UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNOS ASPECTOS SOBRE LA FILOSOFIA DE LA MATEMATICA DE HILBERT

T E S I S

que para obtener el título de

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a

MA. SOLEDAD ANGELICA GALVE SALGADO.

México, D. F. Enero, 1983.

A MIS PADRES: Miguel y Herlinda.

Gracias, porque han sido sus consejos, su apoyo y su confianza, los que me han acompañdo y guiado toda mi vida.

A MI ESPOSO: Marco.

Amigo y compañero inseparablé, que con su comprensión y aliento me ha impulsado a seguir siempre adelante.

A MIS HERMANOS: Karina, Ivette, Arlene, Miguel y Alvaro.

Quienes han constituido un estímulo y un ejemplo para mí, en todo momento.

A MIS MAESTROS:

Quienes me enseñaron a amar el estudio, infundiéndome un gran entusismo e interés.

I N D I C E

I N D I C E

I N D I C E
(Continuación)

INTRODUCCION GENERAL

INTRODUCCION.

El presente trabajo hace un análisis de tres grandes pensadores: Platón, Immanuel Kant y David Hilbert; con el fin de extraer de cada uno de ellos, sus concepciones filosóficas de la matemática, y mediante una comparación entre ellos, poder aclarar algunos aspectos de la filosofía matemática de Hilbert, apreciando la influencia que en ella, pudieron haber tenido, Platón y Kant.

Debemos tener claro, el tipo de filosofía matemática que pretendemos, ya que, podemos ennumerar, al menos, otras dos tendencias filosóficas en las matemáticas, que de ninguna manera cumplen con nuestro objetivo.

Una primera tendencia podría ser aquélla, en la que las matemáticas aparecen como ente juzgado por la filosofía: tradicionalmente, la filosofía se ha construido en un ámbito ajeno al de la práctica, en particular, al de la práctica matemática. Esta construcción suigéneris de la filosofía, le ha permitido erigirse como juez de todas esas prácticas.

En la relación contradictoria entre lo lógico y lo histórico, el hombre ha querido pacificar esta polaridad, haciendo valer uno de los términos por encima del otro: en la <u>Miseria de la Filosofía</u> de Marx, por ejemplo, la lógica queda sometida a la historia. Al contrario de Engels, quien en su <u>Dialéctica de la Naturaleza</u>, somete el materialismo histórico, al materialismo dialéctico.

En otras ocasiones, se intenta encontrar un tercero, al cual se someten, tanto historia como lógica, con el propósito de garantizar que los azares históricos no nos alejarán demasiado de lo real, y que podemos reencontrar nuestra morada en el logos.

A este mecanismo se deben afirmaciones tales como "Hilbert es materialista" o peor aún, "Hilbert no es dialéctico".

Esta tendencia ha causado graves y determinantes problemas, a lo largo de la historia, un ejemplo lo tenemos en Pitágoras y su descubrimiento de los inconmensurables, sus ideas filosóficas (no existen los inconmesurables), frenaron totalmente su estudio matemático.

Una segunda tendencia, es aquélla que extrae, desde la matemática, una posición filosófica que se confronta con la filosofía en general.

Esta filosofía ha cedido buena parte de su neutralidad juzgante a un intervencionismo filosófico: se despoja a lo matemático de lo que es de suyo matemático para obtener posiciones filosóficas que le permitan hacer frente, como filosofía de las matemáticas, a otras filosofías, es decir, que permita la intervención de lo matemático en cualquier otra práctica (como sucede en el positivismo); o bien que sea posible descalificarla desde otra posición filosófica, es decir, que se permita la intervención de otras prácticas en la matemática (Casanova).

Ante estas tendencias, se pretende efectuar una nueva práctica de la filosofía que haga surgir una filosofía matemática, de la matemática viva, y que sin despojar a las matemáticas de lo matemático, constituya la filosofía que las matemáticas merecen.

Parafraseando a Cavaillés, "es imposible no detener el desarrollo de las matemáticas, si uno se preocupa cuidadosamente de sus métodos, técnicas y relación con lo real".

Para el efecto, este trabajo está organizado de la siguiente forma: son tres capítulos dedicados al estudio de Platón, Kant y Hilbert respectivamente; cada capítulo se compone a su vez de tres partes: en los casos de Platón y Kant, la primera, la constituyen una breve biografía del autor y una ennumeración de sus principales obras. La segunda parte, comprende una exposición de sus doctrinas: en el caso de Platón, su "Teoría de las Ideas" y en el caso de Kant, se contemplan los aspectos más relevantes de la Crítica de la Razón pura. La tercera parte, en cada caso, comprende una descripción de la matemática, su valor y utilización para los autores.

El tercer capítulo está dedicado a Hilbert, también está dividido en tres partes: en la primera parte, se presenta una biografía como en los capítulos anteriores. En la segunda, "Antecedentes", se expone un panorama de la matemática de la época, que permitirá comprender el programa que Hilbert propone para fundamentarla; aquí tomamos tres puntos fundamentales: el desarrollo del método axiomático, el examen crítico efectuado en el siglo XIX con respecto a la fundamentación del análisis y la aparición de las paradojas en teoría de conjuntos. Se enfatiza también, la importancia del infinito en el desarrollo de las matemáticas, apuntando así al problema que condujo a Hilbert a proponer una nueva fundamentación de la matemática. En la tercera parte presentamos las tesis filosóficas fundamentales, que constituyen su programa.

Una vez descritos los tres autores, se presentan las conclusiones, estableciendo las ideas filosóficas extraidas de cada autor, y después se comparan entre sí.

Por último, se agrega un apéndice, que contiene una traducción de la importante obra de Hilbert: Sobre el Infinito. En este documento, Hilbert expresa su posición frente a la crisis de los fundamentos.

Quiero agradecer en forma muy especial al Dr. Santiago Ramírez Castañeda y al Mat. Carlos Torres Alcaraz, la ayuda invaluable y el apoyo magnífico, que me brindaron en la elaboración de esta tesis.

Ma. Soledad Angélica Galve Salgado.

CAPITULO I.

PLATON

INTRODUCCION.

- Biografía de Platón.

Platón, uno de los más grandes filósofos de la antigua Grecia, nació en Atenas o quizá en Engina, en el año 428-427 a.c., en el seno de una distinguida familia ateniense.

La educación y crianza de Platón se verificó en un ambiente aristocrático, si se tiene en cuenta su ascendencia. Según las noticias que transmite Diógenes Laercio, Platón se dedicó al estudio de la pintura y escribió poemas, primeramente ditirámbicos y después líricos, asi como tragedias. El grado de certeza de estas afirmaciones no se puede precisar, pero debemos considerar que Platón vivió en la época de mayor auge de la cultura ateniense, y debió recibir una educación muy refinada.

Aristóteles comenta en su Metafísica, la relación que existió entre Platón y Crátilo, el filósofo heraclitiano; esta relación fue en la juventud de Platón, y de ella aprendió que el mundo de la percepción sensible es un mundo en movimiento, y por ende, no hay objeto alguno susceptible de conocimiento verdadero. Sin embargo, con Sócrates aprendió que el conocimiento verdadero sólo es asequible en el plano de lo conceptual; según Diógenes Laercio, Platón fu discípulo de Sócrates cuando tenía 20 años de edad. Inicialmente, no fue su discípulo en el sentido de dedicarse de lleno, y declaradamente, a la filosofía; él mismo dice que en un principio trató de abrazar la carrera polígica, como era natural, tratándose de un joven de su alcurnia. Los parientes que tenía entre los oligarcas que gobernaban en 404-403 a.c., lo presionaban para que se introdujera en la vida política, bajo su protección, pero cuando la oligarquía empezó a practicar una política de violencias y trató de involucrar a Sócrates en sus crímenes, Platón se disgustó con sus parientes. Más los demócratas no eran mejores, ellos condenaron a muerte a Sócrates, por lo que Platón abandonó el propósito de dedicarse a la política.

Platón estuvo en Italia y Sicilia, cuando tenía 40 años, quizá con el fin de visitar a alguno miembros de la escuela pitagórica y conversar con ellos.

De regreso en Atenas, hacia el año 388-387 a.c., Platón fundó la Academia en el Jardín de Academo. A la Academia se le puede llamar con razón, la primera universidad europea, pués los estudios que en ella se efectuaban no se limitaban propiamente a los filosóficos, sino que abarcaban gran cantidad de ciencias como las matemáticas, la astronomía y las ciencias físicas; los miembros de la escuela se reunían en el culto común a las musas. A la Academia venían no sólo jóvenes de Atenas, sino también de otras ciudades; tal es el caso del célebre matemático Eudoxio, quien se pasó con toda su escuela, a la Academia, trasladándose desde Cízico. Este hecho puede considerarse como en homenaje al espíritu científico que reinaba en la Academia, asi como una prueba de que no fue simplemente una sociedad "filosófica y misteriosa".

Además de dirigir los estudios de la Academia, Platón daba lecciones y sus oyentes tomaban notas. Es importante advertir que esas lecciones no se publicaban, contrariamente a lo que sucedió con los Diálogos, que eran obras escritas con miras al gran público. En la Carta 7a., Platón repudia las exposiciones que algunos habían publicado de las conferencias en cuestión, y en la misma carta dice: "Así pués, no hay ni podrá jamás haber ningún trabajo mío, al menos sobre estas cosas, porque este tema no es comunicable mediante palabras como lo son las demás ciencias. En él, sólo se entra después de frecuentarlo mucho y de gastar toda una vida en meditarlo: sólo entonces se enciende una luz en el alma, cual llama viva que en adelante, se alimenta a sí misma".

Esta fue quizá la razón por la que la teoría de las ideas, en la forma precisa como se enseñaba en la Academia, no fue comunicada por escrito al público.

Platón murió en el año 348-347 a.c.

- Obras de Platón.

En general puede decirse que poseemos todas las obras de Platón. Algunos autores observan que no se halla en ninguno de los escritores antiguos posteriores, referencia a alguna obra de Platón que no poseamos ya. Cabe pués suponer que han llegado hasta nosotros, todos los diálogos de Platón que se publicaron. Lo que no poseemos es, como decíamos antes, un repertorio de las lecciones que dió en la Academia (aunque tenemos las referencias más o menos oscuras, que a ellas hace Aristóteles).

Evidentemente, tratándose de cualquier pensador es importante ver cómo se desarrolló su pensamiento, cómo fue cambiando -si es que cambió- y en qué consistieron sus modificaciones a lo largo del tiempo, qué ideas nuevas se produjeron en su mente; es por esto que consideramos de suma importancia, determinar la cronología de las obras de Platón.

Para el efecto, se tienen diferentes métodos, los especialistas difieren en su estimación de los resultados que se obtienen mediante el uso de cada uno de ellos. Los esquemas cronológicos que aquí presentaremos pueden considerarse en sus líneas principales como satisfactorios:

I. Período Socrático.

En este período, Platón está influído todavía por el determinismo intelectualista de Sócrates. La mayor parte de los diálogos terminan sin llegar a ningún resultado definido. Tal es la característica del socrático "no saber nada".

A este período pertenecen los siguientes diálogos: Apología, Critón, Eutifrón, Laques, Ión, Protágoras, Cármides, Lisis, República-Libro1.

II. Período de Transición.

En este período, Platón inicia el camino de sus propias opiniones. A este período pertenecen los diálogos: Gorgias, Menón, Eutidemo, Hipias I, Hipias II, Crátilo, Menexeno .

III. Período de Madurez.

En este período, Platón ya está en posesión de sus propias ideas. A este período pertenecen los diálogos: Banquete, Fedón, República, Fedro.

IV. Obras de Vejez.

En su vejez, Platón escribió los siguientes diálogos: Teeteto, Parménides, Político, Filebo, Timeo, Critias, Leyes y Epínomis, Las Cartas 7a. y 8a.

En estos esquemas cronológicos, hemos considerado sólo 29 de sus diálogos, ya que de los 36 que son, se le atribuyen a Platón, 7 de dudosa autenticidad; éstos son: Alcibíades II, Hiparco, Los Rivales, Teages, Clitofón, Minos, Cartas. Todos estos diálogos, excepto el Alcibíades II son probablemente obras de contemporáneos del siglo IV, y no falsificaciones deliberadas, sino sencillamente obras más superficiales, aunque de las mismas características que los diálogos platónicos. El Alcibíades II, es quizá, una obra posterior. Las Cartas 6a, 7a, y 8a., son generalmente, aceptadas como auténticas, aunque algunos autores juzgan que la aceptación de éstas, obliga a aceptar las restantes, excepto la 1a. y quizá la 2a.

Verdad es, que no resultaría nada grato tener que renunciar a las Cartas, pués aportan valiosos informes sobre la biografía de Platón, que no se pueden obtener de otro documento.

TEORIA DE LAS IDEAS.

En ninguno de los diálogos de Platón se halla una teoría del conocimiento expuesta sistemáticamente, sin embargo, en todos se hace patente la concepción que Platón tenía, acerca del conocimiento. Platón tenía la convicción de que el conocimiento verdadero es posible, entendiendó por tal, un conocimiento objetivo y universalmente válido, infalible y de lo que verdaderamente es; para Platón, el objeto del verdadero conocimiento debía ser estable y permanente, fijo, susceptible de definición clara y verdadera.

En el Teeteto, Platón se dedica a examinar los problemas que plantea el conocimiento; mediante un análisis profundo y detallado, refuta algunas teorías falsas del conocimiento. Platón afirma que la percepción no puede ser el conocimiento, pués éste, en gran parte, consiste en verdades que implican términos que no pueden ser objetos de percepción. De hecho, mucho de lo que conocemos acerca de los objetos sensibles, es gracias a la reflexión intelectual y no inmediatamente por la percepción.

Es claro en todo esto, el convencimiento de Platón de que los objetos sensibles no son los objetos propios del conocimiento, ni pueden serlo, puesto que no se puede decir que en realidad "son" (al menos en cuanto percibidos), sino únicamente que "devienen". Los objetos sensoriales son en cierto modo objetos aprehensibles, pero engañan demasiado a la mente como para que sean verdaderos objetos del conocimiento (porque recordemos que para Platón el conocimiento real y propiamente dicho, tiene que ser infalible y de lo que verdaderamente es).

Platón expresa esta idea en el siguiente párrafo:

"La ciencia no reside en las sensaciones, sino en el razonamiento sobre las sensaciones, puesto que, según parece sólo por el razonamiento se puede descubrir la ciencia y la verdad, ..., sensación que como decimos, no puede descubrir la verdad porque no afecta a la esencia". (República, Libro VII, Platón).

Platón dice que el conocimiento de objetos sensibles no es verdadero, y por lo tanto, el verdadero conocimiento ha de versar sobre lo universal y permanente.

Así, Platón plantea su teoría acerca del conocimiento, distinguiendo diferentes grados o niveles del conocer; dicha teoría queda ilustrada en la llamada Alegoría de la Caverna que plantea en el Libro VII de la República.

Pide Platón que imaginemos una caverna subterránea que tiene una abertura por la que penetra la luz. En esta caverna viven unos seres humanos, con las piernas y los cuellos sujetos por cadenas desde la infancia, de tal modo que ven el muro del fondo de la gruta, y nunca han visto la luz del sol. Por encima de ellos y a sus espaldas, o sea, entre los prisioneros, y la entrada de la caverna, hay una hoguera; y entre ellos y el fuego, cruza un camino elevado y hay un muro bajo, que hace de pantalla. Por el camino elevado pasan hombres llevando estatuas, representaciones de animales y otros objetos, de manera que estas cosas que llevan, aparecen por encima del borde de la pantalla. Los prisioneros, de cara al fondo de la cueva, no pueden verse entre sí, ni tampoco pueden ver los objetos que son transportados a sus espaldas; sólo ven las sombras de ellos mismos y las de esos objetos, sombras que aparecen reflejadas en la pared a la que miran: únicamente ven sombras.

