Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

MODULOS INESCINDIBLES

(Algunos teoremas de descomposición en categorías de módulos)

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a :

FRANCISCO EMILIO PRADO ARIAS

Becario del Instituto de Matemáticas

México, D. F. 1982

INDICE

INTRODUCCION

Nuestra intención en este trabajo es presentar algunos resultados de la Teoría de descomposición desde el punto de vista histórico, como una motivación al estudio de la Teoría de Representaciones, cuyo desarrollo ocupa en estos momentos la atención de muchos especialistas en Algebra.

Tratamos pues de proporcionar los preámbulos necesarios para aquellas personas que deseen introducirse en el tema, con el objeto de ubicarlos en el contexto de esta rama de las matemáticas, y sobre todo en uno de los problemas centrales: estudiar las álgebras de tipo de representación finito.

Nos hemos esmerado en dar una presentación accesible, clara y versátil, aunque presuponemos cierta familiaridad del lector con las Teorías de Anillos y Módulos que son explicadas en los cursos superiores de Algebra en la Facultad de Ciencias. Hemos procurado mencionar los conceptos y resultados indispensables para poder trabajar. En general no damos un tratamiento categórico, aunque en ocasiones esto nos resultó inevitable.

Hemos dividido el trabajo en dos partes, en la primera, después de dar un somero repaso a la Teoría de general de módulos exhibimos uno de los ejemplos clásicos en Algebra conmutativa: El Teorema Fundamental de Módulos sobre un dip. Quisimos hacerlo así para motivar el desarrollo posterior de la teoría. A continuación, en los capítulos III y IV, damos aplicaciones de este teorema a la teoría de grupos abelianos y al álgebra lineal para poner de manifiesto la importancia de poder obtener resultados de este tipo.

Para la segunda parte (Algebra no conmutativa) elegimos algunos resultados que constituyen, a nuestro juicio, una parte importante de la teoría clásica de descomposición de módulos sobre anillos artinianos. Estos son el Teorema de Wedderburn-Artin para anillos semisimples, el de Krull-Schmidt para anillos con serie de composición, el de Auslander, Ringel-Tachikawa para anillos artinianos de tipo de representación finito, el de Nakayama para anillos de Nakayama y, finalmente, los Teoremas de Maschke y Higman para K-Algebras de grupo.

Para nosotros "anillo" siempre significará "anillo con uno", y tanto los módulos como los ideales serán siempre izquierdos, a menos que se especifique lo contrario.

PARTE I

CASO CONMUTATIVO

CAPITULO I

TEORIA GENERAL DE MODULOS

Este capítulo esta destinado a mencionar algunos resultados básicos, sobre todo para familiarizar al lector con la terminología que usaremos.

Λ representará un anillo. **Mod** Λ denotará la categoría de todos los módulos izquierdos sobre Λ y **mod** Λ la subcategoría plena de **Mod** Λ constituida por los módulos finitamente generados.

Dado un anillo Λ podemos construir a partir de este un nuevo anillo Λ^{op}, el anillo opuesto de Λ, de la siguiente manera: el conjunto y la estructura aditiva es la misma de Λ, pero la multiplicación $\cdot$ en Λ^{op} se define como $a \cdot b = ba$ para a, b en Λ^{op}.

Obsérvese que Λ puede ser considerado como un Λ-módulo, en ese caso escribiremos ${}_\Lambda\Lambda$. Vamos a dar la definición de nuestros elementos Irreducibles.

1.1 DEFINICION

Diremos que un Λ-módulo no nulo es *inescindible* si no tiene sumandos directos no triviales. Es decir que si $M \cong U \oplus V$ entonces $U=0$ $V=0$.

Dada una sucesión exacta

$$s:\ 0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

se dice que se escinde por la izquierda si f tiene inverso izquierdo. Análogamente, decimos que se escinde por la derecha si g tiene inverso derecho, damos la siguiente

1.2 PROPOSICION

Las siguientes afirmaciones acerca de s son equivalentes

a) s se escinde por la derecha
b) s se escinde por la izquierda
c) $\operatorname{Im} f$ es un sumando directo de M

Además, si se satisface alguna de estas condiciones, se tiene que

$$M \cong M' \oplus M'' \qquad //$$

Sistemáticamente, señalamos con el símbolo // el fin de una demostración. En otras ocasiones (como en 1.2) lo hemos colocado a continuación del enunciado omitiendo la prueba. Lo hicimos así por considerar que ésta es demasiado sencilla o podría distraer innecesariamente la atención del lector.

A continuación definimos algunos tipos de módulos sobresalientes. En primer lugar, mencionamos el importante concepto de Λ-módulo libre.

1.3 DEFINICION

Sea S un conjunto. El **Λ-módulo libre sobre el conjunto S** es un par formado por un Λ-módulo L y una función $j : S \longrightarrow L$ que goza de la siguiente propiedad universal: Para todo $M \in \mathrm{Mod}\,\Lambda$ y $f : S \longrightarrow M$ función, existe un único homomorfismo de Λ-módulos

$$\phi : L \longrightarrow M$$

con $\phi j = f$, es decir

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"'] & L \arrow[dl, dashed, "\phi"] \\ M & \end{tikzcd}$$

conmuta.

1.4 PROPOSICION

Todo módulo es imagen homomorfa (cociente) de algún módulo libre. //

1.5 DEFINICION

$P \in \mathrm{Mod}\,\Lambda$ se llama **proyectivo** si dado $f : M \longrightarrow N$ un epimorfismo y cualquier morfismo $\phi : P \longrightarrow N$ con M y N en $\mathrm{Mod}\,\Lambda$, existe $\psi : P \longrightarrow M$ tal que $f\psi = \phi$, es decir

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \arrow[d, "\phi"] & \\ M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

conmuta.

1.6 PROPOSICION

Una suma directa $\bigoplus\limits_{i \in I} R$ es proyectiva si y solamente si cada R es proyectivo. //

1.7 PROPOSICION

Todo módulo libre es proyectivo //

1.8 TEOREMA

Sea $P \in \mathrm{Mod}\,\Lambda$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) P es proyectivo

b) Toda sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

se escinde

c) P es sumando directo de un módulo libre

Demostración:

a)⇒b). Por definición existe ψ tal que

$$\begin{tikzcd} & & & P \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \arrow[d, "1_P"] & \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

conmuta.

b)⇒c). Por 1.4 obtenemos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,f \longrightarrow L \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0$$

con L libre, luego por 1.2 $L \cong \mathrm{Ker}\,f \oplus P$

c)⇒a). Por 1.6 y 1.7 //

Otro tipo importante de módulo esta constituido por el concepto dual de proyectivo, y al que se le suele llamar **módulo inyectivo**. Sin embargo, no haremos uso aquí de las propiedades que éste tiene.

Si M es un Λ-módulo y I un conjunto arbitrario denotamos por $M^{(I)}$ a la suma directa de Λ-módulos M_i, $i \in I$, con $M_i = M$. Si I es finito, $I = \{1, \dots, n\}$, escribiremos M^I o M^n indistintamente. Luego, diremos que $T \in \mathrm{Mod}\,\Lambda$ genera a un Λ-módulo M si existe un epimorfismo $\varphi : T^{(I)} \longrightarrow M$ para algún conjunto I, y T genera a $\mathrm{Mod}\,\Lambda$ si lo hace para cada objeto de ésta.

1.9 PROPOSICION

T genera a $\mathrm{Mod}\,\Lambda$ si y sólo si genera a ${}_\Lambda\Lambda$ //

1.10 COROLARIO

Un módulo M es finitamente generado si y sólo si existe un epimorfismo

$$_{\Lambda}\Lambda^{I} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

para algún conjunto I finito. //

Se puede obtener mucha información de un módulo si conocemos como se comportan y relacionan sus submódulos. Por eso, nos detemos a ver un momento las condiciones de cadena. Introducimos aquí la notación "$N \leq M$" para indicar que N es submódulo de M.

1.11 DEFINICION

Un Λ-módulo M satisface la **condición de cadena ascendente** (CCA) cuando cada cadena ascendente de submódulos

$$N_1 \leq N_2 \leq \cdots N_r \leq N_{r+1} \leq \cdots \leq M$$

es estacionaria, es decir existe un índice m tal que $N_m = N_{m+1} = \cdots$

Analogamente se dice que M satisface **la condición de cadena descendente** (CCD) si toda cadena descendente de submódulos de M es estacionaria.

Un módulo M es **Noetheriano** en caso de que satisfaga la CCA y **Artiniano** si satisface la CCD.

1.12 DEFINICION

Un módulo M es **finitamente cogenerado** en caso de que para todo conjunto $\mathfrak{a}$ de submódulos de M se tenga que

$$\text{si } \cap\mathfrak{a} = 0 \text{ entonces } \cap\mathfrak{F} = 0$$

para algún subconjunto finito $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{a}$

1.13 PROPOSICION

Sea $M \in \operatorname{Mod}\Lambda$. Entonces las siguientes afirmaciones sobre M son equivalentes:

a) M es Noetheriano.

b) Toda colección no vacía de submódulos de M tiene un elemento máximal.

c) Todo submódulo de M es finitamente generado.

Demostración:

a)$\Rightarrow$b). Sea F una colección no vacía de submódulos de M sin elemento maximal. Evidentemente, podemos extraer de F una cadena ascendente no estacionaria de submódulos de M, lo que contradice a).

b)$\Rightarrow$c). Sea $M' \leq M$ y F la colección de submódulos de M' finitamente generados. $0 \in F$, de modo que F no es vacía. Sea $N \in F$ un elemento maximal. Si N estuviera estrictamente contenido en M' podríamos de modo obvio, ampliar N a un submódulo finitamente generado de M' más grande, lo que contradice la maximalidad de N, luego $N = M'$, y consecuentemente M' es finitamente generado.

c) ⇒ a). Sea $\{M_n\}$ una cadena ascendente de submódulos de M, y

$$M' = \bigcup M_n$$

Evidentemente M' es un submódulo de M, por tanto, es finitamente generado. Sea $\{x_1, \dots, x_k\}$ un conjunto de generadores de M'. Entonces $x_i \in M_{m_i}$, para alguna m_i. Sea $m = \max(m_1, \dots, m_k)$. Luego $x_i \in M_m$, $i = 1, \dots, k$, de modo que

$$M' \subseteq M_m$$

por tanto

$$M' = M_m \quad \text{y} \quad M_m = M_{m+1} = \cdots$$

//

Análogamente

1.14 PROPOSICION

Sea $M \in \mathrm{Mod}\,\Lambda$. Entonces las siguientes afirmaciones sobre M son equivalentes:

a) M es Artiniano.

b) Toda colección no vacía de submódulos de M tiene un elemento minimal.

c) Todo cociente de M es finitamente cogenerado //

1.15 PROPOSICION

Sea $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ exacta en $\mathrm{Mod}\,\Lambda$. Entonces M es artiniano (noetheriano) si y sólo si ambos M' y M'' son artinianos (noetherianos) //

1.16 COROLARIO

Sea $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$. Entonces M es artiniano (noetheriano) si y sólo si cada M_i $(i = 1, \dots, n)$ es artiniano (noetheriano). //

1.17 DEFINICION

Λ es artiniano izquierdo (noetheriano izquierdo) si $_\Lambda\Lambda$ es artiniano (noetheriano).

Como estamos interesados solo en el caso izquierdo diremos simplemente que Λ es artiano o noetheriano respectivamente.

1.18 COROLARIO

Si Λ es artiniano (noetheriano) y $M \in \operatorname{mod} \Lambda$. Entonces M es artiniano (noetheriano).

//

CAPITULO II

DOMINIOS DE IDEALES PRINCIPALES

En este capítulo presentaremos uno de los ejemplos tradicionales en la teoría de descomposición, veremos que en la categoría de módulos sobre un dominio de ideales principales **(dip)** existe un teorema análogo al Teorema Fundamental de la Aritmética, mas aún, podremos decir quienes son los elementos "primos".

A lo largo de este capítulo D denotará un **dip**.

2.1 PROPOSICION

Sea $M \in \operatorname{mod} D$ libre, entonces todo submódulo de M es libre.

Demostración:

Usaremos inducción sobre el rango n de M. Supongamos que $n=1$, luego M se identifica con D, y todo submódulo de este no es sino un ideal S, por tanto principal, así que S es de la forma μD para alguna $\mu \in D$, claramente la asignación $d \mapsto \mu d$ es un isomorfismo de D-módulos entre D y μD, luego S es libre.

Ahora bien, supongamos que la afirmación es cierta para $k<n$ y sea $M \cong D^n$. Consideremos $\pi : D^n \longrightarrow D$ la n-ésima proyección, luego el Kernel de π es libre con rango $n-1$. Sea N un submódulo de D^n y π^* la restricción de π a N, entonces $N' = \pi^*(N)$ es libre. Dado que $\operatorname{Ker} \pi^*$ es un submódulo de $\operatorname{Ker} \pi$ es, por hipótesis de inducción, libre.

Tenemos que la siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \pi^* \longrightarrow N \xrightarrow{\pi^*} N' \longrightarrow 0$$

Luego, aplicando sucesivamente 1.7, 1.8 b) y 1.2 obtenemos lo que se quiere. //

2.2 DEFINICION

Sea $M \in \operatorname{mod} D$ y $a \in M$. Denotaremos por $\operatorname{Ann}(M)$ al conjunto de las $\alpha \in D$ tales que $\alpha M = 0$ y $\operatorname{Ann}(a)$ al conjunto de las que anulan a a. Que llamaremos el anulador de M y el anulador de a respectivamente.

Es fácil observar que tanto $\operatorname{Ann}(M)$ como $\operatorname{Ann}(a)$ son ideales de D, consecuentemente principales. A sus generadores los llamaremos **el mínimo anulador de M** y el

orden de a respectivamente (téngase en cuenta, que estos son únicos hasta asociados). Además si **Ann(a)** es no nulo –como ideal– diremos que **a es un elemento de torsión de M.** Y **M** se dirá que es **de torsión** si todos sus elementos lo son. Denotaremos por **T(M)** al conjunto de los elementos de torsión de **M**. Afirmamos que

2.3 PROPOSICION

T(M) **es un submódulo de** M. Si T(M)=0 **entonces diremos que** M **es libre de torsión.** //

2.4 PROPOSICION

M/T(M) es libre de torsión //

2.5 PROPOSICION

Si $M \in \text{mod}\, D$ es libre de torsión, es libre

Demostración:

Puesto que **D** es noetheriano, **M** también (1.18). Luego existe un submódulo libre maximal **M'** de **M** (1.13 b)). Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una base de **M**. Para cada x_i existe $r_i \neq 0 \in$ **D**, tal que $r_i x_i \in$ **M'**. De no ser así, $M' \oplus \langle x_i \rangle$ sería un submódulo libre de **M** que contiene propiamente a **M'**. Ahora bien, sea r el producto de las r_i. Definimos $f: M \to M'$ por $f(x) = rx$, entonces f es inyectiva, porque **M** es libre de torsión. Luego $f(M) \cong M$, pero por 2.1 es libre, luego **M** también. //

2.6 COROLARIO

Sea $M \in \text{mod}\, D$. **Entonces M es suma directa de su submódulo de torsión y de un módulo libre. Además, estos sumandos estan univocamente determinados hasta isomorfismo. (En particular el módulo de torsión de M es único).**

Demostración:

Sabemos que M/T(M) es libre de torsión (2.4). Luego por 2.5 es libre y como consecuencia proyectivo (1.7). Así

$$0 \longrightarrow T(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/T(M) \longrightarrow 0$$

es exacta, por tanto se escinde (1.8 b)). De modo que $M \cong M/T(M) \oplus T(M)$ (1.2).

Ahora bien si $M \cong L' \oplus T'$ donde L' es libre y T' de torsión, tenemos que:

$$T(M) = T(L' \oplus T') = T(L') \oplus T(T') = T(T') = T'$$

y

$$M/T(M) \cong L' \oplus T(M)/T(M) \cong L'$$

//

2.7 DEFINICION

Sea $M \in \operatorname{mod} D$ y $q \in D$. Entonces M es un q-módulo si el anulador de a, para cada $a \in M$, tiene como generador una potencia de q, y M es p-primario si es un p-módulo para algun primo p en D.

Además, denotaremos por $T_p(M)$ al conjunto de elementos de M cuyo anulador tiene como generador una potencia de p. Se tiene la siguiente

2.8 PROPOSICION

$T_p(M)$ es un submódulo de M. Mas aún, es el mayor submódulo p-primario de M.

//

2.9 TEOREMA

Si $M \in \operatorname{mod} D$ es de torsión, entonces M es la suma directa de sus submódulos primarios.

Demostración:

Sea v el generador de $\operatorname{Ann}(M)$. Como D es dip, sabemos que v admite la descomposición $v = \mu p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$ donde μ es una unidad y cada p_i es primo y dos a dos son no asociados.

Procederemos a demostrar que $M = \bigoplus_{i=1}^{k} T_{p_i}(M)$.

Sea $r_i = v/p_i^{m_i}$; luego $(r_1, \ldots, r_k) = 1$, nuevamente como D es dip, existen elementos $s_i \in D$, $i = 1, \ldots, k$, tales que $1 = r_1 s_1 + \cdots + r_k s_k$. Sea $a \in M$, por tanto

$$a = s_1(r_1 a) + s_2(r_2 a) + \cdots + s_k(r_k a)$$

Ahora bien, es evidente que $p_i^{m_i}$ anula a $r_i a$, de modo que $(r_i a)$ está en $T_{p_i}(M)$, y por consiguiente también $s_i r_i a$. Así que

$$M = \sum_{i=1}^{k} T_{p_i}(M)$$

Resta por demostrar que

$$T_{p_i}(M) \cap \Big(\sum_{j \neq i} T_{p_j}(M)\Big) = 0$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que $i=1$. Sea x perteneciente a esa intersección, entonces existe α entero positivo tal que $p_1^{\alpha} x = 0$ por estar $x \in T_{p_1}(M)$. Por otro lado si el orden de x_j es $p_j^{\alpha_j}$ entonces $qx = 0$ donde $q = p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Como $(p^{\alpha}, q) = 1$ existen $r, s \in D$, tales que $1 = rp^{\alpha} + sq$. Por tanto $x = 1x = rp^{\alpha}x + sqx = 0$, y el teorema esta probado.

La unicidad de esta descomposición es inmediata pues por 2.8 cada sumando está caracterizado por algún primo p como el mayor submódulo p-primario de M. //

Recordemos que en general un Λ-módulo C es cíclico si éste es generado por un solo elemento $c_0 \in C$, o visto de otra manera si $\varphi: \Lambda \to C$ tal que $\lambda \mapsto \lambda c_0$ es un epimorfismo, de donde $C \cong \Lambda / \operatorname{Ker}\varphi$. Ahora bien si $\Lambda = D$, entonces $\operatorname{Ker}\varphi$ es justamente $\operatorname{Ann}(c_0)$, luego si α es su generador, $C \cong D/\langle\alpha\rangle$. Sabemos que este es único hasta asociados, por eso diremos que C es un módulo cíclico cuyo generador tiene por orden α.

2.10 TEOREMA

Sea $T \in \operatorname{mod} D$ un módulo p-primario no nulo, entonces

$$T \cong C_{p^{\alpha_1}} \oplus C_{p^{\alpha_2}} \oplus \cdots \oplus C_{p^{\alpha_k}}, \quad \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_k \geq 1$$

donde $C_{p^{\alpha_i}}$ es cíclico cuyo generador tiene por orden p^{α_i}. Además, los enteros positivos $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ están univocamente determinados por T.

