UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
Facultad de Ciencias

Conceptos Necesarios para el Diseño y Desarrollo Curricular de un Curso de Matemáticas

(enfoque hacia el curso de Probabilidad y Estadística en Escuelas de Ingeniería)

T E S I S

que para obtener el título de:

Matemático

p r e s e n t a

MARIA LAURA MARQUEZ RAMOS

México, D.F. 1982

C O N T E N I D O

CAPITULO IV

INTRODUCCION

EL HOMBRE ES INVESTIGADOR POR NATURALEZA.

El ser humano desde que empieza a vivir va adquiriendo experiencia y conocimiento. La información que personas y cosas le proporcionan y la obtenida por la naturaleza, forman su actividad de aprender; esta actividad o mecanismo mental se debe enriquecer y desarrollar si consideramos la enorme capacidad del cerebro humano. Se han establecido etapas como: la adquisición de conocimiento, comprensión, análisis, interpretación, etc., que tratan de describir este mecanismo que se da innato en el hombre que pone su empeño en aprender.

El querer aprender es muy marcado y evidente en los niños.

El niño, porque investiga, llega a conocer el mundo que le rodea. Como su actividad principal es jugar, con ella desarrolla su capacidad de observación y experimentación espontánea; elementos que lo llevan hacia el Conocimiento. En la escuela, esta capacidad ilimitada de observación y experimentación debe ser aprovechada y estimulada para que el niño aprenda el material educativo escolar de manera natural, como jugar.

El maestro, como persona importante en el desarrollo mental del niño, produce en él, según la exposición de los temas escolares, efectos buenos y, desgraciadamente, también malos que "construyen", estos últimos, barreras mentales que hacen difícil el aprendizaje.

Un profesor necesita habilidad y conocimiento profundo del material que expone para dar confianza y ánimo a sus alumnos, para que esas barreras ante el aprendizaje no se formen o dejen de existir; necesita hacer que el tema estudiado sea atractivo y motivante; necesita conseguir una actitud activa de sus alumnos. No basta que el alumno ejercite su mente (pensar) y cuerpo (actuar) para considerar ésta como una actitud activa; sino también el desarrollar y ejercitar una conciencia crítica para lograr obtener una conciencia científica. Por tanto, no será fácil la tarea del profesor que pretenda despertar en sus alumnos ese espíritu científico.

Cuando una persona ha decidido ser profesor, puede creer que se trata de una labor que se lleva a cabo sólo por intuición o recordando experiencias propias, y en muchos casos sin establecer un plan de acción para la materia de estudio.

Establecer un plan de trabajo es lo indicado no solamente en la práctica de la educación, sino en cualquier labor que se realice con empeño. La intuición y la experiencia adquirida han servido desde siempre para tomar decisiones; y también hemos visto que los logros y errores cometidos van dando los lineamientos para "madurar" un plan, una estrategia, en situaciones posteriores.

En la labor docente, la experiencia y la intuición han sido factores predominantes en las decisiones. Lo deseable sería que valiosas experiencias no se perdieran, que esa "intuición para la labor docente", que afortunadamente tienen muchos profesores, fuera aprovechada como una guía. Si se estudiaran los "elementos clave" en situaciones exitosas y se analizaran las causas de errores cometidos y cómo fueron superados (investigación didáctica y pedagógica), se podría establecer un Plan General Organizado que sirviera como guía en situaciones análogas; por ejemplo: un plan, una estrategia en una materia de estudio que sirviera para otras. Este plan general educativo debe contemplar las edades, nivel, situación social, intereses, etc., de las personas a las que va dirigido para que metas propuestas puedan ser alcanzadas. Considerarse una táctica educativa que desarrolle habilidades en los alumnos y les ayude a eliminar barreras mentales formadas, planteando y resolviendo problemas dentro de los campos de interés relacionados con los temas de estudio.

Como profesora desde hace 3 años (y con una experiencia docente de 8 años) en la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (ESIME, U.P.C.) del Instituto Politécnico Nacional y conjugando la preparación que adquirí en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México, he querido enfocar este trabajo de tesis en la necesidad de formación de profesores especialistas en clases de Matemáticas para Ingenieros.

Recurrí a interesantes estudios críticos de los principales métodos y resultados en diversas ciencias, a los trabajos de Gaston Bachelard (sobre la Epistemología, principalmente en Física) y de Guy Brousseau, quien enfocó hacia la Epistemología en Matemáticas. También se tiene conocimiento de una teoría abstracta de diseño y desarrollo curricular de donde se han extraído los elementos que George Glaeser consideró como necesarios en todo plan educativo. Esta teoría de diseño y desarrollo curricular de Glaeser tiene un enfoque práctico, por esta razón la expongo en esta tesis, para que el análisis de los elementos que intervienen en ella se presenten de una manera organizada.

Por otro lado, G. Glaeser también trabajó sobre los diferentes tipos de ejercicios que el profesor debe proponer a los alumnos y que él ejemplificó con Geometría. Dentro de la propuesta de la enseñanza de las Matemáticas a través de problemas, en este escrito se utiliza la Pedagogía del Ejercicio y del Problema en la Probabilidad y la Estadística. Así, las consideraciones teóricas junto con la pedagogía utilizada me llevaron a proponer un Programa de Estudios de Probabilidad y Estadística para Escuelas de Ingeniería y que en particular, por mi labor docente, está dirigido a la Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica.

24/III/81

CAPITULO I

1.1 OBJETIVOS GENERALES

Las matemáticas, dentro del área del conocimiento, es lo que más barreras tiene formadas en los estudiantes; representan un reto, un desafío que muchas veces es abandonado por ellos ANTES DE EMPRENDER LA LUCHA, por esta razón se enfoca la atención al proceso **enseñanza—aprendizaje** de éstas.

El profesor de matemáticas debe tener presente que en sus alumnos existen barreras que se han forjado a lo largo de su vida escolar, debe estar consciente de que muchos de ellos (la mayoría) "le tienen miedo" a las matemáticas, tienen formada la barrera mental del "no puedo" ante ellas, es necesario que esta barrera sea derribada; al igual que "no me gustan", "son difíciles", "no me interesan", etc. Creo que si éstos y otros obstáculos se descuidan en la planeación y desarrollo de un curso, éste no funcionará; ya que toda alternativa pedagógica podrá sobrevivir sólo si contempla y trata de derribar barreras. Por otro lado, las matemáticas consideradas como una ciencia abstracta y también como una herramienta muy poderosa para otras ciencias, tiene todo para activar el espíritu científico; por tanto, los que nos dedicamos a ellas debemos formular un plan educativo que se apoye en investigaciones didácticas y pedagógicas serias, para que aún los conceptos abstractos puedan ser "descubiertos" y estructurados con bases mentales sólidas.

Científicos que han desarrollado una amplia investigación didáctica y pedagógica son: G. Bachelard, J. Piaget, G. Brousseau y G. Glaeser, entre los más sobresalientes, ya que sus conceptos están teniendo actualmente un gran reconocimiento.

En esta tesis, como un plan de acción, se dan los lineamientos generales para un curso de matemáticas, tomando como base la Pedagogía del Ejercicio y del Problema y los Obstáculos Epistemológicos. Para ejemplificar, fue considerado el curso de Probabilidad y Estadística en 3 escuelas de ingeniería del Distrito Federal.

1.2 TEORIA DE DISEÑO Y DESARROLLO CURRICULAR

George Glaeser dictó un curso (octubre de 1976) llamado "El Desarrollo Curricular" en la Universidad "Louis Pasteur", en Francia, donde expone las siguientes consideraciones:

«Evitaremos el empleo de la palabra programa (en la expresión programa escolar) por 2 razones:

a) la didáctica frecuentemente hace referencia a la informática; es necesario entonces evitar toda confusión con la programación;

b) el uso francés de la palabra "programa" cubre 2 nociones que los anglosajones distinguen al utilizar los términos latinos de Curriculum y de Syllabus. La oposición de estas palabras es análoga a aquella que separa la estrategia de la táctica.

El Curriculum describe los grandes capítulos de un proyecto educativo, situándolos en el desarrollo de las aptitudes de los alumnos y en la organización escolar. Por ejemplo, en él se decide el tiempo global que será consagrado en cada clase a la geometría, al álgebra, a las tareas escritas, a las revisiones, a la preparación de los exámenes, a los trabajos dirigidos, etc. En lengua alemana la palabra curriculum se utiliza al lado de "Lehrplan".

El Syllabus constituye una tabla de las materias detalladas, de la puesta en práctica de un Curriculum y comprende, por ejemplo, la lista explícita de las definiciones y de los enunciados exigibles, el cuerpo de ejercicios didácticos que los alumnos deben ser entrenados a resolver, etc.

I. POSICION DEL PROBLEMA

A) Hacia 1960, el S.M.S.G. (The School Mathematics Study Group) trató de poner en práctica los métodos científicos (en U.S.A.) para elaborar un Curriculum de Matemáticas. Es en esa época que en el mundo entero se arman los planes de "modernizaciones". En la mayoría de los casos, las decisiones son tomadas sin investigaciones didácticas suficientes. Sin embargo vemos surgir numerosos equipos que tratan de plantear y de resolver los problemas, en reacción al empirismo burocrático.

Me propongo bosquejar los principios del "Desarrollo Curricular". Conocemos ahora muchos equipos de investigación que toman en cuenta una parte de los principios que expondré; esta parte varía de un equipo a otro. Es el caso de diversas instituciones que se consagran a una redacción colectiva de obras escolares o de material pedagógico (especialmente en Bruselas, Quebec, Berna, Utrecht, Cracovia, Moscú, Lyon, Strasburgo, etc.) . A nuestro conocimiento no existen actualmente equipos que tomen en cuenta todos los principios expuestos aquí.

La ventaja del punto de vista que se expondrá enseguida, es que trata de plantear muchas de las cuestiones pertinentes que la "pedagogía de ministerio" ni siquiera sospecha. Ésta, ignora todos los esfuerzos logrados desde hace 15 años y no se apoya, al parecer, en ningún principio.

El inconveniente es que las respuestas a esas preguntas no pueden ser proporcionadas actualmente con un rigor científico perfecto; de hecho, disponemos cada vez más de medios de investigación serios, pero los progresos no tratan mas que de cuestiones aisladas. Es forzoso entonces completar empíricamente esas informaciones.

Por otra parte, no debe perderse de vista que una reforma a la enseñanza es una respuesta política a un problema de la sociedad; depende entonces de algunas elecciones ideológicas, entre las cuales la ciencia no sabría tomar partido. Es sólo después que estas elecciones han sido formuladas, que uno se puede preguntar si los medios utilizados satisfacen esas opciones, y responder parcialmente con los métodos científicos.

B) Supongamos que se decide oficialmente introducir una nueva materia en un contexto debidamente precisado (dicho de otra manera, se describe previamente el público al cual se dirigirá —edad, nivel, etc.— , así como el cuerpo docente y los medios materiales que se está dispuesto a invertir en la innovación). Se trata de prever las dificultades pedagógicas, psicológicas, sociales, financieras, etc., que se encontrarán y de prepararse y hacerles frente. Dicho de otra manera, se trata de la planificación de un proyecto didáctico. Tal investigación previa puede también emprenderse fuera de las esferas administrativas. Asimismo,

> cada maestro será conducido a planificar su propia enseñanza —en el cuadro de las limitaciones oficiales— y deberá formar también un tipo de "desarrollo curricular" a pequeña escala.

II. ELECCION DE OBJETIVOS

Comenzaremos por reflexionar sobre la motivación y la finalidad de la innovación proyectada y nos fijaremos los objetivos pedagógicos consecuentes.

1o. La opción siguiente es decisiva: nos interesa únicamente la adquisición de conocimientos o, por el contrario, el desarrollo de ciertas aptitudes.

2o. Si se desea desarrollar aptitudes en:

Lógica

Ejemplos de objetivos:

Aptitud de razonar sobre símbolos (abstractos) para aprender lo real (concreto).

Conducta rigurosa del razonamiento.

Uso de un lenguaje preciso.

Algorítmica:

Aptitud para ejecutar ciertas operaciones sin equivocarse.

Aptitud para aplicar un algoritmo complejo.

Perseverancia en el trabajo esmerado.

Heurística:

Entrenamiento para reconocer las formas y las estructuras.

Intuición de las transformaciones y las invavarianzas.

Educación de la visión en el espacio.

Aptitud para guiar la intuición por medio de las representaciones y los diagramas.

3o. Podemos formular también objetivos sociales: se puede fijar el porcentaje de la población escolar a la que concierne la innovación que uno se propone conducir a un nivel por precisar.

¿Queremos promover la enseñanza de masas o, al contrario, separar una élite?

O aún: se proyecta dar en los plazos fijados una formación profesional especializada a un contingente fijado de individuos.

> Todo el "desarrollo curricular" deberá estar estrechamente subordinado a los objetivos escogidos.

Se puede reprochar a muchos curricula establecidos de manera poco cuidadosa, de no apuntar a objetivos precisos. En otros casos se exhibe —en fachada— una serie de objetivos para estar a la moda, pero visiblemente el resto del proyecto no aporta los medios para alcanzar esos objetivos.

III. EL ANALISIS MATEMATICO DEL CONTENIDO

Se pasará enseguida al análisis de la <u>organización matemática</u> de la nueva materia a enseñar. Los matemáticos harán el inventario de los conocimientos previos exigidos. Ellos compararán varios modos de exposición posibles (axiomas y definiciones que servirán de puntos de partida, lista de los principales resultados alrededor de los cuales gravitará la presentación escogida).

IV. ANALISIS GENETICO DEL CONTENIDO

Se sabe que Jean Piaget ha puesto en evidencia los estadios en el desarrollo intelectual del niño. Él propuso el modelo de esquemas para describir los mecanismos de comprensión.

Pero es innecesario referirse a esta concepción en la cual muchos puntos son controvertidos, para afirmar que el "desarrollo curricular" debe adaptar sus proyectos a la madurez de los alumnos.

Se hará entonces el inventario de las dificultades ligadas al desarrollo de la inteligencia y de la elaboración de los conceptos.

Por ejemplo: Si uno se propone abordar un grado de abstracción elevada en un curriculum, habrá que preguntarse si una larga preparación es indispensable para familiarizar a los alumnos con los grados inferiores.

Deben emprenderse investigaciones para estimar la duración de la "incubación" necesaria.

V. EL ANALISIS EPISTEMOLOGICO DEL CONTENIDO

Al lado de esos factores ligados al desarrollo mental de los alumnos, se deberán considerar las dificultades reveladas por el desarrollo histórico de las matemáticas.

Gaston Bachelard ha descrito la noción de obstáculo epistemológico. La presencia de obstáculos epistemológicos es revelada por la historia de la ciencia. Una noción considerada hoy como trivial, se ha desprendido en el curso de una larga historia con la participación de los más geniales matemáticos, se presiente que había muchos obstáculos epistemológicos a vencer.

En particular, es asombroso encontrar en la historia de las matemáticas problemas importantes que han quedado sin solución por mucho tiempo; ahora bien, sabemos a posteriori que todos los conocimientos previos requeridos estaban al alcance de los sabios, uno se pregunta entonces: ¿cuál es la dificultad profunda que ha obstaculizado el descubrimiento?

> Los que conciben un curriculum deben tener en cuenta que: hay pretendidas trivialidades que se exponen en algunas líneas y que exigen grandes esfuerzos pedagógicos para ser asimiladas.

VI. PRIMEROS BALBUCEOS DEL SYLLABUS

Después de este triple análisis del contenido, es tiempo de poner el proyecto en obra:

Se tendrá que escoger el tipo de enseñanza apropiado (exposición magisterial, empleo de un manual, enseñanza programada, empleo de medios audiovisuales, etc.) .

Se dividirá enseguida la materia por enseñar en unidades de intervención: podrá ser una división en capítulos o, si se trata de una enseñanza programada, se utilizará el método de "los pasitos".

Para la realización de cada una de las unidades de intervención, la pedagogía puede ahondar en una abundante serie de medios de acción disponibles.

Por ejemplo, se decidirá de las informaciones que deben ser dadas por el que enseña o por el libro, y aquellas que es mejor dejar descubrir parcialmente por el alumno, en el curso de ejercicios apropiados.

VII. LA EXPERIMENTACION

Los bosquejos son entonces confiados a algunos equipos de profesores que procedan a ensayar dentro de sus clases.

Dando eventos periódicamente de sus observaciones, los experimentadores mejoran ciertamente muchísimo el trabajo; sin embargo, los métodos de experimentación son todavía muy a menudo rudimentarios.

VIII. LA FORMACION DE PROFESORES

Las dificultades en la realización del proyecto apenas han comenzado: hay que procurarse un cuerpo docente que esté preparado para enfrentar la novedad.

Hay entonces que encarar un nuevo "desarrollo curricular", dirigido esta vez a los maestros y no a los alumnos. Hay que analizar todo desde un principio, bajo una nueva perspectiva.

Si el cuerpo docente tiene una formación inicial suficiente, se le puede dejar la responsabilidad de la adaptación individual, o someterse a una reactualización de conocimientos.

IX. EVALUACION Y MEJORAMIENTO

Después de la puesta en práctica del proyecto, habría que disponer de medios de apreciación para ver si los objetivos fijados han sido alcanzados.

La construcción y la puesta en obra de tales instrumentos es un campo de investigación vivo en nuestros días.

La presentación de los distintos puntos de vista y de sus críticas, necesitaría por ella misma un curso completo, para el cual no me siento todavía competente; me limitaría a sugerir algunos trabajos.

Todos los proyectos serios proclaman la necesidad de los procedimientos de revisión periódica, permitiendo una evolución suave y lenta del curriculum.

Es, sin duda, demasiado pronto para dar un juicio definitivo sobre el "desarrollo curricular". Pero, de cualquier manera, es preferible lanzar reformas tratando de abrir los ojos que continuar a ciegas» [16] .

Para ejemplificar un proyecto didáctico y pedagógico, a pequeña escala, consideraremos el curso de Probabilidad y Estadística en 3 escuelas de ingeniería.

1.3 ANALISIS DE LOS PROGRAMAS VIGENTES DE PROBABILIDAD Y ESTADISTICA, EN 3 ESCUELAS DE INGENIERIA.

Las escuelas de ingeniería en el D.F. que considero cuentan con un gran número de estudiantes son:

—La Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del Instituto Politécnico Nacional (ESIME, IPN), en sus 3 planteles.

—La Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

—La Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales Administrativas (UPIICSA).

En la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México, la asignatura Probabilidad y Estadística está incluida en la división de ciencias básicas como asignatura obligatoria; al igual que Algebra y Geometría Analítica, Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo Vectorial y Ecuaciones Diferenciales.

Se imparte en las carreras siguientes en el semestre indicado:

CARRERA		SEMESTRE
Ingeniero	Geofísico	4°
"	de Minas y Metalurgista	4°
"	Topógrafo	4°
"	Civil	4°

CARRERA	SEMESTRE
Ingeniero en Computación	5°
" Mecánico Electricista	5°
" Petrolero	5°
" Geólogo	7°

Como esta materia, Probabilidad y Estadística, se contempla en el plan general de estudios, los 8 temas incluidos son los que yo llamaría temas clásicos de cualquier curso de Probabilidad y Estadística; y son los objetivos de un curso los que marcarán las diferencias (a qué tipo de alumnos está encaminado).

En la facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México, el curso Probabilidad y Estadística tiene como <u>objetivo</u>:

> "Proporcionar al estudiante los elementos de la teoría de la Probabilidad y de la Estadística que le permitan analizar fenómenos aleatorios relacionados con la Ingeniería".

Si analizamos el contenido de cada uno de los temas de estudio y los objetivos particulares propuestos, vemos que se trata de un curso detallado y completo, en donde:

I. Se introducen aspectos teóricos.

II. Se manejan los elementos considerados en aplicaciones interesantes a la Ingeniería (ver programa anexo).

El programa señala el número de horas asignadas a cada tema, con un total de tiempo disponible en el "semestre" (4 meses) de 72 horas, que equivale a 16 semanas (4.5 horas a la semana, $4.5 \times 16 = 72$ horas).

Haciendo un análisis de la distribución de este tiempo, considero que para que se logren los objetivos señalados para cada tema, el tiempo que estimo se requiere, es el siguiente:

			HORAS "ESTIMADAS"	HORAS DEL PROG.
72 HORAS	TEMA I	Introducción a la Teoría de la Probabilidad	9	9
	TEMA II	Variables Aleatorias	12	9
	TEMA III	Modelos Probabilísticos Comunes	15	9
	TEMA IV	Variables Aleatorias Conjuntas	15	13.5
	TEMA V	Teoremas sobre casos límites	9	4.5
	TEMA VI	Estadística Descriptiva	12	4.5
	TEMA VII	Inferencia Estadística	18	16.5
	TEMA VIII	Regresión y Correlación	9	6
		TOTAL:	99	72.0

Yo diría que el programa vigente es muy ambicioso, por lo que podría suceder:

1) que los 2 últimos temas no lleguen a cubrirse. Si el proceso de Inferencia Estadística no se conoce, el estudiante no tendrá los elementos necesarios para

analizar los fenómenos aleatorios relacionados con la Ingeniería y, por consiguiente, no podrá tomar decisiones con bases estadísticas; o bien,

2) que los profesores adecuen el material de estudio al tiempo marcado en el programa, sin tomar en cuenta si el material fue aprendido por el estudiante

Quisiera señalar que el programa vigente considera sólo 4.5 horas para el tema VI, Estadística Descriptiva, tal vez porque contiene elementos "conocidos" por el alumno; con lo que, a mi juicio, sería el tema perfecto para que se traten problemas interesantes que permitan al alumno franquear verdaderos obstáculos. Las adquisiciones (nociones) anteriores serán para el alumno puntos de apoyo, o el mismo alumno tendrá que modificarlas o eliminarlas de su mente.

