X) \longrightarrow H_K(M)$ $0 \leq K \leq n$

entonces

$$(f_0 \phi_0)_* = (f_1 \phi_1)_* : H_K(P) \longrightarrow H_K(M) \quad 0 \leq K \leq n.$$

(b) Si A y B están mutuamente separados, $f_0, f_1 \in M^{A \cup B}$ son tales que:

$(f_0/_A)_* = (f_1/_A)_* : H_K(A) \longrightarrow H_K(M)$, $(f_0/_B)_* = (f_1/_B)_* : H_K(B) \longrightarrow H_K(M)$ $0 \leq K \leq n$

entonces

$$f_{0*} = f_{1*} : H_K(A \cup B) \longrightarrow H_K(M) \quad 0 \leq K \leq n.$$

(c) Si $f_0, f_1 \in M^X$ son dos funciones constantes con valor $x_0, x_1 \in M$ respectivamente entonces:

$f_{0*} = f_{1*}$ si y sólo si x_0, x_1 están en la misma componente por trayectorias de M.

(d) Si $\phi_i, \psi_i \in M_i^{X_i}$ $(i = 1, 2)$ son tales que $\phi_{1*} = \psi_{1*}$, $\phi_{2*} = \psi_{2*}$ entonces $\phi_* = (\phi_1, \phi_2)_* = \psi_* = (\psi_1, \psi_2)_* : H_K(X_1 \times X_2) \longrightarrow H_K(M_1 \times M_2)$ para $0 \leq K \leq n$ si ϕ_1, ϕ_2 es n-homóloga a ψ_1, ψ_2 respectivamente.

Demostración:

(a) $(f_0\phi_0)_* = f_{0*}\phi_{0*} = f_*\phi_{1*} = (f_1\phi_1)_*$.

(b) sea $z \in Z_q(A \cup B)$, $q > 0$, puesto que $A \cup B$ están mutuamente separados entonces $z \in Z_q(A)$ ó $z \in Z_q(B)$, si $z \in Z_q(A)$ entonces $f_0(z) = f_0/_A(z) \sim f_1/_A(z) = f_1(z)$. Si M es conectable por trayectorias se sigue que $f_{0*} = f_{1*}$ para toda dimensión menor ó igual que n.

(c) $f_0(\sigma) \sim f_1(\sigma)$ si y solo si x_0 están en la misma componente por trayectorias de M.

(d) Esto se sigue de la fórmula de Künneth para el producto.

En (I,5.3) vimos que $H_k(X) \le \dim X + 1$ probaremos que en términos de la dimensión ésta cota es la mejor posible puesto que se probará que $H_1 \text{cat}\, RP^n = n+1$.

(1.10) Sean $V_1, V_2 \subseteq X$.

Los homomorfismos inducidos por las inclusiones:

$$H^p(X, V_1; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i^*} H^p(X; \mathbb{Z}_2)$$
$$H^q(X, V_2; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{j^*} H^q(X; \mathbb{Z}_2)$$
$$H^{p+q}(X, V_1 \cup V_2; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{k^*} H^{p+q}(X; \mathbb{Z}^2)$$

Sea $h^p \in H^p(X, V_1; \mathbb{Z}_2)$ y $h^q \in H^q(X, V_2; \mathbb{Z}_2)$, entonces si $h^p \smile h^q \neq 0$, entonces existe $h^{p+q} \in H^{p+q}(X, V_1 \cup V_2; \mathbb{Z}_2)$ tal que $k^*(h^{p+q}) = i^*(h^p) \smile j(h^q)$

(1.11) Sea M^n una variedad cerrada, sean $\gamma_i \in H^{p_i}(M; \mathbb{Z}_2)$ $1 \le i \le k$, $1 \le p_i \le r$ tal que $\gamma_1 \smile \gamma_2 \smile \dots \smile \gamma_k \neq 0$. Entonces $H_r\text{-cat}(M; \mathbb{Z}_2) \geq k+1$.

