UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEOREMA DEL MAPEO DE RIEMANN

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADO EN MATEMATICAS

P R E S E N T A :

JEANNETTE ESCALERA BOURILLON

MEXICO, D. F. 1983

I N D I C E .

PROLOGO.

El presente trabajo es la reunión de dos estudios; en uno de ellos se trata de mostrar como la práctica científica persigue y alcanza sus objetivos en una serena irresponsabilidad, y el otro se refiere a la construcción del Teorema del Mapeo de Riemann. La primera parte, será tratada en la introducción, con respecto a la segunda, el trabajo cubre hasta el capítulo IV del libro Complex Analysis de Lars V. Ahlfors (primera edición), y solamente se añadirán algunos detalles secundarios.

1.- El modo de abordar la teoría de variable compleja es múltiple: desde el punto de vista de series de potencias en donde, el problema central es la caracterización de una función a partir de sus ceros (Teorema de Weierstrass) o a partir de sus partes singulares (Teorema de Mittag-Leffler) y que requiere una caracterización de las propiedades locales de las funciones analíticas (Teorema del límite de Abel, las series de Taylor y Laurent, etc.)

2.- Otra posibilidad sería, partir de las transformaciones lineales, para desarrollar las geometrías no euclidianas.

3.- O bien se podía abordar el problema desde un punto de vista " aplicado " enfatizando el cálculo de residuos, la función γ , el problema de Dirichlet, etc.

4.- Otras direcciones posibles serían el punto de vista de las funciones elípticas, el de las superficies de Riemann, o, por último, la dirección que conduce a las ecuaciones diferenciales lineales.

Así, la teoría de variable compleja está colocada en la encrucija formada por esta multiplicidad de caminos: se trata de una teoría que, ante todo, no es cálculo en dos variables, y que, además permite una visión diferente del modo como se articula el " espacio discursivo" de las matemáticas. En el espíritu de Pascal, la fascinación y dificultad de la teoría de la variable compleja, se deben, precisamente, a esta ubicación singular en el espacio teórico que ella misma organiza.

Se ha supuesto, en este trabajo, un conocimiento básico del álgebra de los números complejos, de algunos conceptos elementales del análisis (sucesiones, convergencia uniforme, etc.) y de conceptos elementales de topología de conjuntos.

INTRODUCCION

Aquí, se analiza el problema del conocimiento, enfatizando cuestiones tales como lo apolíneo y lo dionisíaco en el problema del conocimiento; el conocimiento en el problema de la verdad; la verdad en el problema de la ciencia; la ciencia en el problema de los fundamentos; los fundamentos en el problema de la existencia. Este nos conduce al problema de las ilusiones preexistentes que, a su vez nos lleva al problema platónico-socrático, planteado en divisas tales como: "la sabiduría consiste en el saber" y " no se sabe nada que no se pueda expresar y de lo que no se pueda convencer a otro". Por ello, nos encontramos en el lenguaje, que se desenvuelve en un campo de juego (la ironía lúdica) y que habrá de necesitar que se creen ciertas reglas, modos y formas de raciocinio, es decir una lógica. Esta lógica sobre fundamentos, principios y definiciones, constituye el razonamiento matemático de nuestra época. Estamos al fin, en el verdadero problema, ya que, según Wittgenstein, "Las matemáticas y la lógica se cuidan solas". (1.1)

Wittgenstein añade: "Lo que hay de pernicioso en la técnica lógica es que nos hace olvidar la técnica matemática especial" y en otro pasaje: " La maldición de la invasión de las matemáticas por la lógica matemática consiste en el hecho de que ahora cada proposición puede ser representada en una escritura matemática, lo que hace que nos sintamos obligados a comprenderla. Aunque de hecho ese modo de escritura no sea sino traducción de la imprecisa prosa ordinaria". (1.2)

*

Nuestra civilización ha perdido su asombro ante la magia de la palabra. El enorme esfuerzo de nuestra cultura por estructurar conceptualmente la realidad según las leyes lógicas, universalmente definidas y aplicables, ha cortado de raíz el flujo mágico que la realidad objetiva tenía para el hombre primitivo.

En nuestra civilización, la palabra ha sido reducida a una estructura conceptual. Es un mero instrumento del que nos servimos para el cálculo y la comunicación más elemental. Está separada de la realidad por el esfuerzo abstrayente del que la define; la necesidad de un sistema lógico, formal integra así al concepto en el mecanismo de la generalización, formando los monumentos de interrelación conceptual que son las "ciencias"

Rara vez, sin embargo, nos damos cuenta del empobrecimientos que sufre la palabra en un sistema de-esta naturaleza. Además, desde el punto de vista abstracto, las definiciones de los términos definidos deben considerarse simplemente como especulaciones, notaciones que nos permiten formas diversas de escribir frases.

Las definiciones deben ser tales que demuestren que cualquier afirmación del sistema que contenga términos definidos pueda escribirse de nuevo en la sola notación de los términos del sistema. Solamente cuando podamos considerar los axiomas, los términos primitivos y las definiciones, bajo esta luz abstracta, podremos confiar en nuestros juicios acerca de lo que se sigue lógicamente de ellos.

Así hablaba Nietzsche:" En Sócrates se materializó uno de los aspectos de lo helénico, aquella claridad apolínea, sin mezcla de nada extraño; aparece cual un rayo de luz puro, transparente, como recursos y heraldo de la ciencia, que asímismo debía nacer en Grecia. Pero la ciencia y el arte se excluyen: Desde este punto de vista resulta significativo que sea Sócrates el primer gran heleno que fue feo; de igual manera que en él, propiamente, todo es simbólico. El es el padre de la lógica que representa con máxima nitidez el carácter de la ciencia pura" (6.1)

"Con Sócrates ha llegado el final de la é -- poca trágica; comienza ahora la época de la razón y del hombre teórico" . (2.1.)

" Sócrates inicia, en el pensamiento occidental, el giro hacia la antropología y la metafísica el- cauce de la mirada del preguntar filosófico, de dirigirse al todo dominante del mundo, se redujo a lo que existe dentro de éste.

"Sócrates aparece así como un fénomeno de la- razón, como un hombre en el que toda ambición y toda pasión se han transformado en la voluntad de ordenación - y dominio racionales de lo existente. " Sócrates fue, - el inventor de lo teórico". (2.2)

"En un apartado rincón del universo, en el - que centellean innumerables sistemas, hubo una vez un - astro en el que animales astutos inventaron el conocer- Este fue el minuto más altivo y más mentiroso de la historia universal... " La "mentira" del intelecto se basa en la inaprehensibilidad conceptual de la vida, entendida ésta, no biológicamente sino metafísicamente.

" Así interpreta la función del conocimiento humano."(2.3)

Desde él, esta cuestión se transformó. No se- trata ya de saber cuál es el camino más seguro de la -- verdad, sino de cuál ha sido el camino temerario de la- Verdad.

" El intelecto está al servicio de la voluntad de vivir, descansa en una ilusión que sostiene a - la vida. El orgullo del animal que conoce la convence - para que exista; es una seducción.

" La ciencia, la imposición de lo verdadero - la obligación de verdad, los procedimientos ritualiza - dos para producirla, atraviesan desde hace milenios plenamente toda la sociedad occidental y se han universa - lizado en la actualidad para convertirse en la ley general de toda civilización". (4.1)

Alude sarcásticamente al juego fútil de las - múltiples vanidades humanas: la adulación, la mentira,- el engaño, la comedia ante los demás y ante uno mismo,- y plantea el problema de cómo puede surgir, es una constelación semejante, el impulso puro y sincero hacia la- verdad. De ordinario nosotros percibimos esto como un- contraste inconciliable: como el constraste entre el - empleo abusivo del intelecto para la astucia sagaz, para la comedia vanidosa y la sincera voluntad de verdad. (2.4)

" Con sócrates ha llegado el principio de la época de la comedia: " Todo tiene que ser conciente para ser bello" es la tesis euripídea paralela a la socrática : "todo tiene que ser conciente para ser bueno". (6.2)

"La decadencia de la tragedia, tal como Eurípides creyó verla, era una fantasmogoría socrática; como nadie sabía convertir la antigua técnica artística en - conceptos y palabras, Sócrates negó aquella sabiduría y, con él, la negó el seducido Eurípides.

El socratismo desprecia al instinto y, con - ello, el arte. Niega cabalmente la sabiduría allí donde está el reino más propio de ésta." (6.3)

Pero el sacratismo es más antiguo que Sócrates su influjo disolvente en el arte se hace notar ya mucho- antes. El elemento de la dialéctica, peculiar a éste, - se introduce furtivamente en el drama musical ya mucho- antes de Sócrates, y produce un efecto desvastador, en- su bello cuerpo. El mal tiene su punto de partida en - el diálogo. Como se sabe, el diálogo no estaba originalmente en la tragedia; el diálogo se desarrolló relativamente tarde a partir del momento en que hubo dos actores es decir, ya había algo análogo en el discurso alternante entre el héroe y el corifeo; pero allí,sin embargo,- dada la subordinación del uno al otro, la disputa dia - léctica resultaba imposible: Tan pronto como se encon-- traron frente a frente dos actores principales, dotados de iguales derechos, surgió, con instinto profundamente helénico, la rivalidad, y, en verdad, la rivalidad ex - presada en palabras y argumentos.

No era lícito que el héroe del drama sucumbiese, y, por tanto, se tenía que hacer de él, también, - - un héroe de la palabra.

"Poco a poco, todos los personajes hablan con- tal derroche de sagacidad, claridad y transparencia, que para nosotros es como si todas esas figuras no perecie - sen a causa de lo trágico, si no a causa de una superfi- tación de lo lógico.

" La tragedia, surgida de la profunda fuente - de la compasión, es pesimista por esencia en ella. La -- existencia es algo insensato. El héroe de la tragedia no se evidencia en la lucha contra el destino, tampoco su-- fre lo que merece. Antes bien, se precipita a su desgra- cia ciego y con la cabeza tapada: este gesto desconocido es el que se clava como una espina en nuestra alma."(6.4)

La dialéctica, es optimista, cree en la causa y el efecto y, en una relación necesaria de culpa y cas - tigo, de virtud y felicidad: sus ejemplos de cálculo ma - temático no tienen que dejar resto; niega todo lo que no pueda analizar de manera conceptual. La dialéctica alcan za continuamente su meta: cada conclusión es, para ella, una fista de júbilo; la claridad y la conciencia son el - único aire en el que puede respirar. Cuando este elemen- to se infiltra en la tragedía surge el dualismo: noche y- día, música y matemática. El héroe, que tiene que defen - der sus acciones con argumentos y contraargumentos, co -- rre el peligro de perder nuestra compasión pues la desgra cia que le alcanza, a pesar de todo solo demuestra que en algún lugar, se ha equivocado en el cálculo. Pero una des gracia provocada por una falta de cálculo es, más bien, - un motivo de comedía. (6.5)

*

Todo mundo conoce las tesis socráticas "la vir tud es saber: se peca únicamente por ignorancia. El vir- tuoso es el feliz" . En estas tres formas básicas del op timismo está la muerte de la tragedia y en estas tres -- tésis básicas del optimismo se apoya la gran comedia de - nuestros días: "la ciencia" : una interpretación lingüis tica de la verdad, la utilización del símbolo, la necesi- dad de enunciados, axiomas, reglas, y argumentos, la de - terminación del método a seguir. La finalidad es presen- tar demostraciones que sean válidas únicamente a causa de su forma lógica. La exposición debe hacerse de tal manera que pueda considerarse desde un punto de vista frío - y abstracto. Así, en principio, cualquiera podría comprobar la validez de cada demostración, aunque no comprenda el significado de los términos del sistema. Cada acto, - cada hecho, cada creencia, tienen que estar necesariamente justificados.

Sócrates como los sofistas, acude a la plaza - pública a instruir a sus conciudadanos; para convencer,- para hacer notoria la ignorancia del aparente sabio, se- sirve de hábiles preguntas encaminadas a confundirlo. Esta es la ironía socrática, que de lo conocido a lo des - conocido, conduce a la persona que toma parte en el diálogo al análisis de su propio pensamiento.

*

La etapa siguiente, está representada por Demócrito, Platón y Aristóteles. Se prolonga de la muerte de Sócrates a la muerte de Aristóteles (322 a/c). La filosofía adquiere una fisonomía sistemática . Mientras que- el interés por el conocimiento de la nuturaleza aparece- separado del interés por el conocimiento del hombre, el- esfuerzo de estos tres filósofos se dirige, por igual, a la existencia toda: Así, tanto la naturaleza como el hom bre son objeto de su preocupación. Mas, por otra razón, igualmente rigurosa, la filosofía de esta época asume - un carácter sistemático. Cada uno de estos pensadores - trata de explicar la existencia toda a la luz de un concepto fundamental.

Para Nietzsche, la filosofía, desde Sócrates, ha extraviado el rumbo. El mito trágico satisfacía la -- necesidad de justificar la existencia - no moralmente - ante el intelecto. - sino estéticamente y por vía instintiva. Ante la decadencia de la sociedad griega, que día con día, va perdiendo la seguridad de los instintos y, que siente que el exceso y la anarquía cunden y obligan a los griegos a luchar contra ellos y a ponerles un freno, surge Sócrates, con la seguridad de ser, él, una madriguera de vicios, pero que sabía dominarlos a todos.

" Atenas y toda Grecia precisaban de un arma- que no las dejara sucumbir; por esto, dice Nietzsche, - que cuando la razón y la dialéctica son develadas como- remedio, se aceptan ciegamente". (5.1)

Sin embargo, la salvación es sólo una apariencia, la decadencia no puede ser efectivamente combatida por esta vía, la lucha sólo modifica la expresión de la decadencia, y retrasa el fin; el hombre, entonces, se -

autoengaña y prefiere soñar; pero este sueño tiene vicios de vigilia: lejos de ser la bella apariencia trágica, sacrifica su valor estético, producto de los apetitos oscuros, en aras de la seguridad que promete la fría claridad racional. La nueva fórmula de la decadencia- sabiduría - es virtud y felicidad sustituye a la antigua-felicidad -- es instinto.

"Comparando las matemáticas con la tragedia,- que reconcilia al hombre con el destino, Russell subraya las matemáticas nos hacen pasar aun más de lo humano a - la región de la necesidad absoluta, a la cual no sólo el mundo actual, sino incluso todo mundo posible, debe conformarse; y ahí precisamente constituyen una morada, e - ternamente en pie, en la que nuestros ideales están plenamente satisfechos y nuestras mejores esperanzas no sufren decepción; y es solamente hasta que comprendemos - por completo la total independencia, en relación a nosotros de la que goza ese mundo que la razón descubre, - cuando podemos darnos cuenta de manera adecuada la profunda importancia de esta belleza." (1.3)

La actitud de Russell en esta época es uno de los mejores ejemplos en contra los que Wittgenstein se- levanta: contra la creencia en un mundo platónico de se res matemáticos y en el reino grandioso de un "destino" matemático universal. La "completa independencia" del - "universo matemático" en relación a todo dato antropológico es, de hecho, una de las más constantes y más peligro - sas ilusiones de la filosofía. El matemático no contempla "esencias" Preexistentes sino que las crea, "Der --- Mathematiker erzeugt Wesen". (1.4)

En cuanto al descubrimiento de pretendidas relaciones entre entidades pretendidas, no es sino el establecimiento de nuevas conexiones gramaticales: "se podría decir: la demostración modifica la gramática de - nuestra lengua, modifica nuestros conceptos. En un enunciado matemático no se devela una verdad, sino que se - construye una proposición. Fabrica nuevas conexiones -- (no constata que estas estén ahí, pues al contrario)- éstas, no están ahí, en tanto que la demostración no -- las fabrique. " (1.5)

*

Sócrates creó el método para descubrir los --- conceptos, de preferencia en la esfera de la moral. Platón se esfuerza por explicar filosóficamente los idea - les de la vida. Llama Ideas a los modelos o paradigmas de la existencia, y dialéctica a la ciencia que las estudia.