Tomando en cuenta que la asignatura Probabilidad y Estadística se imparte en 4°, 5° y 7° semestre de las diversas carreras de Ingeniería, yo sugeriría que se estructure un programa por cada semestre, donde los intereses de los alumnos ya no serían tan variados y, por lo tanto, las aplicaciones a la Ingeniería fueran más concretas. Los conceptos matemáticos ya no tendrían que ser tan generales y podrían enfocarse a sólo algunas especialidades. Así, sería posible formular un programa completo con los detalles necesarios para cubrirse en 4 meses (72 horas en el semestre) de tiempo disponible.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA *Aprobado por el H. Consejo Técnico el 15 de Agosto de 1910.*

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA: PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

Clave ______ Núm. de créditos 9 Carrera: 21,22,23,24,25,26,31,32

Duración del curso semanas: 16 horas: 72 Hrs. a la semana Teoría: 4.5 Prácticas: 0

OBJETIVO DEL CURSO: Proporcionar al estudiante los elementos de la teoría de la Probabilidad y de la Estadística que le permitan analizar fenómenos aleatorios relacionados con la ingeniería.

T E M A S

Núm.	Título	Horas
I	INTRODUCCION A LA TEORIA DE LA PROBABILIDAD	9.0
II	VARIABLES ALEATORIAS	9.0
III	MODELOS PROBABILISTICOS COMUNES	3.0
IV	VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAS	13.5
V	TEOREMAS SOBRE CASOS LIMITE	4.5
VI	ESTADISTICA DESCRIPTIVA	4.5
VII	INFERENCIA ESTADISTICA	16.5
VIII	REGRESION Y CORRELACION	6.0

ANTECEDENTES, OBJETIVO Y CONTENIDO DE LOS TEMAS

TEMA I "INTRODUCCION A LA TEORIA DE LA PROBABILIDAD" 9.0 Hrs.

ANTECEDENTES: Algebra y Geometría Analítica: tema I.
Cálculo Diferencial e Integral: tema I.

OBJETIVO:

Propiciar en el estudiante el aprendizaje de los elementos que le permitan asignar probabilidades a los eventos asociados a un experimento aleatorio.

CONTENIDO:

1.1 Experimento aleatorio, espacio muestral y eventos.

1.2 Diferentes interpretaciones del concepto de probabilidad: clásica, frecuentista y subjetiva. Axiomas de probabilidad. Teoremas elementales derivados de los axiomas.

1.3 Probabilidad condicional. Independencia de eventos. Probabilidad total. Teorema de Bayes.

1.4 Aplicaciones: decisiones bajo incertidumbre, programación de actividades, demandas aleatorias aditivas en sistemas de ingeniería, modificación de probabilidad a priori bajo nueva información.

TEMA II "VARIABLES ALEATORIAS" 9.0 Hrs.

ANTECEDENTES: Cálculo Diferencial e Integral: temas I, III, VI y VII.
Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias: tema III.
Métodos Numéricos: tema IV.

OBJETIVO:

Propiciar en el estudiante el manejo de la probabilidad con base en los conceptos de variable aleatoria, distribución de probabilidad y esperanza.

CONTENIDO:

II.1 Definición de variable aleatoria. Variables aleatorias discretas, función de probabilidad y sus propiedades, función de distribución y sus propiedades. Variables aleatorias continuas, función de densidad y sus propiedades, función de distribución y sus propiedades. Variables aleatorias mixtas.

II.2 Esperanza de una variable aleatoria. Esperanza de una función de una variable aleatoria, momentos, media, variancia, desviación estándar y coeficiente de variación. Propiedades del operador esperanza. Distribuciones condicionales, esperanza condicional.

II.3 Transformadas geométrica y exponencial, propiedades. Cálculo de momentos por medio de las transformadas geométrica y exponencial. Función generatriz de momentos y función característica.

ANTECEDENTES, OBJETIVO Y CONTENIDO DE LOS TEMAS

II.4 Aplicaciones: costos y beneficios esperados, elección de la capacidad de una bomba de agua.

TEMA III "MODELOS PROBABILISTICOS COMUNES" 9.0 Hrs.

ANTECEDENTES: Algebra y Geometría Analítica: tema IV.
Cálculo Diferencial e Integral: temas VI y VII.
Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias: tema III.
Métodos Numéricos: tema IV.

OBJETIVO:

Capacitar al estudiante en la aplicación de las distribuciones de probabilidad más utilizadas, así como en el análisis de sus características.

CONTENIDO:

III.1 Ensayo de Bernoulli. Distribuciones de Bernoulli, binomial, geométrica y binomial negativa. Momentos y transformadas de estas distribuciones. Aplicaciones: valores de diseño, períodos de retorno y control de calidad.

III.2 Distribución de Poisson, su obtención a partir de la binomial, proceso de Poisson. Tiempo entre eventos, la distribución exponencial. Tiempo para que se presente el k-ésimo evento, la distribución gama. Momentos y transformadas de estas distribuciones. Aplicaciones: análisis de tráfico, tiempo entre arribo de vehículos, llamadas telefónicas a una central, tiempo de vida útil de componentes mecánicos y eléctricos.

III.3 Las distribuciones uniforme, normal y normal estándar. Momentos y transformadas de estas distribuciones.

TEMA IV "VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAS" 13.5 Hrs.

ANTECEDENTES: Cálculo Vectorial: temas II y V
Métodos Numéricos: tema IV

OBJETIVO:

Capacitar al estudiante en el manejo de modelos probabilísticos que utilizan variables aleatorias multidimensionales.

CONTENIDO:

IV.1 Variables aleatorias conjuntas. Función de distribución conjunta y sus propiedades. Funciones de distribución marginales.

IV.2 Función de probabilidad conjunta y sus propiedades. Función de densidad conjunta y sus propiedades. Obtención de la distribución marginal a partir de la conjunta.

ANTECEDENTES, OBJETIVO Y CONTENIDO DE LOS TEMAS

IV.3 Distribuciones condicionales. Variables aleatorias independientes. Covariancia y coeficiente de correlación.

IV.4 Esperanza y variancia de una función lineal de dos variables aleatorias.

IV.5 Vectores aleatorios. Media y variancia de un vector aleatorio y de una función lineal de un vector aleatorio.

IV.6 Aplicaciones: aproximación analítica a un modelo de conteo de tráfico, confiabilidad de un sistema sujeto a n demandas aleatorias, capacidad total de un sistema de varios componentes.

TEMA V "TEOREMAS SOBRE CASOS LIMITE" 4.5 Hrs.

ANTECEDENTES: Algebra y Geometría Analítica: tema V.

OBJETIVO:

Propiciar que el estudiante conozca las razones de la importancia de la distribución normal.

CONTENIDO:

V.1 La desigualdad de Chebyshev.

V.2 Convergencia de variables aleatorias. Teorema del límite central. Ley de los grandes números.

V.3 Aproximación de una distribución de Poisson por medio de una normal, de una binomial por una normal y de una binomial por una de Poisson.

TEMA VI "ESTADISTICA DESCRIPTIVA" 4.5 Hrs.

ANTECEDENTES: Computadoras y Programación: temas IV y V.

OBJETIVO:

Capacitar al estudiante en el manejo de datos numéricos empíricos y en la obtención de sus parámetros descriptivos.

VI.1 Población y muestra. Tabla de frecuencias e histograma. Polígonos de frecuencia relativa y de frecuencia relativa acumulada, analogía de estos polígonos con las gráficas de la función de probabilidad y la función de distribución de una variable aleatoria bajo la interpretación frecuentista de la probabilidad.

VI.2 Media de una muestra, variancia y desviación estándar de una muestra. Cálculo para datos agrupados y sin agrupar. Analogía de estos conceptos con la media, variancia y desviación estándar de una variable aleatoria.

ANTECEDENTES, OBJETIVO Y CONTENIDO DE LOS TEMAS

VI.3 Otros parámetros descriptivos de una muestra: rango, mediana, moda, cuartiles, coeficientes de variación, de asimetría y de aplanamiento.

VI.4 Uso de programas de computadora para el manejo de los datos correspondientes a una muestra.

TEMA VII "INFERENCIA ESTADISTICA" 16.5 hrs.

ANTECEDENTES: Algebra y Geometría Analítica: tema I.
Computadoras y Programación: temas IV y V.
Cálculo Vectorial: tema VI.

OBJETIVO:

Capacitar al estudiante en el empleo de la información muestral para que pueda inferir y tomar decisiones sobre casos elementales.

CONTENIDO:

VII.1 Parámetros poblacionales y estadísticos muestrales. Distribución de la media y la variancia muestrales, sus parámetros. Las distribuciones ji cuadrada, t y F.

VII.2 Estimación puntual. Estimadores insesgados, eficientes y consistentes. Método de máxima verosimilitud.

VII.3 Estimación por intervalos. Intervalos de confianza para media, variancia y diferencia de medias poblacionales. Uso de programas de computadora.

VII.4 Conceptos de hipótesis estadística y de prueba de hipótesis. Regla de decisión, errores tipo I y tipo II, nivel de significación. Pruebas de hipótesis sobre medias, variancias y diferencias de medias poblacionales. Uso de programas de computadora.

VII.5 Aplicaciones: control de calidad, ingeniería de tránsito, toma de decisiones bajo riesgo.

TEMA VIII "REGRESION Y CORRELACION" 6.0 Hrs

ANTECEDENTES: Computadoras y Programación: temas IV y V
Cálculo Vectorial: tema VI.

OBJETIVO:

Capacitar al estudiante en el análisis de la relación entre dos variables aleatorias para predecir el valor de una de ellas correspondiente a un valor particular de la otra.

ANTECEDENTES, OBJETIVO Y CONTENIDO DE LOS TEMAS

CONTENIDO:

VIII.1 Diagrama de dispersión. Ajuste de una curva. Método de los mínimos cuadrados.

VIII.2 Recta de regresión. Intervalos de confianza para la media de la variable dependiente, bandas de confianza.

VIII.3 Error estándar de la estimación, coeficiente de determinación, coeficiente de correlación.

VIII.4 Aplicaciones a modelos de predicción. Uso de programas de computadora.

TECNICAS DE ENSEÑANZA (Recomendadas)

Exposición Oral ....(X)

Exposición Audiovisual ....(X)

Corrillos ....(X)

Seminario ....(   )

Lecturas obligatorias ....(X)

Trabajos de investigación ....(X)

Prácticas de taller o de laboratorio.....................(   )

Prácticas de campo ....(

Otras: Utilización de programas de Computadora (X)

ELEMENTOS DE EVALUACION: (Recomendados)

Exámenes parciales ....(X)

Exámenes finales ....(X)

Tareas y trabajos fuera del aula ....(X)

Participación en clase .....(   )

Asistencia a prácticas .....(   )

Otros: ______

ANTECEDENTES

Asignatura:	Clave	Temas que se requieren:
Cálculo Diferencial e Integral	0059	I, III, VI, VII.
Algebra y Geometría Analítica	0058	I, IV, V.
Computadoras y Programación	0057	IV, V.
Cálculo Vectorial	0063	II, V, VI.
Ecs. Diferenciales y en Diferencias	064	III.
Métodos Numéricos	480	IV.

ASIGNATURAS CONSECUENTES

BIBLIOGRAFIA

Texto	Temas de la asignatura para los que se recomienda
Obregón Sanín Iván Teoría de la Probabilidad Ed. Limusa, S. A. México 1977	I, II, III, IV, V, VII.
Benjamin J. R. and Cornell C. A. Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers Ed. Mc Graw Hill U.S.A. 1970	I, II, III, IV, V, VII
Spiegel Murray R. Probabilidad y Estadística Ed. Mc Graw Hill, Serie Schaum México 1978	I, II, III, VI, VII, VIII.
Drake Alvin W. Fundamentals of Applied Probability Theory Ed. Mc Graw Hill U.S.A. 1967	I, II, III, V.
Olivera S.A., Zúñiga B. S. Series de Probabilidad y Estadística IMPOS Editores, S. A. México 1977	I, VI, VII, VIII.
Kirch Allan M. Estadística con FORTRAN Ed. Interamericana, S. A. México 1975	VI, VII, VIII.
Kreyszig Erwin Introducción a la Estadística Matemática Ed. Limusa Wiley México 1973	VII, VIII.

En la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del Instituto Politécnico Nacional, se imparten las carreras de:

Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica
Ingeniería Mecánica
Ingeniería Eléctrica
Ingeniería Aeronáutica ;

con duración de 9 semestres cada una (con excepción de Ingeniería Aeronáutica). En el 5° semestre de la carrera de Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica y de Ingeniería Eléctrica, como Matemáticas V se imparte el curso de: Probabilidad y Estadística, como asignatura obligatoria, así como: Matemáticas I: Cálculo Diferencial e Integral; Matemáticas II: Análisis Vectorial y Geometría Analítica; Matemáticas III: Ecuaciones Diferenciales ; y Matemáticas IV: Variable Compleja (incluyendo Series y Sucesiones); con 90 horas por "semestre" para Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica (6 horas a la semana × 15 = 90), y con 60 horas por "semestre" para Ingeniería Eléctrica (4 horas a la semana × 15 = 60).

El programa de Matemáticas V: Probabilidad y Estadística, contempla los siguientes temas: (ver programa anexo)

I. Probabilidad
II. Distribuciones de Probabilidad
III. Distribuciones Teóricas de una Variable
IV. Distribuciones Derivadas y Bidimensionales
V. Muestreo
VI. Mínimos Cuadrados y Correlación
VII. Procesos Aleatorios Continuos.

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica-UPC

PROGRAMA DE MATEMATICAS V

I. PROBABILIDAD

1.1 Experimentos, eventos y probabilidad. Definiciones.

1.2 Análisis combinatorio; permutaciones y combinaciones.

1.3 Ley aditiva de la probabilidad.

1.4 Probabilidad condicional.

1.5 Ley multiplicativa de probabilidad.

1.6 Independencia estadística.

II. DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

2.1 Variables aleatorias, variables aleatorias discretas, variables aleatorias continuas.

2.2 Funciones generatrices.

2.3 Función de densidad de probabilidad.

2.4 Función Delta de Dirac.

2.5 Promedios estadísticos.

2.6 Tablas de frecuencias. Histograma y polígonos de frecuencias.

2.7 Medidas de tendencia central, medidas de dispersión, medidas de asimetría.

2.8 Medidas de aplaneamiento o exceso, Kurtosis.

III. DISTRIBUCIONES TEORICAS DE UNA VARIABLE

3.1 Distribución binomial.

3.2 Distribución geométrica.

3.3 Distribución de Poisson.

3.4 Distribución uniforme, distribución normal.

3.5 Distribución Sinusoidal.

3.6 Distribución de Rayleigh.

3.7 Distribución Gamma.

3.8 Distribución Beta.

3.9 Distribución logaritmo-normal, Sistema de Pearson.

IV. DISTRIBUCIONES DERIVADAS Y BIDIMENSIONALES

4.1 Transformación de variables.

4.2 Distribución de una combinación lineal de variables aleatorias.

4.3 Teorema del límite central.

4.4 Distribuciones bidimensionales.

4.5 Momentos de distribuciones bidimensionales.

4.6 Distribuciones normales bidimensionales.

V. MUESTREO

5.1 Estimación de la media y la varianza.

5.2 Distribución muestral de la media desviación.

5.3 Intervalos de confianza para la media.

5.4 Desviación estándar desconocida.

5.5 Distribución muestral de la varianza.

5.6 Intervalos de confianza para la varianza.

5.7 Comparación de medias.

5.8 Rango de las muestras, comparación de varianzas: Prueba F .

5.9 Tablas de contingencia.

VI. MINIMOS CUADRADOS Y CORRELACION

6.1 Diagramas de dispersión.

6.2 Ajuste de los mínimos cuadrados medios.

6.3 Prueba de la pendiente de la línea de regresión.

6.4 Correlación.

6.5 Prueba de significación del coeficiente de correlación.

VII. PROCESOS ALEATORIOS CONTINUOS

7.1 Procesos estacionarios y ergódicos.

7.2 Autocorrelación y autocovarianza.

7.3 Propiedades de las funciones de autocorrelación.

7.4 Procesos Gaussianos.

7.5 Relaciones entre procesos y sistemas lineales.

7.6 Función de correlación cruzada de dos procesos aleatorios.

7.7 Función de correlación cruzada de funciones periódicas y aperiódicas.

BIBLIOGRAFIA

Moreno Bonett, A. y Jauffred, F.J. — "Elementos de Probabilidad y Estadística". Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A.

Maisel, Louis — "Probabilidad y Estadística". Fondo Educativo Interamericano, S.A.

Spiegel, Murray R. — "Probabilidad y Estadística". Serie SCHAUM'S, McGraw Hill.

Breinpohl, Arthur M. — "Probabilistic System Analysis", an introduction to probabilistic models, decisions and applications of Randon Processes. John Wiley and Sons, inc.

Julio/79

Podemos observar que la guía se presenta en forma muy general y aunque incluye subtemas como: Tablas de Contingencia (en el tema V), de gran utilidad en el aspecto experimental de la estadística, no se consideran de manera concreta las aplicaciones a la ingeniería que principalmente deberían enfocarse a la Ingeniería en Comunicaciones y a la Electrónica, que ofrece las opciones (especialidades) en:

—Acústica
—Comunicaciones
—Computación
—Control
—Electrónica .

Según el calendario de actividades en el Instituto Politécnico Nacional, se cuenta con 15 semanas por semestre (3 meses, 3 semanas) para cubrir el programa de estudios, y es el profesor quien puede decidir sobre la distribución del tiempo para cada tema. Esto podría parecer ventajoso para el profesor con experiencia que conoce y maneja todos los temas, pero resulta desventajoso para el profesor que requiera de una guía más detallada. Sea como sea, con un programa preciso y detallado se unifican los criterios.

El programa de Matemáticas V: Probabilidad y Estadística, vigente hasta 1978 (ver programa anexo), sí contempla las aplicaciones de la Probabilidad a la Ingeniería, como TEMA II, incluyendo:

2.1 Confiabilidad

2.2 Cálculos elementales de probabilidad de éxitos de sistemas
- 2.2.1 Circuitos en Serie
- 2.2.2 Circuitos en Paralelo
- 2.2.3 Sistema General.

PROGRAMA PARA MATEMATICAS V

(vigente hasta 1978)

OBJETIVOS:

Proporcionar al estudiante los conocimientos de matemáticas que en los campos de probabilidad y estadística son necesarios para el desarrollo de los cursos integrantes de su curriculum y que a la vez sirvan de base para los cursos de actualización, postgraduados, etc. Asimismo, dotarlo del criterio necesario para la aplicación efectiva de dichos conocimientos en el ejercicio de la profesión.

ANTECEDENTES	TEMAS	TIEMPO HRS.	%
	1. PROBABILIDAD		
	1.1 Modelos probabilísticos y determinísticos.		
Teoría de Conjuntos	1.2 Espacio muestra y Eventos.		
	1.3 Medida de probabilidad		
	1.4 Experimentos combinados. 1.4.1 Probabilidad Conjunta. 1.4.2 Probabilidad Marginal. 1.4.3 Probabilidad Condicional.		
	1.5 Eventos Independientes.		
	1.6 Regla de BAYES.		
	1.7 Técnicas de Conteo. 1.7.1 Permutaciones 1.7.2 Combinaciones 1.7.3 Diagramas de árbol.	16	26.7

ANTECEDENTES	TEMAS	TIEMPO HRS.	%
	2. APLICACIONES DE LA PROBABILIDAD A LA INGENIERIA.		
Teoría de Conjuntos	2.1 Confiabilidad		
	2.2 Cálculos elementales de probabilidad de éxitos de Sistemas. 2.2.1 Circuitos de serie. 2.2.2 Circuitos en Paralelo. 2.2.3 Sistema general.		
	2.3 Probabilidades condicionales en análisis de sistemas de confiabilidad.		
	2.4 Muestreo de Aceptación.	28	20
Series. Derivadas parciales. Integración con una y dos variables.	3. VARIABLES ALEATORIAS		
	3.1 Concepto de variable aleatoria discreta y continua.		
	3.2 Funciones de distribución discretas y continuas. 3.2.1 Distribución binomial 3.2.2 Distribución de Poisson 3.2.3 Distribución Uniforme 3.2.4 Distribución Normal de Gauss 3.2.5 Otras distribuciones.		
	3.3 Dos variables aleatorias.		

ANTECEDENTES	TEMAS	TIEMPO HRS.	%
	3.4 Distribuciones condicionales. 3.5 Variables aleatorias independientes.	40	20
Series. Derivadas parciales. Integración con una y dos variables.	4. VALORES ESPERADOS O ESPERANZA MATEMATICA. 4.1 Definición de valor esperado. 4.2 Propiedades de valor esperado. 4.3 Valor esperado de funciones de variable aleatoria. 4.4 Media, varianza y desviación estándar. 4.5 Función característica. 4.6 Covarianza y correlación. 4.7 Esperanza condicional. 4.8 Significado físico de los parámetros. 5. DISTRIBUCION DE DATOS 5.1 Regla de BAYES 5.2 Distribución de probabilidad. 5.3 Comentarios generales sobre estadística y Bayesiana. 5.4 Distribución empírica.	60	13.33

<u>LIBRO DE TEXTO</u>: PROBABILISTIC SYSTEMS ANALYSIS, an Introduction to Probabilistic Models, Decisions, and Applications of Randon Processes; by Arthur M. Breiphol; John Wiley and Sons, Inc.

2.3 Probabilidades Condicionales en análisis de Sistemas de confiabilidad.

2.4 Muestreo de Aceptación.

Pero, lamentablemente no incluía al proceso de Inferencia Estadística y carecía de una bibliografía suficiente.

La UPIICSA (Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales Administrativas), incluye en su división de ciencias básicas, correspondiente al departamento de Matemáticas, la asignatura: Probabilidad y Estadística I, para las licenciaturas en Administración, Ingeniería, Informática y Transporte; el grado semestral varía según la carrera.

