Tesis 19

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LIMITACIONES GÖDELIANAS DE LA ARITMETICA FORMALIZADA

T E S I S

q u e p r e s e n t a

MARIA DE LA ASUNCION PREISSER RODRIGUEZ

Para obtener el título de

M A T E M A T I C O

México, D. F. Marzo 1983

UNAM
Universidad Nacional Autónoma de México
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CONTENIDO

Pág.

En el presente trabajo tengo como propósito exponer los teoremas de Gödel y algunas de sus consecuencias de tal manera que pueda ser utilizado como libro de texto para los cursos que, sobre el tema, sean impartidos en la Facultad de Ciencias o en algunas otras instituciones de enseñanza superior.

El orden de exposición es producto de la experiencia que hemos tenido en este campo el Prof. Carlos Torres, el Prof. José Alfredo Amor y yo al impartir varios cursos de Lógica Matemática en la Facultad de Ciencias y otras instituciones. Tómese como un aporte para la enseñanza de la Lógica Matemática en México.

Debo agradecer al Prof. Carlos Torres su dirección así como el haberme facilitado sus apuntes sobre el tema y al Prof. José Alfredo Amor, sus sugerencias.

Capítulo 1
Aritmética Recursiva

§1. PRIMERAS DEFINICIONES.

Los teoremas de Gödel poseen, a mi parecer, la belleza de sumergir parte de la metateoría de un sistema formal en el sistema formal mismo. La clave para esta operación es la aritmética recursiva.

La aritmética recursiva es parte de la teoría elemental de números en donde trabajamos con procedimientos recursivos, demostraciones por inducción y evitamos la cuantificación de variables sobre dominios infinitos. Usamos la lógica elemental e incluimos las propiedades de la igualdad. En esta región de la matemática no es necesario siquiera el método axiomático. Sin embargo, para los fines de este trabajo, será necesario recuperar ciertas características de tal método con el fin de obtener más adelante una formalización de tal aritmética.

El concepto de procedimiento recursivo tiene su origen en la característica de los números naturales de formar una sucesión infinita que es posible generar a partir de un objeto inicial (el cero) a través de la aplicación reiterada de una función simple (la función sucesor) con la cual podemos pasar del último número alcanzado n a su sucesor n'. La seguridad de que de esta manera generamos la sucesión infinita de naturales está basada en la aceptación intuitiva de dos propiedades de la operación sucesor:

a. Esta operación genera una sucesión infinita; es decir, la sucesión jamás regresa a un número previamente alcanzado.
b. Cualquier número natural es alcanzado a través de la aplicación reiterada de esta operación.

A esta manera de generar los números naturales corresponden la inducción matemática y las definiciones recursivas. Utilizando la inducción matemática tratamos una infinidad de casos constructiva y finitamente al ocuparnos sólamente del caso inicial y de la transición del caso general a su sucesor inmediato. De la misma manera, en las definiciones recursivas decimos que un predicado aritmético (o función aritmética) está definido para todo número natural por recursión si lo definimos para el cero e indicamos cómo se define para el sucesor de un número una vez supuesta la definición para el número en cuestión. La analogía entre los dos procedimientos puede ser destacada a través del siguiente cuadro.

	CASO INICIAL	CASO GENERAL	CONCLUSIÓN
INDUCCIÓN	Probamos $A(0)$	Probamos $A(n) \Rightarrow A(n+1)$	$\forall n \in \mathbb{N}\ A(n)$
DEFINICIONES RECURSIVAS	Definimos $f(0)$	Definimos $f(n+1)$ a partir de $f(n)$	$\forall n \in \mathbb{N}\ f(n)$ queda definida

En la aritmética recursiva comenzamos definiendo algunas funciones simples y a partir de ellas definimos funciones más complejas. En general definimos suma y producto como

$$x + 0 = x \qquad\qquad x \cdot 0 = 0$$
$$x + y' = (x+y)' \qquad\qquad x \cdot y' = (x \cdot y) + x$$

y una vez definidas éstas, definimos la exponenciación, la sustracción, el factorial, etc. de modo que queda definida recursivamente una serie de funciones donde cada función utiliza para su definición funciones anteriormente definidas por recursión. Al hacer este proceso debemos destacar varios puntos de modo que queden claros los supuestos de los que partimos y lo que nos es permisible a fin de no salir de los procedimientos recursivos.

Primero: En la definición de la función más simple hay algunos conceptos que damos por entendidos.

Segundo. Al crear una sucesión de funciones debemos hacer explícito qué funciones quedarán sin definir a fin de evitar una regresión infinita o una circularidad.

Tercero. Debemos hacer explícitos los métodos permisibles para generar nuevas funciones y para efectuar demostraciones.

a. Las nociones que damos como intuitivamente entendidas son la noción de número natural, el concepto del sucesor de un número, la regla de substitución de iguales por iguales y el modo recursivo de pensamiento.

Atenderemos por ahora sólo a este último punto haciendo explícito que, para nosotros, definir recursivamente una función significará poseer algunas reglas que nos permitan calcular el valor de una función en un número inicial y una vez obtenido éste podamos obtener el valor de la función para su sucesor y continuar el proceso de modo que una vez calculado el valor de la función en un número n podamos calcular <u>efectivamente</u> (en principio) el valor de la función para n+1.

b. Las funciones que quedarán sin definir, o funciones iniciales, serán:

i. La función sucesor $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donde $Sn = n+1$

ii. La función constante $C_k^n: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ donde $C_k^n(x_1, \ldots x_n) = K$

iii. La función proyección $I_k^n: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ donde $I_k^n(x_1 \ldots x_n) = x_k$

c. Los métodos para generar o definir recursivamente nuevas funciones a partir de funciones recursivas obtenidas previamente serán:

i. Método de Substitución

Si $G(x_1 \ldots x_m)$ es una función m-aria y $H_1(x_1 \ldots x_n), H_2(x_1 \ldots x_n), \ldots$ $\ldots, H_m(x_1 \ldots x_n)$ son funciones n-arias entonces $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ se obtiene por substitución a partir de $G, H_1, \ldots, H_m$ si y sólo si

$$f(x_1 \ldots x_n) = G(H_1(x_1 \ldots x_n), H_2(x_1 \ldots x_n), \ldots, H_m(x_1 \ldots x_n))$$

ii. Recursión

Si $G: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ y $H: \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ son funciones entonces la función $f: \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ se define por recursión a partir de G y H si

a. $f(x_1, \ldots, x_n, 0) = G(x_1 \ldots x_n)$

b. $f(x_1 \ldots x_n, y+1) = H(x_1 \ldots x_n, y, f(x_1 \ldots x_n, y))$

Aquí, "y" es llamada variable de recursión y el resto de las variables, parámetros. Es posible probar que el número de parámetros puede reducirse a uno sin alterar la clase de las funciones definidas por recursión. Estas variables se consideran como constantes a lo largo de la definición.
Notemos que esta definición no es una definición en el sentido usual de la palabra, pues en (b) definimos f para $y+1$ utilizando f para y, es decir, utilizamos la función aplicada a un número para definir la función en su sucesor. Esto podría parecer erróneo pero posee una justificación: el Teorema de Recursión. Este teorema proporciona un método <u>constructivo</u> para crear (en cualquier caso) una definición en el sentido usual a partir de la definición dada con el esquema de recursión. Así, podremos siempre recuperar la definición de una función en el sentido usual.

iii. Operador μ.

Supongamos que $g(x_1 \ldots x_n, y)$ una función $n+1$-aria tal que para cualesquiera $x_1, x_2, \ldots, x_n$ existe por lo menos una y tal que $g(x_1 \ldots x_n, y) = 0$.

Denotamos por $\mu y\,(g(x_1 \ldots x_n, y) = 0)$ la mínima y tal que $g(x_1 \ldots x_n) = 0$.
En general, para cualquier relación $R(x_1 \ldots x_n, y)$ denotamos por $\mu y\, R(x_1 \ldots x_n, y)$ la mínima y tal que $R(x_1 \ldots x_n)$ es verdadera si existe al menos una y para la cual lo último sucede.

Sea $f(x_1 \ldots x_n) = \mu y\,(g(x_1 \ldots x_n, y) = 0)$

Entonces decimos que f se obtiene de g por aplicación del operador μ.

DEFINICIÓN 1.1 Una función aritmética es <u>RECURSIVA</u> <u>PRIMITIVA</u> si y sólo si es definida a partir de funciones iniciales por aplicación de un número finito de substituciones y/o recursiones. O sea, f es recursiva primitiva si y sólo si hay una lista finita de funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ tal que $f = f_n$ y $\forall i\ i = 1 \ldots n$ f_i es función inicial o se obtuvo de anteriores por substitución o recursión.

DEFINICIÓN 1.2. Una función aritmética es <u>RECURSIVA</u> <u>GENERAL</u> o <u>RECURSIVA</u> si y sólo si es definida a partir de funciones iniciales por aplicación de un número finito de recursiones, substituciones o el operador μ. Es decir, f es recursiva si y sólo si hay una lista finita de funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ tal que $f_n = f$ y $\forall i\ i = 1 \ldots n$ f_i es función inicial o se obtuvo de anteriores por substitución, recursión u operador μ.

Mostraremos ahora que algunas funciones son recursivas primitivas.

a. Exponenciación $\quad f(x) = x^n \qquad f(x, 0) = C_1^1(x) = 1$

$$f(x, n+1) = \cdot(x, f(x, n))$$

Notemos que aquí no estamos exhibiendo la lista finita de funciones de la cual x^n resulta. Sólo estamos utilizando el esquema de recursión con la función producto como la función H de la definición (ii).

Ya que la notación anterior es complicada, usaremos la notación común de aquí en adelante, entendiendo que siempre es posible pasar a una notación más formal que posea claramente la forma de los esquemas de substitución y recursión. Así, escribimos:

1. Exponenciación	$f(x)=x^n$	$x^0=1$ $x^{n+1}=x^n\cdot x$
2. Factorial de x	$f(x)=x!$	$0!=1$ $(x+1)!=x!\cdot(x+1)$
3. Predecesor de x	$\delta(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$	$\delta(0)=0$ $\delta(x+1)=x$
4. Diferencia positiva de dos números	$x \dot{-} y=\begin{cases} 0 & \text{si } x<y \\ x-y & \text{si } y\leq x \end{cases}$	$x\dot{-}0=x$ $x\dot{-}y=\delta(x\dot{-}y)$
5. Valor absoluto de la diferencia de dos números	$\lvert x-y\rvert=\begin{cases} x-y & x\geq y \\ y-x & y\geq x \end{cases}$	$\lvert x-y\rvert=(x\dot{-}y)+(y\dot{-}x)$ (substitución)
6. Menor número de a_1 y a_2	$\min(a_1,a_2)=\begin{cases} a_1 & \text{si } a_1<a_2 \\ a_2 & \text{si } a_2\leq a_1 \end{cases}$	$\min(a_1,a_2)=$ $=a_2\dot{-}(a_2\dot{-}a_1)$
7. Signo de un número natural	$Sg(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{si } x>0 \end{cases}$	$Sg(0)=0$ $Sg(x+1)=1$

8. Signo contrario de un número $\qquad \bar{S}g(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ si } x > 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \bar{S}g(0) = 1 \\ \bar{S}g(x+1) = 0 \end{array}$

9. Residuo de dividir y entre x.

$$rm(x,0) = 0$$
$$rm(x,y+1) = s(rm(x,y)) \cdot sg(|x - s(rm(x,y))|)$$

10. Cociente de la división de y entre x

$$qt(x,0) = 0$$
$$qt(x,y+1) = qt(x,y) + \bar{s}_g(|x - s(rm(x,y))|)$$

Vemos que en las definiciones de estas funciones damos por hecho que las funciones iniciales son recursivas primitivas y que si aplicamos substitución o recursión a funciones recursivas, obtenemos una función recursiva. Esto es claro y es lo que haremos en lo sucesivo. Sin embargo, no hemos respetado la definición formal de función recursiva primitiva; no hemos exhibido la lista finita que exige la definición 1.1. Para ver que es posible hacer esto, aunque demasiado tedioso, exhibamos la prueba de que la función exponenciación es recursiva primitiva.

Prueba.

f_1. $s(x) = x+1$ función inicial sucesor

f_2. $I_1^2(x,n) = x$ función inicial proyección

f_3. $I_3^3(x,n,c) = c$ función inicial proyección

f_4. $s(I_3^3(x,n,c)) = sc$ substitución de iguales por iguales

f_5. $\begin{array}{l} f_5(x,0) = I_1^2(x,n) = x \\ f_5(x,n+1) = f_4(x,n,f_5(x,n)) \end{array}$ Definición de la suma por recursión con f_2 y f_4

f_6. $C_0^1(x) = 0$ función inicial constante

f_7. $I_1^3(x,n,c) = x$ función inicial proyección

f_8. $f_5(I_1^3(x,n,c), I_3^3(x,n,c)) = f_5(x,c)$ Subst. usando f_3 y f_7 y f_5

f_9. $f_9(x,0) = C_0^1(x) = 0$ Definición del producto por
$f_9(x,n+1) = f_8(x, f_9(x,n))$ recursión a partir de f_6 y f_8

f_{10}. $C_1^1(x) = 1$ función inicial constante

f_{11}. $f_9(I_1^3(x,n,c), I_3^3(x,n,c)) = f_9(x,c)$ substitución usando f_3, f_7 y f_9

f_{12}. $f_{12}(x,0) = C_1^1(x) = 1$
$f_{12}(x,n+1) = f_{11}(x,n,f_{12}(x,n))$

f_{12} es la definición recursiva de "exponenciación" a partir de f_{10} y f_{11}.

Esta lista es la demostración de que la función exponenciación es recursiva primitiva. No haremos, sin embargo, este proceso en lo que sigue. Confiaremos en nuestra intuición como lo hicimos al definir las funciones 1 - 10.

Notemos que si las funciones utilizadas para definir recursivamente una función son calculables, la función obtenida lo será también. Es fácil ver esto a partir de suponer la calculabilidad de las funciones usadas para determinada función y verificar que las reglas utilizadas preservan la calculabilidad. En especial, dado que nuestras funciones iniciales son calculables y las reglas de substitución y recursión preservan esta propiedad, toda función recursiva primitiva será calculable. Esto vale aún para las funciones recursivas generales. El recíproco conocido como tesis de Church no ha sido demostrado, aunque en gran parte de la literatura se le acepta intuitivamente.

Hasta ahora hemos hablado de funciones aritméticas.

Es posible hablar de relaciones aritméticas. En este caso, en vez de tratar con funciones calculables, hablaremos de relaciones decidibles. Una relación aritmética $R(x_1 \ldots x_n)$ será decidible si es posible decidir efectivamente si es verdadera o falsa para cualquier n-ada $\langle x_1 \ldots x_n \rangle$ de números naturales.

DEFINICIÓN 1.3. Una función $C_R : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ es llamada CARACTERÍSTICA o REPRESENTANTE de la relación $R(x_1, \ldots x_n)$ si y sólo si para cada n-ada $\langle x_1 \ldots x_n \rangle \in \mathbb{N}^n$

$$C_R(x_1 \ldots x_n) = 0 \iff R(x_1 \ldots x_n) \text{ es verdadera.}$$

Si la función C_R es efectivamente calculable entonces la relación R es efectivamente decidible. Si la función no es calculable, la relación no es efectivamente decidible y en ese caso sólo podemos decidir teóricamente la verdad de la relación.

DEFINICIÓN 1.4. Una relación $R(x_1 \ldots x_n)$ es RECURSIVA PRIMITIVA (RECURSIVA) si y sólo si su función característica C_R es recursiva primitiva (recursiva).

Son ejemplos de relaciones recursivas primitivas:

1. $x \leq y$ $\qquad C_{\leq}(x,y) = x \dot{-} y$

2. $x = y$ $\qquad C_{=}(x,y) = |x - y|$

3. $x < y$ $\qquad C_{<}(x,y) = \overline{Sg}(y \dot{-} x)$

4. $x_1 | x_2$ $\qquad C_{|}(x,y) = Sg(rm(x_1, x_2))$

§ 2. TEOREMAS SOBRE FUNCIONES Y RELACIONES RECURSIVAS.

TEOREMA 1.1. Sea $g(y_1 \dots y_k)$ una función recursiva primitiva (recursiva). Sean $x_1 \dots x_n$ variables diferentes y para $1 \le i \le k$ sea z_i alguna de las $x_1 \dots x_n$. Entonces la función $f(x_1 \dots x_n) = g(z_1 \dots z_k)$ es recursiva primitiva (recursiva).

Dem.

Sea $z_i = x_{j_i}$ $(1 \le j_i \le n)$. Así, $z_i = I^n_{j_i}(x_1 \dots x_n)$

Entonces

$$f(x_1 \dots x_n) = g(I^n_{j_1}(x_1 \dots x_n), I^n_{j_2}(x_1 \dots x_n), \dots, I^n_{j_k}(x_1 \dots x_n))$$

f proviene de $g, I^n_{j_1}, \dots, I^n_{j_k}$ por substitución y así f es recursiva primitiva (recursiva) ∎

Este teorema nos permitirá añadir variables "falsas", permutar y repetir variables.

Ejemplos.

a. Si $g(x_1, x_3)$ es recursiva primitiva y $f(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_3)$ entonces f es recursiva primitiva.

Sea $z_1 = x_1$ y $z_2 = x_3$ del teorema 1.1.

b. Si $g(x_1, x_2)$ es recursiva primitiva y $f(x_1, x_2) = g(x_2, x_1)$ entonces f es recursiva primitiva.

Sea $z_1 = x_2$ y $z_2 = x_1$

c. Si $g(x_1, x_2, x_3)$ es recursiva primitiva y $f(x_1, x_2) = g(x_1, x_2, x_1)$ entonces f es recursiva primitiva.

Sea $n = 2$ $z_1 = x_1$ $z_2 = x_2$ $z_3 = x_1$

COROLARIO 1.2. En la regla de recursión, la función G puede no envolver todas las variables $x_1 \dots x_n$ y la función H puede no envolver todas las variables $x_1, \dots x_n$, y, $f(x_1 \dots x_n)$.

La regla de substitución puede extenderse al caso donde cada H_i puede ser una función de algunas pero no todas las variables. ■

DEFINICIÓN 1.5. $\sum_{y<z} f(x_1 \ldots x_n, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } z=0 \\ f(x_1 \ldots x_n, 0) + \ldots + f(x_1 \ldots x_n, z-1) & \text{si } z>0 \end{cases}$

DEFINICIÓN 1.6. $\sum_{y\leq z} f(x_1 \ldots x_n, y) = \sum_{y<z+1} f(x_1 \ldots x_n, y)$

DEFINICIÓN 1.7. $\prod_{y<z} f(x_1 \ldots x_n, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } z=0 \\ f(x_1 \ldots x_n, 0) \cdot \ldots \cdot f(x_1 \ldots x_n, z-1) & \text{si } z>0 \end{cases}$

DEFINICIÓN 1.8. $\prod_{y\leq z} f(x_1 \ldots x_n, y) = \prod_{y<z+1} f(x_1 \ldots x_n, y)$

DEFINICIÓN 1.9. $\sum_{u<y<v} f(x_1 \ldots x_n, y) = f(x_1 \ldots x_n, u+1) + \ldots + f(x_1 \ldots x_n, v-1) =$

$= \sum_{y<(v-u)-1} f(x_1 \ldots x_n, (y+u+1))$

TEOREMA 1.3. Si $f(x_1 \ldots x_n, y)$ es recursiva primitiva (recursiva) entonces todas las sumas y productos acotados son recursivas primitivas (recursivos).

Dem.

a. Sea $g(x_1 \ldots x_n, z) = \sum_{y<z} f(x_1 \ldots x_n, y)$. Entonces

$g(x_1 \ldots x_n, 0) = 0$ (recursión)

$g(x_1 \ldots x_n, z+1) = g(x_1 \ldots x_n, z) + f(x_1 \ldots x_n, z)$

b. Sea $h(x_1 \ldots x_n, z) = \sum_{y\leq z} f(x_1 \ldots x_n, z)$. Entonces

$h(x_1 \ldots x_n, z) = g(x_1 \ldots x_n, z+1)$ (substitución)

c. Si $i(x_1 \ldots x_n, z) = \prod_{y<z} f(x_1 \ldots x_n, y)$ entonces

(recursión)

$$i(x_1 \ldots x_n, 0) = 1$$
$$i(x_1 \ldots x_n, z+1) = i(x_1 \ldots x_n, z) \cdot f(x_1 \ldots x_n, z)$$

d. Si $j(x_1 \ldots x_n, z) = \prod_{y \le z} f(x_1 \ldots x_n, y)$ entonces

$$j(x_1 \ldots x_n, z) = i(x_1 \ldots x_n, z+1) \quad \text{(substitución)}$$

e. Dejamos como ejercicio la prueba de que las sumas y productos doblemente acotados son recursivos primitivos (recursivos). ■

Aplicación

Si $D(x)$ es el número de divisores de x con $x>0$ y $D(0)=1$ entonces $D(x)$ es recursiva primitiva.

$$D(x) = \sum_{y \le x} \overline{S}g(rm(y,x))$$

DEFINICIÓN 1.10.

a. $(y)_{y<z} R(x_1 \ldots x_n, y)$ expresa: "para toda y, si $y<z$ entonces $R(x_1 \ldots x_n, y)$"

b. $(y)_{y \le z} R(x_1 \ldots x_n, y)$ expresa: "para toda y, si $y \le z$ entonces $R(x_1 \ldots x_n, y)$"

c. $(\exists y)_{y<z} R(x_1 \ldots x_n, y)$ expresa: "existe $y<z$ tal que $R(x_1 \ldots x_n, y)$"

d. $(\exists y)_{y \le z} R(x_1 \ldots x_n, y)$ expresa: "existe $y \le z$ tal que $R(x_1 \ldots x_n, y)$"

e. $$\mu y_{y<z} R(x_1 \ldots x_n, y) = \begin{cases} \text{la mínima } y<z \text{ para la cual } R(x_1 \ldots x_n, y) \text{ si tal } y \text{ existe} \\ z \text{ en otro caso} \end{cases}$$

TEOREMA 1.4. Las relaciones obtenidas de relaciones recursivas primitivas (recursivas) por aplicación de los conectivos lógicos, cuantificadores acotados o el operador acotado μ son recursivas primitivas (recursivas).

Dem.

Supongamos que $R_1(x_1 \ldots x_n)$, $R_2(x_1 \ldots x_n)$, $R(x_1 \ldots x_n, y)$ son recursivas primitivas (recursivas).

Las funciones características C_{R_1} y C_{R_2} son recursivas primitivas (recursivas).

a. $\neg R_1(x_1 \ldots x_n)$ es recursiva primitiva (recursiva) pues

$$C_{\neg R_1}(x_1 \ldots x_n) = 1 - C_{R_1}(x_1 \ldots x_n)$$

b. $R_1(x_1 \ldots x_n) \vee R_2(x_1 \ldots x_n)$ es recursiva primitiva (recursiva) pues

$$C_{R_1 \vee R_2}(x_1 \ldots x_n) = C_{R_1}(x_1 \ldots x_n) \cdot C_{R_2}(x_1 \ldots x_n)$$

c. Sea $Q(x_1 \ldots x_n, z) : (\exists y)_{y<z} R(x_1 \ldots x_n, y)$. Así,

$$C_Q(x_1 \ldots x_n, z) = \prod_{y<z} C_R(x_1 \ldots x_n, y)$$

Por tanto $(\exists y)_{y<z} R(x_1 \ldots x_n, y)$ es recursiva primitiva (recursiva)

d. $(\exists y)_{y\leq z} R(x_1 \ldots x_n, y)$ es recursiva primitiva (recursiva) pues se obtiene de $(\exists y)_{y<z} R(x_1 \ldots x_n, y)$ por substitución.

e. $(y)_{y<z} R(x_1 \ldots x_n, y)$ y $(y)_{y\leq z} R(x_1 \ldots x_n, y)$ son recursivas primitivas (recursivas) pues se obtienen de la equivalencia $\neg(\exists y)_{y<z} \neg R(x_1 \ldots x_n, y)$ y $\neg(\exists y)_{y\leq z} \neg R(x_1 \ldots x_n, y)$

f. $\mu y_{y<z}\, R(x_1 \dots x_n, y) = \sum_{y<z} \left(\prod_{u \le y} C_R(x_1 \dots x_n, u) \right)$. Así

$\mu y_{y<z}\, R(x_1 \dots x_n, y)$ es recursiva primitiva (recursiva).

g. Los cuantificadores doblemente acotados pueden definirse por substitución utilizando los cuantificadores acotados. Así, los primeros son recursivos primitivos (recursivos).

■

Ejemplos.

1. Sea $P(x) = P_x$ el x-ésimo primo en orden ascendente con $P_0 = 2$. Entonces $P(x)$ es recursiva primitiva pues

$$P_0 = 2$$
$$P_{x+1} = \mu y_{y \le (P_x)!+1} \left(P_x < y \wedge Pr(y) \right)$$

$u < y$ es recursiva primitiva (página 9)
$Pr(y)$ es recursiva primitiva pues

$$C_{Pr}(x) = Sg\,(D(x) \dot{-} 2) + \overline{S}g(|x \dot{-} 1|) + \overline{S}g\,(|x \dot{-} 0|)$$

Así, por el teorema anterior, $\mu y_{y \le v}(u < y \wedge Pr(y))$ es recursiva primitiva pues es una función $g(u, v)$ recursiva primitiva. Al substituir z y $z!+1$ por u y v respectivamente obtenemos la función recursiva primitiva

$$h(z) = \mu y_{y \le z!+1}\, (z < y \wedge P_r(y))$$

De donde, por el esquema de recursión, tenemos definida la función $h(P_x)$.
La cota $(P_x)!+1$ está dada por la demostración de la infinitud de los números primos debida a Euclides.

2. Cualquier entero positivo posee una única factorización en potencias de primos en orden ascendente.
Así, $x = P_0^{a_0} \cdot P_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot P_k^{a_k}$
Denotemos $(x)_i$ al exponente a_i de esta descomposición.

$$\text{Si } x = 1 \quad (x)_i = 0 \quad \forall i \ i = 1 \ldots$$
$$\text{si } x = 0 \quad \text{elegimos arbitrariamente } (x)_i = 0$$

Entonces $(x)_i$ es recursiva primitiva pues
$$(x)_i = \mu y_{y<x} (P_i^y | x \wedge \neg(P_i^{y+1}|x))$$

3. Sea $lh(x)$ el número de exponentes distintos de cero en la descomposición de x en potencias de primos.
Sea $lh(0)=0$. Así, $lh(x)$ es recursiva primitiva pues sea $R(x,y)$ el predicado recursivo
$$R(x,y) \overset{def}{\Leftrightarrow} Pr(y) \wedge y|x \wedge x \neq 0 \quad \text{entonces}$$
$$lh(x) = \sum_{y \leq x} \overline{S}g(C_R(x,y))$$

4. Si $x = 2^{a_0} \cdot 3^{a_1} \cdot \ldots \cdot P_k^{a_k}$ representa a la sucesión $a_0, a_1, .., a_k$ y
$y = 2^{b_0} \cdot 3^{b_1} \cdot \ldots \cdot P_m^{b_m}$ representa a la sucesión $b_0, b_1, .., b_m$
entonces el número
$$x * y = 2^{a_0} \cdot 3^{a_1} \cdot \ldots \cdot P_k^{a_k} \cdot P_{k+1}^{b_0} \cdot \ldots \cdot P_{k+1+m}^{b_m}$$
representa a la sucesión
$a_0, a_1, \ldots, a_k, b_0, b_1, \ldots, b_m$ obtenida al "concatenar" las dos sucesiones anteriores.
Pero $k+1 = lh(x)$; $m+1 = lh(y)$; $b_j = (y)_j$

Así, $x * y = x \cdot \prod_{j < lh(y)} (P_{lh(x)+j})^{y_j}$ y entonces

la operación $x * y$ es recursiva primitiva.

Dejamos como ejercicio demostrar que esta operación es asociativa cuando $x, y \neq 0$ y no es conmutativa.

5. Sea $f^*(x_1 \dots x_n, 0) = f(x_1 \dots x_n, 0)$
$f^*(x_1 \dots x_n, y+1) = f^*(x_1 \dots x_n, y) * f(x_1 \dots x_n, y+1)$

Entonces $f^*(x_1 \dots x_n, z) = f(x_1 \dots x_n, 0) * \dots * f(x_1 \dots x_n, z)$ es recursiva primitiva (recursiva) si f lo es.

En muchas ocasiones el valor de una función en n está definido no sólo a partir de su predecesor $n-1$, sino a partir del valor de la función en algunos o posiblemente todos los números anteriores a n. Es posible recuperar este procedimiento en la aritmética recursiva a través de la llamada "recursión por curso de valores". Establecemos esto a continuación.

DEFINICIÓN 1.11. Sea $f_{\#}(x_1 \dots x_n, y) = \prod_{u<y} P_u^{f(x_1 \dots x_n, u)}$

Así, f es obtenida de $f_{\#}$ a través de la igualdad
$$f(x_1 \dots x_n, y) = (f_{\#}(x_1 \dots x_n, y+1))_y$$

TEOREMA 1.5. Si $h(x_1 \dots x_n, y, z)$ es recursiva primitiva (recursiva) y $f(x_1 \dots x_n, y) = h(x_1 \dots x_n, y, f_{\#}(x_1 \dots x_n, y))$ entonces f es recursiva primitiva (recursiva).

Dem.

$$f_{\#}(x_1 \dots x_n, 0) = 1$$
$$f_{\#}(x_1 \dots x_n, y+1) = f_{\#}(x_1 \dots x_n, y) \cdot P_y^{f(x_1 \dots x_n, y)}$$
$$= f_{\#}(x_1 \dots x_n, y) \cdot (P_y)^{h(x_1 \dots x_n, y, f_{\#}(x_1 \dots x_n, y))}$$

Así, $f_{\#}$ es recursiva primitiva (recursiva) por el esquema de recursión.
Pero ya que $f(x_1 \dots x_n, y) = (f_{\#}(x_1 \dots x_n, y+1))_y$
f es recursiva primitiva (recursiva).

■

Ilustremos este resultado con un ejemplo.

La serie de Fibonacci se obtiene como sigue:

$f(0) = 1$

$f(1) = 2$

$f(k+2) = f(k) + f(k+1) \qquad k \geq 0$

Entonces el valor de la función en un número n depende del valor de la función en los dos números que le preceden. Definimos entonces a f por recursión por curso de valores de la manera siguiente:

si $f(k) = \overline{sg}(k) + 2 \cdot \overline{sg}(|k \dot{-} 1|) + \left[(f_{\#}(k))_{k \dot{-} 1} + (f_{\#}(k))_{k \dot{-} 2} \right] \cdot sg(k \dot{-} 1)$

entonces la función

$h(y,z) = \overline{sg}(y) + 2 \cdot \overline{sg}(|y \dot{-} 1|) + \left[(z)_{y \dot{-} 1} + (z)_{y \dot{-} 2} \right] \cdot sg(y \dot{-} 1)$

es recursiva primitiva y

$$f(k) = h(k, f_{\#}(k))$$

■

COROLARIO 1.6. Si $H(x_1 \ldots x_n, y, z)$ es una relación recursiva primitiva (recursiva) y $R(x_1 \ldots x_n, y)$ es verdadera si y sólo si

$H(x_1 \ldots x_n, y, (C_R)_{\#}(x_1 \ldots x_n, y))$ es verdadera

entonces R es recursiva primitiva (recursiva).

Dem.

$C_R(x_1 \ldots x_n, y) = C_H(x_1 \ldots x_n, y, (C_R)_{\#}(x_1 \ldots x_n, y))$

Como la función C_H es recursiva primitiva (recursiva), por el teorema 1.5 R es recursiva primitiva (recursiva).

■

Notemos que $R(x_1 \ldots x_n, u)$ es equivalente a $C_R(x_1 \ldots x_n, u) = 0$. Esto se convierte, para valores menores que u, en $((C_R)_{\#}(x_1 \ldots x_n, y))_u = 0$.

Existen, asimismo, funciones definidas por casos. Recuperemos este proceso a través del siguiente teorema.

TEOREMA 1.7. Sea

$$f(x_1\dots x_n) = \begin{cases} g_1(x_1\dots x_n) & \text{si } R_1(x_1\dots x_n) \text{ es verdadera.} \\ g_2(x_1\dots x_n) & \text{si } R_2(x_1\dots x_n) \text{ es verdadera.} \\ \vdots \\ g_k(x_1\dots x_n) & \text{si } R_k(x_1\dots x_n) \text{ es verdadera.} \end{cases}$$

Si las funciones $g_1,\dots,g_k$ y las relaciones $R_1,\dots,R_k$ son recursivas primitivas (recursivas) y para cualesquiera $x_1\dots x_n \in \mathbb{N}$ vale exáctamente una de las relaciones $R_1,\dots,R_k$ entonces f es recursiva primitiva (recursiva).