Estos prisioneros según señala Platón, representan a la mayoría de la humanidad, a la gran cantidad de gente que permanece toda su vida en un esta de "Eikasia", viendo sólo sombras de la realidad y oyendo únicamente ecos de la verdad. Su opinión sobre el mundo es de lo más inadecuada, pues está deformada por sus pasiones y prejuicios.

Sin embargo, si uno de los prisioneros logra escapar y se acostumbra poco a poco a la luz, después de un tiempo será capaz de mirar los objetos concretos y sensibles, de los que antes sólo había visto las sombras. Este hombre contempla a sus compañeros al resplandor del fuego y se halla así, en un estado de "Pistis", habiéndose "convertido" desde el mundo de sombras, que era el de los prejuicios, las pasiones y los sofismas, al mundo real; aunque todavía no haya ascendido al mundo de las realidades inteligibles. Ve a los prisioneros tales como son, es decir, como prisioneros encadenados por las pasiones y los sofismas. Por otro lado, si persevera y sale de la cueva a la luz del sol, verá el mundo claro de los objetos iluminados por el sol (que representa las realidades inteligibles), y finalmente, aunque sólo mediante un esfuerzo, se capacitará para ver el sol mismo, que representa la Idea del Bien, la Idea más alta, "la causa universal de todas las cosas buenas y bellas... la fuente de la verdad y de la razón", según lo expresa el mismo Platón en la República. Se hallará entonces, en estado de "Noésis".

Esta alegoría pone en claro que la "ascención" de la mente era considerada por Platón como un progreso, aunque tal progreso no es ni continuo, ni automático; requiere esfuerzo y disciplina mental. De ahí su insistencia en la importancia de la educación, que conduce a la contemplación de las verdades y de los valores eternos y absolutos.

Con esta alegoría podemos apreciar también cómo esquematizaba Platón, el proceso del conocimiento: La mente humana a lo largo de su camino, desde la ignorancia hasta el conocimiento, atraviesa dos campos principales: el de la Doxa (opinión) y el de la Episteme (conocimiento), sólo en este último puede recibir propiamente el nombre de saber. Platón diferencía ambas funciones de la mente, diciendo que la doxa versa sobre "imágenes" de los objetos, mientras que la episteme, en la forma de Noésis, versa sobre los originales. Sin embargo, el hombre - específicamente masculino y libre - tiene la potencialidad que le empuja a salir de la "caverna" (ignorancia); el hombre llega a saber que no sabe, cuando alcanza conciencia de una nostalgia, de una reminiscencia de una existencia anterior.

A partir de esta nostalgia, remonta su estado primitivo, para elevarse al siguiente peldaño del conocimiento. El hombre pasa de la Eikasia a la Pistis, pero sin abandonar el estado de Doxa o de la opinión. La Eikasia es el grado más bajo del conocimiento, comprende las sombras, "imágenes", "reflejos", es el estado en que se encuentran aquéllos que toman por real, por original, las sombras o reflejos de algo que no pasa de ser una mera imagen, en comparación con la Idea universal. Digamos una caricatura, una sombra o reflejo de un caballo, que a su vez es sólo una imitación imperfecta del caballo ideal. Si por otra parte, un hombre toma como verdadera realidad los objetos sensibles, sin percatarse que son realizaciones imperfectas del tipo específico, se encontrará en el grado de Pistis, y aún cuando no se halla tan alejado como quien piensa que las imágenes de estos objetos sensibles que vé, son el mundo real (Eikasia), tampoco ha alcanzado el conocimiento verdadero propiamente dicho.

Pero cuando el alma se siente impulsada a investigar con ayuda de las imitaciones de los objetos ideales, que ella emplea como "imágenes", partiendo de hipótesis y avanzando no hacia una conclusión; se habrá ascendido al grado de Dianoia, que es el primer grado de la Episteme; se habrá superado el grado de Doxa (opinión). Pero esto todavía es representación, en el momento que abandonemos el nivel de la representación, habremos llegado al lugar de las Ideas (arjai), del soberano bien, a la morada de la verdad absoluta e incondicionada, a las esencias tan inmóviles como eternas y a ejercer nuestro poder (arjé) sobre ellas. Este último peldaño en el proceso del conocimiento es el de Noésis; el hombre tomando como punto de partida las "hipótesis" de la Dianoia (representaciones), las rebasa y se remonta hasta los primeros principios; aquí no se utilizan "imágenes" como en la Dianoia, sino que se procede a base de las ideas mismas, mediante el razonamiento estrictamente abstracto. Una vez comprendidos con claridad los primeros principios, la mente asciende hasta las conclusiones que de ellos se derivan, valiéndose ya tan sólo del razonamiento abstracto y no de imágenes sensibles.

James Adam en su obra The Republic of Plato, resumió esta correspondencia entre el sol y el bien, en el siguiente cuadro:

Región Visible	=	Región Inteligible
1. Sol	=	Idea del Bien
2. Luz	=	Verdad
3. Objetos de la Vista (colores)	=	Objetos del Conocimiento (Ideas)
4. Sujeto vidente	=	Sujeto cognoscente
5. Organo de la Visión (ojo)	=	Organo del conocimiento (Mente o Espíritu)
6. Facultad de la Visión	=	Facultad de la Razón
7. Ejercicio de la Visión	=	Ejercicio de la Razón
8. Aptitud de Ver	=	Aptitud de Conocer

Explícitamente, Platón deice que "el Bien no es esencia, sino que excede con mucho a la esencia en dignidad y en poder", mientras que por otra parte, es "no sólo la fuente de la inteligibilidad en todos los objetos, sino también la de su ser y esencia", de suerte que quien vuelve los ojos hacia el Bien, los vuelve hacia "aquel sitio en que se halla la plena perfección del ser". (Rep. Libro VII).

Sean cuales fueren las conclusiones a que Platón llegara, y los errores o imperfecciones que pueda haber en su teoría de las Ideas, no debemos olvidar que lo que el quiso fue establecer la fijeza de la verdad. Mantuvo firmemente que podemos aprehender y que aprehendemos de hecho con pensamiento, las esencias; y que estas esencias, no son creaciones puramente subjetivas de la mente humana, sino que las descubrimos. Juzgamos las cosas según unos modelos, ya morales, ya estéticos, o según unos tipos genéricos y específicos; pero no se les encuentra, en el mundo sensible como tal; por consiguiente, han de trascender el fluyente mundo de lo particular sensible. La realidad puede ser conocida y la realidad es racional; lo que no puede conocerse no es racional y lo que no es enteramente real, no es enteramente racional (los particulares sensibles, en cuanto tales, son lo ilimitado y lo indeterminado: solamente se limitan y se determinan en la medida en que son introducidos, valga la expresión, en lo ἄτομον εἶδος. Esto quiere decir, que los particulares sensibles, dado que no se introducen, ni se pueden introducir en lo ἄτομον εἶδος , no son en modo alguno verdaderos objetos: no son plenamente reales); esto lo sostuvo Platón hasta el fin y creyó que para explicar coherentemente nuestra experiencia -en sentido amplio- no había otro camino que el de su teoría.

MATEMATICAS.

Conociendo los principales aspectos de la filosofía de Platón, es más fácil comprender lo que era, para él, la Matemática, así como por qué le atribuía tanta importancia.

Platón asegura que el conocimiento surge de la razón, que es por la vía de la razón que el sujeto descubre la verdad -verdad objetiva, existente al margen de todo sujeto empírico posible-. Ello requiere de una actividad, de un quehacer. Para Platón conocer es hacer, este hacer es la búsqueda de la verdad y la educación del sujeto. Asimismo, Platón afirma que si bien la verdad sólo puede ser descubierta por la razón, este descubrimiento ha de iniciarse en la percepción; de esta manera, recuperará la unidad y racionalidad de lo real pero sólo mediante una razón que se inicia en la sensibilidad.

"La ciencia no reside en las sensaciones, sino en el razonamiento sobre las sensaciones...." (Teeteto, Platón).

En base a lo anterior, Platón consideraba al número y a los conceptos matemáticos, como objetos que incitan al alma a la reflexión: ni la visión, ni ningún otro sentido, proporcionan conocimiento verdadero, un conocimiento que permita la contemplación de las esencias.

Así, Platón expresa que "el número es uno de los objetos que elevan al alma y la vuelven hacia la contemplación del ser". (República, Libro VII).

Como la Aritmética se encarga del estudio del número, es ésta, la ciencia que conduce a la contemplación de la verdad y del ser; es por ello, que Platón considera tan necesario su aprendizaje y hace tanto hincapié en ello, como claramente se aprecia en el siguiente fragmento de la República:

Sócrates dice a Glaucón:

"Ahora bien, la aritmética y la ciencia del cálculo tienen por objeto el número. -Así es- Entonces, son necesarias, en efecto, al guerrero para disponer bien un ejército; al filósofo, para salir de lo que nace y muere y elevarse a la esencia misma de las cosas; porque sin esto, jamás habría un auténtico matemático.... Pongamos, pués, como ley para aquéllos que entre nosotros están destinados a ocupar los primeros puestos, que se apliquen en la ciencia del cálculo, que la estudien, no superficialmente, sino hasta que, por medio de la pura inteligencia, hayan llegado a conocer la esencia de los números; no para hecer que esta ciencia sirva, como hacen los mercaderes y negociantes, para las ventas y compras, sino para aplicarla a las necesidades de la guerra, y facilitar al alma el camino que debe llevarla, desde la espera de las cosas perecederas, a la contemplación de la verdad y del ser. -Ahora comprendo cuán bella es la ciencia del cálculo, que posee la virtud de elevar el alma, como acabamos de decir, obligándola a razonar sobre ios números tales cuales son en sí mismos, sin tolerar jamás que sus cálculos versen sobre números visibles y palpables". (República, Libro VII).

De la misma forma, Platón se expresa respecto a la Geometría: ésta tiene como objeto el conocimiento de lo que es siempre y no de lo que nace y perece: si bien los geómetras hacen uso de las formas visibles y argumentan sobre ellas, no están pensando en éstas; sino en las ideas que recuerdan; están analizando, realmente, las cosas que existen por sí mismas y que sólo son vistas con los ojos del alma. Es decir, por ejemplo, el objeto de sus argumentos es la diagonal absoluta del cuadrado absoluto y no la diagonal que dibujan.

Por esta razón, en el pórtico de la Academia, según la leyenda, estaba grabada la inscripción: "No entre nadie que no sepa geometría". Pues la matemática es, justamente, la preparación para el conocimiento de la idea universal.

Con esto se vé que, para Platón, la matemática se opone a la sensibilidad y a la percepción; más aún, en la República, Platón coloca a la matemática, como el punto intermedio entre la opinión y la episteme, como se aprecia en la explicación que dá de este tránsito:

Episteme — Noésis
Episteme — Dianoia

- - - - M A T E M A T I C A - - - -

Doxa — Pistis
Doxa — Eikasia

Platón empieza por separar en las cosas, la esencia y la apariencia:

1). La apariencia comprende ciertas figuras visibles -las que tienen la característica de ser cosas inteligibles- que obligan al alma, partiendo de ciertas hipótesis, a proceder en sus investigaciones, no para remontarse a un principio, sino para ascender hasta las conclusiones más remotas. (Platón se está refiriendo a aquellas figuras visibles que el alma utiliza como imágenes, en sus investigaciones).

2). La esencia presenta las iedeas más puras, por medio de las cuales el alma, sin ayuda de imagen alguna, partiendo de una hipótesis, se remonta, en virtud del razonamiento, hasta un principio independiente de toda hipótesis.

Esto muestra dos aspectos de la matemática de Platón:

1o. Por una parte se tiene una cierta estructura deductiva de las matemáticas, que fue utilizada por mucho de sus discípulos y que Platón expresó en los siguientes términos:

"...los geómetras y los aritméticos suponen dos suertes de números, uno par y el otro impar; figuras, tres especies de ángulos, y así sucesivamente, según la demostración que buscan; consideran luego estas suposiciones como otros tantos pricipios ciertos y evidentes, de que no dan razón ni a sí mismos, ni a los demás; finalmente, descienden de suposición en suposición hasta lo que se habían propuesto demostrar". (República, Libro VII)

2o. Por otra parte, Platón expresa un cierto formalismo; al referirse a la esencia de las cosas, Platón se olvida de las imágenes y sólo toma las ideas puras. Por ejemplo cuando define figura: "figura es donde termina un sólido" (Menón, Platón), no se refiere a esta figura o a aquélla; él habla de la idea de figura, que ya comprende en sí a todas las figuras visibles, que sólo son copias imperfectas de ésta.

Esto es lo que se hace, cuando se dice por ejemplo: $x + y = y + x$; donde x e y son dos números cualesquiera; esta expresión está comprendiendo a todos los números que satisfagan esta propiedad.

Ejemplos de ambos puntos (1 y 2), se encuentran en los Elementos de Euclides, discípulo de Platón, que establece todas sus definiciones, postulados y proposiciones en términos de ideas absolutas; y en caso de requerir demostrarlo, lo hace en forma deductiva, como Platón lo expresó en la República.

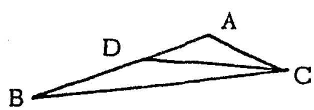
Ejemplo: Proposición 6. (Libro I)

"Si en un triángulo, dos ángulo son iguales, el lado que subtiende los ángulo iguales, también será igual al otro".

Demostración:

"Sea ABC un triángulo que tiene el ángulo ABC igual al ángulo ACB; yo digo que el lado AB es también igual al lado AC. Porque si AB es diferente de AC, entonces uno de ellos es más grande. Sea AB el más grande, entonces DB que es menor que AB es igual a AC. Entonces, DB es igual a AC y BC es común. Los dos lados DB y BC son iguales a los lados AC y CB respectivamente, y el ángulo DBC es igual al ángulo ACB. Por consiguiente, la base DC es igual a la base AB, y el triángulo DBC será igual al triángulo ACB. Esto es un absurdo, puesto que el triángulo ACB era mayor que el triángulo DBC. Por lo tanto, AB no es diferente de AC; Por tanto son iguales.

Q.E.D."



C A P I T U L O   II.

I M M A N U E L   K A N T

INTRODUCCION.

- Biografía de I. Kant.

Immanuel Kant nació en Könisberg, el 22 de abril de 1724. Fue hijo del talabartero alemán Joham Georg Kant, y aunque los historiadores han seguido su ascendencia hasta sus bisabuelos, es mínimo lo que se sabe acerca de su vida familiar, además de los escasos recuerdos que Kant cuenta de su niñez. Fue la madre de Kant, quien reconoció, primeramente, sus dotes intelectuales y, aconsejada por el profesor de teología y predicador Franz Albert Schultz, envió a Kant a una escuela de humanidades. Kant ingresó al Collegium Fridericianum en el otoño de 1732; en esta escuela, el verdadero eje de la enseñanza era la instrucción gramático-filosófica, pues aunque en los planes de estudio figuraban la matemática y la lógica, sólo se les enseñaba superficialmente; las ciencias naturales, la historia y la geografía eran totalmente ignoradas. No obstante, la estreches de la enseñanza impartida en este colegio, Kant concluyó ahí sus estudios primarios y secundarios.