Como objetivo general del curso:

"El alumno será capaz de analizar y organizar una muestra, así como calcular probabilidades de eventos, asignar la función probabilística adecuada para una variable aleatoria de tipo discreto, utilizar la distribución normal como modelo matemático y como una aproximación a las variables discretas binomial y Poisson".

En este programa se incluyen 5 temas con 60 horas disponibles en el "semestre":

I. ESTADISTICA DESCRIPTIVA

II. TEORIA DE LA PROBABILIDAD

III. VARIABLE ALEATORIA

IV. VARIABLE ALEATORIA DISCRETA Y SUS MOMENTOS

V. VARIABLE ALEATORIA CONTINUA Y SUS MOMENTOS.

U P I I C S A

Programa de Asignatura

FECHA: 28 de MAYO de 1979

SUSTITUYE AL DE FECHA: 1978

DIVISION: Ciencias Básicas

DEPARTAMENTO: Matemáticas

ASIGNATURA: Probabilidad y Estadística I CLAVE: CREDITOS:

LICENCIATURA: Administración, Ingeniería, Informática y Transportes. GRADO SEM.: VARIA

OBJETIVO GENERAL DEL CURSO: El alumno será capaz de analizar y organizar una muestra, así como calcular probabilidades de eventos, asignar la función probabilística adecuada para una variable aleatoria de tipo discreto, utilizar la distribución normal como modelo matemático y como una aproximación a las variables discretas binomial y Poisson.

ASIGNATURAS ANTECEDENTES: Matemáticas I , Matemáticas II

ASIGNATURAS RELACIONADAS CON ESTE PROGRAMA: Probabilidad y Estadística II

DURACION DEL CURSO:	TEORIA:	LABORATORIO:
EN SEMANAS: 15	HORAS POR SEMANA: 4	HORAS POR SEMANA:
EN HORAS: 60	HORAS TOTALES: 60	HORAS TOTALES:

TECNICAS UTILIZADAS PARA EL DESARROLLO DE LA CATEDRA: Exposición por parte del profesor. Temas a desarrollar por parte del alumno; presentación de ejemplos ilustrativos.

AUXILIARES DIDACTICOS: Tablas de Distribuciones Probabilísticas

FORMA DE EVALUACION: Realización de (tres) exámenes parciales y uno final propuesto por la academia, que comprenderá todo un programa

ASIGNATURA: Probabilidad y Estadística I CLAVE: ______ CREDITOS: ___ HOJA No. 2 DE 8

PROGRAMA SINTETICO	PROGRAMA DETALLADO	OBJETIVOS ESPECIFICOS DEL TEMA	TECNICA UTILIZADA	LIBRO	HORAS DE CLASE	HORAS EXTRA CLASE
I. ESTADISTICA DESCRIPTIVA.	I. ESTADISTICA DESCRIPTIVA					
	I.1 Introducción. ¿Qué es estadística?	Se espera que al terminar este capítulo, el estudiante sea capaz:	E.P.	2	1	1
	I.2 Fenómenos aleatorios y fenómenos determinísticos.	a) Distinguir entre un fenómeno aleatorio y un determinístico.	E.P.	2	1/2	1/2
	I.3 Regularidad estadística.	b) Dado un conjunto de datos, construir una tabla de frecuencia que permita un mejor análisis de ellos.	P.E.	2	1/2	1/2
	I.4 Población de datos y muestra.		E.P.	2	1/2	1/2
	I.5 Presentación y procesamiento de datos.	c) Determinar los principales parámetros de una muestra ($\bar{X}$, Mediana, Sx) ya sea para una muestra agrupada o no agrupada.	P.E.	2,5	1/2	1/2
	I.6 Frecuencia		P.E.	2,5 8,9 10	1	1
	I.6.1 Frecuencias relativas.					
	I.6.2 Frecuencia relativa acumulada.	d) Utilizar los cálculos simplificados para obtener los parámetros $\bar{X}$, Sx .				
	I.6.3 Función de distribución de una muestra					
	I.7 Histograma y polígono de frecuencia.		P.E.	2	1	1
	I.8 Medidas de tendencia central.		E.P.	2,5		2
	I.8.1 Media de una muestra			2,5		
	I.8.2 Moda de una muestra			2,5		
	I.8.3 Mediana de una muestra			2,5		

PROGRAMA SINTETICO	PROGRAMA DETALLADO	OBJETIVOS ESPECIFICOS DEL TEMA	TECNICA UTILIZADA	LIBRO	HORAS DE CLASE	HORAS EXTRA CLASE
	I.9 Medidas de dispersión I.9.1 Rango de una muestra I.9.2 Varianza de una muestra. I.9.3 Desviación estándar de una muestra.		E.P.	2,5	2	2
	I.10 Cálculo simplificado de la media y la varianza de una muestra		I.A.	5	1	1
	I.11 Cambio de variable		I.A.	2	1	1
	I.12 Media y varianza a partir de la función de frecuencia.		E.A.	5	1	1
	I.13 Media y varianza de una muestra agrupada.		E.P.	2	1	1
II. TEORIA DE LA PROBABILIDAD.	II. TEORIA DE LA PROBABILIDAD	Se espera que <u>al terminar este capítulo</u>, el alumno sea capaz de:				
	II.1 Introducción histórica.		I.A.		1	1
	II.2 Espacio muestral	a) Describir el espacio muestral de un experimento.	E.A.	12	1	1
			E.P.	1	1	
	II.3 Eventos, álgebra de eventos.		P.E.	3	1	1
	II.4 Definición de la función de probabilidad.	b) Expresar en notación de conjuntos un evento definido en palabras.	E.P.	4	2	2
			P.E.	1	2	2

PROGRAMA SINTETICO	PROGRAMA DETALLADO	OBJETIVOS ESPECIFICOS DEL TEMA	TECNICA UTILIZADA	LIBRO	HORAS DE CLASE	HORAS EXTRA CLASE
	II.5 Propiedades de la probabilidad. II.5.1 Probabilidad del evento complemento. II.5.2 Probabilidad de la unión de eventos que no son mutuamente excluyentes.	c) Distinguir entre eventos mutuamente excluyentes y los que no lo son d) Asignar adecuadamente probabilidad a eventos compuestos.	E.P. P.E.	1 2	2 2	2 2
	II.6 Análisis combinatorio II.6.1 Muestras ordenadas. II.6.2 Permutaciones II.6.3 Muestras con reemplazo. II.6.4 Muestras sin reemplazo. II.6.5 Combinaciones, Triángulo de Pascal, número combinatorio II.6.6 Particiones.	e) Aplicar el análisis combinatorio a las asignaciones de probabilidad. f) Distinguir entre permutaciones y combinaciones. g) Utilizar la definición de probabilidad condicional para ampliar el cálculo de probabilidades.	E.P. P.E.	1 2	5	5 5
	II.7 Probabilidad condicional. II.7.1 Regla de multiplicación. II.7.2 Teorema de la probabilidad total.	h) Distinguir entre eventos independientes y mutuamente excluyentes.	E.P. P.E.	1 2 4	4 4	4 4

ASIGNATURA: Probabilidad y Estadística CLAVE: ____ CREDITOS: ____ HOJA No. 5 DE 8

PROGRAMA SINTETICO	PROGRAMA DETALLADO	OBJETIVOS ESPECIFICOS DEL TEMA	TECNICA UTILIZADA	LIBRO	HORAS DE CLASE	HORAS EXTRA CLASE
III. VARIABLE ALEATORIA	III. VARIABLE ALEATORIA III.1 Definición de variable aleatoria con función.	Se espera que al terminar este capítulo el alumno sea capaz de: a) Definir una variable aleatoria.	E.P.	1 2 4	2	2
	III.2 Ejemplos de distintas variables aleatorias sobre un mismo espacio muestral. (Discreta y continua).	b) Distinguir entre una variable discreta a una continua.	P.E.	1 2 4	2	2
	III.3 Variable aleatoria discreta. III.3.1 Función de probabilidad o de densidad (de una V.A. discreta). III.3.2 Esperanza y varianza de una variable aleatoria discreta.	c) Definir función de probabilidad discreta. d) Calcular la esperanza y la varianza de una variable discreta. e) Dada una variable aleatoria discreta, construir su función de probabilidad.	E.P. P.E.	1 2 4	3	3
	III.4 Suma y multiplicación de una variable aleatoria por constantes.		E.P.	1 2 4	1	1
	III.4.1 Propiedades de EX y VA (x) de variables aleatorias.		E.P.	4 2 4	1	4

ASIGNATURA: Probabilidad y Estadística CLAVE: ___ CREDITOS: ____ HOJA No. 6 DE 8

PROGRAMA SINTETICO	PROGRAMA DETALLADO	OBJETIVOS ESPECIFICOS DEL TEMA	TECNICA UTILIZADA	LIBRO	HORAS DE CLASE	HORAS EXTRA CLASE
IV. VARIABLE ALEATORIA DISCRETA Y SUS MOMENTOS	IV. VARIABLE ALEATORIA DISCRETA Y SUS MOMENTOS.	Se espera que al terminar este capítulo el alumno sea capaz de:	E.P.	1,2 4	1	1
	IV.1 Binomial, Bernoulli como caso especial de la binomial.	a) Distinguir entre una variable binomial, geométrica, hipergeométrica, Poisson.	P.E. E.P.	 1,2,4	3 1	3
	IV.2 Geométrica		P.E.	1,2,4	1	
	IV.3 Hipergeométrica	b) Asignar probabilidades a la variable utilizando la distribución adecuada de probabilidad, así como calcular sus parámetros (μ, σ).	IA; EA	1,2,4	1	
	IV.4 Poisson		EP; PE	1,2,4	3	
	IV.4.1 Como aproximación de la binomial.		E.P.	1 2 4		
V. VARIABLE ALEATORIA CONTINUA Y SUS MOMENTOS	V. VARIABLE ALEATORIA CONTINUA Y SUS MOMENTOS.	Se espera que al final de este capítulo el alumno sea capaz de:	E.P. E.P.	1,2 1,2	1 1	1 1
	V.1 Definición de la variable aleatoria continua.	a) Definir una V.A. continua.	E.P. P.E.	1,2	1	1
	V.2 Definición y propiedades de la función de densidad	b) Calcular probabilidades para variables continuas.	P.E.	1,2	2	2
	V.3 Definición y propiedades de la función de distribución.	c) Trabajar adecuadamente las distribuciones uniforme, normal, al asignar probabilidades.	E.P. P.E.	1,2	1	1
	V.4 Cálculo de la probabilidad.		P.E.	1,2	2	2

ASIGNATURA: Probabilidad y Estadística CLAVE: ____ CREDITOS: ____ HOJA No. 7 DE 8

PROGRAMA SINTETICO	PROGRAMA DETALLADO	OBJETIVOS ESPECIFICOS DEL TEMA	TECNICA UTILIZADA	LIBRO	HORAS DE CLASE	HORAS EXTRA CLASE
	V.5 Media y varianza de una variable aleatoria continua.	d) Manejar las tablas de la distribución normal, independientemente del libro.	I.A. E.A.	1,2	1	1
	V.6 Distribución, especiales continuas y sus momentos		E.A.	1,2		
	V.6.1 Uniforme (con ejemplos)		E.P.	1		4
	V.6.2 Normal		P.E.	2		4
	V.6.2.1 Uso de tablas de normal.		P.E.	4		4
	V.6.2.2 Problemas de variables aleatorias normal.					

CLAVES DE LAS TECNICAS UTILIZADAS:

EP - Exposición del profesor

DC - Discusión de casos

MR - Mesa Redonda

PE - Presentación de ejemplos ilustrativos

EA - Exposición por los alumnos

IA - Investigación por los alumnos.

37

ASIGNATURA: Probabilidad y Estadística CLAVE: ____ CREDITOS: ____ HOJA No. 8 DE 8

LIBRO No.	T I T U L O	A U T O R	EDITORIAL
1	PROBABILIDAD Y APLICACIONES ESTADISTICAS.	Paul L. Meyer	Fondo Educativo Interamericano
2	INTRODUCCION A LA ESTADISTICA MATEMATICA.	E. Kreyszig	LIMUSA
3	INTRODUCCION A LA TEORIA DE LAS PROBABILIDADES Y SUS APLICACIONES.	William Feller	LIMUSA
4	SCHAUMS DE PROBABILIDAD	Murray R. Spiegel	Mc. Graw Hill
5	SCHAUMS DE ESTADISTICA	Murray R. Spiegel	Mc. Graw Hill
6	TEORIA DE LAS PROBABILIDADES Y ESTADISTICA MATEMATICA.	V.E. Gmurman	MIR
7	INTRODUCCION Y METODOS DE PROBABILIDAD.	Alberto Ruiz Moncayo	Trillas
8	ESTADISTICA BASICA PARA NEGOCIOS Y ECONOMIA.	Paul G. Hoel - Raymond J. Jessen	C.E.C.S.A.
9	ESTADISTICA ELEMENTAL	Paul G. Hoel	C.E.C.S.A.
10	ELEMENTOS DE PROBABILIDAD Y ESTADISTICA.	Alberto Moreno Bonett-Francisco J. Jauffred	Representaciones y Servicios de Ingenieros.
11	COLECCION CIENTIFICA DE "LIFE"	LIBROS MATEMATICAS	LIBROS MATEMATICAS
12	COLECCION ZIGMA		Grijalbo

Los temas típicos restantes, son considerados en un 2do. curso de probabilidad y Estadística (2 cursos EN TOTAL).

Los programas son guías detallados con objetivos por tema, muy generales, por lo que la bibliografía es muy variada.

La Estadística y Probabilidad que se aplica a la Economía y a la Administración, es muy diferente (como es de pensarse) a la que se aplica en Ingeniería; y, a su vez, dentro de la Ingeniería las diversas especialidades la contemplan en aspectos diferentes, por lo tanto es necesario enfocarla según los intereses de los alumnos.

1.4. CONCLUSIONES

Si los que estudiamos la carrera de Matemático, con mentes entrenadas a aspectos abstractos, nos interesáramos más y más en las aplicaciones de las ramas de las matemáticas, a la Ingeniería, a la Economía, a la Psicología, etc., lograríamos un panorama más amplio de nuestra profesión; para esto, sólo tenemos que dar un paso. Cuando que en otras carreras profesionales, la comprensión verdadera de las matemáticas es la que se tiene que lograr cuando el campo de aplicación es el conocido, y es cuando se hace necesario empezar a escalar en el "robusto árbol de las matemáticas", antes de <u>intentar con pleno conocimiento</u> aplicarlas.

Si nuestro interés y habilidades se enfocan hacia la educación, en la enseñanza de la ciencia intentemos plantear el aprendizaje a través de problemas. Es cierto que bajo este contexto se hace necesario que <u>el profesor</u> —ya no considerado como el sujeto que "sabe" cosas que puede "enseñar" a sus alumnos (en concepción tradicional)— comprenda la teoría que va a ser explicada a través de problemas para que pueda ser el <u>orientador de sus alumnos</u> [14] .

Cuando el profesor cuenta a sus alumnos algo que a su vez le han contado, y que en la mayoría de los casos no ha entendido a fondo, se encuentra en una situación de incapacidad, no sólo para motivar situaciones de interés en los alumnos, sino para aplicar la teoría a un nuevo problema; bajo este planteamiento resulta indiferente que los conocimientos transmitidos estén actualizados o encierren ideas pedagógicas.

Se pretende que los alumnos "se apropien" de los conocimientos, que no sean productos ya elaborados que deban aceptar tal cual, sino que intervenga un proceso de elaboración propio sobre el tema de estudio. Que el alumno se convierta en autor de su propio aprendizaje.

La enseñanza aparece a veces revertida de un ropaje "moderno", de aspectos "innovadores" que se introducen pero que no cambian la forma de enseñar, sino que tratan sólo de amenizarla. Lo que se tiene, sigue siendo la transmisión de un producto ya elaborado, acompañado en esta ocasión de actividades que lo hagan ameno [6].

Se propone, por ejemplo, que en el estudio de un circuito eléctrico se analicen los elementos que intervienen, su composición y funcionamiento, las distintas formas de conectarlos, etc., que van dando lugar a una serie de conclusiones que aportan conocimientos prácticos y concretos que posibilitan una comprensión de los fenómenos eléctricos. Esta base permitirá al profesor enfocar de una forma distinta el tema, ya que a través de su experiencia propia habrá llegado a conclusiones personales que no tienen porqué ser forzosamente válidas, como tampoco tienen porqué serlo las de los libros, pero que puede argumentar y verificar mediante experimentación. Quizá lo más importante de estas experiencias es que permiten comprobar al profesor que el hacer ciencia no es algo que requiere mucho tiempo o material complicado de laboratorio, sino que comienza cuando planteamos un problema concreto y le damos una solución basándonos en la utilización de los procesos de observación, experimentación, formulación de hipótesis, etc. [6] [5].

Por lo tanto, ser profesor es toda una profesión y una gran responsabilidad si tomamos en cuenta que se tiene la oportunidad de "despertar" —principalmente en niños y jóvenes— a ese espíritu científico que se ha manifestado hasta ahora —según la historia de la ciencia— sólo en unos cuantos.

C A P I T U L O   I I

2.1. NECESIDAD DE PLANIFICAR UN PROYECTO DIDACTICO DE PROBABILIDAD Y ESTADISTICA EN LAS ESCUELAS DE INGENIERIA.

Si pensamos en los sorprendentes adelantos de la ciencia y la tecnología que en el mundo se han logrado, en teorías ató micas y astronómicas, en las diversas aplicaciones que se le han dado a Sistemas de Cómputo, en las teorías futuristas sobre Sistemas de Comunicación donde la Electrónica no tiene límite, etc.; nos damos cuenta de que la televisión, el cine, las revistas, los periódicos, muchas veces provocan en la niñez y en la juventud el querer ser partícipes de toda esa nueva tecnología, como científicos o como operadores de estos nue vos sistemas.

De aquí que muchos niños son motivados y muchos jóvenes lo han sido ya hacia la Ingeniería, principalmente en Electrónica, Computación y Comunicaciones.

La población estudiantil en estas áreas en las escuelas de Ingeniería, se incrementa notablemente, cosa que resulta muy afortunada para nuestro país que requiere por los mismos avances que he mencionado, de especialistas profesionales y técnicos.

Si de las escuelas de Ingeniería se pretende que egresen esos profesionistas que el país necesita, es fundamental enton ces que los métodos educativos que se aplican en estas escuelas, no sólo contemplen esas motivaciones, sino que también las fortifiquen con fundamentos científicos que las hagan más atractivas, y que no sean los métodos educativos los que provoquen la desilusión de los jóvenes estudiantes, manifiesta en deserción, simplemente porque la profesión no es lo que ellos esperaban.

Creo que las matemáticas, hasta ahora, son las que tienen "menos sentido y significado" para los alumnos, comparativamente con otras materias; lo abstracto de su presentación en los planes de estudio no es el único problema que se podría mencionar y, sin embargo, es un problema importante en las Matemáticas Aplicadas, como: la Investigación de Operaciones, la Probabilidad y la Estadística.

Por tanto, enfocamos nuestra atención en planificar un Proyecto Didáctico para la materia: Probabilidad y Estadística en las Escuelas de Ingeniería.

Trataremos aspectos didácticos y pedagógicos que se presentan en el proceso enseñanza-aprendizaje de la Probabilidad y Estadística en las Escuelas de Ingeniería, de donde egresan los especialistas en Comunicaciones y Electrónica. Daremos los lineamientos, de acuerdo a lo anterior, para estructurar un programa de estudios de Probabilidad y Estadística, donde se tome en consideración que las "barreras mentales" ante las matemáticas existen en los alumnos y que, por tanto, una táctica pedagógica es necesaria.

2.2. ELECCION DE OBJETIVOS

Si la estadística nos da procedimientos para obtener conocimiento de la naturaleza a través de la observación y la experimentación con fundamento científico en la Teoría de la Probabilidad, y que ésta a su vez encuentra su modelo matemático en la Teoría de los Conjuntos; esta rama de las Matemáticas Aplicadas tiene TODO para que los jóvenes estudiantes "descubran" los conceptos y aprendan los métodos estadísticos de una manera natural, no forzada; y así descubran que la materia Probabilidad y Estadística les es útil en su profesión. Es decir:

Si buscamos que los alumnos de una escuela de ingeniería le vean sentido a la Probabilidad y Estadística dentro de su carrera profesional, es necesario que el Desarrollo Curricular de esta materia contemple como parte fundamental las aplicaciones de la Probabilidad y Estadística a la Ingeniería.

C A P I T U L O   I I I

3.1. ANALISIS MATEMATICO DEL CONTENIDO

3.1.1 PRIMORDIALMENTE DE NECESIDADES EN CURSOS DONDE SE UTILICE LA PROBABILIDAD Y LA ESTADISTICA EN LA CARRERA DE INGENIERIA EN COMUNICACIONES Y ELECTRONICA.

Tomemos en cuenta los temas de estudio de algunos cursos en la carrera de Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica, del Instituto Politécnico Nacional, donde interviene en forma directa e importante la Probabilidad y la Estadística:

MATERIA:	SEMESTRE:
Teoría de los Circuitos III	5°

El alumno: conoce los elementos de los circuitos en serie, en paralelo y teoremas de redes eléctricas. Aprende el caso general de los circuitos eléctricos. Analiza los circuitos con la Transformada de Laplace.

CONCEPTOS DE PROBABILIDAD:

Eventos dependientes y eventos independientes relacionados con circuitos en serie y en paralelo. Se calcula la probabilidad de que exista corriente entre 2 terminales [15].