Demostración: Supongamos que $H_r \text{cat}(M; \mathbb{Z}_2) \le k$. Sea $M = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, A_i subcomplejo de M y tal que

$$H_p(A_i : \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i_*} H_p(M; \mathbb{Z}_2) \qquad 0 \le p \le r$$

es el homomorfismo trivial. Afirmamos que el homomorfismo

$$H^p(M; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i^*} H^p(A_i; \mathbb{Z}_2) \text{ es trivial para } 0 \le p \le r$$

En efecto: existe un isomorfismo natural

$$H^k(X, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(H_k(X, \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2)$$

de i^* es el homomorfismo trivial y así
$$H^{p}(M,A_i;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^{p}(M;\mathbb{Z}_2)$$ es suprayectivo
para $1\le p \le r$. Entonces para cada γ_i existe $\hat{\gamma}_i$
en $H^{p_i}(M;A_i;\mathbb{Z}_2)$ y aplicando (1.10) inductivamente
podemos encontrar $\gamma \in H^{*}(M, \cup A_i)$ tal que
$$j^*(\gamma) = \gamma_1 \frown \gamma_2 \frown \dots \frown \gamma_k$$
pero $H(M,M)=0$, contradiciendo la hipótesis de
que $\gamma_1 \frown \gamma_2 \frown \dots \frown \gamma_r \neq 0$. Por lo tanto
$$H_r\, cat(M;\mathbb{Z}_2) \geq k+1.$$

(1.12) Corolario $H_1\, cat(\mathbb{R}P^n) = n+1$.
Demostración: Puesto que $H^*(\mathbb{R}P^n)\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[x]/x^{n+1}$.
tomando $\gamma = x$ y por (1.11) obtenemos el resultado
deseado.

IV Las Categorías Fuertes.

Hemos considerado categorías asociadas a cada una de las relaciones de homotopía, homotopía en dimensión n homología y homología en dimensión n (h, h_n, $H = H(\mathcal{U})$, $H_n = H_n(\mathcal{U})$ respectivamente). En éste capítulo escribiremos $\mathcal{R}$ para denotar cualquier relación de éstas.

Estudiaremos a continuación la categoría fuerte (cat^*) que está definida considerando cubiertas del espacio cuyos elementos son $\mathcal{R}$-contraíbles en ellos mismos.

1. Definiciones.

(1.1) Sea $X \subseteq M$, se dirá que X es un conjunto $\mathcal{R}$-categórico fuerte de M si X es retracto de alguna vecindad de M y es $\mathcal{R}$-contraíble en él mismo.

(1.2) Una cubierta de M por conjuntos $\mathcal{R}$-categóricos será llamada cubierta $\mathcal{R}$-categórica y se denotará a la colección de tales cubiertas por $\mathcal{R}C^*(M)$.

(1.3) La $\mathcal{R}$-categoría fuerte denotada $\mathcal{R}\,cat^*(M)$ de M está definida como el cardinal más pequeño $|\sigma|$ cuando σ corre en $\mathcal{R}C^*(M)$:

$$\mathcal{R}\,cat^* M = \inf\{|\sigma| : \sigma \in \mathcal{R}C^*(M)\}.$$

2. Algunas propiedades de $\mathcal{R}\,cat^*$

2.1 Proposición. Si M es un ANR entonces
(a) $X \subseteq M$ es un conjunto h-categórico fuerte si y solo si X es un AR.

(b) $X \subseteq M$ es un conjunto h_n-categórico fuerte si y solo si X es retracto de alguna vecindad de M y sus primeros n grupos de homotopía se anulan.

Demostración. (a) Es una consecuencia inmediata de (II.37)

(b) Si X es un conjunto h_n-categórico fuerte en particular es un retracto de alguna vecindad de M y cualquier función continua de cualquier esfera de dimensión menor ó igual que n es homotópica a una constante.

Inversamente supongamos que $\pi_i(X)=0$ $i=0,\dots n$ y sea f una función continua $f: P \to X$, donde P es un poliedro de dimensión $k \leq n$. Sea $x_0 \in X$ y $H: P \times \{0,1\} \to X$ tal que $H(x,0)=f(x)$ y $H(x,1)=x_0$ para toda $x \in P$. Deseamos encontrar una extensión $\tilde{H}: P \times I \to X$ de H. Para encontrar ésta extensión procedemos de manera estándar, puesto que $\pi_i(X)=0$ esto nos permite extender inductivamente nuestra homotopía a la $i+1$ estructura de $P \times I$.

