UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

OBJETOS CON ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

TESIS

Que para obtener el Título de

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a

BEATRIZ RUMBOS PELLICER

1 9 8 2

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

- Notación -

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$ denotan categorías.

$Ob\,\mathcal{A}$ = objetos de la categoría $\mathcal{A}$.

$Mor\,\mathcal{A}$ = morfismos de la categoría $\mathcal{A}$.

$hom_{\mathcal{A}}(A, B)$ = el conjunto de todos los morfismos de la forma $A \xrightarrow{f} B \in Mor\,\mathcal{A}$.

$\mathcal{S}et$ = la categoría de conjuntos.

$\mathcal{G}rp$ = la categoría de grupos.

$\mathcal{A}b$ = la categoría de grupos abelianos.

Dados $A_1, A_2, \ldots, A_n \in Ob\,\mathcal{A}$:

$A_1 \times A_2$ = producto de A_1 y A_2.

$\prod_{i=1}^{n} A_i$ = producto de las A_i, $i = 1, \ldots, n$.

$\coprod_{i=1}^{n} A_i$ = coproducto de las A_i, $i = 1, \ldots, n$. Si $n = 2$ se denota por $A_1 \amalg A_2$.

$\mathcal{A}^{\mathcal{B}} = \{ F : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A} \mid F \text{ es funtor} \}$

0 - Introducción.

Normalmente un grupo se define como un conjunto, digamos A, con una multiplicación, es decir una función $m : A \times A \longrightarrow A$ que cumple ciertas propiedades dadas en términos de los elementos de A. Si se tiene una categoría $\mathcal{C}$ con productos y objeto terminal, se tiene el concepto de objeto con estructura de grupo para $A \in Ob\,\mathcal{C}$, donde las propiedades de "grupo" se expresan únicamente en términos de los morfismos de $\mathcal{C}$ (*).

En este trabajo se pedirá un poco mas que el objeto terminal y éste será sustituido por objeto cero. Esta pérdida de generalidad permite el uso del morfismo canónico $\varkappa : A \amalg A \longrightarrow A \times A \in$ $\in Mor\,\mathcal{C}$ en el caso de la existencia de coproductos en $\mathcal{C}$.

Dado $A \in Ob\,\mathcal{C}$ con estructura de grupo se induce una "multiplicación" en el conjunto

---

(*) Ver por ejemplo Mc Lane Saunders, <u>Categories for the Working Mathematician</u>, Springer Verlag, 1971.

$hom_{\mathcal{C}}(X, A)$, $X \in Ob\,\mathcal{C}$ y éste será un grupo en el sentido convencional. Este tipo de estructuras se estudia en el capítulo II.

Posteriormente se relacionan las estructuras multiplicativas con los funtores adjuntos y se obtienen resultados que relacionan las estructuras en $hom_{\mathcal{A}}(F(B), A)$ y en $hom_{\mathcal{B}}(B, G(A))$, dada una pareja $\mathcal{A} \underset{F}{\overset{G}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$ de funtores adjuntos y $A \in Ob\,\mathcal{A}$, $B \in Ob\,\mathcal{B}$. En el capítulo IX se utiliza esto en el caso de los funtores espacio de lazos ($\Omega : \mathcal{T}op_*^{\circ} \longrightarrow \mathcal{T}op_*^{\circ}$) y suspensión reducida ($\Sigma : \mathcal{T}op_*^{\circ} \longrightarrow \mathcal{T}op_*^{\circ}$) ya que estos resultan ser adjuntos.

A continuación se estudian los objetos con estructura multiplicativa dentro de la categoría de los grupos y se obtienen también algunos resultados interesantes sobre objetos con comultiplicación (una comultiplicación es un morfismo $\mu : A \longrightarrow A \amalg A$), relacionándose estos con los grupos libres. Se puede decir de cierta manera que abeliano es a multiplicación como libre es a comultiplicación.

Por último se da una generalización a un teorema de teoría de categorías que es el de inmersión plena, obteniéndose una inmersión plena $E: \mathcal{G}rp\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{G}rp\,\mathcal{S}et^{\mathcal{C}^{op}}$, donde $\mathcal{G}rp\,\mathcal{C}$ son los objetos con multiplicación de la categoría $\mathcal{C}$, junto con los homomorfismos.

Este trabajo no intenta de ninguna manera ser original y es básicamente una revisión del artículo Group like Structures in General Categories I de Eckmann y Hilton (ver bibliografía).

- Indice General -

I- Preliminares

Sea $\mathcal{C}$ una categoría pequeña con objeto cero, productos y coproductos finitos. Dados $C, A_1, \ldots, A_n \in Ob\,\mathcal{C}$ y $C \xrightarrow{g_i} A_i$ $i=1,\ldots,n$ $\in Mor\,\mathcal{C}$, al único morfismo

$\varphi : C \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} A_i$.ɔ.

$$\begin{tikzcd} \prod_{i=1}^{n} A_i \arrow[r, "p_i"] & A_i \\ C \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "g_i"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta $\forall\, i=1,\ldots,n$

con $p_i : \prod_{i=1}^{n} A_i \longrightarrow A_i$ las proyecciones canónicas, se le denotará como $\varphi = (g_1, \ldots, g_n)$.

De manera análoga, si $\coprod_{j=1}^{n} A_j \xleftarrow{i_j} A_j$ son las inyecciones canónicas y se tienen morfismos $A_j \xrightarrow{h_j} C$ $j=1,\ldots,n$, al único morfismo $\psi : \coprod_{j=1}^{n} A_j \longrightarrow C$

.ɔ.

$$\begin{tikzcd} \coprod_{j=1}^{n} A_j \arrow[d, "\psi"] & A_j \arrow[l, "i_j"'] \arrow[dl, "h_j"] \\ C & \end{tikzcd}$$

conmuta $\forall\, j=1,\ldots,n$

se le denotará por $\psi = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$.

Es claro que se cumplen las siguientes propiedades.

1) Si $C' \xrightarrow{k} C \in Mor\,\mathcal{C}$ entonces $(g_1, \ldots, g_n) \circ k = (g_1 \circ k, \ldots, g_n \circ k)$

2) Dados $g_i : A_i \longrightarrow A_i'$ $i=1,\dots,n$, al morfismo $(g_1 p_1, \dots, g_n p_n) : \prod_{i=1}^{n} A_i \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} A_i'$ se le denotará por $g_1 \times \cdots \times g_n$.

Si $(f_1, \dots, f_n) : C \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} A_i$ con $C \xrightarrow{f_i} A_i$ y $g_1 \times \cdots \times g_n : \prod A_i \longrightarrow \prod A_i'$, entonces

$(g_1 \times \cdots \times g_n) \circ (f_1, \dots, f_n) = (g_1 f_1, \dots, g_n f_n)$

3) Si $g_1 \times \cdots \times g_n : \prod_{i=1}^{n} A_i \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} A_i'$ y $h_1 \times \cdots \times h_n : \prod_{i=1}^{n} A_i' \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} A_i'' \in \mathrm{Mor}\, \mathcal{C}$, entonces

$(h_1 \times \cdots \times h_n) \circ (g_1 \times \cdots \times g_n) = h_1 g_1 \times \cdots \times h_n g_n$

Las propiedades duales se cumplen para el coproducto, donde dados $g_j : A_j' \longrightarrow A_j \in \mathrm{Mor}\, \mathcal{C}$, $j=1,\dots,n$, al morfismo $\begin{pmatrix} i_1 g_1 \\ \vdots \\ i_n g_n \end{pmatrix}$ se le denotará por $g_1 \oplus \cdots \oplus g_n$.

Sea $\bar{0} \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ el objeto cero. Si $A_1, A_2 \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, $A_1 \longrightarrow \bar{0} \longrightarrow A_2 \in \mathrm{Mor}\, \mathcal{C}$ es el morfismo cero entre A_1 y A_2, denotado simplemente por 0.

Sean $A_1, \dots, A_n \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ y $\delta_{jk} : A_j \longrightarrow A_k \in \mathrm{Mor}\, \mathcal{C}$, $j,k = 1,\dots,n$ $\ni$. $\delta_{jk} = \begin{cases} 1_{A_j} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$

entonces para cada A_k, $k=1,\dots,n$ se tiene

$$\begin{tikzcd} \coprod_{j=1}^{n} A_j & A_j \arrow[l, "i_j"'] \arrow[d, "\delta_{ik}"] \\ & A_k \end{tikzcd} \qquad \therefore\ \exists!\ q_k : \coprod_{j=1}^{n} A_j \longrightarrow A_k \ni$$

$q_k i_j = \delta_{jk}$ $\forall\ i,k=1,\dots,n$ con $q_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ con 1

en el lugar k-ésimo. Dado lo anterior, existe el morfismo canónico $\pi : \coprod_{j=1}^{n} A_j \longrightarrow \prod_{j=1}^{n} A_j$ donde $\pi = (q_1,\dots,q_n)$.

II - Estructuras multiplicativas

Sea $\mathcal{C}$ como en I, aunque no necesariamente con coproductos y sea $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.

<u>Definición 2.1</u>. Una estructura multiplicativa sobre A es un morfismo $m: A \times A \longrightarrow A$ de $\mathcal{C}$. La pareja (A, m) se llama objeto multiplicativo

<u>Definición 2.2</u>. Dados (B, m) y (B', m') objetos multiplicativos, se define como un homomorfismo de B a B' a un morfismo $B \xrightarrow{g} B'$ de $\mathcal{C}$ tal que

$$\begin{array}{ccc} B \times B & \xrightarrow{m} & B \\ \downarrow{\scriptstyle g\times g} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ B' \times B' & \xrightarrow{m'} & B' \end{array}$$

conmuta.