También, si se tratara de un sistema eléctrico con interruptores de varios tipos, se calcula la probabilidad de que una falla en el circuito se eliminara con una llave que cierre los interruptores, tomando en cuenta si éstos funcionan dependiente o independientemente [15]. Considerando la ley de Ohm: $M = Ik$ donde I y k son la corriente y la resistencia del circuito. Si I y k son variables aleatorias independientes, entonces M es una variable aleatoria donde:

$$\text{Esperanza} = E(M) = E(I)E(k)$$

y

$$\text{Varianza} = Var(M) = [E(k)]^2 V(I) + [E(I)]^2 V(k)$$

MATERIA:	SEMESTRE:
Electrónica I y II	5° y 6°

El alumno: estudia la dinámica de partículas cargadas en campos eléctricos y/o magnéticos en el vacío. Dinámica de electrones en sólidos. Dinámica de partículas cargadas en gases y Emisión Electrónica. Estudiará Dispositivos Electrónicos.

LA PROBABILIDAD en la Teoría de la Confiabilidad.

Se considera un componente (o conjunto de componentes armando un sistema) que se pone bajo una especie de "tensión", podría ser un fusible puesto en un circuito o un instrumento electrónico puesto en servicio. Podemos suponer un estado de "falla" ya que el fusible puede quemarse o el instrumento electrónico puede dejar de funcionar. El tiempo para fallar (o la duración) T puede considerarse como una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad f. T no puede ser predicho por un modelo determinístico ya que componentes "idénticos", sometidos a esfuerzos "idénticos", fallarán en tiempos diferentes y de improviso; por lo tanto, el uso de un modelo probabilístico considerando T como una variable aleatoria, parece ser el <u>único</u> enfoque realista.

Hay muchos tipos de componentes cuya conducta de falla puede representarse por la distribución normal, o puede describirse mediante una distribución exponencial del tipo Poisson; también encontraremos la Ley Gamma de fallas; es decir, se estudia la ley de fallas (o Confiabilidad) del componente o del sistema por medio de modelos probabilísticos [15] .

MATERIAS:	SEMESTRES:
Teoría Electromagnética II y III	5° y 6°

El alumno: ha estudiado las ondas planas en medios dieléctricos y en medios conductores. Aprende la ecuación de onda y su solución en guías de onda (discontinuidades e impedancia). Estudiará los parámetros de una antena, arreglos de antenas, impedancia. Antenas de frecuencias múltiples. Medición de antenas.

CONCEPTOS DE PROBABILIDAD: En el análisis de señales (emisión y recepción).

Una señal es una función del tiempo $f(t)$, que puede estar dada mediante <u>muestras</u> según el teorema general de muestreo:

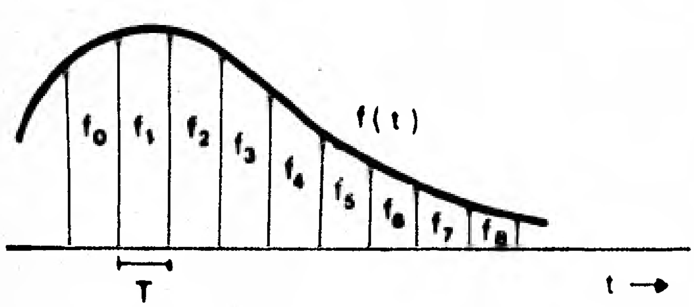
"Si se divide el intervalo de tiempo de una
señal limitada en banda en partes iguales

> para formar subintervalos tales que cada uno tenga una duración en T segundos, donde T es menor que $\frac{1}{2}$ fm (fm = frecuencia máxima) y si se toma una muestra instantánea de cada subintervalo, entonces el conocimiento de la magnitud instantánea de cada muestra y de los instantes en que se toma la muestra de cada subintervalo nos da toda la información de la señal original".

Como un caso especial de este teorema general, está el Teorema de Muestreo Uniforme (pues se refiere a la especificación de una señal dada mediante muestras suyas tomadas a intervalos uniformes de $\frac{1}{2}$ fm segundos).

> "Una señal limitada en banda que no contiene componentes espectrales mayores que la frecuencia fm Hz está determinada en forma única por sus valores en intervalos uniformes menores de $\frac{1}{2}$ fm segundos".

Esto implica que si la Transformada de Fourier de f(t) vale cero fuera de determinada frecuencia $\omega_m = 2\pi$ fm, entonces toda la información acerca de f(t) queda contenida en sus muestras uniformemente esparcidas a intervalos menores de $\frac{1}{2}$ fm segundos:



Se toma una muestra de la función f(t) cada T segundos ($T \leq \frac{1}{2}$ fm), es decir, se muestrea la función con rapidez igual o mayor que 2 fm muestras por segundo*.

---

*Es razonable que se pierda información cuando el muestreo es lento. Se debe muestrear la señal por lo menos 2 veces en cada período o ciclo de su componente de frecuencia más alta.

A las muestras sucesivas se les denota por: $f_0, f_1, f_2, \ldots,$ etc.

Del Teorema de Muestreo se deduce que estas muestras contienen toda la información acerca de $f(t)$ en cada valor de t.

El intervalo máximo de muestreo $T = \frac{1}{2} fm$ se conoce como Intervalo de Nyquist [9].

NOTA:

EN LA MATERIA:	SEMESTRE:
Teoría de la Comunicación I	7°

El alumno estudiará: Análisis de Señales. Modulación: en A.M., angular y discreta. Ruido.

MATERIA:	SEMESTRE:
Acústica I	6°

El alumno estudiará: El sonido y sus características. Transmisión de sonido. Medición de sonido y ruidos. Tubos sonoros (entre otros temas).

CONCEPTOS DE PROBABILIDAD:

En el proceso de transmisión de ondas eléctricas, existe una contaminación a causa de señales de ruido presentes en todas partes y generadas por numerosos fenómenos naturales o provocados por el hombre; el apagado y encendido de equipo eléctrico, las lámparas fluorescentes emiten constantemente señales de ruido aleatorias. Los fenómenos naturales como las tormentas y descargas eléctricas, la radiación solar, se consideran como fuentes de ruido. Otro productor importante de ruido en todos los sistemas eléctricos es el ruido de fluctuación, como el térmico en resistores y el de disparo en dispositivos activos.

El ruido de disparo ("Shot Noise") se produce en dispositivos con tubos al vacío y con semiconductores. En los tubos al vacío este tipo de ruido se debe a la emisión aleatoria de electrones del cátodo. El ruido térmico (ruido blanco) se debe al movimiento aleatorio de los electrones libres en medios conductores, tales como resistores; debido a su energía térmica, cada electrón libre dentro de un resistor está en movimiento; la trayectoria es aleatoria debido a sus colisiones con la estructura de celosía, el efecto neto del movimiento de todos los electrones constituye una corriente eléctrica que fluye a través del resistor, la dirección del flujo es aleatoria y su valor medio es cero. El ruido térmico (ruido blanco), tiene como función de densidad espectral una cte (constante): [9]

$$g_{\omega'}(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \qquad -\infty < \omega < \infty$$

Para describirlo, el ruido blanco se interpreta como la derivada con respecto al tiempo de un proceso $\omega(t)$ llamado: Proceso de Wiener $\{\omega'(t),\ t \geq 0\}$. En el laboratorio se toma como ruido blanco un proceso con densidad espectral constante en una banda de frecuencia "ancha", y nula fuera de ella [12].

El ruido blanco puede ser Gaussiano, en tiempos discretos se tiene una sucesión de variables aleatorias gaussianas independientes con media cero y varianza uno. Así, la función de densidad espectral será la constante:

$$g_{\omega'}(\omega) = \frac{1}{2\pi}, \quad -\infty < \omega < \infty$$

igual que la luz blanca [13].

MATERIA:	SEMESTRE:
Teoría de la Comunicación II	8°

El alumno estudiará: Introducción a la Comunicación digital. Análisis de señales aleatorias. Introducción a la Teoría de la Información. Análisis de señales digitales. Distorsión de la señal en el canal de transmisión. Métodos de modulación digital (entre otros temas).

CONCEPTOS DE PROBABILIDAD:

Ya hemos visto que la información de una señal continua limitada en banda se puede representar por un número discreto de valores-muestra por segundo, por lo tanto es posible representar estas muestras mediante un código de pulsos binarios. (El principal resultado de la Teoría de la Información es que cualquier forma de información para transmitir, siempre puede representarse en notación binaria, sin perder generalidad).

Se demuestra que todo sistema (o canal) de comunicación es capaz de transmitir determinada cantidad de información por segundo, esto se conoce como la capacidad C del canal; así, determinado canal sólo puede transmitir una cantidad de información no mayor de C bits (binary unit) por segundo. La capacidad del canal está limitada por el ancho de banda y por la señal de ruido. Se puede demostrar con rigor que en un canal afectado por ruido blanco gaussiano, se puede transmitir información con una velocidad no mayor de C bits por segundo. (Ley de Shannon-Hartley, considerada como el Teorema Central de la Teoría de la Información).

Sabemos, por el Teorema de Muestreo, que la información de una señal continua de banda limitada a fm Hz queda completamente determinada por 2 fm muestras por segundo. La información que contiene cada muestra depende de los niveles o valores discretos que puede tomar (# infinito) por lo tanto, la información transmitida por cada muestra es de infinitos bits. La información de una señal continua y limitada en banda es infinita. En presencia de ruido, la capacidad del canal es finita, por tanto es imposible transmitir toda la información. En ausencia de ruido la capacidad del canal es infinita y se puede transmitir cualquier señal, pero sigue siendo imposible transmitir toda la información de una señal continua, a menos que la potencia de señal transmitida sea infinita. Debido al ruido, siempre existe una cierta inseguridad en la señal que se recibe y aunque fuera posible transmitir toda la información de una señal continua, es imposible recuperar esta cantidad infinita de información en el receptor, ya que la cantidad de información que se puede recuperar por segundo, en el receptor, es de no más de C bits por segundo, y esto es precisamente lo que sucede cuando se transmite en forma directa una señal continua, como por ejemplo AM y FM.

De otra manera, en lugar de transmitir toda la información en el transmisor, se puede aproximar la señal para que su contenido de información se reduzca a C bits por segundo y transmitir esta señal aproximada que tiene un contenido finito de información; con esto se recupera toda la información que se ha transmitido (esto es exactamente lo que se hace en Modulación por Pulsos Codificados). Esto significa que la señal que se recibe será réplica exacta de la señal aproximada sin incertidumbre (aunque se introduce algo de ruido, los niveles están suficientemente separados para distinguirse en el receptor). En la práctica esto se realiza mediante diferentes tipos de modulación. La modulación de la señal no modifica en absoluto el contenido de información de la señal. La señal modulada se aplica a la entrada del demodulador, la salida del demodulador produce la señal original f(t) con ancho de banda fm, más ruido. En un demodulador ideal, la información I de la señal de salida debe ser idéntica a la de la señal de entrada.

Ya es evidente la diferencia fundamental entre los sistemas de comunicación de datos digitales y de datos continuos (o datos analógicos). En la comunicación digital interviene la transmisión y detección de una forma de un grupo finito de formas conocidas, mientras que en la comunicación continua, existe un número infinito de mensajes y las formas de onda correspondientes no se conocen. El sistema MPC es un sistema de comunicación de datos digitales que se emplea para transmitir datos continuos. Esta transmisión se vuelve posible gracias al proceso de cuantificación, en este proceso se aproximan las señales continuas para que puedan tomar tan sólo ciertas amplitudes discretas. Esencialmente, esto es <u>la digitación de la señal continua</u>. Los mensajes se pueden transmitir mediante un # finito de símbolos (o niveles).

En los sistemas digitales cuando la señal llega al receptor, es necesario decidir cuál de las n formas de onda conocidas se ha transmitido, y el ruido puede provocar un error en la toma de decisión. La decisión se puede facilitar si pasamos la señal por un filtro que acentúe la señal útil S(t) y suprima, al mismo tiempo, el ruido. El filtro que realiza esto se conoce como filtro óptimo.

Mediante el Teorema Central del límite se puede demostrar que una señal compuesta de un gran número de señales relativamente independientes, tiende a ser gaussiana. Como la mayoría de las señales de ruido son el resultado de numerosas perturbaciones relativamente independientes, el ruido de disparo y el ruido térmico caen dentro de esta categoría; por lo tanto, se justifica en la mayoría de los casos, que el ruido es una señal aleatoria con amplitudes en distribución de Gauss, fundamental en el estudio del filtro óptimo [9].

MATERIA:	SEMESTRE:
Acústica II	7°

El alumno estudiará: Técnicas de las frecuencias audibles. Altavoces. Auriculares <u>telefónicos</u> (entre otros temas).

MATERIA: Sistemas de Comunicación 1

SEMESTRE: Optativa de 8° ó 9°

El alumno estudiará: Aspectos generales de la telefonía. Líneas telefónicas. Circuitos de transmisión. Sistemas de multicanalización. Conmutación. Señalización. Introducción al dimensionamiento de Centros de Conmutación.

LABORATORIO:

Constitución de la red urbana. Líneas telefónicas. Medición de redes. Aparato telefónico automático. Conversores de 2 a 4 hilos. Sistema de onda portadora. Selectores de progresión. Sistemas de conmutación urbano y de larga distancia.

LA PROBABILIDAD EN: El Tráfico Telefónico.

La red telefónica da su máximo rendimiento técnico y económico cuando tiene un planeamiento bien estudiado. La meta es conseguir un equilibrio entre la <u>necesidad de comunicación</u> que tienen los abonados y el <u>equipo necesario</u> para cubrir esta necesidad, cualquier desequilibrio entre estos dos factores causa perjuicios económicos; por lo tanto, es importante hacer <u>pronósticos</u> a largo y corto plazo, en cuanto al desarrollo lógico del tráfico telefónico.

La densidad telefónica es la cantidad de teléfonos en servicio por 100 habitantes; es decir, el número de aparatos principales por 100 habitantes. La finalidad que se persigue es estimar el crecimiento de la densidad telefónica mediante un pronóstico ininterrumpido de 20 años. Esto se puede realizar, por ejemplo:

—basando el futuro crecimiento en el ritmo de crecimiento anterior de la densidad telefónica en un país;

—comparando con un país de desarrollo semejante, que haya alcanzado un nivel económico más alto;

—suponiendo que el crecimiento sea constante;

—buscando los factores económicos que expliquen el crecimiento.

También se ha mostrado que el Producto Nacional Bruto (PNB) de un país, es un buen punto de partida para lograr un buen pronóstico del futuro crecimiento de la densidad telefónica, esto, por 2 razones:

- la experiencia muestra que existe una clara relación entre el PNB y la densidad de aparatos;
- las ciencias económicas permiten establecer pronósticos seguros a largo plazo del PNB.

Por otro lado, se relaciona la densidad telefónica con: El tráfico telefónico que se mide en Erlangs* y es el valor

*Agner K. ERLANG, eminente matemático danés, nacido en 1878 en Loenborg (villa cercana a la pequeña ciudad de Tarm), aplicó la Teoría de Probabilidades a los problemas de tráfico telefónico, por lo que su nombre fue ampliamente conocido.

A principios de 1909 publicó su primer trabajo, titulado: "Sanndsynlighedsregning og Telefonsamtaler" (Teoría de Probabilidades y Conversaciones Telefónicas), en el cual demostró que las llamadas telefónicas distribuidas al azar, siguen la ley de Distribución de Poisson.

En 1917, Erlang publicó su trabajo más importante: "Loesning af nogle Problemer fra Sandsynlighedsregningen af Betydning for de Automatiske Telefoncentraler" (Solución de algunos problemas en la Teoría de Probabilidades de importancia en Centrales Telefónicas Automáticas), que contiene sus fórmulas para la pérdida y el tiempo de espera, las cuales desarrolló sobre la base del principio del equilibrio estadístico. Estas fórmulas, ahora bien conocidas, son de importancia fundamental para la teoría del tráfico telefónico.

Casi todos sus trabajos fueron publicados en danés, como artículos en varias revistas, pero los más importantes fueron traducidos al inglés, francés y alemán, y publicados en revistas extranjeras.

Erlang trabajó en la Compañía Telefónica de Copenhagen por 20 años, hasta que en febrero de 1929 falleció a la edad de 51 años. Por sugerencia de la Administración Telefónica Sueca al C.C.I.F. (Comité Consultantif International Communications Telephoniques a grande distance) fue aceptado internacionalmente el nombre "Erlang" como la unidad de intensidad de tráfico telefónico, en la sesión plenaria del 28 de octubre de 1946 en Montreaux, Suiza [11].

medio de la cantidad de conversaciones simultáneas.

Llamaremos el tráfico A , $A = y \times s$ donde:

y : cantidad de llamadas por espacio de tiempo.

s : tiempo medio de ocupación de una conversación.

(y y s con la misma unidad de tiempo).

El tiempo total de ocupación abarca:

—el tiempo que toma la conexión

—la conversación misma

—la desconexión.

En muchos países, el tiempo de ocupación de las conversaciones locales es, por término medio, de unos 2 minutos; mientras que para las conversaciones a larga distancia es de unos 3 minutos.

Ejemplo: $y = 3600$ llamadas/hora $s = 2$ minutos

$$A = 3600 \times \frac{2}{60} = 120 \text{ erl.} \quad \text{(hora, unidad de tiempo)}$$

Si un abonado tiene un tráfico de 0.1 erlangs, quiere decir que en promedio esa línea está ocupada el 10 % del tiempo, el tráfico de un abonado de provincia es inferior a este valor.

Puesto que el tráfico presenta grandes variaciones con el tiempo, sería engañoso hacer uso del valor promedio, por esto se ha llegado al acuerdo de que para los cálculos de tráfico se emplee el tráfico promedio durante lo que se llama "la hora punta", que se define como los 60 minutos consecutivos durante el día en el que el tráfico sea mayor (que es de 10:20 a 11:20). Durante "la hora pico" se presentan valores de cresta altos en el tráfico, para despachar este tráfico se necesitaría un equipo telefónico muy costoso, cuyo uso estaría limitado a cortos períodos de tiempo. A fin de mantener los costos a un nivel razonable, se ha aceptado el rechazar o congestionar una cierta cantidad del tráfico durante la hora pico. Una central telefónica siempre se debe dimensionar para el tráfico que se ha de despachar a una cierta congestión permitida. Generalmente se emplean valores de congestión que están entre el 0 %, 1 % y 5 %. Pero, ¿cómo llegan las llamadas? Se hace necesaria una descripción. Tomando en cuenta que éstas aparecen en momentos no previsibles, aleatorias, "la ley de llegadas" se describe por el Proceso de Poisson que tiene las siguientes propiedades:

i) La probabilidad para que una llamada aparezca durante el intervalo infinitamente pequeño $[t, t + dt]$ es independiente de todo lo que pasó antes de t y es igual a λdt con λ constante.

ii) La probabilidad para que una llamada aparezca durante un intervalo infinitamente pequeño es despreciable.

iii) La densidad C de las llegadas es igual a λ.

Los ELEMENTOS DE PROBABILIDAD necesarios para deducir las fórmulas de Erlang para sistemas con pérdida y sin pérdida:

Axiomas y Teoremas de la Probabilidad, distribución de Probabilidad, Modelo de Bernoulli, Modelo Binomial, Modelo Poisson y modelo exponencial negativo.

En la práctica:

I) la fórmula de Erlang con pérdidas es utilizada para dimensionar grupos de registradores, aunque las leyes de toma de estos órganos esté bastante lejos de la ley exponencial negativa;

II) las llamadas no están elegidas ni por el orden de llegada ni al azar, sino en función del punto de entrada donde se presentan y de la posición de los registradores libres en el grupo [19].

3.1.2. PROPOSICIONES DE CONTENIDO MATEMATICO PARA EL PROYECTO

En un curso como el de Probabilidad y Estadística, el profesor podrá contar con el ánimo de sus alumnos si de alguna manera comunica a ellos el porqué de este curso en la carrera de Ingeniería. Si propone situaciones en la Ingeniería donde la Probabilidad y la Estadística son usadas como únicas alternativas para describir el comportamiento de Sistemas, así como la necesidad de establecer modelos probabilísticos en el tratamiento de fenómenos aleatorios (entre otros aspectos).

Una vez que el alumno dispone su mente al estudio de este curso, se inicia una labor conjunta entre profesor y alumno. Si el profesor se compromete ante el alumno a desarrollar el curso con temas de interés, el alumno compromete su atención y dedicación a todas aquellas situaciones inicialmente escogidas por el profesor pero que pasarán rápidamente a su dominio formando parte de sus conocimientos.

La fortaleza de estas nuevas adquisiciones dependerá de "eso" que el alumno haya invertido en ellas, de los errores que cometió y de la frecuencia con que fueron éstos evitados. Muchos de estos errores han "echado raíces" en la mente del alumno por tratarse de nociones que alguna vez fueron exitosas y que ahora se revelan falsas o imprácticas, por lo que representan un verdadero obstáculo en la adquisición de conocimientos. Por esto, las nociones o conceptos adquiridos sirven de apoyo y a la vez representan un obstáculo para el adelanto del conocimiento.

Si pensamos en un régimen discontinuo de adquisiciones, oponiéndonos a un esquema clásico, el profesor provocará que las nuevas situaciones también se den por saltos para evitar la formación de nuevos obstáculos (por la adquisición continua de los conocimientos) y que a la vez éstos ayuden en la eliminación de los ya existentes.

De aquí que la matemática no solamente adquiere sentido en los estudiantes por la colección de situaciones donde el alumno la encuentra como medio de solución, sino también al evitar los errores que el conocimiento matemático rechaza.

El origen y desarrollo histórico de teorías, como la de la Probabilidad, ayuda a eliminar esos errores que alguna vez fueron punto de apoyo y que ahora representan obstáculos, estos obstáculos epistemológicos se presentan en la historia misma de los conceptos. Por ejemplo, la noción Variable Aleatoria fue concebida inicialmente como "variable" y ha representado un obstáculo este nombre por su representación matemática como función.