Demostración:

Sea $\{a_1, \ldots, a_n\}$ un conjunto mínimo de generadores de T, y α_i el exponente mínimo de p tal que $p^{\alpha_i} a_i = 0$. Además, supongamos que $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n \geq 1$ y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ es mínima (es decir que si $\{b_1, \ldots, b_n\}$ es otro conjunto generador de T y β_i es el mínimo exponente de p tal que $p^{\beta_i} b_i = 0$ entonces $\sum_{i=1}^{n} \beta_i \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$).

Afirmamos que $a_1, \ldots, a_n$ son linealmente independientes. En efecto, de no ser así existiría i, $0 \leq i \leq n-1$, tal que $a_1, \ldots, a_i$ serían linealmente independientes, pero a_{i+1} depende linealmente de ellos. Sea $\langle d \rangle$ el ideal formado por los elementos $r \in D$ tales que $r a_{i+1} \in \langle a_1, \ldots, a_i \rangle$, puesto que $p^{\alpha_{i+1}} a_{i+1} = 0$ tenemos que $d \mid p^{\alpha_{i+1}}$, de modo que, salvo una unidad, $d = p^{\beta}$ y $\beta < \alpha_{i+1}$, ya que por la dependencia lineal $\langle d \rangle$ es no nulo. Ahora bien

$$p^{\beta} a_{i+1} = \sum_{j=1}^{i} \lambda_j p^{\gamma_j} a_j, \quad p \nmid \lambda_j$$

por tanto

$$0 = p^{\alpha_{i+1}} a_{i+1} = \sum_{j=1}^{i} \lambda_j p^{\alpha_{i+1} - \beta + \gamma_j} a_j$$

de donde $\gamma_j \geq \beta$. Definimos

$$a' = a_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} \lambda_j p^{\gamma_j - \beta} a_j$$

entonces obtenemos un nuevo conjunto generador sustituyendo a_{i+1} por a'. Pero $p^{\beta} a' = 0$ y $\beta < \alpha_{i+1}$, lo que contradice la minimalidad de la suma de las α_i.

Probaremos ahora que los elementos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ están univocamente determinados, si $T \cong C_{p^{\alpha_1}} \oplus \cdots \oplus C_{p^{\alpha_n}}$, $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n \geq 1$, es evidente que α_1 está caracterizado como el menor entero k, tal que $p^k T = 0$. Llamaremos a α_1 el p-exponente de

T. Probaremos la afirmación por inducción sobre el p-exponente. Sea $T \cong \bigoplus_{j=1}^{m} C_{p^{\beta_j}}$ otra descomposición de T en cíclicos cuyo generador tiene por orden p^{β_j} y $\beta_1 \geq \cdots \geq \beta_m \geq 1$, donde podemos suponer que $\alpha_1 = \beta_1$. Ahora bien si $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, podemos considerar a T como un $D/\langle p \rangle$-espacio vectorial, de modo que $n = m$.

Supóngase que el teorema es cierto para p-módulos de p-exponente menor que α_1. Por tanto, si $\alpha_1 = \beta_2 \geq 2$

$$pT \cong \bigoplus_{i=1}^{k} C_{p^{\alpha_i - 1}} \cong \bigoplus_{j=1}^{\ell} C_{p^{\beta_j - 1}}$$

para $1 \leq k \leq n$ y $1 \leq \ell \leq m$. Luego, por hipótesis de inducción, $k = \ell$ y $\alpha_i = \beta_i$, si $i \leq k$

Por último,

$$T/pT \cong C_p^n \cong C_p^m$$

pero T/pT es un $D/\langle p \rangle$-espacio vectorial, de modo que $n = m$. //

Por ser D dominio, el cero es un elemento primo (mas aún, esta propiedad caracteriza a los dominios). Así que ${}_D D$ es un módulo 0-primario, además, es claramente inescindible. Tenemos ahora la herramienta suficiente para describir completamente a los inescindibles en **mod** D.

2.11 COROLARIO

$M \in \mathbf{mod}\, D$ es inescindible si y sólo si es cíclico primario. Es decir, existe $p \in D$ un primo tal que $M \cong D/\langle p^n \rangle$ para alguna $n \in \mathbb{N}$

Demostración:

$\Rightarrow$. Por 2.6, $M \cong T(M) \oplus M/T(M)$, luego $T(M) = 0$ o $M/T(M) = 0$. Si $M/T(M) \neq 0$, entonces M es libre (2.4), pero necesariamente su rango debe ser uno, de donde $M \cong D/\langle 0 \rangle$, como se quería. Por otro lado si $T(M)$ es no nulo, entonces M es de torsión, de donde es p-primario (2.9) para algún primo p en D, por 2.10 debe ser cíclico.

$\Leftarrow$. Sin pérdida de generalidad $p \neq 0$, supóngase que $D/\langle p^n \rangle \cong M' \oplus M''$, es claro que M' y M'' son p-primarios, luego por 2.10

$$M' \cong \bigoplus_{i=1}^{k} C_{p^{\alpha_i}} \text{ y } M'' \cong \bigoplus_{j=1}^{\ell} C_{p^{\beta_j}} \text{ con } \alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_k \geq 1 \text{ y } \beta_1 \geq \cdots \geq \beta_\ell \geq 1,$$

donde $C_{p^{\alpha_i}}$, $C_{p^{\beta_j}}$ son cíclicos cuyo generador tiene por orden α_i y β_j respectivamente.

Ahora bien, intercalando adecuadamente las α_i y β_j obtenemos que

$$D/\langle p^n \rangle \cong C_{p^n} \cong C_{p^{\gamma_1}} \oplus \cdots \oplus C_{p^{\gamma_{\ell+k}}} \text{ con } \gamma_1 \geq \cdots \geq \gamma_{\ell+k} \geq 1,$$

pero por la unicidad de los exponentes de p: $\ell = 0$, $k = 1$ y $\alpha_k = n$ o bien $\ell = 1$, $k = 0$ y $\beta_\ell = n$, es decir $M' = 0$ o $M'' = 0$. //

Podemos ahora enunciar

2.12 TEOREMA (Teorema Fundamental de Módulos Finitamente Generados sobre un dip)

Todo $M \in \operatorname{mod} D$ tiene una descomposición $M \cong L \oplus C_1 \oplus \cdots \oplus C_s$, donde L es un módulo libre y $C_1, \ldots, C_s$ son cíclicos primarios. La lista de órdenes de estos últimos sumandos es una lista de potencias de primos. Además, cualquier isomorfismo

$$M \cong L' \oplus C'_1 \oplus \cdots \oplus C'_k$$

donde L' es libre y $C'_1, \ldots, C'_k$ cíclicos primarios, implica que el rango de L es igual al rango de L', $k = s$ y $C'_1, \ldots, C'_k$ deben tener la misma lista de potencias de primos salvo por una permutación o sustituyendo algún primo por un primo asociado.

Demostración:

Aplíquese 2.6, 2.9 y 2.10 (en realidad en este capítulo no hicimos otra cosa sino ir demostrando parcialmente este Teorema). //

Reformularemos este teorema presentándolo en términos de inescindibles, téngase presente lo dicho en 2.11

2.12* TEOREMA

Todo $M \in \operatorname{mod} D$ tiene una única descomposición en suma directa de módulos inescindibles.

Es decir que: $M \cong M_1 \oplus \cdots \oplus M_k$, donde los M_i son inescindibles, y si tenemos otra descomposición $M \cong N_1 \oplus \cdots \oplus N_s$ con N_i inescindibles entonces $k = s$ y existe una permutación de índices σ tal que $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ para cada i.

Además, los inescindibles son de la forma $D/\langle p^n \rangle$ donde p es un primo y n un entero positivo. //

CAPITULO III

GRUPOS ABELIANOS

Como una consecuencia de la teoria expuesta en el capitulo anterior, presentamos éste. Se notará que en general, lo único que estamos haciendo es una mera traducción de lenguaje. Si en ese capitulo hacemos $D = \mathbb{Z}$ (el anillo de los enteros) no obtenemos sino los grupos abelianos.

Nos restringiremos al caso **mod $\mathbb{Z}$**, es decir grupos abelianos finitamente generados (f.g.).

Luego, un grupo abeliano libre f.g. L de rango n es isomorfo a n copias de $\mathbb{Z}$:

$$L \cong \mathbb{Z}^n$$

Si G es un grupo abeliano f.g. y $g \in G$ es de torsión, se define el orden de g como el mínimo entero positivo n tal que $ng = 0$. Observese que n es justamente el generador de $\mathrm{Ann}(g)$. En este caso se dice que g es de orden finito.

Ahora bien, el conjunto de elementos de orden finito de G es justamente el $\mathbb{Z}$-módulo de torsión de G: $T(G)$, al que se le suele llamar el subgrupo de torsión de G. Si $T(G) = 0$ se dice que G es libre de torsión.

Obtemos así los siguientes enunciados

3.1 PROPOSICION

Si G es un grupo abeliano f.g., entonces $G/T(G)$ es libre de torsión.

Demostración:

Véase 2.4 //

3.2 PROPOSICION

Todo grupo abeliano f.g. libre de torsión es libre

Demostración:

Véase 2.5 //

Copiando el corolario 2.6 para este caso obtemos un importante teorema de estructura

3.3 TEOREMA

Sea G un grupo abeliano finitamento generado y T su subgrupo de torsión, entonces

$$G \cong T \oplus G/T \qquad //$$

Como una consecuencia inmediata tenemos el siguiente

3.4 COROLARIO

Un grupo abeliano es finito si y sólo si es finitamente generado y todos sus elementos son de orden finito //

De modo que el estudio de los grupos abelianos f.g. por 3.3 y 3.4 queda reducido al estudio de los grupos abelianos finitos. Por lo que nos basta con caracterizar estos últimos. Para ello recordemos algunas cosas.

Si **p** es un entero primo, un **p-grupo** es aquel en el que todos sus elementos tienen como orden una potencia de **p**. Luego si **G** es un grupo abeliano finito **$T_p(G)$** es el **p-subgrupo máximo** de **G** (vease 2.8). Aplicando 2.9 obtemos

3.5 TEOREMA

Si G es un grupo abeliano finito, entonces G es la suma directa de sus p-subgrupos máximos $T_p(G)$. //

Por supuesto, dicha suma es finita, pues sólo interviene un número finito de primos p.

Luego se reduce aun más el estudio de los grupos abelianos f.g. al estudio de los p-grupos abelianos finitos. Ahora bien, es un hecho muy conocido que los representantes de las clases de isomorfía de los cíclicos en la categoría de grupos abelianos son: $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_n$ con n un entero positivo. Entonces, un p-grupo cíclico es de la forma $\mathbb{Z}_{p^k}$ para algún natural k. Traduciendo 2.10 tenemos

3.6 PROPOSICION

Si T es un p-grupo abeliano finito. Entonces

$$T \cong \mathbb{Z}_{p^{n_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{n_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p^{n_k}} \;;\; n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k$$

Además, los enteros positivos $n_1, n_2, \ldots, n_k$ estan univocamente determinados. //

Gracias al Corolario 2.11 podemos decir quienes son los grupos abelianos f.g. inescindibles, estos son, hasta isomorfismo, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_{p^k}$ para algun primo p y un entero positivo k.

Por último, enunciamos el teorema equivalente a 2.12

3.7 TEOREMA

Sea G un grupo abeliano finitamente generado entonces existe un número natural n y una lista $p_1^{n_1}, \ldots, p_k^{n_k}$ de potencias de primos tal que

$$G \cong \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{n_k}}$$

Ademas, la clase de isomorfía de G esta determinada por n y la lista de potencias de primos. //

CAPITULO IV

FORMA CANONICA DE JORDAN

A lo largo de este capítulo K representará un campo, y $K[x]$ el anillo de polinomios en la indeterminada x con coeficientes en K. Como sabemos, $K[x]$ es un **dip**, y podremos aplicar los resultados del capítulo II.

Sea $V \in \operatorname{Mod} K$ (e.d. un K-espacio vectorial) y $T \in \operatorname{End}_K(V)$. Vamos a construir un $K[x]$-módulo V^T de la siguiente manera: el grupo abeliano V^T es el mismo que V y la multiplicación por elementos de $K[x]$ definida por

$$fv = f(T)(v), \quad f \in K[x] \text{ y } v \in V^T$$

Es fácil cerciorse que esta operación cumple con las propiedades requeridas para que

$$V^T \in \operatorname{Mod} K[x].$$

Además la inclusión $K \to K[x]$, por restricción de escalares, convierte a cada $K[x]$ módulo, en un ${}_K M$ espacio vectorial. Más aún podemos asociar a ${}_K M$ un $T_x \in \operatorname{End}_K({}_K M)$ definido por $T_x(m) = xm$, para cada $m \in M$. Claramente

$$({}_K M)^{T_x} = M,$$

e inversamente si $V \in \operatorname{Mod} K$ y $T \in \operatorname{End}_K(V)$ entonces

$${}_K(V^T) = V.$$

4.1 PROPOSICION

Si $V \in \operatorname{mod} K$ y $T \in \operatorname{End}_K(V)$ entonces V^T es un $K[x]$-módulo de torsión finitamente generado.

Demostración:

Como la dimensión de V es finita, entonces la dimensión de $\operatorname{End}_K(V)$ también, digamos n. Luego $1, T, \ldots, T^n$ es un conjunto linealmente dependiente, de donde podemos encontrar una combinación lineal $a_0 1 + a_1 T + \cdots + a_n T^n = 0$ con alguna a_i distinta de cero. Por tanto el polinomio $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ está en $\operatorname{Ann}(V^T)$ y es claramente distinto de cero.

Para ver que V^T es finitamente generado basta observar que cualquier base de V es un conjunto generador de V^T. //

Si $M \in \mathrm{Mod}\, K[x]$ y $N \leq M$ entonces ${}_K N$ es un subespacio vectorial de ${}_K M$. El inverso en general no es cierto, por lo que nos vemos precisados a dar la siguiente

4.2 DEFINICION

Sea $V \in \mathrm{Mod}\, K$ y $T \in \mathrm{End}_K(V)$, decimos que $W \subseteq V$ es un subespacio vectorial T-invariante si $T(W) \subseteq W$

4.3 PROPOSICION

Sea W un subespacio de un espacio vectorial V y $T \in \mathrm{End}_K(V)$ entonces W es T-invariante si y sólo si W^T es un submódulo de V^T.

//

Sea C en **mod $K[x]$** cíclico y v su generador, como hemos hecho anteriormente llamaremos al generador de **$\mathrm{Ann}(v)$ el orden de C**, lo podemos tomar mónico, con lo cual aseguramos la unicidad. Si $W \subseteq V$ es un espacio T-invariante diremos que es **T-cíclico** si W^T es un submódulo cíclico de V^T. Afirmamos que

4.4 PROPOSICION

Sea $V \in \mathrm{mod}\, K$ y $T \in \mathrm{End}_K(V)$, entonces un subespacio T-invariante W es T-cíclico si y sólo si existe $v \in W$ tal que $\{v, T(v), T^2(v), \dots, T^{n-1}\}$ es una base de W para alguna $n \geq 1$.

Demostración:

$\Rightarrow$. Sea v el generador de W^T, luego como W es T-invariante ciertamente es generado por elementos de la forma $T^i(v)$. Sea ϕ el orden de W^T que hemos supuesto es un polinomio mónico y mínimo con respecto a la propiedad de que $\phi v = 0$. Sea n el grado de ϕ, y supongase que $a_0 v + a_1 T(v) + \cdots + a_{n-1} T^{n-1}(v) = 0$, entonces $f(x) = a_0 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ esta en $\mathrm{Ann}(v)$ así que $f | \phi$, pero por la minimalidad de ϕ, $f = 0$. Por tanto

$$\{v, T(v), \dots, T^{n-1}(v)\}$$

son linealmente independientes.

$\Leftarrow$. Inmediata.

//

Un primo en $K[x]$ se traduce como un polinomio irreducible. Aplicando 2.12, tenemos que

4.5 TEOREMA

Sea $V \in \text{mod}\, K$ y $T \in \text{End}_K(V)$ entonces $V \cong \bigoplus_{i=1}^{n} W_i$ donde W_i es un subespacio T-cíclico y el orden de W_i^T es una potencia de algún polinomio mónico irreducible. Además esta descomposición es única hasta isomorfismo.

Demostración:

V^T es un $K[x]$-módulo de torsión 1.1, luego es suma directa de $K[x]$-módulos cíclicos primarios C_i, es decir $V^T \cong \bigoplus_{i=1}^{n} C_i$

y el orden de C_i es una potencia de algún polinomio mónico irreducible. Además esta descomposición es única hasta isomorfismo.

Ahora bien
$$V \cong {}_K(V^T) \cong {}_K\left(\bigoplus_{i=1}^{n} C_i\right) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} {}_K(C_i)$$
de donde si hacemos $W_i = {}_K(C_i)$ hemos acabado.

//

Fijemos por un momento V. A cada $T \in \mathbf{End}_K(V)$ le asociamos el polinomio mónico que es el generador de $\text{Ann}(V^T)$ y al que se le llama **el polinomio mínimo de T.** Supongamos que $\dim_K(V) = n$. Dada una base B de V podemos asociar, de una única forma, una matriz $A^T_{(\text{rel } B)} \in \mathbb{M}_n(K)$ (el anillo de las matrices $n \times n$ con entradas en K), la cuál se conoce como **la matriz asociada a la transformación T relativa a la base B**. Es decir $F: \mathbf{End}_K(V) \longrightarrow \mathbb{M}_n(K)$ definida por
$$F(T) = A^T_{(\text{rel } B)}$$
es un isomorfismo de anillos.

Luego, nos referiremos a **el polinomio mínimo** de $A \in \mathbb{M}_n(K)$ como el **polinomio mínimo** asociado a $F^{-1}(A)$.

Sabemos que dos matrices son similares si representan el mismo endomorfismo pero son relativas a distintas bases. Por tanto, el polinomio **mínimo** es un invariante ante la relación de similitud de matrices.

1.6 DEFINICION

Un $n \times n$ bloque de Jordan es una matriz $n \times n$ de la forma

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{bmatrix}$$

es decir, tiene a de K en la diagonal, a 1 arriba de ésta y ceros en las demas entradas.

4.7 LEMA

Sea $T \in End_K(V)$, supongamos que V^T es cíclico de orden $(x-a)^n$, entonces existe una base B de V tal que $A^T(\text{rel } B)$ es un $n \times n$ bloque de Jordan.

Demostración:

Por 4.4, V tiene una base $\{v, Tv, \ldots, T^{n-1}v\}$. Afirmamos que $B = \{(x-a)^{n-1}v, \ldots, (x-a)v, v\}$ es una base de V. Nos bastará ver que B es un conjunto de vectores linealmente independiente, para tal efecto supongase que $a_0 v + a_1(x-a)v + \cdots + a_{n-1}(x-a)^{n-1}v = 0$. Sea $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ y supongamos que f no es cero. Como **K[x]** es **dip** existen $p, q \in K[x]$ tal que $h(x) = (f, x^n) = pf + qx^n$. Por tanto $h(x) = x^m$, con $m < n$. Y por otro lado $h(x-a)v = 0$ pues $f(x-a)v$ y $(x-a)^n v$ lo son. Pero esto contradice la minimalidad de $(x-a)^n$, luego f es cero. Es decir **B** es una base.