Dem.

$$f(x_1\dots x_n) = g_1(x_1\dots x_n)\cdot \overline{S}g(C_{R_1}(x_1\dots x_n)) + \dots + g_k(x_1\dots x_n)\cdot \overline{S}g(C_{R_k}(x_1\dots x_n))$$

■

EJERCICIOS.

1. Demostrar que las siguientes funciones aritméticas son recursivas primitivas.
   a. $f(x) = x^2$
   b. $g(x) = 2^x$
   c. $h(x,y) = 2^{x+y}$
   d. $\max(x,y)$: máximo número entre x y y.
   e. $\dfrac{\max(x,y)!}{\min(x,y)! \cdot [\max(x,y) \dot{-} \min(x,y)]!}$

2. Sean $f_1(x) = 3$, $f_2(x,y,z) = rm(y,z)\cdot \min(x, z^2+1)$
   Sea f_3 definida por $f_3(x,0) = f_1(x)$
   $f_3(x,y+1) = f_2(x,y,f_3(x,y))$

Calcular $f_3(5,1)$
$f_3(5,2)$
$f_3(10,1)$

3. Definir recursivamente la función
$[\sqrt{x}] = \max\{n \in \mathbb{N} : n^2 \leq x\}$ y probar que es recursiva primitiva.

Sugerencia.
$[\sqrt{x+1}] = [\sqrt{x}]+1 \iff \exists n \in \mathbb{N}\ \ n^2 = x+1$ ($x+1$ es cuadrado perfecto)
$[\sqrt{x+1}] = [\sqrt{x}]$ si $x+1$ no es cuadrado perfecto.

Si $x+1$ es cuadrado perfecto entonces $([\sqrt{x}]+1)^2 = x+1$ y así $([\sqrt{x}]+1)^2 \dot{-} (x+1) = 0$ de donde $[\sqrt{x}]$ puede definirse recursivamente a partir de la suma y la diferencia positiva.

4. ¿A qué corresponden los valores de las siguientes funciones recursivas primitivas?
a. $f(x) = x \dot{-} [\sqrt{x}]^2$
b. $g(x) = [\sqrt{x}] \dot{-} f(x)$

5. Probar que: $(1 \dot{-} x\cdot y)\cdot x = (1 \dot{-} y)\cdot x$

6. Si $r(x)$ y $q(x)$ son respectivamente el residuo y el cociente de dividir x entre 2; es decir $q(x) = qt(2,x)$
$r(x) = rm(2,x)$

probar que
a. $r(0)=0$ y $r(x+1) = 1 \dot{-} r(x)$
b. $q(0)=0$ y $q(x+1) = q(x) + r(x)$

7. Si $f(x) = 1 \dot{-} (1 \dot{-} x)$ probar que
a. $f(f(x)) = f(x)$
b. $f(1 \dot{-} x) = 1 \dot{-} f(x)$
c. $x \cdot f(x) = x$
d. $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

8. Si $g(x)$, $h(x)$, $i(x,y)$ son recursivas primitivas y f se define como

$$f(0,y) = h(y)$$
$$f(x+1,0) = g(x)$$
$$f(x+1,y+1) = i(x,y)$$

probar que f es recursiva primitiva.

9. a. Probar que $(x+1) \dot{-} y = (x \dot{-} y) + (1 \dot{-} (x \dot{-} y))$

   b. Usar (a) para probar que: para cada número $k \in \mathbb{N}$, las funciones $x \dot{-} k$ y $k \dot{-} x$ pueden definirse a partir de las siguientes funciones utilizando únicamente substitución.

   $x \dot{-} 1$, $1 \dot{-} x$, $x+y$

10. Probar que la operación "concatenación" (ejemplo 4 de la página 15) es asociativa pero no conmutativa.

11. Probar que en el teorema 1.7 no es necesario suponer que R_k es recursiva primitiva (o recursiva).

12. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es par} \\ x+1 & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$

    Probar que f es recursiva primitiva.

13. Sea $i(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \text{ es par} \\ h(x) & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$

    Probar que $i(x) = (1 \dot{-} r(x)) \cdot g(x) + r(x) \cdot h(x)$ es recursiva primitiva si g y h lo son.
    ($r(x)$ es la función definida en el ejercicio 6)

14. Sea $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si el último teorema de Fermat es verdadero} \\ 9 & \text{si el último teorema de Fermat es falso} \end{cases}$

    ¿Es f recursiva primitiva?

15. Sea $\pi(x)$ = el número de primos menores o iguales que n. Probar que $\pi(x)$ es recursiva primitiva.

16. Probar que la unión, intersección y complemento de conjuntos recursivos primitivos (recursivos) son recursivos primitivos (recursivos). Probar que cualquier conjunto finito es recursivo primitivo.
(Un conjunto A de naturales es recursivo primitivo o recursivo si y sólo si su función característica es recursiva primitiva o recursiva ($C_A(x)$))

17. Sea $f(0) = 2$
$f(1) = 4$
$\vdots$
$f(k+2) = 3 \cdot f(k+1) \dot{-} (2 \cdot f(k) + 1)$
Probar que f es recursiva primitiva.

18. Probar que el conjunto de funciones recursivas es numerable.

19. Si $f_1, f_2, \ldots$ es una enumeración de todas las funciones recursivas primitivas (recursivas) de una variable, probar que la función $f_x(4)$ no es recursiva primitiva (recursiva).

Capítulo 2
Formalización de la axiomática de Peano.

§1. PEANO

Desde la antigüedad, el concepto de número natural ha sido definido de diversas formas. Sin embargo, en la mayoría de los casos, las definiciones permanecieron en el campo de la filosofía. Fué a finales del siglo pasado cuando Peano pensó que los números naturales podían ser definidos a través de las propiedades que cumplen. Lo importante de su trabajo radica en que esas propiedades podían ser enunciadas matemáticamente.

Peano creó un sistema axiomático en el que establecía las propiedades más simples de los números naturales. Estas propiedades elementales, que obviamente son verdaderas para los números, deberían generar todas las propiedades conocidas. Con esto, Peano lograría una caracterización matemática que recuperara todos los hechos que acontecen en la aritmética elemental. Peano pensaba, además, que su sistema recuperaría sólo tales hechos. De esta manera apresaría únicamente las propiedades de los naturales; los naturales quedarían caracterizados matemáticamente. Peano pensaba, asimismo, que todo conjunto de objetos que hiciera verdaderos los axiomas tendría que ser similar (isomorfo) a los naturales pues cumpliría todas las propiedades que se derivan de sus principios generadores.

Entonces la tarea de Peano consistía en demostrar dos hechos.

I. Sus axiomas generan todos los teoremas verdaderos en la aritmética (y sólo esos teoremas).

II. Todo conjunto de objetos que cumpla los axiomas debe ser similar (isomorfo) a los naturales.

Desgraciadamente, para Peano, el desarrollo de la Lógica Matemática era aún incipiente. No había aún una clara diferencia entre lenguajes de distintos órdenes y algunas herramientas que hubieran esclarecido los hechos no estaban desarrolladas aún.

Los axiomas de Peano estaban enunciados en un lenguaje intuitivo, el de la Teoría intuitiva de Conjuntos, y las reglas de deducción eran desconocidas. Además, el axioma de inducción estaba formulado en un lenguaje de segundo orden a diferencia del resto de sus axiomas, pero él no podía ver esto. Ya que su sistema utilizaba un lenguaje de segundo orden, resultaba categórico. Sin embargo, dado que tal sistema descansaba en la Teoría de Conjuntos y ésta posee un concepto aún más problemático de definir que el concepto de número natural, el sistema de Peano no lograba su fin.

Fué Hilbert quien retomó el problema de Peano. Utilizando la lógica moderna, enunció los axiomas de Peano en un lenguaje de primer orden (llamemos a estos enunciados AP) y construyó el sistema formal $\overline{AP} = \{\sigma \in \mathcal{L}^{\circ}_{\overline{AP}} : AP \vdash \sigma\}$. Se preguntó si el sistema $\overline{AP}$ era capaz de cumplir con el propósito de Peano. Entonces si $\mathcal{N} = \langle N, s, +, \cdot, 0, 1, 2 \ldots \rangle$ y $Th(\mathcal{N}) = \{\sigma \in \mathcal{L}^{\circ}_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \models \sigma\}$ los dos hechos que Hilbert debería demostrar para resolver la interrogante quedan enunciados de la siguiente manera:

I'. $\overline{AP} = Th(\mathcal{N})$
II'. $\overline{AP}$ es categórica (Todos sus modelos son isomorfos)

NOTA: Recuérdese que la notación $\mathcal{L}^{\circ}_{\overline{AP}}$ o $\mathcal{L}^{\circ}_{\mathcal{N}}$ significa que se toman las fórmulas de $\mathcal{L}_{\overline{AP}}$ o $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$ sin variables libres, es decir, los enunciados de cada lenguaje. Recuérdese también que $\mathcal{L}_{\mathcal{N}} = \mathcal{L}_{\overline{AP}}$.

Con esto, Hilbert lograría una caracterización de los números naturales al mostrar que no hay verdad aritmética que no se derive de $\overline{AP}$ (y viceversa) y que sólo los naturales (salvo isomorfismo) se comportan como los axiomas de $\overline{AP}$ establecen. Los naturales quedarían <u>definidos</u> a través de las propiedades que se postulan en los axiomas de $\overline{AP}$.

Queda ahora a nosotros tratar de responder a las interrogantes planteadas por I' y II'.

Trabajemos por el momento sólo con II'. Debemos entonces analizar las relaciones que puedan existir entre los modelos de $\overline{AP}$ o $Th(\mathcal{N})$. Recordemos así la noción de isomorfismo entre estructuras en la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.1. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ dos estructuras del mismo tipo μ (o con igual tipo de semejanza ρ). Decimos que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son <u>isomorfas</u> ($\mathcal{U} \cong \mathcal{V}$) si y sólo si existe una función $h: |\mathcal{U}| \to |\mathcal{V}|$ biyectiva tal que

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}_\mu \quad y \quad \forall s \in |\mathcal{U}|^\omega \quad \mathcal{U} \models \varphi[s] \Leftrightarrow \mathcal{V} \models \varphi[h(s)]$$

De esta definición vemos que para que exista un isomorfismo entre dos estructuras lo primero que se debe cumplir es que ambas posean dominios con el mismo número de elementos.

Veamos ahora que tanto $Th(\mathcal{N})$ como $\overline{AP}$ poseen modelos no isomorfos a $\mathcal{N}$.

TEOREMA 2.1. (SKOLEM-LÖWENHEIM). Si T es una teoría de primer orden con igualdad que posee un modelo normal infinito entonces para cualquier $\alpha \geq \aleph_0$ T posee un modelo de cardinalidad α.

No demostraremos aquí este teorema.

■

$Th(\mathcal{N})$ posee como modelo a $\mathcal{N}$ y es una teoría de primer orden. Así, $Th(\mathcal{N})$ posee modelos de cualquier cardinalidad. No es posible entonces establecer un isomorfismo entre todos los modelos de $Th(\mathcal{N})$. Ya que lo mismo vale para $\overline{A^TP}$, podemos asegurar que ni $Th(\mathcal{N})$ ni $\overline{A^TP}$ son categóricas.

Sin embargo, nosotros podemos pensar en una versión debilitada de este problema. Podemos preguntarnos si $\overline{A^TP}$ o $Th(\mathcal{N})$ son, al menos, $\aleph_0$-categóricas. En caso afirmativo, podremos saber que todo modelo numerable de $Th(\mathcal{N})$ o de $\overline{A^TP}$ es isomorfo a $\mathcal{N}$. El hecho que muestra que esto no sucede es la construcción de lo que se llama un modelo no-standard para la aritmética. Veamos tal construcción a través del siguiente teorema.

TEOREMA 2.2. Sea $\mathcal{N} = \langle N, s, +, \cdot, 0, 1, 2 \ldots \rangle$ y $Th(\mathcal{N}) = \{\sigma \in \mathcal{L}_N^0 : \mathcal{N} \models \sigma\}$. Entonces existe una estructura $\mathcal{M}_0$ tal que $\mathcal{M}_0 \models Th(\mathcal{N})$ y $\mathcal{M}_0$ no es isomorfo a $\mathcal{N}$. Además, $|\overline{\mathcal{M}_0}| = \aleph_0$.

Dem.

Sea $\mathcal{L}_N^+$ una extensión de $\mathcal{L}_N$ obtenida al añadir a $\mathcal{L}_N$ un único símbolo de constante individual $\bar{c}$.

Sea $\Sigma^+ = Th(\mathcal{N}) \cup \{\sigma_n\}_{n \in N}$ donde $\sigma_n : \neg(\bar{c} \approx \bar{n})$.

Recuérdese que $\bar{n} = \underbrace{sss\ldots s}_{n\text{-veces}}\bar{0}$.

Sea Σ_0 cualquier subconjunto finito de Σ^+. Entonces existe $n_0 \in N$ tal que para cualquier $m \geq n_0$ se tiene que $\neg(\bar{c} \approx \bar{m}) \notin \Sigma_0$. Así, $\langle \mathcal{N}, n_0 \rangle \models \Sigma_0$.

Ya que Σ_0 es cualquier subconjunto finito de Σ^+, por el Teorema de Compacidad se tiene que Σ^+ posee un modelo. Sea $\mathcal{M}$ tal modelo.

Supongamos que $\mathcal{M}_0$, el reducto de $\mathcal{M}$ al lenguaje $\mathcal{L}_N$, es isomorfo a $\mathcal{N}$.

Así, existe un isomorfismo f entre $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{N}$.
Entonces, para algún $n \in \mathbb{N}$ $f(n) = c$ (c es la interpretación de $\bar{c}$ en $\mathcal{M}$).
Pero $\mathcal{M}_0 \models (\neg(x \approx n))[c]$ y $\mathcal{N} \models (x \approx n)[c]$
Así, $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{N}$ no son isomorfos.
Dejamos al lector establecer que la cardinalidad de $|\mathcal{M}_0|$ es $\aleph_0$.

∎

De hecho, con este teorema estamos "añadiendo" un elemento (objeto) último a los naturales. Entonces $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{N}$ no pueden ser isomorfos a pesar de poseer la misma cardinalidad.

Con lo anterior sabemos ahora que no todos los modelos de $\overline{AP}$ o $Th(\mathcal{N})$ son isomorfos. La pregunta II' ha sido respondida negativamente. Sabemos que ni $Th(\mathcal{N})$ ni $\overline{AP}$ pueden caracterizar a los números naturales. De hecho, con ambas teorías estamos diciendo "menos" de lo necesario para caracterizar a ese sistema numérico. Aún cuando $Th(\mathcal{N})$ y $\overline{AP}$ fueran la misma teoría, el propósito de Hilbert se vuelve imposible. Hay estructuras que hacen verdaderos los axiomas y poseen características muy diferentes a los naturales. La formalización no es capaz de apresar a los números que conocemos desde pequeños.

Sin embargo, recordemos que $Th(\mathcal{N})$ posee una importante propiedad para la lógica. $Th(\mathcal{N})$ es completa; es decir, $\forall \sigma \in \mathcal{L}_n^0$, $Th(\mathcal{N}) \vdash \sigma$ o $Th(\mathcal{N}) \vdash \neg\sigma$. En otras palabras, $Th(\mathcal{N})$ <u>decide</u> sus enunciados. Aprenderemos más tarde la importancia de esta propiedad.

Veamos ahora la primera interrogante: ¿$\overline{AP} = Th(\mathcal{N})$? Para responderla, necesitamos conocer ambas teorías, es decir, conocer sus axiomas.

Por ahora trabajaremos con $\bar{A}^{T}P$ y no con $Th(\mathcal{N})$ pues es difícil crear una axiomatización de esta última teoría a más que de escoger un conjunto de axiomas para $Th(\mathcal{N})$ escogeríamos, a modo de prueba, los axiomas de $\bar{A}^{T}P$. Definiremos entonces una teoría formal para $\mathcal{N}$ a fin de relacionarla más tarde con $Th(\mathcal{N})$.

§ 2. DESCRIPCIÓN DE UN SISTEMA FORMAL PARA $\mathcal{N}$. (DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA FORMAL $\bar{A}^{T}P$).

Un sistema formal es, en cierto modo, un conjunto de teoremas generados a partir de reglas precisas y objetivas. Estas reglas pueden ser de dos tipos: reglas de construcción y reglas de deducción.

Las reglas de construcción describen los símbolos primitivos del sistema y cuáles combinaciones de ellos constituyen expresiones correctamente construidas. A la descripción de los constituyentes del sistema le llamamos Morfología del sistema.

Las leyes deductivas indican cuáles proposiciones son tomadas por axiomas y cuáles son las reglas de deducción que permiten derivar proposiciones a partir de los axiomas. A grosso modo podemos decir que las reglas de deducción indican cuáles proposiciones han de considerarse válidas en el sistema. A la descripción de la clase de teoremas del sistema le llamamos Axiomática del sistema.

Toda teoría de primer orden es un caso particular de sistema formal. Así, describamos ahora los símbolos y reglas específicas para la teoría formal $\bar{A}^{T}P$.

A. MORFOLOGÍA DEL SISTEMA $\overline{AP}$ PARA η.

Símbolos primitivos

a. Constantes individuales: $\odot$
b. Variables individuales : $x_1, x_2, x_3 \ldots$ (un número numerable)
c. Símbolos funcionales: $s, \cdot, +$
e. Símbolos lógicos : $\neg, \rightarrow, \approx, (x)$
f. Símbolos de agrupación : paréntesis

Los símbolos y cuantificadores derivados se definen como de costumbre.

Una vez señalados los símbolos primitivos del sistema, debemos señalar qué expresiones son significativas. Con ello el lenguaje $\mathcal{L}_\eta$ quedará especificado.

Los términos de $\mathcal{L}_\eta$ quedan descritos por:
a. $\odot$ es un término
b. Toda variable es un término
c. Si t_1 y t_2 son términos entonces $(st_1), (t_1 + t_2), (t_1 \cdot t_2)$ son términos.

Las fórmulas del lenguaje serán:
a. Si t_1 y t_2 son términos, $(t_1 \approx t_2)$ es una fórmula.
b. Si φ_1 y φ_2 son fórmulas y x una variable entonces $(\neg\varphi_1), (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2), ((x)\varphi_1)$ son fórmulas.

Recuérdense las definiciones de $(\varphi_1 \vee \varphi_2), (\varphi_1 \wedge \varphi_2), (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ y $((\exists x)\varphi(x))$.

Debemos notar que las únicas fórmulas pertenecientes a $\mathcal{L}_\eta$ son las fórmulas que satisfacen la definición propuesta.

pero que son expresiones del lenguaje formal $\mathcal{L}_N$. Las variables sintácticas $\varphi_1, \varphi_2, \ldots x, y, z, \ldots t_1, t_2, \ldots$ son símbolos que añadimos al lenguaje español (en este caso) como auxiliares en la descripción de sistemas formales.

B. AXIOMÁTICA DEL SISTEMA $\overline{ATP}$.

Sabemos que las fórmulas universalmente válidas son teoremas de cualquier sistema formal. Sin embargo, especificaremos la axiomática que elegimos en el presente trabajo para tales fórmulas.

Axiomas Lógicos.

$L_1 = \{ \varphi_1 \to (\varphi_2 \to \varphi_1) : \varphi_1, \varphi_2 \in Form(\mathcal{L}_N) \}$

$L_2 = \{ (\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \varphi_3)) \to ((\varphi_1 \to \varphi_2) \to (\varphi_1 \to \varphi_3)) : \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in Form(\mathcal{L}_N) \}$

$L_3 = \{ (\neg\varphi_1 \to \neg\varphi_2) \to ((\neg\varphi_1 \to \varphi_2) \to \varphi_1) : \varphi_1, \varphi_2 \in Form(\mathcal{L}_N) \}$

$L_4 = \{ (x)\varphi(x) \to \varphi(t) : t$ libre para x en $\varphi(x)$ y $\varphi \in Form(\mathcal{L}_N) \}$

$L_5 = \{ (x)(\varphi_1 \to \varphi_2) \to (\varphi_1 \to (x)\varphi_2) : x$ no es libre en $\varphi_1 \in Form(\mathcal{L}_N) \}$

$L_6 = \{ (x)\ x \approx x : x$ variable de $\mathcal{L}_N \}$

$L_7 = \{ x \approx y \to (\varphi(x,x) \to \varphi(x,y)) : \varphi \in Form(\mathcal{L}_N) \}$

NOTA: Recordemos que la notación $\varphi(x)$ significa que la variable x puede ocurrir libre en φ.
$\varphi(t)$ es la fórmula que se obtiene al substituir t en vez de todas las ocurrencias libres de x en $\varphi(x)$.
$Form(\mathcal{L}_N)$ es el conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_N$.

Reglas de inferencia

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi_1\\ \varphi_1 \to \varphi_2\end{array}}{\varphi_2} \qquad\qquad \frac{\varphi(x)}{(x)\varphi(x)}$$

MODUS PONENS GENERALIZACIÓN

Recordemos ahora el concepto de deducción en el cálculo de predicados (o lógica clásica).

DEFINICIÓN 2.2. Sean φ una fórmula y Γ un conjunto de fórmulas de un lenguaje de primer orden. Una <u>DEDUCCIÓN</u> de φ a partir de Γ (posiblemente vacío) es una sucesión finita de fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ tal que $\varphi = \varphi_n$ y $\forall i$ $i=1\ldots n$

i. φ_i es un axioma lógico
ii. $\varphi_i \in \Gamma$
iii. φ_i es consecuencia inmediata de fórmulas φ_j, φ_k $(j, k < i)$ por M.P.
iv. φ_i resulta de generalizar alguna φ_j $(j < i)$ sobre una variable que no ocurre libre en Γ.

Así, si $\Gamma = \phi$ y $\Gamma \vdash \varphi$, φ es un teorema del cálculo de predicados.

Axiomas propios del sistema $\overline{AP}$

$S_1 = \{ \neg(Sx \approx 0) : x$, es variable de $\mathcal{L}_N \}$

$S_2 = \{ (Sx \approx Sy) \to x \approx y : x, y \in Var(\mathcal{L}_N) \}$

$A_1 = \{ x + 0 \approx x : x \in Var(\mathcal{L}_N) \}$

$A_2 = \{ x + sy \approx s(x+y) : x, y \in Var(\mathcal{L}_n) \}$

$M_1 = \{ x \cdot 0 \approx 0 : x \in Var(\mathcal{L}_n) \}$

$M_2 = \{ x \cdot sy \approx x \cdot y + x : x, y \in Var(\mathcal{L}_n) \}$

$P.I. = \{ \varphi(0) \to ((\varphi(x) \to \varphi(sx)) \to (x)\varphi(x)) : x \in Var(\mathcal{L}_n) \text{ y } \varphi \in Form(\mathcal{L}_n) \}$

DEFINICIÓN 2.3. $AP = S_1 \cup S_2 \cup A_1 \cup A_2 \cup M_1 \cup M_2 \cup PI$. $\quad \overline{AP} = \{ \sigma \in \mathcal{L}_\eta^0 : AP \vdash \sigma \}$

NOTA: Si bien en la mayoría de las axiomáticas para η se considera a la fórmula $x \approx y \to sx \approx sy$ como un axioma propio, resulta un teorema en nuestro sistema pues "$\approx$" es un símbolo lógico que se interpreta como la identidad matemática y "s" un símbolo funcional.

Una vez establecidos los axiomas propios del sistema $\overline{AP}$ tenemos que, ~~bajo~~ la definición 2.2., tenemos:

a. $\varphi \in \mathcal{L}_\eta$ es un teorema de $\overline{AP}$ si $AP \vdash \varphi$
 y en este caso, por comodidad, escribiremos $\vdash_{AP} \varphi$

b. $\varphi \in \mathcal{L}_\eta$ se deduce de $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_\eta$ en $\overline{AP}$ si $AP, \Gamma \vdash \varphi$
 en tal caso escribiremos $\Gamma \vdash_{AP} \varphi$.

§3. TEOREMAS DEMOSTRABLES EN $\overline{AP}$.

Hasta aquí, hemos formalizado los axiomas de Peano en un lenguaje de primer orden. Sin embargo, antes de abordar el problema de determinar si con ello hemos o no axiomatizado a $Th(\eta)$ (es decir, saber si $\forall \varphi \in \mathcal{L}_\eta \vdash_{AP} \varphi \Leftrightarrow \varphi \in Th(\eta)$), vamos a ocuparnos de una tarea más modesta: demostrar que algunos teoremas de la aritmética elemental son derivables en $\overline{AP}$. Haremos este examen del sistema en tres etapas. En la primera, demostraremos algunos teoremas relativos a las operaciones suma, producto y sucesor. En la segunda, mostraremos cómo algunos teoremas y principios acerca del orden son formalizables en $\overline{AP}$. Finalmente, nos ocuparemos de la divisibilidad, números primos y la inducción. Con ello esperamos dejar constancia de la capacidad del sistema $\bar{AP}$ al formalizar la aritmética elemental.

TEOREMA 2.3. Sean x, y, z variables cualesquiera de $\mathcal{S}_n$. Entonces las siguientes fórmulas son teoremas de $\bar{AP}$.

Ia. $0+x \approx x$	Ib. $0 \cdot x \approx 0$
IIa. $sx+y \approx s(x+y)$	IIb. $sx \cdot y \approx (x \cdot y)+y$
IIIa. $x \approx y \to (x+z \approx y+z)$	IIIb. $x \approx y \to (x \cdot z \approx y \cdot z)$
IVa. $x+y \approx y+x$	IVb. $x \cdot y \approx y \cdot x$
Va. $x \approx y \to (z+x \approx z+y)$	Vb. $x \approx y \to (z \cdot x \approx z \cdot y)$
VIa. $(x+y)+z \approx x+(y+z)$	VIb. $(x \cdot y) \cdot z \approx x \cdot (y \cdot z)$

Dem:

Ia. Por inducción (dentro de $\bar{AP}$). Utilizaremos PI.

Sea $\varphi(x): 0+x \approx x$

El axioma de inducción PI para φ es:

$$0+0 \approx 0 \to \big((0+x \approx x \to 0+sx \approx sx) \to (x)(0+x \approx x)\big)$$

Base de la inducción. $\vdash_{AP} 0+0 \approx 0$

1. $x+0 \approx x$ $\quad A_1$
2. $(x)(x+0 \approx x)$ $\quad$ Gen 1
3. $(x)(x+0 \approx x) \to (0+0 \approx 0)$ $\quad L_4$
4. $0+0 \approx 0$ $\quad$ H.P 2,3.

Paso inductivo $\vdash_{AP} \varphi(x) \to \varphi(sx)$

1. $0+x \approx x$ $\quad$ hip
2. $x \approx y \to sx \approx sy$ $\quad L_7$
3. $0+x \approx x \to s(0+x) \approx s(x)$ $\quad$ Rat 2
4. $s(0+x) \approx s(x)$ $\quad$ HP 1,3

5. $S(y+x) \approx y+Sx$ $\quad A_2$
6. $S(0+x) \approx 0+Sx$ $\quad$ L4 y Gen a S
7. $0+Sx \approx Sx$ $\quad$ Trans$_{\approx}$ 4 y 6

Entonces $\quad 0+x \approx x \vdash_{AP} 0+Sx \approx Sx$
De donde aplicando el teorema de la deducción
$\vdash_{AP} 0+x \approx x \rightarrow 0+Sx \approx Sx$

Tomando $\varphi(0)$ y $\varphi(x) \rightarrow \varphi(Sx)$, aplicamos PI y obtenemos $\quad \vdash_{AP} (x)\, 0+x \approx x$.

IIa. En la siguiente prueba, el lector justificará cada paso. Ejercicio 4.a. (pág 49).

$\varphi(y)$ es $\quad Sx+y \approx S(x+y)$

Base de la inducción: $\vdash_{AP} \varphi(0)$

1. $x+0 \approx x$
2. $(x)(x+0 \approx x)$
3. $(x)(x+0 \approx x) \rightarrow (Sx+0 \approx Sx)$
4. $Sx+0 \approx Sx$
5. $Sx+0 \approx Sx \rightarrow \big(S(x+0) \approx Sx \rightarrow Sx+0 \approx S(x+0)\big)$
6. $S(x+0) \approx Sx \rightarrow Sx+0 \approx S(x+0)$
7. $x \approx y \rightarrow Sx \approx Sy$
8. $x+0 \approx x \rightarrow S(x+0) \approx Sx$
9. $S(x+0) \approx Sx$
10. $Sx+0 \approx S(x+0)$

Paso inductivo $\quad \vdash_{AP} \varphi(x) \rightarrow \varphi(Sx)$

1. $Sx+y \approx S(x+y)$
2. $(u+Sv) \approx S(u+v)$
3. $(u)(v)\,(u+Sv \approx S(u+v))$
4. $(u)(v)\big((u+Sv \approx S(u+v)) \rightarrow (Sx+Sy \approx S(Sx+y))\big)$

5. $sx+sy \approx s(sx+y)$
6. $u \approx v \rightarrow su \approx sv$
7. $sx+y \approx s(x+y) \rightarrow s(sx+y) \approx ss(x+y)$
8. $s(sx+y) \approx ss(x+y)$
9. $sx+sy \approx ss(x+y)$
10. $(x+sy) \approx s(x+y)$
11. $x+sy \approx s(x+y) \rightarrow s(x+sy) \approx ss(x+y)$
12. $sx+sy \approx s(x+sy)$

Usando teorema de la deducción y PI tenemos:

$\vdash_{AP} (x)(sx+y) \approx s(x+y)$

IIIa. resulta teorema de $\bar{A}P$ sin usar los axiomas propios del sistema. ¿por qué?.

IVa. Por inducción en $\bar{A}P$. $\varphi(y)$ es $x+y \approx y+x$

Base de la inducción. $\vdash_{AP} \varphi(0)$

1. $x+0 \approx x$ A_1
2. $0+x \approx x$ Ia.
3. $x+0 \approx 0+x$ Fórmula u. válida en 1 y 2 (F.U.V. 1 y 2)

Paso inductivo $\vdash_{AP} \varphi(y) \rightarrow \varphi(sy)$

1. $x+y \approx y+x$ hip
2. $u \approx v \rightarrow su \approx sv$ TEO. F.U.V.
3. $x+y \approx y+x \rightarrow s(x+y) \approx s(y+x)$ Ret 2.
4. $s(x+y) \approx s(y+x)$ M.P. 1 y 3
5. $s(x+y) \approx x+sy$ A_2
6. $s(y+x) \approx sy+x$ IIa
7. $s(x+y) \approx sy+x$ Trans$_=$ 4 y 6
8. $x+sy \approx sy+x$ Trans$_=$ 5 y 7

Dejamos al lector los detalles que faltan.

IIIa. Por inducción sobre z. $\varphi(z)$ es $(x+y)+z \approx x+(y+z)$

Base de la inducción. $\vdash_{AP} \varphi(0)$

1. $u+0 \approx u$ A_1
2. $(x+y)+0 \approx x+y$ Ret 1
3. $u \approx v \rightarrow (x+u \approx x+v)$ Va.
4. $y+0 \approx y \rightarrow x+(y+0) \approx x+y$ Ret 3
5. $y+0 \approx y$ A_1
6. $x+(y+0) \approx x+y$ M.P. 4 y 5
7. $(x+y)+0 \approx x+(y+0)$ $Trans_=$ 2 y 6

Paso inductivo $\vdash_{AP} \varphi(z) \rightarrow \varphi(sz)$

1. $(x+y)+z \approx x+(y+z)$ hip
2. $u \approx v \rightarrow su \approx sv$ F.U.V.
3. $(x+y)+z \approx x+(y+z) \rightarrow s[(x+y)+z] \approx s[x+(y+z)]$ Ret 2
4. $s[(x+y)+z] \approx s[x+(y+z)]$ M.P. 1 y 3.
5. $s(u+v) \approx u+sv$ A_2
6. $s[(x+y)+z] \approx (x+y)+sz$ Ret 5
7. $(x+y)+sz \approx s[x+(y+z)]$ $Trans_=$ 4 y 6
8. $s[x+(y+z)] \approx x+s(y+z)$ Ret 5
9. $(x+y)+sz \approx x+s(y+z)$ $Trans_=$ 7 y 8
10. $u \approx v \rightarrow (x+u \approx x+v)$ Va
11. $[s(y+z) \approx y+sz] \rightarrow [x+s(y+z) \approx x+(y+sz)]$ Ret 10
12. $s(y+z) \approx y+sz$ A_2
13. $x+s(y+z) \approx x+(y+sz)$ M.P. 11 y 12
14. $(x+y)+sz \approx x+(y+sz)$ $Trans_=$ 9 y 13

El lector cubrirá los detalles que faltan.