El 24 de septiembre de 1740 se matriculó en la Universidad de Könisberg; para esa época las condiciones materiales de su vida no podían ser más pobres y penosas; para subsistir se dedicó a dar lecciones particulares. Entró de preceptor en una familia noble que tenía un castillo en las proximidades de Könisberg; fue preceptor privado de hijos de familias acomodadas. Posteriormente, abandonó esta profesión y entró de docente, sin el título de profesor, en la Universidad; lo que se llama "privat dozent"; en esas condiciones estuvo quince años. Muchas veces el consejo universitario estuvo por nombrarlo profesor ordinario, pero por diversas razones, esto no pudo ser sino hasta que Kant tenía cuarenta y seis años de edad.

Kant condujo una vida meticulosa y exacta; fue gracias a esto, que logró vivir ochenta años a pesar de tener una salud muy precaria.

Sin embargo, los esfuerzos de su trabajo mental, principalmente en la segunda mitad de su vida, fueron tan grandes que aproximadamente diez años antes de morir, se vió obligado a suspender sus lecciones en la universidad y un par de años antes, cayó en un estado de depresión y de debilidad física y mental definitiva.

Kant murió el 12 de febrero de 1804. Su entierro fue organizado por la universidad y los estudiantes, quienes pusieron especial empeño en tributar un último homenaje a su gran maestro.

-Obras de Kant.

Las obras de Kant se encuentran clasificadas, de acuerdo a los cuatro períodos que caracterizaron la evolución de su pensamiento filosófico:

1o. En el primer período (1746-1760), prevalece el interés por las ciencias naturales, sus obras más representativas son:

- <u>Ideas sobre la verdadera apreciación de las fuerzas vivas,</u> (1746). En esta obra, analiza la opinión de Leibniz y otros físicos, y pone de manifiesto sus propias ideas.

-<u>Historia general de la naturaleza y teoría del cielo,</u> (1755). Esta obra es un estudio de la constitución y del origen mecánico del universo, conforme a principios newtonianos.

- Monadología física, (1756).

- Nuevas observaciones sobre la teoría de los vientos, (1758).

- Ensayo sobre el optimismo, (1759).

2o. En el segundo período (1760-1769), el pensamiento de Kant sufre un cambio, duda del valor de la metafísica, y surge una inclinación más filosófica. Sobresalen las siguientes obras:

- La falsa sutileza de las cuatro figuras silogísticas (1762).

- La única prueba posible para demostrar la existencia de Dios, (1762).

- Ensayo sobre la claridad de los principios de la teología natural y de la moral, (1764).

- Observaciones sobre el sentimiento de lo bello y lo sublime, (1764).

3o. El tercer período (1769-1781), fue crucial en la vida de Kant, aquí surge la idea crítica, con la obra Forma y principios del mundo sensible e inteligible (1770); fue escrita por Kant como requisito para ser confirmado como profesor ordinario de lógica y metafísica de la universidad.

En 1771, aparece la Crítica de la razón pura, la primera de las grandes obras sistemáticas, fruto de muchos años de meditación, que proponía tres objetivos fundamentales:

1. Analizar, en qué reside la validez del conocimiento científico (matemático, físico, etc.).

2. Cuáles son los límites de dicho saber y por qué no es posible

la metafísica tradicional como ciencia.

3. Cómo es posible el berdadero conocimiento filosófico.

4o. En el cuarto período (1781-1804), se producen las obras de la filosofía crítica, ahí Kant hace algunas aclaraciones y retoques a su doctrina. Se encuentran las siguientes obras:

- Prolegómenos de toda metafísica futura que quiera presentarse como ciencia, (1783).
- Fundamentación de la metafísica de las costumbres (1785).
- Crítica de la razón práctica, (1787).
- Crítica del Juicio (1790).
- La religión dentro de los límites de la mera razón, (1793).
- La metafísica de las costumbres, (1797).
- Antropología desde el punto de vista pragmático, (1798).

Kant se encontró en el cruce de las tres grandes corrientes ideológicas que se presentaban en el siglo XVIII: el racionalismo de Leibniz, el empirismo de Hume y la ciencia positiva físico-matemática de Newton. De estas tres grandes corrientes, Kant extrajo los elementos fundamentales para plantear de un modo eficaz y concreto, el problema de la teoría del conocimiento y de la metafísica. Kant, tuvo por así decirlo, todos los hilos de la ideología de su tiempo, en la mano.

CRITICA DE LA RAZON PURA.

La filosofía de Kant, al igual que la de Descartes y Leibniz, parte de una teoría del conocimiento previa; pero con la diferencia radical, fundamental de que, cuando Kant habla del conocimiento, habla de una ciencia físico-matemática ya establecida; y no de un conocimiento futuro, no de la ciencia que está en construcción, como hacían sus predecesores. Para Kant, la teoría del conocimiento significa la teoría física-matemática de Newton; y ésta es lo que él llama el "hecho" de la razón pura.

Para Kant, esa ciencia físico-matemática de la naturaleza, se compone de juicios, es decir, de tesis, afirmaciones y proposiciones, en donde se dice algo sobre algo. Estos juicios, que no son hechos de la conciencia subjetiva, si no que son enunciados objetivos acerca de algo, tesis de carácter lógico que, por consiguiente, pueden ser verdaderos o falsos, se dividen en dos: Juicios Analíticos y Juicios Sintéticos.

- Los Juicios Analíticos son, para Kant, aquéllos en los cuales el predicado está contenido en el concepto del sujeto. Un ejemplo de juicio analítico es: "El triángulo tiene tres ángulos". Es analítico porque si se toma el concepto de triángulo y se le analiza lógicamente, se encuentra que dentro del concepto del sujeto está el de tener tres ángulos.

- Los Juicios Sintéticos son aquéllos en los que el concepto del predicado no está contenido en el concepto del sujeto. Por ejemplo, cuando se dice: "El calor dilata los cuerpos". Por mucho que se analice el concepto de calor, no se encontrará en él, el concepto de dilatación de los cuerpos. Estos juicios se llaman sintéticos, porque consisten en la unión o síntesis de elementos heterogéneos.

Kant fundamenta la legitimidad o veracidad de los juicios sintéticos y analíticos en la siguiente forma:

Para los juicios analíticos, utiliza el principio de la identidad, ya que considera que un juicio analítico no es sino una repetición en el predicado, de lo que ya enunció en el sujeto.

Por su parte los juicios sintéticos, tienen su fundamento de legitimidad en la experiencia, en la percepción sensible.

De esto desprende Kant que los juicios analíticos son verdaderos, universales y necesarios; luego, no tienen su origen en la experiencia, sino en el análisis mental del concepto del sujeto. Son pués, "a priori" (independientes de la experiencia) y su contrario es necesariamente falso.

No sucede así con los juicios sintéticos, que son verdaderos en tanto que la experiencia los avale; su validez está limitada a la experiencia sensible; y como ésta tiene lugar y momento, son entonces, juicios particulares, "a posteriori" (posteriores a la experiencia) y contingentes (es decir, su contrario es posible).

Los juicios sintéticos son particulares, contingentes y "a posteriori".

¿Cuál de estas dos clases de juicios constituyen el conocimiento científico?

No es posible que el conocimiento científico esté formado por juicios analíticos, pues éstos no aumentan nada el saber que ya se tiene en el concepto del sujeto. Pero tampoco es posible que la ciencia esté constituída por juicios sintéticos, pues la ciencia enuncia acerca de sus objetos, juicios que son verdaderos, universales y necesarios y no particulares o contingentes.

Es entonces necesario que la ciencia tenga un tipo de juicio que le sea propio; que tenga las características de ser "a priori", es decir universales y necesarios e independientes de la experiencia; pero, a la vez, se requiere que aumenten realmente el conocimiento de las cosas, es decir, los juicios de la ciencia tienen que ser al mismo tiempo sintéticos y "a priori".

El problema consiste, entonces en mostrar cómo es posible que existan juicios sintéticos a priori. Para esto, Kant empieza por mostrar que efectivamente, las ciencias están constituídas por juicios sintéticos a priori; y lo hace, enseñándolo, exhibiéndolo. Por ejemplo, en el caso de la matemática; Kant toma un juicio matemático elemental y lo analiza: "La linea recta es la más corta entre dos puntos". En el sujeto linea recta -dice Kant- sólo se tiene clara la idea de una linea cuyos puntos, están en la misma dirección. El concepto de recta no incluye algo que parezca magnitud o cantidad; luego, en el predicado de este juicio, se está añadiendo otro concepto, el concepto de "corto", que de ninguna manera está incluído en el concepto de recta. Este juicio sintético, ¿no es además "a priori"? (Efectivamente, es algo evidente, nadie considera necesario medir con un metro la linea recta, para ver que es la más corta entre dos puntos). Por consiguiente, esta intuición es una intuición "a priori". No es una intuición sensible, visual o auditiva, sino que la poseemos mentalmente; esta intuición no surge del análisis del concepto. Este es un claro ejemplo en matemáticas de juicio sintético y "a priori".

Kant se dedica a explicar cómo es que son posibles los juicios sintéticos "a priori" en la Crítica de la razón pura. Es importante notar que Kant no duda de la posibilidad de su existencia, puesto que de este hecho parte; lo que pretende es buscar las condiciones en que tiene que funcionar el conocimiento, para hacer posibles los juicios sintéticos "a priori".

Kant aborda este problema específicamente, en la "Estética Trascendental", que él mismo define como la doctrina de los principios de la sensibilidad "a priori", es decir, la que se ocupa de averiguar qué es el conocimiento sensible y cuáles sus condiciones "a priori". Kant aquí define como razón pura, la facultad que proporciona los principios para conocer algo absolutamente "a priori"; en general, llama puras a todas las representaciones en las que no existe nada que pertenezca a la experiencia; de aquí, la forma pura de las intuiciones sensibles en general se encuentra "a priori" en el espíritu: La Intuición Pura.

Kant propone dos formas puras de la intuición sensible: el espacio y el tiempo; y demuestra en su exposición metafísica que, en efecto, son intuiciones "a priori". -Aquí Kant considera la palabra metafísica en el sentido de primeros principios o cimientos de cualquier conocimiento objetivo-.

- El espacio es "a priori" es decir, universal, necesario e independiente de la experiencia.

Kant considera que el espacio, lejos de estar derivado de la experiencia, es su supuesto; no se puede tener experiencia de nada, sino en el espacio. Por otra parte, se puede perfectamente pensar en el espacio vacío, pero de ninguna manera las cosas sin espacio. Y lo expresa así: "Es perfectamente posible pensar la extensión pura del espacio, el espacio infinito, tendiéndose en sus tres dimensiones, infinitamente, sin ninguna cosa en él. Pero es absolutamente imposible, pensar una cosa real, sin que esa cosa real esté en el espacio, es decir, en ese ámbito previo en el cual se localizan cada una de nuestras percepciones. Así pués, el espacio es "a priori", no se deriva de la experiencia". (Primera Sección de la Estética Trascendental del Espacio. Crítica de la razón pura. I. Kant).

- El espacio es una intuición.

Kant explica primero lo que es una intuición, mediante su diferenciación con el concepto: el concepto es una unidad mental dentro de la cual están comprendidos un número indefinido de seres y cosas, a las que se refiere. La intuición en cambio es la operación, el acto del espíritu que toma conocimiento directamente de una individualidad. Por ejemplo: se puede tener intuición de un hombre, concreto y particular, pero no se puede tener intuición del hombre en general. Entonces, una intuición brinda conocimiento de un objeto singular, único; esto es lo que sucede con el espacio. El espacio no es un concepto, porque no cubre una especie o género de las que, multitud de pequeñas especies, sean los individuos; no hay muchos espacios, sólo hay uno. En consecuencia, el conocimiento del espacio es intuitivo.

Por tanto, el espacio es intuición pura. Kant continúa en su Estética Trascendental del espacio, demostrando que ese espacio, intuición pura, "a priori", es el fundamento de la posibilidad de los juicios sintéticos en la matemática. Esta nueva afirmación, se trata en la "Exposición trascendental del concepto del espacio", -Kant entiende por exposición trascendental "la explicación de un concepto como un principio por donde puede conocerse la posibilidad de otros conocimientos sintéticos a priori" (Primera Sección de la Estética trascendental. C.R.P. I. Kant)-.

Para este propósito, Kant requiere de dos condiciones:

1a. Que éstos conocimientos surjan realmente del concepto dado.

2a. Que esos conocimientos no sean más que bajo la presuposición de un modo dado de explicación de ese concepto.

Kant explica que, en efecto, el espacio cumple ambas condiciones, ya que si consideramos la geometría, ésta no sólo sub-pone el espacio en el sentido de sub-poner (poner debajo de ella), no sólo lo supono como punto de partida, sino que constantemente está poniendo el espacio. La prueba está en que los conceptos de la geometría, las figuras, se encuentran inmersas constantemente en una intuición pura, "a priori"; cuando se define una figura, lo que hace es construir la figura en la mente, como una intuición, puramente ideal, no sensible. Por ejemplo, "la esfera es el volumen consttruido por media circunferencia que gira alrededor del diámetro"; o bien cuando se definen las secciones cónicas: "el círculo es la figura que resulta de cortar un cono con un plano perpendicular a su eje"; "la hiperbola es la figura que resulta de cortar un cono con un plano paralelo a su eje; etc.

Las figuras no se definen como un concepto cualquiera de la naturaleza, sino mediante su construcción; por lo tanto estas definiciones no son producto de la experiencia, sino de la intuición pura del espacio, que no sólo es el supuesto primero, sino el supuesto cosntante, el contenido constante como se ha visto de la geometría.

Por esto dice Kant, que "el espacio puro está latente en toda la geometría, porque los conceptos geométricos, no se definen, sino que se construyen". (Estética Trascendental de la C.R.P.).

Además, al pasar de la geometría pura a la geometría aplicada, se tiene que esa geometría pura, estudiada con la mente pura, sin introducir las cosas de la experiencia, encaja perfectamente con ellas, y no sólo eso sino que además no podemos imaginar que no concuerde con la realidad. Esto, dice Kant, se debe a que la realidad forzosamente tiene que tener la forma de la geometría, porque ésta, que es el estudio del espacio, es además la forma de toda intuición posible.

Aquí llega a su término, la exposición trascendental... ¿Por qué las cosas son objeto del conocimiento geométrico? Como el espacio impreso en ellas por nuestra sensibilidad, el espacio a priori, les presta esa forma geométrica y por consiguiente los juicios sintéticos a priori en las matemáticas, son posibles por todo lo dicho, porque se basan en el espacio, que no es una cosa, sino la condición de la posibilidad de las cosas.

Sin embargo, el conocimiento no sólo es receptividad sensible gracias a las formas puras de intuición (espacio y tiempo); es además pensamiento activo, mediante otras formas a priori, llamadas categorías, a cuyo conjunto, Kant llama entendimiento. De esta forma, une la intuición y la inteligencia, produciendo los objetos del conocimiento. Así, mediante el espacio y el tiempo se producen los fenómenos, y la intervención de las categorías, los fenómenos adquieren el carácter de objetos.

A esto se refiere la Arquitectónica de la Razón Pura, según Kant, "...es la teoría de lo que hay de científico en nuestro conocimiento general,..., es el arte de los sistemas" (Arquitectónica de la razón pura, C.R.P.). Es bajo el gobierno de la razón, que nuestros conocimientos deben formar un sistema en el cual sólo ellos pueden sostener y favorecer los fines esenciales de la razón. -Kant entiende por sistema: "...la unidad de diversos conocimientos bajo una idea..., el concepto racional de la forma de un todo..." (Arq . de la razón pura, C.R.P.)