Si partimos del origen de las teorías, descubriremos los obstáculos que se presentaron entonces y que se tuvieron que franquear para que la ciencia no llegara a un estancamiento: ¿Qué problemas se plantearon? ¿Qué implicaciones e interpretaciones se dieron? ¿Qué fue lo que motivó el establecimiento de una teoría? ¿Qué tipo de problemas se resolvieron con esta teoría?

Vemos que una teoría como la de la Probabilidad surge como respuesta a un problema planteado.

El origen de la Probabilidad es de interés común por tratarse de juegos de azar (dados, monedas, etc.); y si el docente plantea el problema que dio origen a la Teoría de la Probabilidad, ésta se generará de una manera natural, dando lugar a obstáculos (problemas interesantes) y permitiendo el franqueamiento de éstos.

La solución del problema por el alumno tomará la apariencia de marcha experimental, ya que la Probabilidad tiene la ventaja de contar con un enfoque experimental que facilita la formación de un enfoque axiomático:

Al estudiarse el comportamiento de un proceso de la vida real, los fundamentos clásicos de la Probabilidad (donde "casos equiprobables" juega un papel fundamental) fueron insuficientes e inadecuados. Se presentaban problemas en Física o Biología, donde no era posible determinar los casos equiprobables, es decir:

> la expansión a otras ciencias hizo necesaria una revaluación y refinamiento en los fundamentos lógicos de la Teoría de la Probabilidad.

Para que nociones probabilísticas pudieran ser utilizadas se requería claridad y justificación de estas nociones. Como para establecer un orden lógico y consistente para cualquier tipo de inferencia, es necesario: definir los conceptos iniciales, dar las reglas de inferencia y demostrar la ausencia de contradicción en todos los resultados obtenidos, un método axiomático era necesario.

Hubo matemáticos, como Richard E. von Mises (1883-1953), que creían que la Probabilidad no era una disciplina matemática sino una ciencia para investigar fenómenos de la vida real. Sin embargo, su interpretación frecuencial de la Probabilidad dio lugar a la axiomatización de la Probabilidad de Kolmogorov, donde hay una analogía entre las nociones de la medida de un conjunto y la probabilidad de un evento, entre la integral y la esperanza matemática, ortogonalidad de funciones y la independencia de variables aleatorias [18] .

3.2. ANALISIS GENETICO Y EPISTEMOLOGICO DEL CONTENIDO MATEMATICO.

Científicos de nuestro siglo, como Gaston Bachelard, Jean Piaget y Guy Brousseau, han realizado interesantes estudios críticos de los principales métodos y resultados de las diversas ciencias, es decir, han analizado la epistemología de ciencias, como la Genética [7], la Física, la Química y las Matemáticas [7], así como la noción de Obstáculos Epistemológicos [10], [7], y la de Método Científico [7] .

En la formación del espíritu científico, G. Bachelard asegura [7]:

> "Cuando se buscan las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia, se llega pronto a la convicción de que hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos. En el mismo acto de conocer aparecen pausas e inquietudes. Aquí, mostraremos causas de estancamiento e incluso de regresión, a las que llamaremos Obstáculos Epistemológicos.

Un obstáculo epistemológico se incrusta en el conocimiento incuestionado.

Para un espíritu científico, cualquier conocimiento es una respuesta a una pregunta; si no ha habido pregunta no puede haber conocimiento científico. Nada se dá. Todo se construye. Llega un momento en que el espíritu prefiere lo que confirma su saber (instinto conservador) que lo que lo contradice, prefiere las respuestas a las preguntas, y es entonces cuando el crecimiento espiritual se detiene.

La opinión, es un obstáculo que se debe superar; la ciencia se opone absolutamente a la opinión, si llega a legitimizar la opinión en un punto concreto, se debe a otras razones que las que basan la opinión, de modo que la opinión está siempre, por derecho propio, en un error. La opinión piensa mal; no piensa: traduce las necesidades en conocimientos. Al designar los objetos por su utilidad, se niega a conocerlos. No se puede basar nada sobre la opinión, antes hay que destruirla.

El espíritu científico debe formarse reformándose, debe formarse contra la naturaleza, contra lo que es en nosotros y fuera de nosotros el impulso y la instrucción de la naturaleza, contra el entusiasmo natural, contra el hecho vistoso y diverso; comprendemos la naturaleza cuando nos resistimos a ella.

La noción de obstáculo epistemológico puede estudiarse en la práctica de la Educación.

Son pocos los profesores de ciencias que han profundizado en la Psicología del error, de la ignorancia, de la inflexión (...). Los profesores de ciencias imaginan que el espíritu científico empieza como una lección, que siempre es posible rehacer una cultura descuidada repitiendo una clase, que se puede comprender una demostración repitiéndola punto por punto. No han reflexionado en el hecho de que el adolescente llega, por ejemplo, a la clase de Física con conocimientos empíricos ya construidos: se trata pues no tanto de adquirir una cultura experimental, como de cambiar de cultura experimental, de volcar los obstáculos ya acumulados por la vida cotidiana. Debemos poner la cultura científica en estado de movilización permanente, sustituir el saber cerrado y estático por un conocimiento abierto y dinámico, dar finalmente a la razon motivos para que evolucione".

Por otra parte, Guy Brousseau, en un enfoque exclusivamente matemático, menciona [10]:

"No se ha suministrado por el momento una lista de obstáculos tan simples como los de Bachelard, porque la noción misma de obstáculo está en vías de constituirse y de diversificarse; no es fácil mencionar las generalidades pertinentes sobre este objeto, vale más hacer estudios de caso por caso. Se puede decir que al margen del trabajo de censo y de descripción de grandes obstáculos en la constitución de los conceptos, se desarrollan los estudios sobre las características de funcionamiento del conocimiento, a la vez como apoyo y como obstáculo.

"Con respecto a la Didáctica de las Matemáticas, un obstáculo se manifiesta mediante los errores, que no son fugaces sino reproducibles y persistentes. Estos errores no desaparecen radicalmente de un sólo golpe, resisten, persisten, después resurgen, se manifiestan largo tiempo a pesar de que el sujeto los haya rechazado de su sistema cognoscitivo, consciente de que se trata de un modelo defectuoso.

"Una noción que se manifiesta ahora como obstáculo, era para las adquisiciones anteriores un punto de apoyo. De aquí que el aprendizaje no puede ser hecho según el esquema clásico de la adquisición progresiva y continua (tal que para toda adquisición existe una serie finita de adquisiciones, aportando cada una una cantidad de información tan pequeña como se quiere y que le sea equivalente)".

Brousseau muestra también, de acuerdo a las concepciones de Bachelard y de Piaget, que:

"El error y el fracaso no tienen un papel tan simple como el que se les pretende dar. El error no es solamente el resultado de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar que se cree en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, más bien es el efecto de un conocimiento anterior que poseía interés o éxito pero que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo se constituyen en Obstáculos. En el funcionamiento tanto del profesor como del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido.

"Admitiremos entonces que el objeto principal de la Didáctica es estudiar las condiciones que deben satisfacer las situaciones o los problemas propuestos al alumno para favorecer la aparición, el funcionamiento y el rechazo de concepciones nuevas.

"Uno puede deducir de este régimen discontinuo de adquisiciones, que los caracteres informacionales de estas situaciones deben también variar por saltos. En estas condiciones, el interés de un problema va a depender, esencialmente, de "eso" que el alumno haya invertido, de lo que someterá a prueba, de los rechazos que estará obligado a hacer y de la frecuencia con que se arriesgará a cometer esos errores rechazados.

"Así, los problemas más interesantes serán aquellos que permitan franquear un verdadero obstáculo.

"Plantear un problema consiste en encontrar una situación en la cual el alumno va a emprender una serie de cambios relativos a una misma cuestión que es "obstáculo" para él, y sobre la cual se apoyará para construir o apropiarse de un conocimiento nuevo. Las condiciones en las cuales se desarrolla esta serie de cambios son inicialmente escogidas por el docente pero los procesos rápidamente deberán pasar, en parte, al control del sujeto que va a cuestionar a la vez esa situación. La motivación del sujeto nace de este control.

"Así, la resolución de un problema tomará para el alumno la apariencia de marcha experimental, la ocasión dada a la naturaleza (en este caso, a los conceptos matemáticos) de manifestarse en sus actividades. Se tratará no nada más de comunicar las informaciones que se puedan enseñar, sino también de encontrar una situación en la cual éstas son las únicas que pueden ser satisfactorias, para obtener un resultado en el cual el alumno esté involucrado.

"Esto no es suficiente, será necesario que esta situación permita de lleno la construcción de una primera solución o de una tentativa en donde el alumno invertirá su conocimiento del momento. Si esta tentativa fracasa o no se ajusta bien, la situación debe remitir a una situación nueva, modificada por este fracaso de manera inteligible e intrínseca, es decir, no dependiendo de las finalidades del profesor. La situación debe permitir la repetición a voluntad de la aplicación de todos los recursos del alumno, no puede ser, por consiguiente, programada; solamente su elección puede serlo.

"Hemos sido conducidos a distinguir en el funcionamiento del alumno tres tipos de cuestiones que llevan a tres tipos de situaciones didácticas:

a) Las cuestiones de validación—el alumno debe establecer la validez de una aserción. Se trata no de aprender las pruebas aceptadas, sino de probar aquellas que se conciben. Un problema de validación es más un problema de comparación, de rechazo de pruebas, que de búsqueda de la demostración.

b) Las cuestiones de formulación—para la validación, el pensamiento debe apoyarse en formulaciones previas, los lenguajes se elaboran para la comunicación.

c) Las cuestiones de acción o de decisión matemática—llegan a construir en el sujeto regularidades, esquemas o modelos de acción, comunmente inconscientes o implícitos.

"Ninguna de estas dialécticas (clasificación de conceptos para ser examinados y discutidos) es independiente de las otras, por el contrario, la formulación se facilita si existe un modelo implícito de acción: el sujeto generalmente sabe formular mejor un problema que resolverlo. Pero, inversamente, cada dominio puede ser obstáculo al progreso en los otros.

condiciones muy favorables a la acción hacen inútil la explicación, de manera que un lenguaje muy fácil de manipular puede bloquear por mucho tiempo una reformulación necesaria (es el obstáculo verbal de Bachelard).

"El franqueamiento de un obstáculo implica con frecuencia tanto una reestructuración de modelos de acción como del lenguaje y del sistema de pruebas".

Los obstáculos didácticos de origen epistemológico en matemáticas que he mencionado, se presentan en particular en la enseñanza-aprendizaje de la Probabilidad y Estadística. Si el estudio de estas ramas de las matemáticas en las escuelas de Ingeniería contemplara a las adquisiciones (conocimientos) como puntos de apoyo y como obstáculos, entonces lo clásico establecido tendría que cambiar.

La actitud del profesor y del alumno en un curso —como el de Probabilidad y Estadística— no es la misma, sus actividades tampoco lo son. Una táctica pedagógica que se ajusta a los requerimientos mencionados, es la Pedagogía del Ejercicio y del Problema, donde la idea principal sería que cada uno de los temas de estudio desarrolle las 7 categorías de ejercicios (que analizaremos enseguida) que permitan franquear verdaderos obstáculos, no necesariamente en un orden programado con anticipación para así evitar, entre otros, la adquisición continua del conocimiento y el conductismo.

3.3. EL SYLLABUS (con la Metodología de la Pedagogía del Ejercicio y del Problema).

Si nuestro interés está en el aspecto educativo de la Probabilidad y Estadística, quiere decir que principalmente nos interesa la relación profesor-alumno en esta materia.

El profesor necesita hacer que el tema estudiado (por ejemplo: Estadística Descriptiva) sea atractivo y motivante, necesita conseguir una actitud activa de sus alumnos para así ejercitar la crítica (a las técnicas y procedimientos en el manejo de datos estadísticos, por ejemplo).

El alumno no sólo debe de estar presente en los objetivos del curso (como sujeto), sino debe ser considerado como integrante fundamental en el plan educativo. Debe participar directamente.

Lo siguiente, bosqueja una reflexión sobre la Pedagogía del Ejercicio y del Problema* que estudia el arte de suscitar una actitud activa y crítica del alumno.

CLASIFICACION DE ENUNCIADOS

A las diversas actividades del alumno y del profesor, les corresponden enunciados cuya finalidad es diferente. Se distinguen 7 categorías: (la siguiente clasificación no es ni exhaustiva ni disjunta)

---

*Le livre du probléme, vol. 1, "Pedagogie de l'exercice et du probléme", IREM de Strasbourg, Editorial CEDIC, 2da. edición, 1976.

CATEGORIA DEL ENUNCIADO	COMPORTAMIENTO DEL ALUMNO	COMPORTAMIENTO DEL PROFESOR
1. Ejercicios de exposición	Aprender Adquirir conocimiento	Exponer incompletamente. Transmitir el conocimiento
2. Ejercicios de investigación	Investigar, encontrar	Inducir la curiosidad y perseverancia en la investigación
3. Ejercicios didácticos	Entrenarse Adquirir mecanismos	Fijar conocimientos, aptitudes, costumbres
4. Ejecución de tareas técnicas	Tomar responsabilidades, llevar un trabajo a buen término (sin dejar errores)	Pedir que se haga exacto y bien hecho
5. Ejemplos ilustrativos y de aplicación	Transmitir conocimientos teóricos dentro de un contexto práctico	Relacionar la abstracción con otros centros de interés
6. Manipulación	Observar, experimentar, ensayar	Motivar un estudio abstracto
7. Tests, evaluaciones, exámenes, etc.	Verificar el valor de sus conocimientos. Hacer valorar sus aptitudes	Controlar los resultados de la enseñanza en cada alumno

1. LOS EJERCICIOS DE EXPOSICION

Los enunciados de esta categoría, se concentran en su contenido matemático: el objetivo es la transmisión del conocimiento. Se trata de completar la documentación de los alumnos dejándoles algunos cálculos o pequeños razonamientos. Si los alumnos no lo pueden seguir, el profesor dará más detalles para llegar a la solución.

Ejemplo: (Recta de mejor ajuste o recta de tendencia)

Si la recta que mejor se ajusta a los puntos: (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ... , (x_n, y_n) es: $\boxed{y = ax + b}$ donde b = ordenada en el origen de la recta;

a = pendiente de la recta;

comprue̲be que los valores "a" y "b" de esta recta son:

$$a = \frac{\Sigma x\,\Sigma y - n\,\Sigma xy}{(\Sigma x)^2 - n\,\Sigma x^2}$$

$$b = \frac{\Sigma x\,\Sigma xy - \Sigma x^2\,\Sigma y}{(\Sigma x)^2 - n\,\Sigma x^2}$$

SUGERENCIA: Considere la igualdad

$$y_i = ax_i + b \quad . \; . \; . \; . \quad (*)$$

sumando sobre i $(i = 1, \ldots, n)$ ambos miembros de la igualdad (*), se obtiene la 1a. ecuación normal de la recta de tendencia:

$$\Sigma y_i = a\,\Sigma x_i + nb \quad . \; . \; . \; . \quad \mathrm{I}$$

la 2da. ecuación se obtiene al multiplicar (*) por x_i y sumando después sobre i. Como los números x_i y y_i son conocidos, las "ecuaciones normales" se pueden interpretar como un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, **a** y **b**.

SOLUCION: por determinantes, regla de Cramer.

2. LOS EJERCICIOS DE INVESTIGACION

La tarea más importante dentro de la Educación es el desarrollo de la inteligencia y, por tanto, es la investigación que se haga en los problemas la actividad matemática fundamental.

Ejemplo: (Estadística Experimental)

Experimento para comparar 2 tratamientos.

Consideremos una empresa fabricante de aparatos electrónicos.

Hasta ahora han utilizado en sus aparatos los transistores de marca A, pero quieren probar una marca de transistor B, con características similares a las de A, y decidir si cambian a la marca B.

¿Qué deben tomar en cuenta?

—Si hay ganancia de voltaje al cambiar de la marca A a la B; es decir, si hay diferencia significativa entre las marcas A y B.

¿Cómo pueden comparar las ganancias de voltaje?

—Se eligen varios transistores de las 2 marcas y se comparan sus ganancias de voltaje.

PROCEDIMIENTO: (Se introducen varios conceptos)

Podemos considerar, por ejemplo, 100 transistores de cada marca, organizar los datos en una tabla de frecuencias, graficar la distribución y comparar sus elementos descriptivos, media y desviación estándar. [Los 200 datos estadísticos se proporcionan a los alumnos y se estudian los conceptos mencionados (tabla de frecuencias, histograma, medidas de centralización y de dispersión); o bien, se introduce el manejo de tablas de números aleatorios, técnicas de muestreo, para que obtengan esos 200 datos. Se percatarán de que la distribución muestral experimental es aproximadamente normal (para un número de muestras grande, mayor de 30), con lo que se pone en evidencia uno de los resultados del teorema del límite central] .

Si para los 100 transistores marca A se obtuvo:

una ganancia promedio ($\overline{x}_A$) de 31 decibeles con desviación estándar (σ_{x_A}) de 0.3 decibeles (unidad, considerando aparatos con ruido).

Si para los 100 transistores marca B se obtuvo:

una ganancia promedio ($\overline{x}_B$) de 30.9 decibeles con desviación estándar (σ_{x_B}) de 0.4 decibeles.

Analizando los valores promedio de $\overline{x}_A$ y $\overline{x}_B$, ¿sería acertado decidir que la marca A proporciona mayor ganancia de voltaje que la marca B ?

— . . . . .

Al extraer otras muestras aleatorias de 100 transistores de cada marca, ¿se obtendría la misma conclusión? ¿Qué, la decisión, depende de la muestra?

— . . . . .

Puede ser que la diferencia entre las ganancias de voltaje se deba únicamente al azar, pero también puede ser que esta diferencia sea significativa

$$(\overline{x}_A - \overline{x}_B = 31 - 30.9 = 0.1)$$

Si queremos inferir resultados de muestras hacia su población, la decisión llevará implícito un cierto nivel de confianza (una probabilidad) o cierto nivel de significación (porcentaje de error) [17].

PROCEDIMIENTO: (Pruebas de diferencias de medias)

Haremos uso de las llamadas Pruebas de Significancia o Pruebas de Hipótesis, métodos estadísticos para tomar decisiones a partir de una muestra o muestras extraídas de la población; son métodos para decidir si se acepta o se rechaza una hipótesis estadística (suposición concerniente a la población).

ASPECTOS TEORICOS

Sean $\bar{x}$ y $\bar{y}$ los promedios aritméticos obtenidos de dos muestras de tamaño n_x y n_y, extraídas respectivamente de 2 poblaciones con medias μ_x y μ_y y desviaciones estándar σ_x y σ_y:

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \mu_{\bar{x}-\bar{y}}}{\sigma_{\bar{x}-\bar{y}}} \qquad H_0 : \quad \mu_{\bar{x}-\bar{y}} = \mu_{\bar{x}} - \mu_{\bar{y}} = \mu_x - \mu_y = 0$$

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_{\bar{x}-\bar{y}}} \qquad H_1 : \quad \mu_x - \mu_y \begin{smallmatrix} > 0 \\ < 0 \end{smallmatrix}$$

Para la varianza:

$$\sigma^2_{\bar{x}-\bar{y}} = \sigma^2_{\bar{x}} + \sigma^2_{\bar{y}} = \frac{\sigma^2 x}{n_x} + \frac{\sigma^2 y}{n_y}$$

Para el ejemplo:

Si μ_{x_A} y μ_{x_B} son las medias respectivas de las dos poblaciones infinitas a las que corresponden las muestras, la Prueba de Hipótesis adopta la forma siguiente:

(hipótesis nula) H_o: $\mu_{x_A} = \mu_{x_B}$ (no hay diferencia significativa entre las 2 marcas de transistores)

(hipótesis alternativa) H_1: $\mu_{x_A} \neq \mu_{x_B}$ (sí hay diferencia significativa entre las dos marcas de transistores)

a) ¿ A un nivel de significancia del 5 % ?

b) ¿ A un nivel de significancia del 1 % ?

SOLUCION:

Como la distribución muestral experimental es aproximadamente normal, el valor de **z**, bajo la hipótesis H_o, es:

$$z = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sigma_{\bar{x}_A - \bar{x}_B}} = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2 x_A}{n_A} + \dfrac{\sigma^2 x_B}{n_B}}}$$

donde:

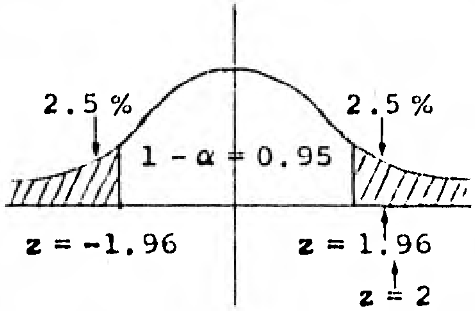
n_A = # de elementos de la muestra de transistores marca **A** .

n_B = # de elementos de la muestra de transistores marca B .

sustituyendo:

$$z = \frac{31 - 30.9}{\sqrt{\dfrac{(0.3)^2}{100} + \dfrac{(0.4)^2}{100}}} = 2$$ (valor empírico)

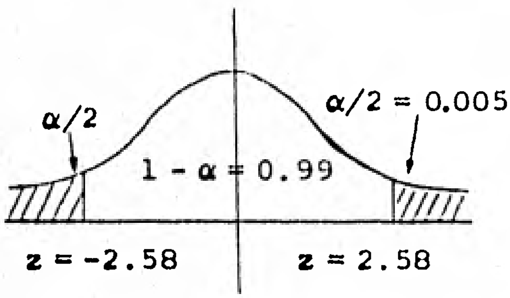
a) $\alpha = 0.05$ (Nivel de significancia)



Como $z = 2$ está dentro de la región de rechazo de la hipótesis nula H_0 (región sombreada), por lo tanto:

Puede concluirse que efectivamente existe diferencia significativa en la ganancia en voltaje de los transistores a un nivel de confianza del 95 %.

b) $\alpha = 0.01$ (Nivel de significancia)



Como $z = 2$ (valor empírico) está dentro de la región de aceptación de la hipótesis nula H_0, por lo tanto la diferencia entre las ganancias es producto del azar y . . .

se acepta la hipótesis de que ambos tipos de transistores tienen igual ganancia media en voltaje a un nivel de confianza del 99 %.