Dejamos como ejercicio al lector los incisos Va así como Ib – IIIb. (Ejercicio 4.b. pág 49)

■

Nos ocuparemos ahora de formalizar en $\overline{AP}$ algunos teoremas relativos al orden.

DEFINICIÓN 2.4. Sean r y t dos términos cualesquiera de $\mathcal{L}_N$ y x una variable que no ocurre libre en ambos términos. Entonces las expresiones de la izquierda son abreviaturas de las fórmulas que aparecen a la derecha de la siguiente lista.

$r \leq t$	$\exists x (r + x \approx t)$
$r < t$	$\exists x (\neg x \approx 0 \wedge r + x \approx t)$
$r \mid t$	$\exists x (r \cdot x \approx t)$
$r > t$	$t < r$
$r \geq t$	$t \leq r$

Nótese que los símbolos '<', '≤', '>', '≥', '|' no pertenecen al lenguaje formal. Son abreviaturas en el metalenguaje.

Con esta notación podemos escribir la propiedad de ser un número primo de la siguiente manera:

$$P_r(x) \overset{\text{def}}{=} (S0 < x) \wedge (y)(y \mid x \rightarrow y \approx S0 \vee y \approx x)$$

y el teorema de Euclides que afirma la existencia de una infinidad de números primos queda expresado por

$$(x)\,(P_r(x) \rightarrow \exists y\,(P_r(y) \wedge x < y)$$

El siguiente teorema establece las propiedades más importantes de la relación de orden: '<'.

TEOREMA 2.4. Para cualesquiera variables x, y, z de $\mathcal{L}_N$, son teoremas de $\overline{AP}$ los siguientes.

a. $x < y \rightarrow (y < z \rightarrow x < z)$

b. $x \leq y \leftrightarrow (x \approx y \vee x < y)$

c. $(x \leq y) \rightarrow x \leq Sy$

d. $(x < y) \vee (x \approx y) \vee (y < x)$

e. $y \leq z \rightarrow x + y \leq x + z$

f. $\neg x \approx 0 \rightarrow (y < z \rightarrow x \cdot y < x \cdot z)$

g. $\neg(x < x)$

h. $x < y \rightarrow \neg(y < x)$

i. $x < y \rightarrow x+z < y+z$

j. $x \leq x$

k. $0 \leq x$

l. $x \leq sx$

m. $x \leq y \rightarrow (y \leq z \rightarrow x \leq z)$

n. $x \leq y \rightarrow (y < z \rightarrow x < z)$

ñ. $0 \leq sx$

o. $x < sx$

p. $x \leq y \vee sy \leq x$

q. $x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x \approx y$

r. $x < y \leftrightarrow sx \leq y$

s. $x \leq y \leftrightarrow x < sy$

t. $x \leq sy \leftrightarrow x \leq y \vee x \approx sy$

u. $\neg(x < 0)$

v. $x < sy \leftrightarrow x \leq y$

w. $x \leq y \vee y < x$

x. $x \leq y \vee y \leq x$

y. $x+y \geq x$

z. $\neg(x \approx 0) \rightarrow y < x+y$

α. $x \leq 0 \rightarrow x \approx 0$

β. $x < \bar{1} \rightarrow x \approx 0$

γ. $x < y \leftrightarrow x \leq y \wedge \neg(x \approx y)$

δ. $\neg(x \approx 0) \rightarrow y \leq x \cdot y$

ε. $\neg(x \approx 0) \leftrightarrow 0 < x$

ζ. $\neg(x \approx 0) \rightarrow (\neg(y \approx 0) \rightarrow x \cdot y > 0)$

η. $\neg(x \approx 0) \rightarrow (\bar{1} < y \rightarrow x \cdot y > x)$

θ. $\neg(x \approx 0) \rightarrow (y < z \leftrightarrow x \cdot y < x \cdot z)$

λ. $\neg(x \approx 0) \rightarrow (y \leq z \leftrightarrow x \cdot y \leq x \cdot z)$

μ. $x < y \rightarrow \neg(y \leq x)$

ξ. $x \geq y \wedge y > z \rightarrow x > z$

π. $x > y \wedge y \geq z \rightarrow x > z$

σ. $x+z \approx y \wedge \neg(x+u \approx y) \rightarrow \neg(z \approx u)$

τ. $0 < \bar{1},\ \bar{1} < \bar{2},\ \bar{2} < \bar{3}, \ldots$

NOTACIÓN. Dado que la cifra $\underbrace{ss\ldots s}_{k\ \text{veces}}0$ representa en el lenguaje formal al número k, usamos el símbolo $\bar{k}$ en el metalenguaje para referirnos a la expresión $\underbrace{ss\ldots s}_{k\ \text{veces}}0$.

Ejemplo:

aritmética: 3 sistema formal: sss0

metalenguaje: $\bar{3}$

Demostración.

a. $\vdash_{AP} x < y \rightarrow (y < z \rightarrow x < z)$

1.	$\exists u(\neg(u \approx 0) \wedge x+u \approx y)$	hipótesis $x < y$
2.	$\exists v(\neg(v \approx 0) \wedge y+v \approx z)$	hipótesis $y < z$
3.	$\neg(u \approx 0) \wedge x+u = y$	Regla E a 1
4.	$\neg(v \approx 0) \wedge y+v \approx z$	Regla E a 2

5. $x+u \approx y$ Simplificación a 3
6. $y+v \approx z$ " a 4
7. $x+u \approx y \to (y+v \approx z \to (x+u)+v \approx z)$ Teorema (L_7)
8. $y+v \approx z \to (x+u)+v \approx z$ M.P 5 y 7
9. $(x+u)+v \approx z$ M.P. 6 y 8
10. $(x+u)+v \approx x+(u+v)$ Teorema VIa.
11. $x+(u+v) \approx z$ Trans. 9 y 10
12. $\neg(u \approx 0)$ Simpl. a 3
13. $\neg(u \approx 0) \to (\neg(u \approx 0) \vee \neg(v \approx 0))$ Tautología
14. $\neg(u \approx 0) \vee \neg(v \approx 0)$ M.P. 12 y 13
15. $u+v \approx 0 \to u \approx 0 \wedge v \approx 0$ Teorema (Ejercicio 5.b) pág 49
16. $\neg(u \approx 0 \wedge v \approx 0) \to \neg(u+v \approx 0)$ Tautología a 15.
17. $\neg(u+v \approx 0)$ M.P. 14 y 16, Tautología
18. $\neg(u+v \approx 0) \wedge x+(u+v) \approx z$ Tautología 11 y 17
19. $\exists w\,(\neg(w \approx 0) \wedge x+w \approx z)$ Regla $\exists$ a 18
20. $x < z$ Abreviatura de 19.

NOTA: Esta demostración nos muestra una doble aplicación de la Regla E (Elección). Conviene que el lector examine con detenimiento el uso que se le dió a la misma y se cerciore de que lo concluido es correcto.

b. $\vdash_{AP} x \leq y \leftrightarrow x \approx y \vee x < y$

i. $\vdash_{AP} x \leq y \to x \approx y \vee x < y$ ...(*)

1. $x \leq y$ hipótesis
2. $\neg(x < y)$ hip.
3. $\exists z\,(x+z \approx y)$ de 1
4. $x+z \approx y$ Regla E a 3
5. $\neg \exists u\,(\neg(u \approx 0) \wedge x+u \approx y)$ de 2
6. $(u)\,(u \approx 0 \vee \neg(x+u \approx y))$ De 5.
7. $z \approx 0 \vee \neg(x+z \approx y)$ L_4 a 6
8. $x+z \approx y \to z \approx 0$ Tautología 7
9. $z \approx 0$ M.P. 4 y 8

10. $z \approx \odot \to (x+z \approx y \to x+\odot \approx y)$ L_7
11. $x+z \approx y \to x+\odot \approx y$ M.P. 9 y 10
12. $x+\odot \approx y$ M.P. 4 y 11
13. $x+\odot \approx x$ A_1
14. $x \approx y$ F.U.V. 12 y 13

Así $x \leq y,\ \neg(x<y) \vdash_{AP} x \approx y$, de donde $\vdash_{AP}$ (*)

ii. $\vdash_{AP} x \approx y \vee x<y \to x \leq y$

1. $x \approx y$ hip
2. $x \approx x+\odot$ A_1
3. $x+\odot \approx y$ Trans$_=$ 1 y 2
4. $\exists z(x+z \approx y)$ Regla $\exists$ a 3
5. $x \leq y$ abreviatura de 4

Así $\vdash_{AP} x \approx y \to x \leq y \ldots (\bullet)$

1. $x<y$ hip
2. $\exists z(\neg(z \approx \odot) \wedge x+z \approx y)$ de 1
3. $\neg(z \approx \odot) \wedge (x+z \approx y)$ Regla E a 3
4. $x+z \approx y$ Tautología, 3
5. $\exists z(x+z \approx y)$ Regla $\exists$, 4
6. $x \leq y$ abreviatura de 5

Así $\vdash_{AP} x<y \to x \leq y \ldots (\bullet\bullet)$

1. $x \approx y \to x \leq y$ TEOREMA $(\bullet)$
2. $x<y \to x \leq y$ Teorema $(\bullet\bullet)$
3. $x \approx y \vee x<y \to x \leq y$ Tautología 1 y 2.

Así, de (i) y (ii) obtenemos $\vdash_{AP} x \leq y \leftrightarrow (x \approx y \vee x<y)$

c. $\vdash_{AP} x \leq y \rightarrow x \leq sy$

1. $x \leq y$ hipótesis
2. $\exists z(x+z \approx y)$ de 1
3. $x+z \approx y$ Regla E a 2
4. $x+z \approx y \rightarrow s(x+z) \approx sy$ F.U.V. y Ret.
5. $s(x+z) \approx sy$ M.P. 3 y 4
6. $x+sz \approx s(x+z)$ A_2
7. $x+sz \approx sy$ $Trans_{=}$ 5 y 6
8. $\exists z(x+z \approx sy)$ Regla $\exists$ a 7
9. $x \leq sy$ abreviatura de 8.

d. $\vdash_{AP} x<y \vee y \approx x \vee y<x$. Por inducción sobre x.

Base de la inducción $\vdash_{AP} \varphi(0)$

1. $y \approx y+0$ A_1
2. $(z)\,\neg(z+0 \approx y) \rightarrow \neg(y+0 \approx y)$ L_4
3. $y+0 \approx y \rightarrow \neg(z)\neg(z+0 \approx y)$ Tautología 2
4. $\neg(z)\neg(z+0 \approx y)$ M.P. 1,3.
5. $\exists z(z+0 \approx y)$ de 4
6. $0 \leq y$ abreviatura de 5
7. $0 \leq y \rightarrow (0 \approx y \vee 0<y)$ inciso (c)
8. $0 \approx y \vee 0<y$ M.P. 6, 7.
9. $0 \approx y \vee 0<y \rightarrow (0 \approx y \vee 0<y \vee y<0)$ Tautología 8
10. $0 \approx y \vee 0<y \vee y<0$ M.P. 8 y 9.

Paso inductivo. $\vdash_{AP} \varphi(x) \rightarrow \varphi(sx)$

1. $x<y \vee x \approx y \vee y<x$ hip
2. $x>y \vee x \approx y \rightarrow x \geq y$ inciso (b)
3. $x \geq y \vee y>x$ Teorema de Reemplazo 1,2.
4. $\neg(sx>y)$ hip
5. $\neg(sx \approx y)$ hip
6. $\neg(sx>y) \wedge \neg(sx \approx y)$ Tautología 4 y 5
7. $\neg(sx>y \vee sx \approx y)$ Tautología 6

8. $(sx>y \vee sx\approx y) \leftrightarrow (y\leq sx)$ inciso (b) y Ret
9. $\neg(y\leq sx)$ Teorema de Reemplazo 7 y 8
10. $y\leq x \rightarrow y\leq sx$ inciso (c)
11. $\neg(y\leq sx) \rightarrow \neg(y\leq x)$ Tautología, 10
12. $\neg(y\leq x)$ M.P. 9, 11
13. $\neg(y\leq x) \rightarrow x<y$ abreviatura de 3
14. $x<y$ M.P. 12, 13
15. $\exists v(\neg(v\approx 0) \wedge x+v\approx y)$ de 14
16. $\neg(v\approx 0) \wedge x+v\approx y$ Regla E a 15
17. $\neg(v\approx 0)$ Tautología, 16
18. $\neg(v\approx 0) \rightarrow \exists w(v\approx sw)$ Teorema (Ejercicio 6.b) (pág 50)
19. $\exists w(v\approx sw)$ M.P. 17, 18
20. $v\approx sw$ Regla E a 19
21. $x+v\approx y$ Tautología, 16
22. $x+sw\approx y$ F.U.V. 20 y 21
23. $x+sw\approx s(x+w)$ A_2
24. $s(x+w)\approx y$ $Trans_=$ 22 y 23
25. $s(x+w)\approx sx+w$ Teorema VIIa
26. $sx+w\approx y$ $Trans_=$ 24 y 25
27. $\exists w(sx+w\approx y)$ Regla $\exists$ a 26
28. $sx\leq y$ de 27
29. $sx\leq y \rightarrow (sx<y \vee sx\approx y)$ inciso (b) y Ret
30. $sx<y \vee sx\approx y$ M.P. 28, 29.

Así $\varphi(x), \neg(y<sx), \neg(y\approx sx) \vdash_{AP} sx\approx y \vee sx<y$

$\therefore$ $\varphi(x) \vdash_{AP} \neg(y<sx) \rightarrow [\neg(y\approx sx) \rightarrow sx\approx y \vee sx<y]$

y $\varphi(x) \vdash_{AP} \neg(y<sx) \rightarrow (y\approx sx \vee sx\approx y \vee sx<y)$

$\therefore$ $\varphi(x) \vdash_{AP} y<sx \vee (y\approx sx \vee sx\approx y \vee sx<y)$

de donde finalmente obtenemos:

$$\varphi(x) \vdash_{AP} y<sx \vee y\approx sx \vee sx<y$$

es decir

$$\varphi(x) \vdash_{AP} \varphi(sx)$$

y aplicando teorema de la deducción y PI obtenemos $\vdash_{AP} x<y \vee y\approx x \vee y<x$

Dejamos como ejercicio al lector la demostración del resto de los incisos de este teorema.
Ejercicio 8 (pág 50). ■

TEOREMA 2.5. Sea K cualquier número natural y sean φ_1 y φ_2 fórmulas de $\mathcal{L}_N$. Son teoremas de $\overline{AP}$.

a. $(x \approx \overline{0} \vee x \approx \overline{1} \vee \ldots \vee x \approx \overline{k}) \leftrightarrow x \leq \overline{k}$

b. $\varphi_1(\overline{0}) \wedge \varphi_1(\overline{1}) \wedge \ldots \wedge \varphi_1(\overline{k}) \leftrightarrow (x)(x \leq \overline{k} \to \varphi_1(x))$

c. $(x \approx \overline{0} \vee x \approx \overline{1} \vee \ldots \vee x \approx \overline{k-1}) \leftrightarrow x < \overline{k}$

d. $\varphi_1(\overline{0}) \wedge \varphi_1(\overline{1}) \wedge \ldots \wedge \varphi_1(\overline{k-1}) \leftrightarrow (x)(x < \overline{k} \to \varphi_1(x))$ $(k \geq 1)$

e. $[(x)(x \leq y \to \varphi_1(x)) \wedge (x)(x > y \to \varphi_2(x))] \to (x)(\varphi_1(x) \vee \varphi_2(x))$

Dem:

Ya que estamos ante esquemas de fórmulas y no ante fórmulas de $\mathcal{L}_N$ (pues $\overline{k}$ no pertenece a dicho lenguaje), hacemos la demostración por inducción en el metalenguaje y no en $\overline{AP}$. La inducción es sobre K.

a. Demostraremos sólo un sentido de esta bicondicional.

Base de la inducción: $\vdash_{AP} x \approx \overline{0} \to x \leq \overline{0}$

1. $x \approx \overline{0}$ Hip
2. $x + \overline{0} \approx x$ A_1
3. $x + \overline{0} \approx \overline{0}$ Trans= 1,2.
4. $\exists y(x + y \approx \overline{0})$ Regla ∃ a 3
5. $x \leq \overline{0}$ de 4.

Hipótesis inductiva: $\vdash_{AP} (x \approx \overline{0} \vee x \approx \overline{1} \vee \ldots \vee x \approx \overline{k}) \to x \leq \overline{k}$

Por demostrar: $\vdash_{AP} (x \approx \overline{0} \vee x \approx \overline{1} \vee \ldots \vee x \approx \overline{k} \vee x \approx \overline{k+1}) \to x \leq \overline{k+1}$

NOTA: Escribiremos en adelante $S\overline{k}$ en vez de $\overline{k+1}$ pues si c es el término correspondiente a K, Sc corresponderá a K+1.

1. $(x \approx \overline{0} \vee x \approx \overline{1} \vee \ldots \vee x \approx \overline{k}) \to x \leq \overline{k}$ (hipótesis.
2. $[(x \approx \overline{0} \vee x \approx \overline{1} \vee \ldots \vee x \approx \overline{k}) \vee x \approx S\overline{k}] \to (x \leq \overline{k} \vee x \approx S\overline{k})$ taut. 1.
3. $(x \leq \overline{k} \vee x \approx S\overline{k}) \to (x \leq S\overline{k})$ Teorema 2.4.(t)
4. $(x \approx \overline{0} \vee x \approx \overline{1} \vee \ldots \vee x \approx S\overline{k}) \to (x \leq S\overline{k})$ Tautología 2 y 3.

b. Nuevamente haremos la demostración de sólo un sentido de la bicondicional.

Base de la inducción: $\vdash_{AP} \varphi_1(0) \to (x)(x \leq 0 \to \varphi_1(x))$

1. $\varphi_1(0)$ Hip
2. $x \leq 0$ Hip
3. $x \leq 0 \to x \approx 0$ Teorema 2.4.(d)
4. $x \approx 0$ M.P. 2,3
5. $0 \approx x$ F.U.V. 4.
6. $0 \approx x \to (\varphi_1(0) \to \varphi_1(x))$ L_7
7. $\varphi_1(0) \to \varphi_1(x)$ M.P. 5,6
8. $\varphi_1(x)$ M.P. 1,7.

Así, por teorema de la deducción y generalización $\varphi_1(0) \vdash_{AP} (x)(x \leq 0 \to \varphi_1(x))$ y entonces

$$\vdash_{AP} \varphi_1(0) \to (x)(x \leq 0 \to \varphi_1(x))$$

Hipótesis inductiva: $\vdash_{AP} \varphi_1(0) \wedge \ldots \wedge \varphi_1(\bar{k}) \to (x)(x \leq \bar{k} \to \varphi_1(x))$

Por demostrar: $\vdash_{AP} \varphi_1(0) \wedge \ldots \wedge \varphi_1(\bar{k}) \wedge \varphi_1(s\bar{k}) \to (x)(x \leq s\bar{k} \to \varphi_1(x))$

1. $\varphi_1(0) \wedge \ldots \wedge \varphi_1(\bar{k}) \to (x)(x \leq \bar{k} \to \varphi_1(x))$ Hip
2. $\varphi_1(0) \wedge \ldots \wedge \varphi_1(s\bar{k})$ Hip
3. $\varphi_1(0) \wedge \ldots \wedge \varphi_1(\bar{k})$ Tautología, 2
4. $(x)(x \leq \bar{k} \to \varphi_1(x))$ M.P. 1,3.
5. $(x)(x \leq \bar{k} \to \varphi_1(x)) \to (x \leq \bar{k} \to \varphi_1(x))$ L_4
6. $x \leq \bar{k} \to \varphi_1(x)$ M.P. 4,5.
7. $x \leq s\bar{k} \to (x \leq \bar{k} \vee x \approx s\bar{k})$ Teorema 2.4.(t)
8. $s\bar{k} \approx x \to (\varphi_1(s\bar{k}) \to \varphi_1(x))$ L_7
9. $\varphi_1(s\bar{k}) \to (s\bar{k} \approx x \to \varphi_1(x))$ Tautología, 8
10. $\varphi_1(s\bar{k})$ Tautología a 2
11. $s\bar{k} \approx x \to \varphi_1(x)$ M.P. 9,10.
12. $(x \leq \bar{k} \vee x \approx \bar{k}) \to \varphi_1(x)$ Tautología 6 y 11
13. $x \leq s\bar{k} \to (x \leq \bar{k} \vee x \approx s\bar{k})$ Teorema 2.4.(t)
14. $x \leq s\bar{k} \to \varphi_1(x)$ Tautología 12 y 13
15. $(x)(x \leq s\bar{k} \to \varphi_1(x))$ G.m, 14.

De donde utilizando el teorema de la deducción obtenemos el resultado deseado.

Dejamos como ejercicio la demostración de los incisos (c), (d), (e) así como la demostración de la bicondicional de los incisos (a) y (b). Ejercicio 10 (pág 50). ■

§ 4. DIVISIVILIDAD, NÚMEROS PRIMOS E INDUCCIÓN.

Con la notación introducida en la sección anterior podemos definir en $\mathcal{L}_N$ diversas propiedades y relaciones que se estudian en la teoría elemental de los números. Por otra parte, hemos visto en secciones precedentes que algunas demostraciones por inducción son formalizables en $\overline{AP}$. Ahora veremos que algunas consecuencias del principio de inducción son derivables en este sistema.

1. Principio del buen orden: si $M \subseteq \mathbb{N}$ es un conjunto no vacío entonces M posee primer elemento (respecto al orden en $\mathbb{N}$).

   Como sabemos, en $\mathcal{L}_N$ no podemos referirnos a los subconjuntos de $\mathbb{N}$, pero podemos definir algunos de ellos. Así, podemos expresar el principio del buen orden para cada conjunto de $\mathbb{N}$ definible en $\mathcal{L}_N$ de la manera siguiente.
   $$\exists x\, \varphi(x) \to (\exists y\, \varphi(y) \wedge (x)(\varphi(x) \to y \leq x)) \qquad \varphi \in Form(\mathcal{L}_N)$$

2. Principio de inducción completa: dada una propiedad P tal que, para toda $n \in \mathbb{N}$, si P vale para todos los números menores que n, entonces P vale para n. Entonces todo número natural posee la propiedad P. Esto se expresa como
   $$(x)((y)(y < x \to \varphi(y)) \to \varphi(x)) \to (x)\varphi(x) \qquad \varphi \in Form(\mathcal{L}_N)$$

3. Principio del descenso infinito: dada una propiedad P tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, si n posee la propiedad P entonces existe un número menor que n que posee la propiedad P. Entonces nin-

gún número natural posee tal propiedad.

$$(x)(\varphi(x) \to \exists y(\varphi(y) \wedge y < x)) \to (x)\neg\varphi(x) \quad \varphi \in Fom(\mathcal{L}_n)$$

Como podemos apreciar, estos principios no son expresables en su forma general en $\mathcal{L}_n$. Sin embargo, es posible establecerlos para cada propiedad definible en $\mathcal{L}_n$.

TEOREMA 2.6. (Algoritmo de la división). Sean x, y, u, v variables de $\mathcal{L}_n$ entonces

$$\vdash_{AP} \neg(y \approx 0) \to (\exists_1 u)(\exists_1 v)(x \approx y \cdot u + v \wedge v < y)$$

Dem. Por inducción sobre x.

Base de la inducción: $\vdash_{AP} \varphi(0)$

1. $\neg(y \approx 0)$ Hip
2. $0 \approx y \cdot 0 + 0$ A_1 y M_1
3. $0 < y$ Teorema 2.4. (e) en 1 y M.P.
4. $0 \approx y \cdot 0 + 0 \wedge 0 < y$ Tautología 2 y 3
5. $(\exists u)(\exists v)(0 \approx y \cdot u + v \wedge v < y)$ Regla $\exists$ a 4
6. $\neg(y \approx 0) \to (\exists u)(\exists v)(0 \approx y \cdot u + v \wedge v < y)$ T.D. 1-5

Paso inductivo: $\vdash_{AP} \varphi(x) \to \varphi(sx)$

1. $\neg(y \approx 0) \to (\exists u)(\exists v)(x \approx y \cdot u + v \wedge v < y)$ Hip
2. $\neg(y \approx 0)$ Hip
3. $(\exists u)(\exists v)(x \approx y \cdot u + v \wedge v < y)$ M.P. 1, 2.
4. $x \approx y \cdot u + v \wedge v < y$ Regla E a 3
5. $v < y$ Tautología en 4
6. $sv \leq y$ Teorema 2.4. (r)
7. $sv < y \vee sv \approx y$ Teorema 2.4. (b) y Ret
8. $sv < y \to x \approx y \cdot u + v \wedge v < y$ L_1 con 4 y 6
9. $x \approx y \cdot u + v$ Tautología en 4
10. $sx \approx s(y \cdot u + v)$ De 9
11. $s(y \cdot u + v) \approx y \cdot u + sv$ A_2
12. $sx \approx y \cdot u + sv$ Trans= 10 y 11

13. $Sv < y$ Hip
14. $Sx \approx y \cdot u + Sv \wedge Sv < y$ Tautología 12 y 13
15. $\exists u \exists v\, (Sx \approx y \cdot u + v \wedge v < y)$ Regla $\exists$ 14
16. $Sv < y \to \exists u \exists v (Sx \approx y \cdot u + v \wedge v < y)$ T.D. 9-15.
17. $Sv \approx y$ Hip
18. $Sx \approx S(y \cdot u + v)$ F.U.V. en 9
19. $Sx \approx y \cdot u + Sv$ A_2 en 18
20. $Sv \approx y \to (Sx \approx y \cdot u + Sv \to Sx \approx y \cdot u + y)$ L_7
21. $Sx \approx y \cdot u + Sv \to Sx \approx y \cdot u + y$ M.P. 17, 20
22. $Sx \approx y \cdot u + y$ M.P. 19, 21.
23. $y \cdot \bar{1} \approx y$ Ejercicio 5.(a') (pág 50)
24. $Sx \approx y \cdot u + y \cdot \bar{1}$ De 22 y 23 con L_7
25. $Sx \approx y(u + \bar{1}) + 0$ Ejercicio 6.(a) y A_1 (pág 50)
26. $0 < y$ 17 y Teorema 2.4.(A)
27. $Sx \approx y \cdot (u + 1) + 0 \wedge 0 < y$ Tautología 25, 26.
28. $\exists u \exists v\, (Sx \approx y \cdot u + v \wedge v < y)$ Regla $\exists$ a 27
29. $Sv \approx y \to \exists u \exists v\, (Sx \approx y \cdot u + v \wedge v < y)$ 17-28 T.D.
30. $\exists u \exists v\, (Sx \approx y \cdot u + v \wedge v < y)$ 7, 16 y 29 Tautología
31. $\neg (y \approx 0) \to \exists u \exists v (Sx \approx y \cdot u + v \wedge v < y)$ 2-30 T.D.

Así $\varphi(x) \vdash_{\overline{AP}} \varphi(Sx)$.

Dejamos al lector la prueba de la unicidad de u y v. Ejercicio 11 (pág 51)

■

TEOREMA 2.7. Sea $\varphi \in Form(\mathcal{L}_N)$ y x, y variables cualesquiera. Son teoremas de $\overline{AP}$ los siguientes.

a. $(x)\big((y)\,(y < x \to \varphi(y)) \to \varphi(x)\big) \to (x)\,\varphi(x)$

Inducción completa.

b. $\exists x \varphi(x) \to \big(\exists y \varphi(y) \wedge (x)(\varphi(x) \to y \leq x)\big)$

P. del buen orden.

c. $(x)\big(\varphi(x) \to \exists y\, (\varphi(y) \wedge y < x)\big) \to (x) \neg \varphi(x)$

P. descenso infinito.

Dem.

Demostraremos únicamente el inciso (a) dejando como ejercicio al lector las pruebas de los incisos (b) y (c). Ejercicio 13 (pág 51).

La demostración de (a) se logra fácilmente al establecer el siguiente "juego de formas", que consiste en visualizar el antecedente de la fórmula (a) de dos modos distintos:

i. $C(x) \underset{def}{\Longleftrightarrow} [(y)(y<x \to \varphi(y)) \to \varphi(x)]$

ii. Como la fórmula $B(x) \to \varphi(x)$ donde
$B(x) \underset{def}{\Longleftrightarrow} (y)(y<x \to \varphi(y))$

Bajo esta doble perspectiva, podemos escribir la fórmula (a) como:

* $(x)\,C(x) \to (x)\,\varphi(x)$ o bien $C(x) \to \varphi(x)$

** $(x)(B(x) \to \varphi(x)) \to (x)\varphi(x)$ o bien $(B(x) \to \varphi(x)) \to \varphi(x)$

Ahora consideremos la siguiente tautología.

$$\underbrace{[C(x) \to (B(x) \to \varphi(x))]}_{1} \to [(C(x) \to B(x)) \to \underbrace{(C(x) \to \varphi(x))}_{2}] \ldots (\#)$$

La fórmula (2) es lo que queremos probar.

La fórmula (1) es una tautología pues
$C(x) \underset{def}{\Longleftrightarrow} (B(x) \to \varphi(x))$ y así $(1) \underset{def}{\Longleftrightarrow} [(B(x) \to \varphi(x)) \to (B(x) \to \varphi(x))]$

Así, $\vdash_{AP} (C(x) \to B(x)) \to (C(x) \to \varphi(x))$ y entonces (2) será teorema de $\overline{AP}$ si '$(C(x) \to B(x))$' lo es.

Demostremos entonces: $\vdash_{AP} B(0)$ y $\vdash_{AP} C(x) \to (B(x) \to B(sx))$

Así, tendremos

$$C(x) \vdash_{AP} B(0) \quad y \quad C(x) \vdash_{AP} B(x) \to B(sx)$$

de donde aplicando PI a $B(x)$ tendremos $C(x) \vdash_{AP} B(x)$.

Base de la inducción: $\vdash_{AP} (y)(y<0 \to \varphi(y))$

1. $\neg(y<0)$ Teorema 2.4.(u)
2. $\neg(y<0) \to (\neg\varphi(y) \to \neg(y<0))$ L_1
3. $\neg\varphi(y) \to \neg(y<0)$ M.P. 1,2
4. $y<0 \to \varphi(y)$ Tautología a 3
5. $(y)(y<0 \to \varphi(y))$ Gen, 4.

Paso *inductivo:* $C(x), B(x) \vdash_{AP} B(sx)$

1. $(y)(y<x \to \varphi(y) \to \varphi(x))$ Hip $C(x)$
2. $(y)(y<x \to \varphi(y))$ Hip $B(x)$
3. $\varphi(x)$ M.P. 1,2
4. $(y)(y<x \to \varphi(y)) \to (y<x \to \varphi(y))$ L_4
5. $y<x \to \varphi(y)$ M.P. 2,4
6. $x \approx y \to (\varphi(x) \to \varphi(y))$ L_7
7. $\varphi(x) \to (x \approx y \to \varphi(y))$ Tautología a 6
8. $x \approx y \to \varphi(y)$ M.P. 3,7
9. $(y<x \vee x \approx y) \to \varphi(y)$ Tautología a 5 y 8
10. $y<sx \to (y<x \vee x \approx y)$ Teorema 2.4 (b) y (v)
11. $y<sx \to \varphi(y)$ Trans.$\to$ 9 y 10
12. $(y)(y<sx \to \varphi(y))$ Gen, 11.

Así por el Teorema de la deducción $C(x) \vdash_{AP} B(x) \to B(sx)$

1. $C(x)$ Hip
2. $B(0)$ Teorema
3. $B(x) \to B(sx)$ Consecuencia de 1.
4. $B(0) \to ((B(x) \to B(sx)) \to (x)B(x))$ PI
5. $(B(x) \to B(sx)) \to (x)B(x)$ M.P. 2,4.
6. $(x)B(x)$ M.P. 3,5
7. $B(x)$ L_4 a 6

Así $\vdash_{AP} C(x) \to B(x)$. Con esto y la fórmula(#)

tenemos $\vdash_{AP} C(x) \rightarrow \varphi(x)$. Aplicando generalización y una fórmula universalmente válida, tenemos finalmente

$$\vdash_{AP} (x)C(x) \rightarrow (x)\varphi(x) \quad , \text{ es decir}$$

$$\vdash_{AP} (x)\big((y)(y<x \rightarrow \varphi(y)) \rightarrow \varphi(x)\big) \rightarrow (x)\varphi(x)$$

■

Ejercicios

1. Probar que la teoría formal $Th(\mathfrak{N})$ es completa.

2. Demostrar que si $\mathfrak{U} = \langle A, R \rangle$, $|\overline{\overline{A}}| = \aleph_0$ y $R \subseteq A \times A$ es una relación binaria que corresponde a un orden (en A) denso sin extremos, entonces $\mathfrak{U} \cong Q$ donde $Q = \langle \mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}} \rangle$.