Ahora bien, para cada $0 \le i \le n-1$

$$T((x-a)^i v) = x(x-a)^i v = (x-a+a)(x-a)^i v = (x-a)^{i+1} v + a(x-a)^i v$$

Luego

$$A^T(\text{rel } B) = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{bmatrix}$$

//

Una suma directa de bloques de Jordan se llama **una forma canónica de Jordan.** Enunciamos ahora uno de los teoremas más importante del Algebra lineal

4.8 TEOREMA

Sea $A \in M_n(K)$. Si el polinomio mínimo de A es producto de factores lineales, entonces A es similar a una forma canónica de Jordan.

Demostración:

Aplíquese 4.5 a $V^{F^{-1}(A)}$, luego 4.7 a cada $F^{-1}(A)$-cíclico que aparece en la descomposición de 4.5 (cuyo orden es divisor del polinomio mínimo de A).

//

Por último, y como una consecuencia directa de 4.8 tenemos

4.9 COROLARIO

Si K es algebraicamente cerrado, entonces toda matriz cuadrada con entradas en K es similar a una forma canónica de Jordan

//

PARTE II

CASO ARTINIANO

CAPITULO I

MAS SOBRE MODULOS

Vamos a desarrollar un poco más de teoría que nos servirá en los posteriores capítulos para comprender mejor las ideas que en ellos se expondrán.

1.1 DEFINICION

Un submódulo K de M es **superfluo** en M, abreviadamente $K \ll M$ si para cada submódulo $L \leq M$

$$K+L=M \text{ implica } L=M$$

Un epimorfismo $f: M \longrightarrow N$ es superfluo si $\ker f \ll M$

1.2 PROPOSICION

Para cualquier submódulo K de M las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) $K \ll M$

b) $P_K: M \longrightarrow M/K$ es superfluo (P_K la proyección canónica)

c) Para todo módulo N y para cada $h \in Hom(N,M)$

$$M = Imh + K \text{ implica } M = Imh$$

//

Consecuentemente

1.3 COROLARIO

Un epimorfismo $f: M \longrightarrow N$ es superfluo si y sólo si para todos los homomorfismos h, $f \circ h$ epi implica que h es epi.

//

1.4 COROLARIO

Si $M \leq N \ll N'$ entonces $M \ll N'$

//

Hablaremos ahora del **radical** de un módulo M

$$\mathrm{Rad}\,M$$

que como se sabe tiene una primera caracterización como la intersección de todos los submódulos máximos de M. Además, es estable bajo homomorfismos, es decir si $f: M \longrightarrow N$ es un homomorfismo en $\mathbf{Mod}\,\Lambda$, entonces

$$f(\mathrm{Rad}\,M) \subseteq \mathrm{Rad}\,N$$

Por otro lado la igualdad se da si f es epi y el $\mathrm{Ker}\,f$ está contenido en el $\mathrm{Rad}\,M$, ya que en este caso obtemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$$

y por el tercer teorema de isomorfismo la correspondencia $M' \longmapsto fM'$ es un isomorfismo del retículo de submódulos de M que contienen al $\mathrm{Ker}\,f$ y el retículo de submódulos de N (es decir es una correspondencia biyectiva que preserva inclusiones). Luego los máximos en N se corresponden uno a uno con los máximos en M que contienen al $\mathrm{Ker}\,f$ que por hipótesis son todos. De donde

$$f(\mathrm{Rad}\,M) = f(\cap \mathfrak{m}) = \cap f\mathfrak{m} = \mathrm{Rad}\,N$$

con $\mathfrak{m}$ máximo en M.

1.5 PROPOSICION

Si $M = \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ entonces $\mathrm{Rad}\,M = \bigoplus_{\alpha \in A} \mathrm{Rad}\,M_\alpha$

Demostración:

Sean i_α y π_α las inclusiones y proyecciones en la suma directa, luego

$$\begin{aligned} \mathrm{Rad}\,M &= \sum_{\alpha\in A} i_\alpha \pi_\alpha (\mathrm{Rad}\,M) \\ &\subseteq \sum_{\alpha\in A} i_\alpha (\mathrm{Rad}\,M_\alpha) \\ &\subseteq \mathrm{Rad}\,M \end{aligned}$$

pero por otro lado

$$\sum_{\alpha\in A} i_\alpha(\mathrm{Rad}\,M_\alpha) = \bigoplus_{\alpha\in A} \mathrm{Rad}\,M_\alpha$$

//

1.6 PROPOSICION

$\mathrm{Rad}(M/\mathrm{Rad}\,M) = 0$

Demostración:

Sea $\pi: M \longrightarrow M/\mathrm{Rad}\,M$ la proyección canónica, por tanto

$$\pi(\mathrm{Rad}M)=\mathrm{Rad}(M/\mathrm{Rad}M)=0$$

//

Usualmente a $M/\mathrm{Rad}M$ se le llama **el Tope de** M, en estos términos la proposición anterior nos dice que el radical del tope es nulo, y la siguiente que el tope es aditivo.

1.7 PROPOSICION

Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de Λ-módulos, entonces

$$(\oplus_{i\in I} M_i)/\mathrm{Rad}(\oplus_{i\in I} M_i) \cong \oplus_{i\in I} M_i/\mathrm{Rad}M_i$$

Demostración:

Por el lema del cinco existe φ isomorfismo tal que

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Rad}\oplus_{i\in I} M_i \arrow[r] & \oplus_{i\in I} M_i \arrow[r] & \oplus_{i\in I} M_i/\mathrm{Rad}\oplus_{i\in I} M_i \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Rad}M_i \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & M_i \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & M_i/\mathrm{Rad}M_i \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \oplus_{i\in I}\mathrm{Rad}M_i \arrow[r] \arrow[uu, bend left] & \oplus_{i\in I} M_i \arrow[r] \arrow[uu, bend left] & \oplus_{i\in I} M_i/\mathrm{Rad}M_i \arrow[r] \arrow[uu, dashed, bend right, "\varphi"'] & 0
\end{tikzcd}$$

conmuta

//

Ahora damos otra caracterización del radical en términos de lo hasta aquí expuesto

1.8 PROPOSICION

$\mathrm{Rad}M$ es el mayor submódulo superfluo de M.

Demostración:

Sea $L\leq M$ y supongamos que $L+\mathrm{Rad}M=M$. Si $L\neq M$ existe un $B\leq M$ máximo tal que $L\leq B$, pero $\mathrm{Rad}M\leq B$ así que $M=L+\mathrm{Rad}M\leq B$, lo cual es absurdo, por tanto $L=M$.

Por otro lado, sea $N\leq M$ superfluo y B cualquier submódulo máximo en M. Si N no estuviera en B entonces $N+B=M$, luego $B=M$ lo que no es posible. De modo que $N\leq B$, pero por ser B arbitrario $N\leq\mathrm{Rad}M$.

//

Denotaremos a $\mathrm{Rad}(_\Lambda\Lambda)$ por J. Usualmente recibe el nombre de **radical de Jacobson** vamos a probar que como ideal de Λ es bilateral.

1.9 PROPOSICION

J es un ideal bilateral

Demostración:

Para cada $\lambda \in \Lambda$ asociamos el morfismo $R_\lambda : \Lambda \longrightarrow \Lambda$ dado por $x \longmapsto x\lambda$, entonces

$$J\lambda = R_\lambda(J) \subseteq J$$

//

Nos toca también dar una caracterización de J. Para esto recordemos que un elemento $x \in \Lambda$ es llama **quasi regular izquierdo (q.r.i.)** si $(1-x)$ tiene inverso izquierdo en Λ. Análogamente se define **quasi regular derecho** (q.r.d.).

1.10 PROPOSICION

Sea $I \leq_\Lambda \Lambda$, entonces si todos los elementos de I son q.r.i. lo son q.r.d.

Demostración:

Sea $x \in I$, luego existe $y \in \Lambda$ tal que $y(1-x) = 1$, de donde $y = 1 + yx = 1 - (-yx)$. Como $-yx \in I$ es q.r.i., nuevamente existe $y_0 \in \Lambda$ tal que $y_0 y = 1$, de modo que

$$y_0 y (1-x) y = y_0 y$$

luego $(1-x)y = 1$, como se quería.

//

1.11 LEMA

Sea $I \leq_\Lambda \Lambda$, **entonces** $I \ll_\Lambda \Lambda$ si y sólo si cada elemento de I es q.r.i.

Demostración:

$\Rightarrow$. Sea $x \in I$, como $\Lambda x \subseteq I$, luego es superfluo (1.4). Pero $\Lambda x + \Lambda(1-x) = \Lambda$, por tanto $\Lambda(1-x) = \Lambda$, de modo que $(1-x)$ tiene inverso izquierdo.

$\Leftarrow$. Sea $L \leq \Lambda$ y supongase que $I + L =_\Lambda \Lambda$. Por tanto $1 = x + z$, con $x \in I$ y $z \in L$, de donde $z = 1 - x$, luego existe $y \in \Lambda$ tal que $yz = y(1-x) = 1$. Así que $L =_\Lambda \Lambda$.

//

1.12 TEOREMA

J es el ideal mas grande tal que todos sus elementos son q.r.i.

Demostración:

Inmediata de 1.8 y 1.11 //

1.13 LEMA DE NAKAYAMA

Sea I un ideal de Λ contenido en J y $M \in \operatorname{mod}\Lambda$, entonces

$$IM = M \text{ implica } M = 0$$

Demostración:

Procederemos por contradicción, supongamos que M es no nulo y $IM = M$. Sea $\{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto mínimo de generadores, luego

$$x_1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i m_i \quad , \quad \alpha_i \in I \text{ y } m_i \in M$$

y

$$m_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_j$$

de modo que

$$x_1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_j \Big) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \lambda_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_{ij}\Big) x_j$$

Sea $b_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_{ij}$, que está en J, luego $(1 - b_1)x_1 = \sum_{j=2}^{n} b_j x_j$.

Ahora bien b_1 es q.r.i., así que $(1-b_1)$ es invertible, sea b su inverso, por tanto

$$\begin{aligned} x_1 &= b(1-b_1)x_1 \\ &= \sum_{j=2}^{n} b b_j x_j \end{aligned}$$

lo que contradice la minimalidad de los generadores //

El siguiente corolario no es sino una reformulación del Lema de Nakayama en términos de la Teoría que hasta aquí hemos desarrollado

1.14 COROLARIO

Con las hipótesis de 1.13, $IM \ll M$

Demostración:

Sea $L \leq M$ y supongamos que $IM + L = M$. Luego

$$I(M/L) = (IM+L)/L = M/L$$

por tanto (1.13) $M/L = 0$, luego $M = L$

//

1.15 COROLARIO

Sea $M \in \operatorname{mod}\Lambda$, entonces $JM \subseteq \operatorname{Rad} M$

Demostración:

Inmediata de 1.8 y 1.14

//

Sabemos que todo módulo es una imagen epimórfica de un proyectivo, estamos interesados en algún módulo proyectivo que sea "mínimo" con esta condición. Para ello nos vemos motivados a dar la siguiente definición.

1.16 DEFINICION

Sea $M \in \operatorname{Mod}\Lambda$ y $f: P \to M$ un epimorfismo con P proyectivo. Diremos que (P, f) es una cubierta proyectiva de M si f es superfluo.

Para abreviar la terminología usualmente diremos que P es la cubierta proyectiva sin hacer referencia explícita a f.

1.17 COROLARIO

La cubierta proyectiva -si existe- es única hasta isomorfismo.

Demostración:

Supongamos que (P, f) y (P', f') son dos cubiertas proyectivas de M.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, bend left, "h"] \\ P' \arrow[r, "f'"'] \arrow[ur, dashed, bend left, "\phi"] & M \end{tikzcd}$$

Por ser P proyectivo existe h tal que $f'h = f$. Pero f' es superfluo, luego h es epi. Como P' es proyectivo h se escinde, es decir existe ϕ mono tal que $h\phi = 1_{P'}$, pero f es superfluo, de modo que ϕ es epi. Así que ϕ es iso y en consecuencia $P \cong P'$

//

1.18 COROLARIO

Si (P,f) es la cubierta proyectiva de M y $g: Q \twoheadrightarrow M$ es un epimorfismo con Q proyectivo entonces P es sumando directo de Q.

Demostración.

Se sigue de la demostración anterior –sustituyendo Q por P'– que

$$Q \cong \operatorname{Im}\phi \oplus \operatorname{Ker} h$$

pero por ser ϕ mono

$$P \cong \operatorname{Im}\phi$$

//

1.19 LEMA

Si $\{f_i : M_i \longrightarrow N_i\}_{i\in I}$ son superfluos, entonces $\bigoplus_{i\in I} f_i : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} N_i$ es superfluo.

Demostración:

$$\operatorname{Ker} \bigoplus_{i\in I} f_i = \bigoplus_{i\in I} \operatorname{Ker} f_i \subseteq \bigoplus_{i\in I} \operatorname{Rad} M_i = \operatorname{Rad} \bigoplus_{i\in I} M_i \ll \bigoplus_{i\in I} M_i$$

Por tanto

$$\operatorname{Ker} \bigoplus_{i\in I} f_i \ll \bigoplus_{i\in I} M_i$$

luego $\bigoplus_{i\in I} f_i$ es superfluo.

//

1.20 TEOREMA

Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos, cada uno con cubierta proyectiva P_i. Entonces $\bigoplus_{i\in I} M$ tiene cubierta proyectiva.

Mas aún, esta es $\bigoplus_{i\in I} P_i$

//

Para terminar esta sección hablaremos un poco de algunos elementos del anillo Λ que nos proporcionan bastante información sobre él.

1.21 PROPOSICION

Si ${}_\Lambda\Lambda$ tiene una descomposición en suma directa de submódulos entonces existe un conjunto $\{e_1, \dots, e_n\}$ de elementos de Λ tal que es un sistema completo $\left(\sum_{i=1}^{n} e_i = 1\right)$ de

idempotentes $(e_i^2 = e_i)$
ortogonales $(e_i e_j = 0$ si $i \neq j)$

y cada sumando directo es de la forma Λe_i

Demostración:

Sea $\Lambda = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_n$ la descomposición en suma directa de submódulos de Λ, descompongamos, en esta suma directa, el uno de Λ: $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$. Ahora bien, $e_i = 1e_i = e_i e_1 + e_i e_2 + \cdots + e_i e_n$. El primer miembro es un elemento de P_i, mientras que el segundo tiene su primer sumando en P_1, el segundo en P_2, etc.

Entonces $e_i^2 = e_i$ y $e_i e_j = 0$ si $i \neq j$.

Mostraremos ahora que $\Lambda e_i = P_i$. En efecto, ya sabemos que $\Lambda e_i \subseteq P_i$. Sea entonces $x \in P_i$. Tenemos $x = x1 = xe_1 + \cdots + xe_n$, y esta es una descomposición de x en la suma directa. Luego $xe_j = 0$ si $j \neq i$ y $xe_i \in \Lambda e_i$. //

Recordemos que $\phi \in \Lambda$ es **primitivo** si no es suma de idempotentes ortogonales, i.e.: si $\phi = f + h$ con f y h idempotentes ortogonales, entonces $f = 0$ o bien $h = 0$.

1.22 PROPOSICION

Sea $e \in \Lambda$ un idempotente, entonces Λe es inescindible si y sólo si e es primitivo.

Demostración:

$\Rightarrow$. Supongamos que Λe es inescindible y e es suma de idempotentes ortogonales f y ϕ entonces $\Lambda e = \Lambda f \oplus \Lambda \phi$, luego $\Lambda f = 0$ ó $\Lambda \phi = 0$, es decir $f = 0$ o $\phi = 0$.

$\Leftarrow$. Sea $\Lambda e = L_1 \oplus L_2$ una descomposición de Λe, por tanto $e = \phi_1 + \phi_2$ con ϕ_1 en L_1 y ϕ_2 en L_2, es fácil observar que estos son idempotentes ortogonales, mas aún $L_1 = \Lambda \phi_1$ y $L_2 = \Lambda \phi_2$, pero como es primitivo, $L_1 = 0$ o $L_2 = 0$. //

El recíproco de la Proposición 1.21 es claramente válido. Si además suponemos que los idempotentes son primitivos, obtenemos la siguiente

1.23 PROPOSICION

Sean $e_1, \ldots, e_n \in \Lambda$ distintos de cero. Entonces si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos, se tiene que

$$\Lambda = \Lambda e_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda e_n$$

es una descomposición en inescindibles //

Ahora bien, supongase de nuevo que ${}_\Lambda\Lambda = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$ es una descomposición en suma directa de submódulos de ${}_\Lambda\Lambda$, y que P_i como ideal de Λ es bilateral. Por 1.21 existe $\{e_1, \dots, e_n\}$ un sistema completo de idempotentes ortogonales y $P_i = \Lambda e_i$. Luego $P_i = \Lambda e_i = e_i \Lambda = e_i \Lambda e_i$ dado que P_i es bilateral. Resulta entonces fácil observar que $e_i \Lambda e_i$ es un anillo (el uno es e_i) y la descomposición de submódulos de Λ escrita arriba induce una descomposición en suma directa de anillos:

$$\Lambda \cong \prod_{i=1}^{n} P_i$$

En resumen

1.24 PROPOSICION

Si $P_1, \dots, P_n$ son ideales bilaterales de Λ y ${}_\Lambda\Lambda = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$ entonces $\Lambda \cong \prod_{i=1}^{n} P_i$ //

CAPITULO II

TEOREMA DE WEDDERBURN-ARTIN

Este capítulo está dedicado al estudio de los anillos y módulos semisimples. Veremos que si Λ es un anillo semisimple, el estudio de **Mod Λ** está totalmente hecho. Mas aún, el teorema de Wedderburn-Artin nos dice quienes son tales anillos.

Recordemos que un módulo no nulo es **simple** si no contiene submódulos propios.

2.1 PROPOSICION

Sea $S \in \text{Mod}\Lambda$ no nulo, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) S es simple

b) Todo homomorfismo $h: S \longrightarrow N$ no nulo es mono

c) Todo homomorfismo $\phi: N \longrightarrow S$ no nulo es epi

d) $S \cong \Lambda/m$, donde m es un ideal maximal de Λ

//

Un módulo es **semisimple** si es suma directa de módulos simples. Vamos a caracterizar a estos módulos.

2.2 LEMA

Sea $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de submódulos simples de M tales que $M = \sum_A S_\alpha$ y sea $K \leq M$, entonces existe un subconjunto B de A tal que la familia $\{S_\alpha\}_{\alpha \in B}$ es independiente y

$$M = K \oplus (\bigoplus_{B} S_\alpha)$$

Demostración:

La colección de los subconjuntos C de A tal que

$$\{S_\alpha\}_{\alpha \in C} \text{ es independiente y } K \cap (\textstyle\sum_C S_\alpha) = 0$$

es no vacía, luego por el lema de Zorn, tiene un elemento maximal B. Definimos

$$M_0 = K \oplus (\bigoplus_{B} S_\alpha)$$

y sea $\beta \in A \setminus B$, por la maximalidad de B: $M_0 \cap S_\beta \neq 0$, luego S_β está contenido en M_0, por tanto $M = M_0$ //

2.3 PROPOSICION

Si M es generado por una familia $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de submódulos simples, entonces existe $B\subseteq A$ tal que
$$M=\bigoplus_{\alpha\in B} S_\beta$$
es decir, M es semisimple.

