FACULTAD DE CIENCIAS

"TEORIA DE NUDOS"

TESIS PROFESIONAL

Que para obtener el Título de

MATEMATICO

PRESENTA

MIGUEL LECHUGA ANAYA
(Becario del Instituto de Matemáticas)

México, D.F. 1982

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORIA DE NUDOS

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

PRESENTA

MIGUEL LECHUGA ANAYA

(BECARIO DEL INSTITUTO DE MATEMATICAS)

BAJO ASESORAMIENTO

DEL DR. GUILLERMO TORRES DIAZ

México, D.F. 1982

Prefacio

El presente trabajo tiene por objeto dar una introducción rápida y sencilla a la teoría de nudos, sencilla en el sentido de que en él no se utilizan conocimientos que vayan más alla de los que posee un alumno que cursa el último año de licenciatura. Rápida porque tratamos con los sujetos de los que parte la teoría de nudos sin detenernos en demostraciones de teoremas que son sencillas pero demasiado largas y de los cuales damos a mi parecer las mejores referencias para sus demostraciones.

En el capítulo I tratamos con los aspectos más generales de la teoría de nudos y probamos mediante un ejemplo que existen una infinidad de nudos diferentes. En el capítulo II trabajamos esencialmente en la presentación del grupo asociado a un nudo que se define como el grupo $\pi(R^3 - K)$ que resulta ser un invariante de los nudos lo mismo que lo que llamamos ideales elementales de lo cual hacemos su estudio en el capítulo III. En nuestro último capítulo trabajamos con lo que es otro invariante de nudos y que nos sirve de una manera más débil para diferenciar a los nudos, a este invariante lo llamamos polinomio de nudo. Al final de este capítulo trabajamos con una herramienta más moderna en la teoría de nudos las presentaciones duales.

Prerrequisitos

A.1- El grupo libre $F(X)$. Sea X un conjunto de cardinalidad α cuyos elementos pueden ser cualquier cosa pero que por comodidad los denotamos con símbolos $a, b, c, \ldots$. Por una sílaba entendemos un símbolo de la forma a^n con a un elemento de X y n un entero. Una palabra será una sucesión finita ordenada de sílabas. Por ejemplo $a^0b^3c^2a^1b^{-2}$. Hay sólo una palabra que carece de sílabas la palabra vacía y la denotamos por 1. En $W(X)$ el conjunto de todas la palabras definimos un producto de manera natural esto es el producto de dos palabras es simplemente escribir una después de otra. Si una palabra u es de la forma $w_1a^0w_2$ donde w_1 y w_2 son palabras decimos que la palabra $v = w_1 w_2$ se obtiene de u por medio de una contracción elemental del tipo 1 o que v se obtiene de u por medio de una expansión elemental del tipo 1. Si a^0 es la n-ésima sílaba (contando de izquierda a derecha) la contracción ocurre en la n-ésima sílaba. Si la palabra u es de la forma $w_1 a^p a^q w_2$, donde w_1, w_2 son palabras decimos que la palabra $v = w_1 a^{p+q} w_2$ se obtiene de u por medio de una contracción elemental del tipo 2 o que u se obtiene de v por una expansión elemental del tipo 2.

Dos palabras se dicen equivalentes si una puede obtenerse de la otra por medio de expansiones o contracciones del tipo 1 y 2 por medio de un número finito de pasos. Esto nos da una relación de equivalencia que nos induce una partición en $W(R)$ al conjunto de clases en $W(R)$ lo denotamos por $F(R)$. Es fácil verificar que con la multiplicación inducida de $W(R)$, $F(R)$ constituye un grupo. A este grupo lo llamamos el grupo libre en el alfabeto R.

Llamamos a un conjunto generador E de un grupo G una base libre si, dado cualquier grupo H y cualquier función $\phi: E \to H$ puede ser extendido a un homomorfismo de G en H.

A un grupo que posea una base libre lo llamamos libre.

Presentación de Grupos.

