

*Universidad Nacional Autónoma de México.*

*Facultad de Ciencias.*



**INTEGRACION NUMERICA Y ALGUNAS DE SUS  
APLICACIONES A LA FISICA**

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
M A T E M A T I C O  
P R E S E N T A  
EMILIO VELARDE GONZALEZ BAZ.

CIUDAD UNIVERSITARIA

MEXICO, D. F. 1982.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# TESIS CON FALLA DE ORIGEN

## INTRODUCCION.

El objetivo del material que a continuación se presenta es mostrar la importancia de los métodos de integración numérica en el terreno de la Física al estudiar el problema de las termo-corrientes iónicas.

Aunque el problema físico traducido a un lenguaje exclusivamente matemático consiste en la estimación de parámetros involucrados en la curva de termo-corrientes iónicas (I.T.C.), se requerirá hacer notar la importancia de la integración numérica, pues para la estimación de dichos parámetros, se nos presentará implícitamente el problema de calcular el área bajo la curva de termo-corrientes iónicas, el cual necesita de métodos de integración numérica para su solución como lo veremos.

En el primer capítulo se ha resumido la teoría de la integral de Riemann, la cual no es desde luego la parte medular ni el objetivo de este trabajo, pero sin embargo nos provee algunos resultados que necesitaremos para los capítulos posteriores. En el segundo capítulo se dan algunas reglas elementales y otras más complicadas que nos resuelvan el problema de calcular integrales definidas cuando éstas presentan diversas dificultades, que se mencionan desde luego en el desarrollo del capítulo. El tercer capítulo es la parte medular del escrito pues además de mostrar la importancia de la integración numérica en el terreno de la física proporciona un método para la estimación de los parámetros involucrados en la ecuación de la curva I.T.C. y por ende resuelve el problema físico. El cuarto capítulo resume e implementa el método de resolver el problema de la estimación de los parámetros y el último capítulo muestra un enfoque estadístico al problema de la estimación de los parámetros.

## INDICE TEMATICO.

Capítulo I	<u>Teoría general de la integral de Riemann.</u>	pág. 1
1.1	Concepto de Area, particiones y funciones escalonadas.	" 1
1.2	Sumas superiores e inferiores, definición de la integral de Riemann y funciones Riemann-integrables.	" 10
1.3	El método de exhaustación y ejemplos de funciones que no son Riemann-integrables.	" 29
1.4	Continuidad e integrabilidad.	" 35
1.5	Derivabilidad e integrabilidad.	" 43
Capítulo II.	<u>Integración Numérica.</u>	" 51
2.1	Cómo surge la integración numérica y esbozo de la idea de la integración numérica.	" 51
2.2	Cuatro métodos simples para el cálculo de $\int_a^b f(x) dx$	" 54
2.3	Cálculo de $\int_a^b f(x) dx$ cuando no se tiene la expresión analítica de $f(x)$ .	" 70
2.4	Reglas compuestas para el cálculo de $\int_a^b f(x) dx$	" 82
Capítulo III.	<u>Aplicaciones de la integración numérica a un problema físico.</u>	" 87
3.1	En qué consiste el problema físico ya traducido a un lenguaje matemático.	" 87
3.2	Un análisis previo de la curva I.T.C.	" 88
3.3	Cálculo de $\int_{T_0}^{\infty} J(T) dT$	" 96
3.4	Estimación de los parámetros $E$ y $T_0$	" 97

Capítulo IV	<u>Métodos numéricos y un algoritmo para la estimación de los parámetros E y <math>\tau_0</math>.</u>	Pág. 99
4.1	Algoritmo para la estimación de E y $\tau_0$	" 99
4.2	Un programa en Algol para calcular E y $\tau_0$	" 101
Capítulo V.	<u>Métodos estadísticos y estimación de E y <math>\tau_0</math></u>	" 103
5.1	El modelo lineal simple $y = mx + b$	" 103
5.2	Estimación de $\sigma^2$ , m y b por máxima verosimilitud.	" 104
5.3	Estimación de m y b por intervalos	" 106
5.4	La estimación de los parámetros E y $\tau_0$ mediante intervalos de confianza.	" 108
	<u>Apéndices.</u>	" 111
	Apéndice 1	" 111
	Apéndice 2	" 117
	Apéndice 3	" 120
	<u>Bibliografía en Matemáticas.</u>	" 126
	<u>Bibliografía en Física.</u>	" 126

## CAPITULO I

### TEORIA GENERAL DE LA INTEGRAL DE RIEMANN

#### 1.1 Concepto de área, particiones y funciones escalonadas.

Una área es un número real que se asocia a una región  $S$  o a un conjunto  $S$  del plano. Aquí cuando nos referimos al plano nos estamos refiriendo al espacio euclidiano de dos dimensiones denotado por  $\mathbb{R}^2$ ; hablaremos indistintamente de región  $S$  del plano o conjunto  $S$  del plano y esto significará que  $S \subset \mathbb{R}^2$ .

Desde el punto de vista puramente matemático, esto significa que se tiene una función  $a$  (función área), que asigna un número real  $a(S)$ , (el área de  $S$ ), a cada conjunto  $S$  de una colección de conjuntos dada. Una función de esta naturaleza cuyo dominio es una colección de conjuntos y cuyos valores son números reales, se llama función de conjunto.

El problema básico es éste:

Dado un conjunto  $S$  del plano ¿qué área  $a(S)$  le asignaremos?

Nuestro método para abordar este problema consistirá en partir de ciertas características que el área debiera tener y tomarlas como base para definirla. Cualquier función de conjunto que satisfaga tales características se llamará área.

Antes de establecer la definición formal para el área, haremos algunas observaciones acerca de los conjuntos del plano, a los cuales se les puede asignar área. Estos se llamarán conjuntos medibles; la colección de estos conjuntos la de-



nombraremos  $\mathcal{A}$ .

Los puntos que se establecerán a continuación nos permitirán demostrar que las regiones descritas bajo la gráfica de las funciones  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son medibles y se pueden calcular sus áreas.

Estableceremos ahora algunos conceptos que se requerirán para la mejor comprensión de la definición de área:

Definición i) Sean  $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^2$  y consideremos el segmento de recta que determinan los puntos  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$ , i.e. consideremos el  $\{\alpha \bar{x} + (1 - \alpha)\bar{y} : 0 \leq \alpha \leq 1\}$  la longitud de este segmento de recta está dado por  $[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{1/2}$  donde  $(x_1, x_2) = \bar{x}$  y  $(y_1, y_2) = \bar{y}$

Definición ii) Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$  es congruente a un conjunto  $B \subset \mathbb{R}^2$  si a) existe una correspondencia biunívoca entre los puntos  $p$  y  $p'$  siendo  $p \in A$  y  $p' \in B$  y b) si para todo par de puntos  $p, q \in A$  y  $p', q' \in B$  estando  $p$  en correspondencia con  $p'$  y  $q$  en correspondencia con  $q'$  la longitud del segmento rectilíneo que determinan  $p$  y  $q$  es igual a la longitud del segmento rectilíneo que determinan  $p'$  y  $q'$ .

Definición iii) Un rectángulo es cualquier conjunto  $R \subset \mathbb{R}^2$  congruente con el conjunto

$$\{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq h, 0 \leq x_2 \leq k, h, k \in \mathbb{R}\},$$

los lados del rectángulo  $R$  serán  $h$  y  $k$ .

Nota: Entiéndase la región bajo la gráfica como la región del plano limitada por la gráfica de la función y el eje  $X$ .



### 1.1.1 Definición de área.

Una área es una función  $a : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple las siguientes características:

- 1.- Para toda  $S \in \mathcal{A}$  se tiene que  $a(S) \geq 0$
- 2.- Si  $S, T \in \mathcal{A} \Rightarrow S \cup T$  y  $S \cap T \in \mathcal{A}$  y además
 
$$a(S \cup T) = a(S) + a(T) - a(S \cap T).$$
- 3.- Si  $S, T \in \mathcal{A}$  siendo  $S \subseteq T$  entonces  $T - S \in \mathcal{A}$  y se tiene que
 
$$a(T - S) = a(T) - a(S)$$
- 4.- Si  $S \in \mathcal{A}$  y  $T$  es congruente con  $S$ , también  $T \in \mathcal{A}$  y  $a(S) = a(T)$ .
- 5.- Todo rectángulo  $R$  pertenece a  $\mathcal{A}$  y si los lados de  $R$  tienen longitud  $h$  y  $k$  entonces  $a(R) = hk$
- 6.- Sea  $Q$  un conjunto que modo que  $S \subseteq Q \subseteq T$  (1)  
 Si existe uno y sólo un número  $c$  que satisface las desigualdades:  $a(S) \leq c \leq a(T)$  para todas las regiones que satisfacen (1) entonces  $Q$  es medible y  $a(Q) = c$

### 1.1.2 Comentarios a la definición:

El punto 1 establece simplemente que el área de un conjunto es no negativa. Del punto 2 se infiere que si dos conjuntos son ajenos el área de la unión es la suma de las áreas de cada uno. El punto 3 nos dice que si tenemos un conjunto  $S$  contenido en otro conjunto  $T$  y si consideramos un nuevo conjunto el de los elementos que pertenecen a  $T$  pero no pertenecientes a  $S$ , entonces este nuevo conjunto, denotado por  $T - S$  es medible y el área de  $T - S$  estará dada por  $a(T) - a(S)$ . El punto 4 asigna áreas iguales a conjuntos con formas y tamaños iguales. El punto 5 implica que todo -

segmento de recta tiene área cero. El punto 6, junto con el 5 y el 3 son los que nos servirán principalmente para desarrollar toda la teoría de la integral de Riemann.

### 1.1.3 Intervalos y particiones.

Definición 1.1.3.1 Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $a < b$ . Consideremos el conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  a este conjunto se le llama el intervalo cerrado  $[a, b]$ .

Definición 1.1.3.2 Sean  $a, b$  como en la definición 1.1.3.1 y consideremos el conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  a este conjunto se le llama el intervalo abierto  $(a, b)$ .

Definición 1.1.3.3 Consideremos al conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  a este conjunto se le llama el intervalo semiabierto por la izquierda  $(a, b]$ .

Definición 1.1.3.4 Al conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  se le llama el intervalo semiabierto por la derecha  $[a, b)$ .

En el desarrollo de la teoría se trabajará, muy a menudo, con intervalos cerrados  $[a, b]$  y sobre estos intervalos se definirá un conjunto de puntos  $x_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$  con la condición de que  $a \leq x_i \leq b$  para toda  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , a este conjunto de puntos se le llamará partición del intervalo  $[a, b]$  y se denotará como  $P$ .

1.1.3.5 Definición formal de una partición del intervalo  $a, b$   
Sean  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  un conjunto de números reales tales que  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  a este conjunto de puntos se le llama partición  $P$  del intervalo  $[a, b]$ .

Nótese que la partición  $P$  determina  $n$  subintervalos  $[x_0, x_1]$ ,  $[x_1, x_2]$ , ..... ,  $[x_{n-1}, x_n]$ . A esta partición  $P$  es posible añadirle uno o más puntos de tal suerte que obtengamos otra nueva partición  $P'$  y a esta nueva partición  $P'$  se dirá que es un refinamiento de  $P$ . i.e.,  $P'$  es un refinamiento de  $P$  si  $P \subset P'$ , esto es, si todo punto de  $P$  es punto de  $P'$ .

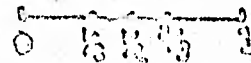
1.1.3.6 Ejemplo: Consideremos el intervalo  $0, 1$  y sea

$$P = \{0, 1/3, 1/2, 1\} \quad \text{y}$$

$$P' = \{0, 1/3, 1/2, 2/3, 1\};$$



es claro que  $P \subset P'$  i.e.  $P'$  es un refinamiento de  $P$ : la partición  $P$  define los tres subintervalos  $[0, 1/3]$ ,  $[1/3, 1/2]$ ,  $[1/2, 1]$ . La partición  $P'$  define cuatro subintervalos que son:  $[0, 1/3]$ ,  $[1/3, 1/2]$ ,  $[1/2, 2/3]$ ,  $[2/3, 1]$ .



#### 1.1.4 Funciones escalonadas.

Para nuestros propósitos aquí definiremos un tipo especial de funciones llamadas escalonadas o funciones constantes a trozos.

##### 1.1.4.1 Definición de una función escalonada:

Una función  $\sigma$  cuyo dominio es un intervalo  $[a, b]$  se dice que es una función escalonada si existe una partición  $P = \{a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b\}$  de  $[a, b]$  tal que  $\sigma$  sea constante en cada subintervalo abierto  $(x_{k-1}, x_k)$ , esto es  $\sigma$  es escalonada si  $\sigma(x) = \sigma_k$  cuando  $x_{k-1} < x < x_k$  donde  $\sigma_k$  es un valor fijo real y  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Nota: En los extremos  $x_{k-1}, x_k$  la función  $\sigma$  está definida - pero no necesariamente  $\sigma(x_k) = \sigma_k$  ó  $\sigma(x_{k-1}) = \sigma_k$

1.1.4.2 Ejemplo: Consideremos el intervalo  $[0, 1]$  y sea -

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ 1 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

es claro que  $g(x)$  definida arriba es una función escalonada ya que para la partición  $P = \{0, 1/2, 1\}$   $g(x) = 0$  si  $0 \leq x < 1/2$  y  $g(x) = 1$  si  $1/2 \leq x \leq 1$ .

Nótese que  $g(1/2) = 0 \neq 1 = g(x)$  para  $1/2 \leq x \leq 1$ , esto sólo se menciona para hacer hincapié en la nota de la definición 1.1.4.1.

1.1.4.3 Ejemplo: Consideremos el  $[a, b]$  y definamos  $g(x) = k$  si  $a + (k-1)\frac{(b-a)}{n} \leq x < a + k\frac{(b-a)}{n}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ , ésta es otra función escalonada ya que la función  $g$  es constante para todo valor  $x$  mayor que  $a + (k-1)\frac{(b-a)}{n}$  y menor o igual que  $a + k\frac{(b-a)}{n}$ . La figura 1 representa la gráfica del ejemplo 1.1.4.2. y la figura 2 representa la gráfica del ejemplo 1.1.4.3. en el caso  $n = 5$ .

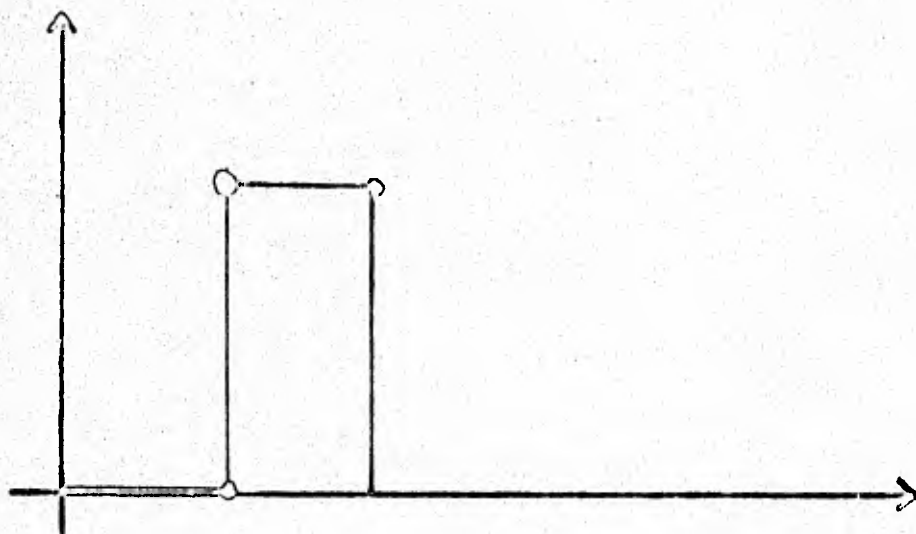


figura 1.

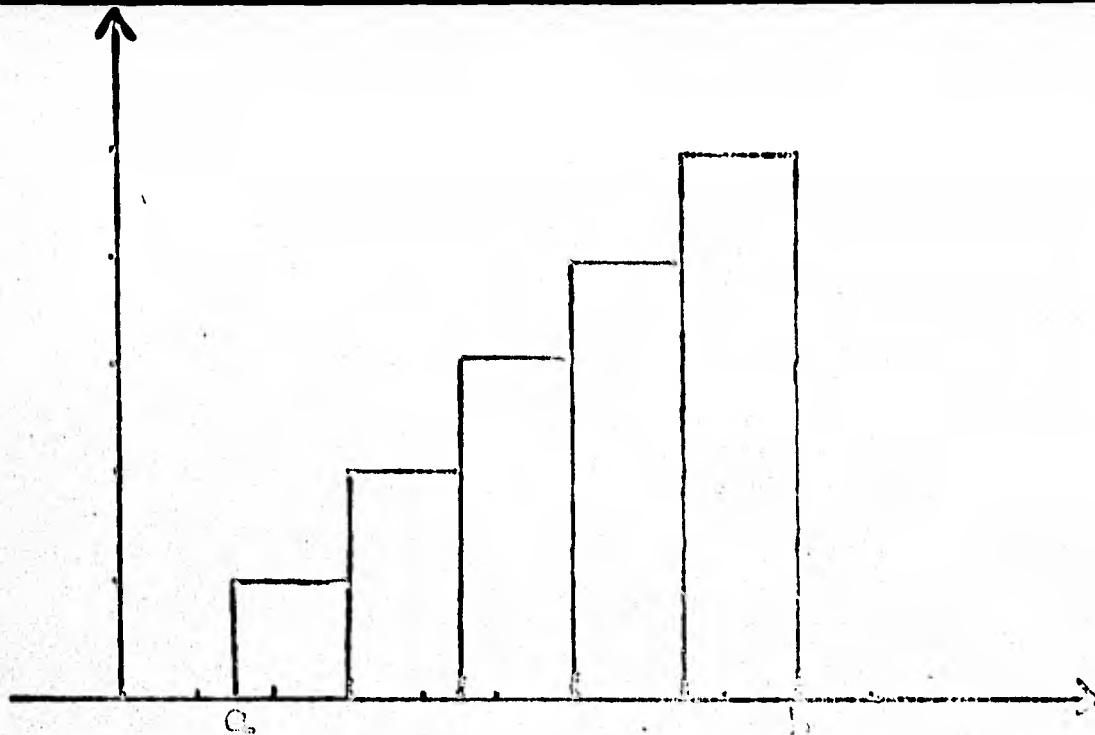


Figura 2.

1.1.4.4. Algunas propiedades de las funciones escalonadas.

Supongamos que  $s(x)$  y  $t(x)$  son funciones escalonadas sobre el intervalo  $a, b)$

- i)  $u(x) = s(x) \pm t(x)$  es escalonada,
- ii)  $u(x) = s(x) \cdot t(x)$  también es escalonada,
- iii) y si  $t(x) \neq 0$  entonces  $u(x) = \frac{s(x)}{t(x)}$  también es escalonada
- iv) Si  $f(x)$  es una función definida en el intervalo  $[m, M]$  donde  $m \in s(x) \in M$  siendo  $m = \inf s(x)$  y  $M = \sup s(x)$  entonces  $u(x) = f \circ s(x)$  es una función escalonada en el intervalo  $[m, M]$ .

Los detalles y la demostración de estos cuatro puntos se encuentran en el Apéndice 1, punto 1.

Después de haber definido lo que es una partición, lo que es una función escalonada y haber visto el concepto de área, procederemos a asignarle una área a las regiones del plano que describen las funciones escalonadas  $s(x)$  bajo su gráfica sobre

el intervalo  $[a, b]$ , y a esta área de ahora en adelante la llamaremos integral de la función  $s(x)$  desde  $a$  hasta  $b$  y la denotaremos por  $\int_a^b s(x) dx$ .

1.1.4.5 Definición de la integral de la función escalonada  $s(x)$  sobre el intervalo  $[a, b]$ .

Sea  $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$  la partición para la cual  $s(x) = s_k$  cuando  $x_{k-1} < x < x_k$  se define la

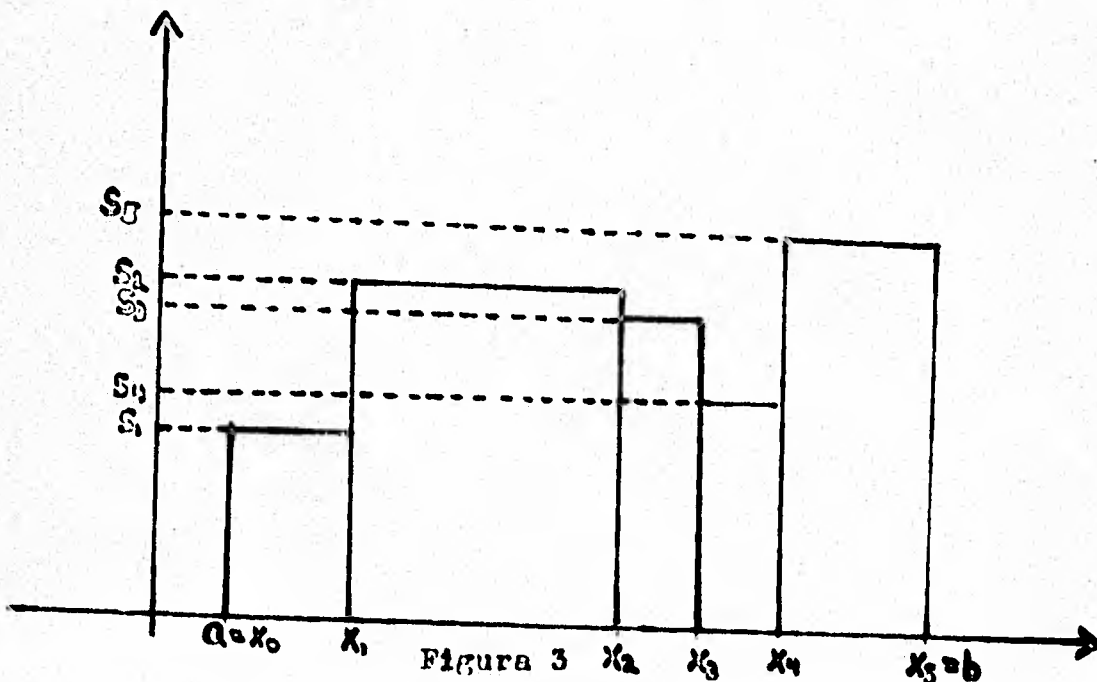
$$\int_a^b s(x) dx \text{ como } \int_a^b s(x) dx = \sum_{k=1}^n s_k \Delta_k \text{ donde } \Delta_k = x_k - x_{k-1}$$

1.1.4.6 Comentarios a la definición 1.1.4.5

¿Por qué se define  $\int_a^b s(x) dx = \sum_{k=1}^n s_k \Delta_k$ ? La

respuesta es la siguiente:

Nosotros queremos asignar una área a la región del plano que queda bajo la gráfica de  $s(x)$  desde el valor  $a$  hasta el valor  $b$  como se ve en la figura 3





Para los puntos aislados que definen la partición, la región debajo de las ordenadas correspondientes a esos puntos con simplemente segmentos de recta que debido al inciso 5 de la definición 1.1.1. tienen una área igual a cero y por lo tanto el área debajo de la gráfica de  $s(x)$  podrá ser calculada mediante la suma de las áreas de los rectángulos que se muestran en la figura 3. Como el rectángulo cuya base coincide con el intervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  tendrá una área de  $s_k \Delta_k$ , en vista del axioma 5 de la definición 1.1.1 el área bajo la gráfica será  $\sum_{k=1}^n s_k \Delta_k$ . A continuación daremos un ejemplo:

1.1.4.7 Ejemplo: Sea el intervalo  $[0, 3]$  y defínase  $s(x)$  como sigue:

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

La gráfica de esta función define tres rectángulos  $R_1, R_2, R_3$  con  $R_1$  que tiene área  $a(R_1) = 1$ ,  $R_2$  con área  $a(R_2) = 2$  y  $R_3$  con área  $a(R_3) = 4$ . Ver figura 4

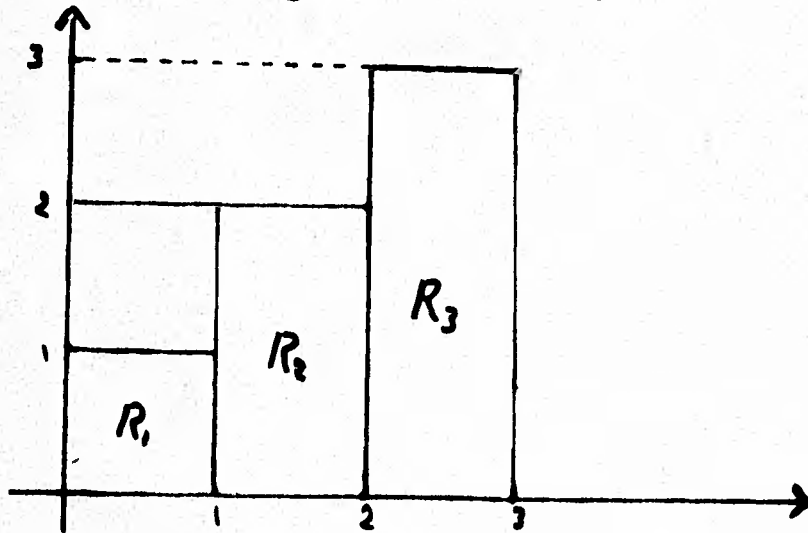


Figura 4



## 1.2 Sumas superiores e inferiores, definición de la integral de Riemann y funciones Riemann integrables.

Como se ha mencionado anteriormente, estamos interesados en calcular el área de ciertas regiones de  $\mathbb{R}^2$ , hemos visto en la sección 1.1 una manera de calcular el área de regiones del plano que describen las gráficas de las funciones escalonadas. Nos gustaría generalizar un poco más esto para calcular área de regiones más complicadas, tales como las que describen las gráficas de funciones no escalonadas o que no son constantes a trozos; a este tipo de regiones será más difícil calcularles su área ya que no podremos hacerlo con una suma finita de área de rectángulos. Sin embargo existirán una infinidad de funciones para las cuales se podrá calcular su área mediante diversos métodos como son aproximativos, exhaustivos y teóricos. Los métodos aproximativos se estudiarán a lo largo de todo el capítulo II; los exhaustivos los veremos en la siguiente sección 1.3 y los teóricos los veremos en la sección 1.5.

La idea para calcular el área de dichas regiones será definir dos funciones escalonadas tales que se aproximen a una función dada tanto como queramos, una de las funciones escalonadas se aproximará por exceso a la función dada y la otra por defecto; para aclarar esta idea consideremos cualquier función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f$  esté acotada en el intervalo  $[a, b]$ , i.e. existe un número no negativo  $M$  tal que  $|f(x)| \leq M$  para toda  $x \in [a, b]$ . De ahora en adelante trabajaremos con funciones acotadas.