Demostración:

Póngase $K=0$ en el lema anterior. //

2.4 PROPOSICION

Si M es semisimple con descomposición $M=\bigoplus_{\alpha\in A} S_\alpha$ y
$$0\longrightarrow K\xrightarrow{f} M\xrightarrow{g} N\longrightarrow 0 \quad \text{es exacta,}$$
entonces K y N son semisimples. Más aún, existe un subconjunto $B\subseteq A$ tal que
$$N\cong\bigoplus_{\beta\in B} S_\beta \quad y \quad K\cong\bigoplus_{\alpha\in A\setminus B} S_\alpha$$

Demostración:

Como $\operatorname{Im} f$ es un submódulo de M, aplicando el lema 2.2 podemos encontrar un subconjunto $B\subseteq A$ tal que
$$M=\operatorname{Im} f\oplus\Big(\bigoplus_{\beta\in B} S_\beta\Big)$$
luego la sucesión se escinde, y entonces
$$N\cong M/\operatorname{Im} f\cong\bigoplus_{\beta\in B} S_\beta$$
pero también
$$M\cong\Big(\bigoplus_{\alpha\in A\setminus B} S_\alpha\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{\beta\in B} S_\beta\Big)$$
de modo que
$$K\cong\operatorname{Im} f\cong\bigoplus_{\alpha\in A\setminus B} S_\alpha$$
//

2.5 COROLARIO

Todo submódulo y todo cociente de un semisimple es semisimple. //

2.6 COROLARIO

Sea $M=\bigoplus_{\alpha\in A} S_\alpha$ un módulo semisimple y $S\leq M$ simple, entonces $S\cong S_\alpha$ para alguna $\alpha\in A$

Demostración:

Por 2.4, existe $B \subseteq A$ tal que $S \cong \bigoplus_{\alpha \in B} S_\alpha$ pero S es simple, luego B consta de un sólo elemento.

//

2.7 LEMA

Sea $K, N, M \in \mathrm{Mod}\,\Lambda$ y

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & M \\ & N \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

un triángulo conmutativo, si f es sección (es decir si tiene inversa izquierda) entonces σ es sección.

Demostración:

Por hipótesis existe $\phi : M \longrightarrow K$ tal que $\phi f = 1_K$, luego $1_K = \phi f = \phi(\gamma\sigma) = (\phi\gamma)\sigma$, por tanto σ es sección

//

2.8 PROPOSICION

Sea $M \in \mathrm{Mod}\,\Lambda$. Entonces M es semisimple si y sólo si todo submódulo de M es sumando directo de M.

Demostración:

$\Rightarrow$. Véase 2.2

$\Leftarrow$. Para ésto probaremos que la hipótesis implica la siguiente afirmación: Todo submódulo de M contiene un simple.

Sea $B \leq M$ y $b \in B$ distinto de cero. Y F la colección de submódulos de B que no contienen a b, luego F es no vacia y por el lema de Zorn, tiene un elemento maximal N. Por hipótesis existe $K \leq M$ tal que $M = N \oplus K$, por el lema anterior

$$B = N \oplus (B \cap K)$$

Supongamos que $D = B \cap K$ no es simple. Sea $D' \lneq D$, Luego

$$D = D' \oplus D''$$

por tanto

$$B = N \oplus D' \oplus D''$$

de modo que

$$b \notin N \oplus D' \quad \text{o} \quad b \notin N \oplus D''$$

contradiciendo la maximalidad de N, entonces D es simple.

Ahora bien, sea $\{S_k\}_{k \in K}$ una familia maximal independiente de submódulos simples de M, y $M'=\bigoplus_{k\in K} S_k$. Por tanto $M=M'\oplus M''$ pero M'' tiene que ser cero pues sino tendría un simple contradiciendo la maximalidad de K. //

Cambiaremos el punto de mira para estudiar a Λ con más detenimiento. Diremos que Λ es **semisimple** si lo es como Λ-módulo. Nótese que en caso de que así sea el número de simples que aparecen en su descomposición es finito. La siguiente proposición es una consecuencia directa de 2.5

2.9 PROPOSICION

Si Λ es semisimple, todo $M\in \text{Mod}\,\Lambda$ es semisimple. //

Obsérvese que los submódulos simples de Λ son justamente los ideales minimales. De donde, si Λ es semisimple, éste es suma directa de ideales minimales.

2.10 PROPOSICION

Sea Λ semisimple y $\{I_1,\dots,I_n\}$ los representantes de las clases de isomorfía de los submódulos simples que aparecen en la descomposición de Λ. Entonces

$$\{I_1,\dots,I_n\}$$

es un conjunto irredundante de tipos de simples en $\text{Mod}\,\Lambda$.

Demostración:

Aplíquese 2.4 y luego 2.6 //

Vamos ahora a caracterizar los anillos semisimples, para tal efecto introducimos algunas definiciones y lemas auxiliares.

2.11 DEFINICION

Sea $S\in \text{Mod}\,\Lambda$ simple y $M\in \text{Mod}\,\Lambda$ arbitrario definimos **la traza de S en M** $Tr_S(M)$ como la suma de las imágenes de los morfismos de S en M, es decir

$$Tr_S(M)=\sum_{h\in \text{Hom}_\Lambda(S,M)} \text{Im}\,h$$

2.12 LEMA

Si $f\in \text{End}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda)$, entonces $f(Tr_S(\Lambda))\subseteq Tr_S(\Lambda)$.

Demostración:

$$f(Tr_S(\Lambda)) = f\Big(\sum_{h\in Hom_\Lambda(S,\Lambda)} Im\,h\Big) = \sum_{h\in Hom_\Lambda(S,\Lambda)} f(Im\,h) \leq \sum_{\phi\in Hom_\Lambda(S,\Lambda)} Im\,\phi = Tr_S(\Lambda)$$

Nuevamente, sea Λ semisimple con descomposición

$$\bigoplus_{i=1}^{t} I_i$$

sin pérdida de generalidad supongase que $I_1,\ldots,I_n$ los representantes de los tipos de simples, luego se induce una relación de equivalencia en el conjunto de índices, es decir, i esta relacionado con j si $I_i \cong I_j$, entonces se tiene que

$$\Lambda = \bigoplus_{i=1}^{n}\Big(\bigoplus_{j\in[i]} I_j\Big)$$

Es fácil cerciorarse que $\quad Tr_{I_i}(\Lambda) = \bigoplus_{j\in[i]} I_j$

Por tanto $\quad \Lambda = \bigoplus_{i=1}^{n} Tr_{I}(\Lambda)$ //

Ahora bien

2.13 PROPOSICION

$Tr_{I_i}(\Lambda)$ es un ideal bilateral y $Tr_{I_i}(\Lambda) = \Lambda I_i \Lambda$

Demostración:

Sabemos que es izquierdo, veamos que es derecho. Sea $r\in\Lambda$ y $f:\Lambda\to\Lambda$; $x\mapsto xr$, luego $f\in End_\Lambda(\Lambda\Lambda)$. Así que aplicando el lema 2.12 tenemos

$$f(Tr_{I_i}(\Lambda)) = Tr_{I_i}(\Lambda)r \leq Tr_{I_i}(\Lambda)$$

lo cual prueba la primera parte de nuestra afirmación.

Para la segunda obsérvese que si I y I' son ideales izquierdos minimales de Λ entonces $II' = 0$ ó $I \cong I'$. De donde

$$\Lambda I_i \Lambda = \Big(\bigoplus_{j=1}^{n} Tr_{I_j}(\Lambda)\Big) I_i \Big(\bigoplus_{j=1}^{n} Tr_{I_j}(\Lambda)\Big)$$
$$= Tr_{I_i}(\Lambda)\Big(\bigoplus_{j=1}^{n} Tr_{I_j}(\Lambda)\Big)$$
$$= Tr_{I_i}(\Lambda)$$ //

Luego aplicando 1.24, tenemos el siguiente importante.

2.14 COROLARIO

Si Λ es semisimple y $I_1, \ldots, I_n$ son los representantes de los tipos de simples, entonces

$$\Lambda \cong \dotplus_{i=1}^{n} Tr_{I_i}(\Lambda)$$

//

Diremos que un anillo Λ es **simple** si éste no tiene ideales bilaterales no nulos propios.

2.15 LEMA

Si T es un generador de Λ, $Ann(T) = 0$

Demostración:

Como T genera a Λ y este es proyectivo, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & \Lambda \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[d] & \\ T^{(I)} \arrow[r, "\varphi"'] & \Lambda \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Ahora bien, sea $\lambda \in Ann(T)$, por tanto

$$\lambda = \varphi(\psi(\lambda)) = \varphi(\lambda\psi(1)) = \varphi(\lambda \sum_{i \in I} \pi_i \psi(1)) = \varphi(\sum_{i \in I} \lambda \pi_i \psi(1)) = \varphi(0) = 0$$

//

2.16 PROPOSICION

Las siguientes afirmaciones para un anillo Λ son equivalentes

a) Λ tiene un generador simple

b) Λ es simple y artiniano

c) Λ es simple y ${}_\Lambda\Lambda$ es semisimple

Demostración:

a)$\Rightarrow$c). Sea T un generador simple de Λ y $I \trianglelefteq \Lambda$ un ideal propio bilateral, luego existe L ideal maximal tal que $I \subseteq L$. Así que $I\Lambda \subseteq L$ y $T \cong \Lambda/L$. Por tanto

$$I \subseteq Ann(\Lambda/L) = Ann(T) = 0$$

es decir, Λ es simple.

Por otro lado, $\Lambda \cong T^{I}$ para algún conjunto, entonces ${}_{\Lambda}\Lambda$ es semisimple.

a) ⇒ b). Inmediato.

b) ⇒ a). Por ser Λ artiniano existe T un ideal minimal, luego $Tr_T(\Lambda)$ es no nulo y bilateral (2.13), luego es todo Λ. De modo que Λ es suma de copias de T, es decir T genera Λ.

//

2.17 LEMA DE SCHUR

Si $S \in \mathrm{Mod}\,\Lambda$ es simple, entonces $\mathrm{End}_{\Lambda}(S)$ es un anillo con división

Demostración:

Apliquese 2.1 b y c.

//

2.18 LEMA

Sea D un anillo con división y V un D-espacio vectorial de dimensión finita. Entonces ${}_R V$ es un generador simple para $\mathrm{Mod}\,R$, donde $R = \mathrm{End}_D(V)$.

Demostración:

Veamos primero que ${}_R\mathbf{V}$ es simple. Sean $0 \neq x, y \in \mathbf{V}$, sabemos que existe $f \in \mathbf{R}$ tal que $f(x) = y$, luego $y = fx$, y finalmente ${}_R\mathbf{V} = {}_R\langle x \rangle$.

Para ver que genera a $\mathbf{Mod\,R}$ nos bastará ver que genera a $\mathbf{R}$. Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de $\mathbf{V}$, definimos $e_i : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$; $e_i(v_j) = \delta_{ij} v_j$. Es claro que $\{e_1, \dots, e_n\}$ son idempotentes ortogonales, se sigue que

$$Re_i \cong {}_R V$$

por tanto

$$ {}_R V^n \cong R$$

//

2.19 PROPOSICION

$$\mathrm{End}_{\Lambda}({}_{\Lambda}T^{n})^{op} \cong M_n(\mathrm{End}_{\Lambda}T^{op})$$

Demostración:

Sea
$$\varphi : \mathrm{End}_{\Lambda}({}_{\Lambda}T^{n})^{op} \longrightarrow M_n(\mathrm{End}_{\Lambda}T^{op})$$

definido de la siguiente forma $\varphi(f) = (\pi_j \circ f \circ \nu_i)_{ij}$

donde π_j y ν_i son las proyecciones e inclusiones respectivamente.

Ahora bien, claramente $\varphi(f+\phi)=\varphi(f)+\varphi(\phi)$. Para el producto obsérvese que

$$\begin{aligned}
\varphi(f\cdot\phi) &= \varphi(\phi\circ f)\\
&= (\pi_j\circ\phi\circ f\circ\nu_i)_{ij}\\
&= (\pi_j\circ\phi(\sum_k \nu_k\circ\pi_k)\circ f\circ\nu_i)_{ij}\\
&= (\sum_k(\pi_j\circ\phi\circ\nu_k)\circ(\pi_k\circ f\circ\nu_i))_{ij}\\
&= (\sum_k(\pi_k\circ f\circ\nu_i)\cdot(\pi_j\circ\phi\circ\nu_k))_{ij}\\
&= (\pi_j\circ\phi\circ\nu_i)_{ij}(\pi_j\circ\phi\circ\nu_k)_{ij}\\
&= \varphi(f)\cdot\varphi(\phi)
\end{aligned}$$

Por otro lado si $\varphi(f)=0$ entonces $\pi_j\circ f\circ\nu_i=0$ para cada i,j. Luego $f=0$, es decir, φ es un monomorfismo.

Es fácil ver que φ es epimorfismo, omitimos la prueba //

2.20 TEOREMA

Sea Λ un anillo, entonces Λ tiene un generador simple si y sólo si es isomorfo a un anillo de matrices con entradas en un anillo con división D.

Demostración:

$\Leftarrow$. Aplíquese el lema 2.18 al D-espacio vectorial generado por las columnas de las matrices.

$\Rightarrow$. Sea T un generador simple para Λ, luego $\Lambda\cong T^n$ para algún entero positivo n. Sea $D=\mathrm{End}_\Lambda(T)^{op}$, de modo que por el lema de Schur (2.17) se tiene que D es un anillo con división.

Ahora bien,

$$\Lambda\cong\mathrm{End}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda)^{op}\cong\mathrm{End}_\Lambda(T^n)^{op}\cong M_n(D)$$

donde el último isomorfismo es debido a 2.19

//

Vamos ahora a enunciar uno de los Teoremas más importante de toda el Algebra.

2.21 TEOREMA (WEDDERBURN-ARTIN)

Un anillo Λ es semisimple si y sólo si es suma directa de un número finito de anillos artinianos simples

Demostración:

$\Leftarrow$. Supongamos que $\Lambda \cong \dot{+}_{i=1}^{n} \Lambda_i$ donde Λ_i es artiniano simple. Sabemos entonces que

$$\operatorname{mod}\Lambda \cong \bigtimes_{i=1}^{n} \operatorname{mod}\Lambda_i$$

(el producto cartesiano de las categorías $\operatorname{mod}\Lambda_i$, $i=1,\dots,n$)

Luego todo módulo en $\operatorname{mod}\Lambda$ es semisimple.

$\Rightarrow$. Por 2.19

$$\Lambda \cong \dot{+}_{i=1}^{n} Tr_{I_i}(\Lambda)$$

donde $I_1,\dots,I_n$ son los representantes de los tipos de simples de $\operatorname{Mod}\Lambda$. Pero I_i es un generador simple para $Tr_{I_i}(\Lambda)$. Así que, aplicando 2.16, se obtiene que cada una de las componentes de Λ es un anillo artiniano simple, tal y como se quería //

Aplicando 2.20 obtenemos la siguiente versión del anterior Teorema.

2.22 TEOREMA

Todo anillo semisimple es isomorfo a una suma directa de anillos de matrices con entradas en un anillo con división.

//

Vamos ahora a dar una fuerte caracterización de estos anillos.

2.23 PROPOSICION

Las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) Λ es semisimple.

b) Todo $M \in \operatorname{Mod}\Lambda$ es semisimple.

c) Todo $M \in \operatorname{Mod}\Lambda$ es inyectivo.

d) Todo $M \in \operatorname{Mod}\Lambda$ es proyectivo.

e) Toda sucesión exacta corta en $\operatorname{Mod}\Lambda$ se escinde.

Demostración:

a)⇒b). Se hizo en 2.9.

b)⇒e). Se sigue de 2.4.

e)⇒c) y d). Obvia.

c) o d) ⇒ a). Se sigue de 2.8

//

Ahora bien, dado $M \in \mathrm{Mod}\,\Lambda$, una **resolución proyectiva de M** es una sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow P_{n+1} \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

donde cada P_i es proyectivo. Decimos que **la dimensión proyectiva de M es menor o igual a n** $dp(M) \leq n$ si existe una resolución proyectiva de **M** tal que P_{n+1} es cero, y definimos

$$\dim_{gl} P(\Lambda) = \sup\{pd(M) \mid M \in \mathrm{Mod}\,\Lambda\}$$

al cuál se le llama **la dimensión global proyectiva de Λ.**

Podemos entonces agregar una sexta afirmación a la proposición 2.24:

f) $\dim_{gl} P(\Lambda) = 0$

cuya equivalencia se sigue inmediatamente de **d)**.

//

Nuestro siguiente paso será estudiar algunas relaciones entre el radical **J** y los módulos semisimples.

2.24 PROPOSICION

Si $S \in \mathrm{Mod}\,\Lambda$ es simple entonces $JS=0$

Demostración:

Por hipótesis, $JS=S$ o bien $JS=0$. Lo primero no puede pasar, pues por 1.13 S sería nulo.

//

2.25 COROLARIO

Sea $\Lambda' = \Lambda/J$ y $M \in \mathrm{Mod}\,\Lambda$. Entonces M es simple si y solo si $JM=0$ y ${}_{\Lambda'}M$ es simple.

Demostración:

⇒. Si M es simple, por 2.24 $JM=0$ y, por tanto J está contenido en el anulador de M, luego tiene estructura natural de Λ'-módulo. Ahora bien, si ${}_{\Lambda}N \lneq {}_{\Lambda'}M$, por restricción de escalares ${}_{\Lambda}N \leq {}_{\Lambda}M$, luego **N** es nulo. Así que ${}_{\Lambda'}M$

simple.

$\Leftarrow$. Inversamente, como $JM=0$ tiene sentido ${}_{\Lambda'}M$, supongase que éste es simple y ${}_{\Lambda}N \leq {}_{\Lambda}M$, luego $JN=0$ y entonces ${}_{\Lambda'}N \leq {}_{\Lambda'}M$, de modo que $N=0$. //

2.26 COROLARIO

${}_{\Lambda}M$ es semisimple si y sólo si $JM=0$ y ${}_{\Lambda'}M$ es semisimple //

2.27 PROPOSICION

Sea $\mathcal{S}$ la colección de simples de Mod Λ. Entonces

$$J=\bigcap\{\operatorname{Ker} h \mid h\in \operatorname{Hom}_{\Lambda}(\Lambda,S),\ S\in\mathcal{S}\}$$

//

2.28 PROPOSICION

Sea Λ artiniano. Entonces Λ es semisimple si y sólo si $J=0$

Demostración:

Nos bastará probar la suficiencia. Sea A el conjunto de los homomorfismos de Λ en algún simple S. Definimos

$$M=\prod_{h\in A}\operatorname{Im} h$$

Sea
$$\psi:\Lambda\longrightarrow M$$
tal que $\lambda\mapsto(h(\lambda))_{h\in A}$, pero $\operatorname{Ker}\psi=J=0$ (2.27), de donde ψ es un monomorfismo, por ser Λ artiniano, ψ puede ser restringida a un número finito de factores n. Luego

$$0\longrightarrow\Lambda\longrightarrow\bigoplus_{i=1}^{n}S_i$$

aplicando 2.4, obtenemos lo que se quería. //

2.29 COROLARIO

Si Λ es artiniano entonces Λ/J es semisimple y J es nilpotente, es decir $J^n=0$ para algún entero positivo.