3. a. Demostrar que toda fórmula atómica de $\overline{AP}$ $t_1 \approx t_2$ es decidible en $\overline{AP}$.
   b. Demostrar que cualquier fórmula cerrada de $\mathcal{L}_\mathfrak{N}$ sin cuantificadores es decidible en $\overline{AP}$.

4. a. Justifíquense los pasos de la demostración del Teorema 2.3 inciso IIa. (pág 33).
   b. Probar los incisos Va, Ib–VIb del Teorema 2.3 (pág 32)

5. Probar los siguientes teoremas.
   a. $\vdash_{AP} x + \overline{1} \approx sx$
   b. $\vdash_{AP} x + y \approx \overline{0} \rightarrow (x \approx \overline{0} \wedge y \approx \overline{0})$
   c. $\vdash_{AP} x + y \approx \overline{1} \rightarrow (x \approx \overline{0} \wedge y \approx \overline{1}) \vee (x \approx \overline{1} \wedge y \approx \overline{0})$
   d. $\vdash_{AP} x + y \approx x + z \rightarrow y \approx z$
   e. $\vdash_{AP} \overline{2} + \overline{2} \approx \overline{4}$

a'. $\vdash_{AP}\ x\cdot\bar{1} \approx x$
b'. $\vdash_{AP}\ \neg(x \not\approx 0) \rightarrow (x\cdot y \approx 0 \rightarrow y \approx 0)$
c'. $\vdash_{AP}\ x\cdot y \approx 0 \rightarrow x \approx 0 \vee y \approx 0$ (Usar 5.b)
d'. $\vdash_{AP}\ x\cdot y \approx \bar{1} \rightarrow x \approx \bar{1} \wedge y \approx \bar{1}$
e'. $\vdash_{AP}\ \neg(x \approx 0) \rightarrow (xy \approx xz \rightarrow y \approx z)$
f'. $\vdash_{AP}\ \bar{2}\cdot\bar{2} \approx \bar{4}$

6. Demostrar que las siguientes fórmulas de $\mathcal{L}_{A}$ son teoremas de $\overline{AP}$.
   a. $x\cdot(y+z) \approx x\cdot y + x\cdot z$
   b. $x \approx 0 \vee \exists y\,(x \approx sy)$
   c. $\neg(x \approx 0) \rightarrow (\neg(x \approx \bar{1}) \rightarrow \exists y\,(x \approx ssy))$
   d. $\neg(sx \approx x)$
   e. $x\cdot\bar{2} \approx x + x$

7. Demuestre que las fórmulas siguientes son teoremas de $\overline{AP}$.
   a. $x|y \wedge y|z \rightarrow x|z$
   b. $x|y\cdot x$
   c. $x|x$
   d. $x|0$
   e. $\bar{1}|x$
   f. $0|x \leftrightarrow x \approx 0$
   g. $x|y \wedge y|x \leftrightarrow x \approx y$
   h. $\neg(x \approx 0) \rightarrow (y|x \rightarrow y \leq x)$
   i. $x|y \rightarrow x|y\cdot z$
   j. $x|y \wedge x|z \rightarrow x|y+z$
   k. $\bar{1}<x \rightarrow (x|sy \rightarrow \neg(x|y))$
   l. $x|\bar{1} \rightarrow x \approx \bar{1}$
   m. $x|y \wedge x|sy \rightarrow x \approx \bar{1}$
   n. $\bar{1}<x \wedge (y)(\bar{1}<y \wedge y|x \rightarrow x \leq y) \rightarrow Pr(x)$
   ñ. $Pr(\bar{2})$
   o. $Pr(\bar{3})$
   p. $\neg Pr(\bar{4})$
   q. $\exists x(x<y \wedge x|y \wedge Pr(x)) \rightarrow \neg Pr(y)$

8. Demostrar los incisos e-τ del Teorema 2.4 (pág 36-37).

9. Demostrar que si t es libre para x_i en $\varphi(x_i)$ entonces
   $\models (\psi \rightarrow \varphi(t)) \rightarrow (\psi \rightarrow \exists x_i\, \varphi(x_i))$

10. Demostrar los incisos (c), (d), (e) del Teorema 2.5 (pág 42) así como los sentidos de la bicondicional que faltan en las demostraciones de los incisos (a) y (b).

11. *Demuéstrese la unicidad del cociente y el residuo 'u' y 'v' del Teorema 2.6* (pág 45)

12. *Demostrar que:* $\vdash_{AP} \neg(y \approx 0) \rightarrow (\exists u)(\exists v)(\odot \approx y \cdot u + v \wedge v < y)$

13. *Demostrar los incisos* (b) *y* (c) *del Teorema* 2.7 (pág 46).

Capítulo 3.
Representabilidad de Funciones Recursivas.

§1. EXPRESABILIDAD Y REPRESENTABILIDAD EN $\overline{AP}$.

En el capítulo precedente demostramos que algunos resultados de la aritmética elemental son formalizables en $\overline{AP}$. En este capítulo demostraremos que $\overline{AP}$ contiene una formalización de la aritmética recursiva. Más tarde veremos la importancia de esto.

El sistema $\overline{AP}$ se construyó con la intención de formalizar la aritmética elemental. Desde este punto de vista, la noción de prueba formal juega el papel de correlato de la noción de verdad dentro del sistema numérico. La idea es que a cada enunciado aritmético E le corresponda una fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_\eta$ sin variables libres, misma que será teorema de $\overline{AP}$ en caso de que E sea verdadero y cuya negación será teorema de $\overline{AP}$ en caso de que E sea falso. Esta idea queda plasmada en la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.1. Sea $R(x_1 \dots x_n)$ una relación aritmética n-aria ($R \subset \mathbb{N}^n$). Se dice que R es <u>EXPRESABLE</u> en $\overline{AP}$ si existe una fórmula $\varphi_R(x_1 \dots x_n) \in \mathcal{L}_\eta$ con n variables libres tal que, para cualesquiera números naturales $k_1, k_2, \dots, k_n$

a. si $R(k_1, \dots, k_n)$ es verdadera entonces $\vdash_{\overline{AP}} \varphi_R(\bar{k}_1 \dots \bar{k}_n)$

b. si $R(k_1 \dots k_n)$ es falsa entonces $\vdash_{\overline{AP}} \neg\varphi_R(\bar{k}_1 \dots \bar{k}_n)$

Así, si R es "representada" por φ_R en $\overline{AP}$, la veracidad de R para $k_1, \dots, k_n$ se "manifiesta" en $\overline{AP}$ a través de una prueba de $\varphi_R(\bar{k}_1 \dots \bar{k}_n)$ y su falsedad por una prueba de $\neg\varphi_R(\bar{k}_1 \dots \bar{k}_n)$.

TEOREMA 3.1. La relación de igualdad entre números naturales se expresa en $\overline{AP}$ por la fórmula $x_1 \approx x_2$.

Dem:

a. Si k_1 y k_2 son el mismo número natural entonces el numeral $\overline{k}_1$ es la misma expresión que el numeral $\overline{k}_2$. Como para todo término t, $\vdash_{AP} t \approx t$, se tiene $\vdash_{AP} \overline{k}_1 \approx \overline{k}_2$

Así, $k_1 = k_2 \Rightarrow \vdash_{AP} \overline{k}_1 \approx \overline{k}_2$

b. Si $k_1 \neq k_2$ entonces $k_1 < k_2$ o $k_1 > k_2$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer $k_1 < k_2$.

Así, $k_2 - k_1 > 0$. Consideremos la siguiente deducción.

1. $\overline{k}_1 \approx \overline{k}_2$ Hip.
2. $\underbrace{ss\ldots s}_{k_1 \text{ veces}}0 \approx \underbrace{sss\ldots s}_{k_2 \text{ veces}}0$ de 1.
3. $\underbrace{ss\ldots s}_{k_1 \text{ veces}}(0) \approx \underbrace{sss\ldots s}_{k_2 \text{ veces}}0 \to (\underbrace{ss\ldots s}_{k_1 - 1 \text{ veces}}0 \approx \underbrace{ss\ldots s}_{k_2 - 1 \text{ veces}}0)$ F.U.V, R.st.
4. $\underbrace{s\ldots s}_{k_1 - 1 \text{ veces}}0 \approx \underbrace{s\ldots s}_{k_2 - 1 \text{ veces}}0$ M.P. 2, 3.

Si repetimos el proceso seguido en los pasos 2-4 $k_1 - 1$ veces, la deducción conduce a lo siguiente.

$2k_1+2$. $0 \approx \underbrace{s\ldots s}_{k_2 - k_1 \text{ veces}}0$ ... (*)

Como $k_2 - k_1 > 0$, la expresión de la derecha de (*) contiene por lo menos una ocurrencia del símbolo 's' y la fórmula (*) tiene la forma:

$0 \approx st$ para algún término t.

Así $\overline{k}_1 \approx \overline{k}_2 \vdash_{AP} 0 \approx st$, pero $\vdash_{AP} \neg(0 \approx st)$ de donde. $\vdash_{AP} \neg(\overline{k}_1 \approx \overline{k}_2)$

Por tanto si $k_1 \neq k_2$ entonces $\vdash_{AP} \neg(\overline{k}_1 \approx \overline{k}_2)$

■

LEMA 3.2. Sean k_1 y k_2 números naturales. Entonces

a. $\vdash_{AP} \overline{k_1+k_2} \approx \bar{k}_1 + \bar{k}_2$

b. $\vdash_{AP} \overline{k_1 \cdot k_2} \approx \bar{k}_1 \cdot \bar{k}_2$

Dem.

a. Inducción sobre k_2 (en $\overline{AP}$).

Base de la inducción

Si $k_2 = 0$ entonces $k_1+k_2 = k_1+0 = k_1$ y así $\overline{k_1+0}$ es la misma expresión que $\bar{k}_1$. Por tanto:

1. $\overline{k_1+0} \approx \bar{k}_1$ Metateorema 3.1.
2. $\bar{k}_1 + \odot \approx \bar{k}_1$ A_1 y Ret
3. $\bar{k}_1 + \bar{0} \approx \bar{k}_1$ de 2 pues $\odot$ y $\bar{0}$ es lo mismo
4. $\overline{k_1+0} \approx \bar{k}_1 + \bar{0}$ F.U.V 1 y 3.

Paso inductivo.

1. $\overline{k_1+k_2} \approx \bar{k}_1 + \bar{k}_2$ Hip. Inductiva.
2. $S(\overline{k_1+k_2}) \approx S(\bar{k}_1 + \bar{k}_2)$ F.U.V en 1 y Ret.
3. $S(\bar{k}_1 + \bar{k}_2) \approx \bar{k}_1 + S\bar{k}_2$ A_2
4. $S(\overline{k_1+k_2}) \approx \bar{k}_1 + S\bar{k}_2$ $\text{Trans}_=$ 2 y 3
5. $S(\overline{k_1+k_2}) \approx \bar{k}_1 + (\overline{k_2+1})$ Ejercicio 5.a (pág 49) y Ret
6. $\overline{(k_1+k_2)+1} \approx \bar{k}_1 + (\overline{k_2+1})$ " " " "
7. $\overline{k_1+(k_2+1)} \approx \bar{k}_1 + (\overline{k_2+1})$ Asociatividad de la suma.

Aplicando T.D. y P.I obtenemos el resultado.

Dejamos al lector la demostración del inciso (b).
Ejercicio 2. (pág 72)

■

TEOREMA 3.3.

a. La relación "x es menor que y" es expresable en $\overline{AP}$ por la fórmula

$$\varphi_<(x_1, x_2) \underset{\text{def}}{=} \exists x_3 \, (\neg(x_3 \approx \odot) \wedge x_2 \approx x_1 + x_3)$$

b. La relación "q es el cociente de dividir x entre y" es expresable en $\overline{AP}$ por la fórmula:

$$\varphi_q(x_1,x_2,x_3) \underset{\text{def}}{\approx} \exists x_4\, (x_2 \approx (x_3 \cdot x_1) + x_4 \;\wedge\; x_4 < x_3)$$

c. La relación "r es el residuo de dividir x entre y" es expresable en $\overline{AP}$ por la fórmula:

$$\varphi_r(x_1 x_2 x_3) \underset{\text{def}}{\approx} \exists x_4\, (x_2 \approx (x_3 \cdot x_4) + x_1 \;\wedge\; x_1 < x_3)$$

d. La propiedad "x es primo" es expresable en $\overline{AP}$ por la fórmula:

$$\varphi_p(x_1) \underset{\text{def}}{\approx} (\bar{1} < x_1) \wedge (x_2)\left(\bar{1} < x_2 \wedge x_2 | x_1 \rightarrow x_1 \approx x_2\right)$$

Dem.

a. i. Sean $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $k_1 < k_2$

Así hay un $k \in \mathbb{N}$ tal que

$\alpha.$ $k_1 + k = k_2$ y $\beta.$ $k \neq 0$

1. $\overline{k_1 + k} \approx \bar{k}_2$ Teorema 3.1 y (α)
2. $\overline{k_1 + k} \approx \bar{k}_1 + \bar{k}$ Lema 3.2.(a).
3. $\bar{k}_1 + \bar{k} \approx \bar{k}_2$ Trans$_{\approx}$ 1 y 2.
4. $\neg(\bar{k} \approx \bar{0})$ Teorema 3.1 y (β)
5. $\bar{k}_1 + \bar{k} \approx \bar{k}_2 \wedge \neg(\bar{k} \approx \bar{0})$ Taut. 3 y 4.
6. $\exists x_3(\neg(x_3 \approx \bar{0}) \wedge \bar{k}_2 \approx \bar{k}_1 + x_3)$ Regla $\exists$ a 5.

ii. Si $k_1 \not< k_2$ entonces $k_1 = k_2$ o $k_2 < k_1$

Si $k_1 = k_2$ entonces $\vdash_{AP} \bar{k}_1 \approx \bar{k}_2$ teorema 3.1

Si $k_2 < k_1$ entonces $\vdash_{AP} \exists x_3\, (\neg(x_3 \approx \bar{0}) \wedge \bar{k}_1 \approx \bar{k}_2 + x_3)$ usando la demostración anterior en este caso.

En cualquiera de los dos casos si $k_1 \not< k_2$ entonces $\vdash_{AP} \bar{k}_2 \leq \bar{k}_1$ de donde por el Teorema 2.4.(d) (pág 36) tenemos

$$k_1 \not< k_2 \Rightarrow\; \vdash_{AP} \neg(\bar{k}_1 < \bar{k}_2) \text{ es decir } \vdash_{AP} \neg\varphi_<(\bar{k}_1, \bar{k}_2)$$

b. (i) Supongamos que k_1 es el cociente de dividir k_2 entre k_3. Entonces existe $r \in \mathbb{N}$ tal que

$k_2 = (k_3 \cdot k_1) + r$ y $r < k_3$ ... (*)

Utilizando (*), el Teorema 3.1, el Lema 3.2, el inciso anterior y el ejercicio 1 (pág 72) tenemos

$\vdash_{AP} \bar{k}_2 \approx (\bar{k}_3 \cdot \bar{k}_1) + \bar{r} \wedge \bar{r} < \bar{k}_3$ y al aplicar la regla $\exists$ tenemos:

$\vdash_{AP} \exists x_4 (\bar{k}_2 \approx (\bar{k}_3 \cdot \bar{k}_1) + x_4 \wedge x_4 < \bar{k}_3)$

o sea

$$\vdash_{AP} \varphi_q(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3)$$

ii. Supongamos ahora que k_1 no es el cociente de dividir k_2 entre k_3. En este caso tenemos que $\forall r \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq r \leq k_3$ $\quad k_2 \neq k_3 \cdot k_1 + r$

Por resultados anteriores tenemos:

$\vdash_{AP} \neg(\bar{k}_2 \approx (\bar{k}_3 \cdot \bar{k}_1) + \bar{0}) \quad \ldots \quad \vdash_{AP} \varphi(\bar{0})$

$\vdash_{AP} \neg(\bar{k}_2 \approx (\bar{k}_3 \cdot \bar{k}_1) + \bar{1}) \quad \ldots \quad \vdash_{AP} \varphi(\bar{1})$

$\vdots$

$\vdash_{AP} \neg(\bar{k}_2 \approx (\bar{k}_3 \cdot \bar{k}_1) + (\overline{k_3 - 1}) \quad \ldots \quad \vdash_{AP} \varphi(\overline{k_3-1})$

y entonces

$\vdash_{AP} \varphi(\bar{0}) \wedge \varphi(\bar{1}) \wedge \ldots \wedge \varphi(\overline{k_3-1})$

Sin embargo

$\vdash_{AP} [\varphi(\bar{0}) \wedge \varphi(\bar{1}) \wedge \ldots \wedge \varphi(\overline{k_3-1})] \rightarrow (x_4)(x_4 < \bar{k}_3 \rightarrow \varphi(x_4))$

de donde

$\vdash_{AP} (x_4)(x_4 < \bar{k}_3 \rightarrow \varphi(x_4))$

y así al manipular esta fórmula obtenemos

$\vdash_{AP} \neg(\exists x_4)(\bar{k}_2 \approx (\bar{k}_3 \cdot \bar{k}_1) + x_4 \wedge x_4 < \bar{k}_3)$

Dejamos al lector las demostraciones de los incisos (c) y (d). Ejercicio 3. (pág 72)

■

§ 2. FUNCIONES ARITMÉTICAS.

El sistema $\overline{AP}$ es pobre en símbolos funcionales y, aparentemente, esa pobreza limita su capacidad para expresar funciones aritméticas. Una manera de resolver esa dificultad es la siguiente. En vez de expresar una función $f(x_1 \dots x_n)$ directamente a través de un término (o símbolo funcional) expresaremos la relación $f(x_1 \dots x_n) = y$ de aridad $n+1$. Esta idea toma una forma más acabada en las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 3.2. Sea $\varphi(x)$ una fórmula en la cual x ocurre libre.

$$(\exists_1 x)\varphi(x) \underset{\text{def}}{=} \exists x\, \varphi(x) \wedge (x)(y)(\varphi(x) \wedge \varphi(y) \Rightarrow x \approx y)$$

y es la primera variable de la lista $x_1 \dots x_n$ que no ocurre en $\varphi(x)$.

DEFINICIÓN 3.3. Sea $f(x_1 \dots x_n)$ una función aritmética de aridad n. Se dice que f es <u>REPRESENTABLE</u> en $\overline{AP}$ si existe una fórmula $\varphi_f(x_1 \dots x_n, x_{n+1}) \in \mathcal{L}_1$ con $n+1$ variables libres tal que:

Para cualesquiera $k_1 \dots k_n, k_{n+1} \in \mathbb{N}$

a. $f(k_1 \dots k_n) = k_{n+1} \Rightarrow \vdash_{AP} \varphi_f(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n, \bar{k}_{n+1})$

b. $\vdash_{AP} (\exists_1 x_{n+1})\, \varphi_f(\bar{k}_1 \dots \bar{k}_n, x_{n+1})$

Si el inciso (b) se reemplaza por

b'. $\vdash_{AP} (\exists_1 x_{n+1})\, \varphi_f(x_1 \dots x_n, x_{n+1})$ entonces decimos que f es <u>FUERTEMENTE</u> <u>REPRESENTABLE</u> en $\overline{AP}$.

Dejamos al lector la prueba de que si f es fuertemente representable en $\overline{AP}$ entonces es representable en $\overline{AP}$. Ejercicio 5. (pág 72)

TEOREMA 3.4. Las siguientes funciones son fuertemente representables en $\overline{AP}$.

a. $f(x,y) = x+y$

b. $g(x,y) = x \cdot y$

c. $s(x) = x+1$

d. $C_k^n(x_1 \ldots x_n) = k$

e. $I_k^n(x_1 \ldots x_n) = x_k$

Dem.

c. Sea $\varphi_s(x_1, x_2)$ la fórmula $x_2 \approx s x_1$

i. Si $k_2 = k_1+1$ entonces $\vdash_{AP} \overline{k_2} \approx \overline{k_1+1}$ de donde $\vdash_{AP} \overline{k_2} \approx s\overline{k_1}$.

ii. P.D. $\vdash_{AP} (\exists_1 x_2)\varphi_s(x_1, x_2)$

1. $s x_1 \approx s x_1$ Teorema
2. $\exists x_2 (x_2 \approx s x_1)$ Regla $\exists$ a 1

Así $\vdash_{AP} \exists x_2 (x_2 \approx s x_1) \ldots (*)$

1. $(x_2 \approx s x_1) \wedge (x_3 \approx s x_1)$ Hip $(\varphi_s(x_1,x_2) \wedge \varphi_s(x_1,x_3))$
2. $x_2 \approx s x_1$ Taut 1
3. $x_3 \approx s x_1$ Taut en 1
4. $x_2 \approx x_3$ $\text{Trans}_{=}$ 2 y 3.

Así $(x_2 \approx s x_1) \wedge (x_3 \approx s x_1) \vdash_{AP} x_2 \approx x_3$ de donde $\vdash_{AP} (x_2 \approx s x_1) \wedge (x_3 \approx s x_1) \to x_2 \approx x_3$ y por tanto

$$\vdash_{AP} (x_2)(x_3)\left(x_2 \approx s x_1 \wedge x_3 \approx s x_1 \to x_2 \approx x_3\right) \ldots (**)$$

Aplicando la definición 3.2 a la conjunción de $(*)$ y $(**)$ obtenemos $\vdash_{AP} (\exists_1 x_2)(x_2 \approx s x_1)$

Dejamos al lector la demostración de los incisos (a), (b), (d), (e). Ejercicio 6. (pág 72)

■

Recordemos que si $R(x_1 \ldots x_n)$ es una relación aritmética, su función característica C_R se define como

$$C_R(k_1 \ldots k_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } R(k_1 \ldots k_n) \text{ es falsa} \\ 0 & \text{si } R(k_1 \ldots k_n) \text{ es verdadera} \end{cases}$$

TEOREMA 3.5. Una relación aritmética $R(x_1 \ldots x_n)$ es expresable en $\overline{A}^{\top}P$ si y sólo si su función característica C_R es (fuertemente) representable en $\overline{A}^{\top}P$.

Dejamos al lector la demostración de este teorema (Ejercicio 7 pág 72) en base a las siguientes ideas.

Si $R(x_1 \ldots x_n)$ es expresable en $\overline{A}^{\top}P$ por la fórmula $\varphi_R(x_1 \ldots x_n)$ entonces demuestre que C_R es fuertemente representable en $\overline{A}^{\top}P$ por la fórmula:

$(\varphi_R(x_1 \ldots x_n) \wedge x_{n+1} \approx \overline{0}) \vee (\neg \varphi_R(x_1 \ldots x_n) \wedge x_{n+1} \approx \overline{1})$

Inversamente, si C_R es fuertemente representada en $\overline{A}^{\top}P$ por la fórmula $\varphi_C(x_1 \ldots x_n, x_{n+1})$ entonces R se expresa en $\overline{A}^{\top}P$ por la fórmula $\varphi_C(x_1 \ldots x_n, \overline{0})$.

■

§3. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES RECURSIVAS.

Pasemos ahora a la demostración del teorema principal de este capítulo: "Toda función recursiva es fuertemente representable en $\overline{A}^{\top}P$". Con este resultado y el Teorema 3.5 obtendremos que toda relación recursiva primitiva (recursiva) es expresable en $\overline{A}^{\top}P$. Así, la aritmética recursiva quedará, por así decirlo, apresada dentro de $\overline{A}^{\top}P$.

LEMA 3.6.a. La función $rm(x,u)$ es fuertemente representable en $\overline{A}^{\top}P$.

Las siguientes funciones son recursivas primitivas y fuertemente representables en $\overline{A}^{\top}P$.

b. $\alpha(i,d) = 1 + (1+i)d$ c. $\beta(x,i,d) = rm(1+(1+i)d, x)$

Dem.

a. La fórmula $\exists x_4 (x_2 \approx (x_3 \cdot x_4) + x_1 \wedge x_1 < x_3)$ representa en $\overline{AP}$ a $rm(x,y)$.

Si $k_1 = rm(k_3, k_2)$ entonces

$\vdash_{AP} \exists x_4 (\bar{k}_2 \approx (\bar{k}_3 \cdot x_4) + \bar{k}_1 \wedge \bar{k}_1 < \bar{k}_3)$ Teorema 3.3.(c)

La unicidad del residuo fué demostrada en el ejercicio 11 del capítulo 2 (pág 51)

Así (a) queda demostrado.

b. La fórmula $x_3 \approx \bar{1} + (\bar{1} + x_1) \cdot x_2$ representa a la función α en $\overline{AP}$.

Dejamos al lector la demostración de este inciso Ejercicio 9. (pág 72)

c. La función β (x_4 es el residuo de dividir x_1 entre $1 + (1 + x_2) \cdot x_3$) queda representada en $\overline{AP}$ por la fórmula

$\varphi_\beta(x_1, x_2, x_3, x_4) \underset{def}{=} \exists x_5 [x_1 \approx (\bar{1} + (\bar{1} + x_2) \cdot x_3) \cdot x_5 + x_4 \wedge x_4 < \bar{1} + (\bar{1} + x_2) \cdot x_3]$

Ya que las funciones rm, α y la suma son recursivas primitivas y la función β se obtiene de ellas por substitución, la función β es recursiva primitiva.

i. P.D. $k_4 = \beta(k_1, k_2, k_3) \Rightarrow \vdash_{AP} \varphi_\beta(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \bar{k}_4)$ ...(*)

Si $k_4 = \beta(k_1, k_2, k_3)$ entonces para algún $k \in \mathbb{N}$

$k_1 = [1 + (1 + k_2) \cdot k_3] \cdot k + k_4$ y $k_4 < 1 + (1 + k_2) \cdot k_3$

Así, dada la representabilidad de las funciones y relaciones que aparecen, tenemos:

$\vdash_{AP} \bar{k}_1 \approx (\bar{1} + (\bar{1} + \bar{k}_2) \cdot \bar{k}_3) \cdot \bar{k} + \bar{k}_4 \wedge \bar{k}_4 < \bar{1} + (\bar{1} + \bar{k}_2) \cdot \bar{k}_3$

aplicando la regla $\exists$ obtenemos

$\vdash_{AP} \exists x_5 (\bar{k}_1 \approx (\bar{1} + (\bar{1} + \bar{k}_2) \cdot \bar{k}_3) \cdot x_5 + \bar{k}_4 \wedge \bar{k}_4 < (\bar{1} + (\bar{1} + \bar{k}_2) \cdot \bar{k}_3))$

es decir $\vdash_{AP} \varphi_\beta(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \bar{k}_4)$

μ. En virtud del Teorema 2.6 (pag 45) y de
$\vdash_{\overline{AP}} \neg(\overline{1} + (\overline{i} + x_2)\cdot x_3 \approx 0)$ obtenemos:

$$\vdash_{\overline{AP}} (\exists_1 x_4)\,\varphi_\beta(x_1, x_2, x_3, x_4) \ldots (\#)$$

De $(*)$ y $(\#)$ β es fuertemente representable en $\overline{AP}$.

■

LEMA 3.7. Para cualquier sucesión de números naturales $k_0, k_1, \ldots, k_n$, existen números naturales b y c tales que $\beta(b,c,i) = k_i \quad i = 0 \ldots n$.

Dem.

Sea $j = \text{máx}(n, k_0, k_1, \ldots, k_n)$ y sea $c = j!$

Consideremos la sucesión de números $u_i = 1 + (i+1)c$ para $i = 0 \ldots n$. Los números u_i son primos relativos pues si p fuera un primo que dividiera a $1 + (i+1)c$ y a $1 + (m+1)c$ $(i < m)$, tendríamos que $p \mid (m-i)c$. Ahora, $p \nmid c$ pues en ese caso dividirá a $(i+1)c$ y a $1 + (i+1)c$ y entonces p dividirá a 1. Tampoco es verdad que $p \mid (m-i)$ pues $m - i \leq n \leq j$ y como $(m-i) \mid j! = c$, si $p \mid (m-i)$ entonces $p \mid c$. Entonces los números u_i son primos relativos por pares $(i = 0 \ldots n)$. Asimismo, para $i = 0 \ldots n$, $k_i \leq j \leq j! = c < 1 + (i+1)c = u_i$, de donde $k_i < u_i$. Por el teorema chino del residuo, existe un número $b < u_0 \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_n$ tal que $rm(u_i, b) = k_i \quad i = 0 \ldots n$. Pero $\beta(b,c,i) = rm(1 + (1+i)c, b) = rm(u_i, b) = k_i$.

■

TEOREMA 3.8. Toda función recursiva es representable en $\overline{AP}$.

Dem.

Por inducción sobre el grado de f: longitud de la menor sucesión de funciones que define a f como recursiva.

Denotaremos el grado de f por $gr(f)$.

Las únicas funciones de grado 1 son las iniciales. Para ellas el resultado está probado en el Teorema 3.4. (pág 58).

Supongamos que toda función f de grado menor que k es representable en $\overline{AP}$. Mostraremos que ello implica que toda función de grado k es representable en $\overline{AP}$. $(k \geq 2)$

Sea f una función de grado k, entonces

A. f fué definida por substitución a partir de funciones con grado menor que k.

B. f fué definida por recursión a partir de funciones con grado menor que k.

C. f se obtuvo por aplicación del operador μ.

A.

$$f(x_1 \dots x_n) = g(h_1(x_1 \dots x_n), \dots\dots, h_m(x_1 \dots x_n))$$
$$\text{con} \quad gr(g) < k \quad y \quad gr(h_i) < k \quad i=1 \dots m$$

Por hipótesis inductiva, existen $G(x_1 \dots x_{m+1})$, $H_1(x_1 \dots x_{n+1}), \dots, H_m(x_1, \dots, x_{n+1})$ fórmulas de $\mathcal{L}n$ que representan a $g, h_1, \dots, h_m$ respectivamente. Supondremos en este inciso la representabilidad fuerte de $g, h_1, \dots, h_m$ y demostraremos que la fórmula

$$\varphi_f(x_1, \dots x_{n+1}) \underset{\text{df}}{\equiv} (\exists x_{p+1}) \dots (\exists x_{p+m}) [G(x_{p+1}, \dots x_{p+m}, x_{n+1}) \wedge$$
$$\wedge H_1(x_1, \dots x_n, x_{p+1}) \wedge \dots \wedge H_m(x_1, \dots x_n, x_{p+m})]$$

representa fuertemente a f en $\overline{AP}$.

i. Sean $k_1, k_2, \dots, k_n, k_{n+1} \in \mathbb{N}$ tales que $f(k_1, \dots, k_n) = k_{n+1}$. En ese caso tenemos $g(h_1(k_1 \dots k_n), \dots, h_m(k_1, \dots k_n)) = k_{n+1}$ y existen $k'_1, k'_2, \dots, k'_m \in \mathbb{N}$ tales que $k'_i = h_i(k_1 \dots k_n)$ $i=1 \dots m$.

Dada la representabilidad de $g, h_1, \dots, h_m$, tenemos:
$\vdash_{AP} G(\bar{k}'_1, \dots, \bar{k}'_m, \bar{k}_{n+1})$ y $\vdash_{AP} H_i(\bar{k}_1, \dots \bar{k}_n, \bar{k}'_i)$ $i=1 \dots m$.

de donde

$\vdash_{AP} G(\bar{k}_1' \ldots \bar{k}_m', \bar{k}_{n+1}) \wedge H_1(\bar{k}_1 \ldots \bar{k}_n, \bar{k}_1') \wedge \ldots \wedge H_m(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n, \bar{k}_m')$

Sea $p = \text{máx}\{i \mid x_i \text{ ocurre libre en } G, H_1, \ldots, H_m\}$
Aplicando la regla $\exists$ m veces, tenemos:

$$\vdash_{AP} (\exists x_{p+1}) \ldots (\exists x_{p+m}) [G(x_{p+1}, \ldots, x_{p+m}, \bar{k}_{n+1}) \wedge H_1(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n, x_{p+1}) \wedge \ldots \wedge H_m(\bar{k}_1 \ldots \bar{k}_n, x_{p+m})]$$

es decir

$$\vdash_{AP} \varphi_f(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n, \bar{k}_{n+1})$$

ii. Como $g, h_1, \ldots, h_m$ son fuertemente representables en $\overline{AP}$, en particular tenemos

$\vdash_{AP} (\exists x_{n+1}) G(x_{p+1}, \ldots, x_{p+m}, x_{n+1})$ y

$\vdash_{AP} (\exists x_{p+i}) H_i(x_1 \ldots x_n, x_{p+i}) \quad i = 1 \ldots m$

aplicando la regla E a estas fórmulas y formando su conjunción obtenemos

$\vdash_{AP} G(x_{p+1}, \ldots, x_{p+m}, x_{n+1}) \wedge H_1(x_1 \ldots x_n, x_{p+1}) \wedge \ldots \wedge H_m(x_1 \ldots x_n, x_{p+m})$

y, por la regla $\exists$ aplicada m+1 veces

$$\vdash_{AP} (\exists x_{n+1})(\exists x_{p+1}) \ldots (\exists x_{p+m}) [G(x_{p+1}, \ldots, x_{p+m}, x_{n+1}) \wedge H_1(x_1 \ldots x_n, x_{p+1}) \wedge \ldots \wedge H_m(x_1 \ldots x_n, x_{p+m})]$$

es decir $\vdash_{AP} (\exists x_{n+1}) \varphi_f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \quad \ldots (\#)$

Falta ahora demostrar la unicidad de x_{n+1}.
Supongamos que $\varphi_f(x_1 \ldots x_n, x_{n+1})$ y $\varphi_f(x_1 \ldots x_n, y)$

1. $\varphi_f(x_1 \ldots x_n, x_{n+1})$ Hip
2. $\varphi_f(x_1 \ldots x_n, y)$ Hip
3. $(\exists x_{p+1}) \ldots (\exists x_{p+m}) (G(x_{p+1}, \ldots, x_{p+m}, x_{n+1}) \wedge H_1(x_1 \ldots x_p) \wedge \ldots \wedge H_m(x_1 \ldots, x_{p+m}))$
4. $(\exists x_{p+1}) \ldots (\exists x_{p+m}) (G(x_{p+1}, \ldots, x_{p+m}, y) \wedge H_1(x_1 \ldots x_n, x_{p+1}) \wedge \ldots \wedge H_m(x_1 \ldots x_{p+m}))$

Sean $y_1, \ldots, y_m$ variables que no ocurren en $\varphi_f(x_1 \ldots x_n, x_{n+1})$.