Consideremos  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|f(x)| \leq M$ ,  $M \geq 0$  para toda  $x \in [a, b]$  y sea  $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$

una partici3n arbitraria del intervalo  $[a, b]$ , puesto que  $f$  est1 acotada en  $[a, b]$   $f$  est1 acotada en el subintervalo  $[x_{k-1}, x_k]$   $k = 1, 2, 3, \dots, n$ , sea  $M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$  y  $m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$  y def1nase:

$$s(x) = m_k \quad \text{si } x \in (x_{k-1}, x_k] \quad 1.2.1$$

$$s(a) = m_1$$

$$\text{y } t(x) = M_k \quad \text{si } x \in (x_{k-1}, x_k]$$

$$t(a) = M_1$$

es claro que  $s(x) \leq f(x) \leq t(x)$  para toda  $x \in [a, b]$  y que las funciones  $s$  y  $t$  son escalonadas

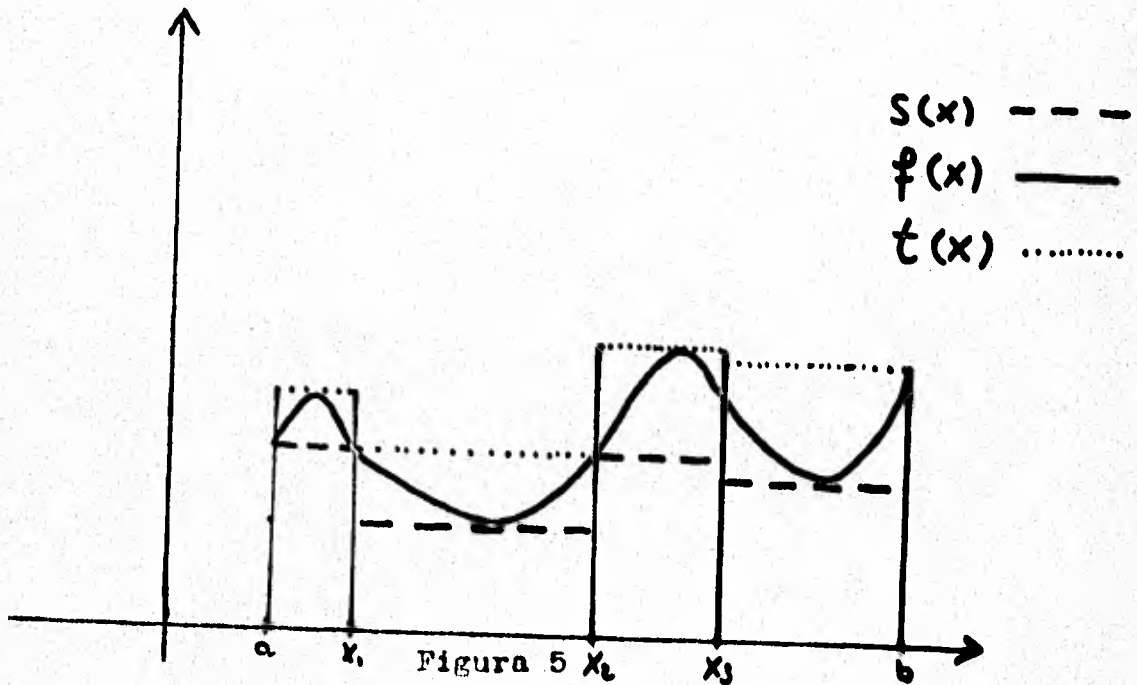


Figura 5

V1ase en la figura 5 que la regi3n que describe bajo su gr1fica  $f(x)$  queda contenida entre las regiones que describen bajo sus gr1ficas  $s(x)$  y  $t(x)$ . Denotemos por  $\int_a^b f(x) dx$  a el 1rea bajo la curva  $f(x)$ ; para cualquier partici3n  $P$  y cualquier par

de funciones definidas como  $s$  y  $t$  referentes a  $P$  se cumple la siguiente desigualdad:

$$\sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \leq \int_a^b f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$$

donde  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

y recuérdese que según la sección anterior  $\sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$

y  $\sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$  son el área bajo las gráficas de  $s(x)$  y

$t(x)$  respectivamente. Ahora dado que las áreas  $\sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$

y  $\sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$  dependen de la partición dada denotaremos a

$$\sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \quad \text{como } L(f, P)$$

$$\text{y a } \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \quad \text{como } U(f, P)$$

donde a  $L(f, P)$  se le llama la suma inferior de  $f$  respecto a  $P$  y a  $U(f, P)$  se le denomina la suma superior de  $f$  respecto a  $P$ .

Ahora sean  $P_1$  y  $P_2$  dos particiones arbitrarias no necesariamente iguales; en base a lo anteriormente expuesto se tiene que

$$L(f, P_1) \leq \int_a^b f(x) dx \leq U(f, P_1)$$

$$\text{y que } L(f, P_2) \leq \int_a^b f(x) dx \leq U(f, P_2)$$

$$\text{de donde } L(f, P_1) \leq \int_a^b f(x) dx \leq U(f, P_2)$$

i.e., se obtiene el siguiente teorema

## Teorema (1.2.2).

Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada sobre el intervalo  $[a, b]$  sean  $P_1$  y  $P_2$  particiones del intervalo  $[a, b]$  con  $P_1$  y  $P_2$  arbitrarias, entonces

$$L(f, P_1) \leq \int_a^b f(x) dx \leq U(f, P_2)$$

y por lo tanto  $L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$ .

El teorema anterior nos asegura que cualquier suma inferior es menor o igual que cualquier suma superior y además que el valor de  $\int_a^b f(x) dx$  siempre está entre cualquier suma inferior y cualquier suma superior.

A continuación se enuncia y demuestra otro teorema que nos será útil.

## Teorema 1.2.3

Sea  $P^*$  un refinamiento de la partición

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 \dots \dots \dots < x_n = b\}$$

del intervalo  $[a, b]$  y sea  $f$  una función acotada en el intervalo  $[a, b]$ , entonces  $L(f, P^*) \leq L(f, P)$

$$\text{y } U(f, P^*) \leq U(f, P)$$

Para probar lo anterior supongamos primero que  $P^*$  tiene exactamente un punto más que  $P$  en algún subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ ,

$1 \leq i \leq n$ , denotemos este punto como  $x^*$ , y ahora consideremos

$$P^* = \{a = x_0 < x_1 < x_2 \dots \dots \dots < x_{i-1} < x^* < x_i \dots \dots < x_n = b\}$$

sean

$$w_1 = \inf_{x \in [x_{i-1}, x^*]} f(x)$$

y

$$w_2 = \inf_{x \in [x^*, x_i]} f(x)$$

por como se escogieron  $w_1$  y  $w_2$ ,  $w_1 \geq m_1$  y  $w_2 \geq m_1$  ya que  $m_1 = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ . Ahora calculemos la diferencia:

$$\begin{aligned} L(P^*, f) - L(P, f) &= \sum_{k=1}^{i-1} m_k \Delta x_k + w_1(x^* - x_{i-1}) + \\ & \quad w_2(x_i - x^*) + \sum_{k=i+1}^n m_k x_k - \\ & \quad \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \\ &= w_1(x^* - x_{i-1}) + w_2(x_i - x^*) - m_1(x_i - x_{i-1}) \\ &= (w_1 - m_1)(x^* - x_{i-1}) + (w_2 - m_1)(x_i - x^*) \geq 0 \end{aligned}$$

de donde  $L(P^*, f) \geq L(P, f)$

Ahora sean  $z_1 = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i^*]} f(x)$

y  $z_2 = \sup_{x \in [x^*, x_i]} f(x)$

de como se eligieron  $z_1$  y  $z_2$  se tiene que:

$$z_1 \leq M_i \quad z_2 \leq M_i$$

ya que  $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

Ahora calculemos la diferencia:

$$\begin{aligned} U(f, P^*) - U(f, P) &= \sum_{k=1}^{i-1} M_k \Delta x_k + z_1(x^* - x_{i-1}) + \\ & \quad z_2(x_i - x^*) + \sum_{k=i+1}^n M_k x_k - \sum_{k=1}^n M_k x_k \\ &= z_1(x^* - x_{i-1}) + z_2(x_i - x^*) - M_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= (z_1 - M_i)(x^* - x_{i-1}) + (z_2 - M_i)(x_i - x^*) \leq 0 \end{aligned}$$

de donde:

$$U(f, P^*) \leq U(f, P)$$

lo cual demuestra el teorema para el caso en que  $P^*$  contiene un punto más que  $P$ .

En el caso de que  $P^*$  contenga más de un solo punto, digamos,  $k$  puntos el proceso de demostración se repite  $k$  veces y obtenemos lo deseado.

#### 1.2.4 Definición de la integral de Riemann y funciones Riemann-integrables.

Sea  $f: R \rightarrow R$ ,  $f$  acotada en el intervalo  $[a, b]$ , denotemos como  $\int_a^b f(x) dx$  al  $\inf U(f, P)$  y

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{al} \quad \sup L(f, P)$$

Se dice que  $f$  es Riemann integrable sobre el intervalo  $a, b$

$$\text{si} \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx .$$

y la integral de Riemann de  $f$  sobre  $[a, b]$  será precisamente

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

#### 1.2.5 Comentarios a la definición:

Entiéndase como  $\inf U(f, P)$  el ínfimo de las sumas superiores sobre todas las posibles particiones de  $[a, b]$  y de manera similar  $\sup L(f, P)$  al supremo de las sumas inferiores sobre todas las posibles particiones de  $[a, b]$ .

En el teorema 1.2.2 se vió que

$$L(f, P_1) \leq \int_a^b f(x) dx \leq U(f, P_2) \quad \text{para toda } P_1 \text{ y } P_2 \text{ arbi-}$$

trarias, por lo tanto esta desigualdad se sigue conservando cuando se toma el infimo y el supremo, es decir,

$$\int_a^b f(x) dx = \sup L(f, P) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \inf U(f, P) = \int_a^b f(x) dx$$

por lo tanto cuando  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

se tiene la definición 1.2.4.

Una vez definida la integral de Riemann y habiendo hecho las observaciones pertinentes a la definición 1.2.4 procederemos a enunciar y demostrar el siguiente teorema:

1.2.6 Teorema: Una función  $f$  acotada sobre el intervalo  $[a, b]$  es Riemann-integrable si y sólo si para cada  $\epsilon > 0$  existe una partición  $P$  del intervalo  $[a, b]$  tal que  $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$

Prueba:

Supóngase dada  $\epsilon > 0$  existe tal partición de  $[a, b]$  En vista del teorema 1.1.2 se tiene que  $L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$  para toda  $P_1$  y  $P_2$  particiones arbitrarias de  $[a, b]$  y en particular

$$\int_a^b f(x) dx = \sup L(f, P_1) \leq \inf U(f, P_2) = \int_a^b f(x) dx$$

por lo tanto

$$L(f, P) \leq \sup L(f, P_1) \leq \inf U(f, P_2) \leq U(f, P)$$

entonces

$$0 \leq \inf U(f, P_2) - \sup U(f, P_1) \leq U(f, P) - L(f, P) < \epsilon \quad \therefore$$

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \inf U(f, P_2) - \sup L(f, P_1) = 0$$



$$\therefore \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

por lo tanto  $f$  es Riemann-integrable.

Supongamos ahora que  $f$  es Riemann-integrable es decir

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

entonces existen particiones  $P_1$  y  $P_2$  tales que

$$U(f, P_2) - \int_a^b f(x) dx < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad \int_a^b f(x) dx - L(f, P_1) < \frac{\epsilon}{2}$$

y sumando estas dos últimas desigualdades se tiene que

$$U(f, P_2) - L(f, P_1) < \epsilon$$

Ahora formemos la partición  $P$  uniendo todos los puntos de  $P_1$  y  $P_2$  y claramente  $P$  es un refinamiento tanto de  $P_1$  como de  $P_2$ , en vista de los teoremas 1.2.3. y 1.2.2 se tiene que

$$L(f, P_1) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq U(f, P_2) \quad \text{entonces}$$

$$U(f, P) - L(f, P) \leq U(f, P_2) - L(f, P_1) < \epsilon$$

y con esto el teorema queda demostrado.

Las funciones Riemann-integrables tienen diversas propiedades que a continuación enunciaremos:

1.2.7 Sean  $f_1$  y  $f_2$  funciones Riemann-integrables sobre  $[a, b]$  entonces 1)  $f_1 + f_2$  es Riemann integrable y además

$$\int_a^b (f_1 + f_2)(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$$

ii) Si  $c$  es una constante entonces  $c f_1$  es Riemann-integrable y la

$$\int_a^b c f_1(x) dx = c \int_a^b f_1(x) dx$$

$$iii) \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^c f_1(x) dx + \int_c^b f_1(x) dx$$

si  $c \in [a, b]$

iv) si  $f_1 \leq f_2$  en  $[a, b]$  entonces

$$\int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b f_2(x) dx$$

v)  $|f_1|$  es Riemann-integrable en  $[a, b]$  y

$$\left| \int_a^b f_1(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_1(x)| dx$$

Prueba de i). Si  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$  son Riemann-integrables - existen particiones  $P_1$  y  $P_2$  tales que

$$U(f_1, P_1) - L(f_1, P_1) < \frac{\epsilon}{2}$$

$$U(f_2, P_2) - L(f_2, P_2) < \frac{\epsilon}{2}$$

en vista del teorema 1.2.6

Ahora sea  $P^* = P_1 \cup P_2$  i.e.  $P^*$  está formada por todos los puntos que pertenecen a  $P_1$  y a  $P_2$ , por lo tanto

$$L(f_1, P_1) \leq L(f_1, P^*) \leq U(f_1, P^*) \leq U(f_1, P_1)$$

en vista de 1,2,3. Por lo tanto

$$U(f_1, P^*) - L(f_1, P^*) \leq U(f_1, P_1) - L(f_1, P_1)$$

es decir  $U(f_1, P^*) - L(f_1, P^*)$  y de manera simi  
lar  $U(f_2, P^*) - L(f_2, P^*)$

Sumando estas desigualdades se obtiene:

$$U(f_1, P^*) + U(f_2, P^*) - L(f_1, P^*) - L(f_2, P^*) \quad 1.2.7.1$$

Ahora sea  $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  una  
partición arbitraria del intervalo  $[a, b]$ . Sean

$$\begin{aligned} m_k^i &= \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f_1(x) & M_k^i &= \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f_1(x) \\ m_k^{i'} &= \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f_2(x) & M_k^{i'} &= \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f_2(x) \\ m_k &= \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} (f_1 + f_2)(x) & M_k &= \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} (f_1 + f_2)(x) \end{aligned}$$

entonces se tiene que

$$m_k^i + m_k^{i'} \leq m_k \quad \text{y que} \quad M_k \leq M_k^i + M_k^{i'}$$

(ver la proposición 2 del apéndice 1).

$$\begin{aligned} U(f_1 + f_2, P) &= \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n (M_k^i + M_k^{i'}) \Delta x_k \\ &= \sum_{k=1}^n M_k^i \Delta x_k + \sum_{k=1}^n M_k^{i'} \Delta x_k + \sum_{k=1}^n \Delta x_k \\ &= U(f_1, P) + U(f_2, P) \quad \text{entonces} \end{aligned}$$

$$U(f_1 + f_2, P) \leq U(f_1, P) + U(f_2, P) \quad \text{para toda } P \quad 1.2.7.2$$

$$\begin{aligned} L(f_1, P) + L(f_2, P) &= \sum_{k=1}^n m_k^i \Delta x_k + \sum_{k=1}^n m_k^{i'} \Delta x_k = \sum_{k=1}^n (m_k^i + m_k^{i'}) \Delta x_k \\ &= \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = L(f_1 + f_2, P) \end{aligned}$$

entonces  $L(f_1, P) + L(f_2, P) \leq L(f_1 + f_2, P)$  para toda  $P$  1.2.7.3

Debido al teorema 1.2.2

$$L(f_1, P) + L(f_2, P) \leq L(f_1 + f_2, P) \leq U(f_1 + f_2, P) \leq U(f_1, P) + U(f_2, P)$$

entonces

$$U(f_1 + f_2, P) - L(f_1 + f_2, P) \leq U(f_1, P) + U(f_2, P) - L(f_1, P) - L(f_2, P)$$

para toda  $P$ . Por lo tanto, en vista de 1.2.7.1

$$U(f_1 + f_2, P^*) - L(f_1 + f_2, P^*) \leq U(f_1, P^*) + U(f_2, P^*) - L(f_1, P^*) - L(f_2, P^*) \leq \epsilon$$

entonces  $(f_1 + f_2)(x)$  es Riemann integrable debido al teorema 1.2.6

Ahora por otro lado debido a 1.2.7.2 y 1.2.7.3 y al teorema 1.2.2 se tiene la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} L(f_1, P) + L(f_2, P) &\leq L(f_1 + f_2, P) \leq \int_a^b (f_1 + f_2)(x) dx \leq U(f_1 + f_2, P) \\ &\leq U(f_1, P) + U(f_2, P) \quad \text{para toda } P \end{aligned}$$

Sean  $P'$  y  $P''$  particiones arbitrarias de  $[a, b]$  y sea  $P = P' \cup P''$ , ya que  $P$  es refinamiento tanto de  $P'$  como de  $P''$  el teorema 1.2.3 implica que

$$\begin{aligned} L(f_1, P') + L(f_2, P'') &\leq L(f_1, P) + L(f_2, P) \leq L(f_1 + f_2, P) \\ &\leq \int_a^b (f_1 + f_2)(x) dx \leq U(f_1 + f_2, P) \leq U(f_1, P) + U(f_2, P) \end{aligned}$$

$$\leq U(f_1, P') + U(f_2, P'') \quad \text{i.e.}$$

$$L(f_1, P') + L(f_2, P'') \leq \int_a^b (f_1 + f_2)(x) dx \leq U(f_1, P') + U(f_2, P'')$$

en particular se tiene tomando supremos e ínfimos que:

$$\begin{aligned} \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx &\leq \int_a^b (f_1+f_2)(x) dx \\ &\leq \int_a^b \overline{f_1}(x) dx + \int_a^b \overline{f_2}(x) dx \end{aligned}$$

y como  $f_1$  y  $f_2$  son Riemann-integrables se tiene que cada uno de los extremos de la desigualdad coinciden y por lo tanto

$$\int_a^b (f_1+f_2)(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$$

con lo cual el resultado queda demostrado.

Prueba de 11) Supongamos que  $c > 0$  y sea  $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  una partición arbitraria del intervalo  $[a, b]$ . Sean  $m_k$  y  $M_k$  como se han venido definiendo. Entonces

$$\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} c f_1(x) = c M_k \quad \text{e} \quad \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} c f_1(x) = c m_k$$

(ver teorema 3, apéndice 1).

Entonces,

$$U(c f_1, P) = \sum_{k=1}^n c M_k \Delta x_k = c U(f_1, P) \dots 1.2.7.4$$

$$L(c f_1, P) = \sum_{k=1}^n c m_k \Delta x_k = c L(f_1, P) \dots 1.2.7.5$$

Como  $f_1$  es Riemann-integrable, en vista del teorema 1.2.6 se tiene que existe  $P^*$  tal que

$$U(f_1, P^*) - L(f_1, P^*) < \frac{\epsilon}{c}$$

entonces  $c U(f_1, P^*) - c L(f_1, P^*) < \epsilon$  de donde

$$U(cf_1, P^*) - L(cf_1, P^*) = c U(f_1, P^*) - c L(f_1, P^*) < \epsilon$$

por lo tanto nuevamente en vista del teorema 1.2.6  $cf_1$  es Riemann-integrable.

Además se sabe que

$$L(cf_1, P^*) \leq \int_a^b cf_1(x) dx \leq U(cf_1, P^*) \quad 1.2.7.6$$

y que  $L(f_1, P^*) \leq \int_a^b f_1(x) dx \leq U(f_1, P^*)$

entonces  $c L(f_1, P^*) \leq c \int_a^b f_1(x) dx \leq c U(f_1, P^*) \quad 1.2.7.7$

como por 1.2.7.4 y 1.2.7.5

$$L(cf_1, P^*) = c L(f_1, P^*)$$

y  $U(cf_1, P^*) = c U(f_1, P^*)$

se tendrá que

$$c L(f_1, P^*) \leq \int_a^b cf_1(x) dx \leq c \int_a^b f_1(x) dx \leq c U(f_1, P^*) \quad 1.2.7.8$$

en cuyo caso

$$c \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b c f_1(x) dx \leq c U(f_1, P^*) - c L(f_1, P^*) < \epsilon$$

y por lo tanto  $c \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b c f_1(x) dx$

o bien



$$c L(f_1, P^*) \leq c \int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b c f_1(x) dx \leq c U(f_1, P^*) \quad 1.2.7.9$$

en cuyo caso

$$\int_a^b c f_1(x) dx - c \int_a^b f_1(x) dx \leq c U(f_1, P^*) - c L(f_1, P^*) < \epsilon$$

y por tanto 
$$\int_a^b c f_1(x) dx = c \int_a^b f_1(x) dx$$

Tanto en el caso 1.2.7.8. como en el 1.2.7.9 se tiene que

$$\int_a^b c f_1(x) dx = c \int_a^b f_1(x) dx$$

Cuando  $c < 0$  se tiene que si

$$m_k \leq f_1(x) \leq M_k \quad \text{para } x \in [x_{k-1}, x_k]$$

entonces 
$$c M_k \leq c f_1(x) \leq c m_k \quad \text{para } x \in [x_{k-1}, x_k]$$

y el tratamiento es igual sólo que ahora

$$c M_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} c f_1(x) \quad \text{y} \quad c m_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} c f_1(x)$$

por lo tanto

$$U(c f_1, P) = c L(f_1, P)$$

$$L(c f_1, P) = c U(f_1, P)$$

1.2.7.10

entonces

$$U(c f_1, P^*) - L(c f_1, P^*) = c L(f_1, P^*) - c U(f_1, P^*) < \epsilon$$

∴  $c f_1$  es Riemann integrable. Además



$$c U(f_1, P^*) \leq c \int_a^b f_1(x) dx \leq c L(f_1, P^*)$$

$$y \quad L(cf_1, P^*) \leq \int_a^b cf_1(x) dx \leq c U(f_1, P^*)$$

y por 1.2.7.10 tendremos que

$$c U(f_1, P') \leq c \int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b cf_1(x) dx \leq c L(f_1, P')$$

y entonces

$$\int_a^b cf_1(x) dx - c \int_a^b f_1(x) dx = c L(f_1, P') - c U(f_1, P') < \epsilon$$

o bien

$$c U(f_1, P') \leq \int_a^b c f_1(x) dx \leq \int_a^b c f_1(x) dx \leq c L(f_1, P')$$

y entonces

$$c \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b c f_1(x) dx \leq c L(f_1, P') - c U(f_1, P') < \epsilon$$

$$\dots \quad c \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b c f_1(x) dx \quad \text{cuando } c < 0$$

y por lo tanto

$$c \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b c f_1(x) dx \quad \text{cuando } c \neq 0$$

La prueba de la última igualdad es trivial cuando  $c = 0$ .

Antes de probar iii) probaremos un lema:

**Lema:** Si  $f$  es Riemann-integrable sobre el intervalo  $[A, B]$  y el intervalo  $[a, b] \subset [A, B]$  entonces  $f$  es Riemann-integrable sobre  $[a, b]$ .

**Prueba:** Ya que  $f$  es integrable sobre  $[A, B]$  para cada  $\epsilon > 0$  existe una partición  $P$  de  $[A, B]$  tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$$

Sea  $P_1$  la partición que se obtuvo al agregar a  $P$  los puntos  $a, b$ , entonces  $P_1$  es un refinamiento de  $P$ , y por tanto

$$U(f, P_1) - L(f, P_1) < \epsilon$$

Sea  $P'_1 = P_1 \cap [a, b]$  i.e. si  $x_r, x_{r+1}, \dots, x_{r+\epsilon}$  son puntos de  $P_1$  en  $[a, b]$  entonces  $P'_1 = \{a = x_r, x_{r+1}, \dots, x_{r+\epsilon} = b\}$

Ahora

$$\begin{aligned} U(f, P'_1) - L(f, P'_1) &= \sum_{k=r+1}^{r+\epsilon} (M_k - m_k) \Delta x_k \\ &= \sum_{k=1}^{\epsilon} (M_k - m_k) \Delta x_k \\ &= U(f, P_1) - L(f, P_1) < \epsilon \end{aligned}$$

$\therefore f$  es Riemann-integrable sobre  $[a, b]$ .

**Prueba de iii)**

Sea  $P_1$  una partición de  $[a, c]$  y  $P_2$  una partición de  $[c, b]$ , entonces  $P = P_1 \cup P_2$  es una partición del intervalo  $[a, b]$ . Por lo tanto

$$L(f_1, P) = L(f_1, P_1) + L(f_1, P_2)$$

pero

$$L(f_1, P) = L(f_1, P_1) + L(f_1, P_2) \quad \int_a^c f_1(x) dx + \int_c^b f_1(x) dx$$

por lo tanto, tomando el supremo sobre todas las posibles particiones se obtiene que:

$$\int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^c f_1(x) dx + \int_c^b f_1(x) dx$$

también

$$L(f_1, P_1) + L(f_1, P_2) = L(f_1, P) \leq \int_a^b f_1(x) dx$$

lo cual implica

$$L(f_1, P_1) + L(f_1, P_2) \leq \int_a^b f_1(x) dx$$

luego entonces tomando supremos queda:

$$\int_a^c f_1(x) dx + \int_c^b f_1(x) dx \leq \int_a^b f_1(x) dx$$

$$\therefore \int_a^c f_1(x) dx + \int_c^b f_1(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx$$

como  $f_1$  es Riemann-integrable en  $[a, b]$  y debido al lema  $f$  - es Riemann-integrable en  $[a, c]$  y  $[c, b]$ , se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_a^c f_1(x) dx + \int_c^b f_1(x) dx &= \int_a^c f_1(x) dx + \int_c^b f_1(x) dx \\ &= \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx \end{aligned}$$

Prueba de iv). Puesto que  $f_1(x) \leq f_2(x)$  en  $[a, b]$  se tiene que  $h(x) = f_1(x) - f_2(x) \leq 0$ .

Sea  $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$  una partición arbitraria del intervalo  $[a, b]$ . Sea  $M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} h(x)$ , (nótese que  $M_k \leq 0$ , para toda  $k$ ), entonces

$$U(h, P) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \leq 0$$

Por lo tanto

$$\int_a^b h(x) dx = \inf U(h, P) \leq 0$$

pero como  $f_1$  y  $f_2$  son Riemann-integrables, por i) e ii)  $h(x)$  es Riemann-integrable lo cual implica que

$$\int_a^b h(x) dx = \int_a^b h(x) dx \leq 0$$

Combinando esto nuevamente con i) e ii) se obtiene que

$$\int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b (f_1 - f_2)(x) dx = \int_a^b h(x) dx \leq 0$$

y por lo tanto

$$\int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b f_2(x) dx$$

Prueba de v) Defínanse  $f_1^+$  y  $f_1^-$  como sigue:

$$f_1^+(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } f_1(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f_1(x) < 0 \end{cases}$$

$$f_1^-(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } f_1(x) < 0 \\ 0 & \text{si } f_1(x) \geq 0 \end{cases}$$

entonces  $f_1 = f_1^+ + f_1^-$  y  $|f_1| = f_1^+ - f_1^-$ .