Según esto, para formar dicho sistema ninguna parte puede faltar sin que se note su ausencia, cuando se conocen las otras; además, todas ellas tienen sus límites determinados a priori.

Para realizar esta Idea o Sistema, se tiene la necesidad de un esquema bosquejado, cuyos fines son suministrados por la razón a priori, nunca surgen empíricamente; este esquema, funda una Unidad Arquitectónica como la llama Kant.

Lo que llamamos ciencia, se funda, arquitectónicamente, en razón de la afinidad de las partes y de su derivación de un único fin supremo e interno, y su esquema debe contener conforme a la idea - es decir, conforme al bosquejo a priori- del todo, su división en partes, distinguiéndolo con seguridad y según ciertos principios, de todas las demás.

MATEMATICAS.

Ya hemos hablado de las matemáticas, pero es en la Doctrina Trascendental del Método, de la Crítica de la Razón Pura, donde Kant expresa más abiertamente sus ideas a este respecto.

En base a lo expuesto antes, se puede decir que Kant consideraba que la matemática proporciona el ejemplo más claro de una razón pura, exitosa por sí misma sin el concurso de la experiencia; pues el conocimiento matemático es un conocimiento racional al construir sus conceptos; "Construir un concepto es representar a priori, la intuición que le corresponde". (Doctrina Trascendental del Método)

Kant afirma que la reflexión matemática nada puede hacer con el concepto simple, sino que se apresura a recurrir a la intuición, considerando el concepto en concreto, no empíricamente, sino en una intuición que se ha representado a priori, es decir, en una intuición que ha construido y en la cual, lo que resulta de las condiciones generales de la construcción, debe aplicarse también de una manera general al objeto del concepto construido.

Kant pone el ejmplo del geómetra, quien llega por una cadena de razonamientos, siempre guiado por la intuición, a la solución clara y general de los problemas. Por ejemplo, en el caso del concepto de triángulo: para pensar en este concepto, es necesario llegar a las propiedades, que si bien no están en el concepto, le pertenecen. Para esto se requiere, determinar el objeto en cuestión, según las condiciones de la intuición pura, es decir, mediante la construcción matemática. Se le va añadiendo al concepto, lo que pertenece al esquema de un triángulo en general.

El gran éxito que la razón obtiene de la matemática, reside en el método que esta ciencia emplea, puesto que remite todos sus conceptos a las intuiciones que puede dar a priori y se vuelve, por así decirlo, dice Kant, en el ama de la naturaleza. De las reglas vulgares y aplicadas empíricamente que extrae de la razón humana, brotan los axiomas matemáticos. Al matemático no le interesa deducir el concepto de espacio, le parece inútil buscar el origen primero de los conceptos puros del entendimiento; encuentra solamente útil servirse de ellos.

De aquí que Kant afirme que "la sólida firmeza de las matemáticas, descansa sobre las definiciones, los axiomas y las demostraciones" (Doctrina Trascendental del Método, C.R.P.). Y para darnos una mayor comprensión de esta afirmación, Kant explica cada uno de estos elementos:

- La Definición. Definir para Kant, es exponer originariamente el concepto explícito de una cosa en concreto; de aquí que no se puedan definir conceptos empíricos, ni conceptos a priori. Sólo se pueden definir conceptos pensados arbitrariamente, que contienen una síntesis arbitraria y que pueden ser construidos a priori; la matemática hace tales definiciones. Es decir, para Kant, las definiciones matemáticas se constituyen por la construcción de conceptos, son formadas sintéticamente, y constituirán por consiguiente, el concepto.

Kant considera que la matemática no posee ningún concepto que preceda a la definición, puesto que por ésta, el concepto es dado inmediatamente; está obligada a comenzar por esto. Las definiciones matemáticas no pueden ser falsas nunca, según Kant, puesto que el concepto es dado inmediatamente por la definición y no contiene más que lo que la definición quiere que contenga.

- Los Axiomas. Son principios sintéticos a priori, verdaderos inmediatamente. La matemática es susceptible de axiomas, puesto que por medio de la construcción de los conceptos en la intuición del objeto, puede unir a priori, e inmediatamente, los predicados de este objeto. Por ejemplo, "Hay tres puntos en un plano".

- Las Demostraciones. Sólo una prueba que no admite contradicción en sus argumentos y es intuitiva, puede llamarse demostración --es decir, no se tiene que recurrir a la experiencia, es a priori y necesaria-. La experiencia enseña lo que es, pero no que lo que es, no pueda ser de otro modo. Sólo la matemática contiene demostraciones, porque su conocimiento no deriva de conceptos, sino de la construcción de éstos, es decir, de la intuición que puede ser dad a priori como correspondiente a los conceptos. El método algebráico, con sus ecuaciones, de las que deduce por reducción, la verdad, al mismo tiempo que la prueba, si no es una construcción geométrica, es una construcción característica donde con ayuda de signos, se representan los conceptos en la intuición; sobre todo, los de relación de cantidades; ahí los razonamientos están garantizados contra el error, pues cada uno de ellos se muestra claramente.

C A P I T U L O   III.

D A V I D   H I L B E R T

INTRODUCCION.

- Biografía de D. Hilbert.

David Hilbert fue un matemático alemán, quien jugó un importante papel dentro del mundo de las matemáticas por una década entera. Se interesó en problemas que habían ocupado la atención de la investigación matemática, en todos los tiempos.

Hilbert nació el 23 de enero de 1862 en Könisberg, Alemania. Decidió dedicar su vida al trabajo matemático, teniendo como primer contacto con su carrera, la Universidad de Könisberg, donde en 1884 terminó su Inaugurel-dissertation (PH. D.) y permaneció en Könisberg como asistente de profesor de 1886 hasta 1892; posteriormente, llegó a profesor asociado de 1892 a 1893; para ser titular hacia 1893. En 1895, Hilbert fue aceptado como profesor de matemáticas en la Universidad de Göttingen, donde permaneció por el resto de su vida.

La Universidad de Göttingen, tenía una gran tradición en matemáticas, por las contribuciones que había tenido de Carl Friedrich Gauss, Peter Gustav Lejeune Dirichlet y Bernhard Riemann, durante el siglo XIX. Durante las tres primeras décadas del siglo XX, se conservó esta tradición matemática con la gran contribución de Hilbert.

Asimismo, demostró un gran interés en física matemática, contribuyendo a la gran reputación de la Universidad, en esta área, con sus memorias sobre teoría de radiaciones.

En forma muy original, Hilbert modificó las matemáticas de invariantes -entidades que no son alteradas durante cambios geométricos tales como: rotación, traslación y reflexión-.

Dentro de las matemáticas, se ocupó de la geometría en el sentido de proporcionar un tratamiento axiomático.

Uno de sus trabajos más importantes fue una lista de 23 problemas que enunció en 1900, durante el Congreso Internacional de Matemáticas; dichos problemas son resultado de un análisis riguroso de la matemática, que Hilbert hace para darles solución, por considerarlos de gran significado para las matemáticas del siglo XX. Cada solución ha sido un gran evento e incluso existe uno muy importante en Teoría de Números que aún está sin resolver, ya que requiere resolver la hipótesis de Riemann.

En 1905, se le otorgó el premio Wolfgang Bolyai de la Academia de Ciencias de Hungría, a Henri Poincaré, pero fue acompañado de una mención especial para David Hilbert. En este mismo año, Hilbert intentó establecer una firme fundamentación de las matemáticas, mediante una prueba de consistencia. Pero en 1931, el matemático austriaco Kurt Gödel, demostró que esta meta era inasequible:

- Si la matemática formalizada es consistente, entonces hay proposiciones indecidibles (no es teorema ni ella ni su negación).

- La consistencia de la matemática formalizada no se puede probar dentro de la misma matemática formalizada.

(Estamos entendiendo que S es consistente, si y sólo si hay un enunciado que no se prueba).

No obstante, la influencia de Hilbert fue determinante dentro del desarrollo de la lógica, ya que él estableció los fundamentos formalísticos de la matemática.

El trabajo que Hilbert efectuó en 1909, sobre ecuaciones integrales, trajo por resultado un examen del análisis funcional - es una parte de las matemáticas en la cual, las funciones se estudian colectivamente-.

Hilbert estableció también, bases importante en el estudio del espacio de dimensión infinita, incluso se le llama Espacio de Hilbert; y es un concepto muy usado en Análisis Matemático y en Mecánica Cuántica.

Cuando Hilbert decidió retirarse en 1930 de la Universidad de Göttingen, la ciudad de Könisberg lo hizo ciudadano honorario. Para esta ocasión, Hilbert preparó un discurso titulado "El entendimiento de la Naturaleza y la Lógica". Las últimas palabras de este discurso, manifestaron su gran entusiasmo por las matemáticas y la importancia que les atribuyó toda su vida: "Nosotros debemos saber, nosotros sabremos".

En 1939, Hilbert y el matemático francés Emile Picard, recibieron el premio Miltag-Leffler de la Academia de Suecia.

La última década de la vida de Hilbert estuvo marcada por la tragedia, así como la de sus discípulos y colegas, por el régimen nazi. Hilbert murió en Göttingen, Alemania el 14 de febrero de 1943.

- Obras de Hilbert.

- Zahlbericht, 1897. Es un reporte de Teoría de Números Algebráicos.

- Los problemas de la matemática, 1900.

- Los fundamentos de la geometría, 1902. Contiene un conjunto de axiomas para la Geometría Euclidiana.

- Sobre los fundamentos de la Lógica y la Aritmética, 1904.
- Nueva fundamentación de la Matemática, 1922.
- Sobre el Infinito, 1925.
- Los fundamentos de la Matemática, 1927.
- El entendimiento de la Naturaleza y la Lógica, 1930.

ANTECEDENTES.

- Crisis de los Fundamentos.

El desarrollo de las matemáticas durante el siglo XIX se caracterizó por un doble esfuerzo: independización de las estructuras fundamentales del análisis (Algebra abstracta, Topología, Teoría de Conjuntos) y crítica de los conceptos básicos (trabajos de Cauchy, Riemann, Weierstrass, Dedekind, Cantor).

El desarrollo del análisis exigía el establecimiento de bases sólidas: al trabajo de prospección que se esforzaba en acumular nuevos resultados, debía superponerse un trabajo de profundización, que iba a precisar el sentido de los conceptos y a crear una herramienta de investigación más rigurosa. La progresión en el sentido del rigor, pudo realizarse gracias a una reducción del campo intuitivo; se redujo el uso de las intuiciones geométricas (que jugaban un papel muy importante en la introducción de la Teoría de Funciones), en favor de las intuiciones aritméticas. Recordemos la famosa frase de Kronecker: "Dios creó el número entero y el hombre todo lo demás". Este retorno a un tipo fundamental de evidencia trataba de precisar aquellos procedimientos con los cuales podían construirse los conceptos más elaborados de la teoría. Sin embargo, la aplicación de este propósito hizo surgir graves dificultades: por necesidades de la construcción matemática, se introdujeron conceptos que estaban lejos de poder reducirse a la intuición de los números enteros, en particular, la noción de infinito, que se introduce en los primeros trabajos del análisis, bajo la forma de "paso al límite"; parecía inducir dificultades irreducibles, que la Teoría de Conjuntos no tardó en poner en evidencia.

Ciertos conceptos del análisis, hacen intervenir la idea de totalización (por ejempli cuando se habla de la totalidad de los valores adoptados por una función dentro de determinado intervalo). Esta consideración abstracta de todos los elementos pertenecientes a una determinada categoría, llevó a la formación de la noción abstracta de conjunto, con la cual Cantor construyó su teoría de los números cardinales y ordinales. Poco tiempo después de fundada la teoría, surgen e ella contradicciones conocidas como paradojas de la Teoría de Conjuntos, debidas a la aceptación espontánea de ciertas evidencias aparentes, sobre la existencia de objetos matemáticos y ciertos procedimientos lógicos de demostración. (Por ejemplo: x / x tiene la propiedad P , parece evidente pero podría ser un conjunto demasiado grande, podrían ser todos).

La aparición de estas paradojas era particularmente grave, pues ponía en tela de juicio no solamente tal o cual noción particular (como la noción de conjunto), sino procedimientos del razonamiento, admitidos hasta entonces como correctos por todos los matemáticos. No era sólo esta o aquella teoría lo que se veía comprometido, sino que todo el edificio matemático se resquebrajaba, e incluso los trabajos críticos del siglo XIX perdían su virtualidad, al revelarse incapaces de enfrentar la crisis.

Parecía necesario reemprender el trabajo de fundamentación, de manera mucho más radical: era preciso asegurarse, no sólo de las nociones ya muy complejas del análisis, sino de los mismos procedimientos del razonamiento matemático; era preciso dudar de todo, hasta de las evidencias más elementales.

Sin embargo, no se puede suprimir el recurso de la evidencia, toda demostración debe poder sustentarse, en definitiva, sobre evidencias, y lo que se denomina razonamiento no es sino un procedimiento por medio del cual, se propaga la evidencia de ciertos términos, tenidos directamente por ciertos, a otros cuya verdad no se manifiesta de manera inmediata. Y la evidencia se realiza en la intuición; era pues necesario, precisar sobre qué intuiciones había que apoyarse y justificar el papel que se les atribuyera.

Esta es la interrogante que el pensamiento matemático se vió obligado a proyectar sobre sus intuiciones primeras, dando lugar a lo que se ha llamado la CRISIS DE LOS FUNDAMENTOS.

- Programa de Hilbert.

Los textos de Hilbert precisan el verdadero carácter de esta crisis; término que él identifica no como un drama que afecta la historia de las matemáticas y lo hace dudar de todo lo que existe dentro de éstas; cuando Hilbert habla de crisis, simplemente se refiere a la necesidad de llevar a cabo un examen crítico de los conceptos básicos y de los métodos de razonamiento. Tal examen según Hilbert, debía llevar una revisión de aquellas intuiciones fundamentales, sobre las cuales se apoyaba todo el edificio matemático; sin embargo, dicha revisión no debía afectar a las adquisiciones del pensamiento matemático.

"El fin aceptado, a saber, construir las matemáticas sólidamente, es también mío: yo quisiera devolver a los matemáticos su antigua pretensión de una verdad inatacable, que las paradojas de la teoría de conjuntos parecen haber debilitado; pero yo creo que es posible alcanzar este fin conservando íntegramente todo lo que se ha conseguido" (Nueva Fundamentación de la Matemática, 1922. D. Hilbert).

Estas palabras, indican claramente cuál era el pensamiento matemático general al finalizar el siglo pasado: no se trata de renunciar a las antiguas perspectivas ni de dudar del poder de la inteligencia matemática, sino de desplazar la zona de las intuiciones, de manera que se esté al abrigo de toda sorpresa. Este desplazamiento lo opera Hilbert, cuando asigna por objeto de las especulaciones de los matemáticos, al Signo concreto. Si en el pasado se había suscitado falsas evidencias, fue porque se había creído poder conseguir mediante la intuición, verdades o conceptos abstractos. Regresando a la intuición sensible del signo y limitándose estrictamente a ella, puede caminarse por un terreno sólido en el que la adecuación entre el pensamiento y el objeto no puede dejar de producirse, asegurando al pensamiento esta objetividad absoluta que debe constituir el ideal del matemático y de cualquier hombre de ciencia.

Pero ¿cómo operar esta reducción necesaria de las verdades matemáticas abstractas, al dominio de la intuición sensible? Aquí surge la distinción establecida por Hilbert, entre matemática y metamatemática, distinción que dá todo su sentido a la teoría del objeto-signo.

