

1927
Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS



Algunas Gráficas de Intersección

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A:

Virginia Urrutia Galicia

MEXICO, D. F.

1982



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

	P A G .
Introducción _____	1
 <u>CAPITULO A</u>	
Definiciones _____	7
Gráficas de Comparabilidad _____	9
Algoritmos de Reconocimiento _____	10
Gráficas de Intersección _____	14
Gráficas de Intervalos _____	16
 <u>CAPITULO B</u>	
Gráficas Cordales _____	29
Gráficas R-Orientables _____	31
Gráficas de Intersección de Sub- árboles de un Arbol _____	35
Algoritmos de Reconocimiento de Gráficas R-Orientables _____	39
Clanes Máximos , Cubiertas por Clanes Minimas y Conjuntos Independientes Máximos _____	41
 <u>CAPITULO C</u>	
Gráficas Arco Circulares _____	46
Gráficas $\{B_1\}$ Orientables _____	47
Algoritmos de reconocimiento de Gráficas $\{B_1\}$ Orientables _____	52

Caracterizaciones de Algunas Gráficas a través de Ciertas Gráficas Prohibidas _____	54
Referencias _____	72

INTRODUCCION

Una gráfica G consiste de un conjunto finito de elementos $V(G)$ llamados vértices de G así como de un conjunto $E(G)$ de parejas no ordenadas de elementos de $V(G)$ llamadas aristas de G .

En éste trabajo se estudiarán algunas familias de gráficas conocidas como gráficas de intersección de curvas en el plano. Dichas gráficas surgieron en forma natural de problemas de la vida diaria así como de necesidades en otras disciplinas científicas.

Una de las gráficas de intersección a tratar serán las gráficas de intervalos, éstas son las obtenidas al tomar como curvas en el plano, intervalos en la recta real. Y están consideradas entre las estructuras matemáticas más simples. Como un ejemplo daremos el siguiente problema.

Supóngase que tenemos C_1, \dots, C_n componentes químicas los cuáles deben ser refrigerados a temperatura constante entre t_i y t_{i+1} grados. ¿Cuántos refrigeradores son necesarios para almacenar todas las componentes?

Sea G la gráfica de intervalos con vértices v_1, \dots, v_n tal que dos vértices son adyacentes si sus intervalos de temperatura correspondientes se intersectan. Se sabe por la propiedad-Helly que si $\{C_1, \dots, C_k\}$ es un clan de G entonces $\{(t_{ij}, t'_{ij}) \mid j=1, \dots, k\}$ tendrá un punto en común. Sea t dicho punto.

Necesitamos por tanto para almacenar las componentes C_{ij} $j=1, \dots, k$ un conjunto de refrigeradores a temperatura t y por lo tanto la solución para minimizar el problema es encontrar una cubierta mínima por clanes para los vértices de G .

Un tipo de gráficas más generales que las gráficas de intervalo son las gráficas de intersección de subárboles de un árbol. De éstas las gráficas de intervalos forman un subconjunto, así como de aquellas gráficas tales que todo ciclo de longitud mayor o igual a 4 tiene una cuerda que une dos vértices no consecutivos llamadas gráficas cordales.

Uno de los resultados más importantes que comprobaremos es que la familia formada por las gráficas de intersección de subárboles de un árbol, la familia de las gráficas cordales, y la familia de las gráficas R -orientables son la misma donde las gráficas R -orientables son aquellas para las cuáles podemos encontrar una orientación tal que no contiene ciclos dirigidos y que para cualesquiera tres vértices v_1, v_2, v_3 tales que si $v_1 \rightarrow v_2, v_2 \rightarrow v_3$ entonces (v_1, v_3) en $E(G)$

A partir de éstas equivalencias es fácil dar algoritmos para reconocer dichas gráficas.

Una familia más, en las cuáles las gráficas de intervalos también están contenidas son las gráficas arco-circulares. Estas son las obtenidas al considerar arcos sobre una circunferencia y encontrar su gráfica de intersección. Las gráficas arco-circulares cumplen con la condición de ser R -orientables

es decir para cualesquiera tres vértices v_1, v_2, v_3 se tiene que si $v_1 \rightarrow v_2, v_3 \rightarrow v_2$ entonces $(v_1, v_3) \in E(G)$. Caracterizaciones de ellas han sido encontradas así como algoritmos para reconocerlas. Una de ellas fué dado por Tucker, ésta es dada en términos de matrices con la propiedad de los 1-consecutivos para columnas.

Ser $\{B_i\}$ -orientable tal vez sea una buena herramienta para encontrar otra caracterización de las gráficas arco-circulares y por tanto daremos algunas propiedades acerca de gráficas $\{B_i\}$ -orientables así como un algoritmo para obtener dicha orientación en caso de existir.

Un problema de aplicación de las gráficas arco circulares es el siguiente:

Supóngase que queremos controlar el flujo de tráfico en una esquina. Ciertos carriles serán compatibles con unos mientras que con otros no y por tanto para evitar colisiones se instalará un semáforo.

Asociaremos un diagrama arco circular al problema de la siguiente manera.

A cada carril le asociaremos un arco en un círculo el cuál puede ser considerado como un reloj representando un ciclo el cuál será repetido. El arco asignado representará por tanto el tiempo durante el cuál dicho carril tiene luz verde.

A carriles incompatibles les serán asignados arcos ajenos.

Resolver el problema de controlar el flujo de tráfico -- evitando colisiones se reducirá al problema de encontrar una cubierta mínima por clanes para los vértices de la gráfica de intersección obtenida de el diagrama arco-circular asignado al problema.

Un ejemplo específico de éste problema está dado en la -- figura siguiente.

Aspectos adicionales pueden ser incorporados a éste problema, como por ejemplo minimizar el tiempo de espera.

Algunos de los problemas , antes mencionados así como -- algunos problemas más sobre las aplicaciones de las gráficas de intersección pueden ser encontrados en Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs by Martin Charles Golumbic.

CAPITULO I

Una gráfica G consiste de un conjunto de vértices $V(G)$ un conjunto $E(G)$ de pares no ordenados (u,v) de vértices llamados aristas. Los extremos de una arista $e=(u,v)$ son u y v y decimos que u y v son adyacentes.

Una gráfica G es una gráfica simple si no contiene aristas multiples ni lazos. En esta tesis sólo trabajaremos con gráficas simples y finitas.

Denotaremos por $|V(G)|$ el número de vértices de una gráfica y $|E(G)|$ el número de aristas

Una gráfica simple en la cuál cada par de vértices distintos son extremos de una arista es llamada gráfica completa y la denotamos por K_n si $n=|V(G)|$

La gráfica vacía es la gráfica que no contiene aristas.

El conjunto de vértices adyacentes a un vértice v en $V(G)$ se le llamará vecindad de v y lo denotaremos por $\Gamma(v)$.

El grado de v en $V(G)$ es la cardinalidad de $\Gamma(v)$, es decir $gr(v)=|\Gamma(v)|$.

Una gráfica H es una subgráfica de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$ tal que si (u,v) está en $E(H)$ entonces (u,v) está en $E(G)$.

Si H es tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y para u,v en $V(H)$ (u,v) está en $E(H)$ si y sólo si (u,v) está en $E(G)$ entonces H es llamada subgráfica inducida de G .

Un clan de G es una subgráfica completa de G

Un clan C es maximal si no existe C' clan de G tal que C está contenido en C'.

Un clan C es máximo Si la cardinalidad de C es mayor o igual que la cardinalidad de C' donde C' es un clan cualquiera de G .

Una cubierta por clanes para vértices de G es un conjunto $C = C_1, \dots, C_n$ tal que cada C_i es un clan maximal y cualquier vértice de G pertenece a C_i para alguna i , $1 \leq i \leq n$

Un camino en G es una sucesion alternada de vértices y aristas $v_1, e_1, \dots, e_k, v_k$ tal que v_i, v_{i+1} son los extremos de e_i para toda i $1 \leq i \leq n$.

Una trayectoria de G es un camino tal que $v_i \neq v_j$ para toda $i \neq j$.

Un ciclo de G es una trayectoria, excepto que $v_1 = v_k$ y lo denotamos por C_k si k es el número de vértices del ciclo y diremos que tiene longitud k. Haremos referencia al ciclo mencionando unicamente sus vértices. Así C_k es un ciclo con vértices v_1, \dots, v_k .

GRAFICAS DE COMPARABILIDAD

Una orientación \vec{G} de una gráfica G es una asignación de direcciones a las aristas de G en la que cada arista (u,v) de G es orientada de $u \rightarrow v$ ó de $v \rightarrow u$.

Dado v en $V(G)$ definimos su frontera exterior (interior) como el conjunto de vértices u tales que $v \rightarrow u$ ($u \rightarrow v$) y lo denotamos por $\Gamma^-(v)$ ($\Gamma^+(v)$).

Definimos $gr(v) = |\Gamma^-(v)|$ como el grado exterior y $gr(v) = |\Gamma^+(v)|$ como el grado interior de v .

Si $G = K_n$ entonces G lo llamaremos torneo.

Un ciclo dirigido C_n es una sucesión de vértices y aristas $v_1, v_1 \rightarrow v_2, v_2 \rightarrow \dots, v_n, v_n \rightarrow v_1$.

Una gráfica G está dirigida acíclicamente si no contiene ciclos dirigidos.

Una gráfica G está orientada transitivamente si para cualesquiera tres vértices v_1, v_2, v_3 en $V(G)$ tales que $v_1 \rightarrow v_2$, $v_2 \rightarrow v_3$ se tiene que $v_1 \rightarrow v_3$.

Una gráfica G que admite una orientación transitiva se le llamará gráfica de comparabilidad o transitivamente orientable (TRO).

No todas las gráficas son gráficas de comparabilidad, un ejemplo de éste hecho es el ciclo C_5 y en general los ciclos de longitud n con n impar.

GRAFICAS DE COMPARABILIDAD

Una orientación \vec{G} de una gráfica G es una asignación de direcciones a las aristas de G en la que cada arista (u,v) de G es orientada de $u \rightarrow v$ ó de $v \rightarrow u$.

Dado v en $V(G)$ definimos su frontera exterior (interior) como el conjunto de vértices u tales que $v \rightarrow u$ ($u \rightarrow v$) y lo denotamos por $\Gamma^-(v)$ ($\Gamma^+(v)$).

Definimos $gr(v) = |\Gamma^-(v)|$ como el grado exterior y $gr(v) = |\Gamma^+(v)|$ como el grado interior de v .

Si $G=K_n$ entonces G lo llamaremos torneo.

Un ciclo dirigido C_n es una sucesión de vértices y aristas $v_1, v_1 \rightarrow v_2, v_2, \dots, v_n, v_n \rightarrow v_1$.

Una gráfica G está dirigida acíclicamente si no contiene ciclos dirigidos.

Una gráfica G está orientada transitivamente si para cualesquiera tres vértices v_1, v_2, v_3 en $V(G)$ tales que $v_1 \rightarrow v_2$, $v_2 \rightarrow v_3$ se tiene que $v_1 \rightarrow v_3$.

Una gráfica G que admite una orientación transitiva se le llamará gráfica de comparabilidad o transitivamente orientable (TRO).

No todas las gráficas son gráficas de comparabilidad, un ejemplo de éste hecho es el ciclo C_5 y en general los ciclos de longitud n con n impar.

A continuación daremos un algoritmo que identifica las gráficas TRO y produce en ellas una orientación transitiva. Este algoritmo fue dado por A. Pnueli, A. Lempel y S. Even.

Más información acerca de este tema se encuentra en Algorithmic Graph Theory and Perfect Graph by Charles Golumbic y en Golumbic M.C. (1977).

Dos aristas (a,b) , (b,c) están conectadas fuertemente en G si la arista (a,c) no pertenece a $E(G)$.

Dos aristas e_i , e_j están relacionadas fuertemente $(e_i R e_j)$ si existe una sucesión de aristas $e_i = e_1, \dots, e_m = e_j$ tal que para toda k $1 \leq k \leq m-1$ e_k está conectada fuertemente a e_{k+1} .

Esta es una relación de equivalencia y por lo tanto induce una partición sobre las aristas de G . A cada una de estas clases de equivalencia la llamaremos R-clase.

En algunos casos será posible definir una orientación en las aristas de una R-clase, usando el siguiente algoritmo. Si éste da una orientación transitiva en la R-clase decimos que ésta es R-orientable, en caso contrario no es R-orientable.

Algoritmo 1.1 (A. Pnueli, A. Lempel, S. Even)

Paso 1.- Elegimos una arista (a,b) de una R-clase A y orientamos $a \rightarrow b$. Sea $A = \emptyset$

Paso 2.- Para todas las aristas (a,x) $[(b,x)]$ fuertemente conectada a (a,b)

- a) Si (a,x) ((b,x)) no está orientada, orientamos $a \rightarrow x$ ($x \rightarrow b$).
- b) Si (a,x) ((b,x)) está orientada y $x \rightarrow a$ ($b \rightarrow x$) alto A no es R-orientable.

Paso 3 .- $A' = A' \cup \{a \rightarrow b\}$

Si $A = A'$ alto. Si no elegimos cualquier arista no dirigida de $A - A'$ y vamos al paso 2.