Primero demostraremos que si  $f$  es Riemann-integrable sobre  $[a, b]$  entonces  $f$  es Riemann integrable sobre  $[a, b]$ .

$$\begin{aligned} \text{Sean } M_k^+ &= \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f_1(x) & m_k^+ &= \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f_1(x) \\ M_k^- &= \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f_2(x) & m_k^- &= \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f_2(x) \\ M_k &= \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) & m_k &= \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \end{aligned}$$

ya que  $f_1^+(x) \geq 0$  y  $f_1^+(x) \geq f_1(x)$

$$M_k^+ = M_k > 0 \quad \vee \quad m_k^+ \geq m_k$$

$$\text{o} \quad M_k^+ = 0 \quad \vee \quad m_k = 0$$

$$\text{entonces} \quad M_k^+ - m_k^+ \leq M_k - m_k$$

por lo tanto

$$U(f_1^+, P) - L(f_1^+, P) \leq U(f, P) - L(f, P)$$

y por hipótesis se puede concluir que dada  $\epsilon > 0$  existe  $P^\epsilon$  tal que

$$U(f, P^\epsilon) - L(f, P^\epsilon) \leq U(f, P^\epsilon) - L(f, P^\epsilon) < \epsilon$$

$\therefore f_1^+(x)$  es Riemann-integrable sobre  $[a, b]$  de acuerdo con el teorema 1.2.6.

Como  $f_1^-(x) = f_1(x) - f_1^+(x)$  se tiene que  $f_1^-(x)$  es también Riemann integrable sobre  $[a, b]$  en vista de i) y ii) y como consecuencia  $|f_1| = f_1^+ - f_1^-$  también es Riemann integrable en  $[a, b]$ .

Por otra parte se tiene que  $-f_1(x) \leq |f_1(x)|$  y que  $f_1(x) \leq |f_1(x)|$  y en virtud de ii) y iv) obtenemos que

$$- \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b -f_1(x) dx \leq \int_a^b |f_1(x)| dx$$

y que

$$\int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b |f_1(x)| dx$$

entonces

$$\left| \int_a^b f_1(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_1(x)| dx$$

1.3 El método de exhaustación y ejemplos de funciones que no son Riemann integrables.

1.3.1 El método de exhaustación.

Hemos visto en secciones anteriores que dada  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  Riemann-integrable en el intervalo  $[a, b]$ , existe una partición  $P$  del intervalo  $[a, b]$  tal que  $L(f, P) \leq \int_a^b f(x) dx \leq U(f, P)$

con  $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$ , esto da idea de que de alguna manera se pueda ir aproximando  $L(f, P)$  (o bien  $U(f, P)$ ) al verdadero valor de

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{hasta alcanzarlo completamente,}$$

variando  $P$ . Para variar  $P$ , la consideraremos como una función de  $n$  y la denotaremos como  $P_n$ , después procederemos a tomar el límite de  $P_n$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y mediante este proceso sabremos el verdadero valor de

$$\int_a^b f(x) dx. \quad \text{Desde luego este no es}$$

un método general pues tiene muchas limitaciones las cuales aparecerán en el desarrollo algebraico del método. En esta sección no intentaremos dar ninguna justificación a este método, sólo lo exhibiremos mediante ejemplos. Sin embargo la justificación será consecuencia de uno de los teoremas de la sección 1.4. Teóricamente hablando, este método se podrá aplicar a todas las fun-



ciones que sean continuas en el intervalo  $[a, b]$  o al menos que sean continuas a trozos\*, en el intervalo  $[a, b]$ ; hacemos hincapié en que la justificación será consecuencia de uno de los teoremas de la sección 1.4, y que en la práctica nos toparemos con problemas de tipo algebraico engorrosos. A continuación daremos una definición que nos será útil y que utilizaremos en la sección 1.4 al dar la justificación a este método.

1.3.1.1 Definición. Considérese el intervalo  $[a, b]$  y tomemos una partición  $P$  de  $[a, b]$   $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ . El símbolo  $|P|$  lo llamaremos norma de la partición  $P$  y lo definiremos como

$$|P| = \max_{k=1,2,\dots,n} (x_k - x_{k-1}).$$

El método de exhaustación consiste en los cuatro siguientes pasos:

Sea  $f: R \rightarrow R$  una función continua sobre el intervalo  $[a, b]$ .

1) Se toma una partición  $P_n$  del intervalo  $[a, b]$  tal que  $|P_n| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$

\* Continuas a trozos significa que sean continuas casi en todos los puntos del intervalo  $[a, b]$ , i.e. que sólo exista un número finito de puntos  $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_m$   $\xi_k \in [a, b]$  donde la función sea discontinua y continua en todos los demás puntos de  $[a, b]$ . En este caso se puede definir una partición  $P_0 = \{a = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_m = b\}$  y aplicar el método a cada subintervalo  $[\xi_k, \xi_{k+1}]$   $k = 0, 1, \dots, m-1, m$ , obteniendo así el conjunto:

$$\left\{ \int_{a=\xi_0}^{\xi_1} f(x)dx, \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)dx, \dots, \int_{\xi_{m-1}}^{\xi_m=b} f(x)dx \right\}$$

y por 1.2.7 
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^m \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} f(x)dx$$



ii) Si  $P_n = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  sea  $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$   
 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ , consideremos  $f(t_k)$  y  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

iii) Calculemos la cantidad  $\sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k$

iv) Calculemos  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k$  y este último será el valor de  $\int_a^b f(x) dx$

Comentarios: Se mencionó anteriormente que la idea era aproximar  $U(f, P)$  o bien  $L(f, P)$ . Nótese que el método aproxima

la suma  $\sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k$ , lo cual nos da una mejor aproxima-

ción ya que si  $m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$  y  $M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$  se tiene

$$L(f, P_n) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = U(f, P_n)$$

i.e. se tendrá que

$$L(f, P_n) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k \leq U(f, P_n)$$

o bien

$$L(f, P_n) \leq \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k \leq \int_a^b f(x) dx \leq U(f, P_n)$$

estas dos desigualdades implican que.

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k \right| \leq U(f, P_n) - L(f, P_n)$$

lo cual quiere decir que el error de aproximación será a lo más la diferencia  $U(f, P_n) - L(f, P_n)$ . Pedimos que para aplicar el método la función  $f$  sea continua en el intervalo  $[a, b]$

ya que en este caso es cuando es más fácil aplicar este método y además es el caso en que se justificará en la sección 1.4.- No se pide que la función  $f$  sea Riemann-integrable pues toda función continua en  $[a, b]$  será Riemann-integrable en  $[a, b]$ , esta última afirmación también se demuestra en la sección 1.4.

Ahora procedemos a aplicar el método de exhaustión a las funciones  $f(x) = x$  y  $f(x) = x^2$ . Para calcular  $\int_a^b f(x) dx$  primero hay que dividir el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  partes, i.e. tomemos la partición de manera que la longitud de los sub-intervalos inducidos por dicha partición sean iguales, a saber:  $P_n = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  donde  $x_k = a + k \frac{(b-a)}{n}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Nótese que como  $\|P_n\| = \frac{b-a}{n} \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$ .

Calculemos primero para  $f(x) = x$ . Tomemos un  $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$  digamos  $t_k = x_k$  y calculemos la suma que sigue:  $\sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k$ . Esto es:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k &= \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \frac{(b-a)}{n} = \sum_{k=1}^n \left(a + k \frac{(b-a)}{n}\right) \frac{(b-a)}{n} \\ &= \sum_{k=1}^n a \frac{(b-a)}{n} + k \frac{(b-a)^2}{n^2} = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k \\ &= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \\ &= a(b-a) + \frac{(n+1)(b-a)^2}{2n} \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k = a(b-a) + \frac{(n+1)(b-a)^2}{2n}$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_a^b x \, dx &= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = ab - a^2 + b^2/2 - ab + a^2/2 \\ &= \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

Ahora calculemos para  $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k &= \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{(b-a)}{n}\right) \Delta x_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(a + k \frac{b-a}{n}\right)^2 \frac{(b-a)}{n} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(a^2 + 2ak \frac{b-a}{n} + k^2 \frac{(b-a)^2}{n^2}\right) \frac{(b-a)}{n} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(a^2 \frac{(b-a)}{n} + 2ak \frac{(b-a)^2}{n^2} + k^2 \frac{(b-a)^3}{n^3}\right) \\ &= a^2(b-a) + 2a \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k + \frac{(b-a)^3}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= a^2(b-a) + 2a(b-a)^2 \frac{n(n+1)}{2n^2} + (b-a)^3 \frac{n(2n+1)(n+1)}{6n^3} \\ &= a^2(b-a) + 2a(b-a)^2 \frac{(n+1)}{2n} + \frac{(b-a)^3}{6} \cdot \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} \\ &= a^2(b-a) + a(b-a)^2 \frac{n+1}{n} + \frac{(b-a)^3}{6} (2 + 3/n + 1/n^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k &= a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \frac{2(b-a)^3}{6} \\ &= \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \end{aligned}$$

por lo tanto  $\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$

Hemos visto que para este par de funciones aplicar el método es muy laborioso, pero existen otras funciones para las cuales es prácticamente imposible, por ejemplo:  $f(x) = \exp x$ . En este caso

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k &= \sum_{k=1}^n \exp \left( a + k \frac{b-a}{n} \right) \cdot \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \exp a \sum_{k=1}^n \exp k \frac{b-a}{n} \end{aligned}$$

Nótese que calcular la última suma, en términos de  $n$ , es difícil, lo cual hace inoperante el método.

### 1.3.2 Ejemplos de funciones que no son Riemann-integrables.

Existen muchas funciones para las cuales

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx \neq \underline{\int_a^b} f(x) dx$$

De este tipo de funciones no nos ocuparemos ya que necesitan una teoría mucho más general de integración, sólo nos ocuparemos de mostrar que existen funciones para las cuales esto ocurre.

Como ejemplo de una función que no es Riemann-integrable citaremos la función de Dirichlet que se define como:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{I} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

donde  $I$  es el conjunto de los números irracionales y  $Q$  es el conjunto de los números racionales.

Tomemos el intervalo  $[0, 1]$  y sea  $P = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1\}$  una partición arbitraria del intervalo  $[0, 1]$ , si definimos a  $m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$  y  $M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$  se ve que  $m_k = 0$  y  $M_k = 1$  puesto que entre dos números reales siempre existe un número racional y un irracional, (ver teorema 4 Apéndice 1), por lo tanto

$$\begin{aligned} U(f, P) &= \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \\ &= \sum_{k=1}^n x_k - x_{k-1} = 1 \end{aligned}$$

$$y \quad L(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 0 \cdot \Delta x_k = 0$$

por lo tanto  $U(f, P) - L(f, P) = 1$  para toda partición de  $[0, 1]$  lo cual implica que no es Riemann-integrable ya que si fuese, la diferencia  $U(f, P) - L(f, P)$  podría hacerse tan pequeña como se quiera en vista del teorema 1.2.6

#### 1.4 Continuidad e Integragilidad.

En esta sección veremos las relaciones que existen entre las funciones continuas y las funciones Riemann-integrables, pero primero que nada recordemos la definición de continuidad:

1.4.1 Definición: Una función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es continua en un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  si dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x_0) - f(x)| < \epsilon$  siempre que  $|x_0 - x| < \delta$

1.4.2 Definición: Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que  $f$  es continua en  $D \subset \mathbb{R}$  si  $f$  es continua en todo punto  $x \in D$ .

**Observación a la definición 1.4.2**  $D$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$ ,  $D$  puede ser, por ejemplo, un intervalo de la forma  $[a, b]$  o cualquier subconjunto de  $\mathbb{R}$ .

Ahora antes de establecer cualquier relación entre funciones continuas y funciones Riemann-Integrables daremos una tercera definición que necesitaremos para establecer el teorema más importante que relaciona funciones continuas con funciones Riemann-integrables.

**1.4.3 Definición:** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que  $f$  es uniformemente continua en  $D \subset \mathbb{R}$  si dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$  siempre que  $|x - y| < \delta$  con  $x, y \in D$ .

**Nota:** Para demostrar el teorema siguiente se necesitan algunos teoremas sobre funciones continuas, en el punto 5 del apéndice 1 se enuncian estos teoremas y se dan las referencias de sus demostraciones.

**1.4.4 Teorema** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida sobre el intervalo  $[a, b]$ , si  $f$  es continua sobre  $[a, b]$  entonces  $f$  es Riemann-integrable sobre  $[a, b]$ .

**Prueba:** Puesto que  $f$  es continua en el intervalo  $[a, b]$ ,  $f$  está acotada sobre  $[a, b]$  y  $f$  alcanza un valor máximo y un valor mínimo sobre cualquier subintervalo de  $[a, b]$ , - esto es, dada una partición  $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  - del intervalo  $[a, b]$  existen  $x'_k \in [x_{k-1}, x_k]$  y  $x''_k \in [x_{k-1}, x_k]$  tales que  $f(x'_k) = m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$  y  $f(x''_k) = M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$ .

Por otra parte

$$0 \leq U(f, P) - L(f, P) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^n (f(x''_k) - f(x'_k))(x_k - x_{k-1}).$$



Ya que  $f$  es continua sobre  $[a, b]$ ,  $f$  es uniformemente continua sobre  $[a, b]$  (ver punto 5 apéndice 1), esto implica que para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $x, y \in [a, b]$  y  $|x - y| < \delta$  implica que  $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$ .

Ahora seleccionemos una partición  $P$  tal que

$$|P| = \max_{k=1,2,\dots,n} (x_k - x_{k-1}) < \delta \text{ entonces}$$

$$|f(x''_k) - f(x'_k)| = f(x''_k) - f(x'_k) < \frac{\epsilon}{b-a}$$

para toda  $k = 1, 2, \dots, n$ .

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &= \sum_{k=1}^n (f(x''_k) - f(x'_k))(x_k - x_{k-1}) < \sum_{k=1}^n \frac{\epsilon(x_k - x_{k-1})}{b-a} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

$\therefore f$  es Riemann-integrable sobre  $[a, b]$ .

Como se ve este teorema asegura que toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es una función Riemann-integrable sobre dicho intervalo, sin embargo en secciones anteriores vimos funciones que no son continuas y apesar de ello son Riemann-integrables, como lo son las funciones escalonadas y con estas funciones se ve que el inverso de este teorema no es cierto.

Ahora procederemos a enunciar y demostrar un teorema que justifica el método de exhaustación de la pasada sección 1.3 y además es la base y justificación de tres de los cuatro métodos de la sección 2.2 del capítulo II. Por lo tanto este teorema jugará un papel bastante importante en lo que es integración numérica e indirectamente será usado en mu-



chos métodos numéricos por ser la base teórica que los justifica.

1.4.5 Teorema: Sea  $f$  una función continua sobre el intervalo cerrado  $[a, b]$  entonces para cada  $\epsilon > 0$  existirá  $\delta > 0$  tal que:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \epsilon$$

siempre que

$$|P| = \text{Max}(x_k - x_{k-1}) < \delta$$

donde  $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  y  $\bar{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Prueba: Para cualquier partición del intervalo  $[a, b]$  si  $\bar{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$  se tiene que

$$m_k \leq f(\bar{x}_k) \leq M_k$$

para toda  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ , entonces se tiene

$$m_k(x_k - x_{k-1}) \leq f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}) \leq M_k(x_k - x_{k-1})$$

sumando sobre todas las  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  se obtiene que

$$L(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) = U(f, P)$$

$$\text{i.e. } L(f, P) \leq \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}) \leq U(f, P)$$

además

$$L(f, P) \leq \int_a^b f(x) dx \leq U(f, P)$$

esto implica que

$$\int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}) \leq U(f, P) - L(f, P)$$

y que 
$$\sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_a^b f(x) dx \leq U(f, P) - L(f, P)$$

esto implica que

$$0 \leq \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}) \right| = U(f, P) - L(f, P)$$

ahora, si  $|P| = \max(x_k - x_{k-1}) < \delta$  por el teorema anterior se tiene que

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$$

y el teorema 1.4.5 queda demostrado.

El teorema 1.4.5 asegura que podemos acercarnos tanto al verdadero valor de  $\int_a^b f(x) dx$  tanto como queramos mediante la

$$\sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}) \quad \text{con tal de que la longitud de los sub-$$

intervalos inducidos por la partición sea suficientemente pequeña; aquí  $\bar{x}_k$  es un punto arbitrario del subintervalo  $[x_{k-1}, x_k]$ .

Como se mencionó anteriormente el objetivo de esta sección es por un lado mostrar una relación importante entre las funciones continuas y las funciones Riemann-integrables, lo cual se hizo con el Teorema 1.4.4 y por otro lado dar una justificación al método de exhaustación, así como a los métodos aproximativos del capítulo II.

Aún cuando el objetivo de esta tesis no es precisa-

mente la teoría de la Integral de Riemann, sino la Integración Numérica y sus aplicaciones, mencionaremos dos teoremas más que, no son importantes desde el punto de vista numérico, pero sin embargo, son útiles para desarrollar otras cuestiones de tipo teórico y además representan un importante descubrimiento de las funciones continuas en relación con la integración de Riemann. Estos teoremas son el Teorema del Valor Medio para integrales y el Teorema del Valor Medio Ponderado para integrales, ambos están basados en el Teorema del Valor Intermedio para funciones continuas del punto 5 apéndice 1.

#### 1.4.6 Teorema del Valor Medio para Integrales.

Si  $f$  es una función continua en el intervalo  $[a, b]$ , para un cierto  $c \in [a, b]$  se cumple que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) (b - a)$$

Prueba:

$$\text{Sea } m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{y} \quad M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$$

$$\text{entonces} \quad m \leq f(x) \leq M \quad \text{para todo } x \in [a, b]$$

entonces

$$m(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a)$$

lo cual implica que

$$m \leq \int_a^b f(x) dx / (b-a) \leq M$$

por lo tanto, por el teorema del valor intermedio para funcio

nes continuas, como  $\int_a^b f(x) dx / (b-a)$  es una cantidad entre  $m$  y  $M$ ; existe  $c$  elemento de  $[a, b]$  tal que

$$f(c) = \int_a^b f(x) dx / (b-a)$$

i.e. existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$f(c) (b-a) = \int_a^b f(x) dx$$

y el teorema queda probado.

#### 1.4.7. Teorema del Valor Medio Ponderado para Integrales.

Supongamos que  $f$  y  $g$  son funciones continuas sobre el intervalo  $[a, b]$ , supóngase que  $g$  no cambia de signo en  $[a, b]$  entonces para un cierto  $c \in [a, b]$  se tiene que -

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$$

Prueba: No cambiando de signo nunca en  $[a, b]$ ,  $g$  es siempre no negativa o no positiva en  $[a, b]$ . Sea  $m$  y  $M$  como en el teorema 1.4.7 y supóngase que  $g(x) \geq 0$  para toda  $x \in [a, b]$  entonces  $m g(x) \leq f(x) g(x) \leq M g(x)$  obteniendo

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$$

Si  $\int_a^b g(x) dx = 0$ , por se  $g$  continua y no negativa,

$g(x) \equiv 0$  entonces  $\int_a^b f(x) g(x) dx = 0$  y se cumple el

teorema para cualquier  $c \in [a, b]$ ; pero si  $\int_a^b g(x) dx > 0$

entonces se obtiene que

$$m \leq \int_a^b f(x) g(x) dx / \int_a^b g(x) dx \leq M$$

Nuevamente por el teorema del valor intermedio para funciones continuas, existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$f(c) = \int_a^b f(x) g(x) dx / \int_a^b g(x) dx$$

i.e. 
$$f(c) \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$$

Nótese que el Teorema del valor Medio para integrales es un caso particular del Teorema del Valor Medio Ponderado para Integrales, cuando la función  $g(x) = 1$ . Es indispensable pedir la continuidad de  $f(x)$  en ambos teoremas. Para concluir esta sección, en seguida daremos un ejemplo en donde se ve que si  $f(x)$  no es continua los teoremas no se cumplen.

1.4.8 Ejemplo: Sea  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1) \\ 2 & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$

Nótese que  $f$  está definida sobre  $[0, 2]$  y  $f$  es discontinua en  $x = 1$ , entonces

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 1 \cdot dx + \int_1^2 2 \cdot dx = 1 + 2 = 3$$

pero para ningún  $c \in [0, 2]$  se cumple que  $f(c)(2 - 0) = 3$  ya que para que se cumpliera  $f(c)$  debería ser  $f(c) = 3/2$  lo cual nunca ocurre y pone de manifiesto que es esencial pedir la continuidad en el teorema 1.4.6

## 1.5 Derivabilidad e Integrabilidad

## 1.5.1 Integral Indefinida.

Aquí introduciremos un nuevo concepto sobre la integral de Riemann; hasta el momento hemos venido trabajando con la integral  $\int_a^b f(x) dx$  la cual representa el área limitada por la gráfica de  $f$  y el eje  $x$  donde  $f$  es una función Riemann-integrable sobre  $[a, b]$ . La integral indefinida será una función  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  que nos da el valor del área limitada por la gráfica de  $f$  y el eje  $X$ , sólo que ahora sobre el intervalo  $[a, x]$  en lugar de sobre el intervalo  $[a, b]$ , donde  $x$  es cualquier número del intervalo  $[a, b]$ , puesto que  $[a, x] \subset [a, b]$  para toda  $x \in [a, b]$  y como  $f$  es Riemann integrable sobre  $[a, b]$  en vista del lema de la sección 1.2  $f$  es Riemann-integrable sobre  $[a, x]$ . A continuación daremos la definición formal de la integral indefinida y la definición de derivabilidad de funciones para que con esto podamos establecer los dos teoremas fundamentales del cálculo.

1.5.2. Definición: Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función Riemann-integrable sobre el intervalo  $[a, b]$ ; se define la integral indefinida de la función  $f$  como

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{donde } x \in [a, b]$$

1.5.3 Definición: Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$  sea  $x_0 \in D$  y

$$\phi(t) = \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$$

si  $\lim_{t \rightarrow x_0} \phi(t)$  existe, entonces se dice que  $f$  es derivable



en el punto  $x_0$  y la derivada de  $f$  en el punto  $x_0$  se denota por  $f'(x_0)$  y  $f'(x_0) = \lim_{t \rightarrow x_0} \phi(t)$ . Si  $f$  es derivable en todo punto de  $D$  entonces se dice que  $f$  es derivable en  $D$  y la derivada se denota por  $f'(x)$  donde  $x \in D$ .

1.5.4 Teorema. (Primer teorema fundamental del cálculo). -

Sea  $f$  una función Riemann-integrable sobre  $[a, b]$  entonces  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  es una función continua sobre  $[a, b]$ : más aún, si  $f$  es continua en un punto  $x_0$  de  $[a, b]$ , entonces  $F(x)$  es derivable en  $x_0$  y  $F'(x_0) = f(x_0)$ .

Prueba: ya que  $f$  es Riemann-integrable sobre  $[a, b]$  entonces  $f$  está acotada en  $[a, b]$  i.e., existe  $M$  tal que --  
 $|f(t)| \leq M$  para toda  $t \in [a, b]$ . Si  $a \leq x < y \leq b$

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq M(y - x)$$

entonces dada  $\epsilon > 0$  para  $\delta = \epsilon/M$ ,  $|F(y) - F(x)| < \epsilon$  si  $|y - x| < \delta$ , por lo tanto  $F(x)$  es continua y uniformemente continua en  $[a, b]$ . (Ver punto 5 apéndice 1).

Ahora si  $f$  es continua en  $x_0$ , dada  $\epsilon > 0$  tómese  $\delta > 0$  tal que  $|f(t) - f(x_0)| < \epsilon$  siempre que  $|t - x_0| < \delta$  y  $a \leq t \leq b$ . Como  $x_0 - \delta < t < x_0 + \delta$  se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(t) - F(x_0)}{t - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{t - x_0} \cdot \int_{x_0}^t (f(u) - f(x_0)) du \right| \\ &< \left| \frac{1}{t - x_0} \int_{x_0}^t \epsilon du \right| = \epsilon \end{aligned}$$

por lo tanto

$$F'(x_0) = \lim_{t \rightarrow x_0} \frac{F(t) - F(x_0)}{t - x_0} = f(x_0)$$



Por el teorema anterior se puede decir que la operación inversa a la derivación es la integración indefinida y se puede asegurar que para calcular  $\int_a^x f(t) dt$ ,  $f$  continua en  $[a, b]$ , basta encontrar una función  $F(x)$  derivable en  $[a, b]$ , tal que  $F'(x) = f(x)$  para toda  $x$  en  $[a, b]$ . Este teorema muestra la relación más importante entre derivación e integración y fundamenta los métodos teóricos de integración, entre otros los métodos de integración por partes y por substitución, que nos dan los próximos teoremas 1.5.7 y 1.5.8, pero antes de ver estos métodos enunciaremos y demostraremos otro teorema muy importante que nos dice como calcular

$\int_a^b f(x) dx$  en base a  $F(x)$ , donde  $F(x)$  es una función derivable sobre  $[a, b]$ .

1.5.5 Teorema (Segundo teorema fundamental del cálculo). -

Si  $f$  es Riemann-integrable sobre  $[a, b]$  y si existe una función derivable  $F$  sobre  $[a, b]$  tal que  $F'(x) = f(x)$  para  $x \in [a, b]$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Prueba: dada  $\epsilon > 0$  escójase una partición  $P$  del intervalo  $[a, b]$ ,  $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$$

Entonces por el teorema del valor medio para derivadas, (ver punto 6 apéndice 1), existen puntos  $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$  tales que

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(t_k) (x_k - x_{k-1})$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, n$$

sumando sobre toda  $k$  se obtiene que

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n f(t_k) (x_k - x_{k-1})$$

ya que

$$L(f, P) \leq \sum_{k=1}^n f(t_k) (x_k - x_{k-1}) \leq U(f, P)$$

$$y \quad L(f, P) \leq \int_a^b f(x) dx \leq U(f, P)$$

entonces

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \sum_{k=1}^n f(t_k) (x_k - x_{k-1}) - \int_a^b f(x) dx \right|$$

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$$

por lo tanto  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .

Como se mencionó el problema de calcular  $\int_a^b f(x) dx$

es tratar de encontrar una función  $F(x)$  derivable en  $[a, b]$  - tal que  $F'(x) = f(x)$  en  $[a, b]$  y evaluar  $F$  en los extremos del intervalo  $[a, b]$ .

1.5.6. Definición. Sea  $f$  una función definida sobre  $[a, b]$  - si  $F$  es otra función derivable sobre  $[a, b]$  tal que  $F'(x) = f(x)$  entonces se dice que  $F$  es una función primitiva de  $f$  sobre  $[a, b]$ ; en el teorema 1.5.4  $F(x)$  es una primitiva de  $f$  si  $f$  es continua en  $[a, b]$ .

La definición anterior nos servirá para enunciar y demostrar los dos teoremas que siguen, los cuales nos dan dos -

fórmulas para el cálculo de  $\int_a^b f(x) dx$ . Estas dos fórmulas son conocidas como el método de integración por partes y el método de integración por sustitución.