3. LOS EJERCICIOS DIDACTICOS

La pedagogía tradicional insiste, sobre todo, en la adquisición de mecanismos de base. La nueva pedagogía se apega, primeramente, a la comprensión de las nociones en estudio, pero no descuida el aprendizaje mecanizado dentro del empleo de estas nociones. Los ejercicios didácticos deben ser especialmente compuestos de entrenamientos.

Ejemplo: (Distribuciones de frecuencia)

Consulte sobre las distancias (en kms.) desde la Ciudad de México a las siguientes ciudades de la República: [4]

1. Acapulco	20. Hermosillo	38. Poza Rica
2. Aguascalientes	21. Irapuato	39. Puebla
3. B. de Navidad, Jal.	22. Jalapa	40. Puerto Juárez
4. Campeche	23. León	41. Querétaro
5. Cd. Cuauhtémoc	24. Cd. Mante	42. Saltillo
6. Cd. Juárez	25. Manzanillo	43. Salina Cruz
7. Cd. Obregón	26. Matamoros	44. San Luis Potosí
8. Cd. Victoria	27. Mazatlán	45. Tampico
9. Coatzacoalcos	28. Mérida	46. Tlaxcala
10. Colima	29. Mexicali	47. Tepic
11. Culiacán	30. Monterrey	48. Tijuana
12. Cuernavaca	31. Morelia	49. Toluca
13. Chihuahua	32. Nogales	50. Torreón
14. Chilpancingo	33. Nuevo Laredo	51. Tuxpan
15. Durango	34. Oaxaca	52. Tuxtla Gtz.
16. Ensenada, B.C.	35. Orizaba	53. Veracruz
17. Guadalajara	36. Pachuca	54. Villahermosa
18. Guanajuato	37. Piedras Negras	55. Zacatecas
19. Guaymas		

Agrupando los datos (kms.) en intervalos de longitud 500 ($0 \leq x < 500$, $500 \leq x < 1000$, ...) construya una tabla de frecuencias y el histograma correspondiente. ¿Qué porcentaje de ciudades se encuentran a una distancia menor de 1000 kms.?

SOLUCION: Aprox. 64 %.

4. EJECUCION DE TAREAS TECNICAS

El cálculo de rutina tiene mala reputación. Se prefiere el argumento simple y directo que ilumine la situación estudiada, a las demostraciones basadas en verificaciones fastidiosas y oscuras.

Ejemplo: (Cálculos en la desviación estándar)

Si consideramos:

$$s^2 \text{ (varianza)} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \qquad (n < 30)$$

la raíz cuadrada no negativa de la varianza es la llamada desviación estándar (s), medida de dispersión de un conjunto de datos.

Pero, algunos textos acostumbran definir:

$$s^2 \text{ (varianza)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \qquad (n \geq 30)$$

Para $n \geq 30$, es indiferente usar n o $n-1$, ¿importa el tipo de distribución que se trate?

—Se escoge una distribución con 30 elementos, se calcula:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \Sigma f(x - \overline{x})^2 \qquad y \qquad s^2 = \frac{1}{n} \Sigma f(x - \overline{x})^2$$

y se comprueba que la diferencia no es apreciable. Si n aumenta (digamos 200 datos), las 2 fórmulas dan resultados cada vez más próximos. Considerando una distribución simétrica, asimétrica positiva y asimétrica negativa, se calculan las desviaciones con respecto al valor promedio representativo.

5. EJEMPLOS ILUSTRATIVOS Y DE APLICACION

Como el siguiente: (en distribuciones de frecuencia)

Los datos de la siguiente tabla se obtuvieron de la distribución del espesor de la madera en los postes telefónicos (W.A. Shewhart, Economic Control of Quality of Manufactured Products. McMillan and Co.; New York, 1932, pág. 66):

ESPESOR (pulg.)	FRECUENCIA
1.0	2
1.3	29
1.6	62
1.9	106
2.2	153
2.5	186
2.8	193
3.1	188
3.4	151
3.7	123
4.0	82
4.3	48
4.6	27
4.9	14
5.2	5
5.5	1

a) Grafique la distribución.

b) ¿Qué tipo de curva ajustaría como modelo?

c) Calcule la media aritmética $\overline{x}$ y la desviación estándar s.

d) $\overline{x}$, ¿es un promedio representativo de la distribución o lo es la mediana o la moda?

e) ¿Qué porcentaje de las medidas son por lo menos de 2.5 pulgadas?

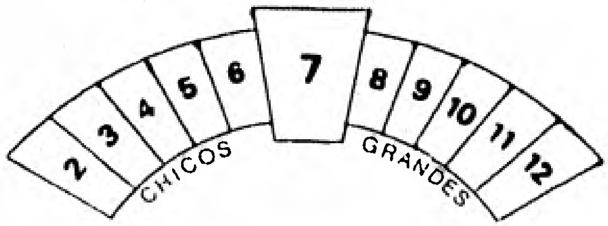
f) ¿Qué porcentaje de las medidas son mayores o iguales de 4 pulgadas?

6. MANIPULACION

Casi siempre se desconoce el largo proceso de maduración de enunciados donde los ensayos es la actividad esencial. Los enunciados se presentan generalmente bajo forma de conjeturas adivinadas antes de ser demostradas.

Ejemplo: (Distribuciones de Frecuencia)

Existe un juego con dos dados, llamado "CHICOS Y GRANDES", se puede apostar a los números chicos (2, 3, 4, 5, 6) o a los números grandes (8, 9, 10, 11, 12) o al número 7 .



Los que participan en este juego apuestan a cualquiera de los números del 2 al 12; "la casa" siempre juega al número 7.

Si algún jugador apostó también al número 7 y si al "arrojarse" los dados se obtiene el #7, "la casa" paga al jugador el triple de lo que apostó y recoge las apuestas en el resto de los números.

Si los jugadores apuestan a un número diferente al 7, y si al "arrojarse" los dados se obtiene ese número seleccionado, "la casa" paga al(los) jugador(es) el doble de la cantidad apostada. (Si al "arrojarse" los dados no se obtiene el número seleccionado, el jugador tiene opción a recoger su apuesta o seguir jugando).

ENUNCIADO:

"Al arrojarse 2 dados 'legales' la suma 7 es la más favorecida".

—Se arrojan 30 veces dos dados:

nos interesa la suma de puntos

SUMA	FRECUENCIA	f
2	|	1
3	||	2
4	|	1
5		0
6	|	1
7	|||||||||	9
8	|||||	5
9	|||||||	7
10		0
11	||||	4
12		0

Si se arrojan los 2 dados; 60 veces:

SUMA	FRECUENCIA
2	5
3	4
4	4
5	5
6	3
7	21
8	7
9	5
10	4
11	2
12	0

donde: $\bar{x} = 7$
valor medio esperado

donde: $\bar{x} = 7$
valor promedio

En la práctica: El número 7 es el de mayor frecuencia.

7. LOS TESTS

Un enunciado de control se juzga en función de su finalidad. El profesor debe, en principio, interrogarse sobre los conocimientos o aptitudes que él desea detectar en sus alumnos.

La forma del examen, la selección, la formulación, las técnicas de corrección y juicios, deber ser de acuerdo a la finalidad deseada.

Por ejemplo: (para examinar la recta de cuadrados mínimos)

Ls siguiente tabla muestra las estaturas (en mts.) y los pesos (en kgs.) de 5 estudiantes seleccionados al azar entre los estudiantes de 5° semestre de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, U.P.C. (Unidad Profesional Culhuacán) del I.P.N. (1981):

ESTATURA x (mts)	1.57	1.74	1.75	1.64	1.69
PESO y (kgs)	51	61.2	61.5	68	63

a) Construya un diagrama de dispersión.

b) Encuentre la ecuación de la recta de cuadrados mínimos.

c) Estime el peso (kgs) de un estudiante cuya estatura es 1.60 mts.

d) Demuestre matemáticamente que: $Cov(x,y) = \frac{1}{n} \sum_{i} x_i y_i - \bar{x}\,\bar{y}$

y utilícela para calcular la covarianza.

SOLUCION:

b) $y = 39.78x - 5.82$

c) Si $x = 1.60$ $y = 39.78(1.60) - 5.82 \cong 57.83$

d) $Cov(x,y) = .17728$

C A P I T U L O   I V

4.1. LA EXPERIMENTACION
(Proposiciones)

COMO TEMA II :

PROBABILIDAD

a) DESARROLLO HISTORICO

Hace cerca de 3 siglos, por la gran afición de la sociedad francesa a los juegos de azar, un grupo de apasionados jugadores tuvieron la idea de consultar al gran científico italiano Galileo Galilei (1564-1642), sobre el porqué de los resultados en el juego de los dados (... por el sólo interés lucrativo...) .

Galileo en su obra: Sulle Scoperte dei dadi, introdujo de manera precisa el tratamiento clásico de la Probabilidad; es decir, la que ahora llamamos Teoría de la Probabilidad tuvo su origen en los salones de juego, en Francia, en el siglo XVII.

También, por 1654, el Caballero de Mese -otro jugador- sostenía correspondencia con famosos matemáticos franceses de la época, Blaise Pascal (1623-1662) en París y Pierre de Fermat (1601-1665) en Tolsa, sobre el porqué de los resultados en los juegos de azar.

En 1713, el profesor suizo Jacob Bernoulli publicó un magnífico tratado de probabilidad con el título: Ars Conjectandi

"El Arte de la Conjetura", el arte de juzgar hipótesis con base en la evidencia. También trabajaron Francis Bacon primero, y después el clérigo inglés Thomas Bayes en un procedimiento científico, dando este último, en 1763, una base matemática.

Podríamos decir que el período clásico de estudio de la Probabilidad, culminó en 1812 con el trabajo: "Théorie analytique des probabilités", del matemático francés, físico y astrónomo Pierre de Laplace (1749-1827).

En la segunda mitad del siglo XIX, la palabra Probabilidad comenzó a adquirir un nuevo significado; varios científicos enfocaron su atención más y más a este concepto; entre los más famosos está el científico alemán Karl F. Gauss (1777-1855).

Por 1920, Robert Aylmer Fisher en Inglaterra, Richard Von Mises y Hans Reichenbach en Alemania, y otros, comenzaron a desarrollar nuevas técnicas probabilísticas enfocadas a la Estadística.

En 1933, el matemático ruso A. N. Kolmogorov le da un fundamento axiomático a la Teoría de la Probabilidad, por lo que ésta es considerada como una rama de las matemáticas (así como la geometría o el álgebra).

b) MOTIVACION HISTORICA

Un grupo de apasionados jugadores PLANTEARON UN PROBLEMA al gran científico Galileo:

> ¿Por qué al tirar 3 dados una suma de 10 aparece más frecuentemente que una suma de 9 ?

El Caballero de Mere —otro jugador— preguntó al matemático, físico y filósofo Pascal:

> ¿Por qué no era lucrativo apostar dinero a que al menos un doble 6 apareciera en 24 tiradas de 2 dados? [1]

PREGUNTA:

¿Será verdad que al arrojar 3 dados una suma de 10 aparece con mayor frecuencia que una suma de 9 ?

¿Cuántas veces aparece un doble 6 al arrojarse 2 dados 24 veces? ¿Cómo lo podemos saber?

RESPUESTA:

Realizando el experimento.

OBSERVACION:

En estos dos problemas se considera el acto repetido de arrojar un cierto número de dados un cierto número de veces, ¿de qué manera se afectaría la respuesta si el # de dados se altera o el # de veces que se arrojan?

EJERCICIOS:

1) Realizar el experimento de arrojar 3 dados:

a) 10 veces b) 50 veces c) 100 veces

y organizar los resultados, resaltando los que dan suma 10 y suma 9.

2) Si se realiza el experimento de arrojar 2 dados:

a) 10 veces b) 50 veces c) 100 veces

¿Cuál aparece con mayor frecuencia, suma de 10 o suma de 9? COMPARE a), b), c).

3) Si se realiza el experimento de arrojar 2 dados:

a) 12 veces b) 24 veces c) 36 veces

¿en cuántas aparece un doble 6 ? COMPARE a), b), c) .

PROBLEMAS:

A. Sin realizar ningún experimento describa todos los resultados en suma de puntos que se obtienen "al arrojar" 2 dados.

¿Cuántos de estos resultados dan "suma de 9", comparando con el # total de resultados?

¿Cuántos de estos resultados dan "suma de 10", comparando con el # total de resultados?

¿Cuántas veces obtendríamos doble 6 al comparar con el # total de resultados? ¿QUÉ CONCLUSIONES OBTIENE?

B. ¿Cuántos resultados en total se obtienen "al arrojar" 3 dados?, ¿podría decir en cuántos de éstos la suma es 9 y en cuántos la suma es 10 ? COMENTARIOS .

c) CONCLUSIONES

Cuando comparamos los resultados que nos interesan con el # total de resultados posibles, estamos calculando la Probabilidad de ocurrencia de estos resultados parciales con respecto al número total.

Observamos que estas razones (proporciones) varían si variamos el # de veces que se realiza el experimento o, dicho de otra forma, la frecuencia de ocurrencia de alguno(s) de los resultados que nos interesan con respecto al número total cambia según el número de veces que se realiza el experimento. Estas proporciones que se forman son llamadas Probabilidades a posteriori (calculadas después de haber realizado el experimento), que dan origen a la Probabilidad Estadística.

También nos hemos dado cuenta de que es posible calcular probabilidades sin realizar algún experimento; es decir, es posible considerar Probabilidades a priori (antes de), probabilidades teóricas que se desprenden de la llamada Probabilidad Inductiva. Pero,

¿Qué acaso éstas se contradicen?

¿ se relacionan ?

o ¿ qué sucede ?

ENFOQUES DE LA PROBABILIDAD.

Para calcular probabilidades, podemos considerar 3 enfoques:

El Inductivo

El Estadístico

El Axiomático

Si intentamos dar una explicación científica a los problemas planteados en los orígenes de la Probabilidad, tomemos en cuenta que nos referimos a enunciados resultantes de la observación y/o de la experimentación, y por tanto las conclusiones no tienen el carácter de verdades definitivas y absolutas que caracterizan al Razonamiento Deductivo. Necesitamos entonces de un tipo de razonamiento que parta de hechos concretos derivados de la experiencia y que nos lleve a inferir conclusiones generales; el reconocer que estas conclusiones no son categóricas es la base del Razonamiento Inductivo, que ha sido llamado: "el segundo gran estado de liberación intelectual", que se convirtió en una herramienta sistemática del hombre, hasta después del siglo XVIII. [3]

Francis Bacon fue el primero en enfatizar en métodos inductivos como base del procedimiento científico, pero no fue sino hasta 1763 que el clérigo Thomas Bayes dio la primera base matemática a esta rama de la Lógica.

La Probabilidad Inductiva equivale a <u>medir</u> la fuerza de la evidencia. Un científico hace un juicio consciente o inconsciente cada vez que planea un experimento, hace una hipótesis. Generalmente la probabilidad asociada a su hipótesis no es expresada en números, pero sí en términos comparativos, donde la probabilidad se dice que es alta o baja, o una probabilidad es considerada más alta que otra. Dada una hipótesis y una evidencia segura, es posible determinar por análisis lógico y cálculo matemático, la probabilidad de que la hipótesis sea correcta o el "grado de confiabilidad".

Si tenemos un sistema de lógica inductiva en forma matemática, nuestras inferencias acerca de la hipótesis en Ciencia, Negocios y Vida Diaria que generalmente hacemos por "intuición" o "instinto", podrán ser más racionales y precisas.

La Probabilidad Estadística considera la repetición en ocurrencia de un cierto suceso en un experimento. Se apoya fuertemente en la hipótesis de que un experimento se puede repetir un número indefinido de veces, pero esto es muy discutible, ya que en el mejor de los casos un experimento se repite un número grande pero siempre finito de veces bajo condiciones que se conservan lo más constantes posibles; en tales circunstancias, estamos ante un experimento que presenta tendencia a la estabilidad, decimos que muestra "regularidad estadística".

Así, el modelo matemático desarrollado es aplicable a fenómenos que presenten regularidad estadística.

Este enfoque frecuencial de la probabilidad fue formalizado por Richard Von Mises, en 1936.

De hecho, vemos que la Probabilidad comenzó en el concepto Inductivo y no con el Estadístico, como podría pensarse.

Para comprender el concepto general de la Probabilidad Inductiva, consideremos el siguiente experimento:

MATERIAL:

Una caja cerrada, conteniendo un gran número de bolas blancas y negras, en proporción desconocida (se constituye una Población).

LAS ALTERNATIVAS A PRIORI: (antes del experimento)

Hay más bolas blancas que negras. (Ventaja en blancas)
" " " negras que blancas. (Ventaja en negras)
Hay igual número de bolas blancas que negras. (Sin ventaja)

HIPOTESIS: (opinión a priori)

Hay igual número de bolas blancas que negras.

VERIFICACION POR EXPERIMENTACION:

Sin ver el contenido de la caja (al azar) se sacan en sucesión varias bolas (se constituye una muestra).

RESULTADO:

Encontramos una cierta proporción entre bolas blancas y negras. (Por ejemplo, 3/4 partes de la muestra son bolas negras).

CONCLUSION: (POR INDUCCION)

En la caja (por evidencia de la muestra) hay más bolas negras que blancas.

Thomas Bayes elaboró en 1763 un teorema el cual indica cómo las opiniones hechas a priori (antes del experimento) acerca de la Población, deben ser modificadas por la evidencia de la muestra. Aunque la utilidad del teorema mismo ha probado ser limitada, fue el comienzo de una teoría matemática de razonamiento inductivo [3] .

PROBLEMAS:

1. Considere una caja con 100 bolas en proporción desconocida de blancas y negras:

   a) ¿De cuántas bolas deberá consistir la muestra (al azar) para tener un 90 % de confianza en la conclusión?

      —De 90 bolas.

   b) Si la proporción en la muestra aleatoria fue de 3/4, por ejemplo, de bolas negras, ¿sería válido inferir este mismo resultado a toda la población?

      —Sí, con un 75 % de confianza.

2. Se tiene una caja con un gran número de bolas de colores, en proporciones desconocidas:

   ¿De cuántas bolas deberá consistir la muestra aleatoria para tener un 90 % de confianza en los resultados obtenidos de ésta?

   — . . . .

La Naturaleza es, por así decirlo, una gran caja cuyo contenido es inicialmente desconocido, y queremos un procedimiento para obtener el conocimiento de la Naturaleza a través de la experimentación [1].

Los eventos (sucesos) y fenómenos de la Naturaleza son multiformes, muy numerosos, muy extensos y complicados para permitir una completa descripción. En este tipo de situaciones nos damos cuenta de que el resultado final depende de la interacción de gran número de causas, muchas de estas causas son de alguna manera obscuras o imprácticas para un estudio detallado; es el menos creíble que la ciencia podría, si valiera la pena, analizar cada causa en turno y llegar a una teoría que pudiera predecir y explicar qué está sucediendo.

En tales circunstancias, decimos que el resultado final, principalmente, "depende del azar", con esto queremos decir que por la gran complejidad que hace prácticamente imposible un análisis detallado se le da una cierta confianza a una conducta general, la cual es descrita a través de las leyes de la probabilidad [1].

Como ejemplo, consideremos el experimento más simple y familiar en juegos de azar:

EXPERIMENTO:

Se arroja una moneda.

OBSERVACIONES:

"Esencialmente parece no haber misterio sobre el porqué una moneda cae en águila o sol; la posición exacta de la moneda sobre la mesa, las velocidades de movimiento y giro de los dedos, la resistencia del aire, etc.; uno puede decir qué se necesita conocer para calcular, por las bien conocidas leyes de la Dinámica, si la moneda caerá en águila o sol, pero tal estudio sería muy complicado y requeriría de información cuantitativa muy precisa y extensa".

CONCLUSIONES:

Hay muchas situaciones de este tipo en la vida cotidiana y en la Ciencia, donde usamos Probabilidad no porque sea claro ese "azar" que juega un papel misterioso y obscuro, sino porque la situación es tan complicada y tan afectada por tantas causas pequeñas, que es prohibitivamente inconveniente intentar un análisis detallado. La experiencia de compañías de seguros, la frecuencia (en ocurrencia) de llamadas telefónicas con la resultante demanda en tráfico telefónico y equipos interruptores; las técnicas de muestreo usadas cuando se quiere estimar la calidad de muchos objetos u opiniones de muchos individuos; la teoría de errores de la medida; la teoría Cinética de los Gases; la teoría de la Comunicación; la teoría de la Información; todos son ejemplos prácticos en los cuales las causas son tan numerosas, tan complicadas y/o tan pobremente comprendidas como para permitir una teoría determinista [1].

La Probabilidad Estadística también comprende cuestiones de "azar", pero se basa en el estudio de la frecuencia (en ocurrencia) de los eventos (sucesos) en un experimento físico, biológico o social, cuyo comportamiento general es descrito por las leyes de la Probabilidad.

Existen teoremas que se pueden utilizar indistintamente en Probabilidad Inductiva como en Probabilidad Estadística, pero existen otros que las diferencían. Un principio que es aplicable a la Probabilidad Inductiva y que es absurdo en Probabilidad Estadística es el llamado: Principio de Indiferencia, que se ilustra en el siguiente ejemplo:

OBJETO:

Un dado.

HIPOTESIS: (a priori)

Suponemos que ninguna de sus caras está favorecida.

PREGUNTA:

¿Qué podemos decir de la probabilidad de ocurrencia de cada cara?