(2.2) Observación. Dado que los puntos de M constituyen una cubierta de $h_k^C C^*(M)$, la k-categoría fuerte siempre está definida.

(2.3) Proposición. (a) Si M_1 y M_2 son retractos de vecindad de $M_1 \cup M_2$ entonces

$$h_k^C \mathrm{cat}^*(M_1 \cup M_2) \leq h_k^C \mathrm{cat}^*(M_1) + h_k^C \mathrm{cat}^*(M_2)$$

(b) $h_n\text{-}\mathrm{cat}^*(M) \leq h\text{-}\mathrm{cat}(M)$.

(c) $h_k\text{-}\mathrm{cat}^*(M) \leq h_n\text{-}\mathrm{cat}^*(M)$ $\quad k \leq m$

(d) $H_n\text{-}\mathrm{cat}^*(M) \leq h\text{-}\mathrm{cat}^*(M)$

(e) $H_k\text{-}\mathrm{cat}^*(M) \leq H_n\text{-}\mathrm{cat}^*(M)$ $\quad k \leq n$

(f) $H_k\text{-}\mathrm{cat}^*(M) \leq h_k - \mathrm{cat}^* M$

Demostración. (b), (c), (d), (e) y (f) son consecuencia inmediata de las definiciones. Para probar (a) basta observar que si X es un conjunto categórico fuerte de M_1 ó M_2, entonces M_1 y M_2 es retracto de vecindad de $M_1 \cup M_2$, X es retracto de vecindad de $M_1 \cup M_2$. Por lo tanto si σ_1, σ_2 son elementos de $h^*C(M_1)$ y $h^*C(M_2)$ respectivamente entonces $\sigma_1 \cup \sigma_2 \in h C^*(M_1 \cup M_2)$.

Enunciaremos a continuación un teorema sin demostración, para una demostración véase [14]

2.4 Teorema. Si Y es un espacio metrico y $n \in N$, $\dim Y \leq n$ entonces son equivalentes

(a) Y es un AR

(b) $\pi_k(Y)=0$, Y es LC^k $k=0,1,2,\ldots$

(c) $\pi_k(Y)=0$ $k=0,1,\ldots,n$ y Y es LC^n.

Obsérvese que (a)$\Rightarrow$(b) se sigue de (II 3.7) y (b)$\Rightarrow$(c) es inmediata.

2.5 Proposición. Si M es un ANR n-dimensional entonces $h_n\text{-cat}^* M = h\text{-cat}^* M$.

Demostración. Por (2.3) se tiene $h_n\text{-cat}^*(M) \leq h\text{-cat}^*(M)$.
Sea $X \subseteq M$ un conjunto h_n-categórico fuerte, por ser X un retracto de una vecindad de M, tenemos que X es un ANR, por (II 3.13) es un LC^n, por (2.4) Y es un AR, así pues por (2.1) X es h-categórico fuerte de M. y así

$$h\,\text{cat}^*(M) \leq h_n\,\text{cat}^*(M)$$

por lo tanto $h\,\text{cat}^*(M) = h_n\,\text{cat}^*(M)$.

(2.6) Proposición. Si M es un ANR, conectable por trayectorias y A y B son dos conjuntos h^*-categóricos fuerte de M los cuales tienen un punto en común, entonces $A \cup B$ es un conjunto h^*-categórico fuerte. En consecuencia si A', B' son dos conjuntos h^*-categóricos fuertes de M ajenos, entonces $A' \cup B'$ puede ser agrandado a un conjunto h^*-categórico fuerte sumándole un arco α a $A' \cup B'$.

Demostración. Dado que A y B son ANR entonces $A \cup B$ es un ANR esto se sigue de (II.3.9). Para $k = h$ por (2.1) A y B son AR, por (II.3.8) $A \cup B$ es un AR, y así $A \cup B$ es h-categórico fuerte. Para $k = h_n$, $\pi_i(A \cup B) = \pi_i(A \vee B)$ (en éste caso $A \cup B \simeq A \vee B$). y $\pi_i(A \vee B) = \pi_i(A) \oplus \pi_i(B)$. $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$. Claramente $\pi_0(A \cup B) = 0$. Por lo tanto $A \cup B$ es h_n-categórico fuerte. Finalmente $H_i(A \cup B) \cong H_i(A \vee B) \cong H_i(A) \oplus H_i(B)$. y así la proposición queda probada.