1.5.7. Teorema. (Método de integración por partes)

Supongamos que  $F$  y  $G$  son funciones primitivas de  $f$  y  $g$  respectivamente, sobre  $[a, b]$  y que  $f$  y  $g$  son funciones Riemann-integrables sobre  $[a, b]$ , entonces

$$\int_a^b F(x) g(x) dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x) G(x) dx$$

Prueba: Sea  $H(x) = F(x) G(x)$ . Aplicando el teorema de derivación para el producto de funciones se obtiene que, (ver punto 6 apéndice 1)

$$H'(x) = F'(x)G(x) + G'(x)F(x) = f(x)G(x) + g(x)F(x)$$

Por esta última igualdad se tiene que  $H'(x)$  es Riemann-integrable ya que como  $G$  y  $F$  son derivables en  $[a, b]$  son continuas en  $[a, b]$  (ver punto 6 apéndice 1)  $\Rightarrow G$  y  $F$  son Riemann-integrables sobre  $[a, b]$ , además  $f$  y  $g$  son funciones Riemann-integrables sobre  $[a, b]$  y por lo tanto aplicando el punto 7 del apéndice 1 y las propiedades 1.2.7, se obtiene que  $H'(x)$  es Riemann-integrable en  $[a, b]$ . Integrando la expresión

$$H'(x) = f(x) G(x) + g(x) F(x) \quad \text{obtenemos}$$

$$\int_a^b H'(x) dx = \int_a^b f(x)G(x) dx + \int_a^b g(x)F(x) dx$$

y por el teorema 1.5.5 se obtiene que como

$$\begin{aligned} \int_a^b H'(x) dx &= H(b) - H(a) \\ &= \int_a^b f(x) G(x) dx + \int_a^b g(x) F(x) dx \end{aligned}$$

• equivalentemente

$$\int_a^b F(x) g(x) dx = H(b) - H(a) - \int_a^b f(x) G(x) dx$$

y por definición de  $H$

$$\int_a^b F(x) g(x) dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x) G(x) dx$$

lo cual demuestra el teorema.

1.5.8 Teorema. (Método de integración por sustitución).

Supongamos que  $g'$  es una función continua sobre  $[a, b]$  y que  $f$  una función continua sobre algún intervalo que contenga a la imagen de  $[a, b]$  bajo  $g(x)$  entonces

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du = \int_a^b f \circ g(x) g'(x) dx$$

Prueba: Si  $F$  es una primitiva de  $f$  sobre algún intervalo que contenga a la imagen de  $[a, b]$  bajo  $g$  entonces el primer miembro será igual a  $F(g(b)) - F(g(a))$ . Por otra parte - aplicando la regla de la cadena, apéndice 1 punto 6, se tiene que

$$(F \circ g)' = (F' \circ g) \cdot g' = (f \circ g) \cdot g'$$

de modo que  $F \circ g$  es una primitiva de  $(f \circ g) \cdot g'$  y el segundo miembro es igual a

$$(F \circ g)(a) - (F \circ g)(b) = F(g(b)) - F(g(a))$$

lo cual demuestra el teorema.

A continuación daremos un par de ejemplos que ilustran estos dos métodos teóricos dados por los teoremas 1.5.7 y 1.5.8

1.5.9 Ejemplo al teorema 1.5.8

Calculemos  $\int_a^b \text{sen}^5 x \cos x \, dx$ , sea  $g(x) = \text{sen } x$  y

$f(u) = u^5$ , entonces

$$\begin{aligned} \int_a^b \text{sen}^5 x \cos x \, dx &= \int_a^b f(g(x)) g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du \\ &= \int_{\text{sen } a}^{\text{sen } b} u^5 \, du = \frac{\text{sen}^6 b}{6} - \frac{\text{sen}^6 a}{6} \end{aligned}$$

1.5.10 Ejemplo al teorema 1.5.7

Calculemos la siguiente integral:

$$\int_a^b x \exp x \, dx \quad \text{aquí } F(x) = x; \quad F'(x) = f(x) = 1$$

$g(x) = G'(x) = \exp x$  y  $G(x) = \exp x$ ; entonces aplicando el teorema 1.5.7 se tiene que

$$\begin{aligned} \int_a^b x \exp x \, dx &= b \exp b - a \exp a - \int_a^b 1 \exp x \, dx \\ &= b \exp b - a \exp a - (\exp b - \exp a) \\ &= \exp b (b - 1) + \exp a (1 - a) \end{aligned}$$

Nótese que con este último ejemplo la idea de aplicar el método

de integración por partes es que, en la integral del segundo - miembro quede una expresión de la cual se obtenga rápidamente su primitiva.



## CAPITULO II.

INTEGRACION NUMERICA.

2.1 Cómo surge la necesidad de la Integración Numérica y esbozo de la idea de la Integración Numérica.

En el Capítulo I se vió la teoría general de la integral de Riemann y se mostraron algunos métodos para el cálculo

de  $\int_a^b f(x) dx$  donde  $f(x)$  era una función Riemann-integrable sobre el intervalo  $[a, b]$ , pero dichos métodos presentan algunas limitaciones, se hizo ver en la sección 1.3 que el método de exhaustación resultaba demasiado laborioso y que para algunas funciones resultaba inoperante.

En el siglo XVII el astrónomo inglés Isaac Newton motivado por sus investigaciones en física y en astronomía sintió la necesidad del cálculo como herramienta y en el mismo siglo, aunque motivado por otros aspectos, el filósofo y matemático Guillermo G. Leibniz desarrollaba la misma teoría del cálculo. Así pues a Newton y Leibniz se les debe haber sido los precursores del cálculo, pero no fue sino hasta el siglo XIX, cuando Riemann afinó la teoría del Cálculo Integral como ahora se conoce y en base a esta teoría surgieron los métodos teóricos para la obtención de la

$\int_a^b f(x) dx$ , como son entre otros, los de integración por partes y de integración por substitución. Estos últimos dan una manera mucho más eficaz de calcular la

$\int_a^b f(x) dx$  sólo que a pesar de que resulten más eficaces tam-

los de integración por partes y de integración por substitución. Estos últimos dan una manera mucho más eficaz de calcular la

$\int_a^b f(x) dx$  sólo que a pesar de que resulten más eficaces tam-



bién tienen limitaciones lo cual obliga a buscar métodos todavía más efectivos, lo que desarrollaremos a lo largo de este capítulo y se justificarán algunos de ellos. A continuación daremos algunos ejemplos concretos de funciones para las cuales no se pueden aplicar los mencionados métodos teóricos y presentaremos algunos aspectos que obligan a recurrir a la integración numérica.

2.1.1 Ejemplo. Tratemos de calcular por el método de integración por partes la siguiente integral:

$$\int_a^b \exp(\operatorname{sen} x) dx$$

Sea  $f(x) = \exp(\operatorname{sen} x)$ ,  $g'(x) = 1$  entonces  
 $f'(x) = \cos x \cdot \exp(\operatorname{sen} x)$  y  $g(x) = x$  . . .

$$\int_a^b \exp(\operatorname{sen} x) dx = b \exp(\operatorname{sen} b) - a \exp(\operatorname{sen} a) - \\ - \int_a^b x \cdot \cos x \cdot \exp(\operatorname{sen} x) dx$$

Como vemos en la integral del segundo miembro queda una expresión para la cual es más difícil encontrar su primitiva, lo cual pone de manifiesto que el método no es siempre el más adecuado, tampoco es posible calcular dicha integral por el método de sustitución ya que no es posible escribirla como

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx$$

lo cual también pone de manifiesto que el método de sustitución no es siempre apropiado. Sin embargo  $f(x) = \exp(\operatorname{sen} x)$  es una función continua sobre cualquier intervalo  $[a, b]$ , y

por lo tanto una función Riemann-integrable sobre cualquier intervalo  $[a, b]$ , lo cual quiere decir que su integral existe, - sólo que no es fácil calcularla mediante métodos teóricos. El ejemplo 2.1.1 muestra que existen funciones para las cuales - hay necesidad de emplear otro método con el fin de obtener su - integral;

Otro caso en el cual se ve que no son eficientes los métodos teóricos es el que a continuación se menciona: suponga mos que tenemos  $n$  puntos en el plano los cuales son observa- ciones de algún fenómeno que está dado por la relación  $y = f(x)$  donde  $f(x)$  es una función definida sobre el intervalo  $[a, b]$  pero la expresión analítica de  $f(x)$  es desconocida. Dichos casos se presentan mucho en Física y en el capítulo III tra- taremos un caso especial.

La idea de la integración numérica se basa en los principios de la teoría de la integral de Riemann y en el hecho

de que el valor de  $\int_a^b f(x) dx$  puede ser aproximado por la

$\sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k) (x_k - x_{k-1})$  donde  $x_k$  son puntos de  $[a, b]$  y  $\bar{x}_k$  es

un punto del subintervalo  $[x_{k-1}, x_k]$ : de aquí en adelante - trabajaremos con funciones continuas o continuas por pedazos para poder hacer mención al teorema 1.4.5 como justificación a la aproximación de la integral que nos ocupa, por medio de -

$\sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k) (x_k - x_{k-1})$ . El teorema 1.4.5 asegura que

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k) (x_k - x_{k-1}) - \int_a^b f(x) dx \right| < \epsilon$$

donde  $\epsilon$  es tan pequeña como se quiera con tal de tomar la norma de la partición  $P \{ a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \}$  suficientemente pequeña.

Un método muy efectivo para asegurar que la diferen-

cia  $\left| \sum_{k=1}^n f(x_k) (x_k - x_{k-1}) - \int_a^b f(x) dx \right|$  sea pequeña es -

calculando la diferencia  $U(f, P) - L(f, P)$  e ir afinando la partición hasta obtener que  $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$  y

como  $\left| \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k) (x_k - x_{k-1}) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$

habríamos asegurado que  $\sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k) (x_k - x_{k-1})$  es una aproxi-

mación satisfactoria para la integral  $\int_a^b f(x) dx$ , sólo que

este método de calcularla resulta muy costoso en tiempo de computadora lo que obliga a desarrollar otros métodos y a calcular el error de aproximación de otra manera. En la siguiente sección presentaremos cuatro métodos aproximativos de integración numérica.

## 2.2 Cuatro métodos simples para el cálculo de $\int_a^b f(x) dx$

En la sección anterior dimos la idea de en que consiste la integración numérica, su necesidad y surgimiento, además mencionamos que en determinados casos se necesita calcular

$\int_a^b f(x) dx$  y sin embargo no se tiene la expresión analítica de

$f(x)$ , sino sólo se conocen  $n$  puntos  $(x, y)$  en el plano que

satisfacen la relación  $y = f(x)$ . Queremos hacer mención que los cuatro métodos simples de esta sección serán tratados suponiendo que la expresión analítica de  $f(x)$  es conocida - aunque dos de ellos se podrán generalizar cuando  $f(x)$  no se conoce.

A continuación enlistamos los cuatro métodos en el orden que se desarrollarán.

1. Método del punto del lado derecho.
2. Método del punto medio.
3. La regla del trapecio.
4. La regla de Simpson

#### 2.2.1 El método del punto del lado derecho.

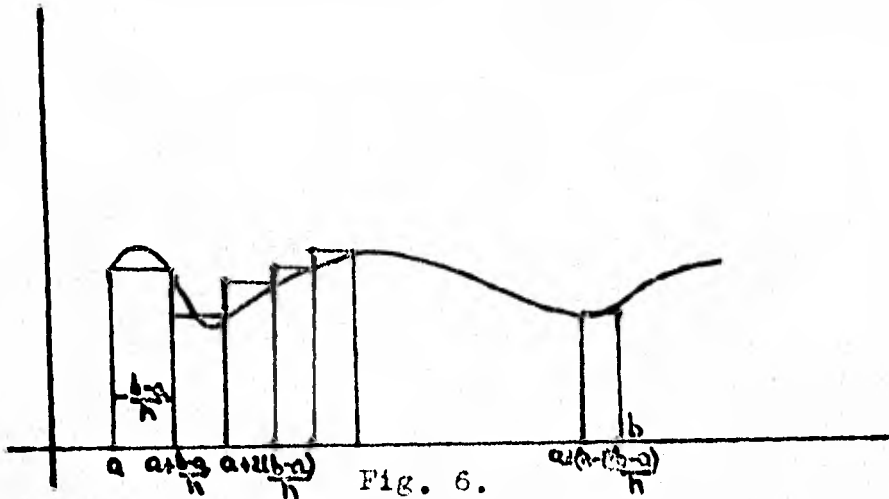
Sea  $f(x)$  la función Riemann-integrable sobre  $[a, b]$  para la cual se quiere calcular  $\int_a^b f(x) dx$ . Sea  $h = \frac{b-a}{n}$

donde  $n$  es un número natural. El método del punto del lado derecho consiste en calcular :

$$R_n(f) = h \sum_{k=1}^n f(a + kh)$$

y tomar esta última expresión como una aproximación a  $\int_a^b f(x) dx$ .

Nótese que lo que indica esta regla es dividir el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  partes iguales mediante la partición  $P = \{a=x_0, x_1, \dots, x_n=b\}$  donde  $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  y multiplicar la longitud de cada subintervalo inducido por la partición, por el valor de la función evaluada en el punto del lado derecho del subintervalo y después sumar estos productos, con lo cual se están sumando las áreas de los rectángulos mostrados en la figura 6



Como vemos el método del punto del lado derecho es un método bastante sencillo. Una variante de este método es el método del punto del lado izquierdo que estaría dado por -

$$R_n(f) = h \sum_{k=0}^{n-1} f(a + kh)$$

Un aspecto importante del método del lado derecho es el siguiente:

¿Qué tan aproximado es el valor de

$$R_n(f) = h \sum_{k=1}^n f(a + kh) \quad \text{al verdadero valor de}$$

$$\int_a^b f(x) dx \quad ?$$

Para responder necesitamos calcular un error de aproximación pero antes de hacerlo daremos la siguiente definición.

2.2.2. Definición. Sea  $f(x)$  una función continua sobre el intervalo  $[a, b]$ . Los módulos de continuidad  $w(\delta)$  de  $f(x)$  - están definidos por:

$$w(\delta) = \max_{|x_1 - x_2| \leq \delta} |f(x_1) - f(x_2)| \quad a \leq x_1, x_2 \leq b$$

La definición anterior en otras palabras dice que para toda  $x_1, x_2$  tales que  $|x_1 - x_2| \leq \delta$  implica que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq w(\delta)$$

Nótese también que  $\lim_{\delta \rightarrow 0} w(\delta) = 0$

Una vez dada esta definición estamos ya en condiciones de hacer un análisis de qué tanto se aproxima

$$R_n(f) = h \sum_{k=1}^n f(a + kh)$$

al verdadero valor de  $\int_a^b f(x) dx$ .

El siguiente teorema nos dará el error de aproximación que andamos buscando, sólo que únicamente valdrá para funciones continuas.

2.2.3 Teorema. Sea  $f(x)$  una función continua sobre  $[a, b]$ .

Entonces

$$\left| \int_a^b f(x) dx - h \sum_{k=1}^n f(a + kh) \right| \leq (b - a) w(h)$$

Prueba:

$$\int_a^b f(x) dx - h \sum_{k=1}^n f(a + kh) = \sum_{k=1}^n \int_{a+(k-1)h}^{a+kh} (f(x) - f(a+kh)) dx$$

Ahora  $|f(x) - f(a + kh)| \leq w(h)$ , para  $a + (k-1)h \leq x \leq a + kh$ .

de donde  $\left| \int_{a+(k-1)h}^{a+kh} f(x) - f(a+kh) dx \right| \leq h w(h)$



Sumando desde  $k = 1$  hasta  $k = n$  y aplicando la desigualdad del triángulo se obtiene que

$$\left| \int_a^b f(x) dx - h \sum_{k=1}^n f(a + kh) \right| \leq nh w(h) = (b - a) w(h).$$

Nótese que conforme  $n \rightarrow \infty$   $h \rightarrow 0$  por lo tanto  $w(h) \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$ .

El teorema anterior asegura la convergencia de  $h \sum_{k=1}^n f(a + kh)$  al verdadero valor de  $\int_a^b f(x) dx$  en el caso de que  $f(x)$  sea continua sobre  $[a, b]$  el cual es un caso particular del teorema 1.4.5

#### 2.2.4 El Método del punto medio.

Una vez visto el método del punto del lado derecho procederemos a ver otro método un poco más complicado llamado el método del punto medio. La idea de este método es muy parecida a la anterior. Consideremos la misma partición que en el método anterior  $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  donde  $x_k = a + k \frac{(b-a)}{n}$

$k = 0, 1, 2, \dots, n$  y sea  $y_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$  i.e.  $y_k$  es el

punto medio del subintervalo  $[x_{k-1}, x_k]$   $k = 1, 2, \dots, n$ .

El método del punto medio consiste en calcular

$$R_n(f) = h \sum_{k=1}^n f(y_k) \quad \text{siendo} \quad h = \frac{b-a}{n}$$

y tomar a esto como una aproximación al verdadero valor de  $\int_a^b f(x) dx$ .

Nótese que ahora se está multiplicando la longitud del subintervalo



lo  $[x_{k-1}, x_k]$  por el valor de la función  $f(x)$  en el punto medio del subintervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  y sumando todos estos productos cuando  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Como en el caso del método del punto del lado derecho, nos preguntamos ¿qué tanto se aproxima  $R_n(f) = h \sum_{k=1}^n f(y_k)$  al verdadero valor  $\int_a^b f(x) dx$ ? La respuesta es que  $R_n(f)$  se puede aproximar al verdadero valor  $\int_a^b f(x) dx$  tanto como se quiera con tal de tomar  $n$  el número de subintervalos suficientemente grande. (Ver teorema 1.4.5.) ; naturalmente que estamos suponiendo que  $f(x)$  es una función continua sobre el intervalo  $[a, b]$ . Ahora calcularemos el error de aproximación en el caso en que  $f(x)$  tenga primera y segunda derivadas continuas. Antes de formalizar esto enunciaremos una definición que se necesitará.

2.2.5 Definición.

$C_{[a,b]}^n = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f^{(k)}(x) \text{ es continua y existe } \forall x \in [a, b] \forall k=0,1,\dots,n\}$   
 donde  $f^{(k)}(x)$  es la función obtenida después de derivar  $f(x)$   $k$  veces.

Una vez dada esta definición estamos ya en condiciones para calcular el error de aproximación de  $R_n(f) = h \sum_{k=1}^n f(y_k)$  al verdadero valor de  $\int_a^b f(x) dx$  mediante el siguiente teorema.

2.2.6 Teorema. Supongamos que  $f(x) \in C^2[a, b]$  entonces

$$\left| \int_a^b f(x) dx - h \sum_{k=1}^n f(y_k) \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{24 n^2}$$

donde  $M$  es tal que  $|f''(x)| \leq M$  para toda  $x \in [a, b]$ .

**Prueba:** Puesto que  $f(x) \in C^2[a, b]$  se tiene que  $f(x) \in C^2[x_{k-1}, x_k]$  para toda  $k = 1, 2, \dots, n$  y de acuerdo al Teorema de Taylor del punto 1 apéndice 2, se tiene que:

$$f(x) = f(y_k) + f'(y_k)(x - y_k) + \frac{1}{2} f''(c_k)(x - y_k)^2$$

para toda  $x \in [x_{k-1}, x_k]$  donde  $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ .

Como  $f''(x)$  existe y es continua en  $[a, b]$  existe  $M$  tal que  $|f''(x)| \leq M$  para toda  $x \in [a, b]$  entonces como  $c_k \in [a, b]$  para toda  $k = 1, 2, \dots, n$   $|f''(c_k)| \leq M$  para toda  $k = 1, 2, \dots, n$  o equivalentemente  $-M \leq f''(c_k) \leq M$  para toda  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Por lo tanto para toda  $x \in [x_{k-1}, x_k]$

$$\begin{aligned} f(y_k) + f'(y_k)(x - y_k) - \frac{M}{2} (x - y_k)^2 &\leq f(x) \\ &\leq f(y_k) + f'(y_k)(x - y_k) + \frac{M}{2} (x - y_k)^2 \end{aligned}$$

integrando la última desigualdad sobre el intervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  se obtiene :

$$f(y_k) h - \frac{M}{24} h^3 \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \leq f(y_k) h + \frac{M}{24} h^3 \quad 2.2.6.1$$

o equivalentemente

$$-\frac{M}{24} h^3 \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - f(y_k) h \leq \frac{M}{24} h^3$$

Sumando sobre toda  $k = 1, 2, \dots, n$  obtenemos:

$$-\frac{nM}{24} h^3 \leq \int_a^b f(x) dx - h \sum_{k=1}^n f(y_k) \leq \frac{nM}{24} h^3$$

$$\text{i.e. } \left| \int_a^b f(x) dx - h \sum_{k=1}^n f(y_k) \right| \leq \frac{M}{24} h^3 = \frac{M(b-a)^3}{24n^2}$$

Este teorema muestra la convergencia de  $R_n(f)$  ,

siendo  $R_n(f) = h \sum_{k=1}^n f(y_k)$  al verdadero valor de  $\int_a^b f(x) dx$

conforme  $n \rightarrow \infty$  sólo que está restringido a funciones que pertenecen a  $C_{[a,b]}^2$  i.e. este error sólo podrá ser calculado cuando la función  $f(x)$  tenga primera y segunda derivadas continuas sobre el intervalo  $[a, b]$  . A continuación daremos la regla del trapecio, la cual se podrá generalizar más tarde en la siguiente sección, en la cual trataremos el caso para calcular la  $\int_a^b f(x) dx$  cuando no se conoce la expresión analítica de  $f(x)$

### 2.2.7 La regla del Trapecio.

Como en los casos anteriores consideremos la partición

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\} \text{ donde } x_k = a + k \frac{b-a}{n} \text{ y}$$

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \text{ y queremos calcular } \int_a^b f(x) dx$$

donde  $f(x)$  es una función Riemann-integrable sobre el intervalo  $[a, b]$  .

Definamos la regla del trapecio como

$$R_n(f) = h \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$$

lo que se está haciendo mediante esta regla es multiplicar el promedio de los valores de las funciones evaluadas en los puntos extremos del intervalo  $[x_{k-1}, x_k]$   $k = 1, 2, \dots, n$  , por la lon-

gitud  $h$  del intervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  y sumando estos productos sobre  $k = 1, 2, \dots, n$ , hablando geométicamente se están sumando las áreas de los trapecios cuyas bases son los valores  $f(x_{k-1})$ ,  $f(x_k)$  y cuyas alturas son el valor  $h$  como se muestra en la figura 7 en el caso  $n = 5$ .

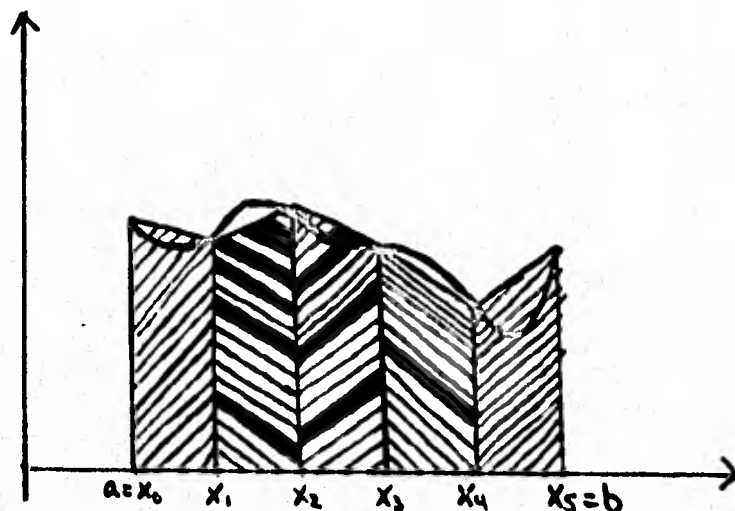


figura 7

Ahora procederemos a hacer el análisis correspondiente de cuánto difiere  $R_n(f) = h \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$  al verdadero valor de  $\int_a^b f(x) dx$ . Este análisis valdrá sólo para funciones que pertenecen a  $C^2[a, b]$  y se resume mediante el siguiente teorema y su prueba:

2.2.8 TEOREMA. Sea  $f(x) \in C^2[a, b]$ . Entonces

$$\int_a^b f(x) dx - h \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \leq \frac{M(b-a)}{6n^2}$$

donde  $M$  es tal que  $|f''(x)| \leq M$  si  $a \leq x \leq b$ .

Prueba: Debido a 2.2.6.1 se tiene que

$$f(y_k) h - \frac{M}{24} h^3 \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \leq f(y_k) h + \frac{M}{24} h^3 \quad 2.2.8.1$$

siendo  $y_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$  y debido al teorema del punto 1 apén-

dice 2.

$$f(x_{k-1}) = f(y_k) + f'(y_k)(x_{k-1} - y_k) + \frac{1}{2} f''(c_k')(x_{k-1} - y_k)^2$$

y

$$f(x_k) = f(y_k) + f'(y_k)(x_k - y_k) + \frac{1}{2} f''(c_k'')(x_k - y_k)^2$$

donde  $x_{k-1} \leq c_k' \leq y_k$ ,  $c_k'' \leq x_k$ ; como  $y_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$  y

$h = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}$  de las dos últimas igualdades se obtie-

ne que

$$f(x_{k-1}) = f(y_k) - \frac{1}{2} f'(y_k) h + \frac{1}{8} f''(c_k') h^2$$

$$y \quad f(x_k) = f(y_k) + \frac{1}{2} f'(y_k) h + \frac{1}{8} f''(c_k'') h^2$$

Sumando las igualdades anteriores y dividiendo entre 2 se obtie-  
ne que

$$\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} = f(y_k) + \frac{h^2}{16} [f''(c_k') + f''(c_k'')]$$

Como  $M$  es tal que  $|f''(x)| \leq M$  para toda  $x \in [a, b]$  se obtie-  
ne que

$$f(y_k) - \frac{h^2 M}{8} \leq \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \leq f(y_k) + \frac{h^2 M}{8}$$

de donde

$$\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} - \frac{h^2 M}{8} \leq f(y_k) \leq \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} + \frac{h^2 M}{8}$$

Combinando esto último con 2.2.8.1 obtenemos que:

$$h \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} - \frac{h^3 M}{8} - \frac{h^3 M}{24} \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx$$

$$h \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} + \frac{h^3 M}{8} + \frac{h^3 M}{24}$$

o equivalentemente

$$-\frac{Mh^3}{6} \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} h \leq \frac{Mh^3}{6}$$

Sumando sobre toda  $k = 1, 2, \dots, n$  se tiene que:

$$\frac{Mnh^3}{6} \leq \int_a^b f(x) dx - h \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \leq \frac{Mnh^3}{6}$$

i. e.

$$\left| \int_a^b f(x) dx - h \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \right| \leq \frac{Mnh^3}{6} = \frac{K(b-a)^3}{6n^2}$$

Con este teorema se concluye la regla del trapecio y una vez más se ve que para funciones de clase  $C^2_{[a,b]}$  el método de la regla del trapecio converge al verdadero valor de  $\int_a^b f(x) dx$

### 2.2.3 La regla de Simpson.

Consideremos la partición  $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$  del intervalo  $[a, b]$  donde  $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  y  $h = \frac{b-a}{n}$ .

La regla de Simpson para calcular aproximadamente -



$\int_a^b f(x) dx$  consiste en lo siguiente: para cada subintervalo

$[x_{k-1}, x_k]$   $k = 1, 2, \dots, n$  se considera el polinomio de grado 2  $P_k(x) = A_k x^2 + B_k x + C_k$  que interpola los tres puntos del plano  $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ ,  $(y_k, f(y_k))$  y  $(x_k, f(x_k))$

donde  $y_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$ , después se procede a integrar  $P_k(x)$

sobre el intervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  y tomamos a  $\int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x) dx$

como una aproximación a  $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx$  i.e.