"Dos puntos de vista se presentan aquí (en la empresa del fundamento de las matemáticas):

En primer término, todo lo que hasta aquí ha constituido la matemática propiamente dihca o matemática en sentido estricto, se convierte en un cuerpo de fórmulas demostrables....

En segundo lugar, a esta matemática propiamente dicha, viene a añadirse una disciplina en cierto sentido nueva, una metamatemática que sirve para asegurar la verdad de aquélla, protegiéndola del terror de interdicciones inútiles y de las dificultades creadas por las paradojas. En esta matemática, contrariamente a lo que se hace en los procedimientos de razonamiento puramente formales de la matemática propiamente dicha, se aplica un razonamiento intuitivo que se utiliza para establecer el carácter no-contradictorio de los axiomas". (Sobre el fundamento de la Lógica y la Aritmética, 1904. D. Hilbert).

Al nivel de la metamatemática se verifica lo que Hilbert denomina objeto-signo, por su mediación, se realiza la reducción necesaria de lo abstracto a lo concreto: representa los conceptos y los razonamientos matemáticos, por medio de una simbólica apropiada; se reemplazan las pseudointuiciones de antaño por el examen de configuraciones tangibles cuyas propiedades están ligadas inmediatamente a la intuición sensible pura.

Podemos situarnos -escribe Hilber- "en un nivel de consideraciones más elevado respecto al cual los axiomas, las fórmulas y las demostraciones de las teorías matemáticas se convierten en objetos de un examen intuitivo. Pero para ello, debemos ante todo, reemplazar los razonamientos intuitivos habituales de las teorías matemáticas por fórmulas y reglas. Dicho de otro modo: debemos traducirlos en formalismos, es decir, realizar una formalización estricta de todas las teorías matemáticas, comprendidas sus demostraciones, de suerte que los razonamientos y las construcciones conceptuales de las matemáticas queden integrados en el edificio de la matemática como constituyentes formales, según el modelo del cálculo lógico.

De esta manera, las consideraciones intuitivas, que como es evidente, nunca pueden ser totalmente evitadas o eliminadas, se encontrarán desplazadas a otro terreno, a un nivel en cierto sentido más elevado, y al mismo tiempo será posible en la matemática una separación rigurosa y sistemática entre las fórmulas y las demostraciones formales, por una parte, y las consideraciones intuitivas, por otra". (Nueva fundamentación de la Matemática, 1922. D. Hilbert).

EL NUEVO FUNDAMENTO DE LA MATEMATICA PROPUESTO POR DAVID HILBERT.

Para salvar el conjunto de las matemáticas clásicas (comprendida la Teoría Transfinita) y de hacer justicia a las críticas constructivas de los intuicionistas, Hilbert pretende convertir a la matemática en un inventario de fórmulas de dos tipos diferentes: fórmulas a las que corresponden proposiciones finitas, y fórmulas que nada significan en sí, y que constituyen los objetos ideales de la teoría.

Hilbert pretende desplazar nuestro objeto de estudio a los símbolos con los que opera; forzando al pensamiento a detenerse en los símbolos como objetos últimos. Al operar como fórmulas se logrará una estructura formal; de aquí, se requiere reemplazar las operaciones lógicas por reglas precisas para manejar los signos. Al ser necesario formalizar las operaciones lógicas y las pruebas matemáticas -ya que con ello se mostraba formalmente la imposibilidad de que se produjeran contradicciones en la teoría-, Hilbert tiene a su disposición el cálculo lógico de Principia Mathematica, que permite representar las fórmulas matemáticas y las inferencias lógicas mediante un proceso formal; de modo tal, que "en lugar de la ciencia matemática expresada en lenguaje ordinario, obtentemos un inventario de fórmulas compuesto por signos lógicos y matemáticos, que se encadenan entre sí de acuerdo a reglas bien definidas. Algunas de estas fórmulas corresponden a los axiomas matemáticos, y otras a reglas conforme a las cuales las fórmulas se encadenan. De este modo, el tránsito del tratamiento intuitivo al formal se habrá logrado".

(Sobre el Infinito, 1925. D. Hilbert).

Para Hilbert, la existencia matemática está en la no-contradicción. Su concepción es en realidad, la inversa de la de Brouwer: para Hilbert el ente matemático tiene existencia en sí, independientemente de los procedimientos de pensamiento a través de los cuales puede alcanzarse. Como ya se ha visto, considera que todo problema matemático tiene solución; desde el momento en que se da la no-contradicción, podemos asumir la existencia de un ente matemático, aunque seamos incapaces (provisional o definitivamente, de hecho o de derecho) de construirlo.

Fundamentar las matemáticas equivale, pues, a establecer su no-contradicción. Pero aquí nos vemos obligados a apoyarnos en la intuición y a proceder constructivamente: esto es posible, ya que una teoría matemática formalizada se presenta bajo la forma de un sistema de signos que podemos dominar perfectamente mediante la intuición.

Como se vé, para Hilbert la solidez del pensamiento matemático y la validez de sus pretenciones reside finalmente en la intuición del signo, intuición que disfruta de una evidencia privilegiada; como Hilbert mismo lo expresa en 1922:

"Para mí -y en esto me opongo totalmente a Frege y a Dedekind- los objetos de la teoría de números son los signos mismos, de los cuales podemos reconocer la forma en toda su generalidad y con toda seguridad, independientemente de las circunstancias de lugar y de tiempo, de las condiciones particulares de presentación y de las diferencias insignificantes que pueden afectar a su trazado. El punto de vista filosófico sólido que considero como indispensable para el fundamento de las matemáticas puras -como cualquier tipo de pensamiento, de comprensión y de comunicación científicos- se puede resumir de esta forma: en el principio era el signo". (Sobre el Infinito)

Ahora bien, cuando una teoría es formalizada se pone en relieve su estructura lógica o demostrativa; esto, sugirió a Hilbert convertir el proceso mismo de demostración en objeto de investigación matemática. Esto era con el fin de instituir al método matemático de la confianza que la era crítica del cálculo no logró, mostrando que los modos de inferencia de que se vale el infinito son justificables en base a procedimientos finitos. Es bajo esta perspectiva, que Hilbert funda su teoría de la demostración; ésta consiste en examinar las propiedades matemáticas del sistema con el fin de demostrar que no existe ninguna contradicción en él; para ello se requiere un análisis de los procesos de prueba representados en el sistema.

Debemos realizar una formalización estricta de todas las teorías matemáticas, comprendidas sus demostraciones, de suerte que los razonamientos y las construcciones conceptuales de las matemáticas, queden integradas como constituyentes formales según el modelo del cálculo lógico. Aquí se parte la matemática en dos: Por un lado quedan los sistemas formales, donde en lugar de deducciones materiales, hay reglas formales; por el otro, una supra-matemática, cuyo fin, es el examen intuitivo de los sistemas formales con métodos deductivos tan sensibles y seguros, que nadie pueda dudar de su corrección.

De todo lo anterior se desprende, que Hilbert considere que es la misma demostración la que se transforma en algo concreto y cuantificable; las consideraciones intuitivas sólo se hacen sobre la demostración. Así, el matemático no puede asegurarse de la solidez de sus proposiciones más que mediante la crítica de la demostración; lo cual fundamenta la teoría de la demostración.

La importancia de dicha teoría, radica en que éste es el método que Hilbert propone para demostrar la consistencia de un sistema formal, es decir, para probar la imposibilidad de que dos fórmulas contradictorias sean ambas deducibles en el sistema.

Es importante hacer hincapié en que, si bien Hilbert rechaza la tesis de que la matemática no constructiva es absurda, considera que toda discusión significativa de los sistemas formales ha de restringirse a métodos finitos.

En su opinión, la suficiencia de estos métodos en el tratamiento de los sistemas formales, obedece a la naturaleza constructiva de los formalismos. En efecto, dado que todo sistema formal se define constructivamente, queda abierta la posibilidad de conducir todo razonamiento matemático con apego a prescripciones rigurosamente constructivas. Si procediendo de tal modo, lograra demostrar la consistencia de un formalismo en el cual estuvieran representados los distintos modos de inferencia que se valen del infinito, el empleo del infinito en matemáticas quedaría justificado en base a procedimientos finitos. En cuyo caso, la matemática transfinita sería justificada por la matemática finita.

C O N C L U S I O N E S

CONCLUSIONES.

En este trabajo analizamos a tres pensadores: Platón, Kant y Hilbert; en base a este análisis podemos concluir:

A. En Platón:

1.- Las matemáticas son la vía para abandonar lo empírico.

2.- Lo empírico no es lo real, sino la apariencia trás la que se oculta la esencia, que es lo real.

3.- La esencia es ontológicamente anterior a la apariencia. La experiencia sólo es posible a partir de la esencia.

4.- La geometría sólo se refiere a objetos del pensamiento puro.

5.- Las matemáticas parten de la apariencia, que comprende ciertas figuras visibles que el alma utiliza como imágenes, para ascender desde ahí, a las conclusiones más remotas. Se llega a la esencia partiendo de una hipótesis y, sin ayuda de imagen alguna, sólo mediante razonamiento, se llega a un principio independiente de la hipótesis.

B. En Kant:

1.- Las esencias (noúmenos) son anteriores a las apariencias (fenómenos).

2.- Los noúmenos son inaccesibles, es decir, lo empírico, lo accesible son los fenómenos.

3.- Lo real es el fenómeno transformado por la actividad de la razón pura.

4.- Lo geométrico no es sensible sino construido.

5.- Los conocimientos matemáticos son conocimientos racionales, se logran por medio de la construcción de conceptos; sus orígenes sólo se encuentran en los principios esenciales y verdaderos de la razón; ni se pueden obtener en otra parte, ni pueden ser disputados porque, aquí, el uso de la razón es a priori.

C. Podemos apreciar ciertas relaciones entre Platón y Kant:

1.- Lo real es una transformación de lo empírico.

2.- La matemática envía a lo real.

3.- La matemática es ajena a la sensibilidad, sus objetos se construyen desde lo empírico, superándolo.

D. En lo que se refiere a Hilbert y a la influencia que tuvieron en él las ideas de Platón y Kant, tenemos que, para él:

1.- Las relaciones entre la matemática y lo empírico no son necesarias. Se parte de lo empírico y luego mediante una construcción conceptual, -a la manera de Kant-, se construye una teoría matemática que abandona -a la manera de Platón- lo empírico.

2.- La matemática -viva- es indiferente a su origen empírico.

3.- Hay una realidad matemática, a saber el ámbito de lo posible, es decir, de lo no contradictorio que circunstancialmente, coincide con lo empírico.

4.- Lo matemático es lo consistente. La consistencia se establece en un núcleo central referido a la experiencia. Las teorías metamatemáticas están constituidas de juicios sintéticos y, a diferencia de Kant, son a posteriori.

5.- Hilbert acepta la extensión de una teoría por medio de nociones ideales, siempre que se asegure la consistencia interna, esto es Kant.

Por todo lo anterior, podriamos afirmar que dado que las matemáticas no son una ciencia natural, considerando la presencia del infinito, que Hilbert nos muestra, no se encuentra en la realidad; luego, no es exacta, ya que esto se refiere a la fidelidad a un modelo.

Ahora, podemos proponer una conclusión que nos parece de gran importancia:

Para Platón, para Kant y para Hilbert, las matemáticas son un modo de transformación de la realidad empírica; el producto de esta transformación es la realidad matemática autónoma, viva y que posee su propia "filosofía".

B I B L I O G R A F I A

BIBLIOGRAFIA.

1. Aristóteles. Metafísica. Ed. Porrúa, Colección Sepan Cuántos.

2. Blanche, Robert. La Epistemología. Ed. Oikos-tau. Colección ¿qué sé?

3.-Bourbaki, Nicolás. Elementos de Historia de las Matemáticas. Ed. Alianza, Universidad.

4. Brouwer, L. E. J. Intuicionismo y Formalismo. Reproducido por Benacerraf y Putrram 1.

5.- Cassirer, Ernst. Kant, Vida y Doctrina. Fondo de Cultura Económica.

6. Copleston, Frederick. Historia de la Filosofía. Ed. Ariel.

7. Dou, Alberto. Fundamentos de la Matemática. Ed. Labor.

8. Enciclopedia Británica. Macropedia Vol. 8 y 11.

9. Heat, T. L. Euclid's Elements. Ed. Dover, N.Y.
A History of Greek Mathematics. Ed. Dover, N.Y.

10. Hilbert, David. Neubegründung der Mathematik. Reproducido por David Hilbert's gesammelte abhandungen. Tomo 3.
On the Infinite. Reproducido en Van Heijenoort1.
The Foundations of Mathematics. Reproducido en Van Heijenoort 1.

11. Kant, Immanuel. Crítica de la Razón Pura. Ed. Porrúa. Colección Sepan Cuántos.
Prolegómenos. Ed. Porrúa. Colección Sepan Cuántos.

12. Körner, Stephan. Introducción a la filosofía de la matemática. Ed. Siglo XXI.

13. Koyré Alexandre. Estudios de historia del pensamiento científico. Ed. Siglo XXI.

14. Ladriere, Jean. Limitaciones internas de los formalismos. Ed. Tecnos.

15. Mondolfo, Rodolfo. Breve historia del pensamiento antiguo. Ed. Losada.

16. Platón. Diálogos. Editorial Porrúa. Colección Sepan Cuántos.

17. Ramírez, Santiago. Tesis de doctorado en la Universidad de París XIII.

Para una historia de la Dialéctica. UNAM

Notas sobre la historia del concepto de Ciencia. UNAM, 1978.

¿Qué es la matemática? UNAM, 1980.

18. Reid, Constance. Hilbert. Springe-Verlag, Nueva York.

19. Russell, Bertrand. Principia Mathematica. Cambridge University press.

20. Torres, Carlos. Tesis de Matemático en la UNAM.

21. Wilder, R.L. Introduction to the Foundations of Mathematics. John Wiley & Sons Inc., New York.

A P E N D I C E

SOBRE EL INFINITO

De: David Hilbert.
Traducción: Angélica Galve.

Weierstrass, por medio de una crítica, elaborada con la sagacidad de un maestro, creó una base firme para el análisis matemático. Al aclarar, entre otras cosas, las nociones de mínimo, función y derivada, removió los defectos subsistentes del cálculo, librándolo de todas las ideas vagas acerca de los infinitesimales, con lo cual resolvió definitivamente, las dificultades que hasta entonces se enraizaban en dicha noción. Si hoy existe un completo acuerdo y certeza en el análisis acerca del empleo de los modos de inferencia basados en los conceptos de número irracional y límite en general y si hay unanimidad en todos los resultados relativos a los problemas más complicados de la teoría de ecuaciones diferenciales e integrales, a pesar del uso audaz de las combinaciones más variadas de superposición, yuxtaposición y encajamiento de límites, esto se debe, primordialmente, al trabajo científico de Weierstrass.

Sin embargo, la discusión acerca de los fundamentos del análisis no terminó cuando Weierstrass dio un fundamento al cálculo infinitesimal. Ello se debe a que el significado del infinito en matemáticas no había sido, aún, aclarado por completo. Para estar seguros, lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño, fueron eliminados del análisis, como lo estableció Weierstrass mediante la reducción de enunciados acerca de ellos a relaciones entre magnitudes finitas. Pero el infinito todavía aparece en las sucesiones numéricas infinitas que definen los números reales, y más aún, en el concepto de sistema de números reales, que concebimos como una totalidad dada en acto, completa y cerrada.