Las ideas son para Platón algo incorporeo, - susceptible de ser conocido por medio de conceptos. El- conocimiento general es recuerdo (anámnesis). Através- de un principio matemático, el Teorema de Pitágoras, -- Platón, muestra que el conocimiento no se funda en la - percepción sensible. Esta sólo ofrece la ocasión para - que el alma recuerde algo que ya ha existido con ante - rioridad a ella, esto es, un conocimiento supratemporal y racionalmente válido.

El alma busca, estimulada por una diversidad- de percepciones sensibles, una pluralidad de ideas, de- ahí que la ciencia se proponga la tarea de descubrir -- las múltiples ideas y sus mutuas relaciones . Se trata, por tanto, de fijar la conexión de los conceptos entre- sí. También se discute el problema de que conceptos son reducibles o no a otros; y como recurso metódico, Platón recomienda la disquisición hipotética para demostrar si- un concepto dado, por la aplicación de sus posibles sen- tidos puede reducirse a otro de antemano conocido.

Para el platónico los objetos matemáticos - tienen " existencia " y relaciones independientes de -- nuestros pensamientos, y las proposiciones matemáticas- son verdaderas o falsas en virtud de cierto "estado de las cosas" matemático. Ahí donde el platónico habla --

de existencia o verdad, el constructivista prefiere, por su parte, hablar de constructividad y demostratibilidad (1.6) es decir , lo que busca es mostrar las circunstancias en las que está justificado afirmar un enunciado.

"Para Wittgenstein, el matemático es un inventor no un descubridor. "La cuestión de verdad y falsedad es apenas más importante en matemáticas que en ajedrez, en ambos casos se trata únicamente de configuraciones de símbolos cuyas transformaciones están regidas por un sistema de convenciones más o menos arbitrarias. Se puede descubrir exactamente el funcionamiento de un juego y, en todo caso, discutir su interés en relación a otros, pero no se ve muy bien en donde podrían nacer, alimentarse y eventualmente resolverse un pretendido problema de los fundamentos. " (1.7)

Desde el punto de vista Nietzscheano los números y las leyes que los rigen, son tan sólo productos de la imaginación. Las relaciones que vinculan estas leyes numéricas con la naturaleza, o sea las leyes físicas están basadas también en cosas que no existen, (como superficies, átomos, espacios, tiempos,) mediante las cuales fraccionamos a la naturaleza para poder formarnos conceptos de ella.

El progreso de la ciencia es sólo el incremento de las relaciones descubiertas. Decimos que es necesario que ocurra un evento para que suceda otro, y a esto se limita nuestra explicacion que no es tal, porque sólo interpretamos nuestra imagen de las cosas mismas; la causa y efecto, probablemente no existen, dice Nietzsche, lo que realmente existe es la continuidad, la que suponemos, arbitrariamente, dividida.

"El afán de describir todo lo existente con presición matemática no nos permite conocerlo, sino sólo determina nuestra relación con ello."(7.1)

Por otro lado, Wittgenstein dice: es importante en matemáticas curarse de la enfermedad filosófica, de esa herejía socrática que busca la reducción a la unidad.

Para Wittgenstein, la filosofía de las matemáticas no es una actividad de control, de justificación o de puesta en forma. Esta no tiene que promover una reconstrucción de las matemáticas existentes en función de ciertas ideas teóricas, sino únicamente describir un cierto estado de cosas técnicas.

"Wittgenstein rechaza en bloque todas las empresas de "fundamentación" de las matemáticas, pura y simplemente porque niega que la matemática deba ser fundamentada.

"Para Wittgenstein, una crisis de la razón pura matemática no puede ser, propiamente hablando, sino una invención de filósofos, no porque las matemáticas representen una suerte de "absoluto" intangible y jamás realmente amenazado, sino precisamente porque no son absolutas y no tienen ninguna necesidad de serlo." (1.8)

Para Nietzsche buscar la verdad no es la esencia del hombre; el hombre que dice la verdad dice la mentira. Desde sus primeros escritos duda de la ciencia como síntoma de vida y ve en el cientificismo una defensa contra la verdad.

Wittgenstein considera que las matemáticas no nos dan información verdadera y no constituyen, en tanto tales, un saber.

Nietzsche observa que la vida parece estar organizada para la apariencia, es decir para el error, el engaño, el disimulo. Al aplicar su profunda capacidad interpretativa a la crítica de los valores actuales y de las motivaciones que llevaron al hombre a abrazarlos, logra poner en duda las pretenciones optimistas de la ra zón y del conocimiento científico. Presos en la aparien cia, en el contínuo devenir en el tiempo, en el espacio y en la casualidad, el sueño valora el fondo misterioso de nuestro ser. El embriagado Dioniso cae en un profun do sueño, el mundo apolíneo entonces, se levanta en o - posición a lo bárbaro titánico, la pretendida lucha en- tre la ciencia y el ascetismo tan sólo enmascaran su -- ideal común- la incriticabilidad de la verdad-, ambos - científicos y asceta, juegan el mismo juego; pero éste, se aparta de la vida corriente por su lugar y su dura - ción. Su "estar encerrado en sí mismo" y su limitación- constituyen una de sus características. Se juega den - tro de determinados límites de tiempo y espacio. Sin em bargo, ese mundo lúdico no tiene lugar ni duración en - la conexión real espacio-tiempo, pero tiene su propio - espacio interno y su propio tiempo interno; más al ju - gar gastamos un tiempo real y necesitamos un espacio -- real. El mundo lúdico jamás se continua en el espacio- en que vivimos habitualmente.

"En el proyecto de un mundo lúdico se esconde el jugador mismo como creador de este " mundo ", se -- pierde en su creación, "juega" su papel y tiene dentro- del mundo lúdico cosas circundantes y prójimos que per- tenecen a este mundo. Lo turbador de todo ello es que- concebimos imaginativamente estas cosas del mundo lúdico como "cosa reales", es más, que en ellas puede repetirse una y otra vez la distinción entre la realidad y la apariencia". (3.1)

"Wittgenstein no toma en serio el pensamiento matemático y sus desventuras. Para él, la idea central- es que la matemática como juego de lenguaje está, de hecho desprovista de todo fundamento extra-lingüístico y- extra operacional.

"La matemática, no tiene necesidad de ser fundamentada. Sin embargo, las proposiciones matemáticas,- tanto como las otras proposiciones, tienen necesidad de clarificación de su gramática.

"Para Wittgenstein, la filosofía de las matemáticas no es una actividad de control, de justificación o de puesta en forma, ésta no tiene que promover una reconstrucción de las matemáticas existentes en función - de ciertas ideas teóricas, sino únicamente describir -- cierto estado de cosas técnicas.

"Vemos muchos pedazos de conceptos, pero no - vemos claramente las pendientes que hacen pasar uno de- entre ellos, en los otros.

"Evidentemente no será necesario creer que ---

Wittgenstein se dirige especilamente a la filosofía de estilo tradicional. El enemigo en cuestión es la lógica matemática, culpable, según él, de haber pervertido totalmente el espíritu de los filósofos.

"La "lógica matemática" ha deformado completamente el pensamiento de matemáticas y filósofos al promover una interpretación superficial de las formas de nuestro lenguaje corriente al rango de análisis de las estructuras de los hechos. Es cierto que en ello no ha hecho sino continuar la construcción sobre la lógica aristotélica.

"Wittgenstein precisa que "lo que hay de pernicioso en la técnica lógica es que nos hace olvidar la técnica matemática especial." (1.9)

"En fin, "las leyes lógicas son efectivamente la expresión de "hábitos de pensamiento", pero también del hábito de pensar. Es decir, que muestran como los hombres piensan e igualmente eso que los hombres llaman "pensar". (1.10)

CAPITULO I

Los pasos de una prueba o refutación constructivas no son, en principio, proporcionados por el aparato deductivo, son más bien alcanzados por aproximaciones sucesivos, de ahí que, distinguiendo la matemática hecha de la matemática -por- hacerse, la segunda no esté organizada, espontaneamente, como un edificio lógico coherente; así la función de la formalización es integrar el conocimiento en un sistema estructurado conforme a los -- criterios de legalidad y orden que la lógica y la matemática establecen y que difieren de un período a otro - de la historia. "Así los modernos confían en las leyes naturales como en algo inviolable, al modo como los antiguos confiaban en Dios y en el destino.

" Y ambos tienen razón y no la tienen; pero - los antiguos eran más claros en cuanto que reconocían - un límite preciso mientras que el sistema moderno quiere aparentar que todo está explicado" (8.1)

De ahí que el problema de comprende cómo se- accede a la verdad, sea reemplazado por el afán de persuadir que lo expuesto es verdadero: En matemáticas la- dedución es un modo de persuación no una vía para el -- descubrimiento.

El propósito de esta tésis, no es, por ello,- presentar el <u>Teorema Mapeo de Riemann</u> organizado como - un edificio lógico coherente, sino construirlo por me - dio de tanteos sucesivos.

Se plantea el siguiente problema:

<u>¿Que regiones del plano complejo $\mathbb{C}$ pueden ser trans - formadas en disco unitario Δ , conformemente y 1 a 1 ?</u>(9)

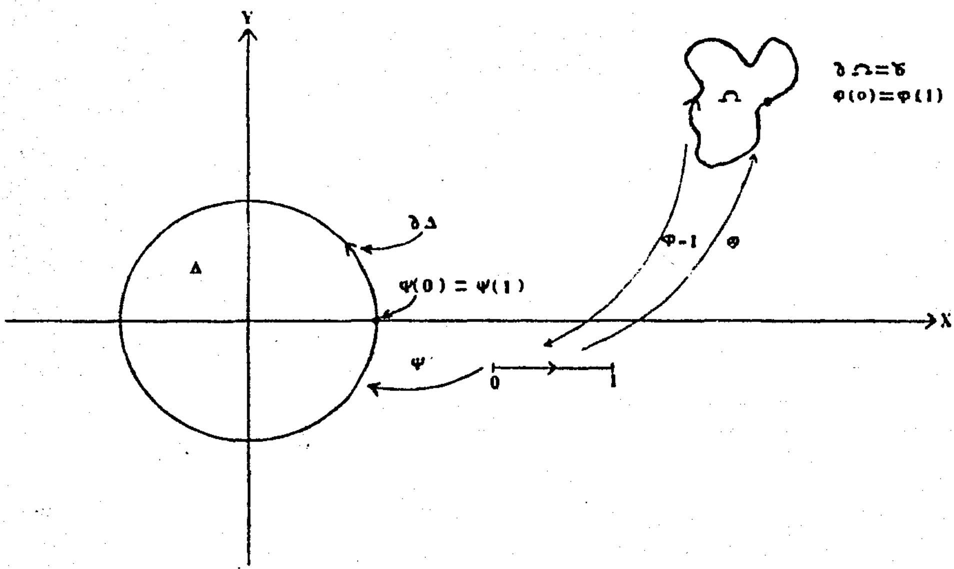
La respuesta al problema está dada por el Teorema del Mapeo de Riemann: Las regiones simplemente conexas resuelven el problema y la transformación es única ie. Toda región simplemente conexa (10) puede ser trasformada, de manera única, conformemente y 1 a 1 en Δ.

Sea Ω una región simplemente conexa su frontera, $\gamma = \partial\Omega$, es una curva de Jordán, (11) γ es la imagen de una función $\varphi : [\,0,1\,) \longrightarrow \mathbb{C}$ continua y tal que si $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) \Longrightarrow t_1 = t_2$

Sea φ^{-1} la inversa de φ,
$\varphi^{-1} : \gamma \rightarrow [0,1)$

Sea $\partial\Delta$, la frontera del disco unitario, $\partial\Delta$ es la imagen de $\psi : [\,0,1\,) \rightarrow \mathbb{C}$ (12)

Sea H la extensión de $\psi \circ \varphi^{-1}$ a todo Ω. H resuelve el problema.



Esta demostración es, por supuesto, falsa, no sabemos:

Problema 1.- Si H es única

" 2.- Si H existe

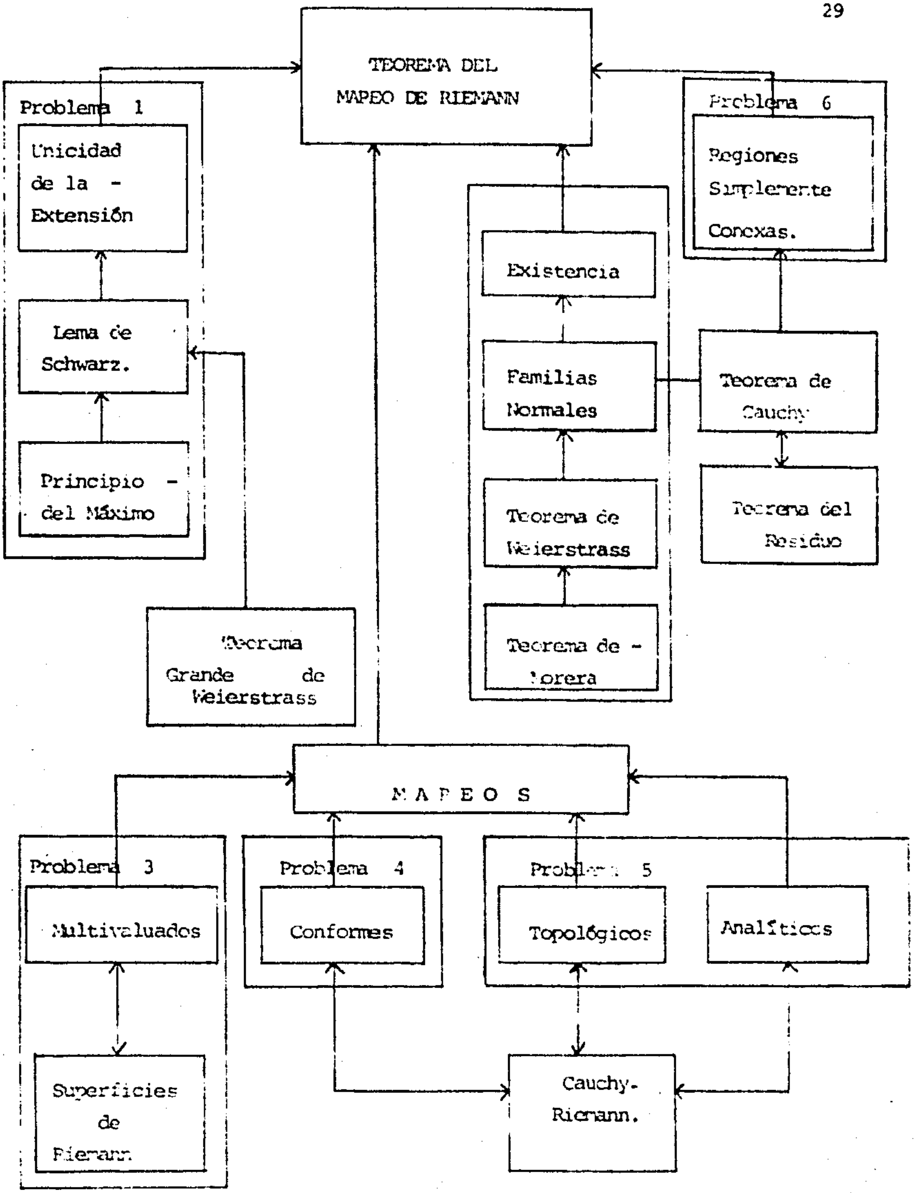
" 3.- Si H es 1 a 1

" 4.- Si H es conforme

" 5.- Y por lo tanto analítica

" 6.- Si el hecho de que Ω sea simplemente conexa, implica que $\partial\Omega$ es la imagen de alguna función -- continua.