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x) dx \cong \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \quad \text{y al sumar sobre } k=1, 2, \dots, n$$

se tiene que:

$$\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x) dx \cong \int_a^b f(x) dx$$

Demostraremos que para funciones que pertenecen a  $C_{[a,b]}^2$  el método de la regla de Simpson converge al verdadero valor de  $\int_a^b f(x) dx$  pero antes de hacerlo aclararemos algunos detalles: se ha hablado

del polinomio de grado 2  $P_k(x)$  que interpola los puntos  $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ ,  $(y_k, f(y_k))$  y  $(x_k, f(x_k))$ , puesto que

que  $x_{k-1} < y_k < x_k$ , siempre existirán constantes  $A_k$ ,  $B_k$ , y  $C_k$  tales que  $P_k(x) = A_k x^2 + B_k x + C_k$  interpola los tres pun

\* La palabra interpolar se refiere a encontrar el polinomio de grado dos  $P_k(x) = A_k x^2 + B_k x + C_k$  tal que los puntos  $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ ,  $(y_k, f(y_k))$  y  $(x_k, f(x_k))$  lo satisfacen.

tos antes mencionados y además estas constantes, están determinadas de manera única. (ver los puntos 2 y 3 del apéndice 2). También es importante antes de demostrar la convergencia del método de la regla de Simpson obtener otra expresión para

$\int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x) dx$  la cual nos la proporciona el siguiente lema:

2.2.10 LEMA. Sea  $P_k(x) = A_k x^2 + B_k x + C_k$  la ecuación polinomial de grado dos que interpola los puntos  $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$   $(y_k, f(y_k))$  y  $(x_k, f(x_k))$ . Entonces se tiene que:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x) dx = \frac{h}{6} [f(x_{k-1}) + 4f(y_k) + f(x_k)]$$

Prueba:

$$\begin{aligned} \int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x) dx &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} (A_k x^2 + B_k x + C_k) dx \\ &= \frac{A_k}{3} x_k^3 + \frac{B_k}{2} x_k^2 + C_k x_k - \frac{A_k}{3} x_{k-1}^3 - \frac{B_k}{2} x_{k-1}^2 - C_k x_{k-1} \\ &= \frac{A_k}{3} (x_k^3 - x_{k-1}^3) + \frac{B_k}{2} (x_k^2 - x_{k-1}^2) + C_k (x_k - x_{k-1}) \quad 2.2.10.1 \end{aligned}$$

Como  $P_k(x) = A_k x^2 + B_k x + C_k$  tenemos que:

$$f(x_{k-1}) = P_k(x_{k-1}) = A_k x_{k-1}^2 + B_k x_{k-1} + C_k$$

o bien

$$4f(y_k) = 4P_k(y_k) = 4A_k y_k^2 + 4B_k y_k + 4C_k$$

y substituyendo  $y_k$  por su valor

$$4 f(y_k) = A_k(x_{k-1} + x_k)^2 + 2 B_k(x_{k-1} + x_k) + 4 C_k$$

$$\dots \quad 4 f(y_k) = A_k(x_{k-1}^2 + 2x_{k-1} x_k + x_k^2) + 2B_k(x_{k-1} + x_k) + 4C_k$$

$$f(x_k) = A_k x_k^2 + B_k x_k + C_k$$

Sumando estas tres últimas igualdades se obtiene:

$$\begin{aligned} f(x_{k-1}) + 4f(y_k) + f(x_k) &= 2 A_k(x_k^2 + x_k x_{k-1} + x_{k-1}^2) + \\ &+ 3 B_k(x_{k-1} + x_k) + 6 C_k \end{aligned}$$

Multiplicando esta última igualdad por  $\frac{x_k - x_{k-1}}{6} = \frac{h}{6}$  tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{h}{6} [f(x_{k-1}) + 4f(y_k) + f(x_k)] &= \frac{x_k - x_{k-1}}{6} [f(x_{k-1}) + 4f(y_k) + f(x_k)] \\ &= \frac{A_k}{3} (x_k^3 - x_{k-1}^3) + \frac{B_k}{2} (x_k^2 - x_{k-1}^2) + C_k(x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

lo cual es 2.2.10.1 y el lema queda probado

El resultado obtenido por el lema anterior nos proporciona una fórmula para:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x) dx \quad \text{con la cual ya es-}$$

tamos en condiciones que probar la convergencia del método para funciones que pertenezcan a  $C^2_{[a,b]}$

2.2.11 Teorema. Sea  $f(x) \in C^2_{[a,b]}$ . Entonces

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x) dx \right| =$$

$$= \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{h}{6} \sum_{k=1}^n [f(x_{k-1}) + 4f(y_k) + f(x_k)] \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$

donde  $M$  es tal que  $|f''(x)| \leq M$  para toda  $x \in [a, b]$ .

Prueba:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{h}{6} \sum_{k=1}^n [f(x_{k-1}) + 4f(y_k) + f(x_k)] \right| =$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{2h}{3} \sum_{k=1}^n f(y_k) - \frac{h}{3} \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \right| =$$

$$\left| \frac{2}{3} \int_a^b f(x) dx - \frac{2}{3} h \sum_{k=1}^n f(y_k) + \frac{1}{3} \int_a^b f(x) dx - \frac{h}{3} \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \right| \leq$$

$$\frac{2}{3} \left| \int_a^b f(x) dx - h \sum_{k=1}^n f(y_k) \right| + \frac{1}{3} \left| \int_a^b f(x) dx - h \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \right|$$

Aplicando los teoremas 2.2.6 y 2.2.8 se obtiene que la última expresión es

$$\leq \frac{2}{3} \frac{M(b-a)^3}{24n^2} + \frac{1}{3} \frac{M(b-a)^3}{6n^2} = \frac{M(b-a)^3}{3n^2} \left[ \frac{1}{12} + \frac{1}{6} \right] = \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$

El teorema así queda demostrado y por lo tanto la regla de Simpson

converge al valor  $\int_a^b f(x) dx$  para funciones que pertenecen a

$C^2[a, b]$ .

Por último falta hacer una aclaración muy importante. Hemos hecho ver en el desarrollo de esta sección que los métodos

del punto medio, de la regla del trapecio y de la regla de Simpson convergen al verdadero valor de  $\int_a^b f(x) dx$  cuando

$f(x) \in C^2_{[a,b]}$ . Ahora nos preguntamos: ¿qué ocurre cuando  $f(x)$  solamente es continua en  $[a,b]$ . La respuesta es muy sencilla y se resume en el siguiente teorema y su corolario.

**2.2.12 Teorema.** Sea  $f(x)$  continua sobre el intervalo  $[a, b]$ . Entonces el método del punto medio y la Regla del trapecio convergen al verdadero valor de  $\int_a^b f(x) dx$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , en otras palabras dada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$i) \left| \int_a^b f(x) dx - h \sum_{k=1}^n f(y_k) \right| < \epsilon \quad \text{si} \quad \frac{b-a}{n} = h < \delta \quad \text{y}$$

$$ii) \left| \int_a^b f(x) dx - h \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \right| < \epsilon \quad \text{si} \quad h < \delta$$

La prueba para i) y ii) está dada en los teoremas 1.4.5 y 2.3.2 respectivamente.

**2.2.13 Corolario.** Sea  $f(x)$  continua sobre el intervalo  $[a, b]$ . Entonces el método de la Regla de Simpson converge al verdadero valor de  $\int_a^b f(x) dx$  si  $n \rightarrow \infty$

Prueba:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{h}{6} \sum_{k=1}^n [f(x_{k-1}) + 4f(y_k) + f(x_k)] \right| =$$

$$\left| \frac{2}{3} \int_a^b f(x) dx - \frac{2h}{3} \sum_{k=1}^n f(y_k) + \frac{1}{3} \int_a^b f(x) dx - \frac{h}{3} \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \right|$$

del punto medio, de la regla del trapecio y de la regla de Simpson convergen al verdadero valor de  $\int_a^b f(x) dx$  cuando

$f(x) \in C^2_{[a,b]}$ . Ahora nos preguntamos: ¿qué ocurre cuando  $f(x)$  solamente es continua en  $[a,b]$ . La respuesta es muy sencilla y se resume en el siguiente teorema y su corolario.

**2.2.12 Teorema.** Sea  $f(x)$  continua sobre el intervalo  $[a, b]$ . Entonces el método del punto medio y la Regla del trapecio convergen al verdadero valor de  $\int_a^b f(x) dx$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , en otras palabras dada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$i) \left| \int_a^b f(x) dx - h \sum_{k=1}^n f(y_k) \right| < \epsilon \quad \text{si} \quad \frac{b-a}{n} = h < \delta \quad \text{y}$$

$$ii) \left| \int_a^b f(x) dx - h \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \right| < \epsilon \quad \text{si} \quad h < \delta$$

La prueba para i) y ii) está dada en los teoremas 1.4.5 y 2.3.2 respectivamente.

**2.2.13 Corolario.** Sea  $f(x)$  continua sobre el intervalo  $[a, b]$ . Entonces el método de la Regla de Simpson converge al verdadero valor de  $\int_a^b f(x) dx$  si  $n \rightarrow \infty$

Prueba:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{h}{6} \sum_{k=1}^n [f(x_{k-1}) + 4f(y_k) + f(x_k)] \right| =$$

$$\left| \frac{2}{3} \int_a^b f(x) dx - \frac{2h}{3} \sum_{k=1}^n f(y_k) + \frac{1}{3} \int_a^b f(x) dx - \frac{h}{3} \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \right|$$



$$\frac{2}{3} \left| \int_a^b f(x) dx - h \sum_{k=1}^n f(y_k) \right| + \frac{1}{3} \left| \int_a^b f(x) dx - h \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \right|$$

$$\frac{2}{3} \epsilon + \frac{1}{3} \epsilon = \epsilon \quad \text{si existe } \delta > 0$$

tal que  $\frac{b-a}{n} = h < \delta$  debido al teorema 2.2.12.

2.2.12 y 2.2.13 nos indican la convergencia de cualquiera de los tres métodos pero no nos calculan el error de aproximación como en el caso en que  $f(x) \in C^2_{[a,b]}$ .

2.3 Cálculo de  $\int_a^b f(x) dx$  cuando no se tiene una expresión analítica de  $f(x)$ .

En la sección 2.1 ya hemos mencionado el caso en que se tienen  $n+1$  puntos  $(x_k, y_k)$   $k = 0, 1, 2, \dots, n$  en el plano tales que  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  y que satisfacen la relación  $y = f(x)$ , donde la expresión analítica de  $f(x)$  es desconocida pero bajo el supuesto de que  $f(x)$  es continua sobre el intervalo  $[a, b]$ ; y queremos calcular  $\int_a^b f(x) dx$ .

En esta sección desarrollaremos algunos métodos para tratar de lograr esto, pero naturalmente sin tanto éxito como en el caso en que la expresión analítica de  $f(x)$  era conocida y que  $f(x) \in C^2_{[a,b]}$ . Hacemos notar que de aquí en adelante  $x_k$  no necesariamente será  $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$  sino simplemente que  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ . A continuación enunciaremos y probaremos un teorema que al mismo tiempo nos dará un método para calcular  $\int_a^b f(x) dx$ .

2.3.1 Teorema: Consideremos los  $n + 1$  puntos  $(x_k, y_k)$  -  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  tales que con observaciones de un fenómeno regido por la relación  $y = f(x)$  donde  $f(x)$  es una función continua sobre  $[a, b]$  pero con la expresión analítica de  $f(x)$  tal vez desconocida y que además  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ . Entonces dada  $\epsilon > 0$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n y_k h_k \right| = \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(x_k) h_k \right| < \epsilon$$

siempre que  $h_k = x_k - x_{k-1} < \delta$  para cierta  $\delta > 0$  y para toda  $k = 1, 2, \dots, n$

La prueba de este teorema es consecuencia inmediata del teorema 1.4.5 del Capítulo I.

Este teorema no nos calcula un error de aproximación

de  $\sum_{k=1}^n f(x_k) h_k = \sum_{k=1}^n y_k h_k$  al verdadero valor de  $\int_a^b f(x) dx$

pero si nos asegura que el valor  $\sum_{k=1}^n y_k h_k$  difiere poco del verdadero valor de  $\int_a^b f(x) dx$  siempre que la longitud de todo subintervalo  $h_k$  sea suficientemente próxima a cero.

Hablando en un sentido práctico, si nosotros tuviésemos o pudiésemos obtener suficientes observaciones  $(x_k, y_k)$  del fenómeno continuo regido por la relación  $y = f(x)$  de tal suerte que  $h_k = x_k - x_{k-1}$  fuese lo suficientemente próximo a cero, podríamos esperar que la aproximación  $\sum_{k=1}^n y_k h_k$  fuese suficientemente cercana a  $\int_a^b f(x) dx$ .

El método que presenta el teorema 2.3.1 se puede -

considerar como la generalización del método del punto del lado derecho cuando el conjunto de puntos  $x_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  no están igualmente espaciados.

A continuación presentamos otro teorema que también nos proporciona un método para calcular  $\int_a^b f(x) dx$ ; este método se puede considerar como la regla del trapecio generalizada, cuando los puntos  $x_k$  no están igualmente espaciados entre sí.

**2.3.2 Teorema.** Consideremos los  $n + 1$  puntos  $(x_k, y_k)$  con  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  tales que son observaciones de un fenómeno recido por la relación  $y = f(x)$  donde  $f(x)$  es una función continua sobre  $[a, b]$ ; con la expresión analítica de  $f(x)$  - tal vez desconocida y que además  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ . Entonces dada  $\epsilon > 0$

$$\int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n \frac{y_{k-1} + y_k}{2} h_k = \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} h_k$$

siempre que  $h_k < \delta$  para cierta  $\delta > 0$  y para toda  $k = 1, 2, \dots, n$

**Prueba:** Puesto que  $f(x)$  es continua en  $[a, b]$  y además como  $\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$  es un valor intermedio entre  $f(x_{k-1})$  y  $f(x_k)$

podemos aplicar el teorema del valor intermedio para funciones - continuas, del punto 5 Apéndice 1, que afirma que existe -  $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$  tal que  $f(c_k) = \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$  por lo

tanto

$$\sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} h_k = \sum_{k=1}^n f(c_k) h_k$$

y como  $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$  aplicando el teorema 1.4.5. obtenemos lo deseado.

2.3.3 Cuadratura Spline. Supongamos nuevamente que tenemos  $n + 1$  puntos  $(x_k, y_k)$   $k = 0, 1, \dots, n$  que son observaciones del fenómeno regido por la relación  $y = f(x)$  con  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  y como siempre se quiere calcular  $\int_a^b f(x) dx$  ;

lo que ahora haremos es construir una función  $s(x)$  que interpole los  $n+1$  puntos (i.e.  $y_k = s(x_k)$   $k = 0, 1, \dots, n$  con la propiedad de que  $s(x)$  tenga el menor número posible de oscilaciones en el intervalo  $[a, b]$  como se ilustra en las siguientes gráficas:

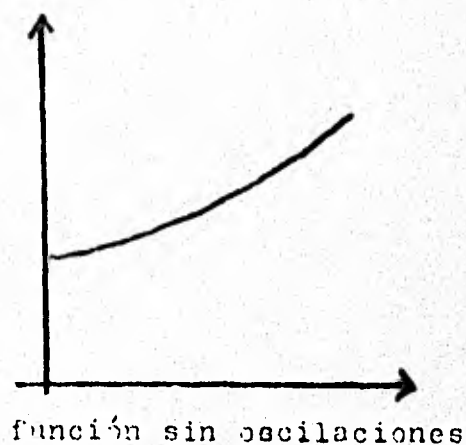
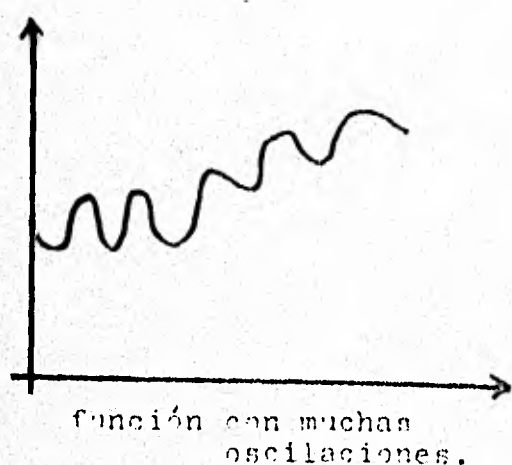


fig. 8

La pregunta es: ¿cómo podemos lograr que  $s(x)$  tenga el menor número posible de oscilaciones sobre  $[a, b]$  ? Y la respuesta es la siguiente: Primeramente supongamos que  $s(x) \in C^2[a, b]$  bajo esta suposición debemos encontrar una función  $s(x)$  tal que  $s(x_k) = y_k$   $k = 0, 1, \dots, n$  y que:

$$\int_a^b s''^2(x) dx \text{ sea mínima, ya que si } s(x) \text{ es tal que}$$

$$\int_a^b s''^2(x) dx \text{ es mínima entonces } s'(x) \text{ varía en pro-}$$

medio lo menos posible sobre el intervalo  $[a, b]$  lo cual significa que  $s(x)$  tendrá el menor número posible de oscilaciones sobre  $[a, b]$ . Para lograr el objetivo mencionado definimos

$$s_k(x) = a_k(x-x_k)^3 + b_k(x-x_k)^2 + c_k(x-x_k) + y_k$$

$$y \quad s(x) = s_k(x) \quad \text{si} \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k \quad k = 1, 2, \dots, n$$

para que  $s(x)$  tenga primera y segunda derivadas continuas en  $[a, b]$  es necesario que:

- i)  $s_k(x_k) = s_{k+1}(x_k)$  para  $k = 1, 2, \dots, n-1$
- ii)  $s'_k(x_k) = s'_{k+1}(x_k)$  para  $k = 1, 2, \dots, n-1$
- iii)  $s''_k(x_k) = s''_{k+1}(x_k)$  para  $k = 1, 2, \dots, n-1$  2.3.3.1

$$\text{Como} \quad s'_k(x) = 3 a_k(x - x_k)^2 + b_k(x - x_k) + c_k$$

$$y \quad s''_k(x) = 6 a_k(x - x_k) + b_k \quad 2.3.3.2$$

las tres condiciones anteriores son las mismas que

- i)  $y_k = a_{k+1}(x_k - x_{k+1})^3 + b_{k+1}(x_k - x_{k+1})^2 + c_{k+1}(x_k - x_{k+1}) + y_{k+1}$
- ii)  $c_k = 3a_{k+1}(x_k - x_{k+1}) + b_{k+1}(x_k - x_{k+1}) + c_{k+1}$
- iii)  $b_k = 6 a_{k+1}(x_k - x_{k+1}) + b_{k+1} \quad k = 1, 2, \dots, n-1$

ahora sea  $h_k = x_{k+1} - x_k \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  entonces las tres condiciones i) ii) y iii) se escriben como:

$$i) \quad y_k = -a_{k+1}h_k^3 + b_{k+1}h_k^2 - c_{k+1}h_k + y_{k+1}$$

$$ii) \quad c_k = 3 a_{k+1}h_k^2 - b_{k+1}h_k + c_{k+1}$$

$$iii) \quad b_k = -6 a_{k+1}h_k + b_{k+1}$$

Nótese que expandiendo para  $k = 1, 2, \dots, n-1$  se tienen  $3(n-1)$  ecuaciones lineales con  $3n-1$  incógnitas, donde las incógnitas son  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, c_1, c_2, \dots, c_n$ . Si además pedimos que:

$$\text{iv) } s_1(x_0) = y_0$$

$$\text{v) } s_1''(x_0) = s_n''(x_n) = 0 \quad 2.3.3.3$$

es decir

$$\text{iv) } y_0 - y_1 = -a_1 h_0^3 + b_1 h_0^2 - c_1 h_0$$

$$\text{v) } 0 = -6 a_1 h_0 + b_1$$

$$0 = b_n$$

Se tendrán  $3n$  ecuaciones con  $3n$  incógnitas:  $a_1 \dots \dots a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$ .

De las condiciones i), ii), iii), iv) y v) se obtiene el sistema de  $3n$  ecuaciones con  $3n$  incógnitas.

$$y_0 - y_1 = -a_1 h_0^3 + b_1 h_0^2 - c_1 h_0$$

$$y_1 - y_2 = -a_2 h_1^3 + b_2 h_1^2 - c_2 h_1$$

.....  
 .....

$$y_{n-1} - y_n = a_n h_{n-1}^3 + b_n h_{n-1}^2 - c_n h_{n-1}$$

$$0 = 3a_2 h_1^2 - b_2 h_1 + c_2 - c_1$$

.....

$$0 = 3a_n h_{n-1}^2 - b_n h_{n-1} + c_n - c_{n-1}$$



$$0 = -6 a_1 h_0 \uparrow b_1$$

$$0 = -6 a_2 h_1 \uparrow b_2 - b_1$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$0 = -6 a_n h_{n-1} \uparrow b_n - b_{n-1}$$

$$0 = b_n$$

2.3.3.4

Para ver que este sistema tiene solución y es única, probaremos que el correspondiente sistema homogéneo tiene solamente la solución trivial  $a_i = b_i = c_i = 0$  para toda  $i = 1, 2, \dots, n$ . El sistema homogéneo se da cuando  $y_i = y_j$  para toda  $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$

2.3.3.5

Calculemos  $\int_a^b s''^2(x) dx = \int_a^b s''(x) s''(x) dx$  cuando  $y_i = y_j$

para toda  $i, j = 0, 1, \dots, n$

Aplicando integración por partes se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_a^b s''(x) s''(x) dx &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} s''(x) s''(x) dx = \\ &= \sum_{k=1}^n s'_k(x_k) s''_k(x_k) - s'_k(x_{k-1}) s''_k(x_{k-1}) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} s'_k(x) s''_k(x) dx \end{aligned}$$

debido a 2.3.3.1 la última expresión es igual a

$$= s'_n(x_n) s''_n(x_n) - s'_1(x_0) s''_1(x_0) - \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} s'_k(x) s''_k(x) dx$$

y por 2.3.3.3 la expresión anterior es igual a:

$$= - \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} s_k'(x) s_k'''(x) dx$$

Pero por 2.3.3.2

$$\begin{aligned} - \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} s_k'(x) s_k'''(x) dx &= - \sum_{k=1}^n a_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} S_k'(x) dx = \\ &= - \sum_{k=1}^n a_k (s_k(x_k) - s_k(x_{k-1})) \\ &= - \sum_{k=1}^n a_k (y_k - y_{k-1}) \stackrel{2.3.3.5}{=} 0 \end{aligned}$$

es decir  $\int_a^b s''^2(x) dx = 0$  entonces  $s''(x) = 0$

sobre  $[a, b]$  por lo tanto debido a 2.3.3.2

$$0 = 6a(x - x_k) + b_k$$

para toda  $k = 1, 2, \dots, n$ , lo cual sólo ocurre cuando

$a_k = b_k = 0$ , pero si  $a_k = b_k = 0$  entonces por 2.3.3.4 se

tiene  $y_i = y_j = 0$ ,  $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$  se tendrá que  $c_k = 0$  para  $k = 1, 2, \dots, n$ . En base a la discusión anterior se establece el siguiente teorema:

**2.3.4 Teorema.** Sean  $(x_k, y_k)$   $k = 0, 1, 2, \dots, n$  puntos en el plano tales que  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  entonces existe una única función  $s(x) \in C^2_{[a,b]}$  como se define en 2.3.3

A la función  $s(x)$  se le llama función spline natural.

El sistema 2.3.3.4 puede escribirse matricialmente en la siguiente forma:

$$\begin{array}{cccccccc}
 0 & -6h_0 & 1 & & & & & \\
 y_0 - y_1 & -h_0^3 & h_0^2 & -h_0 & & & & \\
 0 & -1 & 0 & -6h_1 & 1 & & & \\
 0 & & -1 & 3h_1^2 & -h_1 & 1 & & \\
 y_1 - y_2 & & & -h_1^3 & h_1^2 & -h_1 & & \\
 0 & & & -1 & 0 & -6h_2 & 1 & \\
 0 & & & & -1 & -3h_2^2 & -h_2 & 1 \\
 y_2 - y_3 & & & & & -h_2^3 & h_2^2 & -h_2 \\
 \vdots & & & & & & & \\
 \vdots & & & & & & & \\
 \vdots & & & & & & & \\
 0 & & & & & -1 & 0 & -6h_{n-1} & 1 & c_{n-1} \\
 0 & & & & & & -1 & 3h_{n-1}^2 & -h_{n-1} & 1 & a_n \\
 -1 - y_n & & & & & & & -h_{n-1}^3 & h_{n-1}^2 & -h_{n-1} & b_n \\
 0 & & & & & & & & 1 & 0 & c_n
 \end{array}$$

Hemos también mencionado que buscamos una función  $s(x) \in C^2[a, b]$  tal que  $s(x_k) = y_k$   $k = 0, 1, \dots, n$  y que minimize a la

$$\int_a^b s''^2(x) dx : \text{ el siguiente teorema nos resuelve el problema. }$$

**2.3.5 Teorema.** Sea  $f(x) \in C^2[a, b]$  tal que  $f(x_k) = y_k$  para  $k = 0, 1, \dots, n$  donde  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Si  $s(x)$  es el único spline natural tal que  $s(x_k) = y_k$  entonces

$$\int_a^b f''^2(x) dx \geq \int_a^b s''^2(x) dx \quad \text{y la igualdad se da si y sólo si}$$

$$f(x) \equiv s(x) \quad \text{para} \quad a \leq x \leq b.$$

Prueba:

$$\int_a^b f''^2(x) dx = \int_a^b s''^2(x) dx + \int_a^b (f''(x) - s''(x))^2 dx \\ + 2 \int_a^b s''(x) (f''(x) - s''(x)) dx$$

es suficiente ver que la última integral vale cero.

Aplicando integración por partes se tiene que:

$$\int_a^b s''(x) (f''(x) - s''(x)) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} s''(x) (f''(x) - s''(x)) dx \\ = \sum_{k=1}^n s_k''(x_k) (f''(x_k) - s_k''(x_k)) - s_k''(x_{k-1}) (f''(x_{k-1}) - s_k''(x_{k-1})) \\ - \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} s_k'''(x) (f'(x) - s_k'(x)) dx \\ = s_n''(x_n) (f''(x_n) - s_n''(x_n)) - s_1''(x_0) (f''(x_0) - s_1''(x_0)) - \\ - \sum_{k=1}^n a_k ((f(x_k) - s_k(x_k)) - (f(x_{k-1}) - s_k(x_{k-1})))$$

debido a 2.3.3.3 la última expresión es igual a

$$- \sum_{k=1}^n a_k ((y_k - y_k) - (y_{k-1} - y_{k-1})) = - \sum_{k=1}^n a_k \cdot 0 = 0$$

lo cual prueba el teorema.

El objetivo de haber construido la función spline natural, es poder calcular  $\int_a^b f(x) dx$  cuando no se tiene una expresión analítica  $f(x)$ , sino solamente  $n + 1$  puntos  $(x_k, y_k)$

$k = 0, 1, 2, \dots, n$  que satisfacen la relación  $y = f(x)$ . La idea es tomar :

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} s_k(x) dx \text{ como aproximación a } \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \text{ es decir}$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} s_k(x) dx \approx \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx$$

Sumando sobre  $k = 1, 2, \dots, n$  se tendrá que

$$\int_a^b s(x) dx \doteq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} s_k(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

Calculemos  $\int_{x_{k-1}}^{x_k} s(x) dx$ .