En este caso

$G(y_1, y_2, \ldots y_m, y) \wedge H_1(x_1 \ldots x_n, y_1) \wedge \ldots \wedge H_m(x_1 \ldots x_n, y_m)$

es similar a

$G(x_{p+1}, \ldots x_{p+m}, y) \wedge H_1(x_1 \ldots x_n, x_{p+1}) \wedge \ldots \wedge H_m(x_1 \ldots x_n, x_{p+m})$

5. $(\exists y_1) \ldots (\exists y_m)\left[G(y_1, \ldots y_m, y) \wedge H_1(x_1 \ldots x_n, y_1) \wedge \ldots \wedge H_m(x_1 \ldots x_n, y_m)\right]$ de 4

6. $G(x_{p+1}, \ldots x_{p+m}, x_{n+1}) \wedge H_1(x_1 \ldots x_n, x_{p+1}) \wedge \ldots \wedge H_m(x_1 \ldots x_n, x_{p+m})$ Regla E a 3

7. $G(y_1 \ldots y_m, y) \wedge H_1(x_1 \ldots x_n, y_1) \wedge \ldots \wedge H_m(x_1 \ldots x_n, y_m)$ Regla E a 5.

8. $x_{p+i} \approx y_i \quad i = 1 \ldots m$ a partir de 6 y 7 y el hecho de que $\vdash_{AP} (\exists_1 x_{p+i}) H_i(x_1 \ldots x_n, x_{p+i}) \quad i = 1 \ldots m$

9. $G(y_1 \ldots y_m, x_{n+1})$ Tautología en 6 y aplicando 8 con L_7 a $G(x_{p+1}, \ldots x_{p+m}, x_{n+1})$

10. $G(y_1 \ldots y_m, y)$ Tautología en 7.

11. $y \approx x_{n+1}$ Pues por hipótesis $\vdash_{AP} (\exists_1 x_{n+1}) G(x_{n+1})$

De 1-11 obtenemos $\vdash_{AP} \varphi_f(x_1 \ldots x_n, x_{n+1}) \wedge \varphi_f(x_1 \ldots x_n, y) \rightarrow x_{n+1} \approx y$.

Al generalizar esta fórmula y utilizando (#) obtenemos $\vdash_{AP} (\exists_1 x_{n+1}) \varphi_f(x_1 \ldots x_n, x_{n+1})$

B.

Si f fué definida por recursión entonces existen funciones $g(x_1 \ldots x_n)$ y $h(x_1 \ldots x_n, y, z)$ recursivas primitivas tales que: $gr(g) < k$, $gr(h) < k$ y

$$\mathrm{I}\begin{cases} f(x_1 \ldots x_n, 0) = g(x_1 \ldots x_n) \\ f(x_1 \ldots x_n, y+1) = h(x_1 \ldots x_n, y, f(x_1 \ldots x_n, y)) \end{cases}$$

Pero $f(x_1,\dots x_n,y)=z$ si y sólo si existe una sucesión finita de números naturales $b_0, b_1 \dots b_y$ tales que
$b_0 = g(x_1,\dots x_n)$ y
$b_{w+1} = h(x_1\dots x_n, w, b_w)$ con $w+1 \leq y$ y $b_y = z$.
Por el lema 3.7 (pág 61), la referencia a sucesiones finitas de números puede ser parafraseada en términos de la función β, que por el lema 3.6 (c) (pág 59) es fuertemente representable en $\overline{AP}$.
Supongamos que las funciones g y h son representables en $\overline{AP}$ por las fórmulas $G(x_1,\dots x_n, x_{n+1})$ y $H(x_1,\dots x_{n+3})$ respectivamente. Demostraremos que $f(x_1\dots x_n, x_{n+1})$ es representada en $\overline{AP}$ por la fórmula $F(x_1\dots x_{n+2}) \underset{def}{=}$

$$(\exists u)(\exists v)[\exists w\,(\varphi_\beta(u,v,0,w)\wedge G(x_1,\dots x_n, w))\wedge\varphi_\beta(u,v,x_{n+1},x_{n+2})\wedge$$
$$\wedge(w)(w<x_{n+1}\rightarrow\exists y\,\exists z\,(\varphi_\beta(u,v,w,y)\wedge\varphi_\beta(u,v,sw,z)\wedge H(x_1,\dots,x_n,y,z)))]$$

i. Supongamos que $f(k_1,\dots,k_n,p)=m$.
Si $p=0$ entonces $m=g(k_1\dots k_n)$. Consideremos la sucesión cuyo único elemento es m. Por el lema 3.7, existen números b y c tales que $\beta(b,c,0)=m$ y entonces ya que β es fuertemente representable en $\overline{AP}$ por φ_β, tenemos
$\vdash_{\overline{AP}} \varphi_\beta(\bar{b},\bar{c},0,\bar{m})\ \dots$ (*)
Ahora, si $g(k_1,\dots k_n)=m$ entonces $\vdash_{\overline{AP}} G(\bar{k}_1\dots\bar{k}_n,\bar{m})$.
Así, $\vdash_{\overline{AP}} \varphi_\beta(\bar{b},\bar{c},0,\bar{m})\wedge G(\bar{k}_1\dots\bar{k}_n,\bar{m})$. Aplicando la regla $\exists$ a esta fórmula, obtenemos:
$\vdash_{\overline{AP}} (\exists w)(\varphi_\beta(\bar{b},\bar{c},0,w)\wedge G(\bar{k}_1,\dots,\bar{k}_n,w))\dots$ (**)

Ahora, la fórmula
$(w)(w<0\rightarrow\exists y\,\exists z\,(\varphi_\beta(\bar{b},\bar{c},w,y)\wedge\varphi_\beta(\bar{b},\bar{c},sw,z)\wedge H(\bar{k}_1,\dots\bar{k}_n,w,y,z)))\dots$ (#)
es demostrable en $\overline{AP}$ pues $\vdash_{\overline{AP}} \neg(w<0)$

Formando la conjunción de (*), (**) y (#) y aplicando regla $\exists$ obtenemos $\vdash_{\overline{AP}} F(\bar{k}_1,\dots\bar{k}_n,\bar{p},\bar{m})$ para $p=0$.

Si $p>0$ entonces $f(k_1 \dots k_n, p)$ fué calculada a través de las ecuaciones de (I) en $p+1$ pasos.
Sea $r_i = f(k_1 \dots k_n, i)$. Así, por el lema 3.7, para la sucesión de números $r_0, r_1, \dots, r_p$ existen números b y c tales que $\beta(b,c,i) = r_i$, $i = 0 \dots p$. Así, por el lema 3.6, $\vdash_{AP} \varphi_\beta(\bar{b}, \bar{c}, \bar{i}, \bar{r}_i)$, $i = 0 \dots \bar{p}$.
En particular, $\beta(b,c,0) = r_0 = f(k_1 \dots k_n, 0) = g(k_1 \dots k_n)$. y entonces $\vdash_{AP} \varphi_\beta(\bar{b}, \bar{c}, 0, \bar{r}_0) \wedge G(\bar{k}_1 \dots \bar{k}_n, \bar{r}_0)$ que al aplicarle regla $\exists$ proporciona
$\vdash_{AP} (\exists w)(\varphi_\beta(\bar{b}, \bar{c}, 0, w) \wedge G(\bar{k}_1 \dots \bar{k}_n, w)) \dots (*_1)$

Ya que $r_p = f(k_1 \dots k_n, p) = m$, tenemos $\beta(b,c,p) = m$ y así
$\vdash_{AP} \varphi_\beta(\bar{b}, \bar{c}, \bar{p}, \bar{m}) \dots (*_2)$

Para $i = 0, \dots, p-1$ tenemos $\beta(b,c,i) = r_i = f(k_1 \dots k_n, i)$ y
$\beta(b,c,i+1) = r_{i+1} = f(k_1 \dots k_n, i+1) = h(k_1 \dots k_n, i, f(k_1 \dots k_n, i)) =$
$= h(k_1 \dots k_n, i, r_i)$. Entonces
$\vdash_{AP} \varphi_\beta(\bar{b}, \bar{c}, \bar{i}, \bar{r}_i) \wedge \varphi_\beta(\bar{b}, \bar{c}, s\bar{i}, \bar{r}_{i+1}) \wedge H(\bar{k}_1 \dots \bar{k}_n, \bar{i}, \bar{r}_i, \bar{r}_{i+1})$
que por la regla $\exists$ se transforma en
$\vdash_{AP} (\exists y)(\exists z)(\varphi_\beta(\bar{b}, \bar{c}, \bar{i}, y) \wedge \varphi_\beta(\bar{b}, \bar{c}, s\bar{i}, z) \wedge H(\bar{k}_1 \dots \bar{k}_n, \bar{i}, y, z))$
y entonces por el lema 2.5. (d) (pág 42) tenemos
$\vdash_{AP} (w)(w < \bar{p} \rightarrow \exists y \exists z(\varphi_\beta(\bar{b}, \bar{c}, w, y) \wedge \varphi_\beta(\bar{b}, \bar{c}, sw, z) \wedge H(\bar{k}_1 \dots \bar{k}_n, w, y, z))) \dots (*_3)$

Formando la conjunción de $(*_1)$, $(*_2)$ y $(*_3)$ y aplicando regla $\exists$, obtenemos $\vdash_{AP} F(\bar{k}_1 \dots \bar{k}_n, \bar{p}, \bar{m})$ $p>0$.

ii. Debemos probar que $\vdash_{AP} (\exists_1 x_{n+2}) F(\bar{k}_1, \dots \bar{k}_n, \bar{p}, x_{n+2})$.
La prueba será por inducción sobre p en el metalenguaje.
Por (i) tenemos $\vdash_{AP} F(\bar{k}_1, \dots \bar{k}_n, \bar{p}, \bar{m})$ que al aplicarle regla $\exists$ obtenemos $\vdash_{AP} (\exists x_{n+2}) F(\bar{k}_1, \dots \bar{k}_n, \bar{p}, x_{n+2}) \dots (\#\#)$
Así, bastará ahora probar la unicidad.

a. Para $p=0$

Supongamos que $f(k_1,\dots,k_n,0)=m$. Consideremos la sucesión cuyo único elemento es m. Así, existen números b y c tales que $\beta(b,c,0)=m$ y entonces $\vdash_{\overline{AP}} \varphi_\beta(\bar{b},\bar{c},0,\bar{m})$ y ya que β es fuertemente representable en $\overline{AP}$,

$\vdash_{\overline{AP}} (\exists_1 x_{n+2})\varphi_\beta(\bar{b},\bar{c},0,x_{n+2}) \dots (1)$

Ya que las fórmulas (**) y (#) de la página 65 permanecen para $p=0$, podemos formar la conjunción de (**), (1) y (#). De esta conjunción y escribiendo al principio el cuantificador $(\exists_1 x_{n+2})$, obtenemos

$\vdash_{\overline{AP}} (\exists_1 x_{n+2}) F(\bar{k}_1,\dots,\bar{k}_n,0,x_{n+2})$.

b. Supongamos que $\vdash_{\overline{AP}} (\exists_1 x_{n+2}) F(\bar{k}_1,\dots,\bar{k}_n,\bar{p},x_{n+2})$

Sean $k_1,\dots,k_n,\alpha,\beta,\gamma$ números naturales tales que:

$g(k_1\dots k_n)=\alpha$

$f(k_1\dots k_n,p)=\beta$

$h(k_1,\dots,k_n,p,\beta)=f(k_1,\dots k_n,p+1)=\gamma$

Consideremos la siguiente deducción.

1. $H(\bar{k}_1,\dots\bar{k}_n,\bar{p},\bar{\beta},\bar{\gamma})$ TEO. (h representable en $\overline{AP}$)
2. $G(\bar{k}_1,\dots,\bar{k}_n,\bar{\alpha})$ TEO. (g representable en $\overline{AP}$)
3. $F(\bar{k}_1,\dots,\bar{k}_n,\bar{p},\bar{\beta})$ TEO. (f representable en $\overline{AP}$ para $p<p+1$)
4. $F(\bar{k}_1,\dots\bar{k}_n,\overline{p+1},\bar{\gamma})$ TEO. (De (##))
5. $(\exists_1 x_{n+2}) F(\bar{k}_1,\dots\bar{k}_n,\bar{p},x_{n+2})$ Hip. Inductiva.
6. $F(\bar{k}_1,\dots\bar{k}_n,\overline{p+1},x_{n+2})$ Hip. adicional. (P.D. $x_{n+2}=\bar{\gamma}$)
7. $\exists w(\varphi_\beta(u,v,0,w)\wedge G(k_1,\dots,k_n,w))$ Regla E a 6
8. $\varphi_\beta(u,v,\overline{p+1},x_{n+2})$ Regla E a 6
9. $(w)(w<\overline{p+1}\rightarrow \exists y\exists z(\varphi_\beta(u,v,w,y)\wedge\varphi_\beta(u,v,sw,z)\wedge H(\bar{k}_1,\dots,\bar{k}_n,w,y,z)))$ Regla E a 6
10. $(w)(w<\bar{p}\rightarrow \exists y\exists z(\varphi_\beta(u,v,w,y)\wedge\varphi_\beta(u,v,sw,z)\wedge H(\bar{k}_1\dots\bar{k}_n,w,y,z)))$ De 9 y $p<p+1$.
11. $\varphi_\beta(u,v,\bar{p},y)\wedge\varphi_\beta(u,v,\overline{p+1},z)\wedge H(\bar{k}_1,\dots\bar{k}_n,\bar{p},y,z)$ De 9, $p<p+1$, M.P y Regla E.

12. $\varphi_\beta(u, v, \bar{p}, y)$ Tautología a 11
13. $F(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n, \bar{p}, y)$ De 7, 10 y 12.
14. $y = \bar{\beta}$ De 3, 5 y 13.
15. $H(\bar{k}_1, \dots \bar{k}_n, \bar{p}, y, z)$ Tautología a 11.
16. $H(\bar{k}_1, \dots \bar{k}_n, \bar{p}, \bar{\beta}, z)$ De 14 y 15.
17. $\bar{\gamma} = z$ De 1 y 15 y este teorema aplicado a H, $(gr(h) < k)$.
18. $\varphi_\beta(u, v, \overline{p+1}, z)$ Tautología a 11
19. $\varphi_\beta(u, v, \overline{p+1}, \bar{\gamma})$ De 17 y 18
20. $x_{n+2} = \bar{\gamma}$ De 8 y 19 y lema 3.6.(c).

De 1-20 obtenemos $\vdash_{AP} (\exists_1 x_{n+2})\, F(\bar{k}_1, \dots \bar{k}_n, \overline{p+1}, x_{n+2})$
Esto completa la inducción sobre p.

C.

Supongamos que para cualesquiera $x_1, \dots, x_n$ existe y tal que $g(x_1, \dots x_n, y) = 0$ y supongamos que g es representable en AP por la fórmula $G(x_1, \dots x_{n+2})$.
Sea $f(x_1, \dots x_n) = \mu y\,(g(x_1, \dots x_n, y) = 0$.
Entonces f es representable en AP por la fórmula
$\Psi(x_1, \dots x_{n+1}) \underset{df}{=} G(x_1, \dots x_{n+1}, 0) \wedge (y)(y < x_{n+1} \to \neg G(x_1, \dots x_n, y, 0))$

i. Sean $k_1, \dots k_n, m$ números tales que $f(k_1, \dots k_n) = m$. Entonces $g(k_1, \dots k_n, m) = 0$ y para $k < m$ tenemos $g(k_1, \dots k_n, k) \neq 0$.
Así,
$\vdash_{AP} G(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n, \bar{m}, 0) \dots (1)$ y
$\vdash_{AP} \neg G(\bar{k}_1, \dots \bar{k}_n, \bar{k}, 0)$ para $k < m$. De este hecho, por el lema 2.5 (d) (pág 42) obtenemos
$\vdash_{AP} (y)(y < \bar{m} \to \neg G(\bar{k}_1, \dots \bar{k}_n, y, 0)) \dots (2)$
Así, de (1) y (2) obtenemos
$\vdash_{AP} \Psi(\bar{k}_1, \dots \bar{k}_n, \bar{m})$

ii. De (i) tenemos $\vdash_{\overline{AP}} \psi(\overline{k}_1,\ldots,\overline{k}_n,\overline{m})$ que al aplicarle Regla $\exists$ resulta $\vdash_{\overline{AP}} (\exists x_{n+1})\psi(\overline{k}_1,\ldots,\overline{k}_n,x_{n+1})\ldots(\alpha)$
Falta ahora demostrar la unicidad

1. $G(\overline{k}_1,\ldots,\overline{k}_n,u,\overline{0}) \wedge (y)(y<u \rightarrow \neg G(\overline{k}_1,\ldots,\overline{k}_n,y,\overline{0}))$ Hip
2. $G(\overline{k}_1,\ldots,\overline{k}_n,v,\overline{0}) \wedge (y)(y<v \rightarrow \neg G(\overline{k}_1,\ldots\overline{k}_n,y,\overline{0}))$ Hip
3. $G(\overline{k}_1,\ldots\overline{k}_n,u,\overline{0})$ Tautología a 1
4. $G(\overline{k}_1,\ldots\overline{k}_n,v,\overline{0})$ Tautología a 2
5. $(y)(y<v \rightarrow \neg G(\overline{k}_1,\ldots\overline{k}_n,y,\overline{0}))$ Tautología a 2.
6. $(y)(y<u \rightarrow \neg G(\overline{k}_1,\ldots\overline{k}_n,y,\overline{0}))$ Tautología a 1
7. $u<v$ Hip
8. $\neg G(\overline{k}_1,\ldots\overline{k}_n,u,\overline{0})$ De 5 y 7
9. $u<v \rightarrow \neg G(\overline{k}_1,\ldots\overline{k}_n,u,\overline{0})$ De 7 y 8
10. $u<v \rightarrow G(\overline{k}_1,\ldots\overline{k}_n,u,\overline{0})$ De 3 y 7 con L_1 y M.P.
11. $\neg(u<v)$ De 9 y 10 con L_3 y M.P.
12. $v<u$ Hip
13. $\neg G(\overline{k}_1,\ldots\overline{k}_n,v,\overline{0})$ De 6 y 12
14. $v<u \rightarrow \neg G(\overline{k}_1,\ldots\overline{k}_n,v,\overline{0})$ De 12 y 13
15. $v<u \rightarrow G(\overline{k}_1,\ldots\overline{k}_n,v,\overline{0})$ De 4 y 12 con L_1 y M.P.
16. $\neg(v<u)$ De 14 y 15 con L_3 y M.P.
17. $v<u \vee u<v \vee u\approx v$ Teorema
18. $u\approx v$ De 11, 16 y 17 con Tautología y M.P.

Así, de 1-18 $\vdash_{\overline{AP}} \psi(\overline{k}_1,\ldots\overline{k}_n,u) \wedge \psi(\overline{k}_1,\ldots,\overline{k}_n,v) \rightarrow u\approx v \ldots(\beta)$

De (α) y (β) Tenemos $\vdash_{\overline{AP}} (\exists_1 x_{n+1})\psi(\overline{k}_1,\ldots,\overline{k}_n,x_{n+1})$

De A. B. y C., Toda función recursiva es representable en $\overline{AP}$.

■

TEOREMA 3.9. Toda función representable en $\overline{AP}$ es fuertemente representable en $\overline{AP}$.

Dem.

Supongamos que $f(x_1,\dots,x_n)$ es representable en $\overline{AP}$ por la fórmula $\varphi_f(x_1,\dots,x_{n+1})$. Así, para cualesquiera $k_1,\dots,k_{n+1}\in\mathbb{N}$

1. Si $f(k_1,\dots,k_n)=k_{n+1}$ entonces $\vdash_{\overline{AP}} \varphi_f(\bar{k}_1,\dots,\bar{k}_{n+1})$
2. $\vdash_{\overline{AP}} (\exists_1 x_{n+1})\varphi_f(\bar{k}_1,\dots,\bar{k}_n,x_{n+1})$

Demostraremos que la fórmula

$\psi_f(x_1,\dots,x_{n+1}) \underset{\text{def}}{=}$

$[(\exists_1 x_{n+1})\varphi_f(x_1,\dots,x_{n+1})\wedge\varphi_f(x_1,\dots,x_{n+1})]\vee[\neg(\exists_1 x_{n+1})\varphi_f(x_1,\dots,x_{n+1})\wedge x_{n+1}\approx 0]$

representa fuertemente a f en $\overline{AP}$.

i. Sean $k_1,\dots,k_{n+1}\in\mathbb{N}$ tales que $f(k_1,\dots,k_n)=k_{n+1}$

Así, por (1) y (2) $\vdash_{\overline{AP}}(\exists_1 x_{n+1})\varphi_f(\bar{k}_1,\dots,\bar{k}_n,x_{n+1})\wedge\varphi_f(\bar{k}_1,\dots,\bar{k}_{n+1})$

y entonces

$\vdash_{\overline{AP}}[(\exists_1 x_{n+1})\varphi_f(\bar{k}_1,\dots,\bar{k}_n,x_{n+1})\wedge\varphi_f(\bar{k}_1,\dots,\bar{k}_{n+1})]\vee[\neg(\exists x_{n+1})\varphi_f(\bar{k}_1,\dots,\bar{k}_n,x_{n+1})\wedge\bar{k}_{n+1}\approx 0]$

De modo que:

$\vdash_{\overline{AP}}\psi_f(\bar{k}_1,\dots,\bar{k}_n,\bar{k}_{n+1})$

ii.

a. Demostraremos $\vdash_{\overline{AP}}(\exists x_{n+1})\psi_f(x_1,\dots,x_{n+1})$

1. $\neg(x_1)\dots(x_n)(\exists x_{n+1})\psi_f(x_1,\dots,x_{n+1})$ HIP
2. $(\exists x_1)\dots(\exists x_n)(x_{n+1})\neg\psi_f(x_1,\dots,x_{n+1})$ De 1
3. $(x_{n+1})\neg\psi_f(x_1,\dots,x_{n+1})$ Regla E a 2
4. $(x_{n+1})[(\neg(\exists_1 x_{n+1})\varphi_f(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})\vee\neg\varphi_f(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}))\wedge$
$\wedge((\exists_1 x_{n+1})\varphi_f(x_1,\dots,x_{n+1})\vee\neg(x_{n+1}\approx 0))]$ De 3.
5. $[\neg(\exists_1 x_{n+1})\varphi_f(x_1,\dots x_n,x_{n+1})\vee(x_{n+1})\neg\varphi_f(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})]\wedge$
$\wedge[(\exists_1 x_{n+1})\varphi_f(x_1,\dots,x_{n+1})\vee(x_{n+1})\neg(x_{n+1}\approx 0)]$ De 4
6. Utilizando $\vdash_{\overline{AP}}[(A\vee B)\wedge(C\vee D)]\to[(A\wedge C)\vee(B\wedge C)\vee(A\wedge D)\vee(B\wedge D)]$ tenemos:

$[\neg(\exists_1 x_{n+1})\varphi_f(x_1,\dots,x_{n+1})\wedge(\exists_1 x_{n+1})\varphi_f(x_1,\dots,x_{n+1})]\vee$

$\vee[(x_{n+1})\neg\varphi_f(x_1,\dots,x_{n+1})\wedge(\exists_1 x_{n+1})\varphi_f(x_1,\dots,x_{n+1}))]\vee$

$\vee[\neg(\exists_1 x_{n+1})\varphi_f(x_1,\dots,x_{n+1})\wedge(x_{n+1})\neg(x_{n+1}\approx 0)]\vee$

$\vee[(x_{n+1})\neg\varphi_f(x_1,\dots,x_{n+1})\wedge(x_{n+1})\neg(x_{n+1}\approx 0)]$

7. Cada uno de los disyuntos de (6) conlleva a una fórmula de la forma $\varphi \wedge \neg\varphi$.

Así, de 1-7 concluimos $\vdash_{AP} (x_1)\ldots(x_n)(\exists x_{n+1})\,\psi_f(x_1,\ldots,x_{n+1})$

de donde $\vdash_{AP} (\exists x_{n+1})\,\psi_f(x_1,\ldots,x_{n+1})\ldots (*_1)$

b. Demostraremos $\vdash_{AP} (\exists_1 x_{n+1})\,\psi_f(x_1,\ldots,x_{n+1})$

1. $\neg(u)(v)\big(\psi_f(x_1,\ldots,x_n,u) \wedge \psi_f(x_1\ldots x_n,v) \to u \approx v\big)$ Hip
2. $(\exists u)(\exists v)\big(\psi_f(x_1,\ldots,x_n,u) \wedge \psi_f(x_1,\ldots,x_n,v) \wedge \neg(u \approx v)\big)$ De 1
3. $\psi_f(x_1,\ldots,x_n,u) \wedge \psi_f(x_1,\ldots,x_n,v) \wedge \neg(u \approx v)$ Regla E a 2.
4. $\neg(u \approx v)$ Tautología a 3
5. $\psi_f(x_1,\ldots x_n,u) \wedge \psi_f(x_1,\ldots,x_n,v)$ Tautología a 3
6. $\big[\big((\exists_1 x_{n+1})\varphi_f(x_1,\ldots,x_{n+1}) \wedge \varphi_f(x_1,\ldots,x_n,u)\big) \vee \big(\neg(\exists_1 x_{n+1})\varphi_f(x_1,\ldots,x_{n+1}) \wedge u \approx \odot\big)\big] \wedge$ $\wedge\big[\big((\exists_1 x_{n+1})\varphi_f(x_1,\ldots,x_{n+1}) \wedge \varphi_f(x_1,\ldots,x_n,v)\big) \vee \big(\neg(\exists_1 x_{n+1})\varphi_f(x_1,\ldots,x_{n+1}) \wedge v \approx \odot\big)\big]$ De 5.
7. Utilizando $\vdash_{AP} [(P \vee Q) \wedge (R \vee S)] \to [(P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge S) \vee (Q \wedge S)]$ en 6:
$[(\exists_1 x_{n+1})\varphi_f(x_1,\ldots,x_{n+1}) \wedge \varphi_f(x_1,\ldots,x_n,u) \wedge \varphi_f(x_1,\ldots,x_n,v)] \vee$
$\vee[\neg(\exists_1 x_{n+1})\varphi_f(x_1,\ldots,x_{n+1}) \wedge u \approx \odot \wedge (\exists_1 x_{n+1})\varphi_f(x_1,\ldots,x_{n+1}) \wedge \varphi_f(x_1,\ldots,x_n,v)] \vee$
$\vee[(\exists_1 x_{n+1})\varphi_f(x_1,\ldots,x_{n+1}) \wedge \varphi_f(x_1,\ldots,x_n,u) \wedge \neg(\exists_1 x_{n+1})\varphi_f(x_1,\ldots x_{n+1}) \wedge v \approx \odot] \vee$
$\vee[\neg(\exists_1 x_{n+1})\varphi_f(x_1,\ldots,x_{n+1}) \wedge u \approx \odot \wedge v \approx \odot]$
8. Utilizando $\psi \leftrightarrow \alpha \wedge \neg\alpha \Rightarrow \psi \vee \varphi \leftrightarrow \varphi$ en 7, tenemos
$[(\exists_1 x_{n+1})\varphi_f(x_1,\ldots,x_{n+1}) \wedge \varphi_f(x_1,\ldots,x_n,u) \wedge \varphi_f(x_1,\ldots,x_n,v)] \vee$
$\vee[\neg(\exists_1 x_{n+1})\varphi_f(x_1\ldots x_{n+1}) \wedge u \approx \odot \wedge v \approx \odot]$
9. $[(\exists_1 x_{n+1})\varphi_f(x_1,\ldots,x_{n+1}) \wedge \varphi_f(x_1,\ldots,x_n,u) \wedge \varphi_f(x_1\ldots x_n,v)] \to u \approx v$
10. $[\neg(\exists_1 x_{n+1})\varphi_f(x_1,\ldots,x_{n+1}) \wedge u \approx \odot \wedge v \approx \odot] \to u \approx v$.
11. $u \approx v$ De 8, 9 y 10 por Tautología.
12. $\neg(u \approx v) \wedge (u \approx v)$ De 4 y 11 por Tautología

Así, de 1-12 $\vdash_{AP} (u)(v)\big(\psi_f(x_1,\ldots,x_n,u) \wedge \psi_f(x_1,\ldots x_n,v) \to u \approx v\big)$

Formando la conjunción de esta última fórmula y $(*_1)$ obtenemos $\vdash_{AP} (\exists_1 x_{n+1})\,\psi_f(x_1,\ldots x_n,x_{n+1})$

■

COROLARIO 3.10. Toda función recursiva es fuertemente representable en $\overline{A^TP}$. Ejercicio 10. ■

COROLARIO 3.11. Toda relación recursiva es expresable en $\overline{A^TP}$. Dejamos la prueba al lector. Ejercicio 11. ■

EJERCICIOS

1. Demostrar que si R_1 y R_2 son relaciones expresables en $\overline{A^TP}$ entonces no R_1 y R_1 o R_2 son expresables en $\overline{A^TP}$.

2. Demostrar el inciso (b) del Lema 3.2 (pág 51)

3. Demostrar los incisos (c) y (d) del Teorema 3.3 (pág 54-55)

4. Demostrar que la relación $x+y=z$ es expresada en $\overline{A^TP}$ por la fórmula $x_1+x_2 \approx x_3$, mientras que la relación $x \cdot y = z$ lo es por la fórmula $x_1 \cdot x_2 \approx x_3$.

5. Demostrar que si f es fuertemente representable en $\overline{A^TP}$ entonces f es representable en $\overline{A^TP}$.

6. Demostrar los incisos (a), (b), (d), (e) del Teorema 3.4 (pág 58)

7. Demostrar con todo detalle el teorema 3.5 (pág 59) siguiendo la sugerencia ahí indicada.

8. La relación "representante" o "gráfica" de una función $f(x_1 \ldots x_n)$ es la relación $f(x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}$. Probar que si $f(x_1 \ldots x_n)$ es representable en $\overline{A^TP}$ entonces la relación "representante" es expresable en $\overline{A^TP}$.

9. Demostrar el inciso (b) del Lema 3.6 (pág 59)

10. Demostrar el Corolario 3.10

11. Demostrar el Corolario 3.11.

Capítulo 4.
Argumento de Gödel

§ 1. HEURÍSTICA DEL PROBLEMA.

El sistema $\overline{AP}$ formaliza, en un lenguaje de primer orden, los axiomas de Peano para la aritmética de los números naturales. Si bien sabemos que $\overline{AP}$ no es categórica ni $\aleph_\alpha$ categórica, cabe la posibilidad de que sea completa. Si suponemos que los axiomas de $\overline{AP}$ son verdaderos en $\mathcal{N}$ entonces $\overline{AP}$ es completa si y sólo si $\overline{AP} = Th(\mathcal{N})$.

Bajo tales circunstancias, podríamos afirmar que se ha logrado una axiomatización completa, es decir, sin que falte ningún principio de la aritmética elemental. De esta manera, quedamos colocados ante un problema que fué finalmente resuelto por Kurt Gödel en el año de 1931.