Es claro que un objeto multiplicativo (A, m) en $\mathcal{C}$ induce una estructura multiplicativa en el conjunto punteado $\hom_{\mathcal{C}}(X, A)$, $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, ya que se puede definir $+ : \hom_{\mathcal{C}}(X, A) \times \hom_{\mathcal{C}}(X, A) \longrightarrow \hom_{\mathcal{C}}(X, A)$ como $f + g = m(f, g)$ con $f, g \in \hom_{\mathcal{C}}(X, A)$

Dado $h: X \longrightarrow Y \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ se tiene $h^*: \hom_{\mathcal{C}}(Y, A) \longrightarrow \hom_{\mathcal{C}}(X, A)$ que se calcula como:
$h^*(f) = f \cdot h \quad \forall\ f \in \hom_{\mathcal{C}}(Y, A)$

Teorema 2.1. h^* es un homomorfismo con respecto a las estructuras multiplicativas en $\hom_{\mathcal{C}}(Y, A)$ y $\hom_{\mathcal{C}}(X, A)$ inducidas por (A, m).

Dem. Dados $f, g \in \hom_{\mathcal{C}}(Y, A)$ se tiene $h^*(f+g) = h^*(m(f,g)) = m(f,g)\cdot h = m(f\cdot h, g\cdot h) = f\cdot h + g\cdot h = h^*(f) + h^*(g)$ $\therefore$ h^* es homomorfismo ∎

El recíproco de este teorema se cumple con lo que se tiene:

Teorema 2.2. Si $\forall\, X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ se tiene una estructura multiplicativa $+$ en $\hom_{\mathcal{C}}(X, A)$ de manera que si $h \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$, h^* es homomorfismo, entonces existe una única $m : A \times A \longrightarrow A$ ∍ (A, m) es un objeto multiplicativo y si $f, g \in \hom_{\mathcal{C}}(X, A)$ se cumple $f+g = m(f, g)$

Dem. Sea $X = A \times A$ y $p_1, p_2 : A \times A \longrightarrow A$ las proyecciones. Si $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ y $f, g \in \hom_{\mathcal{C}}(Y, A)$, entonces $(f, g) \in \hom_{\mathcal{C}}(Y, A \times A)$ $\therefore$ $(p_1 + p_2)\cdot(f, g) = (f, g)^*(p_1 + p_2) = (f,g)^*(p_1) + (f,g)^*(p_2) = p_1(f, g) + p_2(f, g) = f + g$.

$\therefore$ $m = p_1 + p_2 : A \times A \longrightarrow A$ es tal que (A, m) es un objeto multiplicativo y si $f, g \in \hom_{\mathcal{C}}(X, A)$ se cumple $f + g = m(f, g)$.

Si $m' : A \times A \longrightarrow A$ induce la misma estructura $+$ en $\hom_{\mathcal{C}}(X, A)$ $\forall\ X \in Ob\,\mathcal{C}$, se tiene que $p_1 + p_2 = m'(p_1, p_2) = m' 1_{A\times A} = m'$ $\therefore$ m es única $\bullet$

Todo lo anterior se puede dualizar si ahora consideramos $\mathcal{C}$ una categoría con coproductos. Se tiene así que $m : A \longrightarrow A \amalg A \in Mor\,\mathcal{C}$ es una estructura comultiplicativa sobre A y (A, m) es un objeto comultiplicativo, mientras que un morfismo $g : A' \longrightarrow A$ es homomorfismo si

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{m'} & A' \amalg A' \\ \downarrow g & & \downarrow g \amalg g \\ A & \xrightarrow{m'} & A \amalg A \end{array}$$

conmuta.

Si ahora se considera el conjunto punteado $\hom_{\mathcal{C}}(A, X)$ donde (A, m) es un objeto comultiplicativo, se tiene que dados $f, g \in \hom_{\mathcal{C}}(A, X)$, se puede definir $f+g$ como $\binom{f}{g} m = f+g$ es decir, (A, m) induce una estructura multiplicativa $+$ en $\hom_{\mathcal{C}}(A, X)$ $\forall\ X \in Ob\,\mathcal{C}$.

Si $X \xrightarrow{h} Y \in Mor\,\mathcal{C}$ se tiene $h_* : \hom_{\mathcal{C}}(A, X) \longrightarrow \hom_{\mathcal{C}}(A, Y)$ definido por

$h_*(f) = h \cdot f \quad \forall\, f \in \hom_{\mathcal{C}}(A, X)$

Con esta h_* se obtienen claramente los duales de los teoremas 2.1 y 2.2 (se omiten los enunciados).

Considérense ahora (A, m) y (A', m') dos objetos multiplicativos de $\mathcal{C}$ con $A \xrightarrow{g} A' \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ un homomorfismo. Se tienen los siguientes teoremas:

Teorema 2.3. $g_* : \hom_{\mathcal{C}}(X, A) \longrightarrow \hom_{\mathcal{C}}(X, A')$ es un homomorfismo con respecto a las estructuras multiplicativas inducidas por m y m'.

Dem. Dados $f_1, f_2 \in \hom_{\mathcal{C}}(X, A)$, se tiene que

$g_*(f_1 + f_2) = g \cdot (f_1 + f_2) = g \cdot m(f_1, f_2) = m'(g \times g)(f_1, f_2) =$

$= m'(g f_1, g f_2) = g f_1 + g f_2 = g_*(f_1) + g_*(f_2) \therefore$

g_* es homomorfismo •

Teorema 2.4. Si $A \xrightarrow{g} A' \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ es tal que g_* es homomorfismo $\forall\, X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, entonces g es homomorfismo.

Dem. Sea $X = A \times A$ y $p_1, p_2 : A \times A \longrightarrow A$ las

proyecciones, entonces $g\cdot m = g\cdot(p_1+p_2) = gp_1 + gp_2 =$
$= m'(gp_1, gp_2) = m'(g\times g)(p_1,p_2) = m'(g\times g)$ $\therefore$
g es homomorfismo.

<u>Definición 2.3</u>. Si (A_1, m_1) y (A_2, m_2) son dos objetos multiplicativos de $\mathcal{C}$, es posible obtener una estructura multiplicativa en $A_1 \times A_2$ de la siguiente manera:

Se define $m : (A_1\times A_2)\times(A_1\times A_2) \longrightarrow A_1\times A_2$
como $m = (m_1(p_1,p_3),\ m_2(p_2,p_4))$ donde
$p_1, p_3 : (A_1\times A_2)\times(A_1\times A_2) \longrightarrow A_1$
$p_2, p_4 : (A_1\times A_2)\times(A_1\times A_2) \longrightarrow A_2$
son las proyecciones correspondientes.

<u>Teorema 2.5</u>. La m definida arriba es única con la propiedad que las proyecciones $A_1\times A_2 \xrightarrow{\pi_1} A_1$ y $A_1\times A_2 \xrightarrow{\pi_2} A_2$ sean homomorfismos.

<u>Dem.</u> $\pi_1\times\pi_1 = (p_1, p_3)$ $\therefore$ $\pi_1 m = m_1(p_1, p_3) =$
$= m_1(\pi_1\times\pi_1)$, análogamente $\pi_2 m = m_2(p_2, p_4) =$
$= m_2(\pi_2\times\pi_2)$ $\therefore$ π_1 y π_2 son homomorfismos.

Si m' es tal que $\pi_1 m' = m_1(p_1, p_2)$ y $\pi_2 m' = m_2(p_3, p_4)$, por ser π_1 y π_2 proyecciones se tiene que $m' = m$ $\therefore$ m es única tal que π_1 y π_2 sean homomorfismos •

Teorema 2.6. Si (X, m') es un objeto multiplicativo de $\mathcal{C}$ y se tienen (A_1, m_1), (A_2, m_2) y m como en la definición 2.3, entonces $X \xrightarrow{f_1} A_1$ y $X \xrightarrow{f_2} A_2 \in \mathcal{M}or\,\mathcal{C}$ son homomorfismos si y sólo si (f_1, f_2) es un homomorfismo.

Dem. $\Rightarrow$) $\pi_1 m[(f_1, f_2) \times (f_1, f_2)] = m_1(\pi_1 \times \pi_1)[(f_1, f_2) \times (f_1, f_2)]$

$= m_1[\pi_1(f_1, f_2) \times \pi_1(f_1, f_2)] = m_1(f_1 \times f_1) = f_1 m' =$

$= \pi_1(f_1, f_2) m'$. De manera análoga $\pi_2(f_1, f_2) m' =$

$= \pi_2 m[(f_1, f_2) \times (f_1, f_2)]$ $\therefore$ $m[(f_1, f_2) \times (f_1, f_2)] =$

$= (f_1, f_2) m'$ $\therefore$ (f_1, f_2) es homomorfismo

$\Leftarrow$) $f_i = \pi_i (f_1, f_2)$ $i = 1, 2$ con π_i $i = 1, 2$ y (f_1, f_2) homomorfismos $\therefore$ f_1 y f_2 son homomorfismos •

Notación. α es el morfismo canónico

$$(A_1 \times A_2) \times A_3 \xrightarrow{\alpha} A_1 \times (A_2 \times A_3)$$

τ es el morfismo canónico $A_1 \times A_2 \xrightarrow{\tau} A_2 \times A_1$.