Demostración:

Λ/J es también artiniano, usando 1.6 y 2.28 se tiene que es semisimple.

Por otro lado, tenemos la siguiente cadena descendente

$$J \supseteq J^2 \supseteq J^3 \supseteq \dots$$

luego ésta debe estacionarse, es decir $J^n = J^{n+1}$ para alguna $n>0$. Supóngase que $J^n \neq 0$. Entonces la colección de ideales que no son anulados por J^n es no vacía. Así que existe I un ideal de Λ mínimo con respecto a la propiedad de no ser anulado por J^n. Sea $x \in I$ con $J^n x \neq 0$. Entonces $Jx \leq \Lambda x \leq I$ y

$$J^n(Jx) = J^{n+1}x = J^n x \neq 0$$

Por la minimalidad de I, obtemos que $Jx = \Lambda x$, contrario al lema de Nakayama (1.13).

//

2.30 LEMA

Sea I un ideal bilateral de Λ. Si I es nilpotente y $J(\Lambda/I)=0$ entonces

$$I = J(\Lambda)$$

Demostracion:

Como $J(\Lambda/I)=0$ tenemos que $J \leq I$. Por otro lado todo elemento de I es q.r.i., pues si $x \in I$ y $x^n = 0$ entonces $(1+x+\dots+x^{n-1})(1-x)=1$, aplíquese 1.12.

//

Para finalizar este capítulo vamos a dar un teorema que más adelante utilizaremos.

2.31 TEOREMA (HOPKINS)

Λ es artiniano si y sólo si es noetheriano, J nilpotente y Λ/J semisimple.

Demostración:

$\Rightarrow$. Por 2.29 J es nilpotente y Λ/J es semisimple. Para probar que es noetheriano usaremos inducción sobre el índice de nilpotencia de J. Si $n=1$ entonces $\Lambda = \Lambda/J$ es semisimple y hemos acabado. Supongamos que el resultado es cierto para anillos cuyo radical tiene índice de nilpotencia menor que n donde $n>1$. Por 2.30

$$J(\Lambda/J^{n-1}) = J/J^{n-1}$$

Luego por hipótesis de inducción Λ/J^{n-1} es noetheriano. Ahora bien $J^n = J(J^{n-1}) = 0$ y Λ/J es semisimple, usando 2.26, tenemos que J^{n-1} es semisimple y por tanto noetheriano. Considerese la sucesión exacta de Λ-módulos

$$0 \longrightarrow J^{n-1} \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Lambda/J^{n-1} \longrightarrow 0$$

luego Λ es noetheriano.

$\Leftarrow$. La prueba es análoga. Se hace inducción sobre el índice de nilpotencia de J. Se usa esta para suponer que Λ/J^{n-1} es artiniano, y por 2.26 J^{n-1} es semisimple, consecuentemente artiniano, luego se tiene la sucesión exacta de arriba, pero ahora con los extremos artinianos.

//

CAPITULO III

TEOREMA DE KRULL-SCHMIDT

Para este capítulo nos hemos reservado el estudio de los módulos con serie de composición. Nuestro principal objetivo es mostrar un teorema fuerte, en el sentido de que nos garantice la descomposición de módulos finitamente generados en inescindibles únicos.

Procederemos en dos pasos, primero trataremos el tema de los módulos con serie de composición hasta darnos cuenta que éstos son los que cumplen ambas condiciones de cadena (Noetherianos y Artinianos a la vez). Por lo cual, y gracias a 2.31, nos bastará suponer de ahí en adelante que Λ es Artiniano.

En segundo lugar elaboraremos el material necesario para probar el Teorema de Krull-Schmidt.

Recordemos, como ya hemos visto anteriormente que, una cadena de submódulos de un módulo M es una sucesión $\{M_i\}$, $i=0,\dots,n$, de submódulos de M tal que

$$M=M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_n = 0$$

La longitud de la cadena es n (el número de "eslabones"). Una serie de composición de M es una cadena maximal, esto es una en la cual no se puede insertar un submódulo extra; lo que es equivalente a decir que cada cociente M_{i-1}/M_i $(1\le i\le n)$ es simple.

3.1 PROPOSICION

Sea $M\in \text{Mod}\,\Lambda$ y supóngase que tiene una serie de composición de longitud n. Entonces toda serie de composición de M tiene longitud n, y toda cadena en M puede ser extendida a una serie de composición

Demostración:

Sea $l(M)$ el mínimo de las longitudes de las series de composición de M. Afirmamos, primero, que si N es un submódulo propio de M entonces $l(N)$ es menor que $l(M)$.

En efecto, sea $\{M_i\}$ una serie de composición de longitud mínima y considerense los submódulos $N_i = N \cap M_i$ de N. Luego $N_{i-1}/N_i \subseteq M_{i-1}/M_i$, pero este último es simple. Así que $N_{i-1}/N_i = M_{i-1}/M_i$ o bien $N_{i-1} = N_i$, entonces, removiendo los términos repetidos, obtenemos una serie de composición de N. Así que $\ell(N) \leq \ell(M)$. Si $\ell(N) = \ell(M) = n$, entonces $N_{i-1}/N_i = M_{i-1}/M_i$ para cada $i=1,\dots,n$. De modo que $M_{n-1} = N_{n-1}$, luego $M_{n-2} = N_{n-2}, \dots,$ y finalmente $M=N$.

Ahora bien, toda cadena en M tiene longitud menor o igual a $\ell(M)$, pues si $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_k = 0$ es una cadena de longitud k, por la afirmación anterior.

$$\ell(M) > \ell(M_1) > \cdots > \ell(M_k) = 0$$

de donde $k \leq \ell(M)$.

Por tanto, si M tiene una serie de composición de longitud k, entonces $k \leq \ell(M)$, pero $\ell(M)$ es el mínimo, de modo que $k = \ell(M)$.

Por otro lado, y finalmente, dada una cadena en M, si ésta tiene longitud n entonces es una serie de composición por lo dicho anteriormente. Si su longitud es estrictamente menor que $\ell(M)$, entonces no es una serie de composición, luego no es maximal, así que podemos insertar nuevos términos hasta que su longitud sea $\ell(M)$. //

3.2 PROPOSICION

Sea $M \in \mathrm{Mod}\Lambda$. Entonces M tiene una serie de composición si y solo si satisface ambas condiciones de cadena.

Demostración:

$\Rightarrow$. Todas las cadenas en M son de longitud finita, luego M satisface ambas condiciones de cadena.

$\Leftarrow$. Vamos a construir una serie de composicion como sigue. Sea $M_0 = M$, por I,1.13, M tiene un submódulo maximal $M_1 \subseteq M_0$. Análogamente M_1 tiene un submódulo maximal $M_2 \subseteq M_1$, y así sucesivamente. Luego, tenemos una cadena descendente la cual debe estacionarse (I,1.14), así que esta es la serie de composición que buscábamos. //

3.3 PROPOSICION

Si $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de módulos con serie de composición. Entonces

$$\ell(M) = \ell(M') + \ell(M'')$$

//

* De ahora en adelante supondremos que **Λ es artiniano**.

3.4 PROPOSICION (LEMA DE FITTING)

Sea $M \in \operatorname{mod}\Lambda$ y $f \in \operatorname{End}_\Lambda(M)$. Entonces para alguna n

$$M = \operatorname{Ker} f^n \oplus \operatorname{Im} f^n$$

Demostración:

Tenemos la siguiente cadena descendente $\operatorname{Im} f \geq \operatorname{Im} f^2 \geq \cdots$. Y otra ascendente $\operatorname{Ker} f \leq \operatorname{Ker} f^2 \leq \cdots$. Luego existe un natural n tal que

$$\operatorname{Ker} f^n = \operatorname{Ker} f^{2n} \quad \text{y} \quad \operatorname{Im} f^n = \operatorname{Im} f^{2n}$$

Ahora bien, sea $x \in M$. Entonces $f^n(x) = f^{2n}(y)$ para alguna $y \in M$. Por tanto

$$x = f^n(y) + (x - f^n(y)) \in \operatorname{Im} f^n + \operatorname{Ker} f^n$$

Por otro lado, sea $x \in \operatorname{Im} f^n \cap \operatorname{Ker} f^n$, de nuevo $x = f^n(y)$ para alguna $y \in M$. De donde

$$0 = f^n(x) = f^{2n}(y), \quad \text{por tanto} \quad x = f^n(y) = 0$$ //

3.5 COROLARIO

Sea $M \in \operatorname{mod}\Lambda$ inescindible y $f \in \operatorname{End}_\Lambda(M)$ entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) f es monomorfismo

b) f es epimorfismo

c) f es isomorfismo

d) f no es nilpotente //

3.6 COROLARIO

Sea $M \in \operatorname{mod}\Lambda$. Entonces M es inescindible si y solo si $\operatorname{End}_\Lambda(M)$ es un anillo local (es decir tiene un único ideal máximo). //

3.7 COROLARIO

Sean f_1 y $f_2 \in \operatorname{End}_\Lambda(M)$ donde M es inescindible. Si $f_1 + f_2$ es iso entonces f_1 es iso o f_2 es iso.

Demostración

Supongase que $f_1 + f_2$ es iso, luego existe $\phi \in \operatorname{End}_\Lambda(M)$ tal que $(f_1 + f_2)\phi = 1$. Ahora bien, es fácil ver que $f_1\phi$ y $f_2\phi$ conmutan, de donde

$$1=(f_1\phi+f_2\phi)^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(f_1\phi)^{k-i}(f_2\phi)^{k}$$

para todo natural k, por lo que si $f_1\phi$ y $f_2\phi$ son ambos nilpotentes, digamos $(f_1\phi)^{n_1}=(f_2\phi)^{n_2}=0$, entonces poniendo $k=n_1+n_2$, tendríamos que $1=0$, lo que no es posible, luego al menos uno de ellos es iso (3.5), así que f_1 es iso o bien f_2 es iso, como se quería. //

3.8 PROPOSICION

Todo $M\in \operatorname{mod}\Lambda$ es suma directa finita de submódulos inescindibles.

Demostración

Sea S la colección de submódulos no nulos de M tales que no son sumas directas de un número finito de submódulos inescindibles de M. Supóngase que S es no vacía, luego tiene un elemento minimal M'. Ahora bien M' es no nulo y no puede ser inescindible, luego $M'=M_1\oplus M_2$ con M_1 y M_2 submódulos propios de M'. Como M' es minimal M_1, M_2 no estan en S, por lo que son sumas directas de un número finito de submódulos inescindibles de M, pero entonces M' no esta en S, lo cual es una contradicción. Así que S es vacía y en particular M no esta en S, lo cual concluye la demostración. //

3.9 TEOREMA (KRULL-SCHMIDT)

Todo módulo $M\in \operatorname{mod}\Lambda$ tiene una única descomposición en suma directa de un número finito de módulos inescindibles en $\operatorname{mod}\Lambda$.

Es decir que $M=M_1\oplus\cdots\oplus M_r$, donde los M_i son inescindibles y si tenemos otra descomposición $M=N_1\oplus\cdots\oplus N_s$ con N_i inescindible entonces $r=s$ y existe una permutación de índices σ tal que $M_i\cong N_{\sigma(i)}$ para cada i.

Demostración:

Por la proposición anterior tal descomposición existe. Sea $N_1\oplus\cdots\oplus N_s$ otra descomposición de M en inescindibles. Usaremos inducción sobre r. El resultado es trivial para $r=1$. Supóngase que el Teorema es cierto para módulos que poseen una descomposición en suma directa en menos de r inescindibles.

Sean π_i y $\mu_i\in \operatorname{End}_\Lambda(M)$ definidas como las proyecciones en M_i y N_i respectivamente.

Luego $\{\pi_1,\ldots,\pi_r\}$ y $\{\mu_1,\ldots,\mu_s\}$ son sistemas completos de idempotentes ortogonales. De donde

$$\pi_1=\sum_{i=1}^{s}\pi_1\mu_i$$

Si los restringimos a M_1 obtenemos $$1_{M_1} = \sum_{i=1}^{s} \pi_1 \mu_i$$

Por 3.7 alguno de los sumandos es iso, sin pérdida de generalidad: $\pi_1\mu_1$ es un elemento invertible en $End_\Lambda(M_1)$. Luego π_1 es un isomorfismo de N_1 en M_1.

Afirmamos que $N_1+M_2+\cdots+M_r$ es directa. Sea $n_1+m_2+\cdots+m_r=0$ donde $n_1\in N_1$ y $m_i\in M_i$ para $i=2,\ldots,r$. De donde aplicando π_1 a ambos lados obtenemos $\pi_1(n_1)=0$, luego $n_1=0$ y $m_2=\cdots=m_r=0$ pues la suma de $M_2+\cdots+M_r$ era directa.

Sea $f=\mu_1\pi_1+\cdots+\pi_s$, demostraremos que f es un isomorfismo. En efecto, supongamos que $f(x)=0$. Entonces $f(x)=\mu_1\pi_1(x)+\cdots+\pi_s(x)=0$. Luego $\pi_1 f(x)=\pi_1\mu_1\pi_1(x)$ que es igual a cero, pero $\pi_1\mu_1$ es un isomorfismo restringido a M_1 y $\pi_1(x)$ esta en M_1, por lo que $\pi_1(x)=0$. Así que $\pi_2(x)+\cdots+\pi_s(x)=0$, luego $\pi_2(x)=\cdots=\pi_s(x)=0$, por tanto $x=0$. Consecuentemente f es mono, aplicando 3.4 f es iso. Además, es claro que $f(M_1)=N_1$. Finalmente

$$M/M_1 \cong f(M)/f(M_1) = M/N_1$$

Esto es $M_2\oplus\cdots\oplus M_r \cong N_2\oplus\cdots\oplus N_s$, aplicando la hipótesis de inducción: $r=s$ y existe una permutación de índices σ tal que $M_i \cong N_{\sigma(i)}$, lo cual completa la prueba //

Ahora bien, gracias a este teorema

$${}_\Lambda\Lambda = P_1\oplus\cdots\oplus P_r$$

con $P_1,\ldots,P_r$ módulos inescindibles. Además cada P_i es proyectivo. Mas aún estos son todos en el sentido de cualquier proyectivo inescindible P en $\mathrm{mod}\,\Lambda$ es isomorfo a algun P_i como lo demuestra la siguiente

3.10 PROPOSICION

$P_1,\ldots,P_r$ son representantes de los tipos de proyectivos inescindibles en $\mathrm{mod}\Lambda$.

Demostración:

Sea P un proyectivo inescindible en $\mathrm{mod}\Lambda$, luego $P\oplus M\cong\Lambda^m$ y descomponiendo M obtenemos una descomposición de Λ^m. Pero ya teníamos una descomposición $\Lambda^m = P_1^m\oplus\cdots\oplus P_r^m$

Luego por 3.9, P es isomorfo a algun P_i //

CAPITULO IV

TEOREMA DE AUSLANDER, RINGEL-TACHIKAWA

En conexión con el capítulo anterior presentamos este donde nuestro interés es ir más lejos, probaremos que si Λ es de Artin no hay inescindibles grandes si **mod** Λ tiene un número finito de tipos de inescindibles. Más aún, veremos que que en cualquier categoría de módulos con estas condiciones todos los módulos son suma directa de inescindibles.

Primero generalizaremos el lema de Nakayama, para ello y basados en 2.29 damos la siguiente definición.

4.1 DEFINICION

Un anillo se llamará semiprimario si J es nilpotente y Λ/J es semisimple.

Por 2.29 queda claro que todo lo que se diga aquí de los semiprimarios se aplica a los artinianos. De ahora en adelante, al menos que se diga lo contrario y hasta 4.14, * **Λ será un anillo semiprimario**

4.2 PROPOSICION

Para todo $M \in \text{Mod}\,\Lambda$, $JM = M$ implica $M = 0$

Demostración:

Sea r el índice del nilpotencia de J entonces $M = JM = J^2M = \cdots = J^rM = 0$ //

4.3 COROLARIO

Para todo $M \in \text{Mod}\,\Lambda$, $JM \ll M$.

//

4.4 COROLARIO

Para todo $M \in \text{Mod}\,\Lambda$, $\text{Rad}\,M = JM$

Demostración:

Sabemos que $JM \subseteq \mathrm{Rad}M$ (véase 1.8 y aplíquese 4.3). Ahora bien, como Λ/J es semisimple, entonces (2.26) M/JM es semisimple como Λ-módulo, luego

$$\mathrm{Rad}(M/JM)=0$$

de modo que $\mathrm{Rad}M \subseteq JM$. //

4.5 COROLARIO

Para todo $M \in \mathrm{Mod}\Lambda$, $M/\mathrm{Rad}M$ es semisimple //

Veamos ahora cómo se comportan los idempotentes en Λ

4.6 PROPOSICION

En Λ los idempotentes se levantan módulo J (e.d. para cada idempotente ϕ en Λ/J hay un idempotente e en Λ tal que $e+J=\phi$).

Demostración:

Sea $\phi+J$ un idempotente en Λ/J, luego $\phi+J=\phi^2+J$ y $\phi-\phi^2\in J$. Por tanto
$$0=(\phi-\phi^2)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\phi^{n-k}(-\phi^2)^k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\phi^{n+k}=\phi^n-\phi^{n+1}\Big(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\phi^{k-1}\Big)$$
para algún n en los naturales.

Sea $t:=\Big(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\phi^{k-1}\Big)$, luego $\phi^n=\phi^{n+1}t$ y $\phi t=t\phi$. Definimos $e:=\phi^n t^n$, por tanto
$$e=\phi^n t^n=(\phi^{n+1}t)t^n=\phi^{n+1}t^{n+1}=\phi^{n+2}t^{n+2}=\dots=\phi^{2n}t^{2n}=e^2$$
de donde e es idempotente en Λ.

Ahora bien,
$$\phi+J=\phi^n+J=\phi^{n+1}t+J=(\phi^{n+1}+J)(t+J)=(\phi+J)(t+J)=\phi t+J$$
luego
$$\phi+J=(\phi+J)^n=(\phi t+J)^n=\phi^n t^n+J=e+J$$
//

4.7 LEMA

Sea ${}_\Lambda S$ un módulo simple, entonces tiene cubierta proyectiva si y sólo si S es isomorfo a $\Lambda e/Ie$ donde e es idempotente y $I\subseteq J$

Demostración:

$\Leftarrow$. Sea $\pi:\Lambda e \twoheadrightarrow \Lambda e/Ie$ la proyección canónica, como $I\subseteq J$, luego

$Ie \subseteq Je \ll \Lambda e$. Así que $Ie \ll \Lambda e$ y entonces Λe es cubierta proyectiva de

$$\Lambda e / Ie \cong S$$

$\Rightarrow$. Sea $p: P \twoheadrightarrow S$ la cubierta proyectiva de S. Por ser simple existe $f: {}_\Lambda\Lambda \longrightarrow S$ epi, aplicando 1.18: P es sumando directo de Λ, entonces es de la forma Λe (vease 1.21). Ahora bien, sea I el Kernel de p, como $I \ll \Lambda e$ tenemos que

$$I \subseteq Rad(\Lambda e) \subseteq J$$

pero $Ie = I$, luego $S \cong P/\ker p = \Lambda e / I = \Lambda e / Ie$ //

4.8 TEOREMA

Λ tiene un sistema $\{e_1, \dots, e_n\}$ completo de idempotentes ortogonales primitivos. Más aún todo simple en Mod Λ es de la forma $\Lambda e_i / Je_i$ (en particular tiene cubierta proyectiva).