Partamos, como lo hizo Gödel, de la siguiente interrogante: ¿es consistente y completo el sistema $\overline{AP}$? En su momento, la respuesta a esta pregunta surgió del analisis de un sistema formal análogo al nuestro. Sin embargo, responder a tales interrogantes respecto a este sistema particular nos llevará a la solución del problema en general. La causa de ello es que la aritmética se ubica en el corazón mismo de las investigaciones de los sistemas formales. Prueba de ello es que los métodos sintácticos de investigación (definición y estudio de las propiedades de los sistemas) son de naturaleza aritmética. (definiciones recursivas, demostraciones metamatemáticas por inducción). Fué precisamente dicho papel central lo que llevó a Gödel a ver en la aritmética una clave para atacar los problemas de consistencia y completez.

Retomemos la pregunta: ¿es consistente y completo el sistema $\overline{AP}$? Si hemos de seguir la vía heurística antes que la lógica, debemos partir de suponer el resultado deseado e, invirtiendo el recorrido, desglozar el problema en sus componentes.

Si, por ejemplo, nos inclinamos a responder afirmativamente la pregunta, debemos buscar razones suficientes para garantizar la respuesta. Si, por el contrario, respondemos negativamente, debemos investigar las causas que originan tales fallos; podemos, por ejemplo, imaginar condiciones bajo las que el sistema es o bien inconsistente o bien incompleto. Siguiendo esta última idea, supongamos que en $\mathcal{L}_\eta$ hay un enunciado que afirma que es indemostrable en $\overline{AP}$; es decir, un enunciado G que, bajo la interpretación usual de $\overline{AP}$, afirme: "el enunciado G es indemostrable en $\overline{AP}$". Estaríamos, en tal caso, ante una versión modificada de la paradoja del mentiroso: "yo miento". La sóla existencia de tal enunciado pondría en claro que: o $\overline{AP}$ formaliza inacabadamente la aritmética o no la formaliza. En efecto;

i. si $\vdash_{\overline{AP}} G$ entonces lo que afirma G es falso; (G es falso).

ii. si $\nvdash_{\overline{AP}} G$ entonces lo que afirma G es verdadero; (G es verdadero).

En cualquier caso, con la existencia de G o se demuestra en $\overline{AP}$ algo falso o se deja de demostrar algo verdadero.

Hay obviamente varias objeciones a este endeble argumento. En primer lugar, no se establece con claridad en dónde es G verdadero o falso. En segundo lugar, hemos supuesto que los enunciados metamátemáticos se pueden traducir a $\mathcal{L}_\eta$. Esto es claro si observamos que el enunciado "el enunciado G es indemostrable en $\overline{AP}$" pertenece a la metamatemática, no a la aritmética. Además, hemos supuesto que la traducción de dicho enunciado a $\mathcal{L}_\eta$ es G. Estas objeciones deben permanecer como lo que son: obstáculos, más no impedimentos. Ya que estamos en un terreno puramente especulativo, adoptémoslas como hipótesis y examinemos nuestro argumento.

1. La verdad o falsedad de G se establece en la aritmética informal bajo la interpretación usual de los símbolos de G.
2. Suponemos que algunos enunciados metamatemáticos son traducibles a enunciados aritméticos y que estos últimos son a su vez traducibles a $\mathcal{L}_\eta$
3. Suponemos que $\overline{AP}$ formaliza la aritmética elemental; es decir, suponemos que si $\vdash_{\overline{AP}} \varphi$ entonces $\eta \models \varphi$.

4. Suponemos que hay una fórmula G de $\mathcal{L}_\eta$ que afirma ser indemostrable en $\overline{A}\overline{P}$ según la siguiente traducción:

$$\begin{array}{lll}
\text{METAMATEMÁTICA} \ldots\ldots & G_M: & \text{“El enunciado G es indemostrable en } \overline{A}\overline{P}\text{”} \\
& \downarrow & \\
\text{ARITMÉTICA} \ldots\ldots & G_A & \text{(el enunciado aritmético que traduce a } G_M) \\
& \downarrow & \\
\mathcal{L}_\eta \ldots\ldots\ldots & G & \text{(fórmula de } \overline{A}\overline{P} \text{ que traduce a } G_A \text{ en } \overline{A}\overline{P})
\end{array}$$

Conforme a ésto, la interpretación de G en la aritmética es G_A y la traducción de G_A a la metamatemática es G_M. Así, resulta que, a fin de cuentas, G afirma ser indemostrable en $\overline{A}\overline{P}$ y por ello, indecidible (¡y $\overline{A}\overline{P}$ es incompleto!). En efecto,

i. Si $\vdash_{\overline{AP}} G$ entonces $\eta \models G$ (por 3)
$\eta \models G$ significa que G_A es verdadero.
Al ser G_A verdadero, G_M es verdadero (por 2).
Si G_M es verdadero, el enunciado "El enunciado G es indemostrable en $\overline{A}\overline{P}$" es verdadero, de donde es verdad que $\nvdash_{\overline{AP}} G$.
Entonces $\vdash_{\overline{AP}} G \Rightarrow \nvdash_{\overline{AP}} G$, de donde $\nvdash_{\overline{AP}} G$.

ii. Si $\vdash_{\overline{AP}} \neg G$ entonces $\eta \models \neg G$ (por 3)
$\eta \models \neg G$ significa que G_A es falso
Al ser G_A falso, G_M es falso (por 2)
Si G_M es falso, el enunciado "El enunciado G es indemostrable en $\overline{A}\overline{P}$" es falso y entonces el enunciado "El enunciado G es demostrable en $\overline{A}\overline{P}$" es verdadero, de donde es verdad que $\vdash_{\overline{AP}} G$.
Entonces $\vdash_{\overline{AP}} \neg G \Rightarrow \vdash_{\overline{AP}} G$ y así, si $\vdash_{\overline{AP}} \neg G$ entonces $\eta \models \neg G$ y $\eta \models G$.
Entonces $\nvdash_{\overline{AP}} \neg G$.

NOTA: en (ii) se puede suponer la consistencia de $\overline{A}\overline{P}$ para obtener el mismo resultado.

Conclusiones: bajo las hipótesis 1–4 tenemos
a. G es indecidible en $\overline{A^tP}$
b. $\overline{A^tP}$ es incompleto

Debemos destacar un hecho curioso al que nos enfrentamos con el enunciado G: es verdadero (bajo la interpretación usual de $\overline{A^tP}$) si y sólo si no admite prueba en $\overline{A^tP}$. La causa de ello es que su prueba demuestra su falsedad y la imposibilidad de probarlo lo hace verdadero. Si esto es cierto, se establece la no adecuación del sistema $\overline{A^tP}$ para $\mathcal{N}$: si $\vdash_{\overline{A^tP}} G$ entonces $\mathcal{N}$ no es modelo de $\overline{A^tP}$; si $\nvdash_{\overline{A^tP}} G$ entonces $\overline{A^tP}$ no formaliza completamente a $Th(\mathcal{N})$.

Ahora sabemos que todo formalismo aritmético corre el peligro de ser incompleto. Bastaría demostrar que en el lenguaje del sistema es posible construir un enunciado con las características de G. En tal caso, quedaría demostrada la imposibilidad de axiomatizar la aritmética elemental.

Estas ideas indican una línea de investigación. Para avanzar por este camino, debemos determinar, antes que nada y con toda exactitud, bajo qué condiciones es construible un enunciado que afirme su indemostrabilidad en un sistema aritmético dado. La clave para este problema está dada nuevamente por una paradoja, la paradoja formulada por Richard en 1905 y reformulada por Berry en 1906. El mérito de Gödel consiste en que supo utilizar tales proposiciones paradójicas sin incurrir en contradicciones. Como veremos, Gödel describe la manera de construir enunciados autorreferentes mediante una analogía con dichos razonamientos contradictorios. Basta eliminar las ambigüedades que se presentan y originan las paradojas.

§2. LA PARADOJA DE RICHARD Y EL ARGUMENTO DE GÖDEL.

Podemos formular la paradoja de Richard de la siguiente manera.

1. Algunas propiedades de los números naturales pueden definirse en idioma español. Considérese el conjunto de tales definiciones.
2. Ordénese a dichas definiciones de acuerdo a su longitud (número de letras que forman el enunciado). Si dos definiciones poseen igual longitud, el orden entre ellas es el alfabético.

$$\left.\begin{array}{l} 1 - D_1(x) \\ 2 - D_2(x) \\ 3 - D_3(x) \\ \vdots \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Ordenamiento de las definiciones.} \\ \text{`x' denota el argumento de cada definición.}\end{array}$$

3. Considérese la siguiente definición: un número natural k es <u>Richardiano</u> si y sólo si $D_k(k)$ es falso. Es decir, un número k es Richardiano si y sólo si k no tiene la propiedad D_k (k-ésima).
4. La definición de la propiedad "ser Richardiano" fué dada en el idioma español y define una propiedad de los números naturales. Ocupa entonces un lugar en la lista del inciso (2). Sea éste el r-ésimo lugar. Así, $D_r(x)$ corresponde a la propiedad "ser Richardiano".
5. Si $D_r(r)$ es verdadero entonces r no tiene la propiedad D_r (por la definición de "Richardiano") y entonces $D_r(r)$ es falso.
6. Si $D_r(r)$ es falso entonces r no tiene la propiedad D_r y entonces (por la definición de "Richardiano") r es Richardiano y así $D_r(r)$ es verdadero.
7. Conclusión: $D_r(r)$ es verdadero si y sólo si $D_r(r)$ es falso.

En este argumento hay por lo menos dos falacias. La primera de ellas consiste en la confusión entre lenguaje y metalenguaje. La propiedad "ser Richardiano" depende del lenguaje utilizado y no de los números naturales. Si la enumeración se hiciera en otro idioma, la propiedad "ser Richardiano" la tendrían los números de dicho idioma y no los del lenguaje objeto. La segunda falacia consiste en que para que la propiedad "ser Richardiano" esté bien definida, es necesario poder decidir de un modo <u>efectivo</u> cuáles funciones proposicionales del idioma español definen propiedades de los números naturales y cuáles no. Si esto no es posible, la lista del inciso (2) es irrealizable.

Pasemos ahora al argumento de Gödel y veamos cómo utiliza esta paradoja y marcha por el borde de la misma sin incurrir en contradicciones. La versión que presentamos es una modificación de su argumento heurístico, mismo que hemos estereotipado para compararlo punto por punto con el argumento de Richard.

1. Considérese un formalismo aritmético SF. Algunas propiedades de los números naturales son definibles en su lenguaje $\mathcal{L}_{SF}$. El conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_{SF}$ que expresan propiedades de los números naturales es el conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}^1_{SF}$ (fórmulas de $\mathcal{L}_{SF}$ con una variable libre).
2. Las fórmulas de $\mathcal{L}^1_{SF}$ pueden ordenarse como sigue: a cada símbolo del lenguaje se le asocia un número natural; el orden entre dos fórmulas es el mismo que el orden de las sumas de los números asociados a sus símbolos. Si dos fórmulas poseen el mismo resultado de la suma, igual, el orden entre ellas es el alfabético (dando para ello un orden entre los símbolos del lenguaje).

$$\left.\begin{array}{l} 1 \;—\; \varphi_1(x_{i_1}) \\ 2. \;—\; \varphi_2(x_{i_2}) \\ 3 \;—\; \varphi_3(x_{i_3}) \\ \vdots \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Ordenamiento de las fórmulas de } \mathcal{L}^1_{SF} \\ x_{i_k} \text{ denota la única variable libre de } \varphi_k. \end{array}$$

3. Considérese la siguiente definición: un número k es Gödeliano si y sólo si $\nvdash_{ASF} \varphi_k(\bar{k})$

(ASF denota el conjunto de axiomas propios de S.F)

NOTA: $\varphi_k(\bar{k})$ es la fórmula que resulta al reemplazar en $\varphi_k(x_{i_k})$ el numeral $\bar{k}$ en vez de todas las ocurrencias libres de x_{i_k}.

Sea $\hat{R}$ el conjunto de los números Gödelianos, es decir,
$\hat{R} = \{ k \in \mathbb{N} \mid \not\vdash_{RSF} \varphi_k(\bar{k}) \text{ y } \varphi_k \in \mathcal{L}^1_{SF} \}$ así, $\hat{R} \subseteq \mathbb{N}$

4. La definición de la propiedad $\hat{R}$ (ser Gödeliano) no pertenece al lenguaje $\mathcal{L}_{SF}$ sino al metalenguaje. Sin embargo, la propiedad es aritmética y permanece inmutable mientras no se modifique el sistema SF.
   Supongamos que la propiedad $\hat{R}$ es definible en $\mathcal{L}_{SF}$. Sea $\varphi(x)$ la fórmula que la define. Entonces $\mathcal{N} \models \varphi(\bar{k})$ si y sólo si $k \in \hat{R}$. Como $\varphi(x) \in \mathcal{L}^1_{SF}$, figura en la lista del inciso (2). Sea g el lugar que le corresponde. Así, $\varphi(x)$ es la fórmula $\varphi_g(x_{i_g})$.

5. Si $\vdash_{RSF} \varphi_g(\bar{g})$ entonces $\mathcal{N} \models \varphi_g(g)$ (pues $\mathcal{N}$ es modelo de SF).
   Pero, si $\mathcal{N} \models \varphi_g(g)$ entonces $g \in \hat{R}$ y entonces $\not\vdash_{RSF} \varphi_g(\bar{g})$
   Entonces $\vdash_{RSF} \varphi_g(\bar{g}) \Rightarrow \not\vdash_{RSF} \varphi_g(\bar{g})$
   Así, $\not\vdash_{RSF} \varphi_g(\bar{g})$.

6. Si $\vdash_{RSF} \neg\varphi_g(\bar{g})$ entonces $\mathcal{N} \models \neg\varphi_g(g)$
   Pero, si $\mathcal{N} \models \neg\varphi_g(g)$ entonces $g \notin \hat{R}$ y entonces $\vdash_{RSF} \varphi_g(\bar{g})$
   De donde $\vdash_{RSF} \neg\varphi_g(\bar{g}) \Rightarrow \vdash_{RSF} \varphi_g(\bar{g})$
   Así, si SF es consistente tenemos $\not\vdash_{RSF} \neg\varphi_g(\bar{g})$

7. Conclusión: si SF es consistente y $\mathcal{N}$ es modelo de SF entonces $\varphi_g(\bar{g})$ es indecidible y SF incompleto.

Observaciones.

1. Las falacias presentes en el argumento de Richard han desaparecido. El conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_{SF}$ es algo bien definido y no se ha supuesto engañosamente que la propiedad $\hat{R}$ forma parte de las fórmulas de $\mathcal{L}^1_{SF}$. A cambio de ello hemos supuesto que dicha propiedad es definible en $\mathcal{L}_{SF}$. De esta hipótesis tendremos oportunidad de hablar en breve.

2. $\varphi_g(\bar{g})$ en tanto fórmula de $\mathcal{L}_{SF}$ nada afirma y no es ni falsa ni verdadera. Sin embargo, bajo la interpretación standard, $\varphi_g(\bar{g})$ afirma que g es Gödeliano, lo cual de acuerdo a la definición de "Gödeliano" es afirmar que "$\varphi_g(\bar{g})$ es indemostrable en SF". Así, $\varphi_g(\bar{g})$ afirma, bajo interpretación, su indemostrabilidad en SF. En este sentido, $\varphi_g(\bar{g})$ es un enunciado autorreferente.
3. Si $\nvdash_{SF} \varphi_g(\bar{g})$ entonces, bajo interpretación, $\varphi_g(\bar{g})$ es un enunciado verdadero. En tal caso, la verdad de $\varphi_g(\bar{g})$ se habrá decidido metamatemáticamente mientras que SF resulta impotente para él. Se tiene con ello una verdad no demostrada en SF.
4. Si $\vdash_{SF} \varphi_g(\bar{g})$ entonces, bajo interpretación, $\varphi_g(\bar{g})$ es un enunciado falso. En tal caso, la aritmética no es un modelo de SF y así SF no formaliza a $Th(\mathcal{N})$.

§3. CONDICIONES PARA QUE LA PROPIEDAD $\hat{R}$ SEA DEFINIBLE EN SF.

La propiedad $\hat{R}$ ("ser Gödeliano) es una propiedad aritmética. Si logramos definirla en el lenguaje $\mathcal{L}_{SF}$, obtendremos enunciados indecidibles para SF y SF será incompleto.

Hemos definido $\hat{R}$ en el metalenguaje. Para definirla en $\mathcal{L}_{SF}$ es suficiente que las nociones que ocurren en su definición sean definibles en $\mathcal{L}_{SF}$. Recordemos entonces la definición del conjunto (o propiedad) $\hat{R}$.

$k \in \hat{R}$ si y sólo si la <u>fórmula</u> obtenida al <u>substituir</u> la única <u>variable libre</u> de $\varphi_k(x_{ik})$ por el <u>numeral</u> $\bar{k}$ es <u>indemostrable</u> en SF.

Sin entrar en un analisis detallado de esta definición, podemos determinar las condiciones principales para que $\hat{R}$ sea definible en SF.

a. Las nociones metamatemáticas "ser fórmula", "ser variable libre" "ser numeral" han de ser definibles en $\mathcal{L}_{SF}$.

b. La operación metamatemática de "substitución de variables libres por términos ha de ser expresable en $\mathcal{L}_{SF}$.
c. La noción metamatemática "ser teorema de SF" ha de ser definible en $\mathcal{L}_{SF}$.

Las nociones destacadas anteriormente son metateóricas, mientras que el sistema SF está diseñado para formalizar la teoría elemental de los números. Ante esta dificultad (traducir parte de la metateoría de SF a $\mathcal{L}_{SF}$), se presenta la siguiente alternativa: traducir la metateoría a la aritmética, pues los enunciados de ésta sí son traducibles a $\mathcal{L}_{SF}$. En otras palabras, hay que ARITMETIZAR LA SINTAXIS (descripción metateórica) DE SF, convirtiendo los enunciados metateóricos en enunciados acerca de números naturales.

Una manera de hacer esto último consiste en asociar a cada expresión o sucesión de expresiones de $\mathcal{L}_{SF}$ un número natural. Con ello, se tiene la posibilidad de convertir cada afirmación metateórica en un enunciado aritmético relativo a los números naturales correspondientes. Por ejemplo, si a cada variable de $\mathcal{L}_{SF}$ le asociamos un número primo como sigue

$$x_1 \overset{h}{\longleftrightarrow} 2$$
$$x_2 \overset{h}{\longleftrightarrow} 3$$
$$x_3 \overset{h}{\longleftrightarrow} 5$$
$$\vdots$$

entonces el enunciado metateórico "la expresión x es una variable de $\mathcal{L}_{SF}$" se transforma en el enunciado aritmético "h(x) es un número primo".

Hemos llamado "h" a la correspondencia entre expresiones de $\mathcal{L}_{SF}$ y $\mathbb{N}$. Esta función debe ser inyectiva y ha de permitir la traducción de propiedades, relaciones y operaciones metateóricas a propiedades, operaciones y relaciones aritméticas. En particular se debe tener que:

i. Asociada a la propiedad "x es una fórmula de $\mathcal{L}_{SF}$" haya un predicado aritmético F(x) tal que F(m) sea verdadero ($m \in \mathbb{N}$)

si y sólo si $m=h(x)$ es la imagen de una fórmula x de $\mathcal{L}_{SF}$. Análogamente con las propiedades "ser variable" y "ser numeral".

ii. Asociada a la relación "$S=\{\varphi_i\}_{i\leq n}$ es una prueba de φ_n en SF" debe existir una relación aritmética $P(m,k)$, $(m,k \in N)$ la cual sea verdadera si y sólo si m es el número asociado a la sucesión de fórmulas de $\mathcal{L}_{SF}$ $\varphi_1 \ldots \varphi_n$, k es el número asociado a φ_n y $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ es una prueba de φ_n en SF.

iii. Asociada a la operación "substituir todas las ocurrencias libres de la variable x por el término q en la fórmula z" debe haber una función (operación) aritmética $S(x,y,z)$ tal que: si m es el número correspondiente a la fórmula φ, k es el número correspondiente al término t y p es el número correspondiente a la variable x_i entonces $S(p,k,m)$ sea el número correspondiente a la fórmula que se obtiene de substituir en la fórmula φ todas las ocurrencias libres de la variable x_i por el término t. Ilustramos esto en el siguiente diagrama.

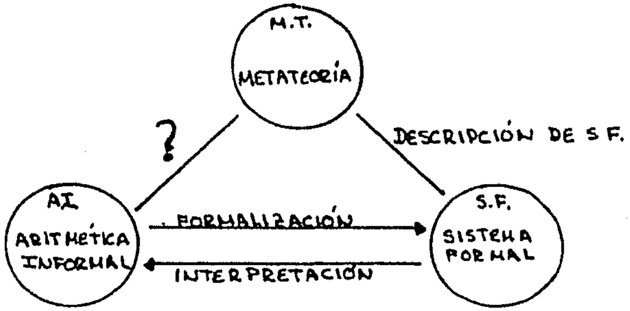
$$
\begin{tikzcd}
\varphi \arrow[d, "h"'] & x_i \arrow[d, "h"'] & t \arrow[d, "h"'] \arrow[r, "\text{OPERACIÓN METAMATEMÁTICA}"] & \varphi' : \varphi(x_i/t) \arrow[d, "h"] \\
h(\varphi) & h(x_i) & h(t) \arrow[r, "\text{OPERACIÓN ARITMÉTICA}"'] & S(h(x_i), h(t), h(\varphi))
\end{tikzcd}
$$

Entonces debemos tener relaciones aritméticas asociadas a nociones metamatemáticas de manera que una de dichas relaciones sea verdadera en la aritmética si y sólo si su correspondiente noción lo sea en la metateoría. Algo semejante podemos decir de las operaciones: ha de ser equivalente efectuar operaciones en la metamatemática o en la aritmética; los resultados han de corresponder bajo traducción. Este es el sentido de la "traducibilidad" de la metateoría a la aritmética.

Capítulo 5
Aritmetización de la Metateoría.

§1. INTRODUCCIÓN.

La primera dificultad que debemos enfrentar para introducir la metateoría de $\overline{AP}$ en $\overline{AP}$ mismo es la siguiente: formular mediante procedimientos aritméticos un extenso número de enunciados y razonamientos metateóricos como, por ejemplo, la descripción del sistema $\overline{AP}$. Con ello, a través de la formalización, se abrirá la posibilidad de expresar en el lenguaje de $\overline{AP}$ sus propiedades metateóricas. Veamos el siguiente cuadro.



Antes de Gödel era poco clara la relación entre la metateoría de un sistema formal y la aritmética. A través de un análisis de los sistemas formales, Gödel profundizó en la comprensión de sus mutuas relaciones. Con ello cerró un ciclo MT-AI-SF-MT y abrió la posibilidad de expresar los enunciados del metalenguaje en el lenguaje objeto.

El problema de expresar aritméticamente los enunciados metateóricos se esclarece al analizar la naturaleza de los sistemas formales. Estos se componen de un lenguaje perfectamente delimitado junto con un aparato deductivo que se organiza conforme a reglas formuladas con precisión. La exactitud en la definición y despliegue del sistema formal hace irrelevante el significado y la naturaleza de sus signos. El mérito de esta última observación pertenece a Gödel.

Fué Gödel el primero en señalar que, desde un punto de vista general, la naturaleza de los signos particulares que se utilicen en la construcción de un sistema formal es irrelevante.

"Las fórmulas de un sistema formal, en su aspecto externo, son sucesiones finitas de símbolos primitivos.... y es fácil establecer con toda precisión cuáles secuencias de símbolos primitivos son significativas y cuáles no. Análogamente, las pruebas, desde un punto de vista formal, no son otra cosa que sucesiones finitas de fórmulas. Obviamente, desde un punto de vista metamatemático, es irrelevante qué objetos han sido elegidos como símbolos primitivos, así que nosotros utilizaremos números naturales para tal fin. En consecuencia, una fórmula será una secuencia finita de números naturales y una prueba una secuencia finita de secuencias finitas de naturales. Así, las nociones metamatemáticas se convierten en nociones relativas a los números naturales o secuencias de estos. De este modo, es posible, aunque parcialmente, expresar los enunciados metamatemáticos en el simbolismo del sistema formal." (Kurt Gödel. <u>On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems I</u>. Parte 1)

Como se puede corroborar, al reemplazar los símbolos de un sistema formal por números naturales, los enunciados metamatemáticos ya no se refieren específicamente al sistema formal con el que se relacionan; se transformarán en enunciados aritméticos. De esta manera, al igual que la matemática, la metamatemática es formalizable.

Al procedimiento de reemplazar cada símbolo primitivo por un número natural se le conoce como aritmetización de la sintaxis. Recordemos que la sintaxis es la descripción del sistema así como su estudio considerándolo en sí mismo, en sus posibilidades deductivas. Al reemplazar cada símbolo primitivo por un número natural, la sintaxis pasa a formar parte de la aritmética, es decir, se le "aritmetiza".

§2. NUMERACIÓN DE GÖDEL.

Apliquemos ahora al sistema $\overline{AP}$ el proceso descrito por Gödel.

Si 'u' es un símbolo primitivo del lenguaje formal; g(u) es llamado "el número de Gödel de u".

Asignemos a cada símbolo primitivo de S_n un número natural de la manera siguiente.

$g(()=3$	$g(0)=15$
$g())=5$	$g(s)=57$
$g(,)=7$	$g(+)=105$
$g(\neg)=9$	$g(\cdot)=297$
$g(\rightarrow)=11$	$g(x_k)=5+8K \quad K=1,2,\ldots$
$g(\approx)=107$	

En general, para un sistema formal análogo al nuestro pero que posea constantes, letras funcionales y letras predicativas adicionales la asignación será:

$g(()=3$	$g(s)=57$
$g())=5$	$g(+)=105$
$g(,)=7$	$g(\cdot)=297$
$g(\neg)=9$	$g(x_k)=5+8K \quad K=1,2,\ldots$
$g(\rightarrow)=11$	$g(a_k)=7+8K \quad K=1,2,\ldots n$
$g(\approx)=107$	$g(f_k^n)=9+8(2^n\cdot 3^k) \quad k=1\ldots n$
$g(0)=15$	$g(\varphi_k^n)=11+8(2^n\cdot 3^k) \quad k=1\ldots n$

Una vez asignado un único número natural a cada símbolo primitivo de $\overline{AP}$, podemos asociar una secuencia $g(s_1)\ldots g(s_n)$ de números naturales a cada sucesión finita de símbolos primitivos $s_1\ldots s_n$ y a cada sucesión de expresiones de $\overline{AP}$ una sucesión finita de sucesiones finitas de números naturales.

Ejemplos.

a. FÓRMULA — SECUENCIA

$(\neg(x_3 \approx x_4))$ — 3, 9, 3, 29, 107, 37, 5, 5.

b. SECUENCIA DE FÓRMULAS — SECUENCIA DE SECUENCIAS

i. $((x_1 \cdot \odot) \approx \odot)$ — 3, 3, 13, 297, 15, 5, 107, 15, 5.

ii. $((\neg((x_1 \cdot \odot) \approx \odot)) \rightarrow ((x_1 \cdot \odot) \approx \odot))$ — 3, 3, 9, 3, 3, 13, 297, 15, 5, 107, 15, 5, 5, 11, 3, 3, 13, 297, 15, 5, 107, 15, 5, 5.

iii. $(((x_1 \cdot \odot) \approx \odot) \rightarrow (\odot \approx S\odot))$ — 3, 3, 3, 13, 297, 15, 5, 107, 15, 5, 11, 3, 15, 107, 57, 15, 5, 5.

Utilizando los números de Gödel de los símbolos primitivos de $\mathcal{L}_N$ es posible asignar a cada expresión de $\mathcal{L}_N$ un único número natural.

Sea $P_1, P_2, \ldots P_n \ldots$ la sucesión de números primos en orden creciente. Si E es la expresión de $\mathcal{L}_N$ $s_1 \ldots s_k$ donde cada s_i $i=1\ldots k$ es un símbolo primitivo de $\mathcal{L}_N$ y $g(s_1)\ldots g(s_k)$ la sucesión de números correspondiente entonces a E se le asocia el número:
$g(E) = 2^{g(s_1)} \cdot 3^{g(s_2)} \cdot \ldots \cdot P_k^{g(s_k)}$. El número $g(E)$ es el número de Gödel de la expresión E o número de secuencia de E.

Ejemplos.

a. A la expresión $S+\odot$ le corresponde la sucesión 57, 105, 15 y por lo tanto el número de secuencia $g(S+\odot) = 2^{57} \cdot 3^{105} \cdot 5^{15}$.

b. A la fórmula $(\neg(x_1 \approx \odot))$ le corresponde la secuencia 3, 9, 3, 13, 107, 15, 5, 5 y por lo tanto el número de secuencia $g[(\neg(x_1 \approx \odot))] =$
$= 2^3 \cdot 3^9 \cdot 5^3 \cdot 7^{13} \cdot 11^{107} \cdot 13^{15} \cdot 17^5 \cdot 19^5$

Hay que observar que a un símbolo primitivo de $\mathcal{L}_N$ se le pueden ahora asignar dos números naturales según si le considere como símbolo primitivo o como expresión de $\mathcal{L}_N$ de longitud uno. Esto no debe crear confusiones. Los números de los símbolos son todos impares mientras que los números de las expresiones son todos pares. Podemos, además, considerar ontológicamente distinto a un signo tomado como símbolo primitivo que tomado como expresión.

Sea ahora $E_1, E_2, \ldots, E_n$ una sucesión S de expresiones de $\mathcal{L}_n$. Es posible asignar a S un único número natural. Para ello, se consideran los números de secuencia $g(E_1) \ldots g(E_n)$ y se forma el número $g(S) = 2^{g(E_1)} \cdot 3^{g(E_2)} \cdot \ldots \cdot P_n^{g(E_n)}$. A este número le llamamos número de Gödel de la secuencia S.

Nótese que ahora cada símbolo primitivo de $\mathcal{L}_n$ tiene asociados tres números de Gödel. Cuando se le considera como símbolo, cuando se le considera como una expresión y cuando se le considera como una sucesión de expresiones. Sin embargo, esta confusión puede resolverse en base a ciertas observaciones que haremos a continuación.

a. Los números de Gödel de los símbolos primitivos son todos impares.
b. Los números de Gödel de una expresión son todos pares y al descomponerse en producto de potencias de primos, los exponentes son impares.
c. Los números de Gödel de una sucesión de expresiones son pares y al descomponerse como producto de potencias de primos, los exponentes son números pares.

Examinemos ahora la correspondencia que hemos establecido. Ésta no es supra yectiva pues no todo número natural es número de Gödel. Dado que hay objetos de $\mathcal{L}_n$ a los que corresponden varios números naturales, la correspondencia no define una función. Sin embargo, podemos resolver esto considerando como número de Gödel de una expresión o símbolo primitivo al que se obtiene juzgándola como una sucesión de expresiones. Con ello, como veremos, se obtiene una función inyectiva.

Como cada número natural se factoriza en forma única en producto de potencias de primos en orden ascendente y el cero no es número de Gödel de ninguna expresión o símbolo, dado un número $k \in \mathbb{N}$ podemos determinar si es número de Gödel o no. Para ello, lo descomponemos en producto de potencias de primos y del analisis del mismo podemos establecer el resultado.

Ejemplos.

¿Son números de Gödel 6, 88, 243000?

a. 6 no es número de Gödel pues $6 = 2^1 \cdot 3^1$ y 1 no es número de Gödel de ningún símbolo primitivo de $\mathcal{L}_{\overline{AP}}$.

b. 88 no es número de Gödel pues $88 = 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^1$ y ni el cero ni el uno son números de Gödel de símbolos de $\mathcal{L}_{\overline{AP}}$.

c. 243000 si es número de Gödel pues $243000 = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^3$ que corresponde a la expresión "( ) (".

§ 3. TRANSCRIPCIÓN DE LA SINTAXIS DE $\overline{AP}$ A LA ARITMÉTICA.

Con la numeración de Gödel toman significado las afirmaciones del tipo "el número g es un axioma de $\overline{AP}$. Obviamente, el enunciado se refiere a la fórmula con número de Gödel g. Si, por ejemplo, g no es número de Gödel o no corresponde a la fórmula supuesta, el enunciado es falso. Dado que la correspondencia entre números y fórmulas está bien definida, no hay lugar a confusión. Podemos referirnos, si así lo deseamos, a una fórmula o a su número de Gödel indistintamente.

Pese a la simplicidad del método de aritmetización, éste condujo a una segunda etapa en las investigaciones de los sistemas formales. Nuevas perspectivas se abren ante el descubrimiento de que la aritmética constituye un vasto territorio en el que es posible dibujar la sintaxis de los formalismos de manera que la metateoría pueda a su vez ser formalizada.

En el caso del sistema $\overline{AP}$ pretendemos expresar en él su metateoría. El primer paso para ello es traducir a la aritmética algunas relaciones y funciones (operaciones) metateóricas. De esta manera, si bien $\mathcal{L}_{\overline{AP}}$ carece de nombres para sus fórmulas pero dispone de nombres para los números naturales, al aritmetizar la sintaxis, y con ello convertir a los números en nombres de fórmulas, podremos expresar en $\overline{AP}$ ciertas propiedades de sus objetos.