Se definió  $s_k(x) = a_k(x-x_k)^3 + b_k(x-x_k)^2 + c_k(x-x_k) + y_k$

y  $s(x) = s_k(x)$  si  $x_{k-1} \leq x \leq x_k$   $k = 1, 2, \dots, n$ .

entonces

$$\begin{aligned} \int_{x_{k-1}}^{x_k} s_k(x) dx &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} a_k(x-x_k)^3 + b_k(x-x_k)^2 + c_k(x-x_k) + y_k dx \\ &= \frac{a_k}{4} (x-x_k)^4 + \frac{b_k}{3} (x-x_k)^3 + \frac{c_k}{2} (x-x_k)^2 + y_k(x-x_k) \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} \\ &= -\frac{a_k h_{k-1}}{4} + \frac{b_k h_{k-1}}{3} - \frac{c_k h_{k-1}}{2} + y_k h_{k-1} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int_a^b s(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} s_k(x) dx = \sum_{k=1}^n -\frac{a_k h_{k-1}}{4} + \frac{b_k h_{k-1}}{3} - \frac{c_k h_{k-1}}{2} + y_k h_{k-1}$$

así calculando la última expresión obtenemos una aproximación pa-

ra  $\int_a^b f(x) dx$  ; los coeficientes  $a_k, b_k, c_k$  están determi-  
nados por el sistema 2.3.3.4 .



2.4 Reglas compuestas para el cálculo de  $\int_a^b f(x) dx$ .

En las secciones anteriores hemos dado algunas reglas para el cálculo de  $\int_a^b f(x) dx$ , ahora daremos otro tipo de reglas - llamadas reglas compuestas; estas últimas serán llamadas así debido a que la idea para aplicarlas será dividir el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  partes iguales y aplicar alguna regla ya conocida sobre todos y cada uno de los subintervalos que se obtienen después de dividir  $[a, b]$  en  $n$  partes iguales. Sobre este tipo de reglas no nos extenderemos demasiado pero daremos una idea sobre estos métodos y probaremos un teorema el cual asegura que bajo ciertas condiciones las reglas compuestas convergen al verdadero valor de  $\int_a^b f(x) dx$  pero para ir formalizando lo

hablado anteriormente daremos en seguida dos definiciones:

2.4.1 Definición. Una regla de integración para  $\int_a^b f(x) dx$

será una expresión del tipo  $R(f) = \sum_{k=1}^m w_k f(x_k)$  donde -

$a \leq x_k \leq b$  y  $w_k$  son números reales positivos llamados pesos.

Como ejemplos de estas reglas de integración tenemos el método del punto del lado derecho visto en la sección 2.2 y definido como

$$R(f) = \sum_{k=1}^n h f(x_k) \approx \int_a^b f(x) dx$$

donde  $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ ; aquí  $w_k$  los pesos son precisamente el valor de  $h$ , i.e.  $w_k = h$ .

Otro ejemplos es la regla del punto medio, también vista en la sección 2.2 y definida como

$$R(f) = \sum_{k=1}^n h f(y_k) \approx \int_a^b f(x) dx$$

Aquí nuevamente los pesos coinciden con el valor  $h$  y  $y_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$  donde  $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ .

2.4.2 Definición. Una regla de integración estandarizada es - una regla de integración para  $\int_0^1 f(x) dx$  i.e. una regla de integración estandar es una expresión del tipo  $R(f) = \sum_{k=1}^n w_k f(t_k)$  donde  $0 \leq t_k \leq 1$ .

Naturalmente que la definición 2.4.2 requiere que  $f(x)$  sea Riemann-integrable sobre  $[0,1]$ .

Una regla de integración estandar puede ser transferida a una regla de integración para  $\int_a^b f(x) dx$  mediante la transformación  $y = a + (b-a)x$  i.e. si

$$R(f) = \sum_{k=1}^m w_k f(t_k) \approx \int_0^1 f(x) dx$$

es una regla de integración estandar, aplicando la transformación  $y = a + (b-a)x$  obtenemos:

$$R(f) = \sum_{k=1}^m (b-a) w_k f(a + (b-a) t_k) \approx \int_a^b f(x) dx \quad 2.4.2.1$$

lo cual es una regla de integración para  $\int_a^b f(x) dx$  ya que la transformación  $y = a + (b-a)x$  mapea el intervalo  $[0,1]$  en el intervalo  $[a, b]$ .

2.4.3 Definición. Una regla de integración compuesta para  $\int_a^b f(x) dx$  consiste en dividir  $[a, b]$  en  $n$  partes iguales y

aplicar la regla (2.4.2.1) en cada subintervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  - donde  $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ , y después sumar sobre todas las  $k = 1, 2, \dots, n$ . A esta regla compuesta se la denotará por  $(n \times R)(f)$ .

Lo que la definición anterior quiere decir es lo siguiente: Dividamos  $[a, b]$  en  $n$  partes iguales de tal suerte que obtengamos  $n$  subintervalos  $[x_{k-1}, x_k]$  donde  $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  después apliquemos 2.4.2.1 sobre el subintervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  obteniendo así

$$\sum_{i=1}^m (x_k - x_{k-1}) w_i f(x_{k-1} + (x_k - x_{k-1}) t_i) \approx \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx$$

o equivalentemente

$$\sum_{i=1}^m \frac{b-a}{n} w_i f(x_{k-1} + \frac{b-a}{n} t_i) \approx \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx$$

y después sumando sobre todos los valores de  $k$  obtenemos

$$(n \times R)(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m w_i f(x_{k-1} + \frac{b-a}{n} t_i) \approx \int_a^b f(x) dx$$

lo cual es la expresión compactada de la regla compuesta  $(n \times R)$ .

A continuación probaremos un teorema que nos asegura que  $(n \times R)(f)$  converge al verdadero valor de  $\int_a^b f(x) dx$  bajo

el supuesto de que  $R(1) = \int_0^1 dx = 1$ , donde  $R(1)$  sería

una regla estandar aplicada a la función  $f(x) \equiv 1$

2.4.4 Teorema. Sea  $R(f)$  una regla de integración estandar /

i.e.  $R(f) = \sum_{k=1}^n w_k f(t_k)$ ;  $0 \leq t_k \leq 1$  tal que  $R(1) = 1$ .

Entonces la regla compuesta definida sobre  $[a, b]$  dada por

$$(n \times R)(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m w_i f(x_{k-1} + \frac{b-a}{n} t_i)$$

cumple que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \times R)(f) = \int_a^b f(x) dx$

Prueba:

$$\begin{aligned} (n \times R)(f) &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m w_i f(x_{k-1} + \frac{b-a}{n} t_i) \\ &= \sum_{i=1}^m w_i \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1} + \frac{b-a}{n} t_i) \end{aligned}$$

y para cada  $i$  se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1} + \frac{b-a}{n} t_i) = \int_a^b f(x) dx$$

en virtud del teorema 1.4.5 puesto que  $0 \leq t_i \leq 1$ .

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (n \times R)(f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m w_i f(x_{k-1} + \frac{b-a}{n} t_i) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m w_i \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1} + \frac{b-a}{n} t_i) \\ &= \sum_{i=1}^m w_i \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1} + \frac{b-a}{n} t_i) \\ &= \sum_{i=1}^m w_i \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \sum_{i=1}^m w_i \end{aligned}$$

$$= \int_a^b f(x) dx \cdot R(1) = \int_a^b f(x) dx .$$

Nótese que la condición para que  $R(1) = 1$  es que  $\sum_{i=1}^m w_i = 1$  este es el caso de la regla conocida como el método del punto del lado derecho y también del método del punto medio ya que en estos casos todos y cada uno de los pesos son precisamente el valor de la longitud del subintervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  .

## CAPITULO III

APLICACIONES DE LA INTEGRACION NUMERICAA UN PROBLEMA FISICO.

3.1 En que consiste el problema físico traducido a un lenguaje matemático.

El problema físico consiste en estudiar las termocorrientes iónicas (I.T.C.) en cristales de bromuro de cesio contaminadas con impurezas. Las termocorrientes iónicas (I.T.C.) se observan en cristales de bromuro de cesio contaminadas con impurezas y de un análisis de las curvas observadas se trata de calcular la energía de activación  $E$  del complejo impureza vacancia. El parámetro  $E$  está involucrado en la curva de termocorrientes iónicas (I.T.C.) representada por la ecuación:

$$J(T) = \frac{P_0}{T_0} \exp \left[ -\frac{E}{KT} - \frac{1}{\beta T_0} \int_{T_0}^T \exp \left( -\frac{E}{KT'} \right) dT' \right] \quad (\text{I.T.C.})$$

donde  $J(T)$  es la densidad de la corriente de depolarización,  $P_0$  es la polarización inicial,  $T_0$  es la constante de relajación, (generalmente desconocida),  $\beta$  la tasa de calentamiento y  $T_0$  es la temperatura para la cual  $J(T_0)$  es próxima a cero.  $E$ ,  $P_0$ ,  $T_0$  y  $\beta$  son constantes positivas y  $K$  es la constante de Boltzman ( $K \doteq 0.8625 \times 10^{-4}$ ). El problema físico ya traducido a un problema matemático consiste en estimar los parámetros  $E$  y  $T_0$  en base a la información de  $n$  observaciones (datos experimentales)  $(T_k, J(T_k))$   $k = 1, 2, \dots, n$  regidos median-



te la ecuación (I.T.C.).

Otra ecuación importante es la ecuación del tipo Arrhenius para el tiempo de relajación  $\mathcal{T}(T)$  dada por:

$$\mathcal{T}(T) = \mathcal{T}_0 \exp \frac{E}{KT}$$

El tiempo de relajación  $\mathcal{T}(T)$  también está dada por la igualdad

$$\mathcal{T}(T) = \frac{\int_T^{\infty} J(T') dT'}{J(T)}$$

Ya que el problema físico requiere muchos conceptos anteriores para su buen entendimiento, hacemos hincapie en que lo trataremos ya traducido a un lenguaje exclusivamente matemático, (en la parte de referencias se citan algunos artículos). Antes de proceder a dar métodos para estimar  $E$  y  $\mathcal{T}_0$  haremos un análisis de la curva (I.T.C.).

### 3.2 Un análisis previo de la curva (I.T.C.)

Previamente procederemos a analizar algunas propiedades de la ecuación (I.T.C.) sobre el intervalo  $[0, \infty)$

#### Propiedad 3.2.1

Nótese que  $J(T)$  es una función continua sobre el intervalo  $[0, \infty)$  y  $J(T) \geq 0$  para toda  $T \in [0, \infty)$

#### Propiedad 3.2.2

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} J(T) &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{P_0}{\mathcal{T}_0} \exp \left[ -\frac{E}{KT} - \frac{1}{\beta \mathcal{T}_0} \int_{\mathcal{T}_0}^T \exp -\frac{E}{KT'} dT' \right] \\ &= \frac{P_0}{\mathcal{T}_0} \exp \lim_{T \rightarrow 0} \left[ -\frac{E}{KT} - \frac{1}{\beta \mathcal{T}_0} \int_{\mathcal{T}_0}^T \exp -\frac{E}{KT'} dT' \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{P_0}{T_0} \exp \left[ - \lim_{T \rightarrow 0} \frac{E}{KT} + \frac{1}{\beta T_0} \int_0^{T_0} \exp - \frac{E}{KT'} dT' \right]$$

como  $\exp(-\frac{E}{KT})$  es continua en  $[0, T_0]$  entonces

$$\int_0^{T_0} \exp - \frac{E}{KT'} dT' \quad \text{existe y la última expresi-}$$

ón es igual a :

$$\frac{P_0}{T_0} \exp \left[ - \infty + \frac{1}{\beta T_0} \int_0^{T_0} \exp - \frac{E}{KT'} dT' \right] = 0$$

esto es la curva  $J(T) \rightarrow 0$  si  $T \rightarrow 0$

Propiedad 3.2.3

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} J(T) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{P_0}{T_0} \exp \left[ - \frac{E}{KT} - \frac{1}{\beta T_0} \int_{T_0}^T \exp - \frac{E}{KT'} dT' \right] \\ &= \frac{P_0}{T_0} \lim_{T \rightarrow \infty} \exp - \frac{E}{KT} \lim_{T \rightarrow \infty} \exp - \frac{1}{\beta T_0} \int_{T_0}^T \exp - \frac{E}{KT'} dT' \\ &= \frac{P_0}{T_0} \exp - \frac{1}{\beta T_0} \int_{T_0}^{\infty} \exp - \frac{E}{KT'} dT' \end{aligned}$$

como  $\exp - \frac{E}{KT'} \rightarrow 1$  si  $T \rightarrow \infty$  entonces

$$- \frac{1}{\beta T_0} \int_{T_0}^{\infty} \exp - \frac{E}{KT'} dT' \rightarrow - \infty$$

por lo tanto  $\frac{P_0}{T_0} \exp - \frac{1}{\beta T_0} \int_{T_0}^{\infty} \exp - \frac{E}{KT'} dT' \rightarrow 0$

esto es la curva  $J(T) \rightarrow 0$  si  $T \rightarrow \infty$

Propiedad 3.2.4.

$J(T)$  es derivable en todo  $(0, \infty)$  y

$$J'(T) = \frac{P_0}{T_0} \exp \left[ -\frac{E}{KT} - \frac{1}{B T_0} \int_{T_0}^T \exp \frac{-E}{KT'} dT' \right] \left( \frac{E}{KT^2} - \frac{1}{B T_0} \exp -\frac{E}{KT} \right)$$

Propiedad 3.2.5 La función  $J(T)$  cumple las siguientes condiciones:

- i) Existe un punto  $T^* \in (0, \infty)$  tal que  $J(T^*) \geq J(T)$  para toda  $T \in [0, \infty)$  y por lo tanto
- ii)  $J'(T^*) = 0$  y por lo tanto.
- iii)  $T^*$  es único en  $(0, \infty)$

Prueba de la propiedad 3.2.5:

Consideremos  $J(T^*) > 0$  donde  $T^*$  es algún punto fijo de  $[0, \infty)$  tal que  $J(T^*) > 0$  y sea  $\epsilon$  tal que  $0 < \epsilon < J(T^*)$ . En vista de 3.2.2 y 3.2.3 existen puntos  $T_1, T_2$ ,  $0 < T_1 < T_2 < \infty$ , tales que  $J(T) < \epsilon$  si  $T \in [0, T_1) \cup (T_2, \infty)$ . Nótese que  $T^* \in [T_1, T_2]$ . Puesto que  $J(T)$  es continua en  $[0, \infty)$ ,  $J(T)$  es continua en  $[T_1, T_2]$  y por tanto existe  $T^* \in [T_1, T_2]$  tal que  $J(T^*) \geq J(T)$  para  $T \in [T_1, T_2]$  (3.2.5.1) de acuerdo a uno de los Teoremas del punto 5 apéndice 1. Como  $J(T^*) \geq J(T^*)$  ya que  $T^* \in [T_1, T_2]$  entonces

$$J(T^*) \geq J(T^*) > \epsilon > J(T) \quad \text{si } T \in [0, T_1) \cup (T_2, \infty) \quad 3.2.5.2$$

de (3.2.5.1) y (3.2.5.2) se obtiene que  $J(T^*) \geq J(T)$  para

$T \in [0, \infty)$  con lo cual queda probada la existencia de  $T^*$ .

Ahora bien sea  $T^*$  tal que  $J(T^*) \geq J(T)$   $T \in [0, \infty)$ . Como  $J(0) = 0 < J(T^*)$  entonces  $T^* \in (0, \infty)$  y por tanto existe  $h > 0$  tal que  $0 < T^* - h < T^* < T^* + h < \infty$  y como  $J(T^*) \geq J(T)$  para  $T \in [0, \infty)$   $J(T^*) \geq J(T)$  para  $T$  en la vecindad  $(T^* - h, T^* + h)$ , por lo tanto  $J(T^*)$  además de ser el máximo de  $J(T)$  en  $[0, \infty)$   $J(T^*)$  es un máximo local de acuerdo a la definición del punto 1 del apéndice 3 y según el teorema del punto 1, del apéndice 3  $J'(T^*) = 0$  lo cual prueba la segunda conclusión.

Ahora probaremos la unicidad de  $T^*$ ; hemos visto que  $J'(T^*) = 0$  si  $J(T^*) \geq J(T)$  para  $T \in [0, \infty)$ , entonces de la propiedad 3.2.4 tenemos:

$$0 = J'(T^*) = \frac{F_0}{T_0} \exp\left[\frac{-E}{KT^*} - \frac{1}{\beta T_0} \int_{T_0}^{T^*} \exp \frac{-E}{KT'} dT'\right] \left(\frac{E}{KT^{*2}} - \frac{1}{\beta T_0} \exp \frac{E}{KT^*}\right)$$

como el primer factor de la expresión anterior es mayor que cero, si  $0 < T < \infty$  y  $T^* \in (0, \infty)$  entonces la única posibilidad para que  $J'(T^*) = 0$  es que

$$\frac{E}{KT^{*2}} - \frac{1}{\beta T_0} \exp \frac{-E}{KT^*} = 0 \quad \text{o equivalentemente}$$

$$\frac{K}{E} T^{*2} = \beta T_0 \exp \frac{E}{KT^*}$$

Caso 1. Sea  $0 < T < T^*$  entonces

$$\frac{K}{E} T^2 < \frac{K}{E} T^{*2} = \beta T_0 \exp \frac{E}{KT^*} < \beta T_0 \exp \frac{E}{KT}$$

o equivalentemente

$$\frac{E}{KT^2} > \frac{E}{KT^{*2}} = \frac{1}{\beta T_0} \exp - \frac{E}{KT} > \frac{1}{\beta T_0} \exp - \frac{E}{KT}$$

entonces

$$\frac{E}{KT^2} - \frac{1}{\beta T_0} \exp - \frac{E}{KT} > \frac{E}{KT^{*2}} - \frac{1}{\beta T_0} \exp - \frac{E}{KT} = 0$$

entonces como  $J(T) > 0$  para  $0 < T < \infty$  resulta

$$J'(T) = J(T) \cdot \left( \frac{E}{KT^2} - \frac{1}{\beta T_0} \exp - \frac{E}{KT} \right) > 0$$

si  $0 < T < T^*$ , por lo tanto  $J'(T) > 0$  si  $0 < T < T^*$  3.2.5.3

Caso 2. Sea  $T^* < T < \infty$  entonces

$$\frac{K}{E} T^2 > \frac{K}{E} T^{*2} = \beta T_0 \exp \frac{E}{KT^*} > \beta T_0 \exp \frac{E}{KT}$$

o equivalentemente

$$\frac{E}{KT^2} < \frac{E}{KT^{*2}} = \frac{1}{\beta T_0} \exp - \frac{E}{KT} < \frac{1}{\beta T_0} \exp - \frac{E}{KT}$$

entonces

$$\frac{E}{KT^2} - \frac{1}{\beta T_0} \exp - \frac{E}{KT} < \frac{E}{KT^{*2}} - \frac{1}{\beta T_0} \exp - \frac{E}{KT} = 0$$

y como  $J(T) > 0$  si  $0 < T < \infty$  se tiene que

$$J'(T) = J(T) \cdot \left( \frac{E}{KT^2} - \frac{1}{\beta T_0} \exp - \frac{E}{KT} \right) < 0$$

si  $T^* < T < \infty$  por tanto  $J'(T) < 0$  si  $T^* < T < \infty$  3.2.5.4

Ahora supongamos que  $T^*$ ,  $X \in (0, \infty)$  son tales que  $J(X) \geq J(T)$  para  $T \in [0, \infty)$ , y  $J(T^*) \geq J(T)$  para  $T \in [0, \infty)$ . Ya hemos demostrado que dada esta condición como consecuencia tenemos que  $0 = J'(X) = J'(T^*)$  y por 3.2.5.3. y 3.2.5.4 si  $0 < X < T^*$  entonces  $J'(X) > 0$  y si  $T^* < X < \infty$  -  $J'(X) < 0$  por tanto la única posibilidad para que  $J'(X) = 0 = J'(T^*)$  es que  $X = T^*$  lo cual prueba la unicidad de  $T^*$ .

Propiedad 3.2.6

Corolario a la propiedad 3.2.5

La función  $J(T)$  es creciente en  $[0, T^*]$  y decreciente en  $[T^*, \infty)$

La prueba es consecuencia de que

$$\begin{aligned} J'(T) &> 0 && \text{si } 0 < T < T^* \\ J'(T) &< 0 && \text{si } T^* < T < \infty \end{aligned}$$

y del teorema del punto 2 apéndice 3.

Propiedad 3.2.7

$$\int_{\Lambda}^{\infty} J(T) dT < \infty \quad \text{para } 0 \leq \Lambda < \infty$$

Prueba:

Sea  $f'(T) = \frac{E}{KT^2} \exp - \frac{E}{KT} > 0$

entonces  $f(T) = \exp - \frac{E}{KT}$  es una función creciente por lo

tanto para  $T \geq T_0$   $\exp - \frac{E}{KT_0} \leq \exp - \frac{E}{KT}$  entonces

$$\int_{T_0}^T \exp - \frac{E}{KT_0} dT' \leq \int_{T_0}^T \exp - \frac{E}{KT'} dT' \quad \text{si } T \geq T_0$$



$$\therefore \exp - \frac{E}{KT_0} (T - T_0) \leq \int_{T_0}^T \exp - \frac{E}{KT'} dT' \quad \text{si } T \geq T_0$$

Multiplicando por  $-\frac{1}{\beta T_0}$  y tomando exponenciales se obtiene

$$\exp - \left[ \frac{1}{\beta T_0} \exp - \frac{E}{KT_0} (T - T_0) \right] \geq \exp - \frac{1}{\beta T_0} \int_{T_0}^T \exp - \frac{E}{KT'} dT'$$

$$\text{Sea } B = \frac{1}{\beta T_0} \exp - \frac{E}{KT_0} > 0$$

entonces integrando la penúltima expresión desde  $T_0$  a  $\infty$  y multiplicando y dividiendo el primer miembro por  $-B$  se obtiene:

$$-\frac{1}{B} \int_{T_0}^{\infty} -B \exp -B(T - T_0) dt \geq \int_{T_0}^{\infty} \exp - \frac{1}{\beta T_0} \int_{T_0}^T \exp - \frac{E}{KT'} dT' dT$$

entonces

$$\left[ \exp - B(T - T_0) \right]_{T_0}^{\infty} \geq \int_{T_0}^{\infty} \exp - \frac{1}{\beta T_0} \int_{T_0}^T \exp - \frac{E}{KT'} dT' dT$$

o equivalentemente

$$\int_{T_0}^{\infty} \exp - \frac{1}{\beta T_0} \int_{T_0}^T \exp - \frac{E}{KT'} dT' dT \leq \frac{1}{B} = \beta T_0 \exp \frac{E}{KT_0} \quad 3.2.7.1$$

Por otro lado como  $J(T) \geq 0$

$$\begin{aligned} \int_A^{\infty} J(T) dT &\leq \int_0^{\infty} J(T) dT = \\ &= \frac{P_0}{T_0} \int_0^{\infty} \exp - \frac{E}{KT} \cdot \exp - \frac{1}{\beta T_0} \int_{T_0}^T \exp - \frac{E}{KT'} dT' dT \end{aligned}$$

$$\text{como } \exp - \frac{E}{KT} \leq 1 \quad \text{y} \quad \exp - \frac{1}{\beta T_0} \int_{T_0}^T \exp - \frac{E}{KT'} dT' \geq 0$$

para  $0 \leq T < \infty$  la última expresión resulta ser menor o igual a

$$\frac{P_0}{T_0} \int_0^{\infty} \exp - \frac{1}{\beta T_0} \int_{T_0}^T \exp - \frac{E}{KT'} dT' dT =$$

$$\frac{P_0}{T_0} \left[ \int_0^{T_0} \exp - \frac{1}{\beta T_0} \int_{T_0}^T \exp - \frac{E}{KT'} dT' dT + \int_{T_0}^{\infty} \exp \frac{1}{\beta T_0} \int_{T_0}^T \exp \frac{-E}{KT'} dT' dT \right]$$

$$\leq \frac{P_0}{T_0} \left[ \int_0^{T_0} \exp \frac{-1}{\beta T_0} \int_{T_0}^T \exp \frac{-E}{KT'} dT' dT + \beta T_0 \exp \frac{E}{KT_0} \right] < \infty$$

debido a 3.2.7.1 y al hecho de que como  $\exp \frac{1}{\beta T_0} \int_{T_0}^T \exp \frac{-E}{KT'} dT'$

es una función continua, su integral sobre  $[0, T_0]$  existe, lo cual prueba 3.2.7.

De las propiedades anteriores se puede obtener la siguiente gráfica.

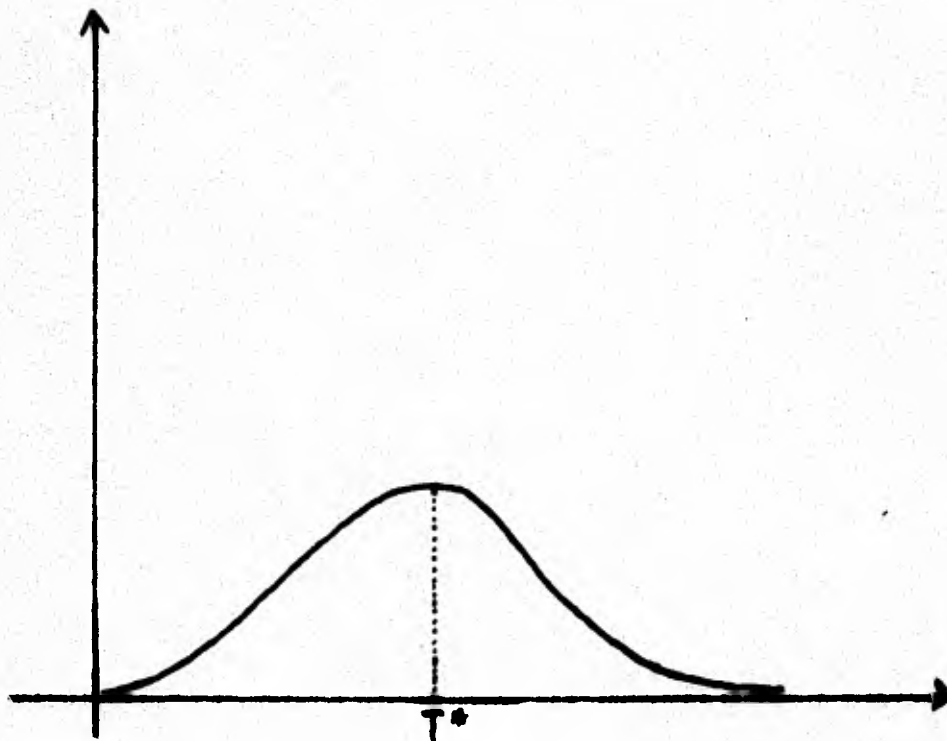


Figura 8 Gráfica de la curva I.T.C.

### 3.3 Cálculo de $\int_{T_s}^{\infty} J(T) dT$

Supongamos que se tienen  $n$  datos experimentales -  $(T_1, J(T_1)), (T_2, J(T_2)), \dots, (T_n, J(T_n))$ ;  $0 \leq T_1 < \dots < T_n < \infty$  de la curva I.T.C., analizada en la sección 3.2 es decir que cada punto  $(T_k, J(T_k))$   $k = 1, 2, \dots, n$  satisface la relación I.T.C. y queremos calcular  $\int_{T_s}^{\infty} J(T) dT$  para toda  $s = 1, 2, \dots, n$  en este caso podemos abordar el problema aplicando alguno de los métodos de integración vistos en la sección 2.3.