<u>Definición 2.4</u>. Una estructura multiplicativa $m : A \times A \longrightarrow A$, $A \in Ob\,\mathcal{C}$, $m \in Mor\,\mathcal{C}$, es una estructura de grupo si cumple con las siguientes propiedades:

I - $m(1_A, 0) = m(0, 1_A) = 1_A$

II - $m(m \times 1_A) = m(1_A \times m)\alpha$

III - Existe $A \xrightarrow{s} A \in Mor\,\mathcal{C}$.∋. $m(1_A, s) = m(s, 1_A) = 0$

Se dice que la estructura m es conmutativa si aparte cumple:

IV - $m = m\tau$.

<u>Teorema 2.7</u>. (A, m) es un objeto con estructura de grupo conmutativo en $\mathcal{C}$ $\Longleftrightarrow$ $hom_{\mathcal{C}}(X, A) \in Ab$ con la estructura inducida por (A, m).

<u>Dem.</u> $\Rightarrow$) $f \in hom_{\mathcal{C}}(X, A)$, $f + 0 = m(f, 0) =$ $m(1, 0)f = f$, análogamente $0 + f = f$

Si $f_1, f_2, f_3 \in hom_{\mathcal{C}}(X, A)$, $(f_1 + f_2) + f_3 =$ $= m(m(f_1, f_2), f_3) = m(f_1, m(f_2, f_3)) = f_1 + (f_2 + f_3)$

$f + sf = m(f, sf) = m(1, s)f = 0$ y de la misma manera $sf + f = 0$

$$f_1 + f_2 = m(f_1, f_2) = m\tau(f_1, f_2) = m(f_2, f_1) = f_2 + f_1$$

$\therefore \ hom_{\mathcal{C}}(X, A) \in \mathcal{A}b$.

$\Leftarrow$) Si $0 \in hom_{\mathcal{C}}(A, A)$ es el elemento idéntico, es claro que $m(1_A, 0) = m(0, 1_A) = 1_A$.

Sean p_1, p_2, p_3 las proyecciones $A \times A \times A \xrightarrow{p_i} A$ $i=1,2,3$. Como $m \times 1 = (m(p_1, p_2), p_3)$ y $(1 \times m)\alpha = (p_1, m(p_2, p_3))$ entonces $(p_1 + p_2) + p_3 = p_1 + (p_2 + p_3)$

$\Rightarrow \ m(m \times 1) = m(1 \times m)\alpha$.

Sea $s \in hom_{\mathcal{C}}(A, A) \ni 1_A + s = s + 1_A = 0 \ \therefore$
$m(1, s) = m(s, 1) = 0$

Sean p_1, p_2 las proyecciones $A \times A \xrightarrow{p_i} A$ $i=1,2$.
Como $\tau = (p_2, p_1)$ y $p_2 + p_1 = p_1 + p_2$ se tiene que $m = m\tau$

De aquí que (A, m) es un objeto con estructura de grupo conmutativo •

Corolario 2.1. Sean (A_1, m_1) y (A_2, m_2) objetos multiplicativos de $\mathcal{C}$ y $(A_1 \times A_2, m)$ como en la definición 2.3. Si m_1 y m_2 son estructuras conmutativas de grupo, entonces m es una estructura conmutativa de grupo.

Dem. Se sabe que $\hom_{\mathcal{B}}(X,A_1)\times \hom_{\mathcal{B}}(X,A_2) \cong \hom_{\mathcal{B}}(X,A_1\times A_2)$ (1)

Sean $+_1$, $+_2$ y $+_m$ las estructuras inducidas en $\hom_{\mathcal{B}}(X,A_1)$, $\hom_{\mathcal{B}}(X,A_2)$ y $\hom_{\mathcal{B}}(X,A_1\times A_2)$ por m_1, m_2 y m respectivamente. El isomorfismo (1) hace pensar que la estructura inducida por $+_1$ y $+_2$ en $\hom_{\mathcal{B}}(X,A_1)\times \hom_{\mathcal{B}}(X,A_2)$ es la misma que $+_m$. En efecto, si $f_1, g_1 \in \hom_{\mathcal{B}}(X,A_1)$, $f_2, g_2 \in \hom_{\mathcal{B}}(X,A_2)$, se tiene $(f_1,f_2)+_m(g_1,g_2) =$

$$m(f_1,f_2,g_1,g_2) = (m_1(p_1,p_3), m_2(p_2,p_4))(f_1,f_2,g_1,g_2) =$$
$$= (m_1(p_1,p_3)(f_1,f_2,g_1,g_2), m_2(p_2,p_4)(f_1,f_2,g_1,g_2)) =$$
$$= (m_1(f_1,g_1), m_2(f_2,g_2)) = (f_1 +_1 g_1, f_2 +_2 g_2).$$

El resultado es obvio por el teorema anterior ∎

Si ahora se toma $\mathcal{B}\xrightarrow{F}\mathcal{D}$ funtor (covariante) que preserva productos y (A,m) objeto multiplicativo en $\mathcal{B}$, es claro que $(F(A), F(m))$ es un objeto multiplicativo en $\mathcal{D}$. Se tiene así el siguiente teorema, cuya demostración es trivial.

<u>Teorema 2.8</u> . $F(m)$ es un estructura conmutativa de grupo si m lo es.

<u>Observación</u> . m es una estructura conmutativa de grupo si y sólo si $m\tau$ también lo es.

En el caso que la categoría $\mathcal{C}$ tenga tanto productos como coproductos se pueden dar los siguientes teoremas.

<u>Teorema 2.9</u> . Sea (A_1, m_1) un objeto comultiplicativo en $\mathcal{C}$ con la propiedad I dual $\left(\text{ie. } \binom{0}{1} m_1 = \binom{1}{0} m_1 = 1\right)$ y (A_2, m_2) objeto multiplicativo en $\mathcal{C}$ con la propiedad I. Si $+_1$ es la estructura inducida por m_1 en $\hom_{\mathcal{C}}(A_1, X)$ y $+_2$ la inducida por m_2 en $\hom_{\mathcal{C}}(Y, A_2)$, $X, Y \in Ob\,\mathcal{C}$; se tiene que para $X = A_2$ y $Y = A_1$, $+_1 = +_2$ en $\hom_{\mathcal{C}}(A_1, A_2)$ y esta estructura $+ = +_1 = +_2$, es conmutativa.

<u>Dem:</u> Sean $f_1, f_2 \in \hom_{\mathcal{C}}(A_1, A_2)$ y considérense los morfismos del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A_2 & A_2 \times A_2 \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & A_2 \\
A_1 \arrow[r, "i_1"] & A_1 \amalg A_1 \arrow[ul, "\binom{f_1}{0}"] \arrow[u, "\left(\binom{f_1}{0}\cdot\binom{0}{f_2}\right)"] \arrow[ur, "\binom{0}{f_2}"'] & A_1 \arrow[l, "i_2"']
\end{tikzcd}$$

Como $\left(\binom{\ell_1}{0},\binom{0}{\ell_2}\right) i_1 = \left(\binom{\ell_1}{0} i_1, \binom{0}{\ell_2} i_1\right) = (\ell_1, 0)$ y $\left(\binom{\ell_1}{0},\binom{0}{\ell_2}\right) i_2 = (0, \ell_2)$, se tiene que $\left(\binom{\ell_1}{0},\binom{0}{\ell_2}\right) = \begin{pmatrix}(\ell_1,0)\\(0,\ell_2)\end{pmatrix}$. De aquí se obtiene $m_2 \begin{pmatrix}(\ell_1,0)\\(0,\ell_2)\end{pmatrix} m_1 =$

$= \begin{pmatrix}\ell_1\\ \ell_2\end{pmatrix} m_1 = \ell_1 +_1 \ell_2$ y $m_2\left(\binom{\ell_1}{0},\binom{0}{\ell_2}\right) m_1 = m_2(\ell_1, \ell_2) =$

$= \ell_1 +_2 \ell_2$ $\therefore$ $+_1 = +_2$ que se denotará por $+$.

$m_2\tau$ es una estructura con la propiedad I y por lo anterior $m_2\tau = m_2$ $\therefore$ la estructura inducida en $\hom_{\mathcal{C}}(A_1, A_2)$ es conmutativa.

<u>Teorema 2.10</u>. Sea $x : A \amalg A \longrightarrow A \times A$ el morfismo canónico con (A, m) objeto multiplicativo en $\mathcal{C}$. m tiene la propiedad I $\Leftrightarrow$ $mx = \binom{1}{1}$

<u>Dem.</u> $\Rightarrow$) $x = \left(\binom{1}{0},\binom{0}{1}\right) = \begin{pmatrix}(1,0)\\(0,1)\end{pmatrix}$ $\therefore$ $mx = m\begin{pmatrix}(1,0)\\(0,1)\end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix}m(1,0)\\m(0,1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\Leftarrow$) $mx = m\begin{pmatrix}(1,0)\\(0,1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\therefore$ $\begin{pmatrix}m(1,0)\\m(0,1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\therefore$

$\begin{pmatrix}m(1,0)\\m(0,1)\end{pmatrix} i_j = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} i_j$ $j = 1,2$, $i_j : A \longrightarrow A \amalg A$ inyecciones.