Este algoritmo puede ser modificado para que encuentre y oriente simultáneamente si es posible la R-clase de equivalencia que contiene a una arista (a,b) de G o bien nos dice que A no es R-orientable.

El algoritmo es como sigue:

Algoritmo 1.2

Paso 1 .- Escogemos (a,b) arbitrariamente en G y orientamos $a \rightarrow b$. Sea $A = \emptyset$.

Paso 2 .- Encontramos todas las aristas de G fuertemente conectadas a (a,b) . Procesamos todas con el paso 2 del algoritmo 1.1.

Paso 3 .- Sea $A' = A \cup \{a \rightarrow b\}$

Si todas las aristas en $E(G) - A'$ no están orientadas entonces A' es una R-orientación para A . De otra forma elegimos cualquier arista dirigida que no esté en A' y vamos al paso 2.

En el paso 2 encontramos todas las aristas de A , las cuáles procedemos a orientar si éstas no están orientadas. Por lo tanto el algoritmo 1.2 encuentra y R-orienta la clase de equivalencia A que contiene a la arista elegida en el paso 1

El siguiente algoritmo nos dá una orientación transitiva de una gráfica G si ésta existe o nos dice si tal orientación no es posible dar.

Algoritmo 1.3

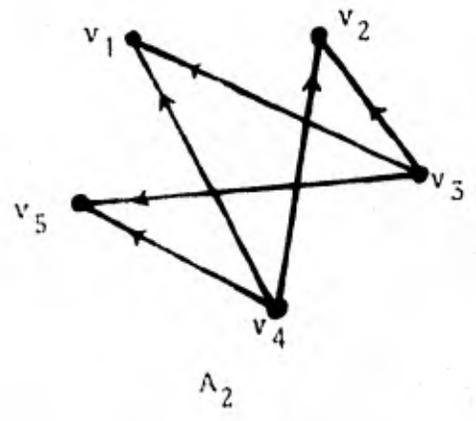
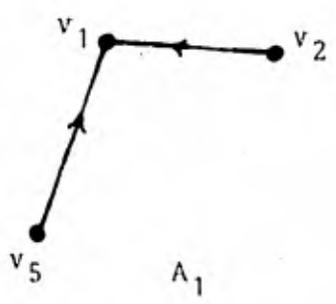
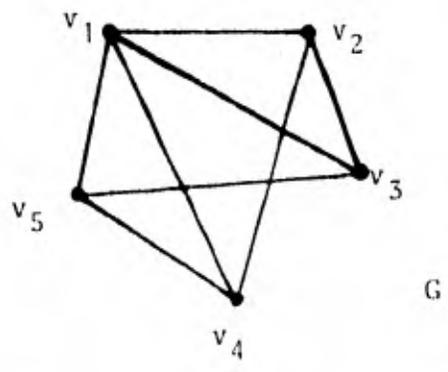
Paso 1 .- Sea $G=G'$

Paso 2 .- Elegimos cualquier arista (a,b) en G' y aplicamos el algoritmo 1.2 para producir una R-orientación en A la R-clase de equivalencia de G' que contiene a (a,b) .

Si A no es R-orientable, alto G no es transitivamente orientable

Paso 3 .- Si todas las aristas de G están orientadas, alto G es una gráfica de comparabilidad. Si no Sea $G''=G'-A$ y vamos al paso 2.

Un ejemplo de una gráfica orientada transitivamente utilizando el algoritmo 1.3 es dado en la siguiente figura (figura 1.1).



A_1, A_2 R-classes de equivalencia de G

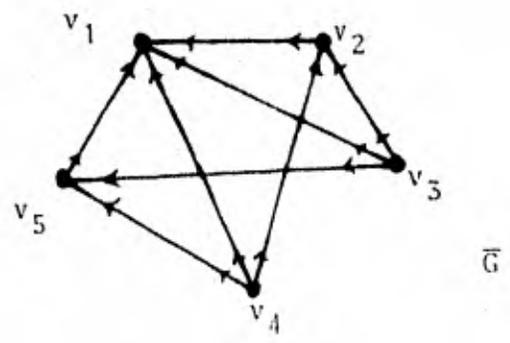


figura 1.1

GRAFICAS DE INTERSECCION

Dada una familia de conjuntos $F = \{C_1, \dots, C_n\}$ definimos su grafica de intersección de la siguiente forma:

G es la gráfica cuyo conjunto de vértices es v_1, \dots, v_n tal que (v_i, v_j) es arista de G si y sólo si $C_i \cap C_j \neq \emptyset$. Ver la figura 2.1.

Teorema 2.1

Toda gráfica G es una gráfica de intersección.

Demostración:

Sea $v \in V(G)$

Si definimos $S(v) = \{ (u, v) / (u, v) \in E(G) \}$ y

$$F = \{ S(v) / v \in V(G) \}$$

entonces G es la gráfica de intersección de F ya que $S(u) \cap S(v) \neq \emptyset$ si y sólo si (u, v) está en $E(G)$.

De la figura 2.1 el conjunto

$F = \{S(v_1), S(v_2), S(v_3), S(v_4)\}$ está representado por G

donde

$$S(v_1) = \{ (v_1, v_2), (v_1, v_3) \}$$
$$S(v_2) = \{ (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4) \}$$
$$S(v_3) = \{ (v_2, v_3), (v_3, v_1), (v_4, v_3) \}$$
$$S(v_4) = \{ (v_2, v_4), (v_3, v_4) \}$$

Si en la definición de gráficas de intersección tomamos como C_i una curva en el plano, a la gráfica de intersección la llamaremos gráfica de intersección de curvas en el plano. El ejemplo dado en la figura 2.1 corresponde a una grafica de este tipo.

Un hecho interesante acerca de éstas gráficas es el enunciado en el siguiente teorema

Teorema 2.2

No todas las gráficas son gráficas de intersección de curvas en el plano.

Demostración:

La demostración se hará por contradicción y para esto utilizaremos a $K_{4,3}$

Sean $G=K_{4,3}$ y G' la gráfica obtenida de G al introducir un nuevo vértice sobre cada una de sus aristas (Ver figura 2.2). Demostraremos ahora que G' no es gráfica de intersección de curvas en el plano.

Supongamos que $F=(C_1, \dots, C_n)$ es la familia de curvas en el plano que representa G' . Podemos encojer a puntos todas las curvas correspondientes a los vértices de G sin crear nuevas intersecciones en las curvas correspondientes a los vértices en $W=V(G')-V(G)$ excepto que todas las curvas en W que intersectan una curva v en $V-W$ ahora intersectara en el punto P a el cuál fue contraído. El diagrama resultante es una realización planar de G donde los puntos para los cuales las curvas representan vértices de G fueron contraídos representan los vértices de G y las curvas que representan vértices en W corresponden a las aristas de G . Esto es una contradicción ya que G es una gráfica no planar.

GRAFICAS DE INTERVALOS

Las primeras gráficas de intersección de curvas en el plano en definir serán las gráficas de intervalos.

Sea $F = \{I_1, \dots, I_n\}$ un conjunto tal que cada I_j con $j=1, \dots, n$ es un intervalo en la recta real. Definimos G como la gráfica con vertices v_1, \dots, v_n tal que (v_i, v_j) está en $E(G)$ si y sólo si $I_i \cap I_j \neq \emptyset$.

Al conjunto de intervalos junto con la recta real lo llamaremos Diagrama de Intervalos I y lo denotaremos por $\{I_i\}_{i \in I}$ y a la gráfica G la cuál representa I la llamaremos Gráfica de Intervalos denotada algunas veces por $G(I, E_I)$.

Una gráfica G será una gráfica de intervalos si ésta representa algun diagrama de intervalos. Ver fig. 2.3 .

Si la longitud de cada I_j con $j=1, \dots, n$ son de longitud igual a uno tenemos entonces una gráfica de intervalos unitaria.

Una gráfica de intervalos propia es aquella que representa un diagrama de intervalos tal que ningún intervalo contiene a otro de manera propia. Roberts demostró que las gráficas de intervalos propias son exactamente las gráficas de intervalos unitarias (Roberts (1969)).

En lo que sigue no impondremos condiciones a los intervalos en cuanto a su contención en otros o en su tamaño.

Proposición 2.3

Una subgráfica inducida de una gráfica de intervalos es una gráfica de intervalos.

Demostración:

Sea $\{I_i\}_{i \in I}$ un diagrama de intervalos de G entonces $\{I_i\}_{i \in J}$ es un diagrama de la subgráfica inducida por $G' = (J, E_J)$.

Las gráficas de intervalos satisfacen la siguiente definición.

Definición 2.1. - Una gráfica G es una gráfica cordal si todo ciclo simple C de longitud mayor que 3 tiene una arista que une a dos vértices no consecutivos del ciclo.

Un ejemplo de gráfica cordal es dado en la figura 2.4 .

Proposición 2.4

Las gráficas de intervalos son gráficas cordales.

Demostración:

Esta se hará por contradicción.

Supongase que G es una gráfica de intervalos tal que contiene un ciclo C_n con vértices $v_1, \dots, v_{n-1}, v_n, v_1$ con n mayor que 3

Sea I_k el intervalo que denota al vértice v_k

Para $i=1, \dots, n$ elegimos un punto p_i en $I_i \cap I_{i+1}$.

Como I_i e I_{i+2} no se intersectan la sucesión de puntos p_i es una sucesión de puntos estrictamente creciente

o estrictamente decreciente por lo tanto es imposible que I_1 e I_n se intersecten y por lo tanto (v_1, v_n) no es arista de G , lo cual contradice la hipótesis de que C es ciclo de G .

Ejemplos de gráficas cordales las cuáles no son gráficas de intervalos son dadas en las figuras 2.5 y 2.6 .

Proposición 2.5 (Ghouila-Houri (1962))

El complemento de una gráfica de intervalos se puede orientar transitivamente.

Demostración:

Sea $\{I_j\}_{j \in I}$ un diagrama de intervalos de $G=(I, E_I)$

Definimos la siguiente orientación \vec{G}^c de G^c como sigue:

$$i \rightarrow j \quad \text{si y sólo si} \quad I_i < I_j$$

donde $I_i < I_j$ significa I_i aparece a la izquierda del intervalo I_j . (Esto sucede siempre en G^c ya que $I_i \cap I_j = \emptyset$)

Es claro entonces que $i \rightarrow j$ y $j \rightarrow k$ implica $I_i < I_j$ e $I_j < I_k$ y por lo tanto $I_i < I_k$, es decir $i \rightarrow k$, por lo tanto G^c está orientada transitivamente. Ver fig. 2.7.

Definición 2.2. - Un conjunto X está ordenado parcialmente por la relación " $<$ " sobre X si:

i) $x < y$, $y < z$ implica $x < z$ (transitividad)

ii) $x < x$ (antisimetría)

Definición 2.3. - Si un conjunto ordenado parcialmen-

te satisface además que

Para toda x, y en X $x \prec y$ o $y \prec x$
decimos entonces que X está totalmente ordenado y (X, \prec) lo
o llamaremos Orden Lineal sobre X .

Teorema 2.6 (Gilmore y Hoffman (1964))

Sea G una gráfica no orientada. Las siguientes afirma
ciones son equivalentes:

- i) G es una gráfica de intervalos
- ii) G no contiene a C_4 y G^C es una gráfica de compa
rabilidad.
- iii) Los clanes maximales de G pueden ser ordenados
linealmente tal que para todo vértice x de G , los clanes -
maximales que contienen a x ocurren consecutivamente.

Demostración:

" i) \Rightarrow ii) " Se probó en las proposiciones 2 y 3

" ii) \Rightarrow iii) "

Para demostrar esta implicación demostraremos el si-
guiente lema

Lema 2.7

Si A_1, A_2 son clanes maximales de G entonces

- a) Existe una arista en G^C con un extremo en A_1 y -
otro en A_2 .
- b) Tales aristas de G^C conectan a A_1 con A_2 tienen,
la misma orientación.

Demostración:

" a) "

Si tal arista no existe entonces $A_1 \cup A_2$ es un clan - de G y por lo tanto A_1 y A_2 no son clanes maximales.

" b) "

Supongamos que $a \rightarrow b$ y $c \rightarrow d$ y a, c están en A_1 y b, d están en A_2 es decir es falso b)

Si $a=b$ o $b=d$ entonces por transitividad de \vec{G}^c se tiene que $b \rightarrow d$ o $c \rightarrow a$ lo cuál es una contradicción ya que (b, d) y (c, a) están en \vec{G}^c .

Si los cuatro vértices son distintos entonces (a, d) o (b, c) están en G^c porque G no tiene ciclos de longitud cuatro sin cuerdas. Sin pérdida de generalidad (a, d) está en G^c . Si $a \rightarrow d$ entonces $a \rightarrow c$ por transitividad de G^c lo cuál es una contradicción.

Similarmente si $d \rightarrow a$ y así queda probado el lema Ver figura 2.8.

Probaremos ahora la implicación ii) \Rightarrow iii) del teorema 2.6.

Considerese la siguiente relación en la colección C de clanes maximales de G :

$A_1 \prec A_2$ si existe una arista que conecta A_1 con A_2 dirigida de A_1 hacia A_2 , por lema 2.7 esto define un torneo sobre C . Veremos entonces que (C, \prec) es un torneo transitivo y por lo tanto ordenado linealmente.