(2.7) Corolario. Si M es un ANR y σ es una cubierta minimal de $k^* C(M)$, entonces todo par de conjuntos de σ se intersectan en al menos dos puntos. Para $k = h$: La intersección de cualquier par de conjuntos de σ no es un retracto (ó AR).

Demostración. La primera parte es consecuencia inmediata de (2.6), la segunda se sigue de (II.3.8) y (2.6).

A continuación se dará una proposición que nos relaciona la h-categoría fuerte de un espacio cubriente con la del espacio base.

2.8 Proposición. Si M es un ANR y $p : \tilde{M} \to M$ es un espacio cubriente entonces.

$h\,cat^* \tilde{M} \leq h\,cat^*(M)$ y $h_n\,cat^* \tilde{M} \leq h_n\,cat^* M$.

Demostración. Sea $X \subseteq M$ un conjunto h-categórico fuerte y pongamos $\tilde{X} := p^{-1}(X)$. Sea $\{X_\alpha\}$ el conjunto de componentes por trayectorias de $\tilde{X}$, $p/_{\tilde{X}_\alpha} : \tilde{X}_\alpha \to X$ es una aplicación cubriente. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X_\alpha \arrow[rr, "id"] \arrow[d, "i_0"'] & & \tilde{X}_\alpha \arrow[d, "p/"] \\
X_\alpha \times I \arrow[r, "p/\times id"] \arrow[urr, dashed, "\tilde{H}"] & X \times I \arrow[r, "H"] & \bar{X}
\end{tikzcd}$$

entonces existe una única función continua

$$\tilde{H}: \tilde{X}_\alpha \times I \longrightarrow \tilde{X}_\alpha$$

que hace conmutativo el nuevo diagrama. Además $\tilde{H}(x,0) = 1_{\tilde{X}_\alpha}$ y $\tilde{H}(x,1) \in p^{-1}(*)$, pero $\tilde{X}_\alpha$ es conexo y $p^{-1}(*)$ es discreto, de aquí que $H(x,1) = *$. Por lo tanto $\tilde{X}_\alpha$ es contraíble.

Si $\{X_i\} \in \mathcal{A}C^*(M)$ para cada i consideramos $\tilde{X}_{\alpha_i}$ como arriba entonces $\{\tilde{X}_{\alpha_i}\} \in \mathcal{A}C^*(M)$, por lo tanto

$$\mathcal{A}\,cat^* \tilde{M} \leq \mathcal{A}\cdot cat^* M.$$

Nuestro propósito ahora es establecer un teorema análogo a (I.5.3) para categoría fuerte, es decir $\mathcal{A}\,cat^* M \leq \dim M + 1$.

2.9 Proposición. Todo poliedro conexo de dimensión n puede ser descompuesto en $n+1$ poliedros contraíbles en una cierta subdivisión.

Demostración. Sea P un poliedro conexo de dimensión n. Observemos que si $A_1, \ldots, A_k$ son poliedros contraíbles ajenos dos a dos situados en P existe un poliedro $A \subseteq P$ contraíble que contiene a $\overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} A_i$ considerando una línea "quebrada" que los una.

El caso $n=0$, P contiene un solo y no hay nada qué probar. El caso $n=1$, consideremos una descomposición simplicial de P. Designemos por $a_1, \ldots, a_k$ los simplejos de dimensión cero y por $L_1, \ldots, L_\ell$ sus simplejos de dimensión en esta descomposición. Designemos por $L_i^{(0)}$ un segmento arbitrariamente elegido en el interior de L_i y por $L_i^{(1)}$ y $L^{(2)}$ las cerraduras de las dos componentes del conjunto $L_i - L_i^{(0)}$. Claramente la unión A_j de todos los segmentos $L_i^{(\gamma)}$ ($\gamma = 1, $) que contienen al punto a_j es contraíble, ajenos dos a dos y remplazando la condición

$$\bigcup_{j=1}^{k} A_j = \bigcup_{i=1}^{\ell} (L_i^{(1)} \cup L_i^{(2)})$$

por la observación anterior existen dos poliedros contraíbles A y B tales que:

$$\bigcup_{i=1}^{t} L_i^{(1)} \subseteq A \qquad y \qquad \bigcup_{i=1}^{t} (L_i^{(1)} \cup L_i^{(2)}) \subseteq B.$$

Así $A \cup B = P$, y la proposición queda demostrada para el caso $n=1$.