De aquí que $m(1,0) = 1$ y $m(0,1) = 1$ $\therefore$ m tiene la propiedad I •

A continuación se enuncia el teorema dual que claramente se cumple.

<u>Teorema 2.11</u>. Sea m una estructura comultiplicativa sobre A. m tiene la propiedad I dual $\Longleftrightarrow$ $\varkappa m = (1,1)$

<u>Corolario 2.2</u>. Si el morfismo canónico $\varkappa : A \amalg A \longrightarrow A \times A$ es un epimorfismo y (A, m) es un objeto multiplicativo de $\mathcal{C}$ que cumple con la propiedad I, entonces la estructura m es única y conmutativa.

<u>Dem:</u> Por el teorema 2.10 si $m' : A \times A \longrightarrow A$ cumple con la propiedad I se tiene que $m\varkappa = m'\varkappa$ $\therefore$ $m = m'$ dado que $\varkappa$ es epimorfismo. Si $m' = m\tau$ se tiene $m = m\tau$ $\therefore$ m es única y conmutativa •

III - Funtores Adjuntos

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías con $G: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ y $F: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ funtores.

<u>Definición 3.1</u>. Se dice que F es adjunto izquierdo de G (G adjunto derecho de F), si existe un isomorfismo natural η entre los bifuntores

$\hom_{\mathcal{A}}(F\_\_,\_\_): \mathcal{B}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{S}et$ y

$\hom_{\mathcal{B}}(\_\_, G\_\_): \mathcal{B}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{S}et$.

Es decir si $A \xrightarrow{f} A' \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}$, $B' \xrightarrow{g} B \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}$ entonces $\forall\, \alpha \in \hom_{\mathcal{A}}(F(B), A)$ se tiene que $\eta_{A'B'}(f \cdot \alpha \cdot F(g)) = G(f) \cdot \eta_{AB}(\alpha) \cdot g$. Abusando de la notación se escribirá η por η_{AB}, η se llama la adjunción.

<u>Teorema 3.1</u>. Si $G: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ tiene adjunto izquierdo, entonces G preserva límites inversos.

<u>Dem.</u> Sea $\mathbb{X}$ un conjunto dirigido hacia abajo y $\{M_\alpha, p_\alpha^\beta : M_\beta \longrightarrow M_\alpha \mid \alpha \leq \beta\}_{\mathbb{X}}$ un sistema inverso de objetos y morfismos de $\mathcal{A}$ tales que

$$p_\alpha^\alpha = 1_{M_\alpha} \quad \text{y} \quad p_\alpha^\beta\, p_\beta^\gamma = p_\alpha^\gamma \quad \text{si} \quad \alpha \leq \beta \leq \gamma .$$

Sea $F: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ el adjunto izquierdo de G

y η la adjunción. Hay que probar el siguiente isomorfismo: $G \varprojlim_{\Sigma} M_\alpha \cong \varprojlim_{\Sigma} G(M_\alpha)$.

Dado

$$\begin{tikzcd} \varprojlim_{\Sigma} M_\alpha \arrow[r, "p_\alpha"] \arrow[dr, "p_\beta"'] & M_\alpha \\ & M_\beta \arrow[u, "p_\alpha^\beta"'] \end{tikzcd}$$

conmutativo, $(\alpha \leq \beta)$ se tiene que

$$\begin{tikzcd} G \varprojlim_{\Sigma} M_\alpha \arrow[r, "G(p_\alpha)"] \arrow[dr, "G(p_\beta)"'] & G(M_\alpha) \\ & G(M_\beta) \arrow[u, "G(p_\alpha^\beta)"'] \end{tikzcd}$$

también conmuta. $(\alpha \leq \beta)$

Si $Y \in Ob\, \mathcal{B}$ y se tienen $\mathcal{B}$-morfismos $Y \xrightarrow{f_\alpha} G(M_\alpha)$ $\forall\, \alpha \in \Sigma$ tales que $G(p_\alpha^\beta) f_\beta = f_\alpha$, considérense los $g_\alpha = \eta^{-1}(f_\alpha)$ $\alpha \in \Sigma$. Por la naturalidad de η se tiene que $p_\alpha^\beta g_\beta = g_\alpha$ ∴ por la propiedad universal de $(\varprojlim_{\Sigma} M_\alpha, p_\alpha)$ se tiene que $\exists !\, \varphi : F(Y) \longrightarrow \varprojlim_{\Sigma} M_\alpha$ $\ni$ $p_\alpha \varphi = g_\alpha$ $\forall\, \alpha \in \Sigma$. Sea $\psi = \eta(\varphi) : Y \longrightarrow G \varprojlim_{\Sigma} M_\alpha$, por la naturalidad de η se cumple $G(p_\alpha)\psi = f_\alpha$ $\forall\, \alpha \in \Sigma$ y claramente ψ es única con esta propiedad ∴ $G \varprojlim_{\Sigma} M_\alpha \cong \varprojlim_{\Sigma} G(M_\alpha)$ y ∴ G preserva límites inversos.

De manera dual se tiene:

Teorema 3.2. Si $F: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ tiene adjunto derecho entonces F preserva límites directos.

Se obtiene así el siguiente corolario:

Corolario 3.1. Si F es adjunto izquierdo de G entonces G preserva productos y F preserva coproductos.

Para poder relacionar los funtores adjuntos con las estructuras multiplicativas es necesaria la siguiente definición.

Definición 3.2. Sea $G: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un funtor y $\mathcal{B}$ una categoría con productos. Una familia $m_G = \{m_{G(A)}\}_{A \in \mathcal{A}}$ de estructuras multiplicativas $m_{G(A)}: G(A) \times G(A) \longrightarrow G(A)$, se llama familia natural si $\forall f \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{A}$, $G(f)$ es homomorfismo respecto a estas estructuras. Se dice que m_G satisface alguna de las propiedades de la definición 2.4 si $m_G(A)$ la satisface para toda $A \in \mathcal{A}$

Dado un funtor $F: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ una categoría con coproductos, se tiene el concepto dual para $m_F = \{m_{F(B)}\}_{B\in\mathcal{B}}$ familia de estructuras comultiplicativas.

Supóngase ahora que F es adjunto izquierdo de G y η la adjunción, $\mathcal{A}$ una categoría con coproductos y $\mathcal{B}$ con productos. Sea m_G una familia natural de estructuras multiplicativas en $\mathcal{B}$; dada $B \in \mathcal{B}$ se puede definir $n_{F(B)}: F(B) \longrightarrow F(B) \amalg F(B)$ como sigue:

$n_{F(B)}$ es tal que $B \xrightarrow{\eta(n_{F(B)})} G(F(B) \amalg F(B)) =$

$$= B \xrightarrow{(\eta(i_1),\,\eta(i_2))} G(F(B) \amalg F(B)) \times G(F(B) \amalg F(B)) \xrightarrow{m_{G(F(B)\amalg F(B))}} G(F(B) \amalg F(B))$$

donde $F(B) \xrightarrow{i_1} F(B) \amalg F(B) \xleftarrow{i_2} F(B)$ son las inyecciones canónicas.

La importancia de la familia $n_F = \{n_{F(B)}\}_{B\in\mathcal{B}}$ definida como arriba se hace evidente con el.

siguiente teorema.

<u>Teorema 3.3</u>. Sean $\mathcal{A} \underset{F}{\overset{G}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$ funtores adjuntos con adjunción η, $\mathcal{A}$ con coproductos y $\mathcal{B}$ con productos. Sea m_G una familia natural de estructuras multiplicativas en $\mathcal{B}$, entonces se cumplen:

i) $hom_{\mathcal{A}}(F(B), A) \xrightarrow{\eta} hom_{\mathcal{B}}(B, G(A))$ es un isomorfismo de conjuntos multiplicativos.

ii) La familia n_F definida anteriormente es natural.

iii) Si m_G satisface alguna de las propiedades de la definición 2.4 entonces n_F satisface la propiedad dual.

<u>Dem.</u> Sea $B \in Ob\,\mathcal{B}$ fijo, $\forall\, A \in Ob\,\mathcal{A}$. $m_{G(A)}$ induce una estructura multiplicativa en $hom_{\mathcal{B}}(B, G(A))$ que se denotará por $+_A$. Dados $f_1, f_2 \in hom_{\mathcal{A}}(F(B), A)$ se define una estructura multiplicativa como sigue: $f_1 + f_2$ es tal que $\eta(f_1 + f_2) = \eta(f_1) +_A \eta(f_2)$.

Con esta estructura η es un isomorfismo de conjuntos multiplicativos (ie. homomorfismo biyectivo).

m_G es natural $\therefore\ \forall\ g : A \longrightarrow A'$, $G(g)$

es homomorfismo $\therefore$ por el teorema 2.3

$G(g)_* : \hom_{\mathcal{B}}(B, G(A)) \longrightarrow \hom_{\mathcal{B}}(B, G(A'))$ es un

homomorfismo. η es natural $\therefore$ $(G(g))_* \eta = \eta g_*$

$\therefore$ g_* es homomorfismo. Se tiene así que

$\forall A \in Ob\, \mathcal{A}$ existe una estructura multiplicativa $+$

en $\hom_{\mathcal{A}}(F(B), A)$ tal que $\forall g : A \longrightarrow A' \in Mor\, \mathcal{A}$,

$g_* : \hom_{\mathcal{A}}(F(B), A) \longrightarrow \hom_{\mathcal{A}}(F(B), A')$ es homomorfismo;

por el dual del teorema 2.2 $F(B)$ admite una

única estructura comultiplicativa $n'_{F(B)}$ $\ni$

$\forall g_1, g_2 \in \hom_{\mathcal{A}}(F(B), A)$ se tiene $g_1 + g_2 = \binom{g_1}{g_2} n'_{F(B)}$

y $n'_{F(B)} = i_1 + i_2$ con $F(B) \xrightarrow{i_1} F(B) \amalg F(B) \xleftarrow{i_2} F(B)$

inyecciones. De aquí $\eta(n'_{F(B)}) = \eta(i_1 + i_2) =$

$= \eta(i_1) +_{F(B) \amalg F(B)} \eta(i_2) = m_{G(F(B) \amalg F(B))}(\eta(i_1), \eta(i_2)) =$

$= \eta(n_{F(B)})$ $\therefore$ $n'_{F(B)} = n_{F(B)}$ $\forall B \in Ob\, \mathcal{B}$. Falta

ver que $\{n'_{F(B)}\}_{B \in \mathcal{B}}$ es natural.