Supongamos que $A_1 \prec A_2$ y $A_2 \prec A_3$, entonces existen aristas $w \rightarrow x$ y $y \rightarrow z$ en \vec{G}^C tales que w está en A_1 , x, y está en A_2 y z está en A_3 .

Si (x, z) no está en G entonces $x \rightarrow z$ está en \vec{G}^C y por lo tanto $w \rightarrow z$ en \vec{G}^C es decir $A_1 \prec A_3$. Ver figura 2.9.

Similarmente se demuestra si (w, y) no es arista de G .

Podemos suponer entonces que (w, y) , (x, z) son aristas de G . Como G no contiene ciclos de longitud 4 sin cuerdas entonces (w, z) está en G^C .

Si $z \rightarrow w$ por transitividad de G^C se tiene que $x \rightarrow z$ lo cuál es imposible por lo tanto $w \rightarrow z$ y $A_1 \prec A_3$, por lo tanto C es un torneo transitivo, por lo tanto C está ordenado linealmente.

Sea A_1, \dots, A_m un orden lineal de los clanes maximales de G . Para demostrar ahora que x ocurre en clanes consecutivos supongamos que x está en A_i , x no está en A_j y x está en A_k , donde $A_i \prec A_j \prec A_k$. Como x no está en A_j entonces existe y en A_j tal que (x, y) no está en G , pero $A_i \prec A_j$ ésto implica que $x \rightarrow y$ y como $A_j \prec A_k$ se tiene que $y \rightarrow x$ lo cuál no puede suceder, por lo tanto x está en A_j y por lo tanto debe ocurrir en clanes consecutivos.

Por último probaremos iii) \Rightarrow i)

Para cada x en $V(G)$, sea $I(x)$ el conjunto de todos los clanes maximales que contienen a x . Los conjuntos que contienen a x son intervalos del conjunto ordenado linealmente (C, \prec) . Ya que dos vértices están conectados si y sólo

si están contenidos en algún clan maximal se tiene que

(x,y) está en $E(G)$ si y sólo si $I(x) \cap I(y) \neq \emptyset$

Corolario 2.8

Una gráfica G no dirigida es una gráfica de intervalos si y sólo si no contiene a C_4 como subgráfica inducida y G^c es una gráfica de comparabilidad.

Demostración:

Directa del teorema anterior.

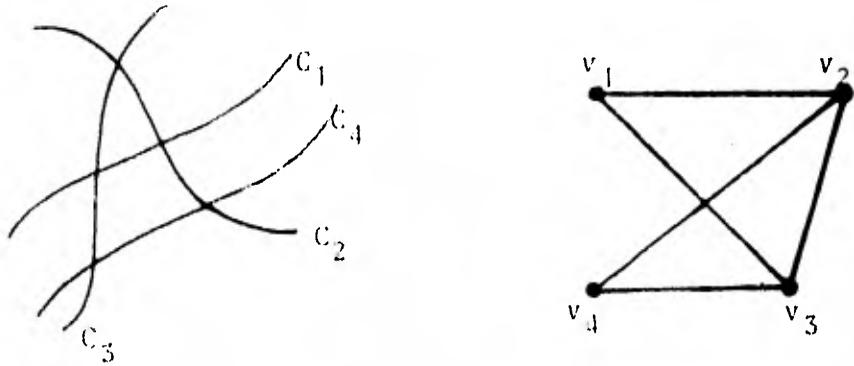
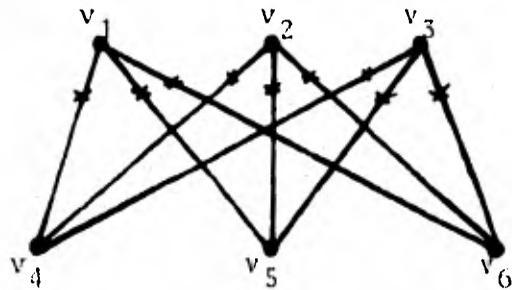


figura 2.1



G

$$G = K_{3,3}$$

figura 2.2

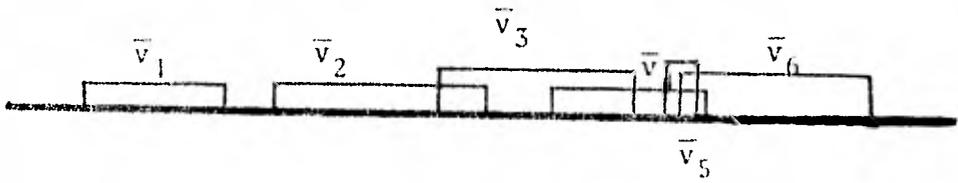
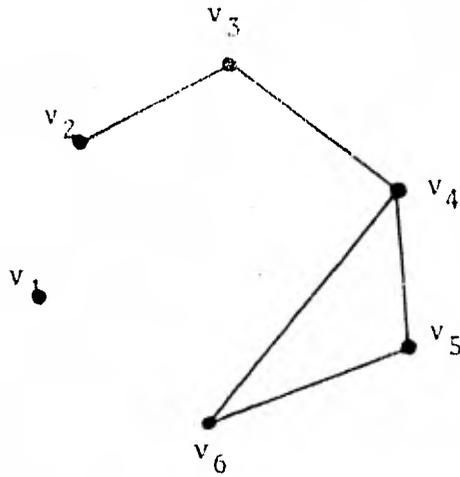


Diagrama de Intervalos B



Gráfica de Intervalos

figura 2.3

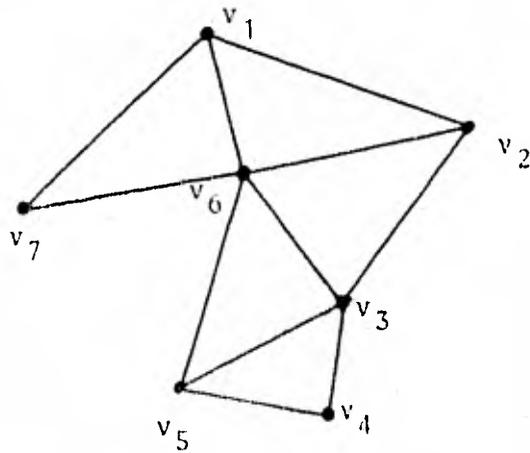


figura 2.4

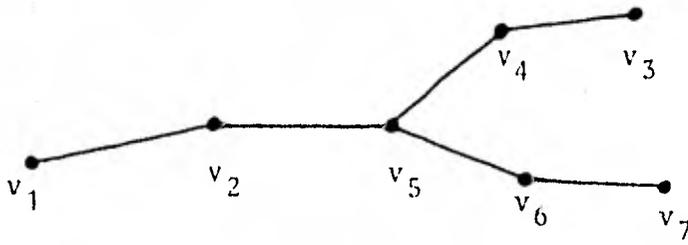


figura 2.5

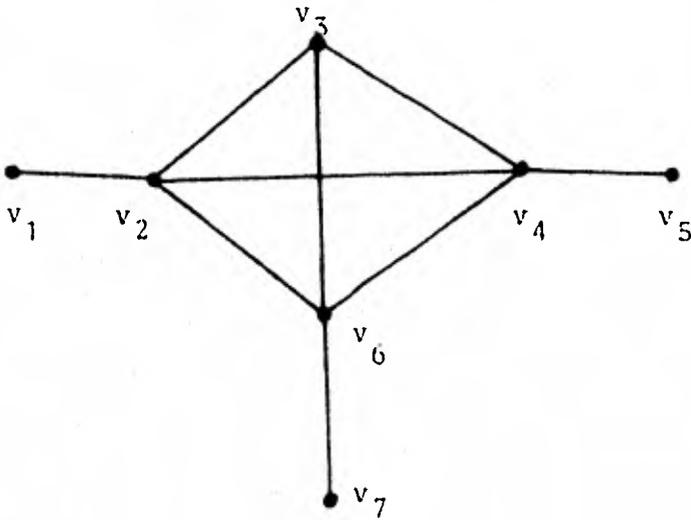


figura 2.6

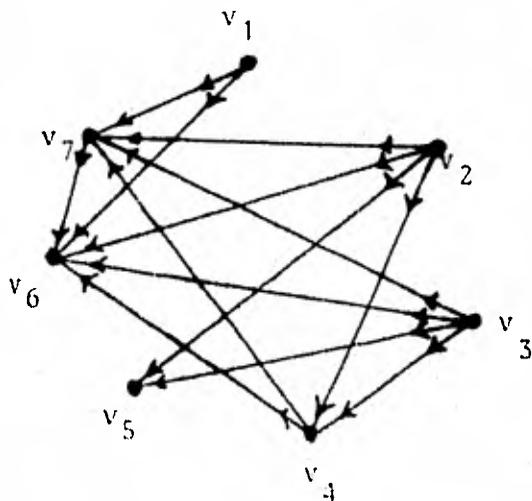
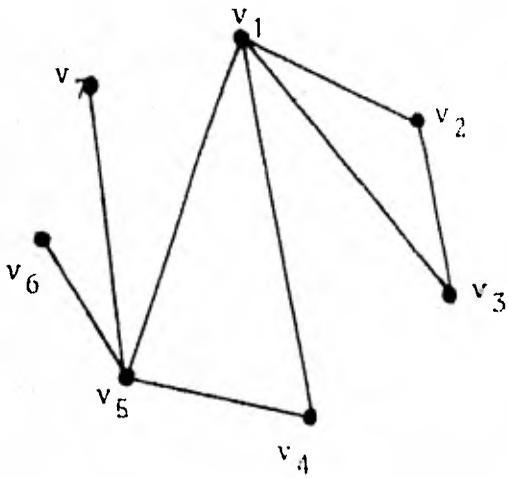
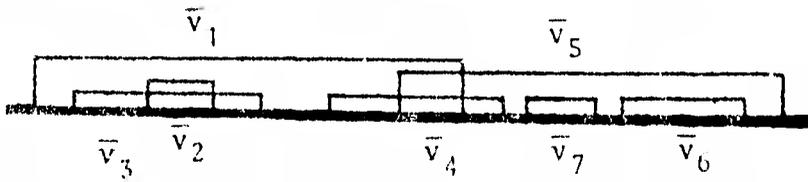


figura 2.7

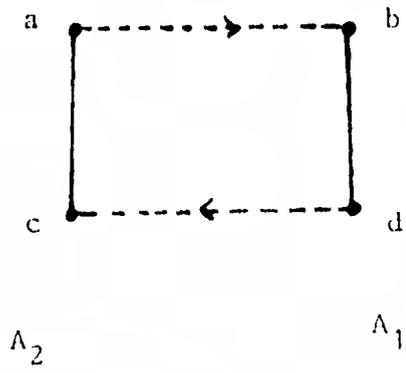


figura 2.8

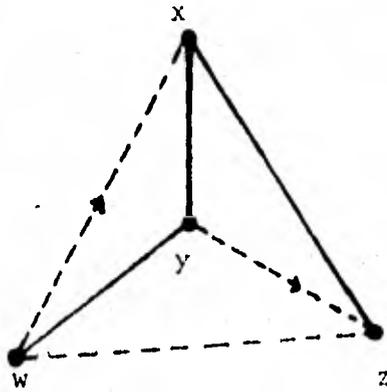


figura 2.9

CAPITULO B
GRAFICAS CORDALES

Definición 3.1 Una gráfica que no contiene ciclos es -- llamada acíclica.

Definición 3.2 Dos vértices u, v se dice que están conec--
tados si existe una $u-v$ trayectoria en G .

Estar conectados es una relación de equivalencia sobre los
vértices de G y por lo tanto inducen una partición sobre --
ellos en subconjuntos no vacíos V_1, V_2, \dots, V_n tal que dos de
ellos están conectados si y solo si están en la misma clase
de equivalencia.

Las subgráficas inducidas $G(V_1), \dots, G(V_n)$ son llamadas
las componentes de G . Si G tiene una componente exactamente --
entonces es llamada conexa. De otra forma es llamada discone--
xa.

Definición 3.3 Una gráfica G es un árbol si es una grá--
fica acíclica conexa.

Definición 3.4 Una gráfica es llamada cordal si todo
ciclo simple con más de tres vértices tiene una arista que --
conecta a dos vértices no consecutivos. También reciben el --
nombre de gráficas trianguladas.

Definición 3.5 G es una gráfica de subárboles de un ár--
bol si esta es la gráfica de intersección de una familia de
subárboles de un árbol no dirigido.

Definición 3.6 Un vértice v es llamado simplicial si su
vecindad induce una subgráfica completa.

Definición 3.7 Un subconjunto $S \subseteq V$ es un separador de vértices para

no adyacentes a a y b o un a - b -separador si al quitar S de la gráfica esta separa a a y b en componentes distintas

Definición 3.8 Si ningún subconjunto propio de S es un a - b separador entonces S es un a - b -separador minimal.

Dirac y más tarde Lekkerkerker y Boland demostraron que toda gráfica tiene un vértice simplicial. Ésto lo enunciaremos en el siguiente lema.

Lema 3.1 (Dirac 1961)

Toda grafica cordal G tiene un vértice simplicial. Más aún si G no es un clan entonces tiene dos vertices simpliciales no adyacentes.