Supongamos válido el teorema válido para todo poliedro de dimensión menor ó igual que $k+1$ y sea P un poliedro de dimensión $k+1$.

Sean $H_1, \ldots, H_m$ todos los simplejos $k+1$ dimensionales de una descomposición simplicial de P, y sean $I(H_i)$ el interior de H_i. El poliedro

$$P' = P - (\bigcup_{i=1}^{m} I(H_i)) \qquad (1)$$

es un poliedro k-dimensional. De nuestra hipótesis de inducción existen poliedros $A_1, \ldots, A_{k+1}$ tal que

$$P' \subseteq \bigcup_{i=1}^{k+1} A_j \qquad (2)$$

y contraciones $\varphi_1(x,t), \ldots, \varphi_{k+1}(x,t)$ de los poliedros $A_1, \ldots, A_{k+1}$ respectivamente.

Para toda $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,k+1$ designemos por a_i el baricentro del simplejo H_i y por Q_{ij} la unión de todos los segmentos $\overline{xx'}$ donde $x \in H_i \cap A_j$ y donde x' es el punto medio del segmento $\overline{a_i x}$. El conjunto Q_{ij} es un poliedro y por consiguiente los conjuntos

$$B_j := A_j \cup (\bigcup_{i=1}^{m} Q_{ij}) \qquad (3)$$

son poliedros. Vamos a probar que éstos últimos son contraíbles. En efecto: designemos para todo $x \in$ por x^* la proyección de x del centro de a_i en la frontera del simplejo H_i, definamos

$$\psi_j : B_j \times I \longrightarrow B_j$$

$\psi_j(x,t) =$ punto del segmento xx^* la igualdad $\rho(x, \psi_j(x,t)) = 2t\rho(x,x^*)$ para $x \in Q_{ij} - A_i$ y $0 \le t \le 1/2$

$\varphi_j(x,t) = x$ para todo $x \in A_j$ y $0 \le t \le 1/2$
$\varphi_j(x,t) = \varphi_j(\varphi_j(x,1/2), 2t-1)$ $x \in A_j$ $1/2 \le t \le 1$

Esto define una contracción de B_j. Observemos que los poliedros B_j satisfacen de (3)
$$\bigcup_{i=1}^{k+1} B_j = P' \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{k+1} Q_{ij} \right)$$

y de la definición de los conjuntos Q_{ij}, la cerradura B_j' del conjunto $H_i - \bigcup_{j=1}^{k+1} Q_{ij}$ es un simplejo homotópico a B_i contenido en el interior de H_i. En virtud de la observación inicial existe un poliedro A_{k+2} contraíble tal que:
$$\bigcup B_j' \subseteq A_{k+2} \subseteq P$$
De (1) y (2) resulta que:
$$P = \bigcup_{j=1}^{k+1} A_j$$

(2.10) Proposición. Si M es un poliedro convexo n-dimensional entonces
$$\mathcal{L} \operatorname{cat}^* M \le n+1$$
$$\mathcal{L}_n \operatorname{cat}^* M \le n+1$$

(2.11) Proposición. Sea X un ANR, Y el ANR obtenido de X al identificar un par de puntos distintos a_1, a_2 de X y $\pi: X \to Y$ la proyección natural. Si B es un conjunto $\mathcal{L}$-categórico fuerte de Y entonces $\pi^{-1}(B)$ es ó un conjunto $\mathcal{L}$-categórico fuerte que no contiene a a_1 ó a_2, o dicen es una unión de dos conjuntos $\mathcal{L}$-categóricos fuertes A_1, A_2 ajenos con $a_i \in A_i$, de acuerdo como B contenga a $b = \pi(a_1) = \pi(a_2)$. De aquí que $\mathcal{L} \operatorname{cat}^* X \le \mathcal{L} \operatorname{cat}^* Y$.
Demostración: Si B no contiene a b entonces $\pi^{-1}(B)$ es homeomorfo a B, así que $\pi^{-1}(B)$ es un conjunto $\mathcal{L}$-categórico fuerte si B lo es en Y.