Para demostrar el Teorema del Mapeo de Riemann tenemos, entonces, que resolver cada uno de los problemas 1.- 6. La extructura del Teorema del Mapeo de Riemann, es, entonces, la siguiente:


TEOREMA DEL MAPEO DE RIEMANN
Problema 1
Unicidad de la - Extensión
Lema de Schwarz.
Principio - del Máximo
Teorema Grande de Weierstrass
Existencia
Familias Normales
Teorema de Weierstrass
Teorema de - Morera
Problema 6
Regiones Simplemente Conexas.
Teorema de Cauchy
Teorema del Residuo
MAPEOS
Problema 3
Multivaluados
Superficies de Riemann
Problema 4
Conformes
Problema 5
Topológicos
Analíticos
Cauchy-Riemann.

CAPITULO II

Abordemos, primero el problema de la <u>unicidad de la extensión,</u> (es decir, el problema 1).

Supongamos que tenemos dos extensiones φ_1 y φ_2 conforme y 1 a 1 (lo cual requiere, por supuesto re - solver el problema 2):

$$\varphi_1 : \Omega \to \Delta$$
$$\varphi_2 : \Omega \to \Delta$$

Debemos demostrar entonces que

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

Bajo estas suposiciones $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ es continua, conforme y 1 a 1 y mapea al disco Δ sobre sí mismo. (13)

<u>Afirmación:</u>

i) $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(z) = \alpha z + \beta$ (14)

ii) $\beta = 0$

iii) $\alpha = 1$

Si así fuera,

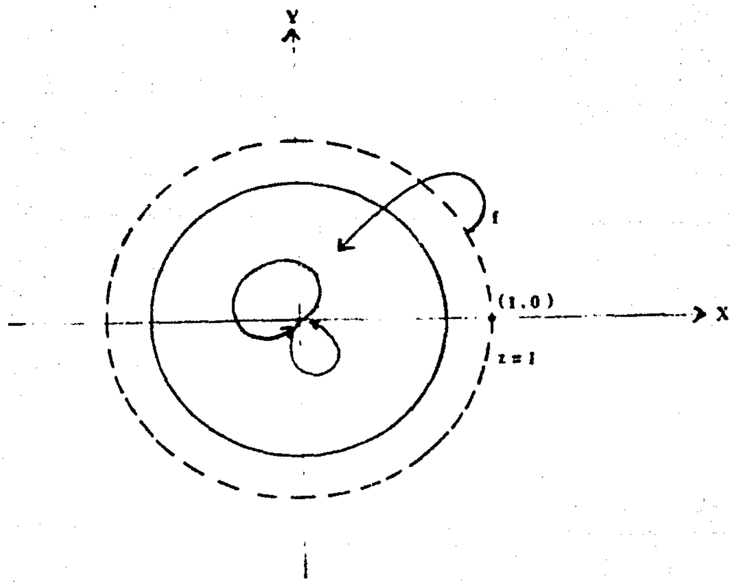
$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(z) = z$ es decir

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} = e$$
$$\Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$

Para demostrar la afirmación necesitamos - el <u>Lema de Schwarz:</u>

Si $f(z)$ es analítica para $|z| < 1$ y satisface- las condiciones $|f(z)| \leq 1$, $f(0) = 0$, entonces -- $|f(z)| \leq |z|$ y $f'(0) \leq 1$ La igualdad se da sólo -- cuando $f(z) = cz$, donde c es una constante con $|c| = 1$

(15)



Antes de demostrar el Lema, veamos si la composición de la afirmación ($\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$) cumple las condiciones del Lema de Schwarz; es decir, debemos comprobar que:

a) $S = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ es analítica

b) $S = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ satisface $|s(z)| \leq 1$ para $|z| \leq 1$

c) $S(o) = 0$, $s(o) = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(o) = \varphi_1(z_o) = 0$

Comprobación:

1) la condición (a) se satisface pues hemos dado por resueltos los problemas 3, 4 y 5 y la composición de funciones analíticas es analítica:

2) La condición (b) se satisface por definición.

3) La condición (c) exige que $\beta = 0$, es decir, hemos de pedir que exista $z_o \in \Omega$ tal que $\varphi_1(z_o) = 0$ y $\varphi_2^{-1}(0) = z_o$

A esta concición le llamamos , Condición A. (16)

Debemos añadir , por lo tanto, a la hipótesis del Teorema del Mapeo de Riemann (T.M.R.) la condición -

A; y el Teorema puede reescribirse como sigue:

Dada una región simplemente conexa Ω, - [y un punto $z_0 \in \Omega$] existe una única función analítica $f(z)$ definida en $f(z)$ [con $f(z_0) = 0$] tal que - $f(z)$ toma cada valor del disco $|\omega| < 1$ exactamente una-vez en ω.

De modo tal que, añadiendo la condición A, - podemos afirmar que el Lema de Schwarz (17) es aplicable a nuestra composición $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ y que la igualdad vale.-

Hacemos notar además, que, al intentar la -- demostración de la igualdad en el Lema de Schwarz hemos de añadir la condición:

$S'(z_0) > 0$ (condición B)

El Teorema del Mapeo de Riemann queda por lo - tanto:

Dada una región simplemente conexa Ω, y- un punto $z_0 \in \Omega$, existe una única función analítica -

<u>$f(z)$ definida en Ω con $f(z_0) = 0$ y $[f'(z_0) > 0]$ tal que $f(z)$ toma cada valor del disco $|\omega| < 1$ exactamente una vez en ω.</u>

CAPITULO III

Problema 6: Caracterización Geométrica de las Regiones Simplemente Conexas:

Las regiones simplemente conexas, han sido caracterizadas como aquellas cuya frontera es una curva de Jordán. Esto sin embargo es insuficiente. Así mismo se han caracterizado como regiones " Sin hoyos ", lo cual también es insuficiente, "pues la ciencia no puede admitir, como la metafísica, signos carentes de sentido" (8.2) Por lo tanto se dará la siguiente definición.

Una región es simplemente conexa, si su complemento es conexo.

Esta definición plantea el problema de la banda infinita B = $\{z=x+iy/|y|\leq 1\}$
cuyo complemento en el plano no es conexo y a pesar de ello la banda no tiene " hoyos".

Se modificarán entonces, tanto nuestra definición como nuestra intuición, se dirá entonces, que una región es simplemente conexa si su complemento en la esfera es conexo.

¿Qué quiere decir " <u>en la esfera</u> " ?

Consideramos entonces la <u>Esfera de Riemann</u> En una <u>primera aproximación</u> formalmente consideramos - el campo $\mathbb{C}$ de los números complejos e introduzcamos- un elemento * tal que:

$$a + * = * + a = * \text{ para toda } a \in \mathbb{C}$$

$$b . * = * . b = * \text{ para toda } b \in \mathbb{C}$$

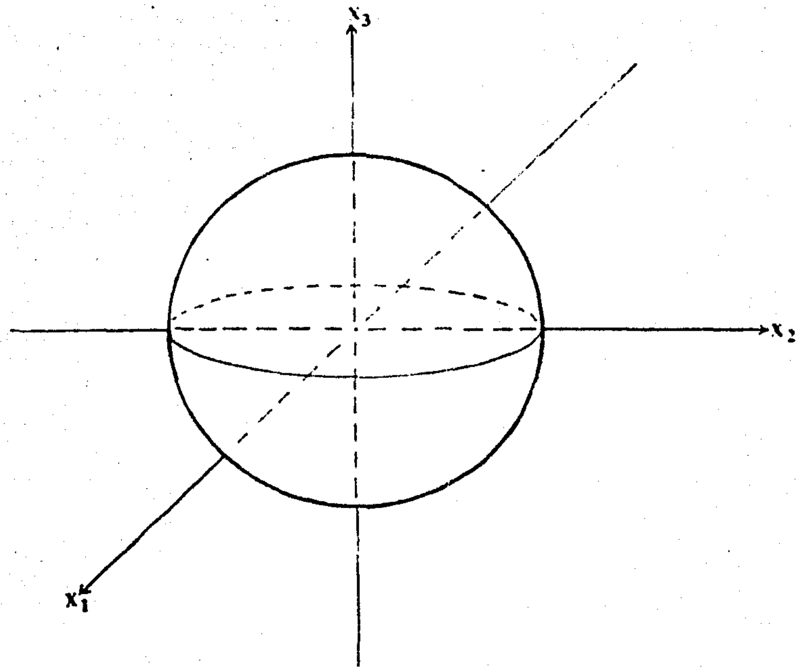
$$\frac{a}{0} = * \text{ Si } a \neq 0$$

$$\frac{b}{*} = 0 \text{ para } b \in \mathbb{C}$$

¿Qué es * ?

En una <u>Segunda aproximación</u>, geométricamente tenemos:

$$E = \left\{ (x_1 , x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x_1^2 \;\; x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}$$



Sea $(x_1, x_2, x_3) \in E$; a tal punto hemos de asociar -

(i) $z = \dfrac{x_1 + i\ x_2}{1 - x_3}$ Si $x_3 \neq 1$

que es un número complejo. La transformación es además - 1-1. Su inverso.

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2}$$

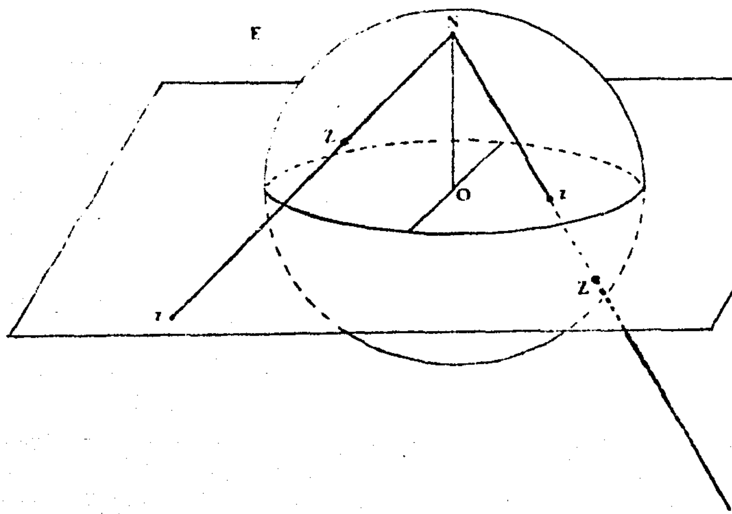
$$x_2 = \frac{z - \bar{z}}{i(1 + |z|^2)}$$

El número complejo que corresponde a x_3 = (0,0,1) el polo norte, es * , que geométricamente es,- entonces, el punto que se ha añadido al plano comple - jo (la imagen de (0,0,1))

E se llama a la <u>Esfera de Riemann</u>

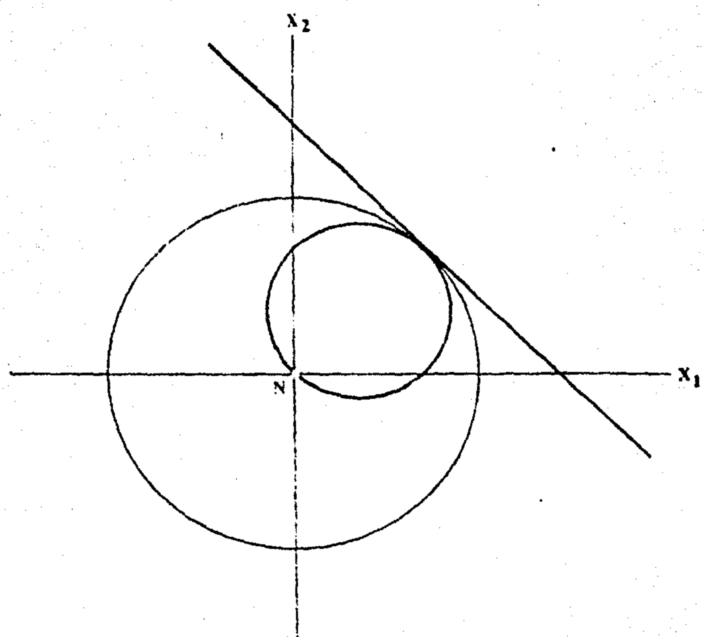
La transformación (i) puede representarse como sigue:

Sea $Z \in E$ y z_1 , el punto en que la recta que une al polo norte con Z, corta al plano complejo - que hemos hecho coincidir con el plano ecuatorial de E, z es la imagen de z bajo (i) y viceversa.



Es obvio entonces que el hemisferio norte de E se mapea en $\{z\in\mathbb{C}/|z|>1\}$; el hemisferio Sur de E en $\{z\in\mathbb{C}/|z|<1\}$; el ecuador de E en $\{z\in\mathbb{C}/|z|=1\}$, el polo sur de E en el origen, etc.

¿ Cómo se transforman las líneas de $\mathbb{C}$?



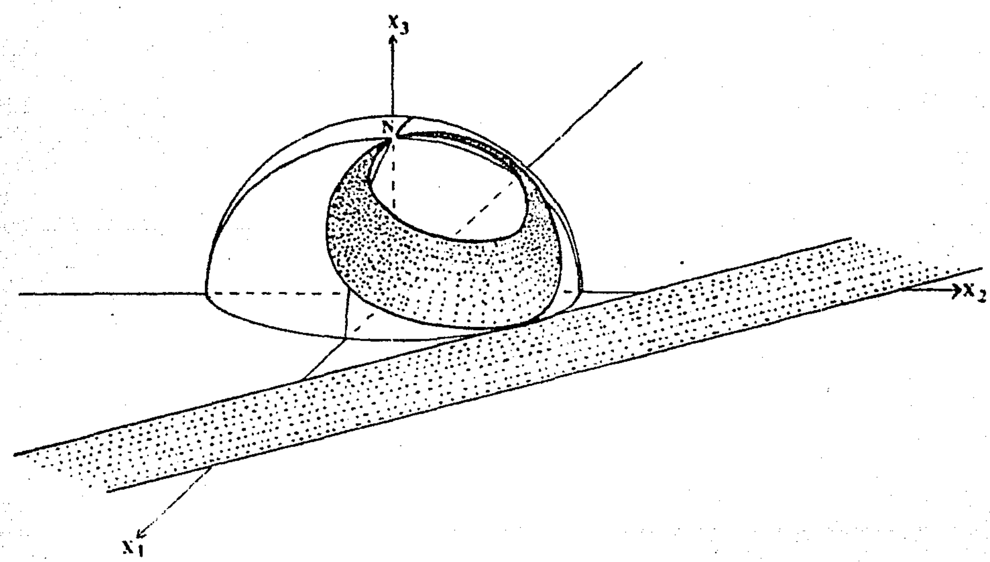
¿ Cómo se transforman los círculos de E ?

a) Si pasan por (0,0,1) $\rightarrow$ recta en $\mathbb{C}$

b) Si no pasan por (0,0,1) $\rightarrow$ Círculos en $\mathbb{C}$

De ahí que podemos pensar * como el punto al infinito.