Sea $h : B' \longrightarrow B \in Mor\, \mathcal{B}$ por el teorema 2.1

$h^* : \hom_{\mathcal{B}}(B, G(A)) \longrightarrow \hom_{\mathcal{B}}(B', G(A))$ es homomorfismo

con respecto a $+_A$. η es natural $\therefore$ $\eta(F(h)^*) =$

$= h^* \eta$ $\therefore$ $F(h)^*$ es homomorfismo. Por el dual del teorema 2.4 se tiene que $F(h)$ es homomorfismo con respecto a las estructuras $n'_{F(B)}$ y $n'_{F(B')}$ $\therefore$ $\{n'_{F(B)}\}_{B\in\mathcal{B}} = \{n_{F(B)}\}_{B\in\mathcal{B}}$ es una familia natural.

El inciso iii) del teorema es inmediato a partir del teorema 2.7 y su dual $\bullet$

Supóngase ahora que $\mathcal{A}$ también tiene productos y sea (A, M) un objeto multiplicativo en $\mathcal{A}$, entonces $(G(A), G(M))$ es un objeto multiplicativo en $\mathcal{B}$; además por el teorema 2.8 si (A, M) cumple con la propiedad I de la definición 2.4 entonces $(G(A), G(M))$ también la cumple.

<u>Lema 3.1</u>. Sean $A \in Ob\,\mathcal{A}$, $B \in Ob\,\mathcal{B}$, $f_1, f_2 : F(B) \longrightarrow A$ y $(f_1, f_2) : F(B) \longrightarrow A\times A$ $\in Mor\,\mathcal{A}$; entonces se tiene $\eta((f_1,f_2)) = (\eta(f_1), \eta(f_2))$ donde $(\eta(f_1),\eta(f_2)) : B \longrightarrow G(A)\times G(A)$ es $\mathcal{B}$-morfismo.

<u>Dem.</u> Sean $p_j : A\times A \longrightarrow A$ $j = 1,2$ las proyecciones. η es natural $\therefore$

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{A}}(F(B), A\times A) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "p_{j*}"] & \hom_{\mathcal{B}}(B, G(A)\times G(A)) \arrow[d, "G(p_j)_*"] \\
\hom_{\mathcal{A}}(F(B), A) \arrow[r, "\eta"] & \hom_{\mathcal{B}}(B, G(A))
\end{tikzcd}$$

conmuta para $j=1,2$ $\therefore$ $G(p_j)\,\eta((f_1,f_2)) = \eta(p_j(f_1,f_2)) =$

$= \eta(f_j)$ $\quad j=1,2$. De aquí que $\eta((f_1,f_2)) = (\eta(f_1),\eta(f_2))$ •

<u>Lema 3.2</u>. Si $\hom_{\mathcal{A}}(F(B),A)$ tiene la estructura multiplicativa inducida por (A,M) y $\hom_{\mathcal{B}}(B,G(A))$ tiene la inducida por $(G(A),G(M))$ entonces,

$$\eta : \hom_{\mathcal{A}}(F(B),A) \longrightarrow \hom_{\mathcal{B}}(B,G(A))$$ es un homomorfismo biyectivo de conjuntos multiplicativos.

<u>Dem.</u> Puesto que η es biyección solo falta ver que es homomorfismo. η es natural $\therefore$

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{A}}(F(B),A\times A) \arrow[r] \arrow[d, "M_*"] & \hom_{\mathcal{B}}(B,G(A)\times G(A)) \arrow[d, "G(M)_*"] \\
\hom_{\mathcal{A}}(F(B),A) \arrow[r] & \hom_{\mathcal{B}}(B,G(A))
\end{tikzcd}$$ conmuta

$\therefore$ $\eta(f_1+f_2) = \eta(M(f_1,f_2)) = \overbrace{G(M)\cdot\eta(f_1,f_2)}^{\text{lema 3.1}} = G(M)(\eta(f_1),\eta(f_2))$

$= \eta(f_1)+\eta(f_2)$ •

<u>Teorema 3.4</u>. Sea m_G una familia natural de estructuras multiplicativas con la propiedad I (def. 2.4) en $\mathcal{B}$ y (A,M) un objeto multiplicativo con la propiedad I en $\mathcal{A}$; entonces $m_{G(A)} = G(M)$ y esta estructura es conmutativa.

Notación. De aquí en adelante a las estructuras con la propiedad I se les denominará $\underline{H}$ - estructuras y a las que tienen la propiedad I dual $\overline{H}$ - estructuras.

Dem (teor. 3.4). $\forall\ B \in Ob\,\mathcal{B}$, $\hom_{\mathcal{A}}(F(B), A)$ tiene una $\underline{H}$-estructura ya sea inducida por la $\overline{H}$-estructura $n_{F(B)}$ o por $\mathcal{M}$. Por el teorema 2.9 $n_{F(B)}$ y $\mathcal{M}$ inducen la misma estructura en $\hom_{\mathcal{A}}(F(B), A)$ y ésta es conmutativa. η es un isomorfismo de conjuntos multiplicativos ya sea con respecto a $n_{F(B)}$ y $m_{G(A)}$ (teor. 3.3) o con $\mathcal{M}$ y $G(\mathcal{M})$ (lema 3.2)

$\therefore$ $m_{G(A)}$ y $G(\mathcal{M})$ inducen la misma estructura conmutativa en $\hom_{\mathcal{B}}(B, G(A))$ $\forall\ B \in Ob\,\mathcal{B}$ $\therefore$

$m_{G(A)} = G(\mathcal{M})$ •

IV El caso Ω, Σ.

Sea $\mathcal{T}op^*$ la categoría de espacios topológicos punteados y funciones continuas que preservan el punto base. El producto y el coproducto se definen de la manera usual en $\mathcal{T}op^*$; el morfismo canónico $x : X \amalg X \longrightarrow X \times X$, $X \in Ob\,\mathcal{T}op^*$ esta dado por:

$$x(x) = \begin{cases} (x,0) & \text{si } x \text{ está en la } 1^a \text{ componente de } X \amalg X. \\ (0,x) & \text{si } x \text{ está en la } 2^a \text{ componente de } X \amalg X. \end{cases}$$

donde 0 es el punto base de X, claramente x es un monomorfismo.

Si $m : X \longrightarrow X \amalg X$ es una $\overline{H}$-estructura, por el teorema 2.11 se debe tener $x\,m = (1_x, 1_x)$ $\therefore$ $x\,m(x) = (1,1)(x) = (x,x)$ $\forall\, x \in X$ $\therefore$ dada la forma de x, $x = 0$. De aquí que en $\mathcal{T}op^*$ los únicos objetos que poseen $\overline{H}$-estructuras son los espacios que constan de un solo punto, con lo cual carece de interés estudiar $\overline{H}$-estructuras en $\mathcal{T}op^*$.

Sea ahora $\mathcal{T}op^*_h$ la categoría de espacios topológicos punteados donde los morfismos son las clases de homotopía de funciones continuas que preservan el punto base. Los productos y coproductos se definen de la manera usual y el morfismo canónico $n : X \amalg X \longrightarrow X \times X$, $X \in Top_n^*$, es simplemente la clase de homotopía del mismo morfismo en Top^*. Este morfismo no necesariamente es inyectivo en Top_n^*.

Si $X \in Ob\, Top_n^*$ con x_0 su punto base, ΩX denotará al espacio de lazos basados en x_0 y ΣX a la suspensión reducida de X. Esta última es simplemente el espacio cociente de $X \times I$ $(I = [0,1])$, donde $(X \times 0) \cup (x_0 \times I) \cup (X \times 1)$ se identifican en un solo punto.

Tanto Ω como Σ se pueden ver como funtores de Top_n^* en Top_n^* pues dado $X_1 \xrightarrow{f} X_2 \in Mor\, Top_n^*$ se pueden definir $\Omega f : \Omega X_1 \longrightarrow \Omega X_2$ y $\Sigma f : \Sigma X_1 \longrightarrow \Sigma X_2$ de la siguiente manera:
$(\Omega f)(g)(t) = f(g(t))$ y $(\Sigma f)(x,t) = (f(x),t)$, donde $t \in I$, $g \in \Omega X$ y $x \in X$.

<u>Proposición 4.1</u>. Σ es adjunto izquierdo de Ω.