Las formas de inferencia lógica, en las que este concepto encuentra su expresión -a saber, aquéllas que se emplean cuando, por ejemplo, se habla de todos los números reales que tienen una cierta propiedad o cuando se afirma que hay números reales que tienen una cierta propiedad o cuando se afirma que hay números reales que tienen cierta propiedad- son utilizadas casi sin restricción, una y otra vez por Weierstrass, cuando establece los fundamentos del análisis.

Así, el infinito en forma disfrazada, encontró su camino a la teoría de Weierstrass y escapó a su aguda crítica; por lo tanto, el problema del infinito en el sentido que se acaba de indicar, es el que aún necesita ser resuelto en forma concluyente. Y así como el infinito en el sentido de lo infinitamente grande e infinitamente pequeño puede presentarse como una mera forma de hablar en el caso de los procesos de límite del cálculo infinitesimal; de la misma manera es necesario reconocer que el infinito en el sentido de la totalidad infinita -aún se usa en los métodos deductivos-, es algo meramente aparente. Y en la misma forma en que las operaciones con lo infinitamente pequeño fueron reemplazadas por operaciones con lo finito, dando los mismos resultados y conduciendo a las mismas relaciones formales, así, en general, los métodos deductivos basados en el infinito deben ser reemplazados por procedimientos finitos que conduzcan exactamente a los mismos resultados es decir, que permitan las mismas pruebas y los mismos métodos, para obtener fórmulas y teoremas.

La finalidad de mi teoría es establecer, de una vez por todas, la certeza de los métodos matemáticos; tarea que la era crítica del cálculo infinitesimal no logró. Así se completará lo que Weierstrass esperaba obtener con su fundamentación del análisis, realizándose lo que él consideró un paso necesario y esencial.

Sin embargo, al aclarar el concepto de infinito, aún es necesario considerar un aspecto más general del problema. Si la examinamos con atención, se encontrará que la literatura matemática está llena de trivialidades y absurdos que han tenido su origen en el infinito. Así, por ejemplo, se tienen estipulaciones, a manera de condiciones restrictivas, que establecen que en matemáticas rigurosas sólo se admitan en una prueba un número finito de deducciones, ¡cómo si alguien hubiera logrado hacer un número infinito de ellas!

Asimismo, antiguas objeciones, que suponíamos resueltas, reaparecen en nuevas formas. Por ejemplo, recientemente se han dado declaraciones como las siguientes: aún si se pudiera introducir una noción con seguridad -sin generar contradicciones- y si esto fuera demostrado; aún así, no se habría establecido una justificación para introducir dicha noción. ¿No es ésta la misma objeción que se presentó alguna vez contra los números complejos, cuando se dijo: "cierto, su uso no conduce a contradicciones; pero, su introducción no es justificable porque después de todo, las magnitudes imaginarias no existen"? No, si justificar un procedimiento significa algo más que demostrar su consistencia, dicha justificación sólo podría consistir en asegurarse de que la medida sea acompañada por éxitos sensibles. Ciertamente, el éxito es esencial, porque en matemáticas cualquier éxito es el tribunal supremo a cuyas decisiones todos se someten:

Igual que algunas personas ven fantasmas, alguno matemáticos ven contradicciones, aún donde no se ha hecho ninguna afirmación, a saber, en el mundo concreto de la sensación; cuyo "funcionamiento consistente" es considerado como una suposición especial. Siempre he creido que sólo las afirmaciones y las suposiciones que conduzcan a afirmaciones por medio de inferencias pueden contradecirse unas con otras; y el punto de vista de que los hechos y eventos pueden hacerlo así, por sí mismos, me parece un ejemplo perfecto de una trivialidad.

Mediante estas observaciones, sólo deseo mostrar que la aclaración definitiva de la naturaleza del infinito ha llegado a ser necesaria, no sólo por los intereses especiales de las ciencias individuales, sino más bien por el honor de la inteligencia humana en sí misma.

Desde tiempos inmemoriales el infinito ha provocado emociones en los hombres, más profundamente que cualquier otro problema; difícilmente existe otra idea que haya estimulado la mente tan fructíferamente. Sin embargo, ningún otro concepto necesita mayor aclaración que éste.

Antes de enfocarnos a la tarea de aclarar la naturaleza del infinito, reflexionaremos brevemente sobre el significado que se dá al infinito en la actualidad. Las primeras e ingenuas impresiones que se tienen de los eventos naturales son las de uniformidad y continuidad. Cuando se considera una pieza de metal o un cierto volumen de líquido, se tiene la impresión de que son divisibles sin límite, que cualquier parte de ellos, por pequeña que fuera, tendría de nuevo las mismas propiedades. Pero doquiera que los métodos de investigación de la física han sido refinados, los científicos han encontrado límites de divisibilidad que no resultan del alcance limitado de sus esfuerzos, sino de la naturaleza misma de las cosas. En consecuencia, se puede interpretar la tendencia de la ciencia moderna como una emancipación de lo infinitamente pequeño, y en lugar de la antigua máxima "natura non facit saltus", en la actualidad se afirma lo contrario: "la naturaleza da saltos".

Como es bien sabido, la naturaleza está compuesta de pequeños bloques de construcción, llamados átomos, que cuando se combinan y conectan, producen toda la variedad de objetos macroscópicos.

Pero, de hecho, la física no se detiene en el atomismo. A fines del siglo pasado apareció el atomismo de la electricidad, que parece mucho más extraño a primera vista. La electricidad, que hasta entonces se consideró como un flúido, y que había sido el modelo de un agente en continua actividad, ahora se mostraba que estaba constituída por partículas, a saber, electrones y protones.

Además de la electricidad y la materia, hay otra entidad en física que sostiene la ley de la conservación : la energía. Pero aún la energía, tal y como la conocemos en la actualidad, no permite una división infinita en forma absoluta y sin restricciones.

De aquí que en ningún lugar de la realidad, se encuentre un continuo homogéneo, que admita la clase de divisibilidad necesaria para realizar lo infinitamente pequeño. La divisibilidad infinita de un continuo, es una operación que sólo existe en el pensamiento. Sólo es una idea, refutada por los resultados de nuestras observaciones de la naturaleza, y de nuestros experimentos físicos y químicos.

El segundo lugar en que efrentamos el problema del infinito, se encuentra en la naturaleza, cuando consideramos al universo como un todo. Aquí, debemos considerar la expansión del universo para determinar si involucra algo infinitamente grande. Durante mucho tiempo, se tuvo la opinión de que el mundo era infinito; hasta el tiempo de Kant, y aún después, nadie tuvo ninguna duda al respecto. Pero, de nuevo, la ciencia moderna, en particular la astronomía, hace resurgir el problema, y se esfuerza por resolverlo, no por el inadecuado método de la especulación metafísica, sino por medio de razones apoyadas en la experiencia y en la aplicación de las leyes de la naturaleza. En consecuencia, han surgido objeciones importantes contra el infinito. La geometría euclidiana conduce, necesariamente, a la suposición de que el espacio es infinito; y aunque es un sistema de nociones consistente, no por eso se tiene que aplicar de hecho en la realidad. Si el espacio real es o no euclidiano, sólo la experiencia y la observación lo pueden decidir. Por otra parte, en el intento de probar la infinitud del espacio en una forma especulativa, se cometieron errores obvios. Del hecho de que más allá de una cierta porción de espacio, siempre hay más espacio, sólo se sigue que el espacio es ilimitado, pero no que es infinito. Sin embargo, lo ilimitado y lo finito no son incompatibles. En la llamada geometría elíptica, la investigación matemática proporciona el modelo natural de un universo finito. En la actualidad, el abandono de la geometría euclidiana no es, sino una especulación matemática o filosófica, que surgió por consideraciones que originalmente nada tenían que ver con el problema de la finitud del universo. Einstein mostró que era necesario abandonar la geomatría euclidiana. En base a su teoría de la gravitación, atacó los problemas cosmológicos y mostró que es posible un universo finito. Más aún puso en claro, que todos los resultados de la astronomía eran compatibles con la suposición de un universo elíptico.

Se ha establecido que el universo es finito con respecto a dos factores, a saber, a lo infinitamente grande y a lo infinitamente pequeño. Pero aún así, puede ser que el infinito ocupe un lugar justificado en nuestro pensamiento, y juegue el papel de un concepto indispensable. Respecto a las matemáticas, primero se analizará el resultado más puro y simple de la mente humana: la teoría de números; si consideramos una, de entre la gran variedad de fórmulas elementales de la teoría de números, por ejemplo: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = 1/6n\,(n+1)(2n+1)$ se puede sustituir cualquier entero en lugar de n, por ejemplo: $n=2$ o $n=5$; esta fórmula contiene implícitamente una infinidad de proposiciones; y ésta es una característica esencial para una fórmula. Este es el por qué representa la solución de un problema matemático y el por qué su prueba requiere de un acto genuino del pensamiento; a diferencia de la ecuación numérica específica:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1/6 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 11$$

que se puede verificar por cálculo; y en consecuencia, no es de interés especial, cuando se le considera individualmente.

Así, se llega a una concepción única y por completo diferente, de la noción de infinito, en el método de los elementos ideales. Este método, ya se aplica en la geometría plana elemental; donde los puntos y líneas rectas del plano son reales originalmente, son objetos existentes de hecho. Uno de los axiomas que se les aplica, es el axioma de conexión: "Una y sólo una línea recta pasa a través de dos puntos"; del cual se sigue, que dos líneas rectas siempre se intersectan, a lo más, en un punto. No hay un teorema que diga que dos líneas rectas siempre se intersectan en algún punto, porque las dos rectas, podrían ser paralelas. Pero sabemos que por medio de la introducción de los elementos ideales, tales como: líneas infinitamente largas y puntos en el infinito, podemos establecer el teorema de que "dos líneas rectas, siempre se intersectan en uno y sólo en un punto", siendo esto, universalmente válido. Estos elementos ideales (infinito), tienen la ventaja de hacer que el sistema de leyes de conexión, sea tan simple y claro como sea posible. De la simetría entre un punto y una recta, resulta el importante principio geométrico de la dualidad.

Otro ejemplo del uso de elementos ideales, son las magnitudes complejas-imaginarias del álgebra, que sirven para simplificar teoremas sobre la existencia y el número de raíces de una ecuación.

Así como en la geometría, se utilizan una "infinidad" de líneas rectas, para definir un punto ideal -esta consideración de la aplicación del principio de elementos ideales, es la más ingeniosa de todas-, así, se aplica este principio sistemáticamente en el álgebra, obteniendo las mismas leyes de la divisibilidad, sostenidas para todos los números enteros: 1, 2, 3, 4,... Ya estamos en el dominio de la aritmética superior.

Respecto a la estructura matemática más delicada y elaborada, el análisis; se sabe que el infinito juega un papel fundamental en él. En cierto sentido, el análisis matemático es una sinfonía del infinito.

El gran progreso del cálculo infinitesimal, resulta principalmente, de operar con sistemas matemáticos con una infinidad de elementos. Pero como pareció muy plausible identificiar el infinito con lo "muy grande", pronto surgieron inconsistenicias que fueron conocidas por parte de los antiguos sofistas, como las paradojas del cálculo infinitesimal. Así, el reconocimiento de que muchos teoremas sostenidos para lo finito, -por ejemplo, que la parte es más pequeña que el todo; la existencia de máximo o del mínimo; el intercambio en el orden de los términos de una suma o un producto-, no se pueden extender de inmediato y sin restricción para lo infinito, marcó un progreso fundamental. Al principio de este trabajo, dije que estos problemas habían sido aclarados completa y notablemente por Weierstrass. En la actualidad, el análisis no sólo es infalible dentro de su dominio, sino que ha llegado a ser un instrumento práctico, gracias al uso del infinito.

Pero el análisis por sí sólo, no proporciona un conocimiento profundo de la naturaleza del infinito; más bien, nos dá, por medio de una disciplina más semejante a una manera de pensar filosófica, una nueva luz sobre el problema. Esta disciplina, creada por George Cantor, es la Teoría de Conjuntos. Sin embargo, en este trabajo, sólo nos interesa aquella parte única y original de la teoría de conjuntos, que constituye el punto central de la doctrina de Cantor: la teoría de los números transfinitos. Pienso que esta teoría, es el producto más fino del genio matemático, y uno de los logros supremos de la actividad del intelecto humano puro. ¿Qué es esta teoría?

Si se deseara caracterizar brevemente el nuevo concepto del infinito, que Cantor introdujo, sin duda se diría: en análisis, se utiliza lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande, sólo como una noción de límite, como algo que llega a ser, que sucede, es decir, el infinito potencial. Pero éste, no es el infinito verdadero; y sólo se encuentra cuando se estima la totalidad de los números 1, 2, 3, 4,... como una unidad completa en sí misma, o cuando se toman todos los puntos de un intervalo como una totalidad de objetos, donde existen todos a la vez. Esta clase de infinito, es conocida como el infinito real.

Frege y Dedekind, los dos matemáticos más célebres por su trabajo en la fundamentación de las matemáticas, usaron el infinito real, para proporcionar una fundamentación para la aritmética, que fuera independiente de toda intuición y experiencia. Esta fundamentación sólo se basaba en la lógica pura. Dedekind fue más lejos aún, ya que, no tomó la noción de número infinito de la intuición, sino que la derivó por medios lógicos, empleando en forma esencial, el concepto de conjunto infinito. No obstante, Cantor fue quien desarrolló en forma sistemática, el concepto de infinito real. Considérense los dos ejemplos, ya mencionados:

1. El conjunto de los números: 1, 2, 3, 4, ...

2. Los puntos del intervalo (0 1), o lo que es lo mismo, la totalidad de números reales entre 0 y 1.

Es natural tratar estos ejemplos desde el punto de vista de su cardinalidad; pero tal tratamiento, revela resultados sorprendentes, que en la actualidad son familiares para todos los matemáticos. Porque, cuando se considera el conjunto de todos los números racionales, esto es, las fracciones: 1/2, 1/3, 1/4, 2/3,..., 3/7,....; resulta que -sólo desde el punto de vista de su cardinalidad- , este conjunto no es mayor que el de los números enteros. De aquí, que los números racionales puedan ser ennumerados en la forma usual; es decir, que son numerables. Lo mismo se sostiene para el conjunto de todas las raíces de los números, y aún para el conjunto de todos los números algebráicos. El segundo ejemplo, es análogo al primero. Sorprendentemente, el conjunto de todos los puntos de un cuadrado o de un cubo -desde el punto de vista de la cardinalidad-, no es mayor que el conjunto de puntos que hay en el intervalo (0 1). El mismo caso se presenta con el conjunto de todas las funciones continuas. Al aprender estos hechos, por primera vez, se podría pensar que , desde el punto de vista de la cardinalidad, sólo hay un infinito único. En verdad, no: Los conjuntos en los ejemplos (1) y (2), no son equivalentes, como se dice; más aún, el conjunto (2) no puede ser numerable, porque es mayor que el conjunto (1).