En E la banda infinita, se muestra en figura. Su complemento (la banda es abierta) es conexo.



CAPITULO III

2.- Problema 5: Características Analíticas de la Regiones Simplemente Conexas.

Teorema de Cauchy (1ª Versión)

Sea R un rectángulo $\{(x, y) \,/\, a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$.
Sea $\Gamma(R)$ su frontera.

Sea f analítica en una región que contiene a R, entonces.

$$\int_{\Gamma(R)} f(z)\, dz = 0 \qquad (18)$$

Variaciones sobre el Teorema de Cauchy.

1ª . En esta primera versión, podemos sustituir R por R' , donde $R' = R - \{\zeta_j \,/\, j = 1, \ldots, k\}$ siempre que $\lim_{z \to \zeta_j} (z - \zeta_j) f(z) = 0$

2° - Sea f (z) analítica en un disco abierto Δ , $\int_{\gamma} f(z)\, dz = 0$ para toda γ cerrada en .

3° En la segunda versión podemos sustituir Δ por Δ' de donde $\Delta' = \Delta - \{\zeta_j \,/\, j = 1, \ldots, k\}$ siempre $\lim_{z \to \zeta_j} (z - \zeta_j) f(z) = 0$

<u>Lema</u>: Sea γ una curva cerrada, diferenciable por arcos y que no pasa por el punto a, entonces el valor de la integral $\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$

es múltiplo de $2\pi i$ (19)

Se define el <u>índice de un punto a, con respecto a una curva</u> γ como: $n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \frac{dz}{z-a}$

<u>Fórmula de Cauchy</u>: Si f (z) es analítica en un disco abierto Δ , γ es una curva cerrada en Δ , $a \in \Delta$,

a entonces: $n(\gamma, a)\, f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\, dz}{z-a}$ (20)

<u>Forma General del Teorema de Cauchy</u>

a) $$\int_{\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_n} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz + \dots + \int_{\gamma_n} f dz \qquad (*)$$

Donde $\int_{\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_n} f dz$ sólo tiene sentido cuando $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$

es una subdivisión de un arco γ_j

el miembro derecho <u>siempre</u> tiene sentido, se define -

$$\int_{\gamma_1+\dots+\gamma_n} f\, dz \quad \text{Como} \quad \int_{\gamma_1} f dz + \dots + \int_{\gamma_n} f dz$$

aún cuando $\gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ no sea una subdivisión de un arco. La suma formal $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i$ se llama una cadena. Carece de sentido geométrico, pero es perfectamente posible integrar sobre $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i$ de acuerdo con (*)

Dada una cadena $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i$ las siguientes operaciones no afectan la integral:

1) Permutación de γ_i con γ_j
2) Subdivisión de γ_i
3) Fusión de γ_i y γ_{i+1}
4) Reparametrización de γ_i
5) Cancelación de arcos opuestos

Con ello, es posible establecer clases de equivalencia en el conjunto de cadenas (conjunto que, además, forma grupo. La ley de composición es trivial).

El grupo de cadenas, además admite (establecida la posibilidad de sumar) cadenas de la forma:

$$\Gamma = a_1\gamma_1 + \ldots + a_n\gamma_n \qquad \text{con } a_i \in \mathbb{Z}$$

La cadena cero es la cadena vacía.

b) Una cadena es un ciclo si cada uno de los arcos que la forman es una curva cerrada.

Los teoremas de Cauchy, hasta este punto - han sido demostrados para ciclos particulares en regio nes siemplemente conexas.

c) Definición : una región Ω es simple - mente conexa si sólo si $n(\gamma, a) = 0$ para todo $\gamma \subset \Omega$ y para todo $a \in \Omega$

d) La forma más general del teorema de Cau - chy para regiones simplemente conexas puede formularse - como sigue:

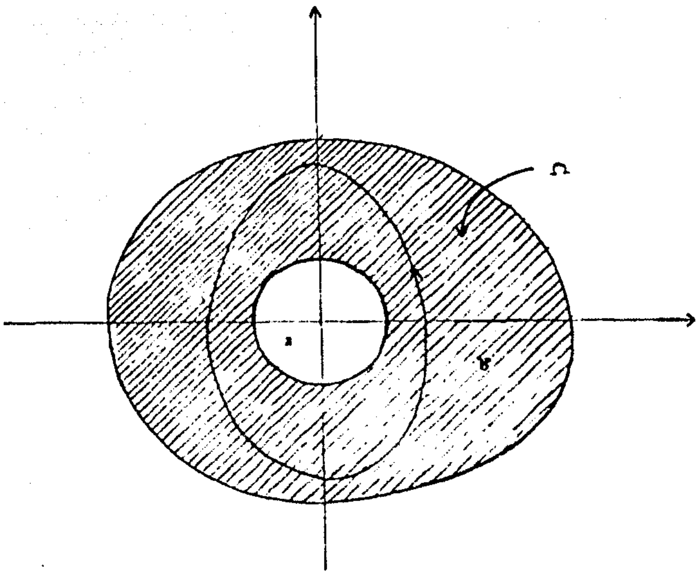
Teorema de Cauchy: Si f(z) es análitica en región simplemente conexa $\int_\gamma f\, d\, z = 0$ para todo ciclo $\gamma \subset \Omega$.

e) Un ciclo γ es homólogo a cero respecto a Ω si $n(\gamma, a) = 0$ para todo $a \notin \Omega$

Notación : $\gamma \sim 0 \pmod{\Omega}$

Ejemplo de un ciclo que no es homólogo a ce ro: $n(\gamma, a) \neq 0,$ $a \notin \Omega$

$\Rightarrow$ no es homólogo a cero.



f) Forma final del Teorema de Cauchy:

Si f es analítica en Ω (no necesariamente simplemente conexa) $\int_{\gamma} f(z)\, dz = 0$

Para todo $\gamma \sim 0 \pmod{\Omega}$

g) Dos ciclos γ_1, γ_2 son homólogos Si $\gamma_1 - \gamma_2 \sim 0 \pmod{\Omega}$. (21)

CAPITULO IV.

TEOREMA DEL RESIDUO :

La relación " $\sim$ (mod Ω) " es de equivalencia, esto nos permite dividir al conjunto de ciclos en clases de equivalencia.

En cada clase escogemos un representante, estos formarán una base de homología para Ω

Sea $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ una base de homología de

Los números $P_i = \int_{\gamma_i} fdz$

Se llaman módulos de periodicidad de f(z) o períodos de f (z) .

i) El siguiente resultado se sigue, de la forma general del Teorema de Cauchy:

Teorema Si f es analítica en Ω

$$n(\gamma, a)\, f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)\, dz}{z-a}$$

Para todo $\gamma \sim 0$ (mod Ω)

ii) Sean $a_1, \ldots, a_n$ singularidades de f en Ω

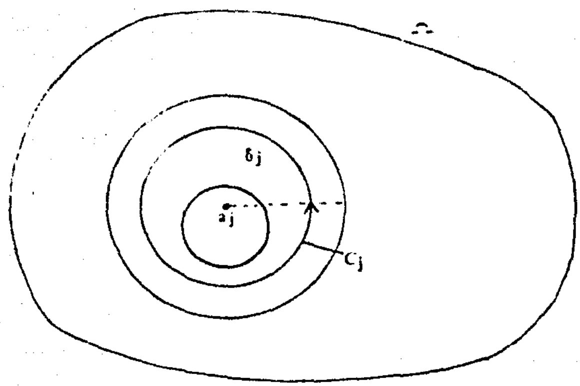
Sea δ_j tal que:

$0 < | z-a_i | < \delta$ esté contenido en Ω'

donde $\Omega' = \Omega - \{ a_1, \dots, a_n \}$

Sea C_j un círculo con centro en a_j y radio

δ_j



Sea $P_j = \int_{C_j} f(z)\, dz$

Sea $R_j = \frac{P_j}{2\pi i}$

$f(z) - \frac{R_j}{z-a_j}$ tiene período 0 en C_j (i.e. $\int_{C_j} [\, f(z) - \frac{R}{z-a_j}]\, dz = 0$)

R_i se llama el residuo de f en a_j

iii) Sea γ un ciclo en Ω ,

$$\gamma \sim \sum_j n(\gamma, a_j)\, C_j$$

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_j n(\gamma, a_j) \int f(z)\, dz$$

$$= \sum_j n(\gamma, a_j)\, P_j = \sum_j n(\gamma, a_j)\, R_j\, 2\pi i$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_j n(\gamma, a_j)\, R_j$$

$$\Longrightarrow \int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_j n(\gamma; a_j)\, R_j$$

Este es el Teorema del Residuo.

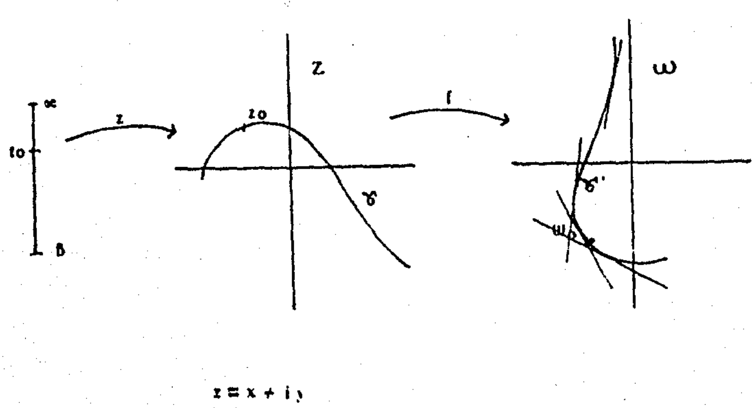
CAPITULO V

Problema 4: Mapeos Conformes

Se dará la siguiente definición provisional

Una función f es analítica en Ω si tiene derivada en todo punto de Ω (con estas definiciones se resuelve el problema 1)

Sea γ un arco con ecuación $z = z\ (t)$ $\alpha \leq t \leq \beta$ continua en Ω ,sea f (z) una función continua en Ω y sea $\omega = \omega\ (t) = f\ ((z)(t))$ Un arco γ'' en el ω - plano



Sea $f(z)$ analítica . Si $z'(t)$ existe, entonces, $\omega(t) = f'(z(t)) . z'(t)$

Sea $z_o = z(t_o)$ con $z'(t_o) \neq 0$, $f'(z_o) \neq 0$

1ª. consecuencia, $\omega'(t_o) \neq 0$ así que γ' tiene tangente en $\omega_o = f(z_o)$ cuya dirección está determinada - por

$$\arg \ (t_o) = \arg [f'(z(t_o)) \ . \ z'(t_o)]$$
$$= \arg f'(z_o) + \arg z'(t_o)$$

i.e. el ángulo entre la tangente γ en z_o y la tangente γ' en ω_o es $\arg f'(z_o)$. Es independiente de γ Por ello, las curvas tangentes (por z_o) son tangentes cuando se mapean bajo f. Si en z_o forman un ángulo θ , en ω_o también.

2a. Consecuencia. Supongamos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas y f es conforme; la derivada de -- $\omega(t) = f(x(t) + i\, y(t))$ en t_o es

$$\omega'(t_o) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t}\bigg|_{t_o} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\bigg|_{t_o}$$

$$= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{z_0} x' \, (t_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{z_0} y' \, (t_0)$$

donde $\quad z = x \, (t_0) + i \, y \, (t)$

$$z_0 = x \, (t_0) + i \, y \, (t_0) = x_0 \; t i \; y_0$$

$$x'(t) = \frac{z'(t) + \overline{z'(t)}}{2} \quad ; \quad y' \, (t) = \frac{z'(t) - \overline{z'(t)} \; (-i)}{2}$$

ya que:

$$z'(t) = x'(t) + i(y'(t)$$

$$\overline{z'(t)} = x'(t) - i \, y' \, (t)$$

$$z'(t) + z'(t) = 2 \, x' \, (t)$$

$$z'(t) - \overline{z'(t)} = 2i \, y' \, (t)$$

$$x' \, (t) = \frac{z'(t) + \overline{z'(t)}}{2}$$

$$y'(t) = \frac{z'(t) - \overline{z'(t)}}{2i}$$

$$\omega(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{z'(t_0) + \overline{z'(t_0)}}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{z'(t_0) - \overline{z'(t_0)}}{2i}\right)$$

$$= \frac{z'(t_0)}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$+ \frac{\overline{z'(t_0)}}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{z'(t_0)}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i\,\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\overline{z'(t_0)}}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i\,\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\therefore \frac{\omega'(t_0)}{z'(t_0)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i\,\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\overline{z'(t_0)}}{z'(t_0)}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i\,\partial f}{\partial y}\right)$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ están valuadas en z_0,

es decir, <u>son constantes</u>

$A = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ es por lo tanto constante.

Si dejamos que arg $z'(t_0)$ varíe , arg $\frac{\omega'(t_0)}{z'(t_0)}$

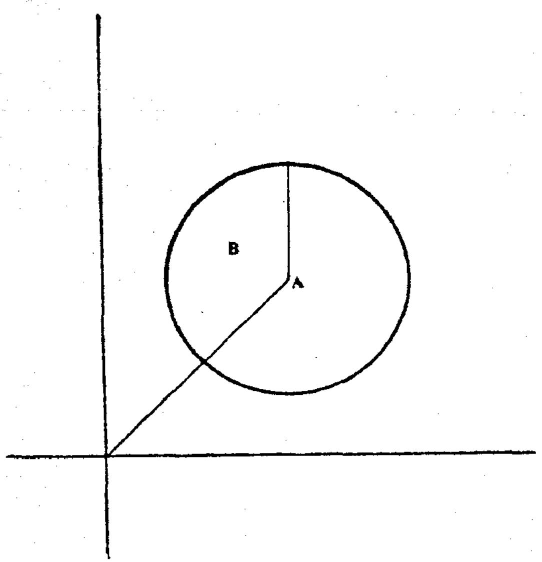
permanece constante pues no depende de arg $z'(t_o)$.