Ahora nuestra tarea consiste en demostrar que diversas nociones metateóricas devienen, bajo la numeración de Gödel, en funciones y relaciones recursivas. Debemos notar que esta caracterización es posible en virtud de que numerosas reglas para los sistemas formales son recurrentes. Por ello es conveniente servirse de funciones y predicados recursivos para su expresión aritmética. Los teoremas, lemas y corolarios vistos en el capítulo dedicado a funciones y relaciones recursivas encuentran su campo de aplicación en lo que sigue. Escasamente mencionaremos la causa por la cual una función o relación es recursiva. El lector deberá cubrir los detalles faltantes aplicando el lema, teorema o corolario correspondiente.

Dado que los resultados de Gödel son aplicables a cualquier teoría que cumpla ciertas condiciones, demostraremos algunos teoremas en general haciendo ver, cuando sea necesario, su particularización al sistema $\overline{AP}$. De esta manera, obtendremos una visión general a la vez que llegamos a establecer el resultado para el sistema que nos interesa.

TEOREMA 5.1. Las siguientes funciones son recursivas primitivas para $\overline{AP}$.

a. $IC_{\overline{AP}}(x)$: x es el número de Gödel de una constante individual de $\overline{AP}$.

b. $FL_{\overline{AP}}(x)$: x es el número de Gödel de un símbolo funcional de $\overline{AP}$.

Dejamos al lector la demostración de este teorema.

TEOREMA 5.2. Si T es una teoría de primer orden para la cual las funciones $IC(x)$, $FL(x)$ y $PL(x)$: x es el número de Gödel de una letra predicativa son recursivas primitivas (recursivas) entonces las siguientes relaciones y funciones son recursivas primitivas (recursivas). (Las hipótesis son necesarias a partir del inciso (5)).

1. $EVbl(x)$: x es el número de Gödel de una expresión que consiste de una variable.

   $EVbl(x) \underset{def}{\equiv} \exists z_{z<x} \left(1 \leq z \wedge x = 2^{5+8z}\right)$

   Es recursiva primitiva por el Teorema 1.3.

2. a. $Arg_T(x)$: argumento de un símbolo funcional con número de Gödel x.

   $Arg_T(x) \underset{def}{=} \left(qt(8, x \dot{-} 9)\right)_0$ NOTA: $g(f_j^n) = 9 + 8(2^n \cdot 3^j)$

   b. $Arg_P(x)$: argumento de una letra predicativa con número de Gödel x.

   $Arg_P(x) \underset{def}{=} \left(qt(8, x \dot{-} 11)\right)_0$ NOTA: $g(\varphi_k^n) = 11 + 8(2^n \cdot 3^k)$

   Recuérdese que las funciones $qt(x,y)$, $x \dot{-} y$, $(x)_i$ son recursivas primitivas.

3. $MP(x,y,z)$: la expresión con número de Gödel z es consecuencia directa de las expresiones con número de Gödel x y y por Modus Ponens.

   $MP(x,y,z)$ si $y = 2^3 * x * 2^{11} * z * 2^5$

   Recuérdese que la función "concatenación" es recursiva primitiva.

4. $GEN(x,y)$: la expresión con número de Gödel y proviene de la expresión con número de Gödel x por Generalización

   $GEN(x,y) \underset{def}{\equiv} (\exists v)_{v<y} \left(EVbl(v) \wedge y = 2^3 * 2^3 * v * 2^5 * x * 2^5\right)$

   (Teorema 1.3 y definición de "$*$").

5. a. $EIC(x)$: x es el número de Gödel de una expresión que consiste de una constante individual de T.

   $EIC(x) \underset{def}{\equiv} (\exists y)_{y<x} \left(IC(y) \wedge x = 2^y\right)$ (Teorema 1.3)

b. EFL(x): x es el número de Gödel de una expresión que consiste de un símbolo funcional de T.

$$EFL(x) \underset{def}{\sim} (\exists y)_{y<x}(FL(y) \wedge x = 2^y) \qquad \text{(Teorema 1.3)}$$

c. EPL(x): x es el número de Gödel de una expresión que consiste en una letra predicativa de T.

$$EPL(x) \underset{def}{\sim} (\exists y)_{y<x}(PL(y) \wedge x = 2^y) \qquad \text{(Teorema 1.3)}$$

6. Trm(x): x es el número de Gödel de un término de T.

Esto sucede cuando x es el número de Gödel de una constante o una variable de T o existen un símbolo funcional f_k^n y términos $t_1 \ldots t_n$ tal que x es el número de Gödel de $f_k^n(t_1 \ldots t_n)$. Esto último es verdad si existe una sucesión de expresiones

f_k^n
$f_k^n($
$f_k^n(t_1,$
$f_k^n(t_1, t_2,$
$\vdots$
$f_k^n(t_1, \ldots t_n$
$f_k^n(t_1, \ldots t_n)$.

Esta sucesión de n+3 expresiones puede representarse por su número de Gödel y. Ya que $P_{n+2}^x < P_x^x$ y $y < P_{n+2}^x$ y $n = \mathrm{arg}_T((x)_0)$ pues $(x)_0$ es el número de Gödel de f_k^n, la relación Trm(x) puede definirse así:

$$Trm(x) \underset{def}{\sim} EVbl(x) \vee EIC(x) \vee (\exists y)_{y<(P_x^x)!}\Big[x = (y)_{lh(y)\dot{-}1} \wedge$$

$$\wedge EFL((y)_0) \wedge lh(y) = \mathrm{arg}_T((x)_0) + 3 \wedge ((y)_1)_1 = 3 \wedge$$

$$\wedge (u)_{u<lh(y)}\Big(u > 1 \wedge u \leq \mathrm{arg}_T((x)_0) \rightarrow (\exists v)_{v<x}\big((y)_u = (y)_{u\dot{-}1} * v * 2^7 \wedge Trm(v)\big)\Big) \wedge$$

$$\wedge (\exists v)_{v<x}\Big(\big((y)_{lh(y)\dot{-}2} = (y)_{lh(y)\dot{-}3} * v \wedge Trm(v)\big) \wedge (y)_{lh(y)\dot{-}1} = (y)_{lh(y)\dot{-}2} * 2^5\Big)\Big]$$

Si substituimos $(z)_v = 0$ en vez de $Trm(v)$ en la fórmula, la nueva fórmula define un predicado recursivo primitivo (recursivo) $H(x,z)$ y $Trm(x)$ equivale a $H(x,(C_{Trm})_{\#}(x))$ donde $(C_{Trm})_{\#}(x) = \prod_{u<x} P_u^{C_{Trm}(u)}$ y así $C_{Trm}(v) = 0$ si y sólo si $(z)_v = 0$.
Entonces $Trm(x)$ es recursiva primitiva (recursiva) por curso de valores (Corolario 1.6).

Ejemplo.
Ya que $g[f_1^2(x_1,x_2)] = 2^{9+8(2^2\cdot 3^1)}\cdot 3^3\cdot 5^{13}\cdot 7^7\cdot 11^{21}\cdot 13^5$ a la sucesión

f_1^2
$f_1^2($
$f_1^2(x_1,$
$f_1^2(x_1, x_2$
$f_1^2(x_1, x_2)$ le corresponde el número

$$y = 2^{2^{9+8(2^2\cdot 3^1)}}\cdot 3^{(2^{9+8(2^2\cdot 3^1)}\cdot 3^3)}\cdot 5^{(2^{9+8(2^2\cdot 3^1)}\cdot 3^3\cdot 5^{13}\cdot 7^7)}\cdot 7^{(2^{9+8(2^2\cdot 3^1)}\cdot 3^3\cdot 5^{13}\cdot 7^7\cdot 11^{21})}\cdot$$
$$\cdot 11^{(2^{9+8(2^2\cdot 3^1)}\cdot 3^3\cdot 5^{13}\cdot 7^7\cdot 11^{21}\cdot 13^5)}$$

Dejamos que el lector verifique nuestra afirmación recordando que:
la función $lh(x)$ cuenta el número de exponentes distintos de cero en la descomposición de x en factores primos comenzando su cuenta desde el uno.
la función $(x)_i$ proporciona el i-ésimo exponente en la descomposición de x en factores primos comenzando desde el cero-ésimo exponente.

Observación. Es fácil ver que las siguientes relaciones y funciones resultan recursivas primitivas para $\bar{A}^T P$.

a. $EIC_{\bar{A}P}(x)$: x es el número de Gödel de una expresión que consiste en una constante individual de $\bar{A}^T P$.

$$EIC_{\bar{A}P}(x) \underset{\text{def}}{\longleftrightarrow} (y = 15 \wedge x = 2^{15})$$

b. $EFL_{\overline{AP}}(x)$: x es el número de Gödel de una expresión que consiste en un símbolo funcional de $\overline{AP}$.

$$EFL_{\overline{AP}}(x) \underset{def}{\sim} \left((y=57 \vee y=105 \vee y=297) \wedge x=2^{y}\right)$$

c. $Trm_{\overline{AP}}(x)$: X es el número de Gödel de un término de $\overline{AP}$.

$$Trm_{\overline{AP}}(x) \underset{def}{\sim} EVbl(x) \vee EIC_{\overline{AP}}(x) \vee$$

$$\vee (\exists y)_{y<(P_x^x)!} \Big[\Big(x=(y)_{\ell h(y)\dot{-}1} \wedge ((y)_0)_0 = 57 \wedge$$

$$\wedge (\exists v)_{v<x} \left((y)_1 = 2^{57} * v \wedge Trm_{\overline{AP}}(v)\right)\Big) \vee$$

$$\vee \Big(x=(y)_{\ell h(y)\dot{-}1} \wedge (\exists u)_{u<x} (\exists v)_{v<x} \big((y)_0 = 2^3 * v \wedge (y)_1 = (y)_0 * 2^{105} \wedge$$

$$\wedge (y)_2 = (y)_1 * u * 2^5 \wedge Trm_{\overline{AP}}(v) \wedge Trm_{\overline{AP}}(u)\big)\Big) \vee$$

$$\vee \Big(x=(y)_{\ell h(y)\dot{-}1} \wedge (\exists u)_{u<x} (\exists v)_{v<x} \big((y)_0 = 2^3 * v \wedge (y)_1 = (y)_0 * 2^{297} \wedge$$

$$\wedge (y)_2 = (y)_1 * u * 2^5 \wedge Trm_{\overline{AP}}(v) \wedge Trm_{\overline{AP}}(u)\big)\Big)\Big]$$

7. $Atflm(x)$: x es el número de Gödel de una fórmula atómica de T. Esto sucede si existen términos $t_1 \ldots t_n$ y una letra predicativa φ_k^n tal que x es el número de Gödel de $\varphi_k^n(t_1 \ldots . t_n)$. Esto último vale si y sólo si hay una lista finita de expresiones

φ_k^n

$\varphi_k^n($

$\varphi_k^n(t_1,$

$\varphi_k^n(t_1, t_2,$

$\vdots$

$\varphi_k^n(t_1, \ldots, t_n$

$\varphi_k^n(t_1 \ldots t_n)$.

Esta sucesión de $n+3$ expresiones puede representarse por su número de Gödel y. Así, tenemos que

$Atflm(x) \underset{def}{\sim}$

$$(\exists y)_{y<(p_x^*)!}\Big[x=(y)_{lh(y)\dot{-}1} \wedge EPL((y)_0) \wedge lh(y)=arg_p((x)_0)+3 \wedge ((y)_1)_1=3 \wedge$$

$$\wedge (u)_{u<lh(y)}\Big(u>1 \wedge u \leq arg_p((x)_0) \to (\exists v)_{v<y}\big((y)_u=(y)_{u\dot{-}1} * v * 2^7 \wedge Tm(v)\big)\Big) \wedge$$

$$\wedge (\exists v)_{v<y}\big((y)_{lh(y)\dot{-}2}=(y)_{lh(y)\dot{-}3} * v \wedge Tm(v)\big) \wedge (y)_{lh(y)\dot{-}1}=(y)_{lh(y)\dot{-}2} * 2^5\Big]$$

Observación. $Atflm_{AP}(x) \underset{def}{\sim} (\exists u)_{u<x}(\exists v)_{v<x}\big(Tm_{AP}(u) \wedge Tm_{AP}(v) \wedge x=2^3 * u * 2^{107} * v * 2^5\big)$

8. $Fml(y)$: y es el número de Gödel de una fórmula de T.

$$Fml(y) \underset{def}{\sim} Atfml(y) \vee (\exists z)_{z<y}\Big[\big(Fml(z) \wedge y=2^3 * 2^9 * z * 2^5\big) \vee$$

$$\vee \big(Fml((z)_0) \wedge Fml((z)_1) \wedge y=2^3 * (z)_0 * 2^{11} * (z)_1 * 2^5\big) \vee$$

$$\vee \big(Fml((z)_0) \wedge EVbl((z)_1) \wedge y=2^3 * 2^3 * (z)_1 * 2^5 * (z)_0 * 2^5\big)\Big]$$

Sea $(w)_z=0$ en vez de $Fml(z)$ y aplíquese curso de valores.

Observación. Si substituimos $Atfml_{AP}$ en vez de $Atfml$ en la fórmula anterior, obtenemos $Fml_{AP}(y)$. (Debemos también substituir $Fml_{AP}(z)$ dentro de la fórmula)

9. $Subst_1(y,u,v)$: $(y)_0$ es el número de Gödel del resultado de substituir en la expresión con número de Gödel $(y)_1$ el término con número de Gödel u en vez de todas las ocurrencias libres de la variable con número de Gödel v.

$Subst_1(y,u,v) \underset{def}{\sim}$

$$Tm(u) \wedge EVbl(v) \wedge \Big[\big((y)_1=v \wedge (y)_0=u\big) \vee$$

$$\vee\Big((\exists w)_{w<(\gamma)_1}\big((\gamma)_1=2^w \wedge (\gamma)_1\neq v \wedge (\gamma)_0=(\gamma)_1\big)\Big) \vee$$

$$\vee\Big((\exists z)_{z<(\gamma)_1}(\exists w)_{w<(\gamma)_1}\big(Fml(w) \wedge (\gamma)_1 = 2^3 * v * 2^5 * w * z \wedge$$

$$\wedge (\exists \alpha)_{\alpha<(\gamma)_0}\big((\gamma)_0 = 2^3 * v * 2^5 * w * \alpha \wedge Subst_1(2^\alpha \cdot 3^z, u, v)\big)\big)\Big) \vee$$

$$\vee\Big(\neg(\exists z)_{z<(\gamma)_1}(\exists w)_{w<(\gamma)_1}\big(Fml(w) \wedge (\gamma)_1 = 2^3 * v * 2^5 * w * z\big) \wedge$$

$$\wedge (\exists \alpha)_{\alpha<(\gamma)_0}(\exists \beta)_{\beta<(\gamma)_0}(\exists z)_{z<(\gamma)_1}\big(1<z \wedge (\gamma)_1 = ((\gamma)_1)_0 * z \wedge (\gamma)_0 = \alpha * \beta \wedge$$

$$\wedge Subst_1(2^\alpha \cdot 3^{((\gamma)_1)_0}, u, v) \wedge Subst_1(2^\beta \cdot 3^z, u, v)\big)\Big)\Big]$$

Utilícese curso de valores. (Corolario 1.6)

10. $Subst(x,y,u,v)$: x es el número de Gödel del resultado de substituir el término con número de Gödel u en vez de todas las ocurrencias libres de la variable con número de Gödel v en la expresión con número de Gödel y.
$Subst(x,y,u,v) \underset{\text{def}}{\equiv} Subst_1(2^x \cdot 3^y \cdot u, v)$

11. $Sub(y,u,v)$: es el número de Gödel que resulta de substituir u en vez de todas las ocurrencias libres de v en y.
$Sub(y,u,v) = \mu x_{x<(P_{uy})^{u \cdot y}}\ Subst(x,y,u,v)$

12a. $Fr(u,x)$: u es el número de Gödel de una fórmula o un término de T que contiene libre a la variable con número de Gödel x.
$Fr(u,x) \underset{\text{def}}{\equiv} \big((Fml(u) \vee Trm(u)) \wedge EVbl(x) \wedge \neg Subst(u,u,2^{5+8k},x)\big)$

b. $Fr_1(u,v,w)$: u es el número de Gödel de un término libre para la variable con número de Gödel v en la fórmula con número de Gödel w.
$Fr_1(u,v,w) \underset{\text{def}}{\equiv} Trm(u) \wedge EVbl(v) \wedge \big[Atfml(w) \vee$

$$\vee\ (\exists y)_{y<w}\left(w = 2^3 * 2^9 * y * 2^5 \ \wedge Fr_1(u,v,y)\right) \vee$$

$$\vee\ (\exists y)_{y<w}(\exists z)_{z<w}\left(w = 2^3 * y * 2^{11} * z * 2^5 \wedge Fr_1(u,v,y) \wedge Fr_1(u,v,z)\right) \vee$$

$$\vee\ (\exists y)_{y<w}(\exists z)_{z<w}\Big(w = 2^3 * 2^3 * z * 2^5 * y * 2^5 \ \wedge\ EVbl(z)\ \wedge$$

$$\wedge\left(z \neq v \rightarrow Fr_1(u,v,y) \wedge \left(Fr(u,z) \rightarrow \neg Fr(u,v)\right)\right)\Big)\Big]$$

Usar curso de valores.

13\. a. $Ax_1(x)$: x es el número de Gödel de una instancia de L_1.
$Ax_1(x) \underset{def}{\leftrightarrow} (\exists u)_{u<x}(\exists v)_{v<x}\left(Fml(u) \wedge Fml(v) \wedge x = 2^3 * u * 2^{11} * 2^3 * v * 2^{11} * u * 2^5 * 2^5\right)$

13\. b - g. Dejamos como ejercicio los correspondientes predicados recursivos de $L_2, L_3, \ldots L_7$.

14\. $LAx(y)$: y es el número de Gödel de un axioma lógico de T.
$LAx(y) \underset{def}{\leftrightarrow} Ax_1(y) \vee Ax_2(y) \vee \ldots \vee Ax_7(y)$

15\. Dejamos como ejercicio al lector la prueba de que los predicados correspondientes a $A_1, A_2, M_1, M_2, S_1, S_2$, PI son recursivos primitivos.

16\. $PrAx(y)_{\overline{AP}}$: y es el número de Gödel de un axioma no lógico de $\overline{AP}$
$PrAx(y) \underset{def}{\leftrightarrow} PrAx_1(y) \vee \ldots \vee PrAx_7(y)$

■

TEOREMA 5.3. *Para cualquier teoría de primer orden T en la que se satisfaga que las siguientes funciones y relaciones son recursivas primitivas (recursivas)*

a. $IC(x)$ c. $PL(x)$

b. $FL(x)$ d. $PrAx(y)$

las siguientes funciones y relaciones son recursivas primitivas (recursivas).

17. $Ax(y)$: y es el número de Gödel de un axioma de T.

$$Ax(y) \underset{def}{\widetilde{\ \ }} LAx(y) \vee PrAx(y)$$

18. $Prf(y)$: y es el número de Gödel de una prueba en T.

$$Prf(y) \underset{def}{\widetilde{\ \ }} (\exists w)_{w<y} \left(y = 2^w \wedge Ax(w) \right) \vee$$

$$\vee (\exists u)_{u<y} (\exists w)_{w<y} (\exists v)_{v<y} \left(Prf(u) \wedge y = u \cdot (P_{lh(u)})^v \wedge GEN((u)_w, v) \right) \vee$$

$$\vee (\exists z)_{z<y} (\exists w)_{w<y} (\exists u)_{u<y} (\exists v)_{v<y} \Big(\left(Prf(u) \wedge y = u \cdot (P_{lh(u)})^v \wedge MP((u)_z, (u)_w, v) \right) \vee$$

$$\vee \left(Prf(u) \wedge y = u * 2^v \wedge Ax(v) \right) \Big)$$

Utilizar curso de valores.

19. $Pf(y, x)$: y es el número de Gödel de una prueba en T de la fórmula con número de Gödel x.

$$Pf(y,x) \underset{def}{\widetilde{\ \ }} Prf(y) \wedge x = (y)_{lh(y) \dot{-} 1}$$

■

TEOREMA 5.4. En $\overline{AP}$ son recursivas primitivas las siguientes relaciones y funciones.

20. a. $Nu(y)$: y es el número de Gödel de un numeral de $\overline{AP}$.

$Nu(y)$ si y sólo si $y = 2^{15} \vee (\exists x)_{x<y} \left(Nu(x) \wedge y = 2^{57} * 2^3 * x * 2^5 \right)$

Curso de valores.

b. $Num(y)$ = número de Gödel de $\overline{y}$.

$$Num(0) = 2^{15}$$

$$Num(y+1) = 2^{57} * 2^3 * Num(y) * 2^5$$

21. $B_w(u,v,x,y)$: u es el número de Gödel de una fórmula φ, v es el número de Gödel de una variable libre en φ y y es el número de Gödel de una prueba en $\overline{AP}$ de la fórmula obtenida de φ al substituir el numeral $\overline{x}$ en vez

de todas las ocurrencias libres de la variable con número de Gödel v.

$B_\omega(u,v,x,y) \underset{\text{def}}{=} Fml(u) \wedge EVbl(v) \wedge Fr(u,v) \wedge$
$\wedge Pf(y, Sub(u, Num(x), v)$

22. $Bw_\varphi(u_1,\dots u_n,y)$: y es el número de Gödel de una prueba de $\varphi(\bar{u}_1,\dots\bar{u}_n)$ en $\bar{AP}$. Donde $\varphi(x_1\dots x_n)$ es una fórmula fija de $\bar{AP}$ que contiene a $x_1\dots x_n$ como sus únicas variables libres y m es el número de Gödel de $\varphi(x_1\dots x_n)$.

$Bw_\varphi(u_1,\dots u_n,y) \underset{\text{def}}{=}$

$Pf(y, Sub\dots Sub(Sub(m, Num(u_1), 2^{5+8}), Num(u_2, 2^{3+16})\dots)$

23. a. $W_1(u,y)$: u es el número de Gödel de una fórmula $\varphi(x_1)$ donde x_1 es libre y y es el número de Gödel de una prueba de $\varphi(\bar{u})$ en $\bar{AP}$.

$W_1(u,y) \underset{\text{def}}{=} Fml(u) \wedge Fr(u, 2^{13}) \wedge Pf(y, Sub(u, Num(u), 2^{13}))$

b. $W_2(u,y)$: u es el número de Gödel de una fórmula $\varphi(x_1)$ que posee libre a x_1 y y es el número de Gödel de una prueba de $\neg\varphi(\bar{u})$ en $\bar{AP}$.

$W_2(u,y) \underset{\text{def}}{=} Fml(u) \wedge Fr(u, 2^{13}) \wedge$
$\wedge Pf(y, Sub(2^3 * 2^9 * u * 2^5, Num(u), 2^{13}))$

■

TEOREMA 5.5. Cualquier función $f(x_1\dots x_n)$ representable en $\bar{AP}$ es recursiva.

Dem.

Sea $\varphi(x_1,\dots,x_n,z)$ la fórmula que representa a f en $\bar{AP}$. Sean $k_1,\dots,k_n$ números naturales y $f(k_1\dots k_n) = m$. Entonces $\vdash_{\bar{AP}} \varphi(\bar{k}_1\dots\bar{k}_n,\bar{m})$.

Sea j el número de Gödel de una prueba en $\bar{AP}$ de $\varphi(\bar{k}_1\dots\bar{k}_n,\bar{m})$ entonces $Bw_\varphi(k_1\dots k_n,m,j)$. Así, para cualesquiera $x_1 \ldots x_n$ existe algún y tal que $Bw_\varphi(x_1 \ldots x_n, (y)_0, (y)_1)$ y entonces $f(x_1 \ldots x_n) = \{\mu y\,(Bw_\varphi(x_1 \ldots x_n, (y)_0, (y)_1))\}_0$. Por el Teorema 5.4 inciso 22, Bw_φ es recursiva primitiva. Así, por aplicación del operador μ, $\mu y\,(Bw_\varphi(x_1 \ldots x_n, (y)_0, (y)_1))$ es recursiva y entonces lo es f.

■

COROLARIO 5.6. Cualquier relación aritmética $R(x_1 \ldots x_n)$ es recursiva si y sólo si $R(x_1 \ldots x_n)$ es expresable en $\overline{AP}$.

Dejamos al lector la demostración de este resultado.

■

EJERCICIOS.

1. Determine la secuencia (o secuencia de secuencias) de números naturales que corresponde a cada expresión (o sucesión de expresiones) indicada.
   a. $(S\odot + \bar{3})$
   b. $(Sx_1 \approx Sx_2) \rightarrow (x_1 \approx x_2)$
   c. $x_1 \cdot \bar{2} \approx x_1 + x_1$
   d. $(x_1)(x_1 + \odot \approx x_1)$
   e. $(x_1)(x_1 + \odot \approx x_1) \rightarrow (S\odot + \odot \approx \odot)$
   f. $(S\odot + \odot) \approx (\odot + S(\odot))$

2. Dada la secuencia (o secuencia de secuencias) de números naturales, determine la expresión (o sucesión de expresiones) correspondiente. Diga a qué corresponde dicha expresión (término, axioma, fórmula, nada).
   a. 3, 15, 5
   b. 21, 3, 15, 5, 5, 29
   c. 3, 15, 107, 15, 5

d. 44

e. 3, 13, 5, 3, 21, 5, 3, 13, 107, 21, 5

f. 3, 13, 5, 3, 21, 5, 3, 13, 107, 21, 5, 11, 3, 57, 13, 107, 57, 21, 5

g. 3, 15, 107, 15, 5

3, 3, 15, 107, 15, 5, 5, 11, 3, 57, 15, 107, 57, 15, 5

h. 3, 9, 3, 13, 107, 21, 3, 3, 11, 3, 15, 107, 57, 15, 5

3, 3, 3, 15, 107, 9, 3

3. Reemplácese a los símbolos primitivos de $\mathcal{L}_N$ conforme a las siguientes correspondencias. Las reglas de formación de fórmulas son las mismas que las de $\mathcal{L}_N$ para los símbolos correspondientes.

⊙	S	+	•	≈	(	)	¬	→	x_1	x_2	....
π	Δ	□	◇	I	Σ	Ʒ	⊢	T	$*_1$	$*_2$	I
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...II
S	⊙	¬	→	≈	+	•	(	)	①	②	...III

a. Cámbiese cada una de las siguientes espresiones de $\mathcal{L}_N$ al simbolismo de I, II, III.

a_1. (¬(Sx_1 ≈ ⊙))

a_2. (S⊙ ≈ S⊙)

a_3. ((x_1 ≈ x_2) → ((x_2 ≈ x_1) → (x_1 ≈ x_1)))

a_4. ((x_1+S⊙) ≈ (x_1•SS⊙))

b. Traducir las siguientes espresiones al simbolismo de $\mathcal{L}_N$

b_1. ΣΔΔπIΣΔπ□ΔπƷƷ

b_2. ++② → +① ¬⊙S ... ≈ ++② → ①•¬+② → ⊙S ...

b_3. 5755965 7 5 5 9 2 1 0 6 4 5 9 3 1 1 0 66666

Conclusión 1. Si el lenguaje de $\overline{AP}$ tuviera como símbolos

primitivos los de I, II o III, quedaría en evidencia que las fórmulas de $\mathcal{L}_\eta$ nada significan, siendo indispensable recurrir a las reglas del sistema para su manejo. Por ejemplo, ¿dice algo al lector la expresión $\Sigma \vdash \Sigma \pi I \pi 33$? Suponemos que no. En tal caso, al utilizarla en una prueba, no puede recurrirse al significado que se le dé.
Conclusión 2. Se ha conservado en $\mathcal{L}_\eta$ el simbolismo que nos es familiar con objeto de remarcar que es la aritmética lo que se pretende formalizar. Sin embargo, los símbolos elegidos son arbitrarios y es posible operar de igual modo con otros totalmente diferentes.

4. ¿Es posible que un mismo número natural sea a la vez número de secuencia de una expresión y número de Gödel de una sucesión de expresiones?

5. Determinar el número de Gödel de las siguientes expresiones de $\mathcal{L}_\eta$.
   a. $SS\odot$
   b. $S\odot + S\odot$
   c. $S\odot, S\odot$
   d. $(S\odot \approx S\odot)$
   e. $((x_1)((x_1 \approx \odot) \rightarrow (\odot \approx \odot)))$
   f. $+$
   g. $\rightarrow, x_1 \odot$
   h. $(\neg(x_1 \approx x_2))$

6. Determine los objetos cuyo número de Gödel es
   a. 47
   b. 1944

7. Pruebe que si n es impar entonces $4n$ no es número de Gödel.

8. Demuestre el teorema 5.1.

9. Demuestre los incisos 13.b — 13.g del Teorema 5.2.

10. Demuestre el inciso 15 del Teorema 5.2.

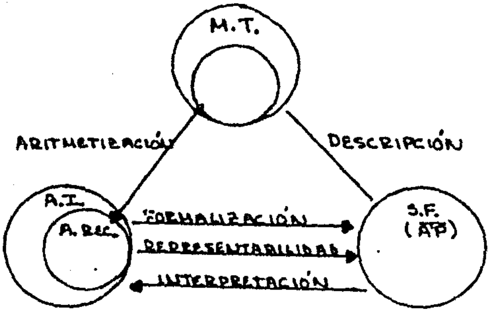
11. Demuestre el Corolario 5.6.

12. Sea $Dem(y) \underset{\text{def}}{=} \exists x \, Pf(x,y)$. ¿Es $Dem(y)$ recursiva primitiva o recursiva?

Capítulo 6
Teoremas de Gödel

§1. Introducción.

En los capítulos anteriores establecimos una correspondencia entre algunas nociones metateóricas y diversos predicados aritméticos. Asimismo, probamos que toda función recursiva o recursiva primitiva es representable en ATP y toda relación recursiva, expresable en ATP. Con estos resultados cerramos el diagrama expuesto en el capítulo anterior, de la siguiente manera.



Es el hecho de que, a través de la aritmetización, podamos recuperar dentro de ATP algunas nociones metateóricas que se refieren a él, lo que establece una relación entre fórmulas de ATP y enunciados metateóricos que se refieren a ellas. Esta construcción es la llave y la belleza del descubrimiento de Gödel. Podemos decir que, entonces, ATP puede "hablar" acerca de sus objetos.

Ahora nos ocuparemos en la demostración de sus teoremas y responderemos finalmente a la pregunta planteada en el capítulo 2. Más tarde señalaremos las condiciones bajo las que los resultados de Gödel se reproducen.

§2. Primer teorema de Gödel.

Definición 6.1. Sea T una teoría de primer orden tal que $\mathcal{L}_T = \mathcal{L}_{ATP}$.

Decimos que T es ω-CONSISTENTE si y sólo si para cualquier fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_T$
si $AT \vdash \varphi(\bar{n})$ para toda $n \in \mathbb{N}$ entonces $AT \nvdash (\exists x)\neg\varphi(x)$.
(AT es el conjunto de axiomas propios de T)

TEOREMA 6.1. Si T es una teoría ω-consistente entonces es simplemente consistente (o consistente).
Dejamos la prueba al lector

■

Preliminares. $W_1(u,y)$ es recursiva primitiva para $\overline{AP}$. Así, es expresable en $\overline{AP}$ por una fórmula $\mathcal{W}_1(x_1,x_2)$ tal que si k_1, k_2 son números naturales, se tiene
si $W_1(k_1,k_2)$ es verdadera entonces $\vdash_{\overline{AP}} \mathcal{W}_1(\bar{k}_1,\bar{k}_2)$
si $W_1(k_1,k_2)$ es falsa entonces $\vdash_{\overline{AP}} \neg\mathcal{W}_1(\bar{k}_1,\bar{k}_2)$
Consideremos:
(*) . . . $(x_2)\neg\mathcal{W}_1(x_1,x_2)$
Sea m el número de Gödel de (*). Al substituir $\bar{m}$ en vez de x_1 en (*) obtenemos
(**) . . . . $(x_2)\neg\mathcal{W}_1(\bar{m},x_2)$

NOTA: $W_1(u,y)$ es verdadera si y sólo si u es el número de Gödel de una fórmula $\varphi(x_1)$ con x_1 libre y y es el número de Gödel de una prueba de $\varphi(\bar{u})$ en $\overline{AP}$.
Así, si m es el número de Gödel de (*) y (**) proviene de (*) al substituir $\bar{m}$ en vez de x_1, tenemos:
$\#_1$. $W_1(m,y)$ es verdadera si y sólo si y es el número de Gödel de una prueba de (**) en $\overline{AP}$.