Aquí, las ideas de Cantor toman un giro distintivo. ¡ Los puntos de un intervalo no pueden ser ennumerados en la manera usual, es decir, mediante el conteo 1, 2, 3, ...! Pero, si se admite el infinito real, no estamos obligados a detenernos aquí. Más bien, cuando hemos contado 1, 2, 3,...., los objetos así ennumerados, se pueden ver como un conjunto infinito, en el que existe todo a la vez en un orden particular. Si denotamos este tipo de ordenación como lo hace Cantor, por ω , entonces el conteo sigue naturalmente con $\omega+1$, $\omega+2$, ..., hasta $\omega+\omega$ u $\omega\cdot 2$ y luego otra vez: $(\omega\cdot 2)+1$, $(\omega\cdot 2)+2$, ..., $(\omega\cdot 2)+\omega$ u $\omega\cdot 3$, y luego: $\omega\cdot 2$, $\omega\cdot 3$, $\omega\cdot 4$, ..., $\omega\cdot\omega$ o ω^2, ω^2+1,..., de manera que al final, se obtiene esta tabla:

$$
\begin{array}{l}
1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots, \\
\omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \ldots, \\
\omega\cdot 2,\ \omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \ldots, \\
\omega\cdot 3,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \ldots, \\
\omega^2,\ \omega^2+1,\ \ldots\ldots, \\
\cancel{\omega^2+\omega},\ \cancel{\omega^2+\omega\cdot 2},\ \omega^2+\omega\cdot 3,\ \ldots, \\
\omega^2\cdot 2,\ \ldots, \\
\omega^2\cdot 2+\omega,\ \ldots\ldots, \\
\omega^3,\ \ldots, \\
\omega^4,\ \ldots\ldots, \\
\omega^\omega,\ \ldots,
\end{array}
$$

Estos son los números transfinitos de Cantor, o como él los llamó, la segunda clase de números. Así, se llega a ellos, simplemente, al extender el conteo más allá, del infinito ordinario numerable, es decir, por una continuación sistemática, natural y bien determinada, sin el conteo finito ordinario. De la misma manera, como hasta ahora se cuenta sólo el primero, segundo, tercero,..., objeto de un conjunto, se contará también, ω-ésimo, $(\omega+1)$ésimo, ... (ω^ω)ésimo objeto. Dada esta situación, surge la pregunta de, si mediante el conteo transfinito, se puede o no ennumerar los objetos de los conjuntos que no son ennumerables ordinariamente.

En base a estos conceptos, Cantor desarrolló la teoría de números transfinitos con bastante éxito, y creó un cálculo completo para ellos. Así, gracias a la gran colaboración de Frege, Dedekind y Cantor, el infinito se introdujo y disfrutó de un periodo de gran triunfo. Mediante el vuelo más audaz, el infinito había alcanzado el nebuloso pináculo del éxito. Pero, la reacción no se hizo esperar, y tomó formas muy dramáticas. Los eventos siguieron el mismo trayecto, que en el desarrollo del cálculo infinitesimal. Los matemáticos, en su entusiasmo por descubrir resultados nuevos e importantes, prestaron poca atención a la validez de sus métodos deductivos. Y con el simple empleo de las definiciones y métodos deductivos, que habían llegado a ser usuales, empezaron a surgir contradicciones. Estas contradicciones, llamadas paradojas de la teoría de conjuntos, se hacían cada vez más severas. En particular, una contradicción, descubierta por Zermelo y Russell, tuvo un efecto evidentemente catastrófico, al conocerse en el mundo de las matemáticas.

Confrontados por esta paradoja, Dedekind y Frege abandonaron completamente su punto de vista y se retiraron. Dedekind dudó mucho tiempo, antes de permitir que publicaran una nueva edición de su tratado que hizo época, "Was sind und was sollen die Zahlen". En un epílogo, Frege también, tuvo que reconocer que la tendencia de su libro "Grundgesetze der Mathematik" era erróneo. La doctrina de Cantor fue atacada por todos lados. Esta reacción fue tan violenta, que aún los conceptos más ordinarios y fructíferos y los métodos deductivos más simples e importantes de las matemáticas, fueron amenazados, y su empleo estuvo a punto de ser declarado ilícito. Por supuesto, el viejo orden tenía sus defensores. Sin embargo, sus tácticas defensivas también fueron discutidas y ellos nunca formaron un frente unido en los puntos vitales. Se ofrecieron muchos remedios diferentes para las paradojas; los métodos propuestos para aclararlas, también fueron muy variados.

Es evidente, que el estado en que nos encontramos luchando contra las paradojas en la actualidad, es intolerable. ¿Es justo pensar que las definiciones y los métods deductivos que aprendemos, enseñamos y usamos en matemáticas, el modelo de la verdad y certeza, conduce a absurdos? Si el pensamiento matemático es defectuoso, ¿dónde vamos a encontrar la verdad y certeza?

Sin embargo, hay una manera satisfactoria, por completo, de evitar las paradojas, sin traicionar a nuestra ciencia. Las consideraciones y métodos que ayudarán a encontrar este camino y mostrarán qué dirección tomar son éstas:

1. Doquier que haya alguna esperanza de éxito, las definiciones productivas y los métodos deductivos, se investigarán con cuidado. Se fomentarán, fortalecerán y harán útiles. Nadie nos privará del paraíso que Cantor ha creado para nosotros.

2. En todas las deducciones de las matemáticas, se deberá establecer la misma certeza que existe en la teoría de números. Nadie podrá dudar, y donde surjan contradicciones y paradojas, será sólo por nuestro descuido.

Obviamente, estas metas sólo se alcanzarán después de que haya sido aclarada la naturaleza del infinito.

Ya hemos visto. que el infinito no se encuentra en ninguna parte de la realidad, no importa a qué experiencias, observaciones y conocimientos se apele. ¿Puede el pensamiento acerca de las cosas, ser tan diferente de ellas? ¿Puede el proceso del pensamiento, ser tan diferente del proceso real de las cosas? En síntesis, ¿puede el pensamiento, estar tan lejos de la realidad? Más aún, ¿no es claro que cuando pensamos que hemos encontrado el infinito en algún sentido real, sólo hemos sido seducidos para pensar así, porque con frecuencia, encontramos dimensiones extremadamente grandes y pequeñas en la realidad?

¿La deducción lógica material, nos engaña cuando la aplicamos a cosas o eventos reales? ¡No! , la deducción lógica material, es indispensable, y sólo engaña, cuando se forman definiciones abstractas arbitrarias, especialmente, aquéllas que involucran una infinidad de objetos. En tales casos, se ha usado la deducción lógica material. en forma ilegítima, es decir, no se ha puesto suficiente atención a las condiciones previas necesarias para su uso válido. Al reconocer que existen tales condiciones previas, que deben tomarse en cuenta, estamos de acuerdo con los filósofos, especialmente con Kant. Kant enseñó -y ésta es una parte integral de su doctrina-, que las matemáticas tratan un hecho dado, independiente de la lógica; y que las matemáticas nunca pueden fundarse sólo en ella. En consecuencia, los ensayos de Frege y Dedekind, así fundados, estaban condenados al fracaso.

Antes bien, como una condición previa, para usar la deducción lógica y efectuar operaciones lógicas, se debe dar algo en la percepción ciertos objetos concretos, extralógicos, que se presentan intuitivamente, como experiencias, previas a todo pensamiento. Para que la deducción lógica sea confiable, debe ser posible ver cada aspecto de estos objetos: sus propiedades, diferencias, sucesiones y contigüidades junto con los objetos mismos, como algo que no puede reducirse a otra cosa, ni requiere reducción. Esta es la posición filosófica básica, que considero un requisito para las matemáticas, y en general, para todo pensamiento, entendimiento y comunicación científica. Los hechos matemáticos, de acuerdo a esta teoría, son los signos concretos en sí mismos, cuya estructura es clara y reconocible de inmediato.

Considérese la naturaleza y los métodos de la teoría de números. Ciertamente, se puede desarrollar por medio de la construcción de estructuras numéricas ordinarias, mediante consideraciones de exclusivo contenido intuitivo. Pero las matemáticas no consisten sólo en ecuaciones numéricas, y con seguridad no pueden ser reducidas sólo a ellas. Pero, todavía se podría argumentar que las matemáticas constituyen un aparato que aplicado a enteros, produce ecuaciones correctas. Para efectuar tal investigación, se tienen disponibles los mismos métodos finitos, materiales y concretos, que se usan para derivar ecuaciones numéricas en la construcción de la teoría de números. Este requisito científico, puede satisfacerse, es decir, es posible obtener de una manera exclusivamente finita e intuitiva -como sucede en la obtención de las verdades, en la teoría de números - los conocimientos profundos que garantizan la validez del aparato matemático.

Ahora, considérese la teoría de números con más detalle. En la teoría de números, se tienen los símbolos numéricos: I, II, III, IV, ..., donde cada uno de ellos, es reconocible intuitivamente, por el hecho de contener sólo I's. Estos símbolos numéricos, que son por sí mismos, nuestro objetivo, no tienen significado en sí. Sin embargo, además de estos símbolos, aún en teoría de números elemental, se requieren otros que tengan significado y que sirvan para facilitar la comunicación, por ejemplo, el símbolo 2, es usado como abreviatura del símbolo numérico II, y el símbolo 3, como abreviación de III. Además, usamos símbolos como: $+$, $=$, $>$, para comunicar ciertos enunciados. De manera que $2+3=3+2$, sirve para comunicar el hecho de que $2+3$ y $3+2$, cuando se toman en cuenta las abreviaturas, son el mismo símbolo numérico, a saber, el símbolo IIIII. En igual forma, $3>2$, sirve para comunicar el hecho de que el símbolo 3, (III) es más grande que el 2 (II); en otras palabras, que el último símbolo es una parte propia del primero.

También usamos las letras a, b, c, para la comunicación. Así, $b>a$, comunica el hecho de que el símbolo numérico b es más grande que el símbolo numérico a.

Desde este punto de vista, $a+b=b+a$, comunica el hecho de que el número $a+b$, es lo mismo que $b+a$. También, el contenido de esta comunicación, puede mostrarse mediante la deducción material. Se puede ir bastante lejos, con esta clase de tratamiento material intuitivo.

Pero permítaseme dar un ejemplo, donde este método intuitivo se deja atrás. El número primo más grande, conocido, es (de 39 dígitos) p = 170 141 183 460 469 231 731 687 303 715 884 105 725.

Por un método bien conocido, debido a Euclides, se puede dar una prueba que permanezca dentro de la estructura finita, para el siguiente enunciado: "entre $p+1$ y $p!+1$, existe al menos un nuevo número primo". El enunciado en sí mismo, está en completa conformidad, con la actitud finita, ya que la expresión, "existe", sólo sirve para abreviar la expresión: "es cierto que $p+1$ o $p+2$ o $p+3$ o.... o $p!+1$, es un número primo".

Así, obviamente, es lo mismo decir: " existe un número primo p' tal que:

1. p' es mayor que p,

y al mismo tiempo es:

2. menor o igual que $p!+1$."

De esta forma, podemos formular un teorema que exprese sólo una parte de la afirmación de Euclides, es decir, que "existe un número primo que es mayor que p ". Y aunque este teorema, es mucho más débil en términos de contenido, y el cambio parece bastante inofensivo; sin embargo, esto involucra un salto a lo transfinito, cuando este enunciado parcial, se considera fuera del contexto anterior, y se declara como una afirmación independiente.

¿Cómo puede ser esto? Se tiene un enunciado existencial, con la frase "existe". Cierto, se tiene una expresión similar en el teorema euclidiano, pero en éste, el "existe" es una abreviación para decir: " $p+1$ o $p+2$ o $p+3$ o .... o $p!+1$, es un número primo", de la misma forma que en lugar de decir: "este pedazo de gis es rojo, o ese pedazo de gis es rojo, o el pedazo de gis es rojo", decimos brevemente, "entre estos pedazos de gis, existe uno que es rojo". Un enunciado tal como: "existe un objeto con una cierta propiedad, en una totalidad finita", se conforma perfectamente, a nuestra actitud acerca de lo finito. Pero un enunciado como: "$p+1$, o $p+2$, o $p+3$ o......, tiene cierta propiedad", es él mismo un producto lógico infinito. Pero, tal extensión al infinito está tan prohibida, como lo está la de los productos finitos a infinitos en el análisis; y a menos que, se presente una investigación especial y se tomen ciertas precauciones, esto no tiene sentido inicialmente.

En general, desde el punto de vista finito, un enunciado existencial de la forma: "existe un número con cierta propiedad", sólo tiene significado como un enunciado parcial, es decir, es visto como parte de un enunciado más preciso, pero cuyo contenido exacto, no es esencial para muchas aplicaciones.

Así, en un enunciado existencial, cuyo contenido no puede expresarse con una disyunción finita, se encuentra el infinito.

En igual forma, de la negación de un enunciado universal, es decir, que se refiere a símbolos numéricos arbitrarios, se obtiene un enunciado transfinito. Por ejemplo, el enunciado: " si a es un símbolo numérico, entonces $a+1=1+a$", no se puede negar desde un punto de vista finito. Esto se aclarará, si se considera que este enunciado, no se puede interpretar como la conjunción de una infinidad de ecuaciones numéricas por medio de "y"; sino, sólo como un juicio hipotético que afirma algo, cuando se dá un número.

De esto se sigue, en particular, que con una actitud finitista, no sepamos hacer uso de la alternativa, referente a que, una ecuación como la anterior, en la que se dá un número no especificado, queda satisfecha por todos los números, o bien, rechazada por un contraejemplo. Porque, siendo una aplicación del principio del tercero excluído, esta alternativa descansa en esencia, sobre la suposición de que la afirmación de la validez de esa ecuación, se puede negar.

En todos los casos, se observa lo siguiente: en el dominio de los enunciados finitos, se tienen como reglas, leyes lógicas muy complicadas; y su complejidad, llega a ser inmanejable cuando las expresiones "todos" y "existe", se combinan, y cuando ocurren en expresiones anidadas, dentro de otras expresiones. En cualquier caso, las leyes lógicas de Aristóteles, que el hombre ha usado desde que empezó a pensar, ya no se sostienen.

Ahora, se puede tratar de determinar, cuáles son las leyes lógicas válidas, para el dominio de las proposiciones finitas; pero esto no ayudaría, ya que no se pretende renunciar al uso de las sencillas leyes lógicas de Aristóteles. Y nadie, aunque hable con las lenguas de los ángeles, impedirá que las personas nieguen las afirmaciones arbitrarias, formen juicios parciales, o utilicen el principio del tercer excluído. ¿Entonces, qué se debe hacer?

Recordemos que somos matemáticos, que ya hemos estado en un predicamento semejante, del cual nos hemos librado, mediante el método de los elementos ideales. Al principio de este artículo, mostré algunos ejemplos ilustrativos, del uso de este método.

Del mismo modo como $i=\sqrt{-1}$, se introdujo para preservar en la forma más simple las leyes del álgebra -por ejemplo, las leyes acerca de la existencia y número de raíces de una ecuación- , los factores ideales se introdujeron para conservar a su vez, las leyes de la divisibilidad para los números algebráicos -por ejemplo, se introdujo un divisor común ideal, para los números 2 y $1+\sqrt{-5}$, aunque, tal divisor no existe en realidad. En la misma forma, para preservar las reglas formales simples de la lógica aristotélica ordinaria, debemos relacionar los enunciados finitos con enunciados ideales. Es extraño, que los métodos de deductivos que Kronecker admiró con tanta vehemencia, sean la contraparte exacta. de lo que admiró con tanto entusiasmo en el trabajo de Kummer.

¿Cómo se obtienen los enunciados ideales? Es una circunstancia notable, y de verdad prometedora y favorable, que para penetrar en la trayectoria que condece a ellos, sólo se requiera, continuar en forma natural y consistente, el desarrollo que ya ha seguido la teoría de la fundamentación de las matemáticas. Debemos darnos cuenta, que aún, las matemáticas elementales van más allá del punto de vista de la teoría de números intuitiva. La teoría de números es intuitiva, por la forma en que ha sido construida, no incluye el método del cálculo algebráico con letras. Las fórmulas siempre se han usado, exclusivamente, para la comunicación en esta teoría. Las letras se toman como símbolos numéricos, y una ecuación comunica el hecho de que dos símbolos coincidan. Por otra parte, en álgebra, las expresiones formadas por letras, se consideran estructuras independientes, que formalizan los teoremas materiales de la teoría de números. En vez de enunciados referentes a símbolos numéricos, tenemos fórmulas que son por símismas, los objetos concretos del estudio intuitivo. En vez de la prueba teórico-numérica, basada en el contenido, tenemos la derivación de una fórmula a partir de otra, de acuerdo a determinadas reglas.