Si dejamos que arg (t_o) varíe, entonces -

$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\overline{z'(t_o)}}{z'(t_o)}$ describe un círculo -

de radio $B=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ de modo que $\frac{\omega'(t_o)}{z'(t_o)} =$

$A+B\,\frac{\overline{z'(t_o)}}{z'(t_o)}$ describe un círculo de radio B con centro en A cuando, $0 \leq \arg z'(t_o) \leq 2\pi$



Pero arg $\dfrac{\omega'(t_o)}{z'(t_o)}$ es constante, así que el círculo en-

cuestión tiene radio <u>cero</u>. Es decir : B = 0

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i\partial t}{\partial y} = 0$$

Es decir: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{i\partial f}{\partial y}$

Si describimos $f(z) = u(z) + i\,v(z)$, $z = x + iy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{i\partial v}{\partial x} = -\frac{i\partial f}{\partial y} = -\frac{i\partial u}{\partial y} - i\left(\frac{i\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{i\partial u}{\partial y} \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

que son las <u>condiciones de Cauchy- Riemann</u>

$\therefore$ f es <u>analítica</u> si f es <u>conforme</u> y

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son <u>continuas</u>.

$\therefore$ f es analítica $\Leftrightarrow$ f es conforme y $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

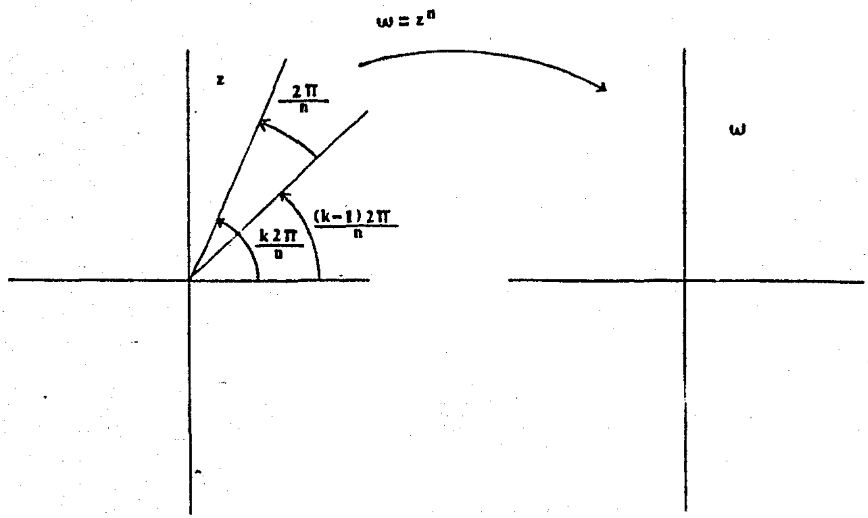
son continuas.

CAPITULO VI

Problema 3. <u>Funciones Multivaluadas Superficies de Riemann</u>.

Si restringimos nuestra intuición al plano complejo nuestra representación de una función es inadecuada pues; puntos <u>diferentes</u> (formalmente diferentes) ocupan los mismos lugares. Por ejemplo $|z|(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, $|z|(\cos(\theta + 2\pi) + i\,\text{sen}(\theta + 2\pi))$, $|z|(\cos(\theta + 2K\pi) + i\,\text{sen}(\theta + 2K\pi))$

Se trata entonces, de encontrar una representación que nos permita distinguir puntos formalmente diferentes. Para ello introducimos las superficies de Riemann.

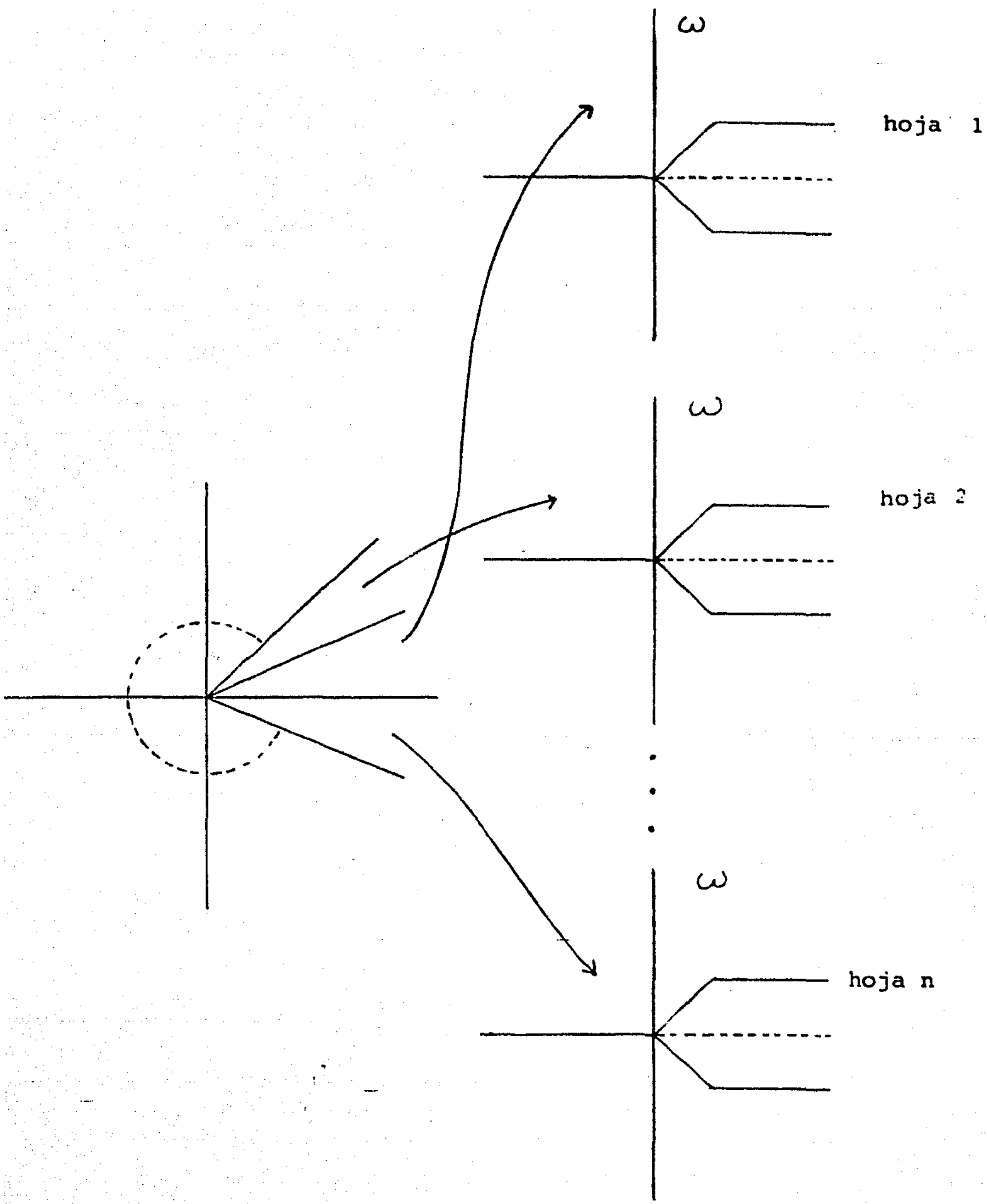


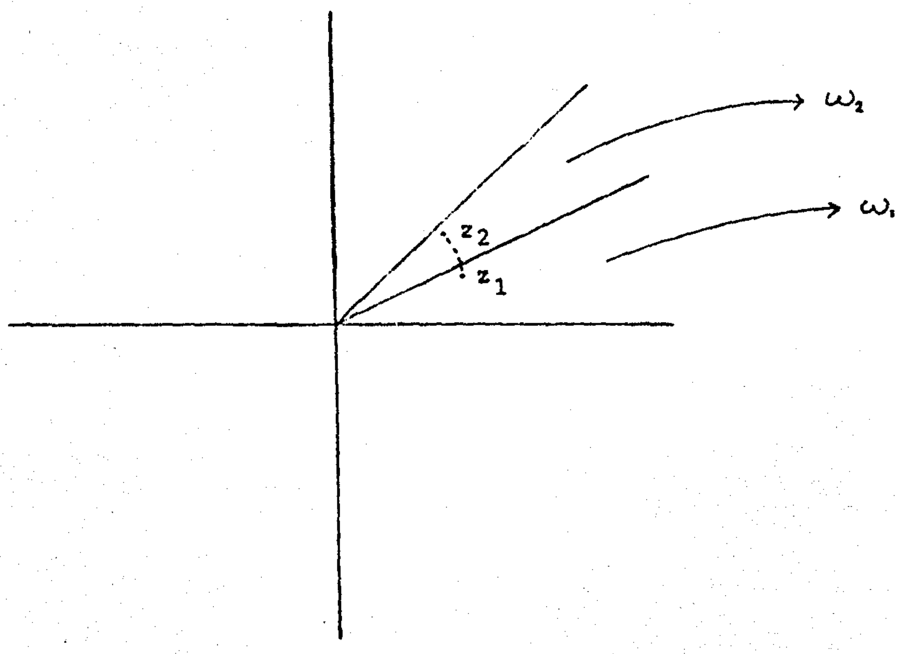
Cada Sector del Plano

$$Z \left[(k-1)\left(\frac{2\pi}{n}\right) < \arg \; z < \frac{k \;\; 2}{n} \;\; , \;\; k= 1,2,\dots n \right]$$

se mapea en todo el plano ω , salvo el se - mieje positivo.

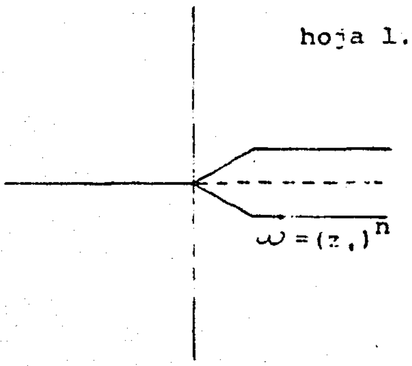
De manera que podemos recurrir a la siguiente representación:

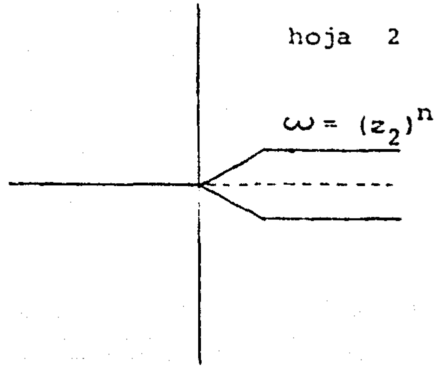

ω
hoja 1
ω
hoja 2
ω
hoja n



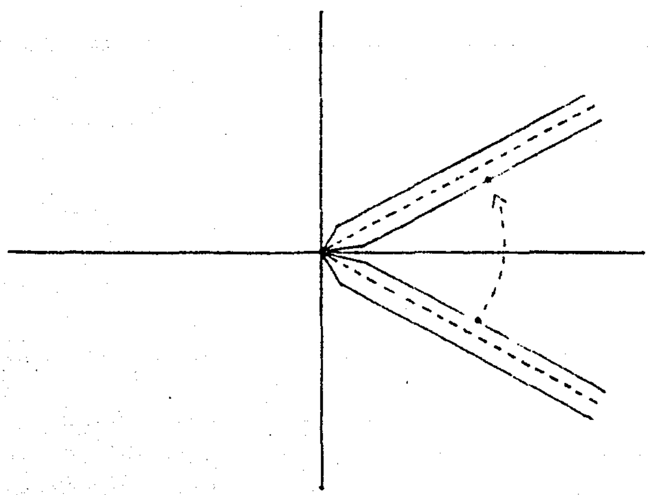
Cuando $z_1 \to z_2, \omega$ pasa de la hoja 1 a la - hoja 2, y como queremos que la función sea continua - pegamos la hoja 1 con la 2 del sig. modo:

El borde inferior del corte en la hoja 1, al borde superior del corte en la hoja 2.