Si B contiene a b, dado que B es $\mathcal{L}$-contraíble existe para todo $x \in \pi^{-1}(B)$ un arco de $f(x)$ a b en B, De aquí, existe un arco en $\pi^{-1}(B)$ de x a a_1 o de x a a_2, entonces $\pi^{-1}(B)$ tiene a lo más dos componentes. Pero $\pi^{-1}(B)$ tiene exactamente dos componentes por trayectorias A_1 y A_2 donde A_i contiene a a_i $(i=1,2)$. Ahora π/A_i es un homeomorfismo de A_i a $\pi(A_i)$, así A_i es un conjunto $\mathcal{K}$-contraible. Unicamente resta probar que A_i es retracto de alguna vecindad de Σ. Pero $\pi(A_i)$ es retracto de B, en efecto sea

$$r: B \to A_i \text{ tal que}$$

$$r(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \in \pi(A_i) \\ b & y \in B - \pi(A_i) \end{cases}$$

por lo tanto está bien definida y es continua y es una retracción de B en $f(A_i)$, por lo tanto $f(A_i)$ es un ANR y de aquí A_i es ANR, por lo tanto A_i es un conjunto $\mathcal{K}$-categórico fuerte de Σ.

(2.12) Lema. Si M es un complejo n-dimensional irreducible, (es decir, si para todo n-ciclo en M distinto de cero su soporte es M) y $A \subseteq M$ es cerrado tal que el homomorfismo inducido por la inclusión $i: H_{n-1}(A) \to H_{n-1}(U)$ es cero, U una vecindad abierta de A en M. Entonces $M-U$ está contenido en una componente de $M-A$.

Demostración: Si $M-A$ es conexo no hay nada que probar. Entonces supongamos que $M-A = D_1 \cup D_2$ donde D_1 y D_2 son abiertos ajenos, supongamos también que $U \neq M$ y que

(1) $(M-U) \cap D_1 \neq 0$, $(M-U) \cap D_2 \neq \phi$.

Sea $V \subseteq M$ una vecindad cerrada de A contenida en U la cual es $H_{n-1}(Z_n)$-contraible en U.

Subdividamos M lo finamente de tal manera que todo simplejo de M el cual intersecta a A está contenido en V. Sea μ un n-ciclo (Z_n) de M distinto de cero. Sea Γ la n-cadena la cual es cero en todo simplejo de μ el cual intersecta a $A \cup D_2$ y coincide con μ en todo otro n-simplejo de μ

la frontera de Γ, $\partial(\Gamma)=\gamma$ es un $n-1$ ciclo y el portador $\hat{\gamma}$ de γ está contenido en V, por construcción de V existe una n- cadena Δ en U cuya frontera es γ. De aquí $\Gamma-\Delta$ es un n-ciclo no cero cuyo soporte no es todo M. Esto contradice la irreducibilidad de M.

(2.13) Proposición. Si $X_2 \subseteq X$ cerrado y todo abierto $U \subseteq X$ con $X_2 \subseteq U$, $X-U$ está contenido en una componente de $X-X_2$, entonces $X-X_2$ es conexo.

Demostración: Supongamos que $X-X_2$ no es conexo, entonces $X-X_2 = D_1 \cup D_2$, D_1, D_2 cerrados ajenos y no vacíos. Sea $d_1 \in D_1$ y $d_2 \in D_2$. Sea $U = X-\{d_1,d_2\}$ entonces $X_2 \subseteq U$ y $X-U$ no está en una componente de $X-X_2$, contradicción. Por lo tanto $X-X_2$ es conexo.

(2.13) Teorema. Si X es un complejo n-dimensional $(n \geq 2)$ irreducible y Y es obtenido de X por una identificación de tres puntos distintos a_1, a_2, a_3. Entonces $H_{n-1}\,cat^* Y \geq 3$.