Demostración:

Si G es completa el lema es claramente válido

Supongamos que G no es una gráfica completa. Demostraremos por inducción sobre el número de vertices que G tiene dos vertices simpliciales.

Si $|V(G)|=2$ el lema es válido

Supongamos entonces que el lema se cumple para gráficas con menos de k vértices.

Sea G tal que $|V(G)|=k$

Sean a, b vertices no adyacentes y S un a - b -separador minimal con G_a y G_b componentes conexas de G que contienen a a y b respectivamente.

Por inducción la gráfica G' cuyo conjunto de vértices es $A \cup S$ (donde A es el conjunto de vértices de G_a) tiene dos vertices simpliciales no adyacentes. Como S induce una subgráfica completa uno de los vértices debe estar en A o G' es

ella misma una subgráfica completa y cualquier vértice de A es simplicial en G :

Por otro lado como la frontera de A está contenida en $\Lambda \cup S$ un vértice simplicial de G' en A es simplicial en todo G . De la misma forma B contiene un vértice simplicial de G , - por lo tanto G tiene dos vértices simpliciales no adyacentes si G es una gráfica no completa.

Definición 3.9 Una R -orientación de G es una orientación que satisface las siguientes condiciones:

- i) La gráfica resultante no tiene ciclos dirigidos
- ii) Si a, b, c son vértices de G tales que $a \rightarrow b$ y $c \rightarrow b$ entonces la arista (a, c) pertenece a G

Un ejemplo de una gráfica R -orientable es dada en la figura 3.1.

Llamaremos a un vértice v de la gráfica sumidero, si -- todas las aristas incidentes con él están dirigidas hacia v .

Es fácil ver que una gráfica dirigida, sin ciclos dirigidos tiene un sumidero.

Con estas últimas definiciones y el lema de Dirac demostraremos el lema de Rose.

Lema de Rose 3.2

Una gráfica G es cordal si y sólo si tiene una R -orientación.

Demostración:

" \Leftarrow " Esta se hará por inducción sobre el número de vértices de la gráfica.

Si la cardinalidad de G es 1 el lema se cumple

Supongamos que el lema es válido para una gráfica cordal con menos de k vértices.

Sea G tal que el número de vértices de la gráfica es k , G cordal entonces por el lema de Dirac G tiene un vértice simplicial v y por hipótesis de inducción $G-v$ es R -orientable. Si regresamos v a la gráfica orientando todas sus aristas adyacentes hacia él obtenemos así una R -orientación de G



La demostración se hará por inducción sobre el número de vértices de G .

Para $|V(G)|=1$ se cumple obviamente

Supongamos que si G es R -orientable con $|V(G)| < k$ el lema se cumple

Sea G con $|V(G)|=k$ gráfica R -orientable entonces por observación anterior G tiene un sumidero v . Es claro que $G-v$ es R -orientable y $|V(G-v)| < k$ por lo tanto por hipótesis de inducción $G-v$ es cordal. Si regresamos v a la gráfica $G-v$ obtenemos que G es una gráfica cordal.

Otra caracterización más acerca de las gráficas cordales fue dada por Fulkerson y Gross (1965) y esta al igual que la anterior está basada en el lema de Dirac.

Teorema 3.3

Sea G una gráfica no dirigida. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) G es cordal

ii) G tiene un esquema de eliminación perfecto y cualquier vértice simplicial puede empezar dicho esquema.

iii) Todo separador de vértices minimal induce una sub-

gráfica completa de G.

Demostración:

" i) \Rightarrow ii) "

Se utilizará inducción sobre $|V(G)|$

Si G es cordal con un sólo vértice el teorema se cumple

Supongamos que el lema es válido para G tal que $|V(G)|$ es menor que k

Sea G gráfica cordal con $|V(G)|=k$, por el lema de Dirac G tiene un vértice simplicial v. $|V(G-v)|=k-1$ y G-v es una gráfica cordal, por lo tanto por hipótesis de inducción G-v tiene un esquema de eliminación perfecto v_1, \dots, v_n . Si aumentamos v al esquema anterior obtenemos un esquema de eliminación perfecto para G.

" ii) \Rightarrow i) "

Supongamos que G tiene un esquema de eliminación perfecto.

Sea C un ciclo de G. Si tomamos el vértice en C con el índice más pequeño en el esquema de eliminación, como la frontera de v intersección C tiene al menos dos elementos y la eventual simplicidad de v garantiza la existencia de una cuerda en C, se tiene que G es una gráfica cordal

" iii) \Rightarrow i) "

Supongamos que todo separador de vértices minimal induce una subgráfica completa de G

Sea $C=(a, x, b, y_1, \dots, y_n, a)$ con $n \geq 1$ un ciclo de G.

Cualquier a-b-separador minimal de vértices de G debe contener a los vértices x y y_i , pero como cada separador de G induce una subgráfica completa la arista (x, y_i) debe estar

en G y por lo tanto (x, y_i) es una cuerda de C , es decir G es una gráfica cordal.

" i) \Rightarrow iii)"

Sea G una gráfica cordal y S un a - b -separador minimal de vértices de G .

Sean G_A y G_B las componentes de correspondientes a a y b respectivamente en G_{V-S} (donde G_{V-S} es la subgráfica inducida por $V-S$ y G_A, G_B las subgráficas inducidas por A y B sus conjuntos de vértices correspondientes).

Como S es un a - b -separador minimal cada x en S es adyacente a algún vértice en A y alguno en B por lo tanto para cualesquiera dos vértices x y y en S existen trayectorias T_1, T_2 con vértices correspondientes x, a_1, \dots, a_s, y y y, b_1, \dots, b_t, x con $a_i \in A$ $1 \leq i \leq s$ y $1 \leq i \leq t$

Por lo tanto la trayectoria T con vértices $x, a_1, \dots, a_s, y, b_1, \dots, b_t, x$ es un ciclo de G con longitud mayor o igual a cuatro, por lo tanto debe tener una cuerda. Pero (a_i, a_j) no es arista de G y (b_i, b_j) tampoco es arista de G por ser T_1, T_2 trayectorias minimales y por definición de separador de vértices la arista (b_j, a_i) no pertenece a G y por lo tanto (x, y) es cuerda de C , se tiene entonces que S separador minimal de G induce una subgráfica completa

En la figura 3.2 mostramos una gráfica cordal y su correspondiente esquema de eliminación perfecto.

Basados en estos lemas (1,2) obtenemos algoritmos eficientes para reconocer una gráfica cordal así como una mane-

ra simple de encontrar una R-orientación si ésta existe.

Probaremos también que toda gráfica es cordal si y sólo si es gráfica de intersección de subárboles de un árbol y de igual forma daremos un algoritmo eficiente para encontrar una representación de G por medio de subárboles de un árbol si G es una gráfica cordal.

Para esto definiremos la siguiente orientación en una gráfica de subárboles de un árbol.

Sea G una gráfica de subárboles de un árbol

Sea F su familia representante sobre un árbol T

$$F = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$$

Sea P un punto cualquiera de T . Con éste punto podemos orientar las aristas de T de tal forma que todas están orientadas hacia afuera de P . Ver figura 3.3

P será llamado la raíz de T . Para cualquier subárbol \bar{v}_i de T su raíz quedará definida de manera natural como en la figura 3.4.

Supondremos siempre sin pérdida de generalidad que subárboles distintos tienen raíz distinta. Denotaremos por i la raíz de \bar{v}_i .

Es claro que si $\bar{v}_i \cap \bar{v}_j \neq \emptyset$ entonces $i \in \bar{v}_j$ o $j \in \bar{v}_i$ pero no suceden los dos casos a la vez. Utilizando ésta propiedad induciremos una orientación en una gráfica de subárboles de la siguiente manera:

Dada una gráfica de intersección de subárboles de un árbol orientamos la arista (v_i, v_j) de $v_i \rightarrow v_j$ si

y sólo si $\bar{i} \in \bar{v}_j$.

Es fácil deducir de esto que toda gráfica de intersección de subárboles de un árbol es R-orientable y por lo tanto una gráfica cordal. Demostraremos también que toda cordal es gráfica de intersección de subárboles de un árbol y para esto veremos en seguida que dichas gráficas satisfacen la Propiedad Helly enunciada a continuación.

Definición 3.10 Una familia $\{T_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de un conjunto T se dice que satisface la Propiedad Helly si para cualquier subconjunto J de I, $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, con $i \neq j$, i y j en J se tiene que $\bigcap_{i \in J} T_i \neq \emptyset$

Teorema 3.4 Una familia de subárboles de un árbol satisface la Propiedad de Helly.

Demostración

Sea T un árbol y F su familia representante de subárboles de el árbol T

Sean a_1, a_2, a_3 tres puntos en T

Sea \bar{F} el subconjunto de F tal que cada elemento contiene dos de los tres puntos

Sean $F_1 = \{ \bar{v} / \bar{v} \in \bar{F} \text{ y } a_1, a_2 \in \bar{v} \}$

$F_2 = \{ \bar{v} / \bar{v} \in \bar{F} \text{ y } a_1, a_3 \in \bar{v} \}$

$F_3 = \{ \bar{v} / \bar{v} \in \bar{F} \text{ y } a_2, a_3 \in \bar{v} \}$

Sean P_1, P_2, P_3 trayectorias de T tales que conectan a_1 con a_2 , a_1 con a_3 y a_2 con a_3 respectivamente.

Como T es árbol $P_1 \cap P_2 \cap P_3 \neq \emptyset$

Para toda $1 \leq j \leq 3$ si $\bar{v} \in F_j$ entonces $P_j \subset \bar{v}$ y por lo tanto $P_j \subset \bigcap_{\bar{v} \in F_j} \bar{v}$

por lo tanto

$$\left(\bigcap_{\bar{v} \in F_1} \bar{v}\right) \cap \left(\bigcap_{\bar{v} \in F_2} \bar{v}\right) \cap \left(\bigcap_{\bar{v} \in F_3} \bar{v}\right) \supseteq P_1 \cap P_2 \cap P_3 \neq \emptyset$$

por lo tanto

$$\bigcap_{\bar{v} \in F} \bar{v} \neq \emptyset$$

Probaremos ahora por inducción el teorema sobre la cardinalidad del conjunto de índices.

Si la familia tiene sólo dos elementos el teorema es vá lido de manera trivial.

Supongamos que vale para $|J| < k$ es decir

si $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ par toda i, j en J entonces $\bigcap_{i \in J} T_i \neq \emptyset$

Sea $\{T_i\}_{i \in J}$ una familia de subárboles de un árbol T tal que $|J|=k$

Por hipótesis de inducción existen

$$a_1 \in \bigcap_{i=1}^{k-1} T_i, \quad a_2 \in \bigcap_{i=2}^k T_i \quad \text{y} \quad a_3 \in T_1 \cap T_k$$

y además cada T_i contiene al menos dos de las a_i por tanto - por la observación anterior

$$\bigcap_{i=1}^k T_i \neq \emptyset$$

Teorema 3.5

G es una gráfica cordal si y sólo si G es una gráfica - de intersección de subárboles de un árbol.

Demostración

" \Leftarrow "

Esta se obtiene de la observación hecha anteriormente

" \Rightarrow "

La demostración la haremos por inducción sobre el número de vértices.

Para $|V(G)|=1$ se cumple el teorema

Supongamos que para G cordal con menos de k vértices el teorema se cumple

Sea G una gráfica cordal con $|V(G)|=k$, por el lema de Dirac existe v en $V(G)$ vértice simplicial, por lo tanto por hipótesis de inducción existe una representación F de $G-v$ sobre un árbol T .

Sean $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ los representantes sobre T de la frontera de v . Estos satisfacen la propiedad Helly por lo tanto existe $p \in \bigcap_{j=1}^n \bar{v}_j$

Para obtener una representación de G por medio de una familia de subárboles de un árbol aumentamos a T la arista (p, b) , con b un punto no en el árbol T y a cada \bar{v}_j , $1 \leq j \leq n$ la arista (p, b) , denotemos estos por \tilde{v}_j , $1 \leq j \leq n$

La familia obtenida F_1 de F al substituir sólo los \bar{v}_j por los \tilde{v}_j y tomando como representante del vértice v sobre la arista (p, b) , forma una representación de G por medio de subárboles de un árbol.

Gráficas de Subárboles Propia

Roberts caracterizó las gráficas de intervalos propias y demostró que forman una familia propia de las gráficas de intervalos. Sin embargo veremos que esto no se cumple en gráficas de subárboles propios. Para demostrar ésto daremos la siguiente definición.

Definición 3.11 Una gráfica es llamada gráfica de subárboles propia si ésta es la gráfica de intersección de una familia de subárboles de un árbol tal que ningún subárbol es

tá contenido en otro propiamente.

Sea G una gráfica de subárboles de un árbol y F su familia representante sobre un árbol T

Sean $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k \in F$ los subárboles que están contenidos en otros. Consideremos un punto $a_i \in \bar{v}_i$ $1 \leq i \leq k$

Sea T_i el árbol obtenido al aumentar a T un vértice b_i - adyacente a a_i $1 \leq i \leq k$ con $b_i \neq b_j$ si $i \neq j$

Para toda $1 \leq i \leq k$ sea \tilde{v}_i el subárbol obtenido al aumentar a \bar{v}_i la arista que conecta a a_i con b_i (ver figura 3.5)

Denotemos por F_i la familia obtenida de F cambiando únicamente \bar{v}_i por \tilde{v}_i .