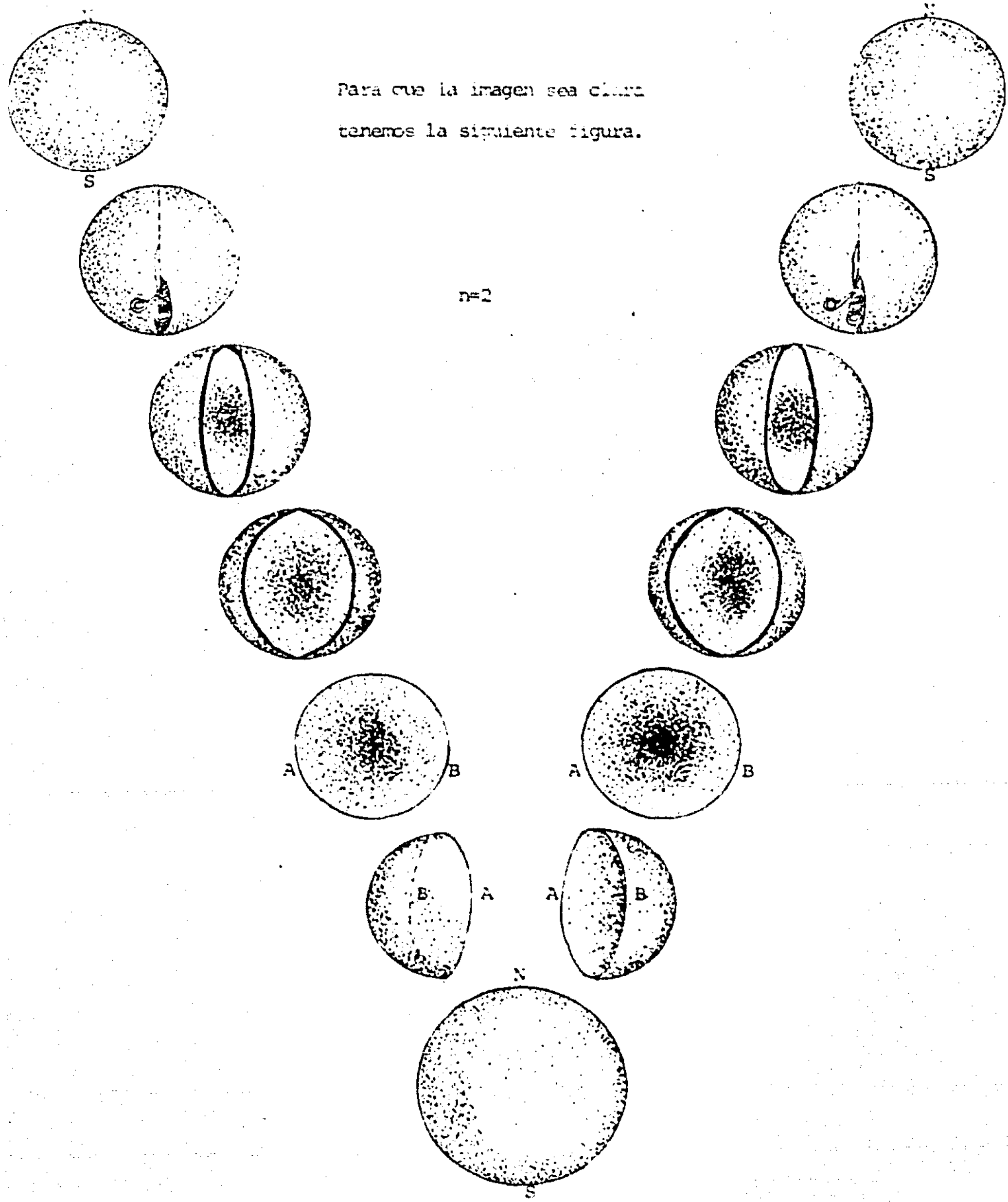


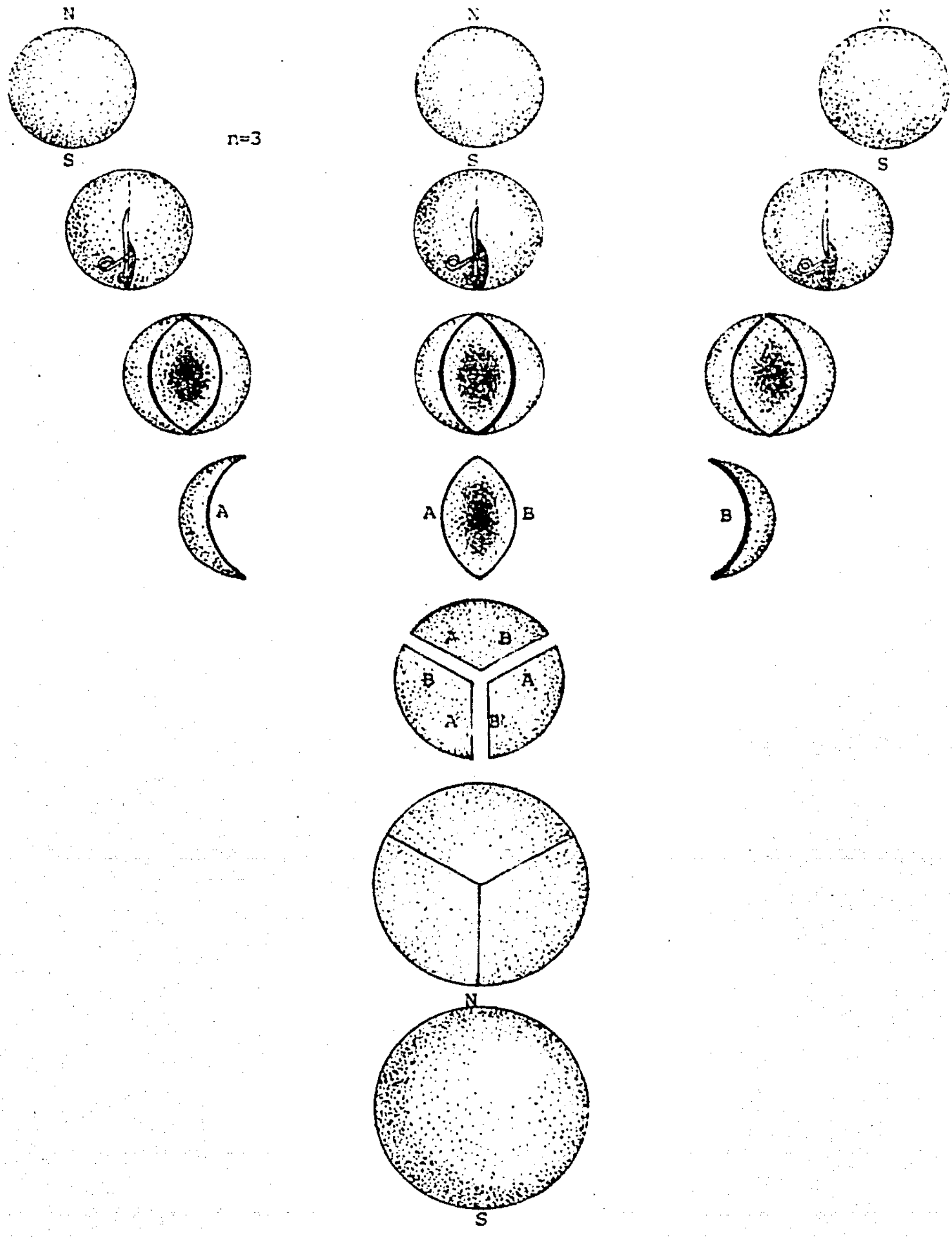
Continuamos así pegando el borde inferior de la hoja $k-1$ con el superior de la hoja k. El borde inferior de la hoja n queda pegado al borde superior de la hoja 1.



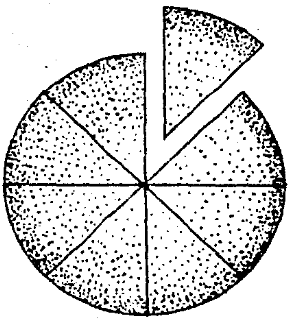
Para que la imagen sea clara tenemos la siguiente figura.

n=2



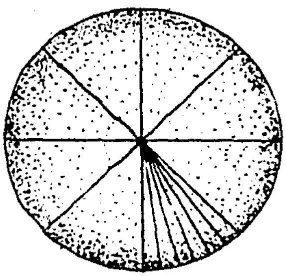


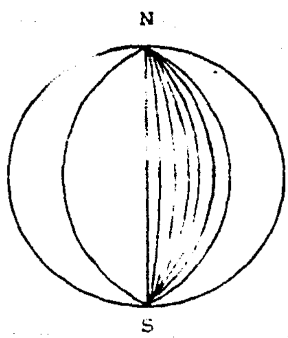
N
N
N
S
n=3
S
S
A
A
B
B
A
B
B
A
A
B'
N
S



En $=z^n$, obtenemos la siguiente representación.

$n=k$





CAPITULO VII

Problema 2: <u>Existencia</u>.

Sea

$$F = \left\{ g:\Omega \to \mathbb{C} / \quad g \text{ conforme, topológica, } 1 \text{ a } 1 \ |g(z)| \leq 1 \text{ en } \Omega,\ g(z_0) = 0 \ \text{y}\ g'(z_0) \neq 0,\ z_0 \in \Omega \right\}$$

Es decir, F es el conjunto de funciones que resuelven el problema 2.

Si demostramos que F no es vacío, entonces tales funciones existen, y como hemos demostrado, que la función es única, habremos demostrado el teorema de Riemann.

Para demostrar que $F \neq \phi$, supongamos que existe $a \in \Omega$, $a \neq \infty$ (Es decir, no aceptamos como región solución del problema a todo el plano).

Esta será la <u>condición C</u>).

Por último el T.M.P quedará reescrito como sigue:

Teorema del Mapeo de Riemann.

Dada una región simplemente conexa [que no sea todo el plano], y el punto $z_0 \in \Omega$ existe una única función analítica $f(z)$ defina en Ω y normalizada por las condiciones $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$ tal que $f(z)$ toma cada valor del disco $|\omega| < 1$ exactamente una vez en Ω.

Podemos definir en Ω una rama univalente de $\log(z-a)$, es decir, si $\log(z-a) = \log(z_2 - a)$, entonces, $z_1 = z_2$, esto es posible puesto que Ω es simplemente conexa.

$$\text{Sea } h(z) = \frac{1}{\log(z-a) - \omega_0 - 2 \quad i} \qquad (22)$$

donde $w_0 = \log(z_0 - a)$

$$(z) = \frac{1}{\log(z-a) - \omega - 2 \quad i}$$

y como $|\log(z-a) - \omega_0 - 2\pi i| > \rho$

Se tiene que $|h(z)| \leq \frac{1}{\rho}$ entonces

$$g(z) = \frac{\rho}{1 + \rho\,|h(z_0)|} \cdot \frac{h'(z_0)}{h'(z_0)}$$

. (h (z- n (z) $\in$ F

ya que:

i) g (z) es conforme, topologica y 1 a 1

ii) $g(z) = \dfrac{\rho}{1+\rho|h(z_o)|} \cdot \dfrac{h'(z_o)}{h'(z_o)} |h(z) - h(z_o)|$

$$= \frac{\rho}{1+\rho|h(z_o)|} \cdot \left| h(z) \frac{1}{2\pi i} \right|$$

$$|g(z)| \leq \frac{1}{1+\rho|h(z_o)|} < 1$$

iii) $g(z_o) = 0$

iv) $g'(z_o) = \dfrac{\rho}{1+\rho|h(z_o)|} \cdot \dfrac{h'(z_o)}{h'(z_o)} \cdot h'(z_o)$

$$= \rho|h'(z_o)| > 0$$

Existen pues tales transformaciones.

La que buscamos es aquella para la que $g'(z_o)$ es máximo.

De esta manera se ha establecido que la fun - ción por medio de la cual se habría resuelto el problema tal como ha sido planteado, era aquella para la cual --- $g'(x_o)$ era máximo. Sin embargo, es necesario probar -

que dicha función pertenece en efecto, a la familia F. Para demostrarlo es necesario caracterizar las que se-denotarán, <u>Familias Normales</u>.

Para describir que es una familia normal -- se requerirá de tres teoremas previos:

El Teorema de Liouville

El Teorema de Weierstrass y

El Teorema de Morera.

CAPITULO VIII

FAMILIAS NORMALES .

Una familia $\mathcal{F}$ de funciones definidas en Ω es normal, si toda sucesión $\{fn\}$ contiene una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge uniformemente, o tiende uniformemente a ∞, en todo subconjunto compacto de Ω

Teorema FNI $\mathcal{F}$ es normal $\Longleftrightarrow$ para todo compacto $E \subset \Omega$ existe M tal que

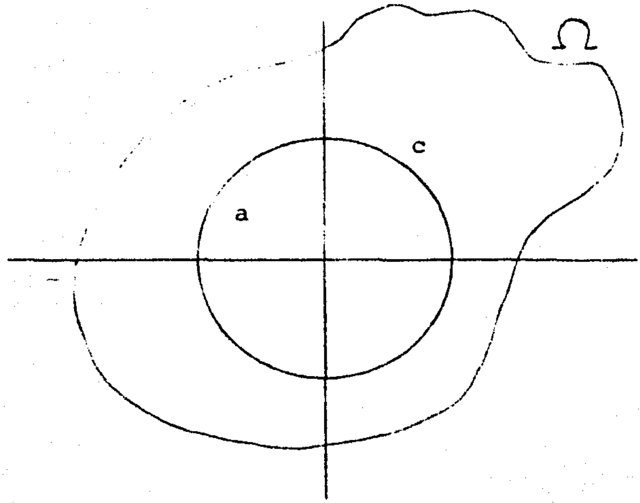
$$|f'(z)| \leq M\,(1+|f(z)|^2) \quad \forall\ z \in E,\ f \in \mathcal{F} \qquad (23)$$

Corolario. Si todas las funciones f de una familia normal $\mathcal{F}$ son distintas de cero, entonces cada función límite es o distinta de cero o idénticamente cero.

Teorema FN2. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones analíticas en una región Ω es normal si las funciones $f \in \mathcal{F}$ están acotadas uniformemente en todo subconjunto compacto de Ω.

Sea $a \in \Omega$, C un círculo con centro en a, y contenido en Ω, $\int \frac{f(z)dz}{z-a} = f(a)$

hacemos variar "a" dentro de dicho círculo ($n(c,a)=1$)



$$\frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = f(z)$$ para toda z tal que:

$n (c,z) = 1$

Derivamos:

$$f'(z) = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)\, d}{\zeta - z} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)\, d}{(\zeta - z)^2} \qquad (24)$$

Así $$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}$$

<u>Teorema de Liouville</u>. Si f es acotada y analítica en todo el plano, entonces f es constante.

Sea r el radio de c y sea $|f(\zeta)| \leq M$

en c, sea a, el centro de c,

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{M}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{Mn!}{2\pi i}\left[\int_C \frac{d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}\right]$$

$$|f^{n}(a)| \leq \frac{Mn!}{2\pi i}\left[\int \frac{d\zeta}{(\zeta - a)(\zeta - a)^{n}}\right]$$

$(\zeta - a) \geq r$

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{Mn!}{2\pi i} r^{-n}\int \frac{d\zeta}{\zeta - a}$$

$|f^{n}(a)| \leq Mn!r^{-n}$ <u>estimación de Cauchy</u> (25)

CAPITULO IX

Habiendo construído por medio de tanteos suce - sivos el T.M.R., éste quedará demostrado y reescrito de - la siguiente manera:

Teorema del Mapeo de Riemann.

Dada una región simplemente conexa cualquiera que no sea todo el plano, y un punto $z_0 \in \Omega$, existe una - función analítica única $f(z)$ en Ω, normalizada por las - condiciones $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$, tal que $f(z)$ toma to do valor de disco $|\omega| < 1$ una (y solo una) vez en Ω.

Demostración:

La unicidad es trivial, pues ya vimos que si f_1 f_2 son dos de tales funciones entonces $f_1[f_2^{-1}(\omega)]$ define una aplicación biunívoca de $|\omega|<1$ sobre sí mismo. Sabemos que tal aplicación está dada por una transformación lineal S (anexo 1) . Las condiciones $S(0)=0$, $S'(0) > 0$ implican $S(\omega) = \omega$; por consiguiente , $f_1 = f_2$.

Una función analítica $g(z)$ en Ω se llama univalente si $g(z_1) = g(z_2)$ implica $z_1 = z_2$; en otras pala bras : si la aplicación definida por g es biunívoca . Para demostrar la existencia, consideramos la familia $\mathcal{F}$ formada por todas las funciones g con las propiedades siguientes: a) g es analítica y univalente en Ω; - b) $|g(z)|\leq 1$ en Ω; c) $g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) > 0$. Afirmamos- que f es la función de $\mathcal{F}$ para la cual la derivada $f'(z_0)$ alcanza un máximo. La demostración consta de tres partes: 1) se demuestra que la familia $\mathcal{F}$ no es vacía; 2) que e - xiste una f con derivada máxima; 3) que esta f tiene las propiedades deseadas.

Para demostrar que $\mathcal{F}$ no es vacía observamos que, por hipótesis existe un punto $a \neq \infty$ no perteneciente a Ω. Puesto que Ω es simplemente conexo, puede definirse en- él una rama analítica uniforme de $\log (z-a)$. Esta fun -- ción no toma el mismo valor dos veces ni toma valores que difieran en un múltiplo de $2\pi i$, pues $\log (z_1-a) = \log$ -- $(z_2-a) + n.2\pi i$ implicaría $z_1-a = (z_2-a)\, e^{n\cdot 2\pi i}=z_2-a$, de donde $z_1 = z_2$. Puesto que $\log (z-a)$ toma el valor $\omega_0= \log (z_0-a)$, no tomará el valor $\omega+2\pi i$. Existe, además , un- entorno $|\omega-\omega_0|<\rho$, tal que todos sus valores se toman en un entorno de z_0; por tanto ninguno de los valores contenidos en $|\omega-\omega_0-2\pi i|< \rho$ los puede tomar $\log (z-a)$ en Ω ; por tanto, $|\log (z-a)-\omega_0-2\pi i| >\rho$ en Ω.

La función $h(z) = [\log (z-a)-\omega_0-2\pi i]^{-1}$ es analítica y univalente en Ω y satisface la condicioón $|h(z)| \leq \frac{1}{\rho}$

Se sigue inmediatamente que

$$g(z) = \frac{\rho}{1+\bar{\rho}\, h(z_\circ)} \frac{|h'(z_\circ)|}{h'(z)} \cdot [h(z)-h(z_\circ)]$$

pertenece a la familia $\mathcal{F}$.