Demostración:

Por 1.21 y 1.22 Λ / J tiene un sistema $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ completo de idempotentes ortogonales primitivos. Ahora bien por 4.6 cada ϕ_i se levanta a un idempotente $e'_i \in \Lambda$, como

$$(\Lambda / J)\phi_i \cong \Lambda e'_i / Je'_i$$

este tiene a $\Lambda e'_i$ como cubierta proyectiva (4.7) y por tanto

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \Lambda e'_i$$

es cubierta proyectiva de Λ / J (1.20). Pero por otro lado Λ también es cubierta proyectiva -via la proyección canónica- de Λ / J. Así que por la unicidad

$$\Lambda \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \Lambda e'_i$$

Pero esto nos conduce, aplicando nuevamente 1.21, a un sistema $\{e_1, \dots, e_n\}$ completo de idempotentes ortogonales, los cuales son primitivos gracias a que los ϕ_i lo son. Observese además que los simples en Mod Λ / J son los que aparecen en su descomposición (hasta isomorfía), vease 2.10, por 2.25 estos son justamente los de Λ, luego tenemos la segunda afirmación. //

4.9 TEOREMA

Todo $M \in$ Mod Λ tiene cubierta proyectiva

Demostración:

Como se vió en 4.5 $M / RadM$ es semisimple, entonces

$$M/\mathrm{Rad}\,M \cong \bigoplus_{i\in I} S_i \text{ , con } S_i \text{ simple}$$

Pero cada S_i tiene cubierta proyectiva P_i (4.8). Por tanto

$$\bigoplus_{i\in I} P_i$$

es cubierta proyectiva de $M/\mathrm{Rad}\,M$.

Ahora bien, considérese el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & M \arrow[d, "\pi"] \\
X \arrow[r, "\phi"] & \bigoplus_{i\in I} P_i \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "f=\bigoplus_{i\in I} f_i"'] & M/\mathrm{Rad}\,M
\end{tikzcd}$$

Por ser $\bigoplus_{i\in I} P_i$ proyectivo, existe h tal que el diagrama conmuta, pero π es superfluo y f es epi, así que h es epi. Afirmamos que h es superfluo: en efecto, sea ϕ un morfismo de un Λ-módulo X en la suma de los P_i y supóngase $h\phi$ epi, por tanto $\pi h\phi$ es epi, luego $f\phi$ es epi, pero f es superfluo, así que ϕ es epi, como se quería. De modo que

$$\bigoplus_{i\in I} P_i$$

es la cubierta proyectiva deseada. //

Ahora sí, estamos en posibilidad de enunciar y probar uno de los resultados importantes que hemos elegido para este capítulo.

4.10 TEOREMA

Sea $P \in \mathrm{Mod}\,\Lambda$ proyectivo, entonces existe $\{P_i\}_{i\in I}$ una familia de proyectivos inescindibles finitamente generados tal que

$$P \cong \bigoplus_{i\in I} P_i$$

Demostración:

Por 4.8 Λ tiene un sistema $\{e_1,\ldots,e_n\}$ completo de idempotentes ortogonales primitivos, luego Λe_i es un proyectivo inescindible finitamente generado (1.23). Ahora bien, por un lado P es cubierta proyectiva de $P/\mathrm{Rad}\,P$, pero éste es semisimple, es decir

$$P/\mathrm{Rad}\,P \cong \bigoplus_{j\in J} S_j \text{ , con } S_j \text{ simple.}$$

Pero S_j es de la forma $\Lambda e_{i_j}/J e_{i_j}$, $1 \le i_j \le n$, luego $\bigoplus_{j\in J} \Lambda e_{i_j}$ es también cubierta proyectiva de $P/\mathrm{Rad}\,P$, por la unicidad de ésta

$$P \cong \bigoplus_{j\in J} \Lambda e_{i_j}$$

como se quería

//

Obsérvese, que en otras palabras 4.10 nos dice que en **ModΛ** no hay proyectivos inescindibles "grandes" (e.d. que no sean finitamente generados). Otra de las características que tiene, recuérdese que estamos suponiendo que Λ es semiprimario, es que los planos son proyectivos como mostraremos a continuación después de un **lema**.

Un $N \in$ ModΛ (donde Λ aquí es cualquier anillo) se llama **plano** si el funtor $T_N : M \longmapsto M \otimes_\Lambda N$ es **exacto** (esto es, sucesiones exactas cortas van a sucesiones exactas cortas).

4.11 LEMA

Sea P un módulo plano, entonces

$$\mu : J \otimes_\Lambda P \longrightarrow JP$$

definido por $(j \otimes_\Lambda p) \longmapsto jp$ es un isomorfismo.

Demostración:

Como P es plano el renglón superior del siguiente diagrama es exacto

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & J\otimes_\Lambda P & \to & \Lambda \otimes_\Lambda P & \to & \Lambda/J \otimes_\Lambda P & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \\ 0 & \to & JP & \to & P & \to & P/JP & \to & 0 \end{array}$$

donde γ es el isomorfismo canónico y φ está definida por $(\bar{\lambda} \otimes_\Lambda m) \longmapsto \overline{\lambda m}$, es fácil cerciorarse que este último es un isomorfismo y que los cuadrados conmutan, luego aplicando el lema del cinco obtenemos lo que quería

//

4.12 PROPOSICION

En ModΛ todo plano es proyectivo

Demostración:

Sea $_\Lambda U$ plano y (P, f) su cubierta proyectiva (cfr. 4.9). Como $K := \operatorname{Ker} f$ es superfluo en P, entonces $K \subseteq \operatorname{Rad} P = JP$ (4.4). Ahora bien U y P son planos –todo proyectivo es plano– de donde

$$\mu_1 : J \otimes_\Lambda P \longrightarrow JP \quad \text{y} \quad \mu_2 : J \otimes_\Lambda U \longrightarrow JU$$

definidas en 4.11 son isomorfismos.

Además, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} & & JP \arrow[r, "f|_{JP}"] & JU & \\ J\otimes_\Lambda K \arrow[r, "J\otimes i"'] & J\otimes_\Lambda P \arrow[ur, phantom] \arrow[r, "J\otimes f"'] & J\otimes_\Lambda U \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & JP & \xrightarrow{f|_{JP}} & JU & & \\ & & \uparrow{\scriptstyle \mu_1} & & \uparrow{\scriptstyle \mu_2} & & \\ J\otimes_\Lambda K & \xrightarrow[J\otimes i]{} & J\otimes_\Lambda P & \xrightarrow[J\otimes f]{} & J\otimes_\Lambda U & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Por tanto
$$\begin{aligned} K = \operatorname{Ker} f &= \operatorname{Ker}(f|_{JP}) \\ &= \mu_1(\operatorname{Ker}(J\otimes f)) \\ &= \mu_1(\operatorname{Im}(J\otimes i)) \\ &= JK \end{aligned}$$

pero usando 4.2, $K=0$, luego $U \cong P$, de donde U es proyectivo. //

Enunciaremos un lema que utilizaremos más adelante y cuya demostración omitimos por no salirnos del contexto.

4.13 LEMA

Sea $(M_i, \mu_i)_{i\in I}$ un sistema directo de módulos planos entonces
$$\varinjlim M_i \text{ es plano}$$
//

4.14 DEFINICION

Un anillo Λ se llama de Tipo de Representación Finito, abreviadamente t.r.f., si el esqueleto de indΛ –la subcategoría de los inescindibles de modΛ– es finito.

Además, si Λ es t.r.f., denotaremos por $\mathbf{T}$ a la suma de una copia de cada objeto de **indΛ**, el cual llamaremos **el módulo de Auslander. Así** mismo Γ denotará el anillo opuesto de los endomorfismos de $\mathbf{T}$, e.d.

$$\Gamma = \operatorname{End}_\Lambda({}_\Lambda\mathbf{T})^{op}$$

que consecuentemente se llamará **el anillo de Auslander**

$\mathbf{T}$ resulta ser un **(Λ, Γ^{op})-bimódulo**. Más aun **$\operatorname{Hom}_\Lambda(\mathbf{T}, \_)$** es un funtor de la categoría **ModΛ** en **ModΓ**.

Vamos a probar que $\mathbf{Hom}_\Lambda(\mathbf{T},\_)$ es fiel y pleno. Recordemos que sin ser necesaria la referencia a $\mathbf{T}$, el funtor $\mathbf{Hom}_\Lambda(M,\_)$ conmuta con productos arbitrarios. Además, si M es finitamente generado, como es nuestro caso, también conmuta con sumas arbitrarias.

Por otro lado, es un hecho muy conocido, que si $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia de Λ-módulos con la propiedad de que para cada $i,j\in I$ existe $k\in I$ de modo que

$$M_i+M_j\subseteq M_k, \text{ entonces } \bigcup_{i\in I} M_i \cong \varinjlim M_i$$

En particular todo módulo es el límite directo de sus submódulos finitamente generados, donde las μ_i y μ_{ij} son las respectivas inclusiones. Con esta observación, podemos formular la siguiente.

4.16 PROPOSICION

Sea $M\in \mathrm{Mod}\Lambda$ y $\{M_i\}_{i\in I}$ la familia de submódulos de M finitamente generados, entonces

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathbf{T},M)\cong \varinjlim(\mathbf{T},M_i)$$

Demostración

Por un lado $M_i\subseteq M=\varinjlim M_i$ para cualquier $i\in I$, pero $\mathbf{Hom}_\Lambda(\mathbf{T},\_)$ es exacto izquierdo, así que

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathbf{T},M_i)\subseteq \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathbf{T},M)$$

por tanto

$$\bigcup_{i\in I}\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathbf{T},M_i)\subseteq \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathbf{T},M)$$

Sea $f\in \mathbf{Hom}_\Lambda(\mathbf{T},M)$ y $\{t_1,\dots,t_n\}$ un conjunto de generadores para $\mathbf{T}$. Ahora bien, para cada t_i existe un $j\in I$ y x_i en M_j tal que $\mu_j(x_i)=f(t_i)$, luego podemos encontrar una $k\in I$ con la propiedad de que $\{f(t_1),\dots,f(t_n)\}\subseteq M_k$, pero μ_k es un monomorfismo, de donde $f\in \mathbf{Hom}_\Lambda(\mathbf{T},M_k)$ y consecuentemente tenemos la otra contención.

Por último obsérvese que $\{\mathbf{Hom}_\Lambda(\mathbf{T},M_i)\}_{i\in I}$ cumple con la condición expuesta en el párrafo anterior a esta proposición. //

De aquí en lo que resta de este capítulo* **Λ será un <u>anillo artiniano de t.r.f.</u>**

4.17 LEMA

$\mathbf{T}$ es un generador de mod Λ.

Demostración:

Por el Teorema de Krull-Schmidt (3.9)

$$\Lambda \cong \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$$

donde P_i es inescindible y finitamente generado, por tanto es un sumando directo de $\mathbf{T}$. Así que

$$\mathbf{T} \longrightarrow P_i \longrightarrow 0$$

pero entonces

$$\mathbf{T}^n \longrightarrow \Lambda \cong \bigoplus_{i=1}^{n} P_i \longrightarrow 0$$

//

4.18 PROPOSICION

Sea $f: M \to N$ un homomorfismo no nulo, entonces existe $h \in Hom_\Lambda(\mathbf{T}, M)$ tal que $fh \neq 0$

Demostración:

Como $\mathbf{T}$ genera a M, luego $M = \sum_{h \in Hom_\Lambda(\mathbf{T}, M)} Im\, h$

Ahora bien, supongamos por el contrario que $fh = 0$ para cualquier $h \in Hom_\Lambda(\mathbf{T}, M)$, de modo que

$$f(M) = f\left(\sum_h Im\, h\right) = \sum_h fh(\mathbf{T}) = 0$$

lo que querría decir que f es nulo, contrario a la hipótesis.

//

4.19 LEMA

Sea $M \in Mod\,\Lambda$. Entonces existe un conjunto I y $\Psi: \mathbf{T}^{(I)} \twoheadrightarrow M$ un epimorfismo talque toda $f \in Hom_\Lambda(\mathbf{T}, M)$ se factoriza a través de Ψ, es decir existe $\varphi: \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}^{(I)}$ tal que

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{T} \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "f"] & \\ \mathbf{T}^{(I)} \arrow[r, "\Psi"'] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración:

Sea $I := Hom_\Lambda(\mathbf{T}, M)$ y Ψ definida como sigue

$$(x_\phi)_{\phi \in I} \longmapsto \sum_{\phi \in I} \phi(x_\phi)$$

Por las propiedades de la suma y porque $\mathbf{T}$ genera a M, Ψ resulta ser un epimorfismo. Ahora bien si $f \in \mathbf{Hom}_\Lambda(\mathbf{T}, M)$ basta tomar a φ como la f-ésima inclusión.

//

4.20 PROPOSICION

$\mathbf{Hom}_\Lambda(\mathbf{T}, \_)$ es fiel y pleno.

Demostración:

Sea $M, N \in \mathrm{Mod}\,\Lambda$ y $f \in \mathbf{Hom}_\Lambda(M,N)$, supongamos que $f_* := \mathbf{Hom}_\Lambda(\mathbf{T}, f) = 0$, entonces para cualquier morfismo h de $\mathbf{T}$ en M, $fh = 0$, por 4.18 $f = 0$. Con lo cual nuestro funtor es fiel.

Para probar que es pleno, lo dividiremos en tres casos. Por comodidad escribiremos $(T, \_)$ en lugar de $\mathbf{Hom}_\Lambda(\mathbf{T}, \_)$.

Nuevamente, sean $M, N \in \mathrm{Mod}\,\Lambda$

I. Caso $M = \mathbf{T}$

Sea $\Phi : (T,T) \longrightarrow (T,N)$, definimos $\varphi := \Phi(1_T)$

$$\Phi(f) = \Phi(1_T \circ f) = \Phi(f 1_T) = f\Phi(1_T) = f\varphi = \varphi \circ f = \varphi_*(f)$$

de modo que $\Phi = \varphi_*$

II. Caso $M = \mathbf{T}^{(I)}$

Sea $\Phi : (T, T^{(I)}) \longrightarrow (T,N)$. Ahora bien, para cada $i \in I$, tenemos la inclusión $\overline{v_i} : (T,T) \longrightarrow (T,T)^{(I)}$, por ser finitamente generado $(T, T^{(I)}) = (T,T)^{(I)}$ y de hecho $\overline{v_i} = v_{i*}$, donde $v_i : T \longrightarrow T^{(I)}$ es la inclusión correspondiente. Luego por el caso I existe $\varphi_i : T \longrightarrow N$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
(T,T) \arrow[r, "v_{i*}"] \arrow[dr, "\varphi_i = \varphi_{i*}"'] & (T, T^{(I)}) \arrow[d, "\Phi"] \\
& (T,N)
\end{tikzcd}$$

Por otro lado $\{\varphi_i : T \longrightarrow N\}_{i \in I}$ define $\varphi : T^{(I)} \longrightarrow N$ ($\varphi v_i = \varphi_i$ para $i \in I$). Afirmamos que $\varphi_* = \Phi$. En efecto, sea $i \in I$ por tanto

$$\varphi_* v_{i*} = (\varphi v_i)_* = \varphi_{i*} = \varphi_i = \Phi v_{i*}.$$

III. Caso M arbitrario

Sea $\Phi : (T,M) \longrightarrow (T,N)$ y Ψ como en el lema 4.19, luego tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} (T,T^{(I)}) \arrow[r, "\psi_*"] \arrow[dr, "\pi_*"'] & (T,M) \arrow[d, "\phi"] \\ & (T,N) \end{tikzcd}$$

gracias al caso II.

Considerese el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & & & T \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "\varphi"'] & \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\psi \arrow[r, "\lambda"] & T^{(I)} \arrow[r, two heads, "\psi"] \arrow[d, "\pi"] & M \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\phi"] & 0 \\ & & N & & \end{tikzcd}$$

Sea $f \in (T,M)$ por 4.19 existe φ tal que $\psi\varphi = f$. Por la propiedad del cónucleo existe ϕ tal que $\pi = \phi\psi$, luego

$$\Phi(f) = \Phi(\psi\varphi) = \Phi\,\psi_*(\varphi) = \pi_*(\varphi) = \pi\varphi = \phi f = \phi_*(f)$$

lo cual completa la prueba. //

4.21 PROPOSICION

Sea $N \in \operatorname{ind}\Lambda$, entonces ${}_\Gamma\operatorname{Hom}_\Lambda(T,N)$ es proyectivo inescindible

Demostración:

Por un lado

$${}_\Gamma\Gamma = {}_\Gamma\operatorname{Hom}_\Lambda(T,T) = {}_\Gamma\operatorname{Hom}_\Lambda(T, \bigoplus_{i\in I} N_i) = \bigoplus_{i\in I} {}_\Gamma\operatorname{Hom}_\Lambda(T,N_i)$$

por tanto ${}_\Gamma\operatorname{Hom}_\Lambda(T,N_i)$ es proyectivo para cada $N_i \in \operatorname{ind}\Lambda$

Ahora bien, por ser $\operatorname{Hom}_\Lambda(T,\_)$ fiel y pleno, refleja isomorfismos, por tanto

$$\operatorname{Hom}_\Gamma(\operatorname{Hom}_\Lambda(T,N_i), \operatorname{Hom}_\Lambda(T,N_i)) \cong \operatorname{Hom}_\Lambda(N_i,N_i)$$

pero el segundo término es un anillo local (3.6), luego el primero también, y así nuevamente por 3.6 $\operatorname{Hom}_\Lambda(T,N_i)$ es inescindible.

//

4.22 COROLARIO

Si M es finitamente generado ${}_\Gamma\operatorname{Hom}_\Lambda(T,M)$ es proyetivo. //

Vamos a caracterizar al Radical del anillo de Auslander $J(\Gamma)$

4.23 LEMA

Sea Λ un anillo arbitrario y supóngase que $\Lambda = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$ donde $\mathrm{End}_\Lambda P_i$ es un anillo local para cada $1 \le i \le n$. Entonces $\gamma \in J$ si y sólo si $f^\gamma \in \mathrm{End}_\Lambda(\Lambda)$ definido por $x \mapsto x\gamma$ tiene la propiedad de que $\pi_j f^\gamma \sigma_i : P_i \to P_j$ no es iso para $1 \le i, j \le n$.

Demostración:

Como $f^\gamma(1) = \gamma$, entonces $\gamma \in J$ si y sólo si $f^\gamma(\Lambda) \subseteq J$. Pero por 1.5 $J = \bigoplus_{i=1}^{n} JP_i$ así que $f^\gamma(\Lambda) \subseteq J$ si y sólo si $\pi_j f^\gamma(\Lambda) \subseteq JP_j$ para $j = 1, \ldots, n$. Ahora bien JP_j es el único submódulo maximal de P_j, luego $\pi_j f^\gamma(\Lambda) \subseteq JP_j$ si y sólo si para cada inclusión $\sigma_i : P_i \to \Lambda$ se tiene que $\pi_j f^\gamma \sigma_i (P_i) \subseteq JP_j$, o equivalente, si $\pi_j f^\gamma \sigma_i$ no es un isomorfismo para $1 \le i, j \le n$

//

De aquí en adelante supondremos que $T = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i$, es decir que $N_1, \ldots, N_n$ son los representantes de los tipos de inescindibles en $\mathrm{mod}\Lambda$.