<u>Dem.</u> Se define $\eta : hom_{Top_n^*}(\Sigma A, B) \longrightarrow hom_{Top_n^*}(A, \Omega B)$ como sigue. $\eta(f)(a)(t) = f(a,t)$ $\forall f : \Sigma A \longrightarrow B$,

$a \in A$, $t \in I$.

η es biyectiva pues se puede definir el inverso

$\eta^{-1} : \hom_{Top_*^\circ}(A, \Omega B) \longrightarrow \hom_{Top_*^\circ}(\Sigma A, B)$ como

$\eta^{-1}(g)(a,t) = g(a)(t) \quad \forall\ g : A \longrightarrow \Omega(B)$, $a \in A$, $t \in I$.

Dados $B_1 \xrightarrow{f} B_2$ y $A_2 \xrightarrow{g} A_1 \in Mor\, Top_*^\circ$ se tiene

que

$$\begin{array}{ccc} \hom_{Top_*^\circ}(\Sigma A_1, B_1) & \xrightarrow{\eta} & \hom_{Top_*^\circ}(A_1, \Omega B_1) \\ \downarrow{\scriptstyle f\cdot\_\cdot\Sigma g} & & \downarrow{\scriptstyle \Omega f\cdot\_\cdot g} \\ \hom_{Top_*^\circ}(\Sigma A_2, B_2) & \xrightarrow{\eta} & \hom_{Top_*^\circ}(A_2, \Omega B_2) \end{array}$$

conmuta ya que $(\Omega f \cdot \eta(\alpha) \cdot g)(a)(t) = \Omega f(\eta(\alpha)(g(a)))(t) =$
$= f(\eta(\alpha)(g(a))(t)) = f(\alpha(g(a),t)) = f(\alpha(\Sigma g(a,t))) =$
$= (\eta \cdot f \cdot \alpha \cdot \Sigma g)(a)(t)$ donde $\alpha \in \hom_{Top_*^\circ}(\Sigma A_1, B_1)$, $a \in A_2$
y $t \in I$ $\therefore$ η es natural , $\therefore$ Σ es adjunto
izquierdo de Ω $\bullet$

Dado $X \in Ob\, Top_*^\circ$, ΩX posee la $\underline{H}$-estructura usual $m_{\Omega X}$ dada de la siguiente manera :

$m_{\Omega X} : \Omega X \times \Omega X \longrightarrow \Omega X$ es tal que $\forall (f_1, f_2) \in \Omega X \times \Omega X$

$$m_{\Omega X}(f_1, f_2)(t) = \begin{cases} f_1(2t) & \text{si } 0 \le t \le 1/2 \\ f_2(2t-1) & \text{si } 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Proposición 4.2. La familia $m_\Omega = \{m_{\Omega X}\}_{X \in Top_*^\circ}$ es natural.

Dem. Dado $X \xrightarrow{f} Y \in Mor\, Top_*^\circ$

$$\begin{array}{ccc} \Omega X \times \Omega X & \xrightarrow{m_{\Omega X}} & \Omega X \\ \downarrow{\scriptstyle \Omega f \times \Omega f} & & \downarrow{\scriptstyle \Omega f} \\ \Omega Y \times \Omega Y & \xrightarrow{m_{\Omega Y}} & \Omega Y \end{array}$$

conmuta ya que si abusando de la notación $m_{\Omega X} = m_{\Omega Y} = m$ se tiene

$$\Omega f \cdot m(\ell_1, \ell_2)(t) = f(m(\ell_1, \ell_2)(t)) = \begin{cases} f \cdot \ell_1(2t) & \text{si } 0 \le t \le 1/2 \\ f \cdot \ell_2(2t-1) & \text{si } 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

$$= m(\Omega f \cdot \ell_1, \Omega f \cdot \ell_2)(t) = m(\Omega f \times \Omega f)(\ell_1, \ell_2)(t)$$

$\forall (\ell_1, \ell_2) \in \Omega X \times \Omega X \quad \therefore \quad \forall\, X \xrightarrow{f} Y \in Mor\, Top_*^\circ$, Ωf es homomorfismo $\therefore$ m_Ω es natural $\bullet$

Dado $Y \in Ob\, Top_*^\circ$ se puede definir una estructura comultiplicativa en ΣY de la siguiente manera: $n_{\Sigma Y} : \Sigma Y \longrightarrow \Sigma Y \amalg \Sigma Y$ es tal que

$$n_{\Sigma Y}(y, t) = \begin{cases} ((y, 2t), y_0) & \text{si } 0 \le t \le 1/2 \\ (y_0, (y, 2t-1)) & \text{si } 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

donde y_0 es el punto base de ΣY.

Se dará ahora una relación entre $\{m_{\Omega X}\}_{X \in Top_*^\circ}$ y $\{n_{\Sigma Y}\}_{Y \in Top_*^\circ} = n_\Sigma$.

<u>Teorema 4.1</u>. Si η es la adjunción entre Ω y Σ entonces $\eta(n_{\Sigma Y}) = m_{\Omega(\Sigma Y \amalg \Sigma Y)} \cdot (\eta(i_1), \eta(i_2))$, donde $i_1, i_2 : \Sigma Y \longrightarrow \Sigma Y \amalg \Sigma Y$ son las inyecciones y $(\eta(i_1), \eta(i_2)) : Y \longrightarrow \Omega(\Sigma Y \amalg \Sigma Y) \times \Omega(\Sigma Y \amalg \Sigma Y)$.

<u>Dem.</u> Si $y \in Y$, $t \in I$ se tiene que

$$m_{\Omega(\Sigma Y \amalg \Sigma Y)} \cdot (\eta(i_1), \eta(i_2))(y)(t) = m(\eta(i_1)(y), \eta(i_2)(y))(t) =$$

$$= \begin{cases} \eta(i_1)(y)(2t) & \text{si } 0 \le t \le 1/2 \\ \eta(i_2)(y)(2t-1) & \text{si } 1/2 \le t \le 1 \end{cases} = \begin{cases} i_1(y, 2t) & \text{si } 0 \le t \le 1/2 \\ i_2(y, 2t-1) & \text{si } 1/2 \le t \le 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} ((y, 2t), y_0) & \text{si } 0 \le t \le 1/2 \\ (y_0, (y, 2t-1)) & \text{si } 1/2 \le t \le 1 \end{cases} = n_{\Sigma Y}(y,t) = \eta(n_{\Sigma Y})(y)(t)$$

Con lo cual queda demostrado el teorema ●

Dada esta relación entre las familias m_Ω y n_Σ, por el teorema 3.3 y la proposición 4.2 se concluye que la familia n_Σ es natural, además como es conocido que m_Ω satisface los axiomas de grupo, entonces n_Σ los debe satisfacer en su forma dual es decir, n_Σ es una familia de estructuras de cogrupo.

Sean $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ con punto base igual a $(1,0,0\ldots)$ y $n \geq 0$. Sean (Y, y_0) y (X, x_0) espacios topológicos punteados. Se sabe que para $n \geq 0$ $\Sigma S^n = S^{n+1}$ (*). Se tienen así los siguientes isomorfismos naturales para $n \geq 1$:

$$hom_{Top_*^\circ}(S^n, Y) \cong hom_{Top_*^\circ}(\Sigma S^{n-1}, Y) \cong hom_{Top_*^\circ}(S^{n-1}, \Omega Y)$$

$\therefore$ $n_{\Sigma S^{n-1}}$ induce una estructura de grupo en $hom_{Top_*^\circ}(S^n, Y)$ que es el llamado n-ésimo grupo de homotopía de Y con base en y_0

$m_{\Omega Y}$ es una estructura de grupo en ΩY que en particular es una H-estructura. Es claro que para $n \geq 1$, $\Omega^n Y$ posee también una estructura de grupo. Dados los isomorfismos naturales

$$hom_{Top_*^\circ}(\Sigma X, \Omega^n Y) \cong hom_{Top_*^\circ}(X, \Omega^{n+1} Y) \cong hom_{Top_*^\circ}(\Sigma^{n+1} X, Y)$$

con $n \geq 1$ se tiene por el teorema 3.4 que la estructura de grupo en $hom_{Top_*^\circ}(\Sigma^{n+1} X, Y)$ debe ser conmutativa. Se obtiene entonces de manera trivial el siguiente teorema acerca de grupos de

(*) Ver por ejemplo Spanier Edwin H., Algebraic Topology, Mc. Graw Hill, 1966.

homotopía.

<u>Teorema 4.2</u>. Sea $(Y, y_0) \in \mathbf{Ob}\,\mathcal{T}op_h^*$, si $n \geq 2$ el n-ésimo grupo de homotopía de Y con base en y_0 es abeliano.

VI- $\underline{H}$ y $\overline{H}$-estructuras sobre grupos.

Sea $\mathcal{G} = \mathcal{G}rp.$ la categoría de los grupos con el producto y coproducto usuales.

<u>Lema 6.1</u>. Si $A, B \in \mathcal{O}b\,\mathcal{G}$ entonces el morfismo canónico $\varkappa : A \amalg B \longrightarrow A \times B$ es un epimorfismo.

<u>Dem.</u> $\varkappa$ está definido como $\varkappa(a) = (a, e)$ y $\varkappa(b) = (e, b)$ $\forall\, a \in A,\ b \in B$, donde e es el elemento idéntico correspondiente. De aquí es claro que $\varkappa$ es epimorfismo •

Se obtiene así por el corolario 2.2 que si (A, m) es un $\underline{H}$-objeto de $\mathcal{G}$, entonces m es única y conmutativa. Esto da lugar al siguiente teorema.