Las derivadas $g'(z_\circ)$, $g \in \mathcal{F}$, tiene un extremo superior B que a priori podría ser infinito. Hay una sucesión de funciones $g_n \in \mathcal{F}$ tal que $\lim_{n\to\infty} g'_n(z_\circ) = B$. Por el Teorema FN2. La familia $\mathcal{F}$ es normal. Existe, por tanto, una subsucesión $\{g_n\}$ que tiende a una función límite f analítica, uniformemente en conjuntos compactos . Es evidente que $|f| \leq 1$, $f(z_\circ) = 0$ y $f'(z_\circ) = B$. Si podemos probar que f es univalente, se seguirá que, f pertenece a $\mathcal{F}$ y tiene una derivada máxima en $z_\circ$.

En primer lugar, f no es una constante, pues $f'(z_\circ) = B > 0$. Elijamos un punto $z_1 \in \Omega$ y consideremos las funciones $g_1(z) = g(z) - g(z_1)$, $g \in \mathcal{F}$. Forman una familia normal, pues $|g_1| \leq 2$ y $g_1(z) \neq 0$ en la región Ω, obtenida de Ω por omisión del punto z_1 . De acuerdo con el corolario del Teorema FNI, cada función límite de las funciones g_1 es o diferente de cero o idénticamente cero en Ω, Pero $f(z)-f(z_1)$ es una función límite y no es idénticamente cero. Por tanto, se tiene que $f(z) \neq f(z_1)$ para $z \neq z_1$, con lo que hemos demostrado que f es univalente.

Queda por demostrar que f toma todo valor ω con

$|\omega| < 1$. Sea $\omega_o, |\omega_o| < 1$, un valor no tomado por f. Entonces, puesto que Ω es simplemente conexa, se puede definir una rama uniforme de

$$F(z) = \log \frac{f(z) - \omega_o}{1 - \overline{\omega}_o f(z)}$$

Tiene parte real negativa; por tanto, al función

$$G(z) = \frac{F(z) - F(z_o)}{F(z) + \overline{F(z_o)}}$$

esta acotada, $|G(z)| < 1$. Mediante el correspondiente cálculo obtenemos para su derivada en el origen

$$G'(z_o) = -B.\ \frac{1-|\omega_o|^2}{2\omega \log |\omega_o|}$$

La función $g(z) = \frac{G(z)|G'(z_o)|}{G'(z_o)}$ pertenece a $\mathcal{F}$, y su derivada es

$$g'(z_o) = B\ \frac{1-|\omega_o|^2}{2|\omega_o| \log 1/|\omega_o|}$$

Pero esta expresión es mayor que B. En efecto, 2 log (1/t) + t-1/t se anula para t=1, siendo la derivada de esta función.

$$1-2/t + 1/t^2 = (1-1/t)^2 > 0,$$

Por tanto, $2 \log (1/t) < 1/t-t$ para $t<1$, y con $t=|\omega_0|$ esta desigualdad implica $g'(z_0) > B$. Hemos llegado así a una contradicción, por lo tanto concluimos que el teorema tiene que verificarse.

CAPITULO X

CONCLUSIONES

Vivimos en un mundo en el que nos enfrentamos - a lo formal y a lo informal, a lo animado y a lo inanimado, a lo flexible y a lo inflexible. Un mundo en el que- nos encontramos laberintos, espejos, ilusiones, símbolos- que nos envuelven en un encanto fascinador de sombras espectros y apariencias. Un mundo que tiene un escenario - real, pero no es una cosa real entre las cosas reales, -- sin embargo, necesita de ellas, para tener un símbolo en- ellas.

Tras cada expresión de algo abstracto hay una - metáfora y tras ella un juego de palabras, juego, que se- constituye en el discurso de lo irreal; entre la frontera insensible de la verdad y del saber; donde la reciprocidad de acciones incluye también las lagunas interiores de la - imaginación.

La cuestión de la verdad y del saber y sus fronteras, juegan en este mundo un gran papel. Obras como las- de Nietzsche, Heidegger, Wittgenstein nos invitan a pen -- sar que el papel de la noción de verdad es un papel de - orden, que la filosofía tiende a unificar y a dominar -- con su autoridad. Cuestión que ellos mismos critican.

Así mismo, para Bachelard, no existe nada que -

Sigue pág 77

Para Canguilhem, el conocimiento es una actividad del hombre que se inscribe en la vida como una modalidad. La formación de conceptos es una modalidad de la información, la sobrevalorización del saber es el inicio -- de la ruptura entre el pensamiento y la vida y también un rodeo del pensamiento de la vida en contra de la vida. - Cuando el hombre se aventura a buscar, es cuando erra (en la doble acepción de la palabra errar) pues el hombre -- hace error por su posibilidad de errancia. Hacer ciencia es aventurarse. En la práctica de ésta, el hombre puede - tomar el camino que se le antoje, entonces, existe la posibilidad de darle vuelta a los obstáculos, y es aquí, -- donde se elabora una metodología, ya que la errancia nos-encamina a una meta.

Cada cultura, cada forma cultural de cada civilización, tienen sus propias técnicas y métodos de interpretación de la verdad.

Los intérpretes, tienen que interpretar, el in - térprete, entonces, se convierte en un excavador que vagabundea entre los escombros, y en la medida que avanza en - la interpretación, más se acerca a una región absoluta y - peligrosa, pues el propio interpretador está presente en - el objeto de su interpretación.

El intérprete tiene que interpretar a sí mismo,

sigue pág 78

aparezca como objeto de conocimiento que pueda ser amo - y señor de los demás. " El objeto nunca es dado sino -- construído".

En el esquema del conocimiento la verdad está - sometida a una adecuación, en donde se trata de evitar la angustia ante lo desconocido, a la que se enfrenta cada - investigador.

El científico, como tal, no puede decir en su - discurso sus preocupaciones personales, sino que tiene - que ocultar sus emociones y convertir su discurso en obje tivo.

La ciencia, entonces, se enmascara de una cier- ta dignidad, palabra mágica, que vuelve a una serie de -- objetos sin interés, interesantes.

Esto nos explica porque son los científicos -- quienes tienen el gusto de elaborar la Teoría del Conoci miento.

Pero los intereses más poderosos no son sola - mente en el entorno de la cientificidad, donde la verdad por decreto, funciona como garantía, sino en las prácti- cas sociales y politicas donde la filosofía la amolda a su discurso.

sigue pag 76

pero en ese movimiento de interpretación también tiene -- que interpretase a sí mismo.

Encontramos pues, tanto en los científicos, como en los soñadores, los mismos procedimientos de demostración impura.

El científico contemporáneo se funda sobre una comprensión matemática fenoménica y, a este respecto, se esfuerza en igualar la razón y la experiencia . Se encamina en precisar, en limitar, en purificar las sustancias y sus fenómenos . La objetividad se determina en la precisión y en la coherencia . Lo concreto acumulado sin prudencia obstaculiza a la visión abstracta y clara de los problemas reales.

La matemática es presentada en las aulas, conforme al método axiomático, tal como se le ha sistematizado y como se ha errado en él.

La necesidad de generalizar hasta el extremo, a veces mediante un sólo concepto, arrastra a ciertas ideas sintéticas que están lejos de perder su poder de seducción.

Esta corriente ha impuesto a la enseñanza de -

la matemática sus exigencias de rigor, que poco a poco han ido quebrantando y dañando el espíritu científico.

La mezcla de pensamiento erudito y pensamiento-experimental es uno de los mayores obstáculos para éste.

Desde esta perspectiva, la matemática aparece -como una superposición de nociones arbitrarias, cuyo gradual despliegue conduce mágica e incomprensiblemente a la solución de problemas cuya naturaleza se desconoce.

La idea de mecanización de las matemáticas, la moda del sistema axiomático en ella, no son más que expresiones directas de una convención, cuya legitimidad se nos obliga a reconocer. Por consiguiente, una proposición es correcta o "verdadera" si se puede deducir de los axiomas dados mediante un método lógico, de la manera generalmente admitida. Con ello, se obstaculiza al estudiante su posibilidad de errar.

NOTAS

1.- Bouveresse, Jacques. " La Philosophie de Ludwig - Wittgenstein ou Therapentique d' une Meladie --- Philosophique"
Cahiers pour l' Analyse . Véase edición citada en - la bibliografía.

1.1 Pág. 179, literalmente dice (Sorgen für Sich Sel - best)

1.2. Pág. 181

1.3 Pág. 184

1.4 Wittgenstein, Ludwig Bermerkungen über die Grundagen - der Mathematik's.

1.5 Pág. 184
1.6 Pág. 182
1.7 Pág. 183
1.8 Pág. 177
1.9 Pág. 185
1.10 Pág. 189

2.- Fink, Eugen. La Filosofía de Nietzsche. Véase edición - citada en la bibliografía.

2.1 Pág. 34

2.2 Pág. 35

2.3 Pág. 39

2.4 Pág. 39

3.- Fink, Eugen. Oasis de la Felicidad. Véase edición citada en la bibliografía.

3.1 Pág. 23

4.- Foucault, Michel, Microfísica del Poder.- Veáse -- edición citada en la bibliografía.

4.1 Pág. 114

5.- Nietzsche, Friedrich. Crepúsculo de los Idolos. - Veáse edición citada en la bibliografía.

5.1 Pág. 41

6.- Nietzsche, Friedrich . El Nacimiento de la Tragedia Veáse edición citada en la bibliografía.

6.1 Pág. 224

6.2 Pág. 220

6.3 Pág. 222

6.4 Pág. 226

6.5 Pág. 227

7.- Nietzsche, Friedrich. La Gaya Ciencia. Veáse edición citada en la bibliografía.

7.1 Pág. 195

8.- Wittgenstein, Ludwig. Tractatus Logico-Philosophicus. Veáse edición citada en la bibliografía.

8.1, 6.372

8.2, 6.53

9.- Provisionalmente: Región es un subconjunto de $\mathbb{C}$ abierto y conexo.

Un conjunto es conexo si tiene una sola componente.

Una función de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ es conforme si preserva ángulos.

Conforme es una condición más débil que "preserva distancias", es decir ,

Si bien: $d(f(z_1), f(z_2)) \neq d(z_1, z_2)$

Se tiene, sin embargo, que:

$$\frac{d\,(\,f(z_1),\ f\,(z_2)\,)}{d(z_1,\ z_2)} = k \quad \forall z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$$

10.- Simplemente Conexa: Sin hoyos: i.e., el complemento es conexo.

11.- Las curvas cerradas que " no tienen saltos" se llaman (curvas de Jordán.)

12.- $\Psi(t) = e^{i\pi t} = \text{Cos}\,\pi t + i \text{ sen } \pi\ t$

13.- La composición de funciones continua es continua. - Lo mismo para conformes y para 1-1 . Esto es trivial

La inversa de φ_1 se supone continua, conforme y 1-1. Esto depende de los problemas 3,4 y 5.

14.- Véase anexo I.

15.- Intuitivamente dice: $f\ (\Delta) \subset \Delta$

origen $\longrightarrow$ origen

Una función f es analítica en la región Ω si está definida y tiene derivada en cada punto de Ω

Una función analítica es simpre uniforme.

Una función uniforme es la que está bien definida

16.-Una función es topológica, si y sólo sí, f^{-1} es - continua, de modo tal, que si los mapeos son topo lógicos resolvemos, entonces, el problema 5. La - equivalencia entre topológico, conforme y analí - tico es inmediata a partir de la discusión del pro blema 4.

17.- Véase Anexo 11.

18.- Véase Anexo 111.

19.- Véase Ahlfors, Lars. Complex Analysis. 1a. edición, cap. 3, Lema 1, pág. 93

20.- Véase la demostración en Ahlfors, Lars. Complex Analysis. 1a. edición , Cap. 3 (Integral Compleja) Teorema 6, Pág. 95

21.- Notación:

Si $\gamma_1 \sim \gamma_2$ (mod Ω), $\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz$

22.- Véase anexo IV

23.- Véase Ahlfors, Lars. Complex Analysis

la. edición, cap. 4
Teorema 8, secc. 4.4.

24.- Vease Ahlfors, Lars. Complex Analysis. la. edición, Cap. 3, Lema 3, Secc. 3.2.

25.- Esta desigualdad prueba fundamentalmente que todas las derivadas sucesivas de una función analítica - no pueden ser arbitrarias; tienen que existir siempre un r y un M tales que la verifiquen.

ANEXO I

Pruebese mediante el lema de Schwarz que toda aplicación conforme biunivoca de un disco circular sobre otro viene dada por una transformación lineal.

Sea $\Omega \in \mathbb{C}$ una región simplemente conexa

Sea $z_0 \in \Omega$

Sean $\varphi_0, \varphi_1 : \Omega \rightarrow \Delta$

$$(\Delta = \{ z \in \mathbb{C} / |z| < 1 \})$$

tal que i) φ_1 es 1-1, suprayectiva y analítica

$$\varphi_1(z_0) = 0$$

ii) $$\varphi_1'(z_0) > 0$$

$F = (\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}) : \Delta \longrightarrow \Delta$ es 1 - 1

Suprayectiva (y obviamente holomorfa)

$G = (\varphi_0 \circ \varphi_1^{-1}) : \Delta \longrightarrow \Delta$ es 1 -1

Suprayectiva (y obviamente holomorfa)

$$\left. \begin{array}{l} F(0) = 0 \\ G(0) = 0 \end{array} \right\} \quad y \quad F = G^{-1}$$

Por el lema de Schwarz

$$F(z) \leq |z| \quad \forall z \in \Delta \qquad (1)$$

tal que $|F(\omega_0)| = |\omega_0|$

entonces $F(z) = cz$ con $c \in \mathbb{C}$

tal que $|C| = 1$

Ahora, Sea $z \in \Delta$;

$$z = G(F(z))$$

entonces $|z| = |G(F(z))| \leq F(z)$ $\qquad (2)$

Por el lema de Schwarz

de (1) y (2)

$|z| = |F(z)| \quad \forall z \in \Delta$

entonces $F(z) = Cz \qquad (|c| = 1)$

y $G(z) = \frac{1}{c} z$

i.e.

$\forall z \in \Omega$

$C \varphi_1(z) = F(\varphi_1(z))$

$= (\varphi_0 \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(z)) = \varphi_0(z)$

entonces $\varphi_0'(z) = c\ \varphi_1'(z)$

y $\dfrac{\varphi_0'(z)}{\varphi_1'(z)} = c$

como $\varphi_1'(z_0) > 0 \quad \therefore c = 1$

$$F(z) = z$$

$$G(z) = z$$

$\forall z \in \Delta$ y $\varphi_0 = \varphi_1^{-1}$,

$$\varphi_0 = \varphi_1$$

ANEXO II

El Lema de Schwarz es un corolario del principio del máximo, si aplicamos el principio del máximo a la función $f_1(z) = \frac{f(z)}{z}$ para $z = 0$, $f'(0)$ para $z = 0$ se obtiene el Lema de Schwarz.

El principio del máximo afirma:

Si $f(z)$ es analítica en un conjunto cerrado y acotado E, entonces, el max $|f(z)|$ Se toma en la frontera de E.

Demostración:

Puesto que E es compacto $|f(z)|$ tiene un máximo en E. Si $f(z)$ es constante, la afirmación del teorema es trivialmente verdadera, para la frontera de E es no vacío. Supongamos que el máximo fue tomado en un punto interior z_o. Entonces $|f(z_o)|$ Sería también el máximo de $|f(z)|$ en una vecindad $|z-z_o|< \delta$ contenida en E. Pero esto es imposible a menos que $f(z)$ sea constante en la vecindad, y entonces $f(z)$ es constante en todas partes de la región de definición (recalquemos que $f(z)$ es analítica en E si está definida y analítica en una región que contiene a E). Por lo tanto el máximo es siempre tomado en un punto de la frontera.