4.24 PROPOSICION

$f \in J(\Gamma)$ si y sólo si $f_{ij} := \pi_j f \sigma_i : N_i \to N_j$ no es iso para $1 \le i, j \le n$.

Demostración:

Sea $f \in \Gamma$, luego aplicando $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, \_)$ a f obtenemos que $f_* \in \Gamma^{op}$, como nuestro funtor es fiel y pleno, $f \in J(\Gamma)$ si y solo si $f_* \in J(\Gamma^{op}) = J(\Gamma)$ por ser bilateral. Ahora bien, Γ cumple con las hipótesis de 4.23 (vease la demostración de 4.21), luego $f_* \in J(\Gamma)$ si y sólo si $F^{f_*} : \Gamma \to \Gamma$ definido por $\phi \mapsto \phi f_*$ tiene la propiedad de que $\pi_{j*} f_* \sigma_{i*} : \mathrm{Hom}_\Lambda(T, N_i) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T, N_j)$ no es iso, pero esto se da si y sólo si f_{ij} no es iso, pues el funtor es fiel y pleno

//

El siguiente paso será probar que Γ es semiprimario, por lo que nuestro objetivo inmediato, es probar que $J(\Gamma)$ es nilpotente.

4.25 LEMA

Sea $\mathcal{F}$ una familia de módulos inescindibles tal que $l(M) = n$, para toda

M en $\mathcal{Y}$. Si ϕ es la composición

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{2^m}} M_{2^m+1}$$

de 2^m no isomorfismos con M_i en $\mathcal{Y}$, entonces $\ell(\phi(M_1)) \leq n-m-1$ para toda $m \leq n-1$.

Demostración:

Usaremos inducción sobre m, el caso $m=0$ es trivial. Supongamos cierta la proposición para m. Sea h la composición

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{2^{m+1}}} M_{2^{m+1}+1}$$

de 2^{m+1} no isomorfismos. Definimos $\phi = f_{2^{m+1}} \cdots f_{2^m+1}$ y $\phi' = f_{2^m} \cdots f_1$

Por hipótesis de inducción: $\ell(Im\phi) \leq n-m-1$ y $\ell(Im\phi') \leq n-m-1$. Sin pérdida de generalidad $\ell(h(M_1)) \neq 0$. Como $h(M_1) = \phi\phi'(M_1)$, luego $h(M_1) \subseteq Im\phi$, de modo que

$$\ell(h(M_1)) \leq \ell(Im\phi) \leq n-m-1$$

Ahora si $\ell(h(M_1)) = n-m-1$, se tendrían las siguientes afirmaciones:

I. $\phi|_{Im\phi'}$ es monomorfismo.

En efecto

$$0 \longrightarrow Ker\, \phi|_{Im\phi'} \longrightarrow Im\phi' \xrightarrow{\phi|_{Im\phi'}} h(M_1) \longrightarrow 0$$

es exacta, luego $\ell(Im\phi') = \ell(Ker\, \phi|_{Im\phi'}) + \ell(h(M_1))$, de modo que $\ell(Ker\, \phi|_{Im\phi'})$ es cero.

II. $Im\phi = Imh$

Tenemos que $Imh \subseteq Im\phi$, luego $n-m-1 = \ell(Imh) \leq \ell(Im\phi) \leq n-m-1$

III. $M_{2^m+1} = Im\phi' \oplus Ker\phi$

Consecuencia de I y II.

Por otro lado f_{2^m+1} no es isomorfismo pero entonces tampoco es mono, de donde $0 \neq Ker f_{2^m+1} \subseteq Ker\phi$. Además, la $Im\phi'$ no es nula pues $h \neq 0$, lo que contradice el hecho de que M_{2^m+1} es inescindible. Por tanto $\ell(h(M_1)) < n-m-1$, es decir

$$\ell(h(M_1)) \leq n-(m+1)-1$$

//

Si $M_1, \ldots, M_{2^n+1}$ son módulos inescindibles tales que $\ell(M_i) \leq n$, es fácil cerciorarse que se puede encontrar $1 \leq r \leq n$ tal que al menos $2^{r-1}+1$ módulos de los 2^n+1 tienen longitud r. En base a esto enunciamos la siguiente

4.26 PROPOSICION

Sea ϕ la composición

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \longrightarrow M_{2^n} \xrightarrow{f_{2^n}} M_{2^n+1}$$

de 2^n no isomorfismos con M_i inescindible y $\ell(M_i) \leq n$. Entonces ϕ es igual a cero.

Demostración:

Por la observación que apuntábamos arriba $2^{r-1}+1$ módulos tienen longitud r, para alguna $1 \leq r \leq n$. Aplicando 4.25

$$\ell(\phi(M_1)) \leq r-(r-1)-1 = 0$$

Así que $\phi(M_1)=0$, luego ϕ es nula. //

4.27 PROPOSICION

El radical de Γ es nilpotente. Mas aún $J(\Gamma)^{2^m}=0$, donde m es la longitud del módulo de Auslander.

Demostración:

Sean $f^1,\dots,f^{2^m} \in J(\Gamma)$, con cada una de ellos asociamos una matriz

$$A^i = (f^i_{ij})_{ij}$$

donde f_{ij} esta definida como en 4.24. Luego $f^1\cdots f^{2^m} = f^{2^m}\circ\cdots\circ f^1$ y este producto tiene asociada la matriz $A = A^1\cdots A^{2^m}$, es decir

$$A = \left[\left(\sum_{a_{2^m-1}=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{a_1=1}^{n}\left(f^{2^m}_{ja_{2^m-1}}\circ\cdots\circ f^1_{a_1 i}\right)\right)\right)\right)_{ij}\right]$$

pero sabemos que cada $f^k_{\alpha\beta}$ es no isomorfismo (4.24), luego por 4.26

$$f^{2^m}_{ja_{2^m-1}}\circ\cdots\circ f^1_{a_1 i} = 0$$

es decir $A=0$, de donde el producto de las f^i también. //

4.28 PROPOSICION

$\Gamma/J(\Gamma)$ es semisimple.

Demostración:

Sea $e_i = \sigma_i \circ \pi_i$, luego $\{e_1,\dots,e_n\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales de Γ, además cada e_i es primitivo, **debido a 4.22 y al**

hecho de que $\Gamma e_i \cong Hom_\Lambda(\mathbb{T}, N_i)$
y este último es inescindible (4.21).

Mas aun $e_i \Gamma e_i$ es un anillo local, pues

$$e_i \Gamma e_i \cong Hom_\Lambda(N_i, N_i)$$

(véase 3.6). Luego $\Gamma e_i / J(\Gamma) e_i$ es simple, de donde

$$\Gamma / J(\Gamma) = \bigoplus_{i=1}^{n} \Gamma e_i / J(\Gamma) e_i \qquad //$$

4.29 COROLARIO

Γ es un anillo semiprimario //

Tenemos ahora preparado el terreno para probar

4.30 TEOREMA (AUSLANDER, RINGEL-TACHIKAWA)

Sea Λ un anillo artiniano de t.r.f.. Entonces todo $M \in Mod\,\Lambda$ es suma directa de inescindibles finitamente generados.

Demostración:

Sea $M \in Mod\,\Lambda$, luego $M \cong \varinjlim M_i$ donde los M_i son los submódulos finitamente generados de M. De donde por 4.16

$$_\Gamma Hom_\Lambda(\mathbb{T}, M) \cong \varinjlim\, _\Gamma Hom_\Lambda(\mathbb{T}, M_i)$$

Pero $_\Gamma Hom_\Lambda(\mathbb{T}, M_i)$ es proyectivo (4.22), por tanto plano, luego $_\Gamma Hom_\Lambda(\mathbb{T}, M)$ es plano (4.13), consecuentemente proyectivo (4.29 y 4.12), y por este motivo (4.29, 4.10 y 4.21)

$$_\Gamma Hom_\Lambda(\mathbb{T}, M) \cong \bigoplus_{i \in I} {}_\Gamma Hom_\Lambda(\mathbb{T}, N_i)$$

con $N_i \in ind\,\Lambda$. Luego

$$\bigoplus_{i \in I} {}_\Gamma Hom_\Lambda(\mathbb{T}, N_i) \cong {}_\Gamma Hom_\Lambda(\mathbb{T}, \bigoplus_{i \in I} N_i)$$

Como el funtor es fiel y pleno (4.20) $\quad M \cong \bigoplus_{i \in I} N_i \qquad //$

Cerramos este capítulo con una observación: **Si Λ es artiniano de t.r.f. en $Mod\,\Lambda$ no hay inescindibles que no sean finitamente generados.**

CAPITULO V

ANILLOS DE NAKAYAMA

A lo largo de este capítulo Λ denotará un **anillo semiprimario**, a menos que se diga otra cosa. Recordemos que en este caso el radical de Λ es nilpotente y el cociente Λ/J es semisimple.

5.1 DEFINICION

Sea $M \in \mathrm{Mod}\Lambda$, diremos que éste es **uniserial** si tiene una única serie de composición.

Obsérvese que esto es equivalente a decir que el retículo de submódulos de M es una cadena finita. Como consecuencias directas de la definición tenemos que M es Artiniano y Noetheriano, mas aún, resulta ser inescindible.

5.2 PROPOSICION

Sea $0 \longrightarrow U'' \longrightarrow U \longrightarrow U' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de Λ-módulos, entonces si U es uniserial también lo son U' y U'' //

Caracterizamos ahora a los módulos uniseriales

5.3 PROPOSICION

Las siguientes afirmaciones para $M \in \mathrm{Mod}\Lambda$ son equivalentes:

a) M es uniserial.

b) $0 = J^k M \subseteq \cdots \subseteq J^2 M \subseteq JM \subseteq M$ es una serie de composición para M.

c) $J^{n-1}M/J^n M$ es simple o cero para cada número natural n.

d) JM es uniserial y máximo.

Demostración:

a) $\Leftrightarrow$ d), y b) $\Leftrightarrow$ c). son ambas claras.

a) y d) $\Rightarrow$ b). Por hipótesis M/JM es simple, como JM es uniserial, J^2M también lo es y es máximo en JM, luego JM/J^2M es simple, aplicando inducción obtenemos lo que se quiere.

b) y c) $\Rightarrow$ a). Por inducción sobre k. Si $k=0$ estamos en el caso de M simple. Supongamos que es cierto para $\ell<k$ y sea

$$M_0=M\supseteq M_1\supseteq\cdots\supseteq M_k=0$$

una serie de composición para M, luego por hipótesis $JM=M_1$, así que

$$M_n=J^nM \quad \text{para cada } 1\leq n\leq k$$

//

5.4 DEFINICION

Sea $M\in \operatorname{Mod}\Lambda$, entonces **la longitud de Loewy de M $\ell\ell(M)$** se define como el mínimo de los enteros k tal que $J^kM=0$

Consecuentemente si M es uniserial $\ell(M)=\ell\ell(M)$. Además si $M\twoheadrightarrow N$ es epi $\ell\ell(N)\leq\ell\ell(M)$.

5.5 LEMA

Sea $\{N_i\}_{i\in I}$ una familia de submódulos de un Λ-módulo M, y supóngase que $M=\sum_{i\in I}N_i$, entonces

$$\ell\ell(M)=\max_{i\in I}\ell\ell(N_i)$$

//

5.6 DEFINICION

Si P es un sumando inescindible de Λ, diremos que éste es **un sumando dominante** de Λ si $\ell\ell(P)=\ell\ell(\Lambda)$.

Gracias al lema 5.5 tenemos garantizado la existencia de al menos un sumando dominante de Λ.

5.7 PROPOSICION

Si $U\in\operatorname{Mod}\Lambda$ es uniserial entonces es cociente de un proyectivo inescindible.

Demostración:

Por 5.3 M/JM es simple, luego por 4.8 tiene cubierta proyectiva, la cual es un proyectivo inescindible. //

5.8 PROPOSICION

Si Λ es artiniano y los sumandos dominantes de Λ/J^k son Λ/J^k-inyectivos para cada k, entonces todo $M \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ es suma directa de uniseriales.

Demostración:

Procederemos del modo siguiente: primero para los sumandos inescindibles de Λ.

Sea P uno de tales sumandos, luego nos bastará ver que $J^{k-1}P/J^kP$ es simple (cfr. 5.3 c)). Ahora bien, supongamos que no es cero y sea

$$Y := {}_{\Lambda/J^k}(P/J^kP)$$

entonces Y es un sumando dominante de Λ/J^k, de modo que es Λ/J^k-inyectivo, por lo que $\mathrm{Soc}(Y)$ es simple, como $J^{k-1}/J^kP \subseteq Y$ y $J(J^{k-1}P/J^kP)=0$ entonces $J^{k-1}P/JP \subseteq \mathrm{Soc}(Y)$, pero no es cero luego es simple.

Ahora bien, sea $M \in \mathrm{mod}\,\Lambda$, luego existe un entero n y un epimorfismo

$$\Lambda^n \twoheadrightarrow M \rightarrow 0$$

consideremos la descomposición de Λ en proyectivos inescindibles P_i, de modo que

$$M = \sum_{\substack{h \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P_i, M) \\ i=1,\dots,n}} \mathrm{Im}\,h$$

por tanto, M es suma de uniseriales. Sea $X \leq M$ uniserial, tal que $\ell(X) = k$ sea maximal. Como J^kX y J^kM son nulos, la inclusión $i: X \rightarrow M$ de Λ-módulos es también de Λ^k-módulos. Por 5.7 existe P/J^kP sumando dominante de Λ/J^k y $\varphi: P/J^kP \rightarrow X$ epimorfismo. Obsérvese que este necesariamente es mono, luego

$$X \cong P/J^kP$$

por tanto X es inyectivo, así que X es sumando directo de M, luego como Λ es de Artin, se sigue la proposición. //

A continuación probaremos un lema que nos será útil para probar la proposición 5.11. Para ello recordemos que una equivalencia de que M un Λ-módulo sea inyectivo es que todo Λ-morfismo de un ideal izquierdo de Λ se extienda a todo el anillo –dicha afirmación se conoce como **criterio de Baer**.–.

5.9 LEMA

Sea Λ artiniano y $M \in \mathrm{Mod}\,\Lambda$, supóngase que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(S,M)=0$ para todo módulo simple S. Entonces M es inyectivo.

Demostración:

Afirmamos que si $N \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ entonces $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(N,M)=0$. En efecto, si $\ell(N)=1$ entonces N es simple y habríamos acabado. Supóngase que para módulos con longitud menor que n nuestra afirmación es cierta, y que N tiene longitud n. Ahora bien, por ser Λ artiniano N contiene un simple S. Luego obtenemos

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow N \longrightarrow N/S \longrightarrow 0$$

exacta. Aplicando $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\_,M)$

$$0=\mathrm{Ext}^1_\Lambda(N/S,M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(N,M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(S,M)=0$$

tenemos que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(N,M)=0$, como se quería.

Usaremos el criterio de Baer para concluir nuestra prueba. Sea ${}_\Lambda I \leq \Lambda$ y f como lo muestra el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{i} & \Lambda & \xrightarrow{\pi} & \Lambda/I & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & & & & & \\ & & M & & & & & & \end{array}$$

luego $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,M) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(I,M) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda/I,M)$ es exacta, pero Λ/I es finitamente generado, de modo que el último termino es cero, y consecuentemente i^* es epi, de donde f se extiende a Λ. //

5.10 DEFINICION

Un anillo Λ se llama anillo de Nakayama si los proyectivos inescindibles izdos y derechos, son uniseriales.

5.11 PROPOSICION

Sea Λ de Nakayama y P un sumando inescindible de Λ. Entonces P es inyectivo si y solo si P no es isomorfo a JQ, para todo Q sumando inescindible de Λ

Demostración:

$\Rightarrow$. Si $P \cong JQ$ para algún sumando inescindible Q de Λ, se tendría por ser P inyectivo que éste es sumando directo de Q, lo cual no es posible.

$\Leftarrow$. Por 5.9 y 4.8, es suficiente probar que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Q/JQ, P)$ es cero para cada sumando inescindible Q de Λ, o equivalentemente, que todo morfismo $\varphi: JQ \to P$ se extiende a un morfismo de $Q \to P$.

Considerese el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & Q \arrow[r, shift right, "j_1"'] \arrow[d, dashed, shift right, "\alpha"'] & \Lambda \arrow[l, shift right, "\pi_1"'] \arrow[d, dashed, shift right, "a"'] \\
JQ \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \\
 & P \arrow[r, shift right, "j_2"'] \arrow[u, dashed, shift right, "\beta"'] & \Lambda \arrow[l, shift right, "\pi_2"'] \arrow[u, dashed, shift right, "b"']
\end{tikzcd}$$

donde i, j_1 y j_2 son las inclusiones, y π_1 y π_2 las proyecciones.

Como JQ es uniserial, existe Λe (5.7), donde e es un idempotente primitivo, y un epimorfismo $\Lambda e \twoheadrightarrow JQ$. Este induce un monomorfismo

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(JQ, \Lambda) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda e, \Lambda) \cong e\Lambda$$

y $e\Lambda$ es uniserial como Λ- módulo derecho, luego es un sumando inescindible derecho de Λ. Ahora bien, vistos como elementos de $e\Lambda$, $j_1 i$ y $j_2\varphi$ son multiplos uno del otro (pues $\Lambda j_1 i \subseteq \Lambda j_2\varphi$ o $\Lambda j_2\varphi \subseteq \Lambda j_1 i$).

Supongamos primero, que $j_2\varphi$ es multiplo de $j_1 i$, de donde existe $a: \Lambda \to \Lambda$ tal que $j_2\varphi = a j_1 i$. Haciendo $\alpha = \pi_2 a j_1$, vemos que $\alpha i = \pi_2 a j_1 i = \pi_2 j_2 \varphi = \varphi$, como se queria.

Por otro lado, si $j_1 i = b j_2 \varphi$, para $b: \Lambda \to \Lambda$, definimos $\beta = \pi_1 b j_2$. Analogamente, $\beta\varphi = \pi_1 b j_2 \varphi = \pi_1 j_1 i = i$, así que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
JQ \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & Q \\
 & P \arrow[u, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Vamos ahora a demostrar que β es un isomorfismo. Ciertamente $JQ \subseteq \mathrm{Im}\beta$. Si $\mathrm{Im}\beta = JQ$, entonces $1_{JQ} = \beta\varphi$, de modo que JQ es un sumando directo de P, pero como este es inescindible; $JQ \cong P$, contrario a la hipótesis. Luego la inclusión es estricta, de donde β es epi, pero Q es proyectivo y P inescindible entonces β es iso. Ahora bien, si nosotros hacemos $\alpha = \beta^{-1}$ obtenemos la extensión deseada. y con ella la conclusión de la prueba.

//

5.12 TEOREMA (DE NAKAYAMA)

Sea Λ un anillo de Nakayama. Entonces todo $M \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ es suma directa de módulos uniseriales.

Demostración:

Por 5.2, tenemos que Λ/J^K es un anillo de Nakayama para toda K entero positivo. De modo que nos bastará ver que los sumandos dominantes de Λ son inyectivos, pero esto se sigue de 5.11. Así que aplicando 5.8 obtenemos lo que se quería.