RAZONAMIENTO:

"Como las 6 caras del dado tienen igual oportunidad de aparecer, la probabilidad de cada cara será de $\frac{1}{6}$ ".

(Como un pastel que se reparte entre 6 personas en partes iguales, a cada persona le corresponde $\frac{1}{6}$ parte del pastel, sumadas todas las partes nos dan la unidad).

FUNDAMENTO:

El Principio de Indiferencia dice que si la evidencia no contiene algo que favorezca a un posible evento (suceso) sobre otro, los eventos tienen probabilidades iguales (relativo a su evidencia).

2da. SITUACION:

Un segundo observador puede tener una evidencia adicional:

"Puede saber que el dado está cargado en favor de una de sus caras sin saber cuál".

PREGUNTA:

Qué se puede decir de las probabilidades?

SOLUCION:

Las probabilidades siguen siendo $\frac{1}{6}$ para cada cara, ya que cada una de las 6 caras tienen igual posibilidad de ser la favorecida.

3ra. SITUACION:

Un tercer observador sabe que la cara favorecida es la # 1.

PREGUNTA:

¿Qué se puede decir de las probabilidades?

SOLUCION:

Las probabilidades cambian, "con base en la evidencia, la probabilidad asociada al # 1 será mayor que $\frac{1}{6}$ ".

El Principio de Indiferencia se puede aplicar de 2 maneras que ilustraremos con el siguiente ejemplo: [2]

SE CONSIDERA:

Una urna cerrada conteniendo bolas blancas y azules, en proporción desconocida (pueden ser 10, 30, o más, en total).

OBJETIVO:

Calcular probabilidades de eventos que componen al espacio de resultados (alternativas) que se obtienen al extraer al azar de la urna 4 bolas en sucesión, aplicando el Principio de Indiferencia.

METODO I

RAZONAMIENTO:

Tomando en cuenta el orden, hay 16 posibles alternativas de extracción: las 4 blancas; la primera azul y las 3 siguientes blancas; la primera blanca, después azul y las 2 siguientes blancas; etc. (Ver 3ra. columna de la tabla anexa).

PREGUNTA:

¿Cuál es la probabilidad inicial, antes de que hayamos obtenido cualquiera de las 16 distribuciones?

RESPUESTA:

Aplicando el Principio de Indiferencia, decimos que todas las distribuciones individuales tienen igual oportunidad de ser seleccionadas como muestra; esto es, probabilidad de $\frac{1}{16}$.

Sumadas las probabilidades de las 16 nos dan la unidad.

1ra. HIPOTESIS: (a priori)

Que entre las 3 primeras bolas extraídas sólo una sea blanca.

POR OBSERVACION:

En la tabla vemos que 6 de las 16 distribuciones individuales nos dan este resultado, con 1/16 de probabilidad cada una, por lo tanto $\frac{6}{16}$ es la probabilidad de ocurrencia de la hipótesis.

2da. HIPOTESIS: (con evidencia adicional)

Suponemos que sacamos primero una bola azul, después una bola blanca y después una azul.

PREGUNTA:

¿Cuál es la probabilidad de que la cuarta bola sea azul, con base en la evidencia?

RESPUESTA:

De la tabla, 2 distribuciones individuales (la # 8 y # 14) dan la secuencia azul, blanco, azul para las primeras 3 bolas con $\frac{1}{16}$ de probabilidad cada una, por lo tanto la probabilidad de la secuencia dada es $\frac{2}{16}$.

METODOS DE PROBABILIDAD INDUCTIVA

— TABLA —

	# de azules	# de blancas	Distribuciones Individuales	METODO I Probabilidad Inicial	METODO II Distribución General	METODO II Distribución Individual
1.	0	4	○ ○ ○ ○	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} = \frac{12}{60}$
2.	1	3	○ ○ ○ ○	$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{20} = \frac{3}{60}$
3.	1	3	○ ○ ○ ○	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{5} =$	$\frac{1}{20} = \frac{3}{60}$
4.	1	3	○ ○ ○ ○	$\frac{1}{16}$	$\left(\frac{4}{20}\right)$	$\frac{1}{20} = \frac{3}{60}$
5.	1	3	○ ○ ○ ○	$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{20} = \frac{3}{60}$
6.	2	2	○ ○ ○ ○	$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{30} = \frac{2}{60}$
7.	2	2	○ ○ ○ ○	$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{30} = \frac{2}{60}$
8.	2	2	○ ○ ○ ○	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{5} =$	$\frac{1}{30} = \frac{2}{60}$
9.	2	2	○ ○ ○ ○	$\frac{1}{16}$	$\left(\frac{6}{30}\right)$	$\frac{1}{30} = \frac{2}{60}$
10.	2	2	○ ○ ○ ○	$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{30} = \frac{2}{60}$
11.	2	2	○ ○ ○ ○	$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{30} = \frac{2}{60}$
12.	3	1	○ ○ ○ ○	$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{20} = \frac{3}{60}$
13.	3	1	○ ○ ○ ○	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{5} =$	$\frac{1}{20} = \frac{3}{60}$
14.	3	1	○ ○ ○ ○	$\frac{1}{16}$	$\left(\frac{4}{20}\right)$	$\frac{1}{20} = \frac{3}{60}$
15.	3	1	○ ○ ○ ○	$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{20} = \frac{3}{60}$
16.	4	0	○ ○ ○ ○	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} = \frac{12}{60}$

En sólo una de estas distribuciones es azul la 4a. bola (en la # 14), su probabilidad es $\frac{1}{16}$; por lo tanto en un sólo resultado de dos la 4a. bola es azul, de aquí que su probabili dad es de $\frac{1}{2}$. Se escribe: $\frac{1}{16} / \frac{2}{16} = \frac{1}{2}$. En otras palabras, la probabilidad de que la 2a. hipótesis sea correcta es 50-50, la 4a. bola puede ser igualmente blanca que azul.

OBSERVACIONES:

Como una guía para juzgar una hipótesis, este resultado contradice el principio aprendido por experiencia, al considerar "eventos igualmente probables" sin tomar en cuenta si algu no ocurre más frecuentemente que otro en el pasado. En el ejemplo, el hecho de que 2 de las 3 bolas extraídas fueran azules nos hace esperar probabilidades a favor de que la 4a. bola sea también azul.

METODO II

(En este método se aplica primero el Principio de Indiferencia a la Distribución General y no a las Distribuciones Individuales).

RAZONAMIENTO:

Consideremos el # de bolas azules y blancas al extraer 4 al azar, <u>sin</u> importar el orden. La tabla muestra que hay 5 distribuciones generales: 4 blancas; 4 azules; 3 azules, 1 blanca; 3 blancas, 1 azul; 2 azules y 2 blancas.

Por el Principio de Indiferencia les asignamos iguales probabilidades, por lo que la probabilidad para cada una es de $\frac{1}{5}$.

Distribuimos este valor (expresado en el múltiplo $\frac{12}{60}$) en partes iguales entre las correspondientes distribuciones individuales (ver última columna de la tabla). Ahora, las probabilidades de las distribuciones # 8 y # 14 son $\frac{2}{60}$ y $\frac{3}{60}$, respectivamente, con lo que se obtiene una probabilidad para la 1ra. hipótesis de $\frac{5}{60}$. Por tanto, la probabilidad de la hipótesis, con base en la evidencia, será: $\frac{3}{60} / \frac{5}{60} = \frac{3}{5}$. En resumen, hay 3 oportunidades de 2, de que la 4a. bola sea azul, lo cual es más consistente con la experiencia.

PREGUNTA:

Si la urna considerada consistiera de bolas blancas, azules y amarillas, en proporciones desconocidas, para calcular probabilidades, ¿es aplicable el Principio de Indiferencia?

PROBLEMA:

Considere una urna cerrada conteniendo bolas blancas, azules y amarillas, en proporciones desconocidas, ¿cuál es la probabilidad de que al extraer 4 bolas al azar en sucesión, dado que las tres primeras fueron blancas, la 4a. sea amarilla? COMENTARIOS.

PREGUNTA:

¿Sería aplicable el Principio de Indiferencia en el siguiente problema?

Considere una urna cerrada conteniendo un gran número de bolas de colores, en proporciones desconocidas, ¿cuál es la probabilidad de extraer, al azar, 4 bolas del mismo color?

SOLUCION:

No, ¿cuántos colores?
(Sería necesaria una muestra o varias muestras para que las conclusiones pudieran ser válidas para toda la urna).

Para resolver problemas como el anterior, necesitamos utilizar una teoría probabilística más elaborada, definida en términos generales; es decir, en términos matemáticos.

OBSERVACION:

La Probabilidad, desde un punto de vista estrictamente matemático, se desarrolla sobre el supuesto: "eventos igualmente probables", que es un concepto indefinido admitido, similar a los teóricos "puntos" y "líneas" de la Geometría; de manera que "eventos igualmente probables" es un concepto artificial para estructurar una teoría lógicamente consistente; así como la Geometría Euclideana se desarrolla de teóricos "puntos" y "líneas". Sólo a través de la experiencia se puede decidir si los eventos se realizan conforme a la teoría; sólo a través de la experiencia la teoría tiene aplicaciones útiles [1] .

La Probabilidad Estadística se desarrolla a través de la experiencia. Cumple con las leyes del azar. El "azar" lo podemos ver como la antítesis de todo orden y regularidad, y que puede ser descrito en términos de leyes. Consideremos la Ley de los Grandes Números, que juega un papel central en la teoría de la Probabilidad Estadística.

La Ley de los Grandes Números fue establecida con gran rigor y para circunstancias muy generales. La esencia de su contenido puede ser ilustrada en un simple caso:

> "Supongamos que una moneda 'legal' es arrojada muchas veces y se contabiliza el número de soles y águilas que aparecen".

La Ley de los Grandes Números establece:

I) que arrojando algunas veces una moneda podemos hacer tan probable como se quiera que la razón de soles del total de tiradas difiera tan poco como se desee del valor predicho 1/2 .

POR EJEMPLO:

Si queremos que la razón difiera de $\frac{1}{2}$ por tan poco como $\frac{1}{100{,}000}$ y si se quiere el 99 % de seguridad (es decir, probabilidad = .99) para que se cumpla este propósito, entonces hay, perfectamente definido y admitido, un gran número de tiradas donde encontramos nuestro propósito.

OBSERVACION:

Se hace notar que no hay un número de tiradas lo suficientemente grande que realmente garantice que la fracción de soles sea $\frac{1}{100,000}$ de $\frac{1}{2}$. La ley simplemente establece, en una manera muy precisa, que a medida que el número de experimentos crece, hay una tendencia cada vez más fuerte para que los resultados conformen en una razón dada a la Probabilidad predicha.

II) que la proporción de "éxitos" (# de ocurrencias favorables de un evento entre el # total de ocurrencias del evento) tiende a igualar la probabilidad de éxito (dada según el Principio de Indiferencia) cada vez mejor conforme aumentan las pruebas.

VER EJERCICIOS(*).

III) que si incrementamos el # de pruebas, el # absoluto de éxitos tiende a desviarse cada vez más del número esperado.

"Supongamos, por ejemplo, que en 100 tiradas de una moneda (no favorecida) donde nos interesa el número de soles, se obtienen 40 y que en 1000 tiradas se obtienen 450 soles. La proporción de soles del total de tiradas ha cambiado del 40% al 45% (como era de esperarse, según la afirmación II). Pero en 100 tiradas el # absoluto de soles (40) difiere en 10 de 50 el # teórico esperado, mientras que en 1000 tiradas el número absoluto de soles (450) difiere por 50 (5 veces más que antes) del valor esperado 500. Entonces, la proporción mejora al incrementar el número de pruebas, pero el # absoluto de éxitos empeora".

Estos resultados de la Ley de los Grandes Números tienen que ver con la independencia de cualquier prueba respecto a los resultados obtenidos en pruebas previas. Se ilustra como sigue:

"Si al tirar una moneda 'legal' se obtiene una serie ininterrumpida de águilas (por ejemplo), muchas personas se inclinan a pensar que ahora es más probable que en la siguiente tirada se obtenga sol, pero esto no es así. Si la moneda es arrojada una vez más, aún después de una larga serie de águilas, es igualmente probable obtener águila o sol".

OBSERVACION:

Se asegura entonces que las largas secuencias de águilas o soles caerán según vayamos tirando, sin que afecte un resultado al siguiente; aunque la misma ley asegure en su aspecto más familiar que la razón de soles y la de águilas se aproximan más y más a $\frac{1}{2}$ según se incrementa el # de tiradas.

CONCLUSION:

Los resultados en una misma moneda son independientes entre sí, por lo tanto es igualmente probable arrojar una moneda 2 veces que dos monedas una sola vez.

PREGUNTA:

¿Los resultados en dados son independientes?

RESPUESTA:

Sí.

PROBLEMA:

Diseñe un experimento en el que los resultados sí dependan uno de otro.

SOLUCION:

Por ejemplo, una urna con bolas extraídas sin reemplazo.

(*)EJERCICIOS:

1) Realice el experimento de arrojar una moneda "legal":

a) 10 veces b) 30 veces c) 50 veces d) 100 veces

i) Tabule sus resultados y vea si la proporción de "soles" tiende al valor teórico $\frac{1}{2}$.

ii) Compruebe que la proporción de "águilas" tiende al valor teórico $\frac{1}{2}$ conforme aumentan las tiradas.

2) Realice el experimento de arrojar un dado "legal":

a) 10 veces   b) 30 veces   c) 60 veces   d) 100 veces

i) Tabule sus resultados y vea si la proporción de "números 1" tiende al valor teórico $\frac{1}{6}$ (igual para los números 2, 3, ... , 6).

PROBLEMA:

Diseñe un objeto con 3 posibles resultados con el que se pueda realizar un experimento:

a) 10 veces   b) 30 veces   c) 100 veces

y se observe que tiende a su valor teórico conforme se aumentan las pruebas.

Todos los resultados de la Ley de los Grandes Números, se aplican a series de pruebas independientes; pero hay experimentos en los que eventos pasados influyen en las probabilidades presentes, en estos casos se aplica la Probabilidad de Causas a series de pruebas dependientes (muy usuales en Medicina y Genética, entre otros) y trabajada por Thomas Bayes en su teorema.

PROBLEMA: (El juego de las 3 cartas) [1]

MATERIAL:

Se necesitan 3 cartas con las siguientes características:

Una carta es blanca por ambos lados ;
otra carta es roja por ambos lados ; y la
última carta es blanca por un lado y roja por el otro.

EXPERIMENTO:

Se ponen las cartas en un sombrero, se toma una al azar (dando oportunidad a que cualquiera de las 3 sea la escogida) y se coloca sobre una mesa.

RESULTADO:

Supongamos que se observa en la carta color rojo.

OBSERVACIÓN:

Obviamente, no fue extraída la carta blanco-blanco, debe ser la rojo-rojo o la rojo-blanco.

PREGUNTA:

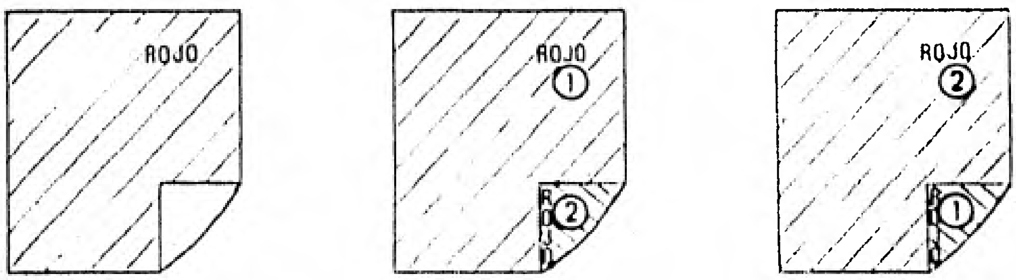
Si esto fuera un juego de apuestas, ¿a cuál de las 2 cartas le apostarían (a la rojo-rojo o a la rojo-blanco) ? Justifique su respuesta.

SOLUCION:

Se escoge rojo-rojo, ya que hay una ventaja con esta carta de 2 a 1 .

JUSTIFICACION:

Hay 3 posibles casos:



Hay 2 oportunidades de 3 de que dado que fue rojo, el lado oculto también sea rojo.

Hay 1 oportunidad de 3 de que dado el color rojo, el lado oculto sea blanco.

CONCLUSION:

Este es un ejemplo de Probabilidad de Causas.

EJERCICIO:

En el problema de las 3 cartas, ¿qué sucede si la carta escogida al azar y colocada en la mesa muestra el color blanco?

SOLUCION:

Se escogería la carta blanco-blanco con una ventaja de 2 a 1.

EJERCICIOS ADICIONALES:

A) Si una moneda está "cargada" hacia uno de sus resultados y desconocemos hacia cuál, ¿es la Probabilidad Inductiva o la Probabilidad Estadística la que lo descubre?

SOLUCION:

Es la Probabilidad Estadística, por la frecuencia en los resultados cargados hacia "águilas" o hacia "soles", en la repetición del experimento no nos acercaríamos al valor teórico 1/2 .

B) ¿Por qué es absurdo el Principio de Indiferencia en Probabilidad Estadística?

SOLUCION:

Sería muy audaz el experimentador que, sólo sabe que un dado (por ejemplo) que tiene las exactas dimensiones de un cubo, asegure a priori que las 6 caras aparecerán con igual frecuencia; y si él sabe que el dado está "cargado" en favor de una de sus caras, estaría contradiciendo su propia aseveración.

BB) Si se arroja un dado 60 veces, ¿qué tendría que suponer el experimentador para que el Principio de Indiferencia se cumpliera?

SOLUCION:

Que 10 veces apareciera el # 1, 10 veces el # 2, 10 veces el # 3, 10 veces el # 4, 10 veces el # 5 y 10 veces el # 6 .

CONCLUSIONES:

Todos los resultados de la Ley de los Grandes Números, se aplican a series de pruebas independientes; pero hay experimentos en los que eventos pasados influyen en las probabilidades presentes, en estos casos se aplica la Probabilidad de Causas a series de pruebas dependientes.

Podemos ahora asegurar que la Probabilidad Inductiva no predice frecuencias sino que pesa la fuerza de la evidencia en relación a una hipótesis; la Probabilidad Estadística se refiere a la frecuencia real de un evento, por lo que caracteriza situaciones objetivas; es decir, con la Probabilidad Estadística se puede describir el estado de un sistema físico, biológico o social, por lo que se aplica muy fructíferamente en muchos campos de la ciencia y de la industria.

Para la Probabilidad Estadística, al igual que para la Probabilidad Inductiva, existe una muy elaborada y estructurada teoría matemática que las engloba, por lo tanto nos referiremos simplemente a la Teoría de la Probabilidad.

AXIOMATIZACION DE LA PROBABILIDAD

a) INTRODUCCION

En 1933, el matemático ruso A.N. Kolmogorov publica en alemán una monografía (tratado especializado), con el propósito de darle un fundamento axiomático a la Teoría de la Probabilidad.

Kolmogorov escribe:

"La Teoría de la Probabilidad como una disciplina matemática, puede y debe ser desarrollada de axiomas, de la misma manera que la Geometría y el Algebra; esto significa que después de haber definido los elementos que serán estudiados y sus relaciones básicas, y haber establecido los axiomas con los cuales estas relaciones estarán gobernadas, toda exposición adicional deberá estar basada única y exclusivamente en estos axiomas, independientemente del significado concreto de estos elementos y sus relaciones".

Agrega:

"Cualquier teoría axiomática (abstracta) admite, como es bien conocido, un # ilimitado de interpretaciones concretas, además de aquellas para las que fue creada. Así, encontramos aplicaciones en campos de la ciencia que no tienen relación con los conceptos de "evento aleatorio" y de "probabilidad" en el significado preciso de estas palabras" [8].

Se puede decir que la mayoría de los científicos creen que varios de los sucesos más elementales en la Naturaleza son esencial e inevitablemente probabilísticos. Así, en la Teoría Cuántica Moderna que estructura los fundamentos de nuestro conocimiento del átomo, es no sólo imposible, sino sin sentido, intentar calcular dónde estará un cierto electrón en un instante dado; no se puede predecir dónde estará el electrón exactamente, sino solamente calcular la probabilidad de que estará o no estará en un determinado lugar o lugares.

Es justo reconocer que hubo científicos que no aceptaron el papel inevitable de la Probabilidad en los fenómenos atómicos. El gran ejemplo, desde luego, es Einstein, quien expresó en su manera muy característica que:

"nunca creeré que Dios juega a los dados con el mundo".

Esto fue sólo para señalar que Einstein perteneció a una pequeña minoría que apoyaba este punto.

La Teoría Cuántica y la Mecánica Estadística que forman a una gran parte de la Teoría Básica del Universo Físico, están esencialmente construidas sobre la Probabilidad. La Genética, la cual controla la herencia en el mundo viviente, está sujeta a las leyes de la Probabilidad. El carácter interno del proceso de Comunicación, el cual desempeña un gran papel en la vida humana, se ha encontrado que es de naturaleza probabilística. El concepto de Flujo Continuo del Tiempo, se ha demostrado que depende de cambios entrópicos, por lo que descansa sobre ideas probabilísticas [1].

En fin, la ciencia y la tecnología recurren a la Probabilidad.

AXIOMAS DE LA PROBABILIDAD

La axiomatización de Kolmogorov es la siguiente:

Sea E una colección de elementos $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ que llamaremos eventos elementales, y sea F un conjunto de subconjuntos de E; los elementos del conjunto F son llamados eventos aleatorios.

(En otras palabras, los eventos aleatorios son elementos de una colección F de subconjuntos del conjunto E. La noción de variable aleatoria es definida aquí como una función de eventos elementales; no todos los eventos aleatorios son considerados, sólo un cierto campo de eventos).

I. F es un campo* de conjuntos.

II. F contiene al conjunto E.

III. A cada conjunto A en F es asignado un número real no-negativo $P(A)$. Este número $P(A)$ es llamado la probabilidad del evento A.