El método dado por el teorema 2.3.2 nos asegura que si  $\Delta T_k$  es suficientemente pequeño la cantidad

$$\sum_{k=s}^n \frac{J(T_k) + J(T_{k-1})}{2} \Delta T_k$$

es una buena aproximación a  $\int_{T_s}^{\infty} J(T) dT$  donde

$\Delta T_k = T_{k+1} - T_k$ , nótese que en la suma aparece implícitamente el punto  $(T_{k+1}, J(T_{k+1}))$  del cual no se ha hablado, este valor  $T_{n+1}$  sólo se tomará como una cota de integración ya que estamos integrando sobre un intervalo infinito, es decir, tomaremos a  $T_{n+1}$  como el valor para el cual

$$\int_{T_s}^{T_{n+1}} J(T) dT = \int_{T_s}^{\infty} J(T) dT$$

dicho valor existe ya que  $\int_{T_s}^{\infty} J(T) dT < \infty$  y como consecuencia de lo anterior  $T_{n+1}$  deberá ser un valor para el cual  $J(T_{n+1})$  sea próximo a cero.

Esta sección 3.3 presenta la importancia de la inte-

gración numérica en el problema físico ya que al calcular

$\int_{T_0}^{\infty} J(T) dT$  habremos calculado el tiempo de relajación  $\mathcal{T}(T_0)$  el cual viene dado por  $\mathcal{T}(T_0) = \frac{\int_{T_0}^{\infty} J(T) dT}{J(T_0)}$  el tiempo

de relajación  $\mathcal{T}(T_0)$  no servirá para la estimación de los parámetros  $E$  y  $\mathcal{T}_0$ .

### 3.4 Estimación de los parámetros $E$ y $\mathcal{T}_0$ .

De la sección 3.1 se tiene que el tiempo de relajación  $\mathcal{T}(T)$  está dado por  $\mathcal{T}(T) = \mathcal{T}_0 \exp \frac{E}{KT}$  tomando logaritmos naturales de ambos lados de la igualdad se obtiene que:

$$\ln \mathcal{T}(T) = \frac{E}{KT} + \ln \mathcal{T}_0 \quad 3.4.1$$

de donde podemos concluir que la gráfica del logaritmo natural del tiempo de relajación  $\mathcal{T}(T)$  contra el inverso algebraico de la temperatura  $\frac{1}{T}$  representa una línea recta con pendiente  $-\frac{E}{R}$  y ordenada al origen  $\ln \mathcal{T}_0$ .

Ahora supongamos que mediante el método presentado en la sección 3.3 hemos calculado y enlistado los  $n$  tiempos de relajación:

$$\mathcal{T}(T_s) = \int_{T_s}^{\infty} \frac{J(T) dT}{J(T_s)} \quad s = 1, 2, \dots, n$$

y por tanto hemos enlistado los  $n$  logaritmos  $\ln \mathcal{T}(T_1)$ ,  $\ln \mathcal{T}(T_2)$ ,  $\dots$ ,  $\ln \mathcal{T}(T_n)$ , así como  $\frac{1}{T_1}$ ,  $\frac{1}{T_2}$ ,  $\dots$ ,  $\frac{1}{T_n}$ ; considerando como variable dependiente a  $\ln \mathcal{T}(T)$ , y a  $\frac{1}{T}$

como variable independiente y teniendo en cuenta que los  $n$  - puntos  $(1/T_1, \ln(T_1))$ ,  $(1/T_2, \ln(T_2))$ , ...,  $(1/T_n, \ln(T_n))$  describen aproximadamente una línea recta con pendiente  $\frac{E}{K}$  y ordenada al origen  $\ln T_0$ , podemos aplicar el método de los mínimos cuadrados descrito en el Apéndice 3 y obtener así la mejor recta que describe su comportamiento, es decir, obtener los mejores parámetros  $E/K$  y  $\ln T_0$  dados por

$$\frac{\widehat{E}}{K} = \frac{\sum_{k=1}^n (\ln(T_k) - \overline{\ln(T)}) \cdot (1/T_k - \overline{1/T})}{\sum_{k=1}^n (1/T_k - \overline{1/T})^2}$$

$$y \quad \widehat{\ln T_0} = \overline{\ln T(T)} - E/K \cdot \overline{1/T} \quad 3.4.2 \quad (\text{ver apéndice 3.}$$

punto 3) donde

$$\overline{\ln T(T)} = \frac{\sum_{k=1}^n \ln T(T_k)}{n} \quad y \quad \overline{1/T} = \frac{\sum_{k=1}^n 1/T_k}{n}$$

Teóricamente hablando la figura 9 muestra la gráfica del  $\ln T(T)$  contra  $1/T$ .

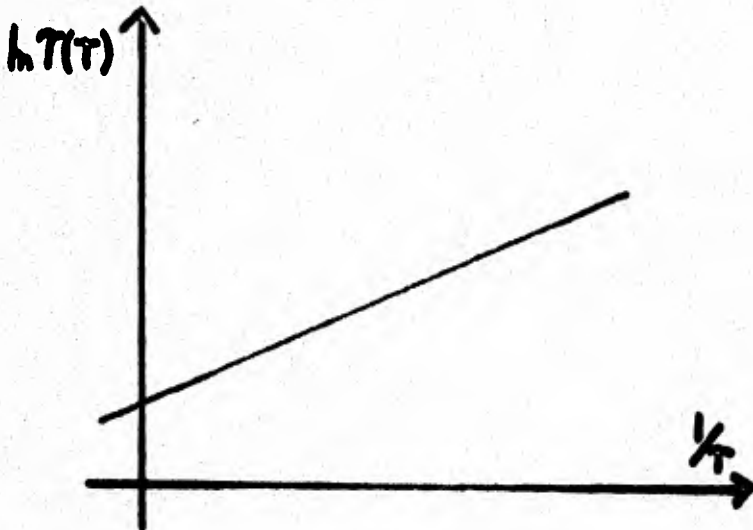


Figura 9

## CAPITULO IV

METODOS NUMERICOS Y UN ALGORITMOPARA LA ESTIMACION DE E Y  $\tau_0$ 

En el capítulo anterior hemos dado una idea del método para estimar E y  $\tau_0$ ; basándonos en el capítulo anterior presentaremos un algoritmo para estimar dichos parámetros, aunque queremos hacer mucho hincapié en que nuestro propósito no es la estimación de los parámetros E y  $\tau_0$  sino mostrar la importancia de la integración numérica en este problema. Ya hemos visto en la sección 3.3 que al calcular  $\int_{T_s}^{\infty} J(T) dT$  mediante alguna regla de integración numérica, podemos obtener el tiempo de relajación

$$\tau(T_s) = \int_{T_s}^{\infty} J(T) dT / J(T_s)$$

y proceder a estimar E y  $\tau_0$  como se da la idea en la sección 3.4

Este capítulo ya no tendrá mucha importancia en el sentido de la integración numérica pero sin embargo redondeará el problema de la estimación de E y  $\tau_0$ , ya que presentará un algoritmo para obtener estos últimos y además un programa en algol que nos resuelve el problema. El algoritmo que a continuación presentaremos estará dado en forma de diagrama de flujo.

4.1 Algoritmo para la estimación de E y  $\tau_0$ .



Leer los datos  $T_1, T_2, \dots, T_n, T_{n+1}$   
 $J(T_1), J(T_2), \dots, J(T_n), J(T_{n+1}), K$  y  $n$

Calcular  $\Delta T_s = T_{s+1} - T_s$   
 para toda  $s = 1, 2, \dots, n$

Calcular  $I_s = \sum_{j=s}^n \frac{J(T_j) + J(T_{j+1})}{2} \Delta T_j$   
 para toda  $s = 1, 2, \dots, n$

Calcular  $\ln \overline{\mathcal{T}}(T_s) = \ln (I_s / J(T_s))$   
 para  $s = 1, 2, \dots, n$

Calcular  $1/T_s$  para  $s = 1, 2, \dots, n$

Calcular  $\overline{\ln \mathcal{T}}(T) = \sum_{s=1}^n \ln \overline{\mathcal{T}}(T_s) / n$   
 $\overline{1/T} = \sum_{s=1}^n (1/T_s) / n$

Calcular  $\hat{E} = K \frac{\sum_{j=1}^n (\ln \mathcal{T}(T_j) - \overline{\ln \mathcal{T}}) (1/T_j - \overline{1/T})}{\sum_{j=1}^n (1/T_j - \overline{1/T})^2}$

y  $\hat{\mathcal{T}}_0 = \exp (\overline{\ln \mathcal{T}} - (\hat{E}/K)(\overline{1/T}))$

4.2 Un programa en Algol para calcular  $E$  y  $T_0$  y comentarios al algoritmo.

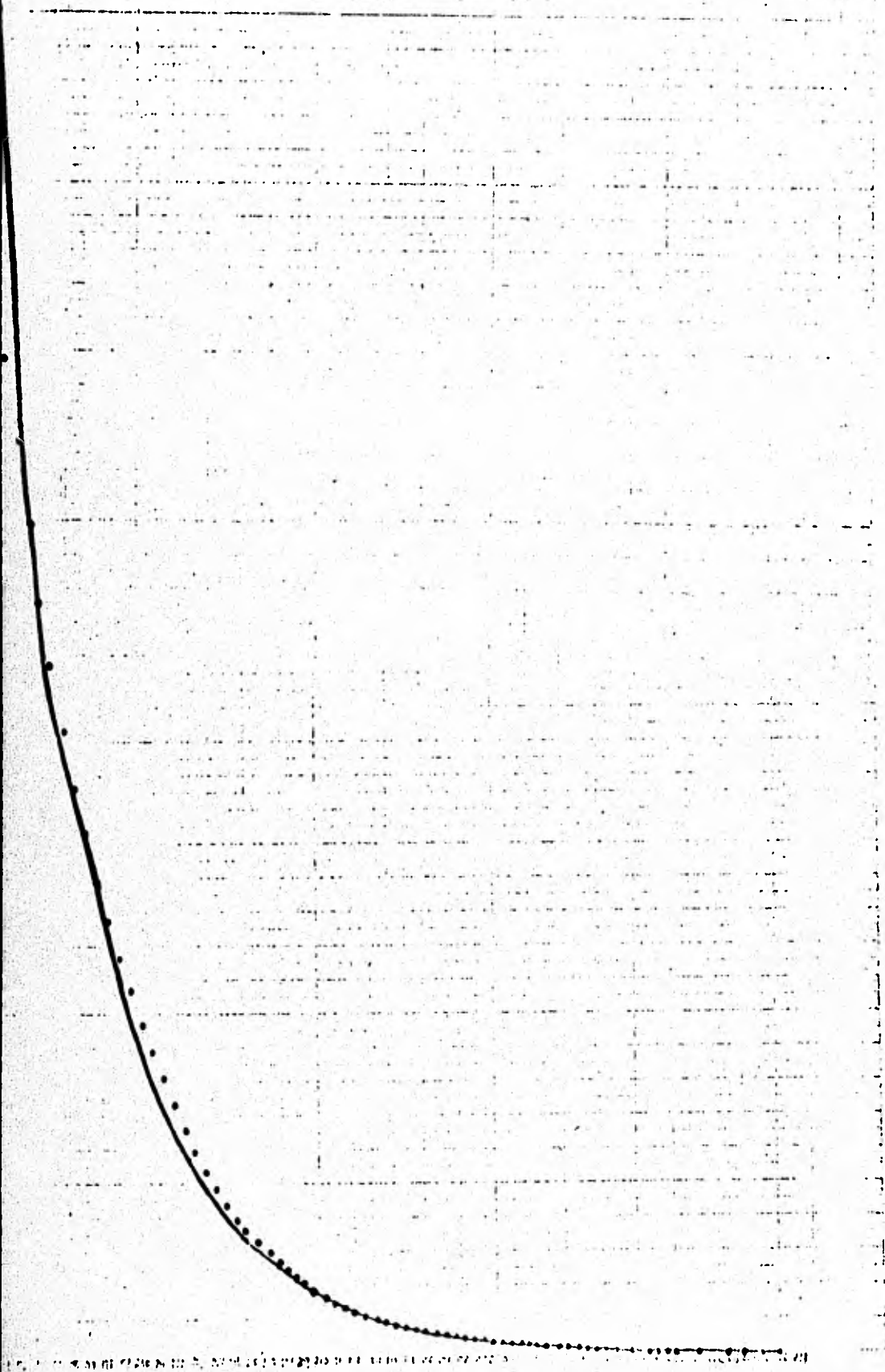
El algoritmo de la sección 4.1 está basado en la sección 3.4 ; se dijo en dicha sección que  $T_{n+1}$  es tomado simplemente como cota de integración, i.e. para calcular:

$$\int_{T_8}^{T_{n+1}} J(T) dT \quad \text{como aproximación a} \quad \int_{T_8}^{\infty} J(T) dT$$

así mismo tomamos  $I_8 = \sum_{j=8}^n \frac{J(T_j) + J(T_{j+1})}{2} \Delta T_j$  para calcular

$\int_{T_8}^{\infty} J(T) dT$  basándonos en la regla del trapecio, la justificación al resto de los pasos en el algoritmo estarán dadas por la sección 3.4.

Ahora basándonos en el algoritmo de la sección 4.1 presentamos a continuación un programa en Algol que calcula los parámetros  $E$  y  $T_0$ , el cual se usó para  $n = 84$  observaciones que se obtuvieron al contaminar con impurezas un cristal de Bromuro de Cesio, dichas observaciones se enlistan en las dos primeras columnas del programa y en la tercera el tiempo de relajación  $T(T)$ . También se presenta la gráfica de la curva del tiempo de relajación contra la temperatura, cuando los parámetros  $E$  y  $T_0$  han sido estimados en base a las observaciones enlistadas en el programa. Los puntos aislados en la gráfica son las observaciones enlistadas en el programa.











## CAPITULO V

MÉTODOS ESTADÍSTICOS Y ESTIMACION DE  $\mu$  Y  $\sigma^2$ .

5.1 El modelo lineal simple  $y = mx + b$ .

Supongamos que tenemos  $n$  observaciones  $(x_k, y_k)$  con  $k = 1, 2, \dots, n$  donde  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  las cuales se rigen mediante una relación lineal  $y = mx + b$  donde  $m$  y  $b$  son dos parámetros a determinar, puesto que  $(x_k, y_k)$  son observaciones, estas últimas estarán sujetas a algún error de observación o de medición donde el error se espera que sea pequeño, es decir

$$y_1 = mx_1 + b + e_1$$

$$y_2 = mx_2 + b + e_2$$

.....

.....

$$y_n = mx_n + b + e_n$$

donde  $e_k$  es una cantidad positiva o negativa próxima a cero.

Si consideramos  $e_k$   $k = 1, 2, \dots, n$  como variables aleatorias y suponemos independencia entre ellas, entonces  $e_k$  tendrá una función de densidad de probabilidad normal.

$$f(e_k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{(e_k - \mu)^2}{2\sigma^2} \quad \dots \quad 5.1.1.$$

con media  $\mu = 0$  y varianza  $\sigma^2 > 0$ . Sustituyendo  $\mu = 0$  en 5.1.1 obtenemos que:

$$f(e_k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{e_k^2}{2\sigma^2}$$

La razón por la cual supondremos que  $e_k$  tiene una distribución normal con media cero ( $\mu = 0$ ) es debido a que  $e_k$  puede ser una cantidad positiva o negativa con muy alta probabilidad de estar en una

vecindad de cero como la muestra la figura 11.

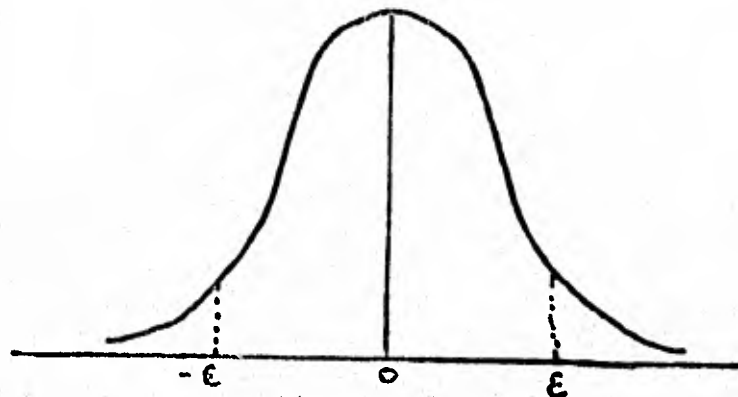


figura 11.

Recuérdese que  $P_r = [ -\epsilon \leq e_k \leq \epsilon ] = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{e_k^2}{2\sigma^2}}$

Si  $P_r [ -\epsilon \leq e_k \leq \epsilon ]$  se espera que sea grande quiere decir que la mayor parte del área bajo la curva se concentra en el intervalo  $[-\epsilon, \epsilon]$ . Recuerde que  $P_r$  denota probabilidad.

### 5.2 Estimación de $\sigma^2$ , $m$ y $b$ por máxima verosimilitud.

En la sección 5.1 supusimos que las variables aleatorias  $e_1, e_2, \dots, e_n$  son independientes, bajo este supuesto tendremos que si  $e_k$  tiene una distribución normal con media cero,

esto es  $f(e_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{e_k^2}{2\sigma^2}$

entonces si denotamos por  $L(e_1, e_2, \dots, e_n)$  a la función conjunta de densidad de probabilidad ésta viene dada por:

$$\begin{aligned} L(e_1, e_2, \dots, e_n) &= \prod_{k=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{e_k^2}{2\sigma^2} \right) \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \exp - \frac{\sum_{k=1}^n e_k^2}{2\sigma^2} \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \exp - \frac{\sum_{k=1}^n (y_k - mx_k - b)^2}{2\sigma^2} \end{aligned}$$

Tomando logaritmos naturales se tiene que:

$$\begin{aligned} \ln L(e_1, e_2, \dots, e_n) &= \frac{n}{2} \ln\left(\frac{1}{\sigma^2 2\pi}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{(y_k - mx_k - b)^2}{2\sigma^2} \\ &= \frac{n}{2} (-\ln 2\pi\sigma^2) - \sum_{k=1}^n \frac{(y_k - mx_k - b)^2}{2\sigma^2} \end{aligned}$$

y derivando respecto a  $m$ ,  $b$  y  $\sigma^2$  se obtienen las siguientes igualdades:

$$\frac{\partial \ln L(e_1, \dots, e_n)}{\partial m} = \frac{-2 \sum_{k=1}^n -x_k (y_k - mx_k - b)}{2\sigma^2} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k (y_k - mx_k - b)}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \ln L(e_1, \dots, e_n)}{\partial b} = \frac{-2 \sum_{k=1}^n -(y_k - mx_k - b)}{2\sigma^2} = \frac{\sum_{k=1}^n (y_k - mx_k - b)}{\sigma^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(e_1, \dots, e_n)}{\partial \sigma^2} &= \frac{-n}{2} \cdot \frac{1}{2\pi\sigma^2} 2\pi + \sum_{k=1}^n \frac{(y_k - mx_k - b)^2}{2(\sigma^2)^2} \\ &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{k=1}^n (y_k - mx_k - b)^2}{2\sigma^2 \cdot \sigma^2} \end{aligned}$$

e igualando las tres derivadas anteriores a cero se obtiene que:

$$\hat{m} \sum_{k=1}^n x_k^2 + \hat{b} \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_k y_k \quad \dots \quad 5.2.1$$

$$\hat{m} \sum_{k=1}^n x_k + n \hat{b} = \sum_{k=1}^n y_k \quad \dots \dots \dots \quad 5.2.2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (y_k - mx_k - b)^2}{n} \quad 5.2.3$$

Nótese que  $\hat{m}$  y  $\hat{b}$  están dadas por

$$\hat{b} = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}$$

y 
$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

ya que 5.2.1 y 5.2.2 es el sistema de ecuaciones obtenido en el punto 3 del apéndice 3 referente al método de los mínimos cuadrados.

Recuérdese que esta forma de estimar  $m$ ,  $b$  y  $\sigma^2$  es conocida como el método de máxima verosimilitud. y  $\hat{m}$ ,  $\hat{b}$  y  $\hat{\sigma}^2$  son conocidos como los estimadores máximo verosímiles de  $m$ ,  $b$  y  $\sigma^2$  respectivamente y los estimadores  $\hat{m}$  y  $\hat{b}$  coinciden con los estimadores del método de mínimos cuadrados del apéndice 3.

5.3 Estimación de  $m$  y  $b$  por intervalos.

En la sección anterior se calculó  $\sigma^2$ ,  $m$  y  $b$ .

Consideremos ahora 
$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{n}{n-2} \hat{\sigma}^2$$

Las variables aleatorias:

$$\frac{\hat{b} - b}{\sigma \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n x_k^2}{n \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}}}, \quad \frac{\hat{m} - m}{\sigma \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}}$$

tienen una distribución normal con media  $\mu = 0$  y varianza  $\sigma^2 = 1$

y 
$$\frac{(n-2)\tilde{\sigma}^2}{\sigma^2}$$
 Tiene una distribución Chi-cuadrada con  $n-2$

grados de libertad denotada por  $\chi^2_{(n-2)}$

Por lo tanto las variables aleatorias

$$\frac{\hat{b} - b}{\sigma \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n x_k^2}{n \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}}} \sqrt{\frac{(n-2)\tilde{\sigma}^2}{(n-2)\sigma^2}} = \frac{\hat{b} - b}{\tilde{\sigma} \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n x_k^2}{n \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}}}$$

5.3.1

$$y \frac{\frac{\hat{m} - m}{\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n-2}}}}{\sqrt{\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{(n-2)\hat{\sigma}^2}}} = \frac{\hat{m} - m}{\hat{\sigma} \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n-2}}} \quad 5.3.2$$

tiene una distribución *t*-student con  $n-2$  grados de libertad denotada por  $t(n-2)$ .

Sea  $t(n-2) \frac{\alpha}{2}$  un valor tal que si  $u$  es una variable aleatoria que tiene una distribución  $t(n-2)$  entonces:

$$\Pr \left[ -t(n-2) \frac{\alpha}{2} \leq U \leq t(n-2) \frac{\alpha}{2} \right] = 1 - \alpha \quad \text{donde } 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ y } \Pr \text{ denota probabilidad.}$$

Como las variables aleatorias 5.3.1 y 5.3.2 tienen una distribución  $t(n-2)$

$$\Pr \left[ -t(n-2) \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\hat{b} - b}{\hat{\sigma} \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n x_k^2}{n \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}}} \leq t(n-2) \frac{\alpha}{2} \right] = 1 - \alpha$$

$$y \Pr \left[ -t(n-2) \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\hat{m} - m}{\hat{\sigma} \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}} \leq t(n-2) \frac{\alpha}{2} \right] = 1 - \alpha$$

o equivalentemente,

$$\Pr \left[ -t(n-2) \frac{\alpha}{2} \hat{\sigma} \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n x_k^2}{n \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}} + \hat{b} \leq b \leq t(n-2) \frac{\alpha}{2} \hat{\sigma} \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n x_k^2}{n \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}} + \hat{b} \right] = 1 - \alpha \quad 5.3.3$$

$$\Pr \left[ -t(n-2) \frac{\alpha}{2} \hat{\sigma} \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2} + \hat{m} \leq m \leq t(n-2) \frac{\alpha}{2} \hat{\sigma} \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2} + \hat{m} \right] = 1 - \alpha \quad 5.3.4$$

A 5.3.3 y 5.3.4 se les llama los intervalos de confianza para  $m$  y  $b$  al  $(1-\alpha)\%$

5.4 La estimación de los parámetros  $E$  y  $\tau_0$  mediante intervalos de confianza.

Recordemos que en el capítulo IV se describió el problema de la estimación de los parámetros  $E$  y  $\tau_0$  de la curva I.T.C y se dió un método para estimarlos: recordemos también que  $E$  y  $\tau_0$  están involucrados en la ecuación del tipo Arrhenius para el tiempo de relajación  $\tau(T)$  dado por

$$\tau(T) = \tau_0 \exp \frac{E}{KT}$$

Tomando logaritmos naturales a ambos lados de la ecuación se tiene que

$$\ln \tau(T) = \frac{E}{KT} + \ln \tau_0$$

y como se explicó en el Capítulo IV el inverso algebraico de la temperatura  $1/T$  v.s. el logaritmo natural del tiempo de relajación  $\tau(T)$  representa una recta con pendiente  $E/K$  y ordenada al origen  $\ln \tau_0$ .

Si ahora consideramos nuevamente que tenemos enlistados los  $n$  logaritmos del tiempo de relajación  $\ln \tau(T_1), \dots, \ln \tau(T_n)$  y los  $n$  inversos algebraicos de la temperatura  $1/T_1, \dots, 1/T_n$  que son observaciones experimentales del fenómeno y consideramos que que debido a errores de medición aleatorios en aparatos técnicos

$$\ln \tau(T_1) = E/KT_1 + \ln \tau_0 + e_1$$

.....

.....

$$\ln \tau(T_n) = E/KT_n + \ln \tau_0 + e_n$$

podemos pensar que por el avance en la tecnología el error aleatorio



$e_k$  se espera que sea pequeño y desde luego será un error por exceso o por defecto, es decir,  $e_k$  puede tomar valores positivos o negativos con una alta probabilidad de estar en una vecindad del número 0.

De esta manera el supuesto de que  $e_k$  es una variable aleatoria que tiene una función de densidad de probabilidad normal con media  $\mu = 0$  y varianza  $\sigma^2$  es válida. Si también suponemos independencia entre los errores y haciendo la substitución:

$$x_k = 1/T_k \quad \text{y} \quad y_k = \ln T(T_k)$$

en 5.3.3. y 5.3.4 se tienen los intervalos de confianza  $E/K$  y  $\ln T_0$  dadas por

$$\Pr \left[ -t(n-2) \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n 1/T_k^2}{n \sum_{k=1}^n (1/T_k - \bar{T})^2}}} + \frac{\hat{E}}{K} \leq \frac{E}{K} \leq t(n-2) \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n 1/T_k^2}{n \sum_{k=1}^n (1/T_k - \bar{T})^2}}} + \frac{\hat{E}}{K} \right] = 1 - \alpha \quad \text{5.4.1}$$

$$\Pr \left[ -t(n-2) \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (1/T_k - \bar{T})^2}{n}}} + \ln \hat{T}_0 \leq \ln T_0 \leq t(n-2) \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (1/T_k - \bar{T})^2}{n}}} + \ln \hat{T}_0 \right] = 1 - \alpha \quad \text{5.4.2}$$

o de manera equivalente

$$\Pr \left[ -t(n-2) \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n 1/T_k^2}{n \sum_{k=1}^n (1/T_k - \bar{T})^2}}} + \hat{E} \leq E \leq t(n-2) \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n 1/T_k^2}{n \sum_{k=1}^n (1/T_k - \bar{T})^2}}} + \hat{E} \right] = 1 - \alpha \quad \text{5.4.3}$$

y

$$\Pr \left[ \exp \left( -t(n-2) \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (1/T_k - \bar{T})^2}{n}}} + \ln \hat{T}_0 \right) \leq T_0 \leq \exp \left( t(n-2) \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (1/T_k - \bar{T})^2}{n}}} + \ln \hat{T}_0 \right) \right] = 1 - \alpha \quad \text{5.4.4}$$

donde  $\hat{\sigma}$  se calcula en base a las observaciones  $1/T_k$  y  $\ln(T_k)$

$k = 1, 2, \dots, n$

$\widehat{\ln T}_0$  y  $\widehat{E/K}$  están dados en la sección 3.4 ya que los estimadores máximo verosímiles coinciden con los obtenidos por el método de mínimos cuadrados.