Demostración: Supongamos que $cat^* Y \leq 3$. Puesto que $n \geq 2$, Y no es H_{n-1} contraíble. Supongamos pues entonces que $H_{n-1}\,cat^* Y = 2$. Sea $\{Y_1, Y_2\} \in H_{n-1} C^*(Y)$ cerrada. Supongamos que $b = \pi(a_1)=\pi(a_2)=\pi(a_3)$ está en Y_1, entonces $X_1 = \pi^{-1}(Y_1) = X_1^1 \cup X_1^2 \cup X_1^3$, $a_i \in X_1^i$ ajenos dos a dos y H_{n-1} categóricos fuertes (2.11). Sea $X_2 = f^{-1}(Y_2)$, Afirmación:

$H_K(X_2) \xrightarrow{id} H_K(X_2)$ es trivial $0 < K < n-1$, en efecto si $b \notin Y_2$ se sigue de (2.11); si $b \in Y_2$ entonces $X_2 = X_2^1 \cup X_2^2 \cup X_2^3$ como en (2.11) luego se sigue

$H_K(X_2) \longrightarrow H_K(X_2)$ es trivial para $0 < K \leq n-1$.

De aquí

$H_{n-1}(X_2) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(U)$ es trivial, para toda vecindad abierta de X_2 en X. Por (2.12) $X-U$ está contenido en una componente de $X-X_2$ para toda U vecindad abierta de $\mathfrak{X}_2$ en $\mathfrak{X}$. Por (2.13), $\mathfrak{X}-\mathfrak{X}_2$ es conexo. Como $(\mathfrak{X}-\mathfrak{X}_2)\cap(\mathfrak{X}-\mathfrak{X}_1)=\phi$ entónces $\mathfrak{X}-\mathfrak{X}_2\subseteq\mathfrak{X}_1$, entonces $\mathfrak{X}-\mathfrak{X}_2$ está contenido en una componente de $\mathfrak{X}_1$, digamos que $\mathfrak{X}-\mathfrak{X}_2\subseteq\mathfrak{X}_1'$. Tenemos que

$$(\mathfrak{X}-\mathfrak{X}_2)\cap(\mathfrak{X}_1^2\cup\mathfrak{X}_1^3\cup(\mathfrak{X}-\mathfrak{X}_1))=\phi,$$ por lo tanto $$(\mathfrak{X}_1^2\cup\mathfrak{X}_1^3\cup(\mathfrak{X}-\mathfrak{X}_1))\subseteq\mathfrak{X}_2.$$

pero el conjunto del lado izquierdo de ésta última contención es un conjunto conexo en $\mathfrak{X}_2$ que contiene a a_2 y a_3 esto es una contradicción. Por lo tanto

$$H_{n-1}\,\mathrm{cat}^*\,Y\geq 3.$$

(2.14) Categoría y categoría no necesariamente son iguales

(2.14a) Sea J_n el complejo obtenido de la n-esfera al identificar tres puntos distintos. Por (II.7.3) $\mathrm{cat}\,J_n=2$ y por (IV.2.13) $H_{n-1}(J_n,Z_n)\not\geq 3$. Podemos construir una cubierta $\sigma\in hC^*(J_n)$ tal que $|\sigma|=3$. Por lo Tanto $h\text{-}\mathrm{cat}^*(J_n)=3$ (Fig 1).

(2.15) En contraste con (I.10.2) La categoría fuerte no es un invariante del tipo de homotopía.

De construirán a continuación dos complejos de dimensión 2, J,K que tienen el mismo tipo de homotopía y tal que $h\,\mathrm{cat}^*J=3$ pero $\mathrm{cat}^*K=2$. Sea $J=J_2$ en (2.14), entónces $h\,\mathrm{cat}^*J=3$. Sean a_1,a_2,a_3,a_4 cuatro puntos distintos de S^2 y K el complejo que se obtiene de S^2 al identificar a_1 con a_2, a_3, con a_4 (fig 2). K no es contraíble y claramente es del mismo tipo de homotopía de J. Construiremos a continuación dos cerrados de K que forman una cubierta h-categórica de K (fig 3)