G es también la gráfica de intersección de F_i y F_j ; no tiene elementos contenidos unos en los otros., por lo tanto G es gráfica de subárboles propia y de ésto obtenemos las siguientes equivalencias.

Teorema 3.6

- i) G es gráfica de subárboles de un árbol.
- ii) G es gráfica de subárboles propia.
- iii) G es gráfica cordal.

Basados en los lemas 3.1 y 3.2 mostraremos una forma simple de construir una R -orientación si ésta existe.

Algoritmo 3.1

Paso 1. - Sea $i = n$

Paso 2. - Sea $G' = G$

Paso 3. - Buscamos un vértice v en $V(G)$ tal que los vértices adyacentes a él estén conectados

unos con otros. Si tal vértice no existe G no es R-orientable.

Si existe sea $v = v_i$ e $i = i - 1$ y vamos al paso 4

Paso 4.- Sea $G = G - v_i$

Si G tiene sólo un vértice sea $i = 1$ y vamos al paso 5 si no vamos al paso 2

Paso 5.- Tomemos v_i y orientamos todas las aristas (z, v_i) de $z \rightarrow v_i$ y vamos al paso 6

Paso 6.- Sea $i = i + 1$

Si $i \neq n$ regresamos al paso 5 si no vamos al paso 7

Paso 7.- La orientación obtenida de G es una R-orientación.

Por el algoritmo anterior si G puede ser orientada entonces sus vértices pueden ser numerados $1, \dots, n$ de tal forma que si $i \rightarrow j$ entonces $i < j$. Esto puede hacerse ya que la gráfica está dirigida acíclicamente y por lo tanto se pueden eliminar sucesivamente sus sumideros, llamando n al primer sumidero encontrado, $n-1$ al segundo, etc.

Supondremos siempre que una gráfica cordal ha sido R-orientada y sus vértices ordenados como se dijo anteriormente.

Utilizando ésto daremos a continuación un algoritmo para encontrar un clan máximo.

Sea i un vértice de la gráfica. Denotamos por J_i el conjunto de vértices j tales que $j \rightarrow i$. Ya que G es de cuerdas $J_i \cup \{i\}$ es un conjunto completamente conexo de vértices. Más aún si S es un conjunto completamente conexo de vértices entonces $S = J_i \cup \{i\}$ para alguna i .

Sea i el vértice más grande en S , se sigue que para todo j en J_i $j \rightarrow i$.

La observación hecha arriba implica que todo clan de G es de la forma $J_i \cup \{i\}$ donde i es el vértice más grande del clan, por lo tanto el número de clanes de G es a lo más n . Si tomamos ahora solo los conjuntos maximales entre los $J_i \cup \{i\}$ obtenemos el conjunto de todos los clanes de G .

Para encontrar un clan máximo buscamos el vértice i con el grado interior más grande. Por tanto para encontrar un clan máximo contamos el número de aristas que entran en cada vértice y así el número de pasos necesarios para encontrar dicho clan es $n(\max_{i \in V} d_I(i))$ donde $d_I(i)$ denota el grado interior de i .

Si toma ahora una gráfica con pesos asignados a sus vértices, utilizando el algoritmo anterior podemos encontrar un clan de peso máximo de la siguiente forma:

Sea w_i El peso asignado al vértice i , calculamos el valor W_i definido como sigue:

$$W_i = \sum_{j \in J_i \cup \{i\}} w_j$$

El vértice i para el cuál W_i es máximo indicará el clan de peso máximo $J_i \cup \{i\}$.

Algoritmos para Cubiertas Mínimas por Clanes y Conjuntos Independientes Máximos.

Definiremos inductivamente una sucesión de vértices n_1, n_2, \dots, n_m de la siguiente forma:

Sea $n_1 = n$

Definimos n_k como el vértice más grande menor que n_{k-1} y el cuál no esté en $J_{n_1} \cup \dots \cup J_{n_{k-1}}$

Los vértices menores que n_t están en $J_{n_1} \cup \dots \cup J_{n_t}$ por tanto $\{n_1, n_2, \dots, n_t\} \cup J_{n_1} \cup \dots \cup J_{n_t}$ es el conjunto de vértices de G .

El conjunto de vértices $\{n_1, \dots, n_t\}$ es un conjunto independiente y por lo tanto una cubierta mínima por clanes debe tener al menos t conjuntos.

Para toda $i, 1 \leq i \leq t$ $S_{n_i} = J_{n_i} \cup \{n_i\}$ es un clan y por lo tanto $\{S_{n_1}, \dots, S_{n_t}\}$ es una cubierta mínima por clanes de G y $\{n_1, \dots, n_t\}$ es un conjunto independiente máximo. Es decir el tamaño del conjunto independiente es igual al tamaño de la cubierta mínima por clanes de G .

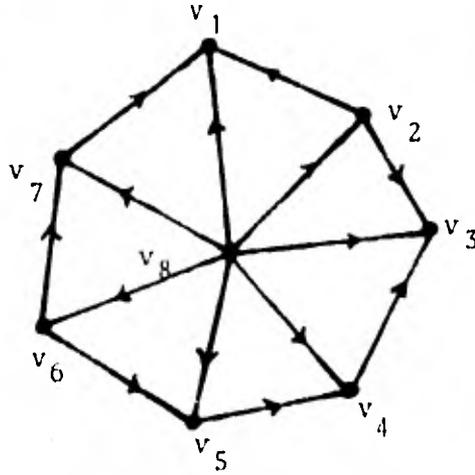
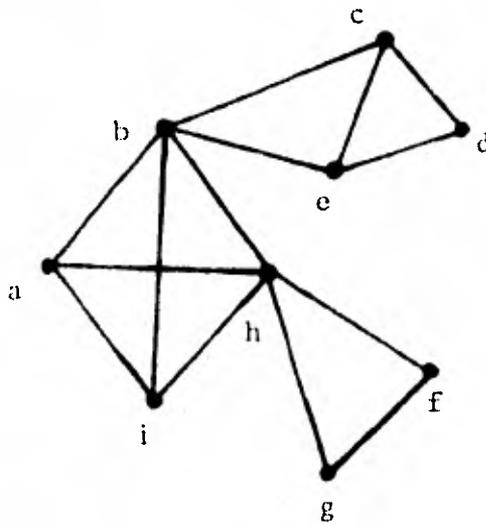


Figura 3.1



(d,e,c,f,g,h,i,b,a)

(d,f,g,h,e,c,i,b,a)

el esquema de eliminación perfecto
no es único.

figura 3.2

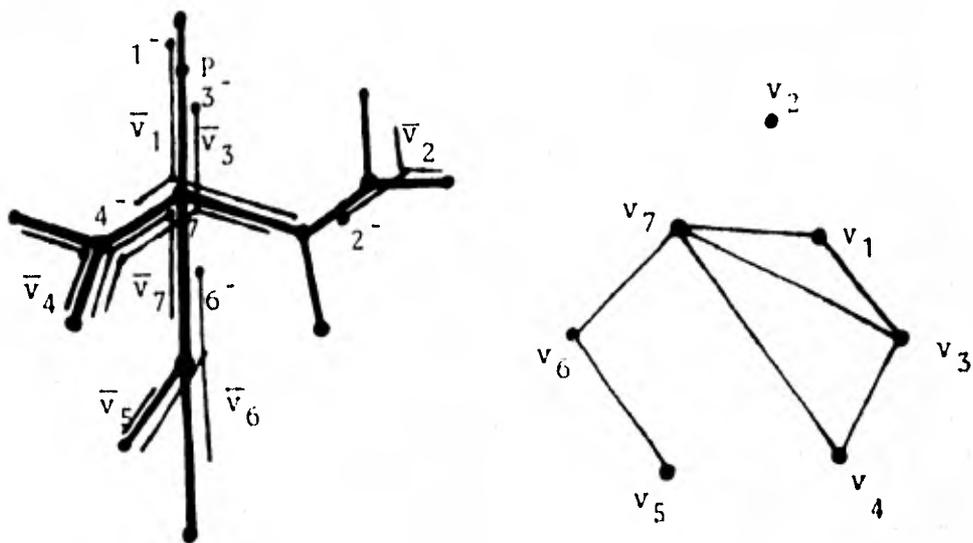


figura 3.3

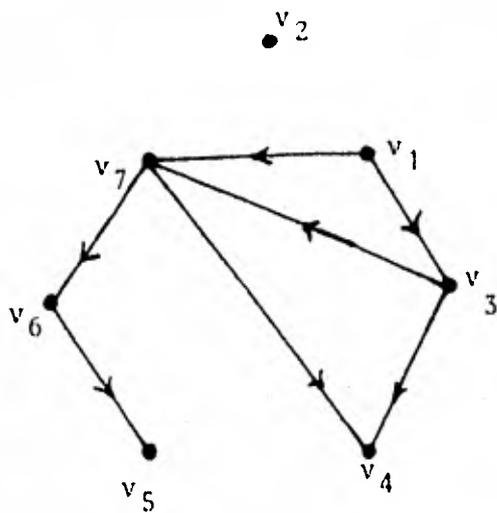


figura 3.4

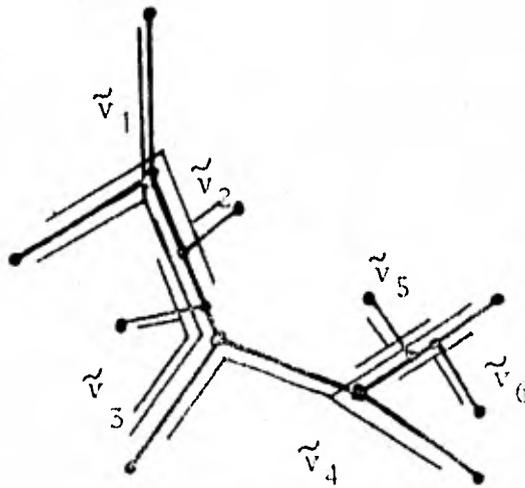
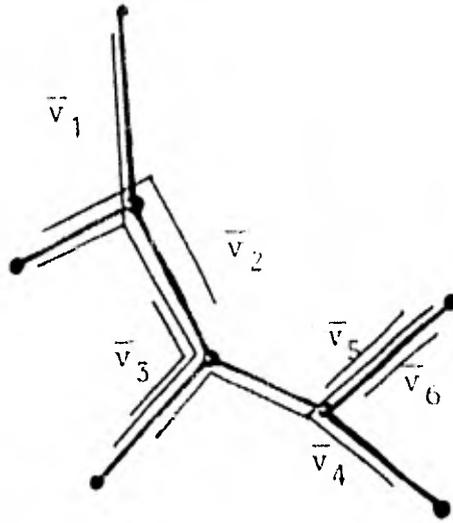


figura 3.5

CAPITULO C
GRAFICAS ARCO CIRCULARES

Definición 4.1. -Un diagrama arco circular consiste de un circulo C y un conjunto de arcos $\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_n$ sobre C . Este diagrama será denotado por $C(\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_n)$.

Definición 4.2 A la gráfica de intersección G que representa al diagrama arco-circular la llamaremos gráfica arco circular.

Igual que en casos anteriores G es una gráfica arco-circular si G representa algún diagrama arco-circular. Ver figura 4.1 .

Si \overline{v}_i es un arco sobre C entonces $\overline{v}_i = (i^-, i^+)$ es el arco con extremos i^- e i^+ tal que cualquier punto en \overline{v}_i que se mueve en sentido contrario a las manecillas de reloj va de i^- a i^+ (extremo negativo y positivo del arco respectivamente).

Sólo tomaremos arcos tales que ningunos dos arcos tienen extremos en común, ningún arco cubre por completo C y no existen dos arcos tales que su unión sea C .

Dada una gráfica arco-circular G utilizaremos su diagrama arco-circular para inducir una orientación sobre G como sigue:

Si (v_i, v_j) es arista de G entonces $v_i \rightarrow v_j$ en \vec{G} si y sólo si j^- corre en el intervalo \overline{v}_i . Ver figura 4.2

Una gráfica orientada que representa al menos un diagrama arco-circular es llamada gráfica arco circular orientada.

Definición 4.3. - Una gráfica G es $\{R\}$ -orientable si para cualesquiera tres vértices v_1, v_2, v_3 tales que $v_1 \rightarrow v_2$, $v_2 \rightarrow v_3$ se tiene que (v_1, v_3) es arista de G .

Teorema 4.1

Si G es una gráfica arco circular entonces G es $\{B_1\}$ -orientable.

Demostración:

Sea $C(\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_n)$ un diagrama arco circular que representa G .

Supongamos que G no es $\{B_1\}$ -orientable, por lo tanto existen v_i, v_j, v_k tales que $v_i \rightarrow v_j$, $v_j \rightarrow v_k$ y (v_i, v_k) no es elemento de G , por lo tanto en $C(\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_n)$ tenemos que j^- ocurre en el intervalo \overline{v}_i y en el intervalo \overline{v}_k por lo tanto $\overline{v}_i \cap \overline{v}_k \neq \emptyset$ es decir (v_i, v_k) no es elemento de las aristas de G lo cuál es una contradicción.