Debe notarse que los intervalos 5.4.1 y 5.4.2 tienen su punto medio en  $\widehat{E/K}$  y  $\widehat{\ln T}_0$  respectivamente y contienen a los parámetros  $E/K$  y  $\ln T_0$  con una probabilidad de  $1 - \alpha$ , con lo cual se hace notar que los resultados obtenidos a través del método de mínimos cuadrados en cierta manera coinciden con los resultados obtenidos mediante el tratamiento estadístico.

APENDICES.

Apéndice 1.

0 Referencias del Capítulo I

- Para mayores detalles sobre límites de funciones que dependen de  $n$  ver Calculus Tom M. Apostol, volumen 1 segunda edición, capítulo 10, pag. 464. Editorial Reverté S.A. MCMLXXIII.

- Para mayores detalles sobre límites de funciones mencionados en la Sección 1.5, ver Calculus Tom. M. Apostol, Volumen 1 segunda edición, capítulo 3, pag. 156, Editorial Reverté, S.A. MCMLXXIII.

1. Propiedades de funciones escalonadas.

i)  $u(x) = s(x) \pm t(x)$  es escalonada si  $s(x)$  y  $t(x)$  son escalonadas en  $[a, b]$ .

Prueba: Si  $s(x)$  es escalonada, existe una partición  $P_1$  de  $[a, b]$  tal que  $s(x)$  es constante en cada subintervalo de  $P_1$ , lo mismo para  $t(x)$ , existe  $P_2$  partición de  $[a, b]$  tal que  $t(x)$  es constante en cada subintervalo de  $P_2$ . Ahora nótese que para  $P = P_1 \cup P_2$ ,  $u(x)$  es constante en cada subintervalo de la partición  $P$  es decir, la partición formada por todos los puntos que pertenecen a  $P_1$ , a  $P_2$  o a ambas particiones,  $\therefore u(x)$  es escalonada ya que existe la partición  $P$  donde  $u$  es constante en cada subintervalo de dicha partición.

ii)  $u(x) = s(x) t(x)$  también es escalonada.

Prueba: Es escalonada puesto que también es constante en cada subintervalo de la partición  $P = P_1 \cup P_2$  ya que  $s(x)$  y  $t(x)$  lo son.

iii)  $u(x) = \frac{s(x)}{t(x)}$  es escalonada si  $t(x) \neq 0$

Prueba: Como  $t(x)$  es constante en cada subintervalo de  $P_2$  y como  $t(x) \neq 0$  en  $[a, b]$  entonces  $1/t(x)$  está definida y es constante en cada subintervalo de  $P_2$ , de donde  $1/t(x)$  es escalonada y como  $s(x)$  es escalonada, de ii) se obtiene que  $u(x) = s(x) \cdot (1/t(x)) = \frac{s(x)}{t(x)}$  es escalonada.

iv)  $f \circ s(x) = f(s(x))$  también es escalonada si  $s(x)$  lo es.

Prueba: Como  $s(x)$  es constante en cada subintervalo de la partición  $P_1$  entonces  $f(s(x))$  también es constante en cada subintervalo de la partición  $P_1$ .

2. Proposición: Sean  $f$  y  $g$  dos funciones acotadas sobre algún intervalo cerrado  $[a, b]$ . Sean  $M' = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$  y

$M'' = \sup_{x \in [a, b]} g(x)$ ;  $m' = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$  y  $m'' = \inf_{x \in [a, b]} g(x)$ ;  $\dots$

$M = \sup_{x \in [a, b]} (f + g)(x)$  y  $m = \inf_{x \in [a, b]} (f + g)(x)$ , entonces -

i)  $M \leq M' + M''$

ii)  $m \geq m' + m''$

Prueba: Como  $f(x) \leq M'$  y  $g(x) \leq M''$  para toda  $x \in [a, b]$  entonces:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \leq M' + M'' \quad \text{para } x \in [a, b]$$

en particular

$$M = \sup_{x \in [a, b]} (f + g)(x) \leq M' + M'' \quad \text{lo cual demuestra i).}$$

Ahora  $m' \leq f(x)$  y  $m'' \leq g(x)$  para toda  $x \in [a, b]$  entonces

$$m' + m'' \leq f(x) + g(x) = (f + g)(x) \quad \text{para toda } x \in [a, b]$$

en particular

$$m' + m'' \leq \inf_{x \in [a, b]} (f + g)(x) = m$$

3. Sea  $f(x)$  una función definida y acotada sobre el intervalo cerrado  $[a, b]$ , sea  $c$  una constante no negativa, entonces

$$\sup_{x \in [a, b]} c f(x) = c \sup_{x \in [a, b]} f(x) .$$

Prueba:  $f(x) \leq \sup_{x \in [a, b]} f(x)$  para toda  $x \in [a, b]$  como  $c \geq 0$  entonces

$$c f(x) \leq c \sup_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{para } x \in [a, b]$$

por lo tanto

$$\sup_{x \in [a, b]} c f(x) \leq c \sup_{x \in [a, b]} f(x) \quad (1)$$

además

$$c f(x) \leq \sup_{x \in [a, b]} c f(x)$$

entonces

$$f(x) \leq 1/c \sup_{x \in [a, b]} c f(x) \quad \text{si } c > 0$$

entonces

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) \leq 1/c \sup_{x \in [a, b]} c f(x) \quad \text{lo cual implica que}$$

$$c \sup_{x \in [a, b]} f(x) \leq \sup_{x \in [a, b]} c f(x) \quad (2)$$

Por las desigualdades (1) y (2) se obtiene que

$c \sup_{x \in [a, b]} f(x) = \sup_{x \in [a, b]} c f(x)$  ; si  $c = 0$  es evidente la igualdad.

4. Sean  $a, b$  dos números reales tales que  $a < b$  entonces

i) existe  $c \in \mathbb{Q}$  tal que  $a < c < b$

ii) existe  $c' \in \mathbb{I}$  tal que  $a < c' < b$

donde  $\mathbb{Q}$  son los números racionales e  $\mathbb{I}$  los números irracionales.

Prueba para i)

Sea  $n$  el número entero más próximo al número  $a$  tal que  $n \leq a$

entonces  $n \leq a < b$ , por ser  $n$  el entero más próximo a  $a$  menor o igual que  $a$ , entonces  $a < n+1$ . Si  $n+1 < b$  entonces sea  $c = n+1$ . Si  $b \leq n+1$  entonces se tiene que  $n \leq a < b \leq n+1$  y consideremos la partición  $P_m$  del intervalo  $[n, n+1]$  donde  $P_m = \{n = x_0 < x_1 < \dots < x_m = n+1\}$  y donde  $x_k = n + k/m$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, m$  y  $m$  es un número natural; entonces para cierta  $m$  se tendrá que  $a \leq n + k/m = x_k < b$ , ya que si esto no sucede entonces se tendrá que para toda  $m$  y cierta  $k$ :

$$x_k = n + k/m \leq a < b \leq n + (k+1)/m = x_{k+1}$$

y por tanto  $b - a \leq x_{k+1} - x_k \leq 1/m$

i.e.  $b - a \leq 1/m$  para toda  $m$ , lo cual no es posible.

Prueba de ii) Si  $a \in \mathbb{Q}$  y  $s$  es un irracional cualquiera, entonces  $a + s/m$  es irracional para todo  $m$  natural, elíjase  $m$  tal que  $a < a + s/m < b$ , en este caso  $c' = a + s/m$ . Si  $b \in \mathbb{Q}$  escójase  $m$  tal que  $a < b - s/m < b$  y en este caso sea  $c' = b - s/m$ . Si  $a$  y  $b$  son irracionales, como  $1/m$  es racional para cualquier  $m$  natural, elíjase esta de manera tal que  $a < a + 1/m < b$  y en este caso sea  $c' = a + 1/m$ .

Nota: En las demostraciones anteriores se usó el hecho de que la suma de dos números racionales es racional y la suma de un número racional y un número irracional es un número irracional. Para mayores detalles ver el libro: - What's Mathematics? por Richard Courant y Herbert Robbins, Oxford University Press 1941.



5. Teoremas sobre continuidad para justificar la Sección 1.4  
Teorema del valor intermedio para funciones continuas.

Sea  $f$  continua sobre  $[a, b]$ . Si  $x_1 < x_2$  son dos puntos cualesquiera de  $[a, b]$  tales que  $f(x_1) \neq f(x_2)$  entonces la función  $f$  toma todos los valores comprendidos entre  $f(x_1)$  y  $f(x_2)$  por lo menos una vez en el intervalo abierto  $(x_1, x_2)$ .

Detalles y demostración, ver página 177 Calculus Tom II. Apog<sub>tol</sub>. Editorial Reverté S.A. Volumen 1 Segunda Edición.

Teorema del Supremo y el ínfimo para funciones continuas.

Si  $f$  es continua sobre  $[a, b]$ , existen puntos  $c$  y  $d$  en  $[a, b]$  tales que

$$f(c) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$$

$$f(d) = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$$

Detalles y demostración ver página 186 Calculus Tom. M. Apog<sub>tol</sub>, Editorial Reverté, S. A. Volumen 1. Segunda Edición.

Teorema sobre continuidad y continuidad uniforme.

Sea  $f$  una función continua sobre el intervalo cerrado  $[a, b]$  entonces  $f$  es uniformemente continua sobre  $[a, b]$ .

Ver página 91 de Principle of Mathematical Analysis Walter Rudin, Tercera Edición. Mc Graw Hill International - Student Editions in Related Fields.

El Teorema enunciado arriba está basado en que el intervalo  $[a, b]$  es un conjunto compacto. Para mayores detalles consultar el libro antes mencionado.

6. Teoremas sobre Derivabilidad para justificar la sección 1.5

**Teorema.** Sea  $f$  una función definida sobre  $[a, b]$ , si  $f$  es derivable en un punto  $x_0 \in [a, b]$  entonces  $f$  es continua en  $x_0$ .

**Teorema de la Derivada de un producto de funciones.**

Supóngase que  $f$  y  $g$  están definidas y son derivables en  $[a, b]$ , entonces  $h(x) = f(x)g(x)$  es derivable en  $[a, b]$ , y  $h'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$  para toda  $x \in [a, b]$ .

**Teorema. Regla de la Cadena.**

Supóngase que  $f$  es continua sobre  $[a, b]$  y que  $f'(x)$  existe para  $x \in [a, b]$  y  $g$  está definida sobre algún intervalo  $I$  que contiene a la imagen de  $[a, b]$  bajo  $f$ , y que  $g$  es derivable en el punto  $f(x)$  para toda  $x \in [a, b]$ . Entonces  $h(x) = g(f(x))$  es derivable en  $x \in [a, b]$  y  $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$

**Teorema del Valor Medio para derivadas.**

Sea  $f$  una función continua sobre  $[a, b]$ , la cual es derivable sobre  $(a, b)$ . Entonces existe  $x_0 \in (a, b)$  tal que  $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$ .

**Nota:** las demostraciones y detalles de los teoremas anteriores verlos en el capítulo 5 del libro Principles of Mathematical Analysis, Third Edition de Walter Rudin, Mc Graw Hill - International Student Editions in Related Fields.

7. Sean  $f$  y  $g$  dos funciones Riemann-integrables sobre el intervalo  $[a, b]$ , entonces  $h(x) = f(x)g(x)$  es Riemann-integrable sobre  $[a, b]$ .

Para detalles y demostraciones ver en el capítulo 6 de --  
Principles of Mathematical Analysis arriba mencionado.

## Apéndice 2.

### 1. Teorema de Taylor.

Supongamos que  $f(x)$  es una función definida sobre algún intervalo  $I$ , abierto o cerrado, tal que  $f(x)$  admite derivadas hasta el orden  $n + 1$  en  $I$ . Entonces para cada  $x \in I$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}$$

donde  $x_0 \in I$  y  $c$  está entre  $x$  y  $x_0$ .

Detalles y demostración ver página 633 de Introduction to Mathematical Analysis Volume I de Norman B. Haaser, Blaisdell Publishing Company.

### 2. Teorema. Supongamos que tenemos $n + 1$ puntos en $\mathbb{R}^2$

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  tales que  $x_0 < x_1 < \dots$

$\dots < x_n$ . Entonces existen constantes  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$

tales que el polinomio  $P(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0$

interpola los puntos  $(x_k, y_k)$  para toda  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Prueba:

Sea

$$P(x) = \sum_{k=0}^n y_k \frac{(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{k-1})(x-x_{k+1}) \dots (x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1) \dots (x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1}) \dots (x_k-x_n)}$$

Nótese que  $P(x_k) = y_k$  para toda  $k = 0, 1, \dots, n$  y

las constantes  $A_0, A_1, \dots, A_n$  se obtienen después de des-

arrollar y asociar productos y sumas.

3. Teorema. Supongamos que

$$P(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0$$

es el polinomio que interpola los puntos  $(x_k, y_k)$ , del Teorema 2. Entonces las constantes  $A_0, A_1, \dots, A_n$  son únicas.

Para la prueba del teorema 3 necesitaremos los siguientes dos lemas.

3'. Lema:

Sea  $P(x)$  un polinomio de grado  $n \geq 1$  con el coeficiente de  $x^n$  unitario y sea  $r$  una raíz de  $P(x)$  i.e.  $P(r) = 0$ . Entonces  $P(x) = (x - r) q(x)$  donde  $q(x)$  es un polinomio de grado  $n - 1$  con coeficiente para  $x^{n-1}$  unitario.

Prueba: Sea  $P(x) = x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0$

y sea  $c$  cualquier número real, entonces

$$\begin{aligned} P(x) - P(c) &= (x^n - c^n) + A_{n-1} (x^{n-1} - c^{n-1}) + \dots \\ &\dots + A_1 (x - c) = (x - c) q(x) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} q(x) &= (x^{n-1} + c x^{n-2} + c^2 x^{n-3} + \dots + c^{n-1}) + \\ &A_{n-1} (x^{n-2} + c x^{n-3} + \dots + c^{n-2}) + \dots + A_1 \end{aligned}$$

por tanto  $q(x)$  es un polinomio de grado  $n-1$  con el coeficiente de  $x^{n-1}$  unitario.

Ahora volviendo al hecho de que

$$P(x) - P(c) = (x - c) q(x) \quad \text{si } r \text{ es raíz}$$

de  $P(x)$  se tendrá que

$$P(x) = (x - r) q(x)$$

y el lema queda probado.

3" Lema. Supongamos que  $P(x) = A_n x^n + \dots + A_1 x + A_0$  es un polinomio de grado  $n \geq 1$ , entonces  $P(x)$  tiene exactamente  $n$  raíces; si  $r_1, r_2, \dots, r_n$  son dichas raíces entonces

$$P(x) = A_n (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$$

El lema 3" es consecuencia del Lema 3' ya que si  $A_n \neq 0$  - entonces  $A_n^{-1} P(x)$  es un polinomio de grado  $n$  con coeficiente de  $x^n$  unitario y aplicando el lema 3' consecutivamente al polinomio  $A_n^{-1} P(x)$  se obtiene que

$$A_n^{-1} P(x) = (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$$

i. e. 
$$P(x) = A_n (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$$

Prueba del Teorema 3 : Razonemos por contradicción, suponiendo que existen constantes  $B_0, B_1, \dots, B_n$  y  $A_0, A_1, \dots, A_n$  tales que los polinomios

$$P_A(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0$$

y 
$$P_B(x) = B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \dots + B_1 x + B_0$$

interpolan los puntos  $(x_k, y_k)$  para toda  $k = 0, 1, \dots, n$

Entonces:

$$P_A(x_0) = y_0 = P_B(x_0)$$

$$P_A(x_1) = y_1 = P_B(x_1)$$

⋮

$$P_A(x_n) = y_n = P_B(x_n)$$

i. e.  $P_A(x_k) - P_B(x_k) = 0$  para toda  $k = 0, 1, \dots, n$   
o equivalentemente

$$(A_n - B_n)x_k^n + (A_{n-1} - B_{n-1})x_k^{n-1} + \dots + (A_1 - B_1)x_k + (A_0 - B_0) = 0$$

para toda  $k = 0, 1, \dots, n$ , i.e.  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$  son  $n+1$  raíces diferentes del polinomio

$$P_A(x) - P_B(x) = (A_n - B_n)x^n + (A_{n-1} - B_{n-1})x^{n-1} + \dots + (A_0 - B_0)$$

el cual a lo más es de grado  $n$  y tiene  $n+1$  raíces diferentes, lo cual contradice el lema 3" y demuestra el teorema.

### Apéndice 3.

1. Definición: Se dice que  $f(x')$  es un máximo local de la función  $f(x)$ , si existe  $h > 0$  tal que  $f(x') \geq f(x)$  para toda  $x \in (x'-h, x'+h)$

Teorema. Si  $f(x')$  es un máximo local de  $f(x)$  y  $f(x)$  es derivable en el punto  $x'$  entonces  $f'(x') = 0$ .

Ver página 228 de Calculus de Tom M. Apostol, Vol. 1 Segunda edición, Editorial Reverté S.A. MCMCLXXIII.

2. Teorema. Supongamos que  $f(x)$  es una función continua sobre  $[a, b]$  y derivable sobre  $(a, b)$ , entonces si  $f'(x) \geq 0$  para toda  $x \in (a, b)$   $f(x)$  es creciente en  $[a, b]$

Prueba: Sean  $x_1, x_2 \in [a, b]$  tales que  $x_1 < x_2$  entonces por el teorema del valor medio para derivadas del punto 6, apéndice 1 se tiene que:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) (x_2 - x_1) \geq 0$$

ya que  $c$  es elemento de  $(x_1, x_2)$  es decir  $f(x_2) \geq f(x_1)$  y por tanto  $f(x)$  es creciente en  $[a, b]$ .



### 3. El método de los mínimos cuadrados.

Supongamos que se tienen  $n$  observaciones  $(x_k, y_k)$  ( $x_i \neq x_j$  para  $i \neq j$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ) de algún fenómeno regido aproximadamente por la relación  $y = mx + b$  (aquí  $x$  la llamaremos variable independiente y  $y$  la llamaremos variable dependiente), puesto que las observaciones  $(x_k, y_k)$  describen aproximadamente una línea recta  $y = mx + b$  podemos establecer para cada  $k$  que

$$y_k = mx_k + b + e_k$$

donde  $e_k$  es el error de aproximación. (ver figura 10). Estamos interesados en encontrar  $m$  y  $b$  tales que se cometa el menor error posible, para tal efecto procederemos de la siguiente

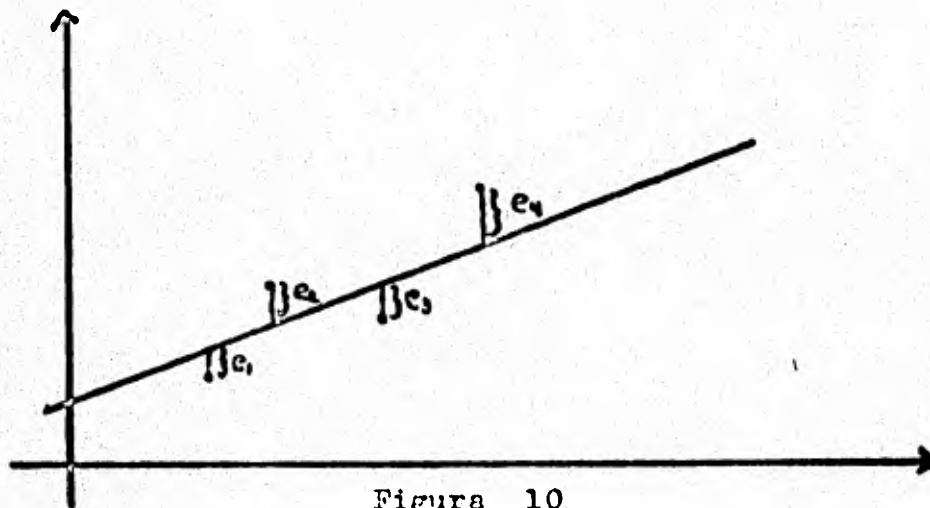


Figura 10

te manera: despejando  $e_k$  obtenemos que  $e_k = y_k - mx_k - b$

de donde  $e_k^2 = (y_k - mx_k - b)^2$  y sumando sobre  $k = 1, 2, \dots, n$  se obtiene que

$$\sum_{k=1}^n e_k^2 = \sum_{k=1}^n (y_k - mx_k - b)^2$$

la idea es minimizar la suma de los errores de los cuadrados - mediante algún método, digamos mediante el método de las derivadas parciales: derivando  $\sum_{k=1}^n e_k^2$  con respecto a  $b$  y  $m$  obtenemos:

$$\frac{\partial \sum_{k=1}^n e_k^2}{\partial m} = -2 \sum_{k=1}^n x_k (y_k - mx_k - b)$$

$$\frac{\partial \sum_{k=1}^n e_k^2}{\partial b} = -2 \sum_{k=1}^n (y_k - mx_k - b)$$

Igualando a cero las parciales anteriores obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k = \hat{m} \sum_{k=1}^n x_k^2 + \hat{b} \sum_{k=1}^n x_k \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n y_k = \hat{m} \sum_{k=1}^n x_k + \hat{n} b$$

o escrito en forma matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n x_k y_k \\ \sum_{k=1}^n y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k \\ \sum_{k=1}^n x_k & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{b} \end{bmatrix}$$

de donde

$$\text{determinante} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k \\ \sum_{k=1}^n x_k & n \end{bmatrix} = n \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= n \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2 \left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \\
&= n \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2n \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) / n + n^2 \left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 / n^2 \\
&= n \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2n\bar{x} \sum_{k=1}^n x_k + n^2 \bar{x}^2
\end{aligned}$$

$$\text{donde } \bar{x} = \sum_{k=1}^n x_k / n$$

$$\begin{aligned}
&= n \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2\bar{x} \sum_{k=1}^n x_k + n\bar{x}^2 \right) \\
&= n \sum_{k=1}^n (x_k^2 - 2\bar{x}x_k + \bar{x}^2) \\
&= n \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 > 0
\end{aligned}$$

Como el determinante es diferente de cero ya que  $x_i \neq x_j$  si  $i \neq j$  se tiene que el sistema (1) tiene solución y además es única. De donde resolviendo (1) por el método de los determinantes se obtiene que:

$$\hat{m} = \frac{n \sum_{k=1}^n x_k y_k - \sum_{k=1}^n x_k \sum_{k=1}^n y_k}{n \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2} \quad y$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k^2 \sum_{k=1}^n y_k - \sum_{k=1}^n x_k \sum_{k=1}^n x_k y_k}{n \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}$$

de donde

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k y_k - \left( \sum_{k=1}^n x_k \sum_{k=1}^n y_k \right) / n}{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k y_k - \bar{x} \sum_{k=1}^n y_k}{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k y_k - n \bar{x} \sum_{k=1}^n y_k / n}{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k y_k - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2} \end{aligned}$$

$$\text{donde } \bar{y} = \sum_{k=1}^n y_k / n$$

$$\text{i.e. } \hat{m} = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}$$

También

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k^2 \sum_{k=1}^n y_k - \sum_{k=1}^n x_k \sum_{k=1}^n x_k y_k}{n \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2} = \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k^2 \sum_{k=1}^n y_k - 2n^2 \bar{x}^2 \sum_{k=1}^n y_k + n^2 \bar{x}^2 \sum_{k=1}^n y_k - n \sum_{k=1}^n x_k \sum_{k=1}^n x_k y_k + n^2 \bar{x}^2 \sum_{k=1}^n y_k}{n^2 \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2} \\ &= \frac{n \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2\bar{x} \sum_{k=1}^n x_k + n\bar{x}^2 \right) \sum_{k=1}^n y_k - n \sum_{k=1}^n x_k \sum_{k=1}^n x_k y_k + n^2 \bar{x}^2 \sum_{k=1}^n y_k}{n^2 \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2} \\ &= \frac{n \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \sum_{k=1}^n y_k - n \sum_{k=1}^n x_k \sum_{k=1}^n x_k y_k + \left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \sum_{k=1}^n y_k}{n^2 \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2} \end{aligned}$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{k=1}^n y_k}{n} - \frac{(n \sum_{k=1}^n x_k y_k - \sum_{k=1}^n x_k \sum_{k=1}^n y_k)}{n \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}$$

$$\hat{b} = \bar{y} - m \bar{x}$$

$$\text{i.e. } \hat{b} = \bar{y} - m \bar{x}$$

Desde luego que el hecho de que las derivadas parciales se anulan en los puntos

$$\hat{m} = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}$$

$$\text{y } \hat{b} = \bar{y} - m \bar{x}$$

no forzosamente implica que la función  $\sum_{k=1}^n e_k^2$  alcanza su

mínimo en estos últimos, pero sin embargo con algunos otros argumentos de Geometría Analítica, se puede demostrar este hecho ya que la función

$$\sum_{k=1}^n e_k^2 = \sum_{k=1}^n (y_k - mx_k - b)^2$$

representa un paraboloides elíptico.

## BIBLIOGRAFIA EN MATEMATICAS.

1. Principles of Mathematical Analysis. Third Edition. Walter Rudin, Ma Graw Hill. International Student Editions in -- Related Fields.
2. Calculus. Tom M. Apostol. Segunda Edición. Editorial Reverté, S.A.
3. Cálculo infinitesimal. Michael Spivak. Editorial Reverté, S.A.
4. Introduction to Analysis. Norman B. Hasser, Joseph P. La - Salle, Joseph A. Sullivan, Blaisdell & Publishing Company. Volume I.
5. Numerical Integration. Philip J. Davis & Philip Rabinowitz, Blaisdell Publishing Company.
6. Computer Methods for Mathematical Computations. George E. - Forsythe, Michael A. Malcolm & Cleve B. Moler. Computer - Science Department Stanford University.
7. Spline Functions, interpolation, and numerical quadrature THE Greville, Mathematics Research Center, U.S. Army. University of Wisconsin. (Artículo)
8. Theory of Probability. Bernard Harris Mathematical Research Center, University of Wisconsin. Addison-Wesley Publishing Company.
9. An introduction to linear Statistical Models, Volume I. - Franklin A. Graybill. Colorado State University. Mc Graw-Hill Book Company INC.

## BIBLIOGRAFIA EN FISICA.

1. Studies of relaxation processes in  $\text{EaF}_2$  :  $\text{La}^{3+}$  crystals by ionic-thermocurrent techniques. E. Laredo, M. Fuma, y D.R. Figueroa. Physical Review B. Volume 19, Number 4 - Departamento de Física. Universidad Simón Bolívar. Caracas, Venezuela. (Artículo)
2. Ionic Thermocurrents in impurity doped cesium bromide. S. Radhakrishna and S. Haridoss. Solid State Communications, Vol. 18, pp. 1247-1250, 1976. Department of Physics, Indian Institute of Technology, Madras-600 036, India. Pergamon - Press. (Artículo).
3. Precipitación de Impurezas de Calcio en Cristales de Cloruro de Potasio. E.M. de Escobar, D.V. Loomis. Laboratorio de Semiconductores, Departamento de Física, Facultad de Ingeniería y Arquitectura. Universidad de El Salvador. (Artículo).