Regrezando a la formulación dada en el teorema, observamos que la aplicación más natural es la del caso dado cuando E es una región cerrada. Encontramos que - una función, la cual es analítica en una región cerrada tiene su máximo en la frontera de la región. Para algunas aplicaciones es importante darse cuenta que la hipótesis del teorema puede debilitarse. Es suficiente - suponer que f (z) es continua en la región cerrada, y - analítica en la región abierta. La continuidad en las - regiones cerradas y acotadas asegura la existencia de - un máximo, y la analiticidad en la región abierta implica que el máximo no puede ser obtenido en un punto in - terior aunque la función se reduce a una constante.

Consideramos ahora, el caso de una función f(z) que es análitica en el disco abierto $|z| < R$ y continua en el disco cerrado $|z| \leq R$. Si se sabe que $|f(z)| \leq M$ sobre - $|z| = R$, entonces $f(z) \leq M$ en todo el disco, por el comentario anterior. La igualdad sólo puede ser cierto - si f (z) es una constante del valor absoluto M. Por -- eso se sabe que si f (z) toma algún valor modulo $< M$,- está esperado que un mejor resultado puede ser dado.

Demostración del Lema de Schwars.

Aplicando el principio del máximo a la función de- $f_1(z)$ lo cual es igual a $\frac{f(z)}{z}$

para $z \neq 0$ y a $f'(0)$ para $z = 0$. En el disco $|z| = r < 1$, su valor absoluto es $\leq \frac{1}{r}$; por consiguiente $|f_1(z)| \leq \frac{1}{r}$ para $|z| \leq r$. Haciendo que r tienda a 1 tenemos que $|f_1(z)| \leq 1$ para todo z, y esta es la afirmación del Teorema.

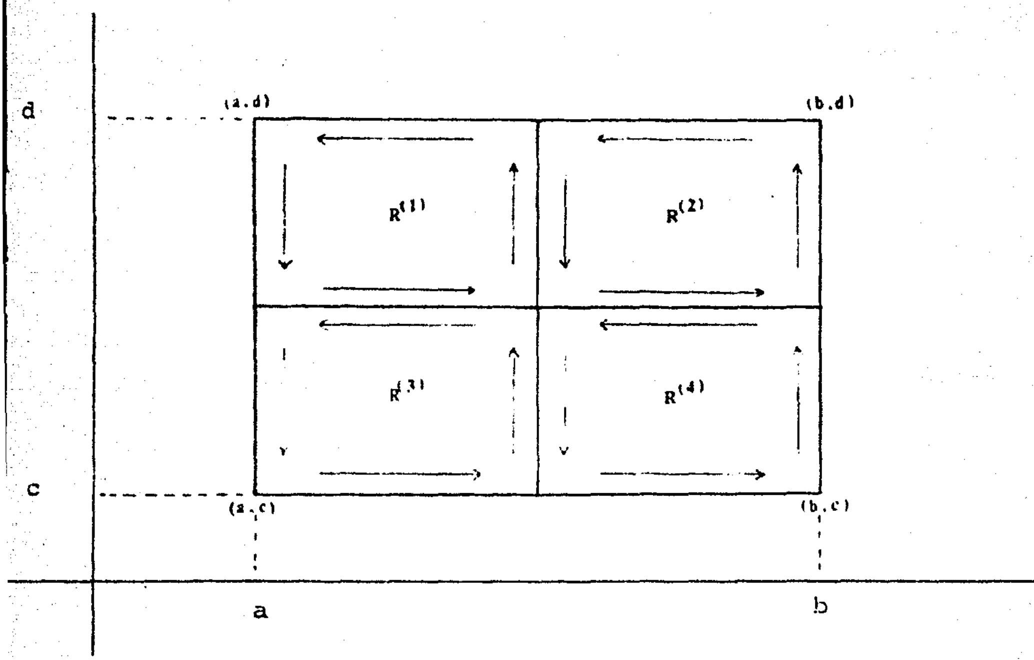
Si se verifica la igualdad en un solo punto, significa que $|f_1(z)|$ alcanza su máximo y, por tanto, que -- $f_1(z)$ debe reducirse a una constante.

ANEXO III

- DEMOSTRACION:

sea $\eta(R) = \int_{\Gamma(R)} f(z)\, dz$

Dividimos R en $R^{(1)}$ $R^{(2)}$ $R^{(3)}$ $R^{(4)}$



$$n\ (R) = n\ (R^{(1)}) + n\ (R^{(2)}) + n\ (R^{(3)}) + n\ (R^{(4)})$$

para alguna k (k= 1,2,3,4)

$|n\ (R^{(k)})| \geq \frac{1}{4} |n\ (R)|$. Sea R_1 aquel para el que - esta desigualdad vale.

Seguimos este proceso y obtenemos

$R \supset R_1 \supset R_2 \supset \ldots \supset R_n \supset \ldots$ con la propiedad de:

$$|n\ (R_n)| \geq \frac{1}{4} |n\ (R_{n-1})|$$

o lo que es lo mismo:

$$|n\ (R_n)| \geq \frac{1}{4^n} |n\ (R)|$$

$R_n \rightarrow z^*$ cuando $n \rightarrow \infty$ en el sentido siguiente:

R_n está contenido en una vecindad $|z-z^*| < \delta$ para $n > N$

Sea δ tal que :

(i) $f(z)$ sea analítica en $|z-z^*| < \delta$

ii) Si $\epsilon > 0$ está dado, entonces:

$$\left| \frac{f(z) - f(z^*)}{z-z^*} - f'(z^*) \right| < \epsilon$$

ó $|f(z) - f(z^*) - (z-z^*)\ f'(z^*)| < \epsilon\ z-z^*$

para $|z-z^*| < \delta$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\Gamma(R)} dz = 0 \\ \displaystyle\int_{\Gamma(R)} zdz = 0\end{array}\right\} A$$

y entonces:

$$n\ (R_n) = \int_{\Gamma(R_n)} [f(z)-f(z^*)-(z-z^*)f'(z^*)]\ dz$$

$$|n\ (R_n)| \leq e \int_{\Gamma(R_n)} |z-z^*|\cdot|dz|$$

$|z-z^*|$ es menor o igual que la diagonal d_n de R_n.

sea L_n el perímetro de R_n, entonces

$$\int_{r(Rn)} |z-z^*|\cdot|dz| \leq d_n L_n$$

$$d_n = 2^{-n} d\ ,\ L_n = 2^{-n} L$$

$$4^{-n}|n\ (R)| \leq |n\ (Rn)| \leq e d\ L\ 4^{-n}$$

$$|n\ (R)| \leq dLe$$

como e es arbitrario

$$|n(R)| = 0$$

Q.E.D.

Para demostrar A se tiene:

a) Sea $f(t) = u(t) + iv(t)$ continua, definida en -(a,b) por definición $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t) + i\int_a^b v(t)\,dt$

b) Sea γ el arco cuya ecuación es $z=z(t)$ $a \leq t \leq b$. Si $f(z)$ está definida y es continua sobre γ entonces, $\int_\gamma f(z)\,dz$

$$= \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\,dt$$

Teorema $\int_\gamma p\,dx + q\,dy$ definida en Ω sólo depende de los extremos $\Longleftrightarrow \exists\, U(x,y)$ en $\Omega \ni t$ $\frac{\partial U}{\partial x} = p$ $\frac{\partial U}{\partial y}$ q

$f(z)\,dz = f(z)\,dx + i\,f(z)\,dy$ es exacta si $\exists$ F en Ω

$$\ni \frac{\partial F}{\partial x} = f$$

y $\frac{\partial F}{\partial y} = if$ es decir, F satisface las condiciones de Cauchy -Riemann

A partir de ello, como

$f(z) = 1$ y $f(z) = z$ son derivados de funciones -analíticas, las integrales sólo dependen de los extremos, por lo que se cumple A.

ANEXO IV

NOTA DEL LOGARITMO.

Las propiedades y la definición de la función exponencial e^z son conocidas, en donde rápidamente podemos afirmar que:

$e^z = e^{x+iy} = e^x$ (cos y + i sen y) ($z=xiy$)

de donde $|e^z| = e^x = e^{Rez}$

$$\arg (e^z) = y = \ln z$$

A partir de esta función es posible plantear la siguien - te ecuación: dado $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 0$ encontrar $\omega_0 \in \mathbb{C}$ tal que $e^{\omega_0} = z_0$

Esta ecuación tiene solución desde el momento que la función exponencial es suprayectiva. Si denotamos $\omega_0 = \ln z_0$ esto, aparentemente permite definir otra función del plano complejo en sí mismo, más aún, ésta sería la inversa de la fun - ción exponencial ya que, claramente $e^{\ln z_0} = z_0$

Si regresamos a nuestra ecuación original,

$e^{\omega} = z_0$ de la cual $\omega = \omega_0$ es solución observamos que $e^{\omega_0 + 2\pi i} = z_0$. Más aún $e^{\omega_0 + 2n\pi i} = z_0 \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$

A partir de esto se comprueba que la relación - $\ln z_0 = \omega_0$ no define una función ya que $\ln z_0 = \omega_0 + 2n\pi i$ - Lo único que se puede concluir por el momento es que nuestra ecuación tiene una infinidad de soluciones.

Si denotamos $A_{z_0} = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ z = \ln z_0 \}$

la "imagen" de z_0 bajo la asociación ln. (también se puede - pensar como el conjunto de soluciones de nuestra ecuación) - sabemos que existe un único elemento $\alpha_0 \in$ A que satisface $-\pi < \ln (\alpha_0) \leq \pi$. α_0 es el <u>valor principal</u> de $\ln z_0$ (lo denotaremos $\alpha_0 = L\ (z_0)$)

Así, $\forall\ z \in A$, $n \in \mathbb{Z}$, $n\ (z)$ tal que
$z = L\ (z_0) + 2\pi\ n\ (z)\ i$; es decir,
$\ln z_0 = L\ (z_0) + 2k\pi i$ para alguna $k \in \mathbb{Z}$

Si para la función exponencial $e: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
definimos $\Omega = \{ z \in \mathbb{C} / -\pi < \ln z \leq \pi \}$
Entonces $e/\omega = e: \Omega \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ establece una inyección entre la "franja" Ω y todo el plano complejo, excepto el origen. -
Es una demostración trivial que $L: \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \Omega$
es precisamente $(e\Omega)^{-1}$
Esto significa que $\forall\ z \in \mathbb{C}$, $L(z) \in \Omega$.

BIBLIOGRAFIA

1.- Ahlfors Lars V. Complex Analysis. An Introduc - tion to the Theory of Analitic Functions of One Complex Variable.

Mc. Graw W. Hill Book Company, Inc. 1953. New York. 247 pág.

2.- Bachelard Gaston. El Compromiso Racionalista Siglo XXI editores S.A., 1a edición , 1978, México . - 204 pág.

3.- Bachelard Gaston. La Formación del Espíritu Científico. Contribución a un Análisis del Conocimiento-Objetivo.

Siglo XXI editores S.A., 8a. edición, 1979, México 297 pág.

4.- Bonola Roberto. Non-Euclidean Geometry. Dover Publications, Inc., 1955, New. York.

5.- Bouveresse, Jacques. " La Philosophie de Ludwing Wittgenstein ou Thérapentique d'une Meladie Phi - losophique". en Caniers pour l' Analyse # 10. - 1979, Paris France.

6.- Canguilhem Georges. Lo Normal y lo Patológico.

Siglo XXI editores S.A, 2a. edición , 1978, México. 242 pág.

7.- Cantor Georg. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. Dover Publications, Inc. New York, la edición.

8.- Comte Augeste. *La Science Sociale.* Idées/ Gallimard, Collection Idées 261, 1972, France. 306 pág.

9.- Fink Eugen. *La Filosofía de Nietzsche*. Alianza Editorial, colección Alianza Universidad- Núm. 64, 2a. edición, 1979, Madrid España. 225 pág.

10.- Eugen Fink, *Oasis de la Felicidad. Pensamientos - para una Ontología del Juego.* Centro de Estudios Filosóficos. Cuaderno Núm. 23, U.N.A.M. 1966. 30 pág.

11.- Foucault Michel. *Las Palabras y las Cosas.* Siglo XXI editores S.A., 11a. edición, 1979, México. 375 pág.

12.- Foucault, Michel. *Microfísica del Poder*. Las Ediciones de la Piqueta, 2a. edición, 1979, Madrid España. 190 Pág.

13.- Huizinga Johan, Homo Ludens, el Juego y la Cultura. Fondo de Cultura Económica, sección Sociología. - 1943, México, 500 pág.

14.- Hilbert-Poincare. El Programa Hilbert 1900 Del Papel de la lógica en matemáticas.
Comunicaciones Internas Núm. 7, 1980, serie Divulgación, depto de Matemáticas.
Fac. de Ciencias U.N.A.M. 40 pág.

15.- Kant, Imanuel . Crítica de la Razón Pura.
Editorial Porrúa, S.A., colec. "Sepan Cuantos..."
Núm. 203, 5a edición, 1979, México . 369 pág.

16.- Nietzsche Friedrich . Así hablaba Zaratustra.
Ediciones Ibéricas, 4a. edición, 1970, Madrid España. 496 pág.

17.- Nietzsche, Friedrich. Aurora.
Editores Mexicanos Unidos , S.A. 2a. edición, 1981, México. 206 pág.

18.- Nietzsche, Friedrich, Crepúsculo de los Idolos.
Alianza Editorial, colec. Libro de Bolsillo, Núm. 467, 5a. edición, 1981. Madrid España. 173 pág.

19.- Nietzsche Friedrich. El Nacimiento de la Tragedia. Alianza Editorial, Colec. Libro de Bolsillo . Núm. - 456, 5a. edición: 1980, Madrid España. 278 pág.

20.- Nietzsche, Friedrich . Humano Demasiado Humano. Editores Mexicanos Unidos, S.A. 4a. edición, 1983, México , 313 pág.

21.- Nietzsche, Friedrich . La Gaya Ciencia. Editores Mexicanos Unidos, S.A., la edición, 1983, México 344 pag.

22.- Nietzsche, Friedrich Más allá del Bien y el Mal. Alianza Editorial, colec. Libro de Bolsillo, Núm. 400 5a. edición, 1979, Madrid España. 284 pág.

23.- Pascal, Blaise Oeuvres Complètes. Aux Editions Du Seuil. 1963, Paris France.

24.- Platón. Diálogos. Editorial Porrúa S.A. colec. "Sepan Cuantos" Núm. 13, 11a edición 1971, México. 727 pág.

25.- Riemann, Bernhard OEuvres Mathématiques.

Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 9a. Tirage 1968, Paris Francia. 448 páginas.

26.- Waismann, Friedrich. Ludwig Wittgenstein y el círculo de Viena. Fondo de Cultura Económica. 1a edición, 1973. México. 239 pág.

27.- Wittgenstein Ludwig - Tractatus Logico-Philosophicus Alianza Editorial, colec. Alianza Universidad Núm. - 50, 4a. edición, 1980, Madrid España. 221 pág.