//

5.13 PROPOSICION

Si Λ es un anillo de Nakayama, Λ es t.r.f. Más aún, si $\Lambda = \bigoplus_{i=1}^{n} \Lambda e_i$ es la descomposición de Λ en proyectivos inescindibles, todo Λ-módulo inescindible es de la forma $\Lambda e_i / J^K e_i$, de modo que el número de inescindibles está acotado por $n\,\ell\ell(\Lambda)$.

Demostración:

Sea $N \in \operatorname{ind} \Lambda$, por 5.12 es uniserial, de donde $N \cong \Lambda e_i / I$, para alguna $1 \leq i \leq n$ (5.7), como Λ es de Nakayama Λe_i es uniserial, así que $I = J^K e_i$ con $1 \leq K \leq \ell\ell(\Lambda e_i)$ (5.3).

Ahora bien $\sum_{i=1}^{n} \ell\ell(\Lambda e_i)$ es una cota para la cardinalidad de $\operatorname{ind} \Lambda$, pero sabemos que $\ell\ell(\Lambda e_i) \leq \ell\ell(\Lambda)$, de modo que el número de inescindibles está acotado por $n\,\ell\ell(\Lambda)$.

//

Aplicando 5.12 y 4.30, obtenemos un resultado más fuerte, que es el que comunmente se conoce como Teorema de Nakayama

5.14 TEOREMA (NAKAYAMA, EISENBUD-GRIFFITH)

Sea Λ un anillo de Nakayama. Entonces todo $M \in \operatorname{Mod} \Lambda$ es suma directa de módulos uniseriales

//

CAPITULO VI

ALGEBRAS DE GRUPO

A lo largo de este capítulo K representará un campo. Una **K-álgebra** es un anillo Λ que posee estructura de K-espacio vectorial de tal forma que

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b) \quad \text{para todo } \alpha \in K,\ a \in \Lambda,\ b \in \Lambda$$

Nuestro interés principal, es presentar dos importantes teoremas que nos permitirán decidir cuando una K-álgebra de grupo es t.r.f.

6.1 DEFINICION

La K-álgebra de grupo de un grupo finito G sobre un campo K denotada KG es el conjunto de sumas formales

$$\sum_{\phi \in G} \alpha_\phi \phi \qquad \text{con } \alpha_\phi \in K$$

junto con las operaciones

$$\sum_{\phi \in G} \alpha_\phi \phi + \sum_{\phi \in G} \beta_\phi \phi = \sum_{\phi \in G} (\alpha_\phi + \beta_\phi)\phi$$

y

$$\Big(\sum_{\phi \in G} \alpha_\phi \phi\Big)\Big(\sum_{\phi \in G} \beta_\phi \phi\Big) = \sum_{\phi, h \in G} \alpha_\phi \beta_h \phi h$$

finalmente

$$\alpha\Big(\sum_{\phi \in G} \alpha_\phi \phi\Big) = \sum_{\phi \in G} \alpha\alpha_\phi \phi, \quad \alpha \in K$$

Obsérvese que G puede ser inmerso en KG mediante la asociación $\phi \mapsto 1\phi$, donde éste último término representa la suma formal tal que $\alpha_h = 0$ si $h \neq \phi$ y 1 en otro caso. Además bajo esta inmersión, los elementos de KG forman una base de KG, y como estos son un número finito, KG es una K-álgebra de dimensión finita, luego de Artin.

Nuestro primer objetivo es señalar como el estudio de nuestras K-álgebra de grupo es equivalente al estudio de las representaciones de grupos.

6.2 DEFINICION

Sea M un K-espacio vectorial. **Una representación de G con espacio de representación M**, es un morfismo de grupos

$$T: G \longrightarrow GL(M)$$

donde $GL(M)$ es el grupo de las unidades de $End_K(M)$.

De aquí en adelante, a menos que se exprese lo contrario, todos los K-espacios vectoriales serán considerados de dimensión finita.

Un morfismo entre dos representaciones T y T' con espacios de representación M y M' respectivamente es una K-transformación lineal $f: M \longrightarrow M'$ tal que para toda $\phi \in G$ el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{T(\phi)} & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ M' & \xrightarrow{T'(\phi)} & M' \end{array}$$

Además, como se sigue de lo anterior, las representaciones de G, junto con los morfismos de representaciones, forman una categoría la cual denotaremos por **Rep(G)**.

6.3 PROPOSICION

Sea $T \in Rep(G)$ con espacio de representación M. Entonces

$$T^*: KG \longrightarrow Hom_K(M,M)$$

definida por $\sum_{\phi \in G} \alpha_\phi \phi \longmapsto \sum_{\phi \in G} \alpha_\phi T(\phi)$ es un morfismo de K-álgebras //

6.4 PROPOSICION

Cada $M \in mod\, KG$ induce una representación T de G con espacio de representación M -el K-espacio vectorial obtenido al restringir M a K-, y recíprocamente.

Demostración:

Sea $h \in G$, definimos $T(h)$ mediante la asociación $m \longmapsto hm$ para cada $m \in M$, luego $T(h^{-1})$ es un inverso de $T(h)$, así que está en $GL(M)$, y $h \longmapsto T(h)$ es un morfismo de grupos.

El recíproco se obtiene a partir de 6.3, pues $Hom_K(M,M)$ es un KG-módulo mediante T^* //

6.5 COROLARIO

Rep(G) y mod KG son categorías equivalentes //

Ahora presentamos el primero de los dos Teoremas prometidos

6.6 TEOREMA (MASCHKE)

Sea n el orden de G y supongase que la característica de K no divide a n. Entonces KG es semisimple.

Demostración:

Sea $N \leq KG$, probaremos que éste es un sumando directo. Ahora bien, definimos $\pi : KG \longrightarrow N$ como $\pi(x) = x$, si $x \in N$ y cero si x está en el complemento de N en KG, luego π es un K-morfismo.

Sea $\phi : KG \longrightarrow N$ definida por $\phi(x) = \frac{1}{n} \sum_{\varphi \in G} \varphi \pi(\varphi^{-1}x)$, $x \in KG$

Esta definición es válida, ya que $1/n \in K$. Evidentemente $\phi(x) = x$, si $x \in N$. Luego falta demostrar que ϕ es un morfismo de KG-módulos, puesto que entonces habremos demostrado que

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} KG$$

se escinde, obteniendo así lo que se quiere. Pero ϕ, de modo obvio, es un K-morfismo, luego nos resta demostrar que ϕ es un G-morfismo. Ahora si $t \in G$

$$\begin{aligned}
\phi(tx) &= \frac{1}{n} \sum_{h \in G} h \pi(h^{-1}tx) \\
&= t\Big(\frac{1}{n} \sum_{h \in G} t^{-1}h \pi\big((t^{-1}h)^{-1}x\big)\Big) \\
&= t\Big(\frac{1}{n} \sum_{\varphi \in G} \varphi \pi(\varphi^{-1}x)\Big) \\
&= t\phi(x)
\end{aligned}$$

puesto que, si h recorre G, también lo hace $\varphi = t^{-1}h$ //

Sea H un subgrupo de G, luego KH es una subálgebra de KG. Todo M en **mod** KG está por restricción de escalares en **mod** KH. Cuando así lo pensemos, escribiremos

$$M_H$$

Inversamente si $M \in \mathbf{mod}\, KH$, es fácil cerciorarse que $KG \otimes_{KH} M$ esta en $\mathbf{mod}\, KG$, à este nuevo KG-módulo lo denotaremos por

$$M^G$$

En general, no podemos asegurar que $M \cong (M_H)^G$. El siguiente lema nos da una buena aproximación.

6.7 LEMA DE HIGMAN

Sea p la característica de K y S un p-subgrupo de Sylow de G, entonces M es un sumando directo de $(M_S)^G$

Demostración:

Sea $h_1, \ldots, h_t$ un conjunto de representantes de las clases laterales de G/S. Definimos

$$\tau_M : M \longrightarrow (M_S)^G$$

tal que $\tau_M(m) = \sum_{i=1}^{t} h_i \otimes h_i m$.

Afirmamos que τ_M es un **KG-morfismo**. En efecto, es claramente aditivo y es un K-morfismo. Nuevamente comprobaremos que es un G-morfismo. Dada h en G, es fácil encontrar una permutación $\tau \in S_t$ de índices tal que para cada i, $i = 1, \ldots, t$ existe $s_i \in S$ con la propiedad de que $h^{-1} h_i = h_{\tau(i)} s_i$ de aquí

$$h_i^{-1} h = s_i^{-1} h_{\tau(i)}^{-1} \quad y \quad h_i s_i^{-1} = h h_{\tau(i)}$$

Ahora bien $\tau_M(hm) = \sum_{i=1}^{t} h_i \otimes h_i h m = \sum_{i=1}^{t} h_i \otimes s_i^{-1} h_{\tau(i)} m = \sum_{i=1}^{t} h_i s_i^{-1} \otimes h_{\tau(i)} m$

$$= \sum_{i=1}^{t} h h_{\tau(i)} \otimes h_{\tau(i)} m = h \sum_{i=1}^{t} h_{\tau(i)} \otimes h_{\tau(i)} m = h \tau_M(m)$$

Por otro lado $\varepsilon_M : (M_S)^G \longrightarrow M$ definida por $\lambda \otimes m = \lambda m$ es un KG-morfismo, entonces también

$$t^{-1} \varepsilon_M : \sum_m \lambda_m \otimes m \longmapsto \frac{1}{t} \sum_m \lambda_m m$$

es un KG morfismo, el cual esta bien definido pues por hipótesis $1/t \in K$.

Consecuentemente

$$(t^{-1} \varepsilon_M) \circ \tau_M(m) = (t^{-1} \varepsilon_M)\left(\sum_{i=1}^{t} h_i \otimes h_i^{-1} m \right) = t^{-1} \sum_{i=1}^{t} m = t^{-1} t m = m$$

Es decir $(t^{-1} \varepsilon_M) \circ \tau_M = 1_M$

//

Para el siguiente lema presuponemos varios resultados de la Teoría de Grupos finitos, o dicho de otra manera, sólo damos el esbozo de la prueba.

6.8 LEMA

Sea G un p-grupo no cíclico, entonces existe H un subgrupo normal de G tal que

$$G/H \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$$

Demostracion:

Por ser G un p-grupo su orden es una potencia de p, digamos α. Vamos a hacer la prueba por inducción sobre esta α. Si $\alpha = 2$, $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ y $H=0$. Supongamos que el lema es cierto para $\alpha < n$, y el orden de G es p^n.

Si G es abeliano por I.3.6 habríamos terminado. De donde supongamos que $Z(G)$ (el centro de G) no es todo G. Sabemos que $Z(G)$ es distinto de cero, luego

$$G/Z(G)$$

es un **p-grupo** tal que el exponente de p es menor que n. Además, no es cíclico pues G sería abeliano, lo que es contrario a nuestra suposición, aplicando hipótesis de inducción, existe un subgrupo normal H de $G/Z(G)$ tal que

$$G/Z(G)/H \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$$

pero H es de la forma $\bar{H}/Z(G)$, aplicando el tercer teorema de isomorfismo, obtemos lo que se quería. //

6.9 PROPOSICION

Si la característica de K es p. Entonces para cualquier entero s

$$K\mathbb{Z}_{p^s} \text{ es de t.r.f.}$$

Demostración:

Nos bastará probar que $K\mathbb{Z}_{p^s}$ es de Nakayama. Ahora bien

$$K\mathbb{Z}_{p^s} \cong K[x]/\langle (x-1)^{p^s} \rangle$$

y por 2.30

$$J = J(K[x]/\langle (x-1)^{p^s} \rangle = \langle (x-1) \rangle / \langle (x-1)^{p^s} \rangle$$

Luego $(K[x]/\langle (x-1)^{p^s} \rangle)/J \cong K$ que es simple. Análogamente, si $1 \leq n \leq p^s$, se tiene que

$$J^n=\langle(x-1)^n\rangle/\langle(x-1)^{p^s}\rangle$$

Por tanto $J^n/J^{n+1}\cong\langle(x-1)^n\rangle/\langle(x-1)^{n+1}\rangle\cong K$, de donde

$$K[x]/\langle(x-1)^{p^s}\rangle\supseteq J\supseteq J^2\supseteq\cdots\supseteq J^{p^s}=0$$

es una serie de composición, ahora aplíquese 5.3 //

6.10 PROPOSICION

Si la característica de K es p. Entonces $K(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p)$ no es t.r.f.

Demostración.

Sea $M\in\operatorname{mod}K$ y supongamos que la dimensión de M sobre K es $2n+1$. Ahora bien, si $\{x_0,x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n\}$ es una base de M, podemos convertir a este en un $K(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p)$-módulo mediante las siguientes relaciones

$$\begin{array}{ll}(1,0)x_i=(0,1)x_i=x_i & \text{si } 0\le i\le n\\ (1,0)y_i=y_i+x_i & \text{si } 1\le i\le n\\ (0,1)y_i=y_i+x_{i-1} & \text{si } 1\le i\le n\end{array}$$

Definimos $X:=\langle x_0,\ldots,x_n\rangle\le_K M$ y $Y:=\langle y_1,\ldots,y_n\rangle\le_K M$, por tanto

$${}_KM=X\oplus Y$$

Sea $\pi:M\to Y$ la proyección. Afirmamos que si N es un KG-submódulo de M no nulo y $r=\dim_K\pi(N)$ entonces $\dim_K N\ge 2r+1$. En efecto, sin pérdida de generalidad supongase que $r\ge 1$ y sea $\alpha:M\to M$ tal que $\alpha(m)=(1-(1,0))m$, luego $\alpha(X)=0$. Análogamente sea $\beta:M\to M$ definida por $\beta(m)=(1-(0,1))m$, entonces $\beta(X)=0$. Más aún α,β sumergen a Y en X y consecuentemente

$$\alpha(N)\subseteq N.$$

Por otro lado $\alpha(N)\subseteq\alpha(\pi N\oplus X)=\alpha(\pi N)$, de donde $\dim_K\alpha(N)\le\dim_K\alpha(\pi N)$. Pero $\dim_K\alpha(N)\ge\dim_K(\pi N)$, luego $\alpha(N)=\alpha(\pi N)$. Análogamente $\beta(N)$ es igual a $\beta(\pi N)$, pero $\alpha(\pi(N))\neq\beta(\pi(N))$, sea $x\in\beta(\pi(N))\setminus\alpha(\pi(N))$ y

$${}_KU:=\alpha(\pi N)+\langle x\rangle\le_K(X\cap N)$$

por tanto

$$\dim_K U=\dim_K\alpha(\pi N)+1=\dim_K\pi N+1=r+1$$

y

$$\pi N=N+X/X\cong N/X\cap N$$

luego

$$r=\dim_K\pi N\le\dim_K N-\dim_K U=\dim_K N-(r+1)$$

Por último y en base a la afirmación que acabamos de probar, demostraremos que M es inescindible. Supongamos que no es el caso, e.d.:

$$_{KG}M \cong N \oplus N'$$

con N y N' no nulos. Supongamos que $r = \dim_{K\pi} N$ y $s = \dim_{K\pi} N'$, luego

$$\begin{aligned} n = \dim_K Y = \dim_{K\pi} M = \dim_{K\pi}(N \oplus N') \\ = \dim_{K\pi}(N + N') \\ \leq \dim_{K\pi} N + \dim_{K\pi} N' \\ = r+s \end{aligned}$$

de donde
$$n+1 = \dim_K M = \dim_K N + \dim_K N' \geq (2r+1)+(2s+1) = 2(r+s)+2 = 2(n+1)$$
lo cual es una contradicción //

6.11 TEOREMA (HIGMAN)

Si la característica de K es p. Entonces KG es t.r.f. si y sólo si los p-subgrupos de Sylow de G son cíclicos.

Demostración:

$\Rightarrow$. Supongamos que G tiene un p-subgrupo de Sylow no cíclico P. Luego por 6.8, existe un subgrupo normal H de P, tal que $P/H \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. De donde $K(P/H)$ no es de t.r.f. (6.10), como cada inescindible en $\mathrm{mod}\,K(P/H)$ es también inescindible en $\mathrm{mod}\,KP$, KP no es t.r.f.

Ahora bien, sea $L \in \mathrm{mod}\,KP$ inescindible y t el índice de P en G. Luego

$$(L^G)_P = (KG \otimes_{KP} L)_P = (KP)^t \otimes_{KP} L \cong L^t.$$

Es decir, L es isomorfo como KP-módulo a algún sumando directo de L^G, luego éste tiene un sumando directo inescindible de K-dimensión mayor o igual a L. Entonces KG no es t.r.f.

$\Leftarrow$. Sea $H \cong \mathbb{Z}_{p^s}$ un p-subgrupo de Sylow cíclico y M un inescindible de $\mathrm{mod}\,KG$, luego (6.7)

$$M \text{ es sumando directo de } (M_H)^G$$

de donde (3.9)

$$M \text{ es sumando directo de } L^G$$

para algún $L \in \mathrm{ind}\,KH$, es decir todo inescindible de $\mathrm{mod}\,KG$ es sumando directo de algún L^G, pero este sólo puede tener un número finito de tales sumandos, luego por 6.9, KG es t.r.f. //

BIBLIOGRAFIA

I OBRAS DE CARACTER GENERAL

[1] Anderson, F.W. y Fuller, K.R. "**Rings and Categories of Modules**". Graduate texts in Mathematics 13 (1973), Springer-Verlag.

[2] Atiyah, M.F. y Mac Donald, I.G. "**Introduction to Commutative Algebra**". Addison-Wesley (1969).

[3] Curtis, Ch.W. y Reiner, I. "**Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras**". Interscience Publishers (1962), New York.

[4] Hilton, P. y Wu, Y. "**Curso de Algebra Moderna**". Ed. Reverté (1977)

[5] Lang, S. "**Algebra**". Addison-Wesley (1965)

[6] Mac Lane, S. y Birkhoff, G. "**Algebra**". Mac Millan (1979). New York.

[7] Rotman, J.J. "**Notes on Homological Algebras**". Van Nostrand Reinhold (1970).

II BIBLIOGRAFIA MAS ESPECIALIZADA

[8] Auslander, M. "**Curso de Teoría de Reprentaciones**". Notas de Clase, Universidad de Brandeis (1981).

[9] Auslander, M. y Smalø, S.O. "**Categorical Methods in the Representation Theory of Artin Rings**". Preprint: Matematisk Institutt. Universitetet I Trondheim, 8/1975.

[10] Cibils, C., Larrión, F. y Salmerón, L. "**Métodos diagramáticos en Teoría de Representaciones**". Monografía. Instituto de Matemáticas. UNAM

[11] Eisenbud, D. y Griffith, P. "**Serial Rings**". Journal of Algebra 17, pág. 389-400 (1971).

[12] Higman, D.G. "Indescomposable representations de characteristic p". Duke Math. J. 21, pág 377-381 (1954).

Para la Parte I hemos hecho uso de:

Capítulo	I	[4], [5] y [6]
" " "	II	[4] y [6]
" " "	III	[4] y [6]
" " "	IV	[6]

Para la Parte II hemos hecho uso de:

Capítulo	I	[1], [7], [8] y [10]
" " "	II	[1] y [4]
" " "	III	[2], [3] y [8]
" " "	IV	[1], [7], [8], [9] y [10]
" " "	V	[7] y [11]
" " "	VI	[3] y [12]