Se han dado caracterizaciones de las gráficas arco circulares utilizando matrices de adyacencia. No obstante esta caracterización no es útil para encontrar un algoritmo eficiente de reconocimiento. Por lo tanto un camino tal vez bueno ha seguir es utilizar como herramienta $\{R\}$ -orientaciones, propiedad que acabamos de demostrar tienen las gráficas arco circulares.

Enunciaremos entonces algunos resultados acerca de gráficas $\{B_1\}$ -orientables así como un algoritmo para reconocerlas.

Definición 4.4 Dada una trayectoria T con vértices v_1, \dots, v_n ,

$\dots, v_m, (v_i, v_j)$ es cuerda triangular si $j=i+1$ con $i=1, \dots, m-2$.

Definición 4.5 .- Dada una arista (a,b) de G decimos que la arista (u,v) de G está (b,u) -fuertemente relacionada a (a,b) si existe una trayectoria T sin cuerdas triangulares tal que T es $a=v_1, b=v_2, v_3, \dots, v_{m-2}, v_{m-1}=u, v_m=v$.

Intuitivamente si G es una gráfica $\{B_1\}$ orientable y (a,b) y (v,u) están (b,v) -fuertemente relacionadas entonces si $a \rightarrow b$ tenemos que $v \rightarrow u$, por lo tanto si existe una arista (u,v) tal que sea $(b,u), (b,v)$ -fuertemente relacionada a (a,b) entonces G no es $\{B_1\}$ orientable.

Definición 4.6.- Una arista (a,b) es $(a \rightarrow b) \{B_1\}$ admisible si no existe (u,v) arista de G tal que sea (b,u) y (b,v) -fuertemente relacionada a (a,b) .

Decimos por lo tanto que (a,b) es $\{B_1\}$ admisible si es $(a \rightarrow b)$ o $(b \rightarrow a) \{B_1\}$ admisible.

Sea G una gráfica y \vec{G} una $\{B_1\}$ orientación de G . Dada una arista (a,b) de \vec{G} definimos $\vec{G}(a \rightarrow b)$ la gráfica obtenida de G reorientando todas las aristas $v \rightarrow u$ de \vec{G} tales que (v,u) está (b,u) -fuertemente relacionadas a (a,b) .

Lema 4.2

Si \vec{G} es una $\{B_1\}$ orientación de una gráfica G y (a,b) es $(a \rightarrow b) \{B_1\}$ admisible entonces $\vec{G}(a \rightarrow b)$ es también una $\{B_1\}$ -orientación de G .

Demostración:

Supongamos que $\vec{G}(a \rightarrow b)$ no es una $\{B_1\}$ orientación de G por lo tanto existen x, y, z en $V(G)$ tales que (x, z) no es arista de G y $x \rightarrow y$ y $z \rightarrow y$ en $\vec{G}(a \rightarrow b)$, entonces (x, y) está (b, x) -fuertemente relacionada a (a, b) o (z, y) está (b, z) -fuertemente relacionada a (a, b) y solo ocurre uno de los dos casos, de otra forma $(a \rightarrow b)$ no sería $\{B_1\}$ admisible.

Si (x, y) está (b, x) -fuertemente relacionada a (a, b) entonces (y, z) está (b, y) -fuertemente relacionada a (a, b) pero esto no puede pasar ya que $y \rightarrow z$ estaría presente en $\vec{G}(a \rightarrow b)$.

De manera similar (z, y) no puede estar relacionada a (a, b) y por lo tanto $\vec{G}(a \rightarrow b)$ está $\{B_1\}$ orientada.

Definición 4.7 .-Decimos que dos aristas (a, b) y (x, y) son $(a \rightarrow b, x \rightarrow y)$ $\{B_1\}$ compatibles si no existe una arista (u, v) de G tal que es (b, u) y (y, v) fuertemente relacionadas a (a, b) y a (x, y) respectivamente.

Intuitivamente hablando si (a, b) y (x, y) son $(a \rightarrow b, x \rightarrow y)$ $\{B_1\}$ compatibles, entonces existe una $\{B_1\}$ orientación \vec{G} de G tal que $a \rightarrow b$ y $x \rightarrow y$.

Lema 4.4

Supongamos que $a \rightarrow b$ y $x \rightarrow y$ son $\{B_1\}$ admisibles y (x, y) no es (b, x) o (b, y) fuertemente relacionadas a (a, b) entonces (a, b) y (x, y) son $(a \rightarrow b, x \rightarrow y)$ $\{B_1\}$ compatibles.

Demostración:

Si (a, b) está (b, u) fuertemente relacionada a (u, v) y

y (x,y) está (v,x) -fuertemente relacionada a (u,v) entonces (a,b) está (b,x) fuertemente relacionada a (x,y) .

Si (a,b) está (b,x) fuertemente relacionada a (x,y) entonces (x,y) está (x,b) fuertemente relacionada a (a,b) .

Supongamos entonces que (a,b) y (x,y) no son $(a \rightarrow b, x \rightarrow y) \in \{B_1\}$ compatibles entonces existe (u,v) tal que (u,v) es (b,u) -fuertemente relacionada a (a,b) y (u,v) está (y,v) -fuertemente relacionada a (x,y) y por lo tanto (a,b) está (b,y) fuertemente relacionada a (x,y) lo cuál no puede suceder.

Teorema 4.5

G es $\{B_1\}$ Orientable si y sólo si todas las aristas de G son $\{B_1\}$ admisibles.

Demostración:

" \Rightarrow "

La demostración de ésta implicación es clara de la definición 4.6

" \Leftarrow "

Supongamos que todas las aristas de G son $\{B_1\}$ admisibles.

Sean $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ un conjunto de aristas tales que:

- a) (a_i, b_i) es $\{B_1\}$ admisible $\forall i \in \{1, \dots, n\}$
- b) Todas las aristas (u,v) de G está (b_i, u) o (b_i, v) -fuertemente relacionada a (a_i, b_i) para a lo más una $i \in \{1, \dots, n\}$
- c) (a_j, b_j) no es (b_i, a_j) o (b_i, b_j) -fuertemente relacio-

nada a (a_i, b_i) $1 \leq i \leq j$.

Definimos sobre G la siguiente orientación

i) Orientamos $a_i \rightarrow b_i$ $1 \leq i \leq m$

ii) Si (u, v) está (b_i, u) -fuertemente relacionada a (a_i, b_i) orientamos de $u \rightarrow v$ de otra forma de $v \rightarrow u$

Si existe (u, v) tal que para alguna $i \neq j$, $i < j$ (u, v) está (b_i, u) y (b_j, v) -fuertemente relacionada a (a_i, b_i) y (a_j, b_j) respectivamente entonces (a_i, b_i) y (a_j, b_j) no son $\{B_i\}$ -compatibles y por lema 4.4 y el inciso c) esto no es posible, por lo tanto \vec{G} está bien definida.

Supongamos ahora que \vec{G} no está $\{B_i\}$ -orientada entonces existen x, y, z en $V(G)$ tales que (x, y) no está en $E(G)$, $x \rightarrow y$ y $z \rightarrow y$ en G por lo tanto existe (a_i, b_i) (b_i, x) -fuertemente relacionada a (x, y) pero claramente (y, z) está también (b_i, y) -fuertemente relacionada a (a_i, b_i) y $y \rightarrow z$ en \vec{G} lo cual no es posible, por lo tanto G es una $\{B_i\}$ -orientación de G .

Para encontrar el conjunto de aristas $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ mencionado anteriormente hacemos lo siguiente:

Elegimos cualquier arista (x, y) de G tal que sea $(x \rightarrow y)$ - $\{B_i\}$ -admisibile y la etiquetamos (a_1, b_1) .

Si todas las aristas (u, v) de G están (b_1, u) o (b_1, v) fuertemente relacionadas a (a_1, b_1) entonces $S = \{(a_1, b_1)\}$

Si no tomamos cualquier arista que no esté fuertemente relacionada a (a_1, b_1) y la llamamos (a_2, b_2) y S será el conjunto con elementos (a_1, b_1) y (a_2, b_2) . Repetimos el mismo

procedimiento hasta que todas las aristas de G estén fuertemente relacionadas a alguna de las aristas de S . Satisfará las condiciones a), b), c) y con esto quedará probado el teorema 4.5.

Ahora daremos un algoritmo para reconocer gráficas $\{B_i\}$ orientables.

Algoritmo 4.1

Sea $i=1$

Paso 1.- Escogemos la arista orientada (x_i, y_i) y la etiquetamos (a, b)

Paso 2.- Orientamos $a \rightarrow b$ y coloreamos esta arista.

Paso 3.- Encontramos todas las aristas (b, z) tal que (a, z) no esté en $E(G)$. Si alguna de ellas está ya orientada de $z \rightarrow b$ vamos al paso 5. Si no coloreamos y orientamos todas las aristas no orientadas (b, z) de $b \rightarrow z$. En éste paso las mismas aristas (b, z) pueden estar orientadas ya y posiblemente no estén coloreadas. Marquemos $a \rightarrow b$.

Paso 4.- Encuentre una arista no marcada orientada y coloreada $u \rightarrow v$ y llamémosla $a \rightarrow b$ y vamos al paso 3. Si todas las aristas orientadas, coloreadas están marcadas ya entonces quite el color y desmarque todas las aristas coloreadas y -- y marcadas. Sea $i=i+1$, $BOOL=TRUE$ y vamos al paso 6.

Paso 5 .- Si $BOOL=FALSE$ vamos al paso 7

Si $BOOL=TRUE$ entonces $BOOL=FALSE$

Desmarquemos y desorientemos todas las aristas orientadas y coloreadas etiquetadas (x_i, y_i) , (a,b) y vamos al paso 2.

Paso 6 .- Si todas las aristas de G están orientadas en tonces G está $\{B_1\}$ orientada y vamos al paso 8
Si no vamos al paso 2.

Paso 7 .- G no es $\{B_1\}$ orientable

Paso 8 .- Alto

Relaciones entre Gráficas Cordales, Gráficas de Intervalos Propias, de Comparabilidad Arco-Circulares Propias y Gráficas de Intervalos Anidados.

Daremos ahora algunas relaciones entre las gráficas dadas anteriormente en términos de ciertas gráficas prohibidas B_1 , B_2 , B_3 dadas en la figura 4.4.

Algunas de estas relaciones se han dado ya, como son:

G es cordal si y sólo si G es R-orientable. Esta afirmación es equivalente a

G es cordal si y sólo si G tiene una orientación acíclica \vec{G} tal que B_1 no es subgráfica inducida de \vec{G} si y sólo si G tiene una orientación acíclica \vec{G} tal que B_2 no es subgráfica inducida de \vec{G} .

Es fácil checar también que toda gráfica es transitivamente orientable si y sólo si existe una orientación acíclica \vec{G} de G tal que B_3 no puede ser una subgráfica inducida de \vec{G} .

Otras gráficas caracterizadas a partir de subgráficas prohibidas son las gráficas de intervalos propias, arco-circulares propias y gráficas de intervalos anidados.

Una gráfica de intervalos propia es aquella que tiene un diagrama de intervalos tal que ningún intervalo está contenido en otro. De manera análoga se define una gráfica arco-circular propia.

Una gráfica G es gráfica de intervalos anidados si ésta representa a un diagrama de intervalos $D = \{I_1, \dots, I_n\}$ tal que $(v_i, v_j) \in E(G)$ si y sólo si $I_i \subset I_j$ ó $I_j \subset I_i$ es decir cualquier arista de G indicará contención de un intervalo en otro.

Dado un conjunto F de gráficas dirigidas, decimos que G es una F -gráfica (respect. F^* -gráfica) si ésta tiene una orientación \vec{G} (respect. una orientación acíclica) tal que no tiene como subgráficas inducidas alguna gráfica de F .

A \vec{G} la llamaremos una F -orientación (respect. una F^* -orientación de G).

Teorema 4.6. G es una $\{B_1, B_2\}^*$ -gráfica si y sólo si G es una gráfica de intervalos propia.

Demostración.

Si G es una gráfica de intervalos propia y $D = \{I_1, \dots, I_n\}$ es un diagrama de intervalos que representa G tal que $I_i = [a_i, b_i]$ para toda $1 \leq i \leq n$ e $I_i \not\subset I_j$ si $i \neq j$ entonces definimos sobre G la siguiente orientación \vec{G} :

$$v_i \rightarrow v_j \quad \text{si y sólo si} \quad a_i < a_j \leq b_i < b_j$$

Fácilmente se checa que B_1 y B_2 no pueden ser subgráficas inducidas de \vec{G} , además de ser una orientación acíclica.

Supóngase que G es $\{B_1, B_2\}^*$ -gráfica y conexa por lo tanto existe \vec{G} una $\{B_1, B_2\}^*$ -orientación de G .