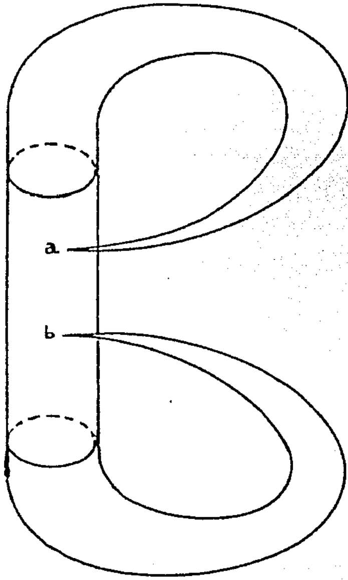

fig. 2

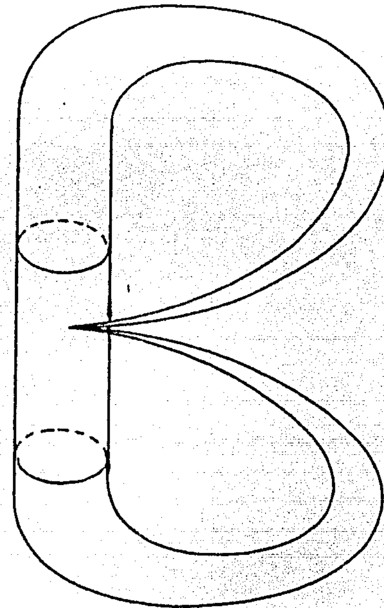

fig. 1

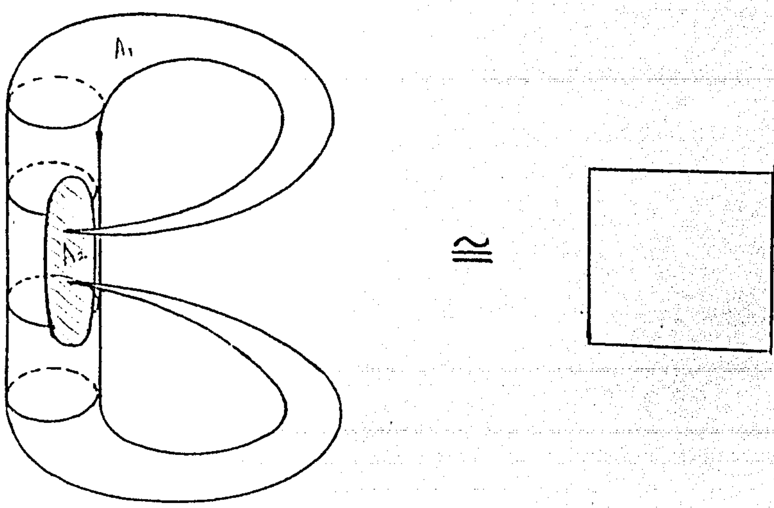

fig. 3

Aunque la categoría fuerte no es un invariante del tipo de homotopía, T. Ganea ha estudiado el mínimo valor de $cat^{*}X$ para todos los espacios del mismo tipo de homotopía de X y mostró que este mínimo es igual a $cat^{*}X$ ó $cat^{*}X+1$ para ANR's.

Referencias :

[1] Aronszajn N et Borsuk K., Sur la some et le product combinatoire des rétractes absolus. Fund. Math 18 (1932) 193-194.

[2] Borsuk K., Theory of Retracts, Warzawa (1967)

[3] Borsuk K., Contribution à la Topologie des polytopes. Fund. Math. 25 (1935) 51-58.

[4] Borsuk K., Sur la décomposition des polyèdres n-dimensionnels en polyèdres contractiles en soi Comp. Math. 3 (1936) 431-434.

[5] Borsuk K., Sur les retracter., Fund. Math. 17 (1934) pp. 150-159.

[6] Berger, Non linearity and Functional Analisis, Academic Press p. 299.

[7] Gray B. Homotopy Theory on introduction to Algebraic Topology, Academic Press (1975)

[8] Hilton P.J. and Wylie S, Homology Theory on introduction to algebraic Topology. Cambridge University Press (1960)

[9] Hurewicz W. and Wallman H., Dimension Theory. Princeton University Press (1948)

[10] I. M. James. On Category, in the sense of Lusternik-Schnirelmann. Topology Vol 17 pp 335-336.

[11] Kuratowski, Topology Vol I y II. Academic Press (1966)

[12] Lefschetz S., On locally connected sets and retracts. Proc. Nat Acad. 24 :: (1938), 392-393.

[13] Seifert H. and Threlfall W., A text of Topology. Academic Press (1980)

[14] Sze-Tsen Hu, theory of Retracts, Warszawa (1967).