IV. $P(E) = 1$

V. Si A y B no tienen elementos en común, entonces:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Un sistema de conjuntos F, junto con una asignación definida de números $P(A)$, satisfaciendo los axiomas I-IV es llamado un Campo de Probabilidad [8].

---

*Hausdorff, "Mengenlehre", 1927, pág. 78. Un sistema de conjuntos es llamado un campo si la suma, producto y diferencia de 2 conjuntos del sistema pertenece al mismo sistema. Cualquier campo no vacío contiene al conjunto nulo $\emptyset$.

4.2 PROPOSICION DE UN PROGRAMA DE PROBABILIDAD Y ESTADISTICA EN LA CARRERA DE INGENIERIA EN COMUNICACIONES Y ELECTRONICA.

Se divide en 2 partes:

PARTE: A

ASIGNATURA: Probabilidad y Estadística

DURACION DEL CURSO:	SEMANAS: 15 HORAS: 90	HORAS A LA SEMANA: 6

OBJETIVO DEL CURSO: Proporcionar al estudiante los elementos de la Teoría de la Probabilidad y de la Estadística que le permitan analizar fenómenos aleatorios relacionados con la Ingeniería.

OBJETIVO PARTICULAR: Proporcionar al estudiante de Ingeniería la herramienta básica para el tratamiento de problemas relacionados con la Teoría de la Comunicación, en el análisis de señales, ruido, procesos aleatorios y telefonía.

ANTECEDENTES AL CURSO: Algebra, Cálculo Diferencial e Integral, Algebra Lineal, Teoría de los Conjuntos, Técnicas de Conteo (Combinaciones, Permutaciones, Ordenaciones). Notación Sumatoria.

T E M A S

NUMERO	TITULO	HORAS
I	Estadística Descriptiva	18
II	Probabilidad	18
III	Variables Aleatorias	18
IV	Modelos Probabilísticos Comunes	18
V	Inferencia Estadística	18
	No. total de horas:	90

ASPECTO DETALLADO:

I. ESTADISTICA DESCRIPTIVA

I.1 Naturaleza y Objeto de la Estadística. Introducción Histórica.

I.2 Censo y Muestra. Tratamiento de datos no agrupados y datos agrupados en tablas de frecuencia. Gráfico de línea y de barras. Frecuencia relativa. Frecuencia acumulada. Frecuencia relativa acumulada.

I.3 Valores típicos de una muestra:

a) Medidas de tendencia central, media, mediana, moda en datos no agrupados y en datos agrupados.

b) Medidas de dispersión, rango, desviación media, desviación estándar, coeficiente de variación, de asimetría y de apuntamiento.

I.4 Datos Bivariados:

a) Covarianza y Correlación. Diagrama de dispersión. Ajuste de una curva. Dependencia Lineal.

b) Método de Cuadrados Mínimos. Estimaciones a partir del modelo lineal.

c) Series de tiempo. Aplicación a modelos de predicción.

II. PROBABILIDAD

II.1 Introducción. Motivación Histórica.

II.2 Enfoques de la Probabilidad. Probabilidad Inductiva. Probabilidad Estadística. El Principio de Indiferencia. La Ley de los Grandes Números. Conclusiones.

II.3 Axiomatización de la Probabilidad. El enfoque axiomático de la Probabilidad

a) Introducción

b) Axiomas de la Probabilidad.

II.4 Eventos y sus probabilidades. Algunos teoremas de Probabilidad. Eventos disjuntos. Eventos traslapados. Espacios finitos equiprobables.

II.5 Probabilidad Condicional. Independencia de Eventos. Teorema de Bayes.

III. VARIABLES ALEATORIAS

III.1 Definición de Variable Aleatoria. Variables Aleatorias discretas y continuas. Función de Distribución, función de densidad de probabilidad y sus propiedades. Función Generatriz de Momentos y Función Característica.

III.2 Esperanza y Varianza de una variable aleatoria. Propiedades.

III.3 Variables Aleatorias Conjuntas. Función de dsitribución y de probabilidad. Propiedades.

IV. MODELOS PROBABILISTICOS COMUNES

IV.1 Distribuciones de: Bernoulli, binomial, Poisson, hipergeométrica, multinomial, normal, exponencial, Beta y Gamma. Aproximación entre Distribuciones. Propiedades.

V. INFERENCIA ESTADISTICA

V.1 Parámetros Poblacionales y Estadísticos Muestrales. Teorema del Límite Central. Distribución de la media y la varianza muestrales. Las distribuciones J_1 Cuadrada, t y F.

V.2 Estimación Puntual. Estimadores insesgados, eficientes y consistentes. Método de Máxima Verosimilitud.

V.3 Estimación por Intervalo. Intervalos de confianza para la media. Tamaño de muestra.

V.4 Verificación de Hipótesis. Conceptos. Errores tipo I y tipo II. Nivel de Significación.

PARTE: AA (doble A)

Tomando en consideración los temas y contenidos abordados en este escrito, surge la necesidad del siguiente

ESQUEMA GENERAL:

I. ELEMENTOS MOTIVADORES

Principalmente:

Circuitos
dispositivos electrónicos
análisis de señales
ruido
Teoría de la Información
tráfico telefónico
Juegos (de azar)

(remitirse al Cap. III, secc. 3.1 y Cap. IV, secc. 4.1 de esta tesis).

II. PLANTEAMIENTO DE UN PROBLEMA

Con:

Motivación Histórica
(por ejemplo: la unidad Erlang en tráfico telefónico, ver Cap. III)

Interés General
(por ejemplo: el juego llamado: "Chicos y Grandes", Cap. III, 3.3)

Interés Profesional
(por ejemplo: comparando dos marcas de transistores en ganancia de voltaje; Cap. III, secc. 3.3).

III. TEMAS QUE INTERVIENEN

de I a V en
presentación por módulos

IV. ELEMENTOS DE PROBABILIDAD NECESARIOS

Temas básicos detallados

V. CUADRO PEDAGOGICO DE CATEGORIAS

CATEGORIA DEL ENUNCIADO	COMPORTAMIENTO DEL ALUMNO	COMPORTAMIENTO DEL PROFESOR
C1. Ejercicios de exposición	Aprender Adquirir conocimiento	Exponer incompletamente. Transmitir el conocimiento
C2. Ejercicios de investigación	Investigar, encontrar	Inducir la curiosidad y perseverancia en la investigación
C3. Ejercicios didácticos	Entrenarse Adquirir mecanismos	Fijar conocimientos, aptitudes, costumbres
C4. Ejecución de tareas técnicas	Tomar responsabilidades, llevar un trabajo a buen término (sin dejar errores)	Pedir que se haga exacto y bien hecho
C5. Ejemplos ilustrativos y de aplicación	Transmitir conocimientos teóricos dentro de un contexto práctico	Relacionar la abstracción con otros centros de interés
C6. Manipulación	Observar, experimentar, ensayar	Motivar un estudio abstracto
C7. Tests, evaluaciones, exámenes, etc.	Verificar el valor de sus conocimientos. Hacer valorar sus aptitudes	Controlar los resultados de la enseñanza en cada alumno

VI. HORAS REQUERIDAS

No más de 30 en suma por módulo (en esta materia de estudio sólo se consideran 3 módulos).

VII. HORAS EXTRA—CLASE

5 por módulo

(15 al semestre, con 3 módulos)

INTEGRACION DE LOS MODULOS.

El esquema expuesto contempla, de manera muy general, los aspectos importantes que deben incluirse en los módulos; es decir, cada módulo estará compuesto de cada uno de los elementos que contempla el esquema general —Elementos motivadores, Planteamiento de un problema, Temas que intervienen, ...— dependiendo de la carrera a la que esté enfocado, en este caso particular a la materia Probabilidad y Estadística en la carrera de Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica.

Al proponer este sistema, a través de módulos en la materia y carrera mencionadas, creo necesario que un grupo de profesores quisiera ensayar con sus alumnos para que evaluaciones y modificaciones necesarias fueran hechas, y así ideas y experiencias valiosas se reunieran en un manual para profesor, uno para el alumno y en un libro teórico adecuado.

M O D U L O   I
(SUGERENCIA)

ELEMENTOS MOTIVADORES	PLANTEAMIENTO DE UN PROBLEMA	TEMAS QUE INTERVIENEN	ELEMENTOS DE PROBABILIDAD Y ESTADISTICA NECESARIOS	CATEGORIA DEL ENUNCIADO	HORAS REQUE-RIDAS	HORAS EXTRA-CLASE
Juego: "Chicos y Grandes"	Resultados en el juego	I, II	Tablas de frecuencias	C3 y C7	3	1
			medidas de centralización	C4 y C7	3	1
			* La Probabilidad Estadística	C5	4	——
			* La Probabilidad Inductiva	C5	4	1
			* Motivación Histórica	C2	4	
			* La axiomatización de la probabilidad	C6	4	
			eventos y sus probabilidades	C1 y C7	4	1
			probabilidad condicional	C1 y C7	4	1
				TOTALES:	30	5

***Ver capítulo** IV de esta tesis, sección 4.1

MODULO II

(SUGERENCIA)

ELEMENTOS MOTIVADORES	PLANTEAMIENTO DE UN PROBLEMA	TEMAS QUE INTERVIENEN	ELEMENTOS DE PROBABILIDAD NECESARIOS	CATEGORIA DEL ENUNCIADO	HORAS REQUE-RIDAS	HORAS EXTRA-CLASE
Unidad Erlang (tráfico telefónico)	Congestión de llamadas en una central telefónica o dimensionar grupos de registradores	I, III y IV	Variables aleatorias	C6	2	
			función de densidad	C3	2	
			función de distribución	C3	2	
			Variables aleatorias conjuntas	C1	2	1
			* motivación histórica	C2	2	
			modelos probabilísticos	C4 y C7	10	2
			datos bivariados	C5 y C7	8	1
			series de tiempo	C5	2	1
				TOTALES	30	5

*Ver capítulo III, sección 3.1, de esta tesis.

MODULO III
(SUGERENCIA)

ELEMENTOS MOTIVADORES	PLANTEAMIENTO DE UN PROBLEMA	TEMAS QUE INTERVIENEN	ELEMENTOS DE PROBABILIDAD NECESARIOS	CATEGORIA DEL ENUNCIADO	HORAS REQUE-RIDAS	HORAS EXTRA-CLASE
Aparatos electrónicos	Comparar 2 marcas de transistores	I, II, III IV y V	Censo y muestra	C2	3	
			Tablas de frecuencias	C3	3	1
			Gráficas	C3	1	1
			Medidas de Centralización	C4	4	1
			Medidas de dispersión	C4	4	1
			Números Aleatorios	C2	2	
			Técnicas de Muestreo	C5	5	
			Distribución Normal	C6 y C7	3	1
			Prueba de Hipótesis	C1 y C7	5	
				TOTALES:	30	5

OBSERVACION:

Los módulos considerados para este curso de Probabilidad y Estadística pueden ser más de 3 (por ejemplo, 5), tomando en cuenta que resultan también interesantes problemas de análisis de señales con ruido y circuitos.

EJEMPLO DE USO DEL PROGRAMA.

Para ejemplificar el módulo III:

PROBLEMA: Consideremos una empresa fabricante de aparatos electrónicos.

Hasta ahora han utilizado en sus aparatos los transistores de marca A, pero quieren probar una marca de transistor B con características similares a las de A y decidir si cambian a la marca B. ¿Qué deben tomar en cuenta?

—Si hay ganancia de voltaje al cambiar de la marca A a la B; es decir, si hay diferencia significativa entre las marcas A y B.

¿Cómo pueden comparar las ganancias de voltaje?

—Se eligen varios transistores de las 2 marcas y se comparan sus ganancias de voltaje.

PROCEDIMIENTO: (Se introducen varios conceptos)

Podemos considerar, por ejemplo, 100 transistores de cada marca, organizar los datos en una tabla de frecuencias, graficar la distribución y comparar sus elementos descriptivos, media y desviación estándar. [Los 200 datos estadísticos se proporcionan a los alumnos y se estudian los conceptos mencionados (tabla de frecuencias, histograma, medidas de centralización y de dispersión); o bien, se introduce el manejo de tablas de números aleatorios, técnicas de muestreo, para que obtengan esos 200 datos. Se percatarán de que la distribución muestral experimental es aproximadamente normal (para un número de muestras grande, mayor de 30), con lo que se pone en evidencia uno de los resultados del teorema del límite central].

Si para los 100 transistores marca A se obtuvo:

una ganancia promedio ($\overline{x}_A$) de 31 decibeles con desviación estándar (σx_A) de 0.3 decibeles (unidad, considerando aparatos con ruido).

Si para los 100 transistores marca B se obtuvo:

una ganancia promedio ($\overline{x}_B$) de 30.9 decibeles con desviación estándar (σx_B) de 0.4 decibeles.

Analizando los valores promedio de $\overline{x}_A$ y $\overline{x}_B$, ¿sería acertado decidir que la marca A proporciona mayor ganancia de voltaje que la marca B ?

— . . . . .

Al extraer otras muestras aleatorias de 100 transistores de cada marca, ¿se obtendría la misma conclusión? ¿Qué, la decisión, depende de la muestra?

— . . . . .

Puede ser que la diferencia entre las ganancias de voltaje se deba únicamente al azar, pero también puede ser que esta diferencia sea significativa

$$(\overline{x}_A - \overline{x}_B = 31 - 30.9 = 0.1)$$

Si queremos inferir resultados de muestras hacia su población, la decisión llevará implícito un cierto nivel de confianza (una probabilidad) o cierto nivel de significación (porcentaje de error) [17].

PROCEDIMIENTO: (Pruebas de diferencias de medias)

Haremos uso de las llamadas Pruebas de Significancia o Pruebas de Hipótesis, métodos estadísticos para tomar decisiones a partir de una muestra o muestras extraídas de la población; son métodos para decidir si se acepta o se rechaza una hipótesis estadística (suposición concerniente a la población).

ASPECTOS TEORICOS

Sean $\bar{x}$ y $\bar{y}$ los promedios aritméticos obtenidos de dos muestras de tamaño n_x y n_y, extraídas respectivamente de 2 poblaciones con medias μ_x y μ_y y desviaciones estándar σ_x y σ_y:

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \mu_{\bar{x}-\bar{y}}}{\sigma_{\bar{x}-\bar{y}}} \qquad H_o : \mu_{\bar{x}-\bar{y}} = \mu_{\bar{x}} - \mu_{\bar{y}}$$

$$= \mu_x - \mu_y$$

$$= 0$$

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_{\bar{x}-\bar{y}}} \qquad H_1 : \mu_x - \mu_y \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix}$$

Para la varianza:

$$\sigma^2_{\bar{x}-\bar{y}} = \sigma^2_{\bar{x}} + \sigma^2_{\bar{y}} = \frac{\sigma^2 x}{n_x} + \frac{\sigma^2 y}{n_y}$$

Para el ejemplo:

Si μ_{x_A} y μ_{x_B} son las medias respectivas de las dos poblaciones infinitas a las que corresponden las muestras, la Prueba de Hipótesis adopta la forma siguiente:

(hipótesis nula) H_o: $\mu_{x_A} = \mu_{x_B}$ (no hay diferencia significativa entre las 2 marcas de transistores)

(hipótesis alternativa) H_1: $\mu_{x_A} \neq \mu_{x_B}$ (sí hay diferencia significativa entre las dos marcas de transistores)

a) ¿A un nivel de significancia del 5 % ?

b) ¿A un nivel de significancia del 1 % ?

SOLUCION:

Como la distribución muestral experimental es aproximadamente normal, el valor de z, bajo la hipótesis H_o, es:

$$z = \frac{\overline{x}_A - \overline{x}_B}{\sigma_{\overline{x}_A - \overline{x}_B}} = \frac{\overline{x}_A - \overline{x}_B}{\sqrt{\frac{\sigma^2 x_A}{n_A} + \frac{\sigma^2 x_B}{n_B}}}$$

donde:

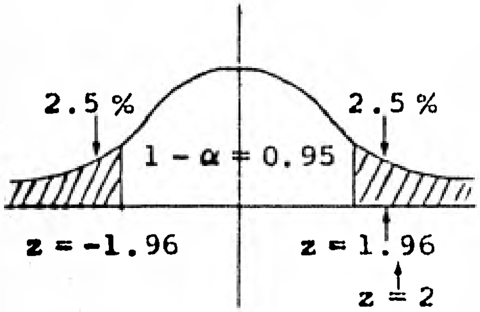
n_A = # de elementos de la muestra de transistores marca A .

n_B = # de elementos de la muestra de transistores marca B .

sustituyendo:

$$z = \frac{31 - 30.9}{\sqrt{\frac{(0.3)^2}{100} + \frac{(0.4)^2}{100}}} = 2 \qquad \text{(valor empírico)}$$

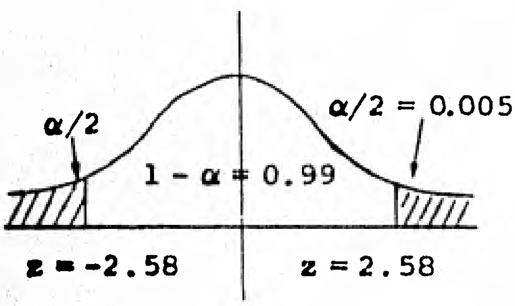
a) $\alpha = 0.05$ (Nivel de significancia)



Como $z = 2$ está dentro de la región de rechazo de la hipótesis nula H_0 (región sombreada), por lo tanto:

Puede concluirse que efectivamente existe diferencia significativa en la ganancia en voltaje de los transistores a un nivel de confianza del 95 %.

b) $\alpha = 0.01$ (Nivel de significancia)



Como $z = 2$ (valor empírico) está dentro de la región de aceptación de la hipótesis nula H_0, por lo tanto la diferencia entre las ganancias es producto del azar y . . .

se acepta la hipótesis de que ambos tipos de transistores tienen igual ganancia media en voltaje a un nivel de confianza del 99 %.

BIBLIOGRAFIA CORRESPONDIENTE AL PROGRAMA.

Hasta ahora no he encontrado un libro que se ajuste a la pedagogía sugerida, pero para tener una idea de elementos motivadores y plantear problemas, se recomienda:

	PARA LOS TEMAS:
"Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas" Por Paul L. Meyer Ed. Fondo Educativo Interamericano. U.S.A., 1970.	II, III, IV y V
"Introducción a la Estadística Matemática" Por Erwin Kreyszig Ed. Limusa. México, 1970.	I, II, III, IV y V
"Probabilidad y Estadística" Por Murray R. Spiegel Ed. Mc Graw Hill, Serie Schaum. U.S.A., 1975.	II, III, IV y V
"Estadística" Por Murray R. Spiegel Ed. Mc Graw Hill, Serie Schaum. U.S.A., 1961.	I
"Elementos de Probabilidad y Estadística" Por Elwer B. Mode Ed. Reverté Mexicana, S.A. México, 1967.	I, II, III, IV y V
"Engineering Statistics" by A.H. Bowker - G.J. Lieberman Ed. Prentice Hall, Inc. U.S.A., 1972.	I, II, III, IV y V
"Probabilistic Systems Analysis" by Arthur M. Breipohl Ed. Wiley & Sons, Inc. U.S.A., 1970.	II, III, IV y V

BIBLIOGRAFIA GENERAL

[1] Warren Weaver - "Probability", en Mathematics in the Modern World: Lectures from Scientific American. W.H. Freeman and Co.

[2] Rudolf Carnap - "What is Probability?", en Mathematics in the Modern World: Lectures from Scientific American. W.H. Freeman and Co.

[3] Warren Weaver - "Statistics", en Mathematics in the Modern World: Lectures from Scientific American. W.H. Freeman and Co.

[4] Onésimo Hernández L. - "Elementos de Probabilidad y Estadística". Ed. Fondo de Cultura Económica, 1979.

[5] Melesio Rivera M. - "La Comprobación Científica". Serie Temas Básicos. Ed. Trillas, área: Metodología de la Ciencia, 1980.

[6] "Cuadernos de Pedagogía", Suplemento # 14 (varios artículos sobre: La Enseñanza de las Ciencias). Ed. Labor. Barcelona, España (Jul.-Ag.), 1980 .

[7] Gaston Bachelard - "Epistemología". Ed. Anagrama, 1971.

[8] A.N. Kolmogorov - "Foundations of the Theory of Probability". Ed. Chelsea, 1950.

[9] B.P. Lathi - "Introducción a la teoría y sistemas de comunicación". Ed. Limusa. (Cap. I y VIII).

[10] Guy Brousseau - "Les obstacles epistemologique et les problèmes en mathématiques" (Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas).

[11] A.K. Erlang - "Solución de algunos problemas en la teoría de probabilidades de importancia en Centrales Telefónicas Automáticas". Ed. I.P.N., 1976.

[12] Ana María Ojeda S. - "Procesos Estocásticos de segundo orden". Tesis de Licenciatura: Físico-Matemático, I.P.N., 1974.

[13] Taub-Schilling — "Principles of Communication Systems". Ed. Mc Graw Hill, 1971. (Cap. 2, 7 y 13).

[14] J. Piaget, G. Choquet, J. Diedonné, R. Thom y otros - "La enseñanza de las matemáticas modernas". Alianza Editorial, 1978.

[15] Paul L. Meyer - "Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas". Ed. Fondo Educativo Interamericano, 1970. (Cap. II).

[16] G. Glaeser - "El Desarrollo Curricular" (CURSO EN FRANCIA), (Oct., 1976).

[17] G. Box, W. Hunter, J. Stuart - "Statistics for Experimenters". Ed. John Wiley and Sons (1978).

[18] L.E. Maistrov - "Probability Theory" (A Historical Sketch). Ed. Academic Press (1974).

[19] Teléfonos de México, curso impartido (1981). (Cap. V, notas).