Como \vec{G} está orientada acíclicamente y B_2 no tiene como subgráfica inducida a B_2 existe una única fuente v_1 y además $r(v_1)$ induce una subgráfica completa por lo tanto $G - \{v_1\}$ es conexa y claramente es $\{B_1, B_2\}^*$ -orientable. De la misma forma podemos encontrar v_2 fuente única en $G - \{v_1\}$ de tal manera que $G - \{v_1, v_2\}$ es conexa y $\{B_1, B_2\}^*$ -orientable. Utilizando este procedimiento podemos numerar los vértices de G en v_1, v_2, \dots, v_n tales que v_i es la única fuente en $G - \{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$.

Demostraremos ahora que si v_i es adyacente a v_ℓ y a v_s con $\ell < s$ en $G - \{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$ entonces v_i es adyacente a v_m para toda $\ell < m < s$.

Supongamos que esto no ocurre.

Sea v_j el vértice con el máximo índice al cual v_i no es adyacente $\ell < j < s$. Como v_{i+1} es adyacente a v_i y v_i es fuente en $G - \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ entonces $v_i \rightarrow v_{i+1}$ pero $v_j \rightarrow v_{i+1}$ y $(v_j, v_i) \notin E(G)$ lo cual es una contradicción y por lo tanto v_i es adyacente a un conjunto consecutivo de vértices.

Construiremos ahora el siguiente diagrama de intervalos:

cada v_i estará representado en el diagrama por el

intervalo

$$I_i = [i, \ell_i + 1 - \frac{1}{j+1}]$$

donde $\ell_i = \max\{k | v_i \text{ es adyacente a } v_k\}$.

Probaremos que el diagrama obtenido es un diagrama propio de intervalos. Para esto, basta observar que si $i < j$ y $v_i \rightarrow v_j$ entonces $v_j \rightarrow v_k$ para toda k tal que $v_i \rightarrow v_k$ ($j < k$).

Esto se cumple claramente ya que si no, B_2 sería una subgráfica inducida en \vec{G} .

Lema 4.7. Si G no contiene como subgráficas inducidas a C_4 o a P_4 (donde P_4 es una trayectoria de longitud 4) entonces G tiene al menos un vértice central, esto es, existe $v_i \in V(G)$ tal que $(v_i, v_j) \in E(G)$ para toda $j \neq i$.

Demostración.

Sea G una gráfica conexa que no contiene a C_4 ni a P_4 como subgráficas inducidas y además que G no contiene vértices centrales.

Sea $v \in V(G)$ de grado máximo.

Como G no tiene vértices centrales, existe $u \in V(G)$ tal que $(v, u) \notin E(G)$. Por ser G conexa existe una trayectoria T de u a algún vértice w de $F(v)$. Sea T la mínima trayectoria.

Como G no tiene a P_4 como subgráfica inducida u y w deben ser adyacentes.

El vértice w no puede ser adyacente a todos los elementos de $\Gamma(v)$ pues de lo contrario tendríamos $gr(w) = |\Gamma(v)| + 1 > gr(v)$ lo cual no puede pasar pues v era de grado máximo, por tanto existe $z \in \Gamma(v)$ tal que (z, w) no está en $E(G)$ y por lo tanto los vértices z, v, w, u inducen en G a P_4 ó C_4 lo cual es una contradicción, por lo tanto G debe tener al menos un vértice central.

Teorema 4.8. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para una gráfica G :

- i) G es una $\{B_1, B_3\}^*$ -gráfica.
- ii) G es una $\{B_2, B_3\}^*$ -gráfica.
- iii) G no tiene como subgráficas inducidas a C_4 ó a P_4 .
- iv) G es una gráfica de intervalos anidados.
- v) G es una $\{B_1, B_3\}$ -gráfica.
- vi) G es una $\{B_2, B_3\}$ -gráfica.

Demostración:

Dada una orientación \vec{G} sobre una gráfica G definimos \overleftarrow{G} de la siguiente forma:

$$v_i \rightarrow v_j \text{ en } \overleftarrow{G} \text{ si y sólo si } v_j \rightarrow v_i \text{ en } \vec{G}.$$

Utilizando esta orientación se deducen fácilmente las equivalencias i) \Leftrightarrow ii), v) \Leftrightarrow vi) y vi) \Leftrightarrow i).

Para $ii) \Leftrightarrow iii)$ se checa fácilmente que P_4 y C_4 no son $\{B_2, B_3\}$ -orientables y por lo tanto en cualquier $\{B_2, B_3\}$ -orientación de G , C_4 y P_4 no pueden aparecer como subgráficas inducidas.

Demostración de la implicación $iii) \Rightarrow iv)$:

Supongamos que G no contiene como subgráficas inducidas a C_4 ó a P_4 .

Entonces G tiene un vértice central.

Utilizaremos este hecho para demostrar por inducción sobre el número de vértices que G tiene un diagrama de intervalos anidados.

Es claro que se cumple para $|V(G)| = 1$.

Supongamos que vale si $|V(G)| < k$ y sea G tal que $|V(G)| = k$, como G tiene un vértice central v entonces por hipótesis de inducción $G - v$ tiene un diagrama de intervalos anidados $I = \{I_1, \dots, I_{k-1}\}$. Sea a el punto más a la izquierda en $\bigcup_{i=1}^{k-1} I_i$ y b el punto más a la derecha. Si definimos $I_k = [a-1, b+1]$ obtenemos un diagrama de intervalos anidados para G .

La implicación $iv) \Rightarrow iii)$ la obtenemos fácilmente checando que C_4 y P_4 no son gráficas de intervalos anidados. Así concluimos la demostración del teorema.

De éste obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.9. Una gráfica de intervalos es una gráfica de intervalos anidados si y sólo si G no tiene como subgráfica inducida a P_4 .

Caracterizaciones de las gráficas $\{B_1\}$ -orientables o de las gráficas $\{B_2\}$ -orientables (equivalentes unas de las otras) fueron dadas anteriormente. Por último:

Para dar la caracterización de las $\{B_1, B_2\}$ -gráficas daremos una definición más.

Definición 4.8. Un ciclo central de una gráfica G es un camino v_1, \dots, v_m con $m \geq 3$ con las siguientes tres propiedades:

- 1) $(v_1, v_m) \in E(G)$ (esto es, el camino es cerrado).
- 2) $(v_i, v_{i+2}) \notin E(G)$ para $i = 1, \dots, m$ donde $i + 2$ es dado módulo m .
- 3) $v_i = v_{i+2}$ donde $i + 2$ es dado módulo m para un número impar de índices i en la sucesión.

Teorema 4.9. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para una gráfica G conexa:

- a) G es $\{B_1, B_2\}$ -gráfica.
- b) G no tiene ciclos centrales.
- c) G no tiene a LPC_m^* o a Sgl^* como subgráfica

inducido y G^C no tiene EPC_m , OPC_m^* , Sg1, Sg2.

Sg3, Sg4 ó Sg5 como subgráficas inducidas (ver figura).

d) G es una gráfica arco-circular propia.

Demostración:

"d) \Rightarrow a)"

Sea G una gráfica arco-circular propia.

Sea $C = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ un diagrama arco-circular propio de G . Podemos suponer que los extremos de los arcos son todos distintos.

El arco $\bar{v}_i = (i^-, i^+)$ sobre C es un arco con extremo i^- e i^+ tal que un punto que se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj va de i^- a i^+ .

Definimos la siguiente orientación sobre G .

$v_i \rightarrow v_j$ si y sólo si los extremos de \bar{v}_i, \bar{v}_j forman la sucesión i^-, j^-, i^+, j^+ al mover un punto sobre C en sentido contrario a las manecillas del reloj. Es fácil checar que esta orientación es una $\{B_1, B_2\}$ -orientación de G .

" a) \Rightarrow b)"

Sean G una gráfica $\{B_1, B_2\}$ -orientable y v_1, \dots, v_m un camino C en G con las propiedades 1) y 2) de la definición de ciclo central, demostraremos que $v_i = v_{i+2}$ un

número par de veces.

En cualquier $\{B_1, B_2\}$ -orientación de G aristas sucesivas (v_i, v_{i+1}) , (v_{i+1}, v_{i+2}) tienen la misma orientación (es decir $v_i \rightarrow v_{i+1}$ y $v_{i+1} \rightarrow v_{i+2}$ o bien $v_{i+2} \rightarrow v_{i+1}$, $v_{i+1} \rightarrow v_i$) a menos que $v_i = v_{i+2}$ en cuyo caso sus orientaciones son opuestas, esto es la orientación de las aristas en el camino se invierte cada vez que v_{i+1} se encuentra con $v_i = v_{i+2}$ o como debemos terminar con la misma orientación en la arista (v_1, v_2) con la que empezamos, el camino debe tener un número par de índices i tales que $v_i = v_{i+2}$ y por tanto G no tiene ciclos centrales.

" b) \Rightarrow c) "

Demostraremos que cada una de las subgráficas prohibidas de G y el complemento de las subgráficas prohibidas de G^C contienen ciclos centrales. La etiquetación corresponde a la dada en la figura 4.5.

- $(OPC_m)^C$ contiene el ciclo central $v_1, w, v_2, w, \dots, v_m, w$.
- $(EPC_m)^C$ contiene el ciclo central $v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, v_m, v_2$.
- $(Sg1)^C$ contiene el ciclo central $b, e, a, d, a, c, f, c, e$.
- $(Sg2)^C$ contiene el ciclo central $c, b, a, b, f, e, f, g, a, g, d$.
- $(Sg3)^C$ contiene el ciclo central $c, b, g, d, g, a, g, f, c, e$.
- $(Sg4)^C$ contiene el ciclo central $g, d, c, a, f, g, f, b, c, b, e, b, a, b, d$.
- $(Sg5)^C$ contiene el ciclo central $g, a, b, c, e, f, a, f, d, c, g, a, g, e, d$.

Sea LPC_m un ciclo sin cuerdas v_1, \dots, v_m con $m \geq 4$ y w un vértice que no es adyacente a LPC_m . Como G es conexa existe una trayectoria T de w a LPC_m de longitud mínima. Sin pérdida de generalidad T es $v_1 = w_1, w_2, \dots, w_k = w$. Claramente podemos suponer que $k = 3$. Si $k > 3$ reemplazamos w por w_3 (w_3 está aislado de LPC_m por la minimalidad de T).

Caso 1. w_2 es adyacente sólo a v_1 en LPC_m entonces $w_2, v_1, v_2, \dots, v_m, v_1$ es un ciclo central.

Caso 2. w_2 es adyacente sólo a v_1 y v_2 ó w_2 es adyacente sólo a v_1 y v_m . Sin pérdida de generalidad w_2 es adyacente sólo a v_1 y v_2 entonces $w, w_2, v_2, \dots, v_m, v_1, w_2$ es un ciclo central.

Caso 3. w_2 es adyacente a v_1 y a alguna v_i con $i \neq 2$ ó m . Entonces $w, w_2, v_1, w_2, v_i, w_2$ es un ciclo central.

Por lo tanto LPC_m^* no es subgráfica inducida de G .

Para ver que $Sg1^*$ no es subgráfica inducida de G tomamos $w = w_1, w_2, w_3$ la trayectoria más corta de w a $Sg1$ (w un vértice aislado de $Sg1$ y $Sg1$ está dada en la figura 4.5).

Caso 1. $r(w_2) \cap \{a, c, e\} = \emptyset$. Sin pérdida de generalidad $w_1 = b$, entonces a, b, w_2, b, c, b es un ciclo central. Ya que en los casos restantes a, c ó e es adyacente a w_2 supondremos que $w_1 = a$.

Caso 2. $\Gamma(w_2) \cap \text{Sgl} = \{a\}$. Entonces $w_2, a, f, e, f, b, c, b, a$ es un ciclo central.

Caso 3. $\{a, d\} \subset \Gamma(w_2)$, $\{a, c\} \subset \Gamma(w_2)$ ó $\{a, e\} \subset \Gamma(w_2)$ entonces $w, w_2, a, w_2, d, w, a, w_2, e, w_2$ son ciclos centrales respectivamente.

Caso 4. $\Gamma(w_2) \cap \text{Sgl} = \{a, b\}$ ó $\Gamma(w_2) \cap \text{Sgl} = \{a, f\}$ entonces $w, w_2, b, c, b, f, e, f, a, w_2$ ó $w, w_2, f, e, f, b, c, b, a, w$ son ciclos centrales respectivamente.