<u>Teorema 6.1</u>. (A, m) es un $\underline{H}$-objeto en $\mathcal{G}$ si y sólo si A es un grupo abeliano.

<u>Dem.</u> $\Rightarrow$) Sea $\circ : A \times A \longrightarrow A$ la estructura multiplicativa que tiene A como grupo. m es una $\underline{H}$-estructura $\therefore$ $m\varkappa = (\,{}^{1}_{1})$; $(\,{}^{1}_{1})$ es un homomorfismo

$\therefore$ $m\varkappa(a_1, a_2) = m(a_1, a_2) = (\,{}^{1}_{1})(a_1, a_2) = a_1 \circ a_2$

$\forall\ a_1, a_2 \in A \amalg A$ $\therefore$ m conmutativa $\Longrightarrow$ A es abeliano.

$\Leftarrow$) Si A es abeliano, claramente se induce una $\underline{H}$ - estructura en A.

Sea $U : \mathcal{Ab} \longrightarrow \mathcal{Grp}$ el funtor que olvida. Se tiene entonces el siguiente resultado.

<u>Teorema 6.2</u>. Si $A, B \in Ob\, \mathcal{Ab}$ se cumple
$\hom_{\mathcal{Grp}}(UA, UB) = \hom_{\mathcal{Ab}}(A, B)$.

<u>Dem.</u> La contención $\hom_{\mathcal{Ab}}(A, B) \subset \hom_{\mathcal{Grp}}(UA, UB)$ es obvia; ahora sea $f \in \hom_{\mathcal{Grp}}(UA, UB)$, A y B son abelianos $\therefore$ sean $m_A : A \times A \longrightarrow A$ y $m_B : B \times B \longrightarrow B$ las $\underline{H}$ - estructuras correspondientes. Como $x : - \amalg - \longrightarrow - \times -$ es natural se tiene que $(f \times f)\, x_A = x_B\, (f * f)$

$\therefore \quad f m_A x_A = f \binom{1_A}{1_A} = \binom{f}{f} = \binom{1_B}{1_B}(f * f) =$

$= m_B x_B\, (f * f) = m_B\, (f \times f)\, x_A$ y como x_A es epimorfismo se tiene $f m_A = m_B (f \times f)$

$\therefore \quad f \in \hom_{\mathcal{Ab}}(A, B)$, probando así el teorema •

Con lo anterior quedan descritas las $\underline{H}$ - estructuras en $\mathcal{G}$.

En el caso de $\overline{H}$-estructuras se tiene el análogo al teorema 6.1.

<u>Teorema 6.3</u>. $A \in Ob\,\mathcal{G}$ posee una $\overline{H}$-estructura si y solo si A es libre.

<u>Dem.</u> $\Leftarrow$) Sup. A libre, sea $\{a_i\}_I$ un conjunto libre de generadores de A. Si $A \xrightarrow{i_1} A \amalg A \xleftarrow{i_2} A$ son las inyecciones se usará la siguiente notación:

$$a_i' = i_1(a_i) \quad y \quad a_i'' = i_2(a_i) \quad \forall\, i \in I .$$

Se define $\mu : A \longrightarrow A \amalg A$ como sigue, $\mu(a_i) = a_i' a_i''$. Para ver que μ es $\overline{H}$-estructura es suficiente probar que $\pi\mu = (1,1)$. Ahora bien, $p_j \pi \mu(a_i) =$ $= p_j \pi(a_i' a_i'') = p_j(a_i, a_i) = a_i$, donde $p_j : A \times A \longrightarrow A$ $j = 1,2$ son las proyecciones. $\therefore$ $\pi\mu = (1,1)$ $\therefore$ μ es una $\overline{H}$-estructura

$\Rightarrow$) Sea $\Delta A = \{(a,a) \mid a \in A\} \subset A \times A$, entonces $F = \pi^{-1}(\Delta A)$ es un subgrupo de $A \amalg A$.

Si $\mu : A \longrightarrow A \amalg A$ es una $\overline{H}$-estructura, μ es monomorfismo ya que si $\mu(a_1) = \mu(a_2)$ entonces $\pi\mu(a_1) = \pi\mu(a_2)$ $\therefore$ $(a_1, a_1) = (a_2, a_2)$ $\therefore$

$\therefore$ $a_1 = a_2$; de aquí que $A \cong \mathcal{M}(A) \subset F$. Como un subgrupo de un grupo libre es libre, será suficiente probar que F es libre .

Sea $\{a_i\}_I$ el conjunto de todos los elementos de A distintos de e , entonces $\{a_i' a_i''\}_I \subset F$ es un conjunto libre, falta ver que generan a F . Sea $\alpha = a_1' b_1'' a_2' b_2'' \dots a_n' b_n'' \in F$ donde $a_j, b_j \in A$ $\forall$ $j = 1, \dots, n$. Se procede ahora por inducción sobre la longitud n de la palabra α .

Si $n = 1$, $\pi(\alpha) = (a_1, b_1) \in \Delta A \therefore a_1 = b_1 \therefore$ $\alpha \in \{a_i' a_i''\}_I$ o bien α es la palabra vacía que se puede obtener a partir de este conjunto .

Sea ahora $n > 1$ y $\beta = a_1''^{-1} a_1'^{-1} \alpha\, b_n''^{-1} b_n'^{-1}$ $\therefore$ $\beta = a_1''^{-1} b_1'' \dots a_n' b_n'^{-1}$ $\therefore$ $\beta^{-1} = b_n' a_n'^{-1} \dots b_1''^{-1} a_1''$ $\therefore$ la longitud de β^{-1} y por lo tanto la longitud de β es menor que n $\therefore$ β se puede expresar en términos de los $a_i' a_i''$ y por lo tanto $\alpha = a_1' a_1'' \beta\, b_n' b_n''$ también se puede expresar en términos de los $a_i' a_i''$ $\therefore$ F es libre $\therefore$ A es libre •

En el teorema anterior no se dan explícitamente los generadores de A para probar que A es libre. La demostración de la primera parte del teorema sugiere que si $\mu : A \longrightarrow A \amalg A$ es una $\bar{H}$-estructura entonces $\{a \in A,\ a \neq e \mid \mu(a) = a'a''\}$ va a ser el conjunto libre de generadores de A. Esto implicaría que todas las $\bar{H}$-estructuras quedarían definidas por $\mu(a_i) = a_i' a_i''$ donde $\{a_i\}$ genera libremente a A. De ser esto cierto todas las $\bar{H}$-estructuras serían asociativas ya que para esta definición de μ se tiene $(1 * \mu) \cdot \mu = (\mu * 1)\, \mu$.

Sin embargo sea $A = \langle d \rangle$ cíclico infinito no trivial y sea $c = a'^{-1} b''^{-1} a' b''$ con $a, b \in A$ y c distinto de la palabra vacía, entonces $\mu : A \longrightarrow A \amalg A$ definida como $\mu(d) = d'd''c$ es una $\bar{H}$-estructura ya que se puede checar facilmente que $\pi\mu = (1,1)$ sin embargo μ no es asociativa pues $(1 * \mu)\, \mu(d) \neq (\mu * 1)\, \mu(d)$.

En el caso de estructuras asociativas se puede dar el siguiente teorema:

<u>Teorema 6.4</u>. Sean $A \in Ob\,\mathcal{G}$ y $\mu : A \longrightarrow A \amalg A$ una $\bar{H}$-estructura asociativa, entonces A es un grupo libre sobre el conjunto $\{a \in A,\ a \neq e \mid \mu(a) = a'a''\}$.

<u>Dem.</u> $G = \{a \in A, a \neq e \mid \mu(a) = a'a''\}$ es un conjunto libre, solo falta ver que genera a todo A.

Sea $a \in A \therefore \mu(a) = a_1'\, b_1''\, a_2'\, b_2'' \ldots a_n'\, b_n''$ con $a_i, b_i \in A\ \forall\, i = 1, \ldots, n$. Se hará inducción sobre la longitud n de la palabra.

Si $n = 1$, $\mu(a) = a_1'\, b_1'' \therefore \pi\mu(a) = (a, a) = (a_1, b_1) \therefore a_1 = b_1 = a \therefore a = e$ o $a \in G$. Si $n > 1$, sean $\mu(b_1) = \delta_1'\, \delta_1''\, \delta_2'\, \delta_2'' \ldots \delta_m'\, \delta_m''$ y $\mu(a_n) = \varepsilon_1'\, \eta_1''\, \varepsilon_2'\, \eta_2'' \ldots \varepsilon_p'\, \eta_p''$. Como μ es asociativa se tiene que $(1 * \mu)\mu(a) = (\mu * 1)\mu(a) \therefore$

$\mu(a_1)\, b_1'''\, \mu(a_2)\, b_2''' \ldots \mu(a_n)\, b_n''' =$

$= a_1'\, \mu(b_1)\, a_2'\, \mu(b_2) \ldots a_n'\, \mu(b_n)$, sustituyendo los valores para $\mu(b_1)$ y $\mu(a_n)$ se obtiene de esta igualdad que $\mu(a_1) = a_1'\, \delta_1''$ y $\mu(b_n) = \eta_p''\, b_n'''$

$\therefore$ como μ es $\bar{H}$-estructura se tiene lo siguiente: $\mu(a_1) = a_1' a_1''$ y $\mu(b_n) = b_n'\, b_n''$.