TEOREMA 6.2. PRIMER TEOREMA DE GÖDEL PARA $\overline{AP}$ (1931)

1. Si $\overline{AP}$ es consistente entonces $\nvdash_{\overline{AP}} (x_2)\neg\mathcal{W}_1(\bar{m},x_2)$

2. Si $\overline{AP}$ es ω-consistente entonces $\nvdash_{\overline{AP}} \neg(x_2)\neg\mathcal{W}_1(\bar{m},x_2)$

La fórmula $(**)$ es indecidible para $\bar{A}\bar{P}$ y $\bar{A}\bar{P}$ es incompleto.

Dem.

1. Supongamos que $\bar{A}\bar{P}$ es consistente y $\vdash_{\bar{A}\bar{P}} (x_2)\neg \mathcal{W}_1(\bar{m}, x_2)$

Sea $k \in \mathbb{N}$ el número de Gödel de una prueba de $(**)$ en $\bar{A}\bar{P}$. Así, tenemos

$W_1(m,k)$ es verdadera y por tanto $\vdash_{\bar{A}\bar{P}} \mathcal{W}_1(\bar{m}, \bar{k}) \ldots . (\alpha)$

Pero de $\vdash_{\bar{A}\bar{P}} (x_2)\neg \mathcal{W}_1(\bar{m}, x_2)$ obtenemos $\vdash_{\bar{A}\bar{P}} \neg \mathcal{W}_1(\bar{m}, \bar{k}) \ldots (\beta)$

(α) y (β) llevan a contradecir la consistencia de $\bar{A}\bar{P}$.
Así, si $\bar{A}\bar{P}$ es consistente, $\nvdash_{\bar{A}\bar{P}} (x_2)\neg \mathcal{W}_1(\bar{m}, x_2)$

2. Supongamos que $\bar{A}\bar{P}$ es ω-consistente y $\vdash_{\bar{A}\bar{P}} \neg(x_2)\neg \mathcal{W}_1(\bar{m}, x_2)$

Ya que $\bar{A}\bar{P}$ es consistente (Teorema 6.1), no es el caso que $\vdash_{\bar{A}\bar{P}} (x_2)\neg \mathcal{W}_1(\bar{m}, x_2)$

Así, para toda $n \in \mathbb{N}$, n no es número de Gödel de una prueba de $(**)$ en $\bar{A}\bar{P}$. Entonces $W_1(m,n)$ es falsa para toda $n \in \mathbb{N}$ y entonces $\vdash_{\bar{A}\bar{P}} \neg \mathcal{W}_1(\bar{m}, \bar{n})$ $\forall n \in \mathbb{N}$ de donde

$$\vdash_{\bar{A}\bar{P}} \neg \mathcal{W}_1(\bar{m}, 0)$$
$$\vdash_{\bar{A}\bar{P}} \neg \mathcal{W}_1(\bar{m}, \bar{1})$$
$$\vdots$$
$$\vdash_{\bar{A}\bar{P}} \neg \mathcal{W}_1(\bar{m}, \bar{n})$$
$$\vdots$$

y ya que hemos supuesto que $\bar{A}\bar{P}$ es ω-consistente

$\nvdash_{\bar{A}\bar{P}} \neg(x_2)\neg \mathcal{W}_1(\bar{m}, x_2)$

Pero entonces $\vdash_{\bar{A}\bar{P}} \neg(x_2)\neg \mathcal{W}_1(\bar{m}, x_2)$ y $\nvdash_{\bar{A}\bar{P}} \neg(x_2)\neg \mathcal{W}_1(\bar{m}, x_2)$

Así, si $\bar{A}\bar{P}$ es ω-consistente entonces $\nvdash_{\bar{A}\bar{P}} \neg(x_2)\neg \mathcal{W}_1(\bar{m}, x_2)$

De 1 y 2, si $\bar{A}\bar{P}$ es ω-consistente, $\nvdash_{\bar{A}\bar{P}} (**)$ y $\nvdash_{\bar{A}\bar{P}} \neg(**)$. ∎

Es importante ahora investigar el significado de $(x_2)\neg \mathcal{W}_1(\bar{m}, x_2)$ bajo la interpretación standard. Ya que $\mathcal{W}_1$ expresa en $\bar{AP}$ la relación aritmética $W_1(m, x_2)$, la fórmula (**) establece (bajo la interpretación standard) que $W_1(m, x)$ es falsa para cualquier número natural x. Ahora, por ($\#_1$), esto equivale a afirmar que NO existe una prueba de (**) en $\bar{AP}$. Así, la fórmula (**) establece, por así decirlo, su propia indemostrabilidad en $\bar{AP}$. Si $\bar{AP}$ es ω-consistente, la fórmula (**) es indemostrable en $\bar{AP}$ y así (**) es verdadera (hecho que establecemos desde la metateoría) y entonces (**) es una verdad aritmética que no se demuestra en $\bar{AP}$ y $\bar{AP}$ es incompleto.

Podemos pensar que lo anterior se debe a que la suposición de que $\bar{AP}$ es ω-consistente es demasiado fuerte y que podríamos recuperar las verdades de la aritmética si únicamente supusiéramos la consistencia simple de $\bar{AP}$. El Teorema de Gödel-Rosser establece que basta la consistencia simple del sistema $\bar{AP}$ como hipótesis, para obtener enunciados indecidibles. Veremos este teorema a continuación.

Preliminares. $W_2(u, y)$ es recursiva primitiva. Así, es expresable en $\bar{AP}$ por la fórmula $\mathcal{W}_2(x_1, x_2)$

Sea

(9)... $(x_2)(\mathcal{W}_1(x_1, x_2) \to \exists x_3(x_3 \leq x_2 \wedge \mathcal{W}_2(x_1, x_3)))$

Sea n el número de Gödel de (9). Substituyamos $\bar{n}$ en vez de x_1 en la fórmula (9). Así, obtenemos

(99)... $(x_2)(\mathcal{W}_1(\bar{n}, x_2) \to \exists x_3(x_3 \leq x_2 \wedge \mathcal{W}_2(\bar{n}, x_3)))$

NOTA: $W_1(u, y)$ es verdadera si y sólo si u es el número de Godel de una fórmula $\varphi(x_1)$ con x_1 libre y y es el número de Gödel de una prueba de $\varphi(\bar{u})$ en $\bar{AP}$.

$W_2(u, y)$ es verdadera si y sólo si u es el número de Gödel de una fórmula $\varphi(x_1)$ con x_1 libre y y es el número de Gödel de una prueba de $\neg\varphi(\bar{u})$ en $\bar{AP}$.

Así, ya que n es el número de Gödel de (9), tenemos

$\#_2$. $W_1(n, y)$ es verdadera si y sólo si y es el número de Gödel de una prueba de (99) en $\bar{AP}$.

#3. $W_2(n,y)$ es verdadera si y sólo si y es el número de Gödel de una prueba de $\neg(99)$ en $\overline{AP}$.

TEOREMA 6.3. TEOREMA DE GÖDEL-ROSSER PARA $\overline{AP}$ (1936).

Si $\overline{AP}$ es consistente entonces las fórmulas (99) y $\neg(99)$ son indemostrables en $\overline{AP}$.

$\overline{AP}$ posee un enunciado indecidible y es, por tanto, incompleto.

Dem.

1. Supongamos que $\overline{AP}$ es consistente y que

$\vdash_{AP} (x_2)(\mathcal{W}_1(\bar{n},x_2) \to \exists x_3(x_3 \leq x_2 \wedge \mathcal{W}_2(\bar{n},x_3)))$

Sea k el número de Gödel de una prueba de (99) en $\overline{AP}$.

Por (#2), $W_1(n,k)$ es verdadera y así $\vdash_{AP} \mathcal{W}_1(\bar{n},\bar{k})$ ... (a)

Ahora, de $\vdash_{AP}$(99) obtenemos

$\vdash_{AP} (\mathcal{W}_1(\bar{n},\bar{k}) \to \exists x_3(x_3 \leq \bar{k} \wedge \mathcal{W}_2(\bar{n},x_3)))$ ... (b)

De donde, por M.P. de (a) y (b) obtenemos

$\vdash_{AP} (\exists x_3)(x_3 \leq \bar{k} \wedge \mathcal{W}_2(\bar{n},x_3))$ .... (α)

Puesto que $\overline{AP}$ es consistente y $\vdash_{AP}$(99) entonces $\nvdash_{AP} \neg(99)$.

Así, por (#3), $W_2(n,y)$ es falso para toda $y \in \mathbb{N}$ y entonces $\vdash_{AP} \neg\mathcal{W}_2(\bar{n},\bar{a})$ para toda $a \in \mathbb{N}$. En particular tenemos:

$\vdash_{AP} \neg\mathcal{W}_2(\bar{n},\bar{0}) \wedge \neg\mathcal{W}_2(\bar{n},\bar{1}) \wedge \ldots \wedge \neg\mathcal{W}_2(\bar{n},\bar{k})$

De donde por el Teorema 2.5 (pág 42)

$\vdash_{AP} (x_3)(x_3 \leq \bar{k} \to \neg\mathcal{W}_2(\bar{n},x_3))$ y así

$\vdash_{AP} \neg(\exists x_3)(x_3 \leq \bar{k} \wedge \mathcal{W}_2(\bar{n},x_3))$ .... (β)

(α) y (β) contradicen la consistencia de $\overline{AP}$.

Así, si $\overline{AP}$ es consistente entonces $\nvdash_{AP}$(99)

2. Supongamos que $\overline{AP}$ es consistente y que $\vdash_{AP} \neg(99)$ ... (d_1)

Así, $\vdash_{AP} \neg(x_2)(\mathcal{W}_1(\bar{n},x_2) \to \exists x_3(x_3 \leq x_2 \wedge \mathcal{W}_2(\bar{n},x_3)))$

Sea τ el número de Gödel de una prueba de $\neg(99)$ en $\overline{AP}$. Por $(\#_3)$, $W_2(n,\tau)$ es verdadera y así $\vdash_{\overline{AP}} \mathcal{W}_2(\bar{n},\bar{\tau})$.
Ya que $\overline{AP}$ es consistente, no existe una prueba de (99) en $\overline{AP}$ y entonces, por $(\#_2)$, $W_1(n,y)$ es falsa para todo $y \in \mathbb{N}$ y así $\vdash_{\overline{AP}} \neg \mathcal{W}_1(\bar{n},\bar{a})$ para todo $a \in \mathbb{N}$. En particular tenemos:

$\vdash_{\overline{AP}} \neg \mathcal{W}_1(\bar{n},\bar{0}) \wedge \neg \mathcal{W}_1(\bar{n},\bar{1}) \wedge \ldots \wedge \neg \mathcal{W}_1(\bar{n},\bar{\tau})$

De donde, por el Teorema 2.5 (pág 42) tenemos

i. $\vdash_{\overline{AP}} (x_2 \leq \bar{\tau} \rightarrow \neg \mathcal{W}_1(\bar{n},x_2))$

Por otra parte, consideremos la siguiente deducción

1. $\bar{\tau} \leq x_2$ Hip
2. $\mathcal{W}_2(\bar{n},\bar{\tau})$ supuesto teorema ($W_2(n,\tau)$ es verdadera)
3. $\bar{\tau} \leq x_2 \wedge \mathcal{W}_2(\bar{n},\bar{\tau})$ Tautología 1,2.
4. $(\exists x_3)(x_3 \leq x_2 \wedge \mathcal{W}_2(\bar{n},x_3))$ Regla $\exists$ a 4.

Aplicando teorema de la deducción, obtenemos

ii. $\vdash_{\overline{AP}} \bar{\tau} \leq x_2 \rightarrow \exists x_3(x_3 \leq x_2 \wedge \mathcal{W}_2(\bar{n},x_3))$

iii. Pero $\vdash_{\overline{AP}} x_2 \leq \bar{\tau} \vee \bar{\tau} \leq x_2$. De donde de (i) y (ii) obtenemos

$\vdash_{\overline{AP}} \neg \mathcal{W}_1(\bar{n},x_2) \vee \exists x_3 (x_3 \leq x_2 \wedge \mathcal{W}_2(\bar{n},x_3))$. Y a partir de esta fórmula, aplicando las transformaciones adecuadas, obtenemos

$\vdash_{\overline{AP}} (x_2)(\mathcal{W}_1(\bar{n},x_2) \rightarrow \exists x_3(x_3 \leq x_2 \wedge \mathcal{W}_2(\bar{n},x_3)))$

Esto último es lo mismo que $\vdash_{\overline{AP}} (99) \ldots (\beta_1)$
Así, (α_1) y (β_1) contradicen la consistencia de $\overline{AP}$. Entonces si $\overline{AP}$ es consistente tenemos $\nvdash_{\overline{AP}} \neg(99)$

De 1 y 2 tenemos que si $\overline{AP}$ es consistente entonces $\nvdash_{\overline{AP}} (99)$ y $\nvdash_{\overline{AP}} \neg(99)$.

■

Nos interesa ahora la interpretación standard de la fórmula (99). La fórmula (99) establece, dados $\#_2$ y $\#_3$, que si existe una prueba de ella en $\overline{A^tP}$ entonces existirá una prueba posiblemente más corta de su negación. Ya que el teorema de Gödel-Rosser establece la indemostrabilidad de (99), (99) es una verdad aritmética (hecho que establecemos desde la metateoría) que no es demostrable en $\overline{A^tP}$ bajo el supuesto de la consistencia simple de este sistema.

De nuevo aparece la misma dificultad. Si sólamente pedimos a $\overline{A^tP}$ que sea consistente, hay verdades aritméticas que son indemostrables en el sistema. El sistema $\overline{A^tP}$ no "recupera" la aritmética elemental. Su incapacidad para reproducir completamente la aritmética queda expuesta.

Podemos ahora responder que $Th(\mathfrak{n}) \neq \overline{A^tP}$. Esto significa, en otras palabras, que el sistema $\overline{A^tP}$ no es una axiomatización de $Th(\mathfrak{n})$ de modo que reproduzca como teoremas todos los enunciados de $Th(\mathfrak{n})$. De hecho, como veremos enseguida, ningún formalismo que cumpla ciertas condiciones es capaz de apresar tales fórmulas (verdades de $\mathfrak{n}$).

TEOREMA 6.9. Sea T una teoría de primer orden con los mismos símbolos que $\overline{A^tP}$ tal que cumpla las condiciones:

a. Cualquier relación recursiva es expresable en T

b. El conjunto de sus axiomas propios es recursivo

c. i. Para cualquier fórmula $\varphi(x)$ de $\mathcal{L}_T$ y cualquier número $k \in \mathbb{N}$ $\vdash_{AT} \varphi(\bar{0}) \wedge \varphi(\bar{1}) \wedge \ldots \wedge \varphi(\bar{k}) \rightarrow (x_1)(x_1 \leq \bar{k} \rightarrow \varphi(x_1))$

ii. Para cualquier número natural k, $\vdash_{AT} x \leq \bar{k} \vee \bar{k} \leq x$

Entonces el Teorema de Gödel-Rosser es aplicable a T; es decir, si T es consistente, posee un enunciado indecidible. ■

DEFINICIÓN 6.2. Una teoría de primer orden T es RECURSIVAMENTE AXIOMATIZABLE si y sólo si existe una teoría de primer orden T' con los mismos teoremas de T y tal que el conjunto $PrAx_{T'}(x)$ de axiomas propios de T'

es recursivo.

COROLARIO 6.5. Cualquier extensión de $\bar{AP}$ consistente y recursivamente axiomatizable posee un enunciado indecidible. Dejamos la prueba al lector. ■

Es claro por qué el teorema de Gödel-Rosser es aplicable a cualquier teoría T que cumpla las condiciones del Teorema 6.4. Sin embargo, este último teorema supone que $\mathcal{L}_T$ posee los mismos símbolos que $\mathcal{L}_{\bar{AP}}$. Formulemos ahora una serie de requisitos generales que deberá cumplir cualquier teoría de primer orden para poseer un enunciado indecidible.

CONDICIONES DE WANG. Toda teoría de primer orden T que cumpla las siguientes condiciones está sujeta al teorema de Gödel-Rosser.

a. Las reglas de formación de $\mathcal{L}_T$ han de ser expresables en la aritmética recursiva. Para ello es indispensable que el conjunto de símbolos primitivos de $\mathcal{L}_T$ sea numerable o finito. La traducción de dichas reglas ha de efectuarse vía la aritmetización.
b. En T debe ser posible una representación de la aritmética recursiva.
c. La propiedad "ser axioma de T" ha de ser representable recursivamente en T. Para ello es indispensable disponer de un predicado aritmético recursivo A(x) tal que si $n \in \mathbb{N}$ entonces A(n) sea verdadero si y sólo si n es el número de Gödel de un axioma de T. T será axiomática.
d. Las reglas de deducción en T han de ser expresables recursivamente en T. Ello significa que la noción de "consecuencia inmediata" ha de ser representable recursivamente en T.

   De las condiciones (c) y (d) se sigue que la noción "ser una prueba de la fórmula φ en T" ha de ser representable recursivamente en T.

e. La teoría T debe cumplir los incisos c.(i) y c.(ii) del Teorema 6.4.

Es claro que cualquier teoría axiomática que pretenda formalizar la aritmética elemental se verá obligada a cumplir estas condiciones. Si pretendemos construir un formalismo accesible a nuestro manejo, deberá cumplir (a), (c) y (d). Si con él pretendemos formalizar la aritmética, se verá obligado a cumplir (b) y (e). De esta manera, podemos decir que la limitación que impone el primer teorema de Gödel es insalvable para cualquier formalismo construido para axiomatizar (finitamente) la aritmética elemental.

Recordemos que si bien $Th(\eta)$ es una teoría formal, $Th(\eta)$ no es axiomática. Podemos decir que por ello escapa a esta limitación. Sin embargo, esa virtud conlleva el que poseamos escasa información de su estructura interna (¿cuáles son todos los enunciados verdaderos en η?). De hecho, al no ser axiomática se torna inaccesible para muchos de nuestros propósitos. En cierto sentido, su virtud la hace inaccesible. Es por esta imposibilidad de manejar a $Th(\eta)$ que recurrimos a crear sistemas recursivamente axiomatizables para la aritmética y es entonces cuando, en virtud de este teorema de Gödel, sabemos que estamos limitados. Ningún formalismo tal agota los contenidos de la aritmética. Ésta resulta más rica que cualquier sistema formal creado para ella. Sin embargo, para nosotros, esto no es un agravante sino un resultado positivo. Hablaremos de ello más tarde.

§3. SEGUNDO TEOREMA DE GÖDEL.

Pasemos ahora a establecer un esquema de la demostración del segundo teorema de Gödel. Ya que una demostración rigurosa de este segundo resultado conlleva un analisis similar (y arduo) al que efectuamos en este trabajo para establecer el primer teorema, sólo estableceremos la idea de la demostración sin probar el resultado principal que la hace posible.

Preliminares. Sea $Neg(x) = 2^3 * 2^9 * x * 2^5$.

Así, $Neg(x)$ es el número de Gödel que resulta de negar la fórmula con número de Gödel x.

Claramente, $Neg(x)$ es recursiva y entonces es expre-

sable en $\overline{AP}$ por una fórmula $\mathcal{N}eg(x_1, x_2)$.
Recordemos que $Pf(x,y)$ es verdadera si y sólo si y es el número de Gödel de una fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_N$ y x es el número de Gödel de una prueba de φ en $\overline{AP}$. Como vimos en el inciso 19 del Teorema 5.3, Pf es recursiva y así es expresable en $\overline{AP}$ por una fórmula $\mathcal{P}f(x_1, x_2)$.
Sea $Con_{\overline{AP}} \underset{def}{=} (x_1)(x_2)(x_3)(x_4)\,\neg(\mathcal{P}f(x_1,x_3) \wedge \mathcal{P}f(x_4,x_2) \wedge \mathcal{N}eg(x_3,x_4))$
Intuitivamente, $Con_{\overline{AP}}$ establece (bajo la interpretación standard) que no hay una prueba en $\overline{AP}$ de una fórmula y su negación (esto para cualquier fórmula) y entonces $Con_{\overline{AP}}$ es verdadera si y sólo si $\overline{AP}$ es consistente. Así, $Con_{\overline{AP}}$ puede interpretarse como afirmando la consistencia de $\overline{AP}$.
Ya que la fórmula (**) afirma bajo la interpretación standard su indemostrabilidad, la fórmula $Con_{\overline{AP}} \rightarrow (**)$ afirma (bajo esa interpretación) que si $\overline{AP}$ es consistente entonces la fórmula (**) es indemostrable en $\overline{AP}$. Pero esto último es el inciso 1 del primer teorema de Gödel. Gödel demostró que el razonamiento <u>metamatemático</u> que lo llevó a establecer su primer teorema es formalizable en $\overline{AP}$. Siguiendo un procedimiento similar al que vimos para construir la fórmula (**), Gödel demuestra que el enunciado "si $\overline{AP}$ es consistente entonces (**) es indemostrable en $\overline{AP}$" es recuperable dentro de $\overline{AP}$ mismo de modo que el enunciado metateórico correspondiente a su primer teorema corresponde a una fórmula $\varphi_h \in \mathcal{L}_{\overline{AP}}$. Gödel demostró, además, que φ_h es un teorema de $\overline{AP}$. Si bien no demostraremos aquí este resultado, lo estableceremos a través del siguiente teorema.

TEOREMA 6.6. Es teorema de $\overline{AP}$ la fórmula $Con_{\overline{AP}} \rightarrow (**)$; es decir, $\vdash_{\overline{AP}} Con_{\overline{AP}} \rightarrow (**)$ ■

Para una prueba de este resultado consúltese:
Feferman S. "Arithmetization of Metamathematics in a general setting". Fundamenta Mathematicae, 49, pp 35-92 (1960).
Suponiendo demostrado el teorema anterior, enunciamos el siguiente teorema.

TEOREMA 6.7. SEGUNDO TEOREMA DE GÖDEL PARA $\overline{AP}$ (1931).
Si $\overline{AP}$ es consistente entonces $\nvdash_{AP} Con_{\overline{AP}}$.

Dem:
Supongamos que $\vdash_{AP} Con_{\overline{AP}}$ y que $\overline{AP}$ es consistente.
Por el teorema anterior tenemos
$\vdash_{AP} Con_{\overline{AP}} \rightarrow (**)$
Así, aplicando M.P. tenemos $\vdash_{AP} **$
Pero por el primer teorema de Gödel para $\overline{AP}$, $\nvdash_{AP} **$ si $\overline{AP}$ es consistente.
De modo que si $\overline{AP}$ es consistente entonces $\nvdash_{AP} Con_{\overline{AP}}$. ■

Este teorema establece que si $\overline{AP}$ es consistente, su consistencia no puede probarse dentro de él. Es decir, si deseamos demostrar la consistencia de $\overline{AP}$, debemos utilizar métodos que no sean expresables en él; métodos no aritmetizables recursivamente. De hecho, las pruebas de consistencia de $\overline{AP}$ existentes utilizan métodos que aparentemente no son formalizables en este sistema. Veremos en breve la importancia de este resultado.

El teorema 6.7 puede generalizarse a teorías de primer orden (e incluso no sólo de primer orden) consistentes. Sin embargo, para generalizar el teorema es necesario especificar claramente qué enunciado corresponde a Con_T (si T es la teoría formal) de modo que se obtenga $\nvdash_T Con_T$ pues, como Feferman lo hizo notar, es posible encontrar enunciados que afirmen la consistencia de teorías y que sean demostrables en ellas. Definiendo adecuadamente la fórmula Con_T Feferman generaliza el teorema 6.7 para ciertas teorías. Este análisis esboza las intenciones del presente trabajo, por lo cual no será expuesto aquí. Véase Feferman (1960).

§4. CONSECUENCIAS.

Con los teoremas de Gödel quedan establecidos dos hechos.

Ningún formalismo recursivamente axiomatizable para la aritmética elemental es capaz de reproducir la totalidad de sus verdades.

Cualquier formalismo recursivamente axiomatizable y consistente ideado para formalizar la aritmética elemental es incapaz de demostrar su propia consistencia.

Esto trae profundas consecuencias, no todas desafortunadas.

Recordemos que, anteriores a los trabajos de Gödel, existían dos escuelas cuyos programas tenían a los formalismos como herramienta principal. Describiremos brevemente ambos programas.

El programa logicista (Russell) pretendía que el sistema formal expuesto en Principia Mathematica era capaz de dar cuenta del cuerpo matemático existente. La lógica sería entonces el fundamento de la matemática y así esta última se mostraría libre de contradicciones.

El programa formalista (Hilbert) pretendía mostrar la consistencia de la matemática a través del siguiente procedimiento. Reducir toda la matemática a la Teoría de Conjuntos. Crear un sistema formal consistente y completo para tal Teoría. Si el sistema fuera completo, reproduciría todas las verdades de la Teoría de Conjuntos; esta teoría quedaría "calcada" en el formalismo. Si el sistema fuera consistente, la Teoría de Conjuntos lo sería y asimismo toda la matemática. Con esto, los sistemas formales serían el fundamento de la matemática. Sin entrar en detalles, en este programa sólo era permitido usar en la metateoría métodos fuera de toda duda; es decir, métodos que claramente no provocaran inconsistencias. Estos métodos serían usados para toda demostración y en especial para la demostración de la consistencia del sistema formal creado. Los métodos eran representables en el sistema y éste debía ser recursivamente axiomatizable.

Con los teoremas de Gödel ambos programas quedan truncados. Ya que cualquier formalismo recursivamente axiomatizable para la aritmética elemental no reproduce la totalidad de sus enunciados verdaderos, los sistemas formales no pueden dar cuenta de la aritmética y menos aún de la matemática. Ya que no es posible demostrar la consistencia de un sistema tal dentro de él mismo, se deberán usar métodos que al ser más poderosos cabe dudar de su consistencia. La consistencia de estos deberá ser demostrada a su vez por métodos "doblemente" poderosos y así ad infinitum. La pregunta por el fundamento de la matemática no puede ser respondida por ninguna de ambas escuelas. Sin embargo, debemos reconocer el mérito que éstas merecen. Gracias a ellas disponemos ahora de poderosas herramientas en lógica matemática. El desarrollo de ésta se debe en gran parte a sus investigaciones. Ambas escuelas produjeron valiosas aportaciones a la lógica pero, desgraciadamente para ellos, Gödel mostró que su fin era equivocado. Esto, sin embargo, no es un hecho desfavorable, sino positivo desde nuestro punto de vista. De ser posible encontrar un formalismo como lo pretendía Hilbert, gran parte de la actividad matemática actual moriría. Bastaría introducir en la máquina formalista la fórmula de cualquier enunciado matemático para saber si es o no un teorema. La actividad desarrollada ante los problemas "abiertos" sería inexistente y con ello la actividad del matemático se vería en gran parte reducida a simbolizar y esperar la respuesta. Si bien, tal vez, hubiera que encontrar la demostración de los teoremas, la actividad del matemático se vería de pronto limitada. Aunque tal vez encontráramos otra forma de abrir interrogantes.

Debemos decir, finalmente, que el proceso seguido por Gödel es una herramienta utilizable en diversas ramas de la matemática.

El procedimiento es aplicable a gran variedad de investigaciones. Algunos matemáticos trabajan para su aplicación.

EJERCICIOS

1. Sea $\overline{AP}_1$ la teoría obtenida de $\overline{AP}$ añadiéndole $\neg(**)$ como axioma. Probar que si $\overline{AP}$ es consistente entonces $\overline{AP}_1$ es consistente y ω-incompleto.
2. Una teoría T tal que $\mathcal{L}_T = \mathcal{L}_{\overline{AP}}$ es ω-incompleta si existe una fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_T$ tal que $AT \vdash \varphi(\bar{n})$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $AT \nvdash (x_1)\varphi(x_1)$.
   Probar que si $\overline{AP}$ es consistente, es ω-incompleto.
   Sugerencia: considere la fórmula $\neg W_1(m, x_2)$ y utilice el Teorema 6.2.
3. Probar que ω-inconsistencia implica ω-incompletez para teorías consistentes.
4. Probar que las teorías $T_1 = \overline{AP} \cup \{(99)\}$ y $T_2 = \overline{AP} \cup \{\neg(99)\}$ poseen enunciados indecidibles.
   Sugerencia: encuéntrense predicados recursivos primitivos W_1' y W_2' correspondientes a los nuevos sistemas y obtenga enunciados análogos a (99).
5. Supongamos que $\overline{AP}$ es simplemente consistente.
   a. ¿Es consistente $\overline{AP} \cup \{**\}$? ¿Es ω-consistente?
   b. ¿Es consistente $\overline{AP} \cup \{\neg(**)\}$? ¿Es ω-consistente?

6. Probar el Teorema 6.1.

7. Probar el Corolario 6.5.

8.a. Probar que el conjunto $T_{\overline{AP}} = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ es número de Gödel de una fórmula verdadera en $\mathfrak{N}$ bajo la interpretación standard$\}$ no es recursivo primitivo.
  b. Probar que no existe una teoría T recursivamente axiomatizable tal que $T = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ es número de Gödel de un teorema de $T\}$

9. Podemos sintetizar el argumento del segundo teorema de Gödel de la siguiente manera.
El enunciado del primer teorema de Gödel se formaliza en $\overline{AP}$ por "$Con_{\overline{AP}} \to **$" y así $\vdash_{\overline{AP}} Con_{\overline{AP}} \to **$. Por analogía podríamos hacer lo mismo con "$\vdash_{\overline{AP}} \neg(**) \to \vdash_{\overline{AP}} **$", la cual es parte del mismo proceso seguido para establecer $\vdash_{AP} Con_{AP} \to **$.
Así, tendríamos $\vdash_{AP} \neg(**) \to \vdash_{AP} **$, y entonces $\vdash_{AP} \neg(**) \to **$.
Pero $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ es una tautología.
Así $\vdash_{AP} **$ por M.P.
¿Cuál es la falacia de este argumento?

o

10. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ es recursivo primitivo si la relación $x \in A$ es recursiva primitiva; es decir, si existe f recursiva primitiva tal que $f(x)=0 \iff x \in A$ (C_A será recursiva primitiva).
Sea A un conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_H$ tal que:
i. A es recursivo primitivo.
ii. $\overline{AP} \cup A$ es consistente
Probar que $\overline{AP}' = \overline{AP} \cup A$ es incompleto. (En este caso se dirá que $\overline{AP}$ es esencialmente incompleto).

APÉNDICE.

I. Abreviaturas.

a. $\mathcal{L}_n^0$: conjunto de enunciados de $\mathcal{L}_n$
b. $\mathcal{L}_n^1$: conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_n$ con una variable libre.
c. $Form(\mathcal{L}_n)$: conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_n$
d. $Var(\mathcal{L}_n)$: conjunto de variables de $\mathcal{L}_n$
e. Taut. : tautología
f. F.U.V : fórmula universalmente válida
g. Ret. : regla de extensión a términos (regla Ret).

II. Reglas destacadas utilizadas en $\overline{AP}$.

1. Regla $\mathcal{E}$

Si i. $T \vdash (\exists x)\varphi(x)$
ii. $T, \varphi(x) \vdash \psi$
iii. x no ocurre libre en ψ
iv. x no ocurre libre en T

entonces $T \vdash \psi$.

2. Regla $\exists$

Si t es libre para x en $\varphi(x)$ entonces $\varphi(t) \vdash (\exists x)\varphi(x)$

3. Regla Ret.

Si $T \vdash \varphi(x_1 \ldots x_n)$ y $t_1 \ldots t_n$ son términos tales que $\forall i\ i=1\ldots n$ t_i es libre para x_i en φ y $x_1 \ldots x_n$ no ocurren libres en T entonces $T \vdash \varphi(t_1 \ldots t_n)$.

BIBLIOGRAFÍA.

BELL J.L.- SLOMSON A.B. *Models and Ultraproducts: an introduction.* NORTH-HOLLAND. AMSTERDAM. 1969.

BRIDGE J. *Beginning Model Theory.* OXFORD UNIVERSITY PRESS. OXFORD. 1977.

DE LONG H. *A profile of Mathematical Logic.* ADDISON-WESLEY. USA. 1970

GÖDEL KURT. "*On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems I.*" REPRODUCIDO EN VAN HEIJENOORT.

KLEENE S.T. *Introduction to metamathematics.* NORTH-HOLLAND. AMSTERDAM. 1952.
Mathematical Logic. WILEY. USA. 1967.

KÖRNER S. *Introducción a la filosofía de la matemática.* SIGLO XXI. MEXICO. 1960.

LADRIERE J. *Limitaciones internas de los formalismos.* TECNOS. MADRID. 1963.

MENDELSON E. *Introduction to Mathematical Logic.* VAN NOSTRAND. USA. 1964.

VAN HEIJENOORT J. (EDITOR). *From Frege to Gödel: a source book in Mathematical Logic, 1879-1931.* HARVARD U. P. CAMBRIDGE, MASSACHUSETTS. 1967.