Caso 5. $\Gamma(w_2) \cap \text{Sgl} = \{a, b, f\}$ entonces $\{w, w_2, f, e, f, b, c, b, w_2\}$ es un ciclo central.

c) \Rightarrow d)

Este es el teorema de Tucker (ver (7))

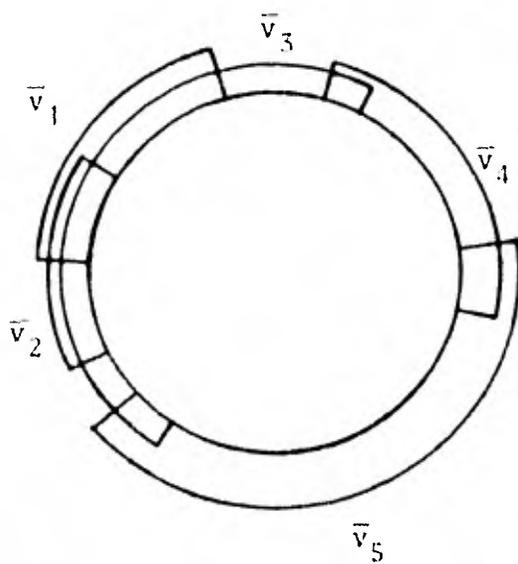


Diagrama Arco Circular

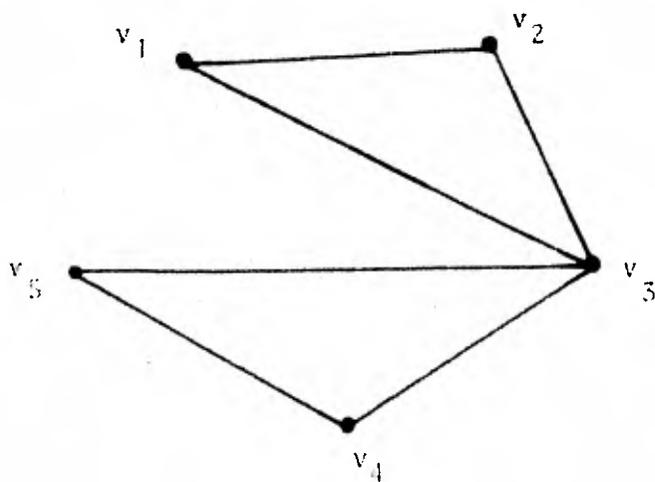


figura 4.1

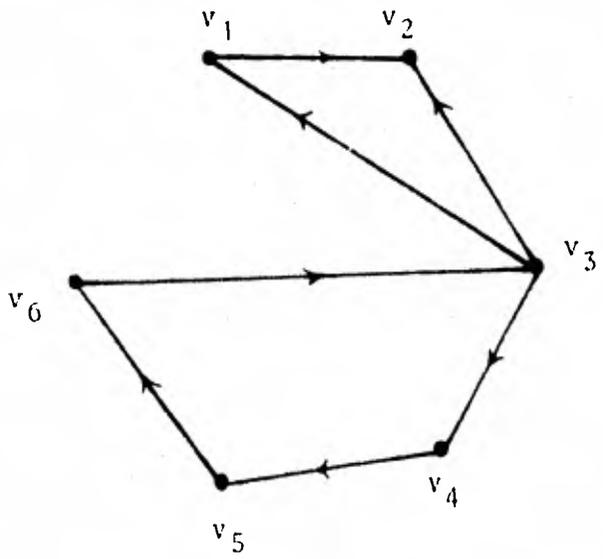
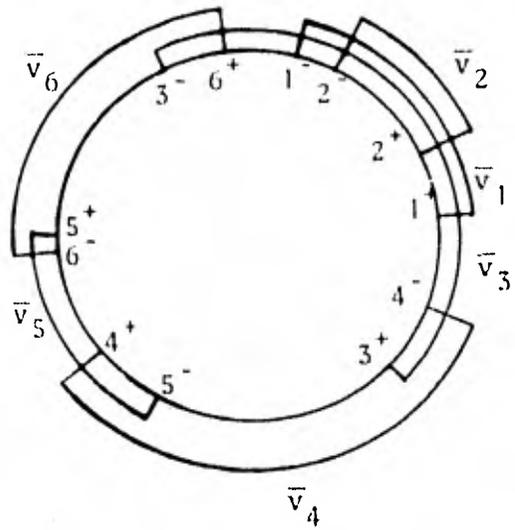


figura 4.2

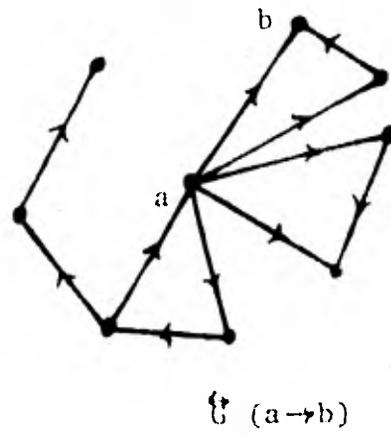
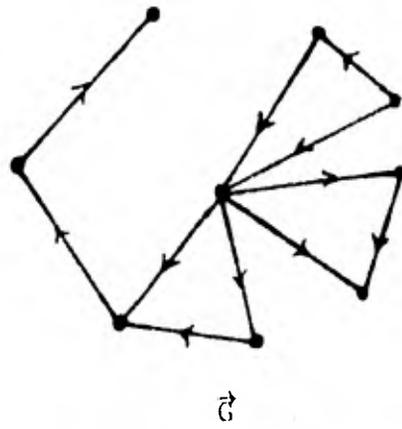


figura 4.3

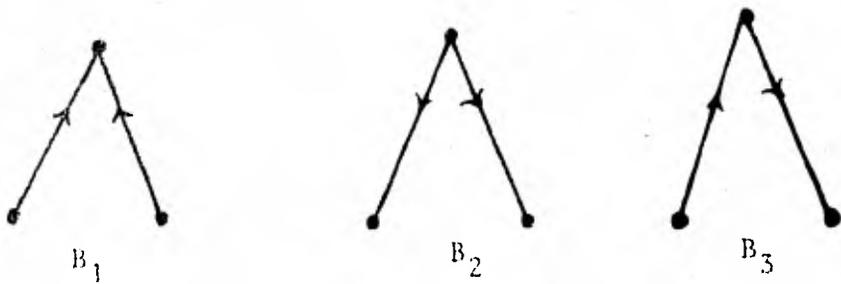
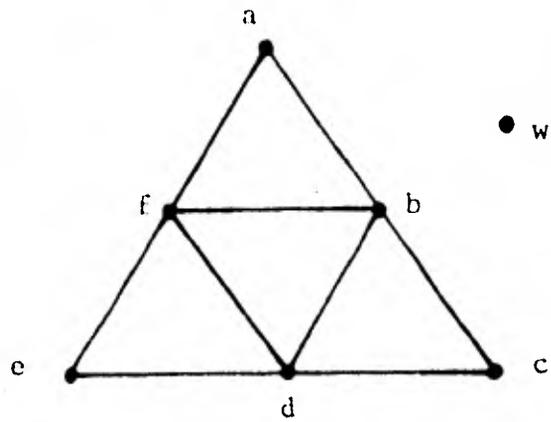


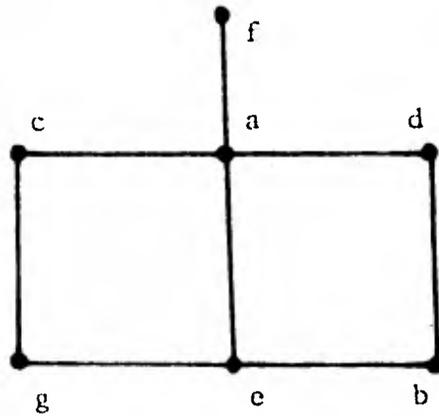
figura 4.4



Sg 1*

(Sg 1* es Sg1 más un vértice aislado)

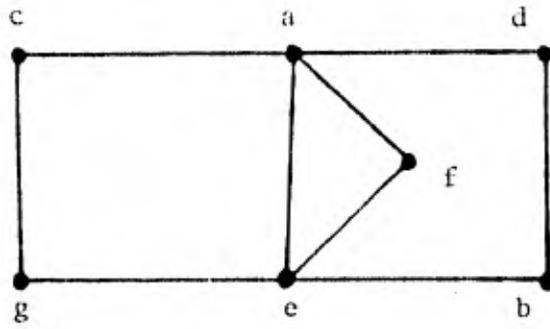
a)



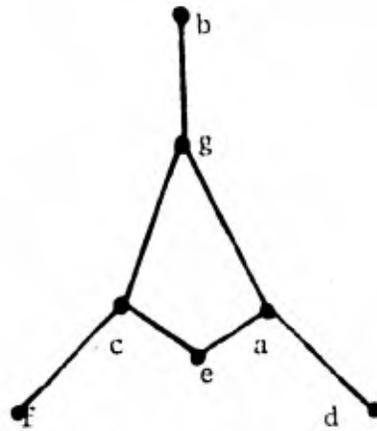
Sg2

b)

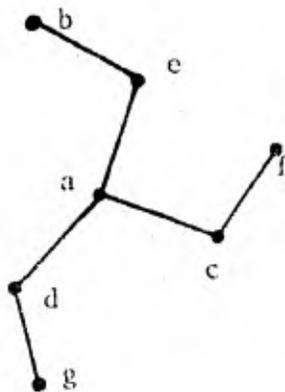
figura 4.5



c) Sg3

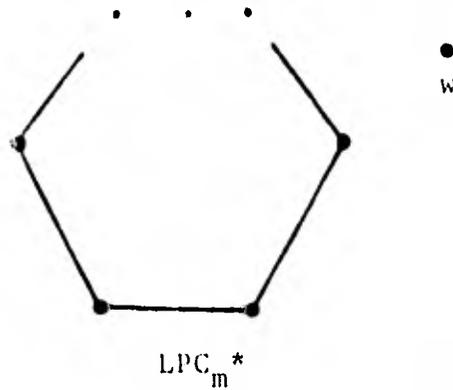


d) Sg4



e) Sg5

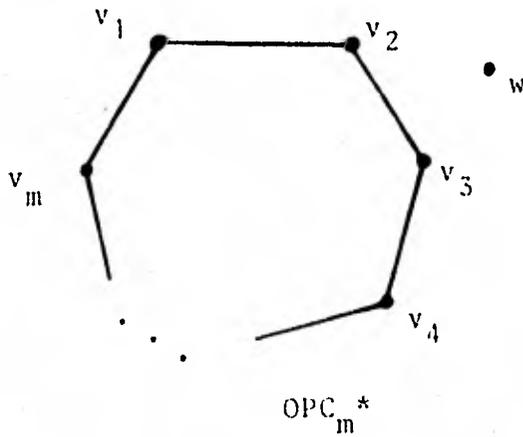
figura 4.5



LPC_m es ciclo sin cuerdas con m 4 vértices

LPC_m^* es LPC_m más un vértice aislado.

f)



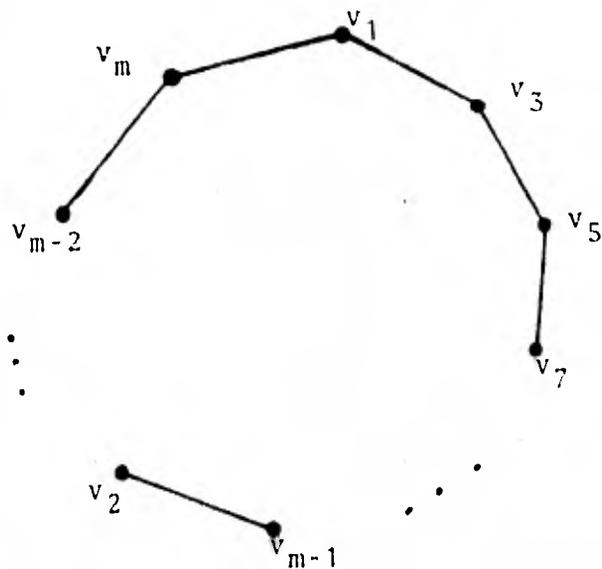
OPC_m es un ciclo sin cuerdas con m 3 vértices

m impar

OPC_m^* es OPC_m más un vértice aislado

g)

figura 4.5



EPC_m es un ciclo sin cuerdas con $m \geq 6$,
 m par.

figura 4.5 h)

REFERENCIAS

- (1) Characterization of Comparability Graphs and Interval Graphs. Can. J. Math. 16 (1964) pp 539-584
Edmore Hoffman
- (2) Lekkerkerker, C.G. and Boland, J. Ch. Representation of a Finite Graphs by a Set of Interval Graphs on the Real Line. Fund. Math. L.I. (1962) pp 45-64.
- (3) Gavril, F., Algorithms for Minimum Coloring, **Maximum** Clique, Minimum Covering by Cliques and **Maximum In** dependent Sets of a Chordal Graphs. SIAM J. Comp. Vol 1 No 2 (1972) pp 180-187.
- (4) Gavril, F., The Intersection Graphs of Subtrees in Trees are Exactly the Chordal Graphs. J.C.T. (B) 16 (1977) pp 199-208.
- (5) Tucker A. Matrix Characterization of Circular Arc Graphs. Pacific J. Math. 39 (1971) pp 535-545
- (6) B_1 Orientable Graphs (aún no está publicado)
by Jorge Víctor Gabara
- (7) A.C. Tucker Structure Theorems for Some Circular Arc Graphs. Discrete Math. 7 (1974) pp 167-195.

- (8) Dale J. Skrien A Relationships between Triangulated Graphs , Comparability Graphs, Proper Interval Graphs, Proper Circular Arc Graphs and Nested Interval Graphs. Journal of Graph Theory pp 309-316
- (9) D.J. Rose. Triangulated Graphs and Elimination Process. J. Math. Anal. Appl. 32 (1970) 597-609.
- (10) Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs by Charles A. Golumbic. Academic Press.
- (11) F. Harary. Graph Theory .Adison Wesley.
- (12) J. A. Bondy, U.S.R. Murty . Graph Theory with Applications . Macmillan Press.
- (13) Intersection Graphs of Some Families of Plane Curves por Jorge Urrutia G. (Thesis) *Ph.D. University of Waterloo (1976)*