Como $a_1 \neq e \neq b_n$ se tiene que $a_1, b_n \in G$. Considérese ahora $\mathcal{M}(a_1^{-1} a b_n^{-1}) = a_1''^{-1} b_1'' \ldots a_n' b_n'^{-1}$ que es una palabra de longitud menor que n $\therefore$ $a_1^{-1} a b_n^{-1}$ se puede expresar en términos de elementos de G, entonces $a = a_1 (a_1^{-1} a b_n^{-1}) b_n$ es combinación de elementos de G $\therefore$ A es libre sobre el conjunto G •

<u>Definición 6.1</u>. Al conjunto G del teorema anterior se le denomina conjunto de generadores preferentes de A.

<u>Teorema 6.5</u>. Si $(A_1, \mathcal{M}_1)$ y $(A_2, \mathcal{M}_2)$ son dos $\overline{H}$-objetos asociativos de $\mathcal{G}$, entonces el morfismo $f : A_1 \longrightarrow A_2$ es homomorfismo si y solo si f manda a cada generador preferente de G en e ó a un generador preferente de A_2

<u>Dem.</u> $\Rightarrow$) Si f es homomorfismo entonces

$(f * f) \cdot \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 \cdot f$ $\therefore$ si a es un generador preferente de A_1 y $f(a) = \alpha$ se tiene que $(f * f) \cdot \mathcal{M}_1 (a) = \mathcal{M}_2 (\alpha)$ $\therefore$

$f(a)'f(a)'' = \alpha'\alpha''$ $\therefore$ $\alpha = e$ o bien α es uno de los generadores preferentes de A_2.

$\Leftarrow$) Si f manda generadores preferentes en e o en generadores preferentes, claramente es un homomorfismo.

VI- Una generalización al teorema de inmersión plena.

Definición 5.1. Un funtor $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ es pleno si $\forall f \in \hom_{\mathcal{B}}(F(A), F(A'))$ con $A, A' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, $\exists\, g \in \hom_{\mathcal{A}}(A, A')$.Э. $F(g) = f$. El funtor F es una inmersión si las restricciones $F: \mathrm{Mor}\,\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathcal{B}$ y $F: \mathrm{Ob}\,\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$ son inyectivas.

El teorema de inmersión plena dice que existe un funtor $E: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{S}et^{\mathcal{A}^{op}}$ que es inmersión plena. Aquí se probará que se puede dar un funtor análogo $E: \mathrm{Grp}\,\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Grp}\,\mathcal{S}et^{\mathcal{A}^{op}}$, donde $\mathrm{Grp}\,\mathcal{A}$ denota la categoría cuyos objetos son los objetos multiplicativos de $\mathcal{A}$ y los morfismos son los homomorfismos entre estos objetos.

Lema 5.1. (Yoneda) Dado $G: \mathcal{A}^{op} \longrightarrow \mathcal{S}et$ funtor y $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, existe una biyección

$$Y: [\hom_{\mathcal{A}}(-, A), G] \longrightarrow G(A) \quad ,$$

donde $[\hom_{\mathcal{A}}(-, A), G]$ denota a las transformaciones naturales entre $\hom_{\mathcal{A}}(-, A)$ y G.

Dem: $\forall\, \sigma \in [\hom_{\mathcal{A}}(-, A), G]$ se define $Y(\sigma) = \sigma_A(1_A)$. Y definida de esta manera es una biyección puesto que se puede dar la inversa como sigue.

$\Psi^{-1} : G(A) \longrightarrow [\hom_{\mathcal{A}}(-,A), G]$ es tal que si $x \in G(A)$ entonces $\Psi^{-1}(x) = \xi = (\xi_B)_{B \in Ob\,\mathcal{A}}$ $\ni$ $\forall f \in \hom_{\mathcal{A}}(B,A)$, $\xi_B(f) = G(f)(x)$.

Se comprueba facilmente que ξ es natural y que $\Psi^{-1} \cdot \Psi = 1_{[\hom_{\mathcal{A}}(-,A),G]}$, $\Psi \cdot \Psi^{-1} = 1_{G(A)}$

$\therefore$ efectivamente Ψ es una biyección $\bullet$

<u>Corolario 5.1</u>. Si $A, B \in Ob\,\mathcal{A}$ entonces

$$\tilde{\Psi} : \hom_{\mathcal{A}}(A,B) \longrightarrow [\hom_{\mathcal{A}}(-,A), \hom_{\mathcal{A}}(-,B)]$$

tal que $\forall f \in \hom_{\mathcal{A}}(A,B)$, $\tilde{\Psi}(f) = \xi = (\xi_B)_{B \in Ob\,\mathcal{A}}$ donde dada $g : C \longrightarrow A \in Mor\,\mathcal{A}$, $\xi_C(g) = f \cdot g$, es una biyección $\bullet$

<u>Dem.</u> Póngase $G = \hom_{\mathcal{A}}(-,B)$ en el lema anterior

Por definición una estructura multiplicativa sobre un funtor $F : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow \mathcal{S}et$ es una transformación natural $\mu : F \times F \longrightarrow F$. Por ser μ natural $\forall f : B \longrightarrow A \in Mor\,\mathcal{A}$ se tiene que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} F(A)\times F(A) \arrow[r] \arrow[d, "F(f)\times F(f)"] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\ F(B)\times F(B) \arrow[r] & F(B) \end{tikzcd}$$

Esto último se puede expresar como una familia $\{\mu_A\}_{A\in \mathrm{Obj}\,\mathcal{A}}$ de estructuras multiplicativas

$$\mu_A : F(A)\times F(A) \longrightarrow F(A)$$

tales que $F(f)$ es homomorfismo $\forall\, f: B \to A \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{A}$ i.e. La familia es natural en el sentido de la definición 3.2.

Dado $(A,m) \in \mathrm{Grp}\,\mathcal{A}$, $\hom_{\mathcal{A}}(-,A) \in \mathcal{S}et^{\mathcal{A}^{op}}$ tiene una estructura multiplicativa $t_m = \{t_{mB}\}_{B\in \mathrm{Obj}\,\mathcal{A}}$ dada por $t_{mB} : \hom_{\mathcal{A}}(B,A)\times \hom_{\mathcal{A}}(B,A) \longrightarrow \hom_{\mathcal{A}}(B,A)$, que es la estructura natural inducida por m. Como $\forall\, f: C \to B \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{A}$ se tiene que por el teorema 2.1, $f^* : \hom_{\mathcal{A}}(B,A) \longrightarrow \hom_{\mathcal{A}}(C,A)$ es un homomorfismo, efectivamente la familia t_m es natural y por lo tanto es una estructura multiplicativa en $\hom_{\mathcal{A}}(-,A)$.

A continuación se da el teorema de inmersión plena.

Teorema 5.1. El funtor $E : \mathcal{G}rp\,\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{G}rp\,\mathcal{S}et^{\mathcal{A}^{op}}$ dado como sigue: Si $(A, m) \in Ob\,\mathcal{G}rp\,\mathcal{A}$ y $f \in Mor\,\mathcal{G}rp\,\mathcal{A}$ entonces $E(A,m) = (hom_{\mathcal{A}}(-,A), *m)$ y $E(f) = (E(f)_C)_{C \in Ob\,\mathcal{A}}$ donde si $f \in hom_{\mathcal{G}rp\,\mathcal{A}}(A,B)$ $E(f)_C : hom_{\mathcal{A}}(C,A) \longrightarrow hom_{\mathcal{A}}(C,B)$ se calcula como $E(f)_C(g) = f \cdot g \quad \forall\, g \in hom_{\mathcal{A}}(C,A)$, es una inmersión plena.

Dem. Por lo anterior E está bien definido en los objetos y por el teorema 2.3 $E(f)_C$ es un homomorfismo $\forall\, C \in Ob\,A$, con lo cual E está bien definido en los morfismos.

Supóngase $f, g : A \longrightarrow B \in Mor\,\mathcal{G}rp\,\mathcal{A}$ y $E(f)_C = E(g)_C \ \forall\, C$ $\therefore$ si $C = A$ se tiene que $E(f)_C(1_A) = f = E(g)_C(1_A) = g$ $\therefore$ E es inmersión.

Dada $G : hom_{\mathcal{A}}(-,A) \longrightarrow hom_{\mathcal{A}}(-,B)$ natural tal que G_C es homomorfismo $\forall\, C \in Ob\,\mathcal{A}$ por el corolario 5.1 existe $f \in hom_{\mathcal{A}}(A,B)$ t.q. $\forall\, g \in hom_{\mathcal{A}}(C,A)$ se tiene que $G_C(g) = f \cdot g$ y por el teorema 2.4 $f \in hom_{\mathcal{G}rp\,\mathcal{A}}(A,B)$ $\therefore$ E es una inmersión plena •

VII - Bibliografía.

- B. Eckmann y P. J. Hilton,

1: Group-like Structures in General Categories I
Multiplications and Comultiplications.
Math. Annalen 145, pp. 227-255, 1962.

2: Structure Maps in Group Theory.
Fundamenta Mathematicae 50, pp. 207-221, 1961.

- Dugundji James

3: Topology.
Allyn and Bacon, Inc, 1966.

- Herrlich Horst & Strecker George E.

4: Category Theory; An Introduction.

- Mc Lane Saunders

5: Categories for the Working Mathematician
Springer Verlag, 1971.

- Spanier Edwin H.

6: Algebraic Topology.
Mc. Graw Hill, 1966.