Por lo tanto, hay un aumento en la cantidad de objetos finitos, en el álgebra; hasta ahora, los únicos objetos de nuestra consideración, habían sido símbolos numéricos, tales como: I, II, ..., IIIII. Pero la práctica matemática del álgebra, ya vá más allá de eso. Si aún, desde nuestro punto de vista finito, es admisible una proposición, en tanto que esté combinada con alguna indicación, que nos hable de su significado. Por ejemplo, el teorema que dice: " $a + b = b + a$, donde a y b son símbolos numéricos particulares". No obstante, preferimos no usar esta forma de comunicación, sino reemplazarla por la fórmula: $a + b = b + a$.

Esta ya no es una comunicación inmediata, de algo que tiene significado en sí mismo, sino una cierta estructura formal, cuya relación con los enunciados finitos originales: $2 + 3 = 3 + 2$ y $5 + 7 = 7 + 5$, consiste en el hecho de que, si se reemplazan a y b, por los símbolos numéricos: 2, 3, 5, 7, se obtienen los enunciados finitos particulares, es decir, se efectúa un procedimiento de prueba muy simple. Entonces, se llega al concepto de que a, b, $+$, $=$, así como la fórmula $a + b = b + a$, no tienen ningún significado por sí mismos, sino el que los símbolos numéricos les dan. Pero, a partir de esa fórmula, se pueden derivar otras; a las cuales, se les dá un significado, y se les trata como comunicaciones de enunciados finitos. Si se generaliza este concepto, las matemáticas se vuelven un conjunto de fórmulas: primero, aquéllas a las que corresponde el significado de enunciados finitos (ecuaciones numéricas y desigualdades); segundo, otras fórmulas, que no significan nada por sí mismas, y que son las estructuras ideales de nuestra teoría.

Ahora, ¿cuál era nuestra meta? En matemáticas, se encuentran enunciados finitos que contienen sólo símbolos numéricos, por ejemplo, $3>2$, $2+3=3+2$, $2=2$, $1\neq 3$, que desde nuestro punto de vista finito, son intuitivos en forma inmediata, y entendibles directamente. Estos enunciados se pueden negar, y el resultado será verdadero o falso; se puede aplicar la lógica aristotélica sin restricciones, y sin tener que tomar precauciones especiales. Se dá el principio de la contradicción, esto es, es imposible para cualquier enunciado, que él y su negación, sean verdaderos en forma simultánea. También se tiene el principio del tercero excluído, esto es, entre dos enunciados: él y su negación, sólo uno de ellos es verdadero. Decir que un enunciado es falso, es equivalente a decir que su negación es verdadera. Además de los enunciados elementales, que tienen un carácter poco problemático, encontramos enunciados finitos, de carácter problemático, por ejemplo, aquéllos que no se pueden descomponer en enunciados parciales. Finalmente, se introdujeron enunciados ideales, para asegurarse de que las leyes ordinarias de la lógica, se mantuvieran universalmente. Pero, puesto que, los enunciados ideales, a saber, las fórmulas, en tanto que no significan nada por sí mismas, no permiten la aplicación de las operaciones lógicas, como lo hacen los enunciados finitos. Por lo tanto, es necesario formalizar las operaciones lógicas y las pruebas matemáticas en sí mismas; esto requiere, una transcripción de las relaciones lógicas, en fórmulas, de manera que a los signos matemáticos se les añadan algunos signos lógicos, a saber:

$$\underset{\text{y}}{\wedge}\ ,\ \underset{\text{o}}{\vee}\ ,\ \underset{\text{implica}}{\longrightarrow}\ ,\ \underset{\text{no}}{\neg}$$

y utilizar además de las variables matemáticas: a, b, c, d, ...; variables lógicas, llamadas, variables proposicionales: A, B, C,...

¿Cómo se puede hacer esto? Por fortuna, encontramos la misma armonía establecida previamente, que con tanta frecuencia se observa en la historia de la ciencia; una armonía, que ayudó a Einstein cuando encontró el cálculo general de invariantes, ya desarrollado para su teoría de la gravitación. Encontramos un cálculo lógico, ya desarrollado, que originalmente, fue creado en un contexto diferente por completo; los símbolos se introdujeron sólo para propósitos de comunicación, pero esto, aún es consistente con nuestro punto de vista, si eliminamos cualquier significado que se les atribuya, y declaramos que las fórmulas del cálculo lógico son enunciados ideales, que no significan nada por sí mismos. En el cálculo lógico, se posee un lenguaje simbólico, que puede representar enunciados matmáticos con fórmulas, y expresar deducciones lógicas, mediante procedimientos formales. En analogía exacta, a la transición de la teoría de números al álgebra formal, ahora consideramos los signos y símbolos de operación del cálculo lógico, haciendo abstracción de su significado. De aquí, que finalmente se obtenga, en lugar de un conocimiento matemático comunicado por medio de un lenguaje ordinario, un conjunto de fórmulas que se forman, a partir de símbolos lógicos y matemáticos, y que son generadas sucesivamente, de acuerdo a reglas bien definidas. Algunas de estas fórmulas, corresponden a los axiomas matemáticos, y para la deducción material, hay reglas de acuerdo con las cuales, las fórmulas se siguen una a otra. Por lo tanto, la deducción material es reemplazada por un procedimiento formal, gobernado por reglas. De este modo, se efectúa la transición total de un tratamiento natural, a uno formal: tanto para los axiomas en sí mismos, que en su origen, se consideraron, ingenuamente, como verdades fundamentales; en la axiomática moderna, se consideran como exclusivas relaciones entre conceptos; como para el cálculo lógico, que se propuso como otro lenguaje.

Permítaseme explicar, cómo se formalizan las pruebas matemáticas. Como dije, existen ciertas fórmulas, llamadas axiomas, que sirven como bloques de construcción para la estructura formal de las matemáticas. Una prueba matemática, es una ordenación o arreglo, que debe darse en nuestra intuición. Consiste en deducciones hechas de acuerdo al esquema:

$$\begin{array}{c} G \\ G \dashrightarrow L \\ \hline L \end{array}$$

donde cada premisa, es decir, las fórmulas: G y $G \dashrightarrow L$, o es un axioma, o resulta de una axioma por sustitución, o es la última fórmula de una deducción previa, o resulta de ella por sustitución.

Se dice que una fórmula es demostrable, si es la fórmula final de una prueba.

Nuestro programa, nos guía por sí sólo a la elección de axiomas para nuestra Teoría de la Demostración. A pesar de que existe, una cierta arbitrariedad en la elección de axiomas, como en el caso de la geometría, ciertos grupos de axiomas, se distinguen cualitativamente.

Estos son algunos ejemplos, tomados de cada uno de estos grupos:

I. Axiomas de Implicación:

$A \dashrightarrow (B \dashrightarrow A)$ Adición de una hipótesis.

$(B \dashrightarrow C) \dashrightarrow \{(A \dashrightarrow B) \dashrightarrow (A \dashrightarrow C)\}$
Eliminación de un enunciado.

II. Axiomas de Negación:

$\{A \dashrightarrow (B \wedge \neg B)\} \dashrightarrow \neg A$ Principio de Contradicción.

$\neg\neg A \dashrightarrow A$ Principio de la Doble Negación.

Del principio de contradicción, se obtiene la fórmula: $(A \quad A) \dashrightarrow$

y del principio de la doble negación, se obtiene el principio del tercero excluído: $\{(A \dashrightarrow B) \wedge (\neg A \dashrightarrow B)\} \dashrightarrow B$.

Los axiomas de los grupos I y II, son simplemente los axiomas del cálculo proposicional.

III. Axiomas Transfinitos:

(a) $A(a) \dashrightarrow A(b)$ Inferencia de lo universal a lo particular, Axioma Aristotélico.

$\neg (a)\ A(a) \dashrightarrow (\exists a)\ \neg A(a)$ Si un predicado no se aplica universalmente, entonces hay un contraejemplo.

$\neg(\exists a)\ A(a) \dashrightarrow (a)\ \neg A(a)$ Si no hay instancias de una proposición, entonces la proposición es falsa para toda a.

Aquí llegamos a un hecho muy importante, a saber, que estos axiomas transfinitos, se derivan de un axioma singular, que contiene la esencia de uno de los axiomas más discutidos, en la literatura matemática, a saber, el axioma de elección: $A(a) \dashrightarrow A(\varepsilon(A))$, donde ε es la función de elección lógica, del transfinito.

Además, se tienen los siguientes axiomas, específicamente matemáticos, que se suman a los ya dados:.

IV. Axiomas de Identidad:

$a = a$,

$a = b \dashrightarrow (A(a) \dashrightarrow A(b))$,

y finalmente,

V. Axiomas de Número:

$a + 1 \neq 0$

y el Axioma de Inducción Matemática:

$$\{A(0) \wedge (x)(A(x) \dashrightarrow A(x'))\} \dashrightarrow A(a)$$

Así, ya estamos en posición de externar nuestra teoría de demostración, y construir el sistema de fórmulas demostrables, es decir, las matemáticas. Pero, en nuestra alegría general por el éxito de la investigación, en particular, por el encuentro de la herramienta indispensable: el cálculo lógico; aún así, no debemos olvidar la condición esencial de nuestro trabajo. Porque aunque única, es absolutamente necesaria, y que está relacionada con el método de los elementos ideales. Esa condición, es una "prueba de consistencia"; porque, la extensión de un dominio, mediante la suma de elementos ideales es legítima, sólo si no causa contradicciones en el dominio inicial, que es más estrecho; o en otras palabras, sólo si las relaciones que se obtienen de las viejas estructuras, al eliminar las estructuras ideales, continúan siendo válidas en el dominio anterior.

No obstante, el problema de consistencia es manejado fácilmente, en las presentes circunstancias. Se reduce a ver que "$1 \neq 1$".

Esta tarea pertenece al dominio de la intuición, tanto como la de encontrar una prueba de la irracionalidad de 2 en la teoría de números, es decir, la prueba de que es imposible encontrar dos números a y b, que satisfagan la relación: a 2b , o sea que no se pueden producir dos números con una cierta propiedad.

Asimismo, es de nuestra incumbencia mostrar que no se puede dar un cierto tipo de prueba. Pero una prueba formalizada, es un objeto visible y concreto, como lo es un número; se puede describir completamente. Más aún, la fórmula " 1 1 ", es una propiedad que se puede verificar con una prueba. El dar esta prueba, nos permitirá justificar, la introducción de enunciados ideales.

Así, experimentaremos la placentera sorpresa, de haber resuelto al mismo tiempo, un problema que ha importunado a los matemáticos por largo tiempo, o sea, el problema de proveer la "consistencia de los axiomas aritméticos". Porque, después de todo, al seleccionar, interpretar y usar las reglas y axiomas, no queremos tener que confiar a ciegas. En geometría y teoría física, la prueba de consistencia se efectúa exitosamente, mediante su reducción a probar la consistencia de los axiomas aritméticos. Pero, es obvio que no podemos usar este método para probar la consistencia de la aritmética en sí misma. Es nuestra teoría de la demostración, basada en el método de los elementos ideales, la que nos capacita para realizar este último e importante paso; ya que constituye, el fundamento necesario en el campo de las doctrinas axiomáticas. Lo que hemos experimentado en dos ocasiones, una con las paradojas del cálculo infinitesimal, y otra con las de la teoría de conjuntos, no lo experimentaremos por tercera ocasión, ni nunca más.

La teoría de la demostración que hemos diseñado, no sólo provee una base sólida para la fundamentación, sino que también proporciona un método general, para tratar cuestiones matemáticas fundamentales, que las matemáticas hasta ahora, habían sido incapaces de manejar. En cierto sentido, las matemáticas han llegado a ser un tribunal supremo, que decide problemas fundamentales sobre una base concreta; y con el cual, todos pueden estar de acuerdo, y cada enunciado puede ser verificado.

Las afirmaciones de la nueva doctrina, llamada "intuicionismo", aunque modestas, deben en mi opinión, recibir primero el certificado de validez, de este tribunal.

Un ejemplo del tipo de problemas fundamentales, que se pueden manejar así, es la tesis: "todo problema matemático, tiene solución". Estamos convencidos de que así es en realidad. De hecho, uno de los principales atractivos, de dar esta herramienta a un problema matemático, es que dentro de nosotros, siempre oimos: "Existe este problema, encuentra la solución". Se puede encontrar por el pensamiento puro, porque no hay ignorabimus (ignorancia) en matemáticas. Ahora, mi teoría de la demostración, no puede especificar un método general para resolver todo problema matemático; de hecho, no existe. Pero la prueba de que todo problema matemático tiene solución, es consistente, cae completamente, dentro del alcance de nuestra teoría.

Ahora, jugaré mi última carta. La prueba final, de toda teoría nueva es su éxito en la resolución de problemas ya existentes, para los cuales no fue creada específicamente. La máxima: "Por sus frutos los conoceréis", se aplica también a las teorías. Cuando Cantor descubrió sus primeros números transfinitos, llamados, la segunda clase de números, surgió la pregunta, como ya he mencionado, de si este método de conteo, transfinito, permite ennumerar los elementos de los conjuntos conocidos en otros contextos, y no ennumerables en el sentido ordinario.

Los puntos de un intervalo, se presentaron como un conjunto de esta clase, y fueron los primeros en ponerse bajo esta consideración. Este problema, de ennumerar los elementos de este conjunto, por medio de la tabla construida previamente, es el famoso problema del continuo, que Cantor formuló, pero no logró resolver. Algunos matemáticos, creyeron que podían resolver este problema, negando su existencia. Las siguientes consideraciones, muestran lo erróneo de su actitud:

El problema del continuo, se distingue por su originalidad y belleza interna; pero además, se caracteriza por dos cualidades que lo elevan sobre otros problemas famosos:

Su solución requiere nuevas formas, ya que los métodos antiguos fallan en este caso, y además, esta solución es, en sí misma, de gran importancia, por los resultados que se determinan.

La teoría que he desarrollado, provee una solución para el problema del continuo. La demostración de que todo problema matemático tiene solución, constituye el primero y más importante paso hacia su solución.

En resumen, volvamos al tema principal y tracemos algunas conclusiones de nuestro pensamiento acerca del infinito. Nuestro principal resultado, es que el infinito no se encuentra en ninguna parte en la realidad. Ni existe en la naturaleza, ni provee una base legítima para el pensamiento racional. En contraste a los primeros esfuerzos de Frege y Dedekind, estamos convencidos de que ciertos conceptos intuitivos y conocimientos profundos, son condiciones necesarias para el conocimiento científico. Pero esta lógica sola no es suficiente, el manejo del infinito, sólo puede hacerse mediante lo finito. El rol de juego para el infinito, sólo consiste en poder confiar, sin duda alguna, en la estructura creada por nuestra teoría; la cual, parte de una idea, si se entiende por idea, en terminología kantiana, un concepto de la razón que trasciende a toda experiencia y que completa lo concreto como una totalidad.

Finalmente, deseo agradecer a P. Bernays por su inteligente colaboración y valiosa ayuda, tanto técnica como editorial; en forma específica, con la prueba del teorema del continuo.