Un grupo G está determinado si existe un conjunto de elementos $g_1, g_2, \dots$, llamados generadores que generan al grupo, y un conjunto de ecuaciones $f_1(g_1, g_2, \cdots) = 1$, $f_2(g_1, g_2, \cdots) = 1$, $\cdots$, llamadas ecuaciones definidas o relaciones definidas, que tienen la propiedad que cada relación verdadera que se obtiene de entre los elementos $g_1, g_2, \cdots$ es una consecuencia algebraica de las ecuaciones definidas.

Sea F un grupo libre con base libre $x_1, x_2, \dots$ en correspondencia uno a uno con los generadores $g_1, g_2, \dots$ de G. Sea ϕ un homomorfismo de F sobre G definido por $\phi x_i = g_i$ $i = 1, 2, \dots$ Para cada una de las ecuaciones definidas $f_i(g_1,g_2,\cdots)=1$

sea $r_i = f_i(x_1,x_2,\cdots)$, $i=1,2,\cdots$

Si se tiene por ejemplo $f_i(g_1,g_2,\cdots)=g_1g_2g_1^{-1}=1$ entonces $r_i=x_1x_2x_1^{-1}$. La afirmación que $f_i(g_1,g_2,\cdots)=1$ en G es equivalente a la afirmación que r_i está en el kernel de ϕ. Luego entonces $1=\phi r_i = f_i(g_1,g_2,\cdots)$. A los elementos $r_1,r_2,\ldots$ los llamamos relatores.

Un elemento f de G es consecuencia de elementos $f_1,f_2,\cdots$, si está contenido en cada subgrupo normal de G que contiene a los elementos $f_1,f_2,\cdots$. Dado que la intersección de cualquier colección de subgrupos normales es un un subgrupo normal de G que contiene a los elementos $t_1, t_2, \ldots$ Podemos decir que la consecuencia de $t_1, t_2, \ldots$, es el menor subgrupo normal de G que contiene a los elementos $t_1, t_2, \ldots$

Sea F un grupo libre con base libre E lo suficientemente extensa a la cual llamamos el conjunto subyacente de generadores. Una presentación de grupo denotada $(X:R)$ es un objeto que consiste de un subconjunto X del conjunto E y un subconjunto R del subgrupo $F(X)$ generado en F por X. El conjunto X lo llamamos conjunto generador de la presentación y al conjunto R lo llamamos conjunto de relatores de la presentación. El grupo de la presentación

$(X:V)$ es el grupo factor $|X:V| = F(X)/R$, donde R es la consecuencia de V en $F(X)$. Una presentación de grupo de un grupo G consistirá entonces de una presentación $(X:V)$ y un isomorfismo ϕ del grupo $|X:V|$ sobre G.

Una presentación $(X:V)$ es finitamente generada si X es finito, finitamente relatada si V es finito y es una presentación finita si es finitamente relatada y finitamente generada. Un grupo es finitamente presentado si posee al menos una presentación finita.

Un mapeo $f:(X:V) \to (Y:S)$ de presentaciones consiste de dos presentaciones $(X:V)$ y $(Y:S)$ y un homomorfismo $f: F(X) \to F(Y)$ que satisface la condición de que la imagen $f(v)$ de v bajo f está contenida en la consecuencia de s.

Cada mapeo de presentaciones $f:(X:V) \to (Y:S)$ determina un único homomorfismo de grupos $f_*: |X:V| \longrightarrow |Y:S|$ que satisface $f_*\gamma = \gamma f$ donde los homomorfismos canónicos $F(X) \to |X:V|$ y $F(Y) \to |Y:S|$ los denotamos ambos por γ.

Dos mapeos de presentaciones $f_1, f_2 : (X:V) \to (Y:S)$ son homotópicos ($f_1 \simeq f_2$), si, para cada x en X, el elemento $f_1(x) f_2(x^{-1})$ pertenece a la consecuencia de s. O lo que es equivalente para cada $u \in F(X)$, $\gamma f_1(u) = \gamma f_2(u)$.

De la definición del mapeo inducido $*$ se tiene $f_{i*}\gamma(u) = \gamma f_i(u)$ $\quad i=1,2$ y se tiene que

a) $f_1 \simeq f_2$ si y sólo si $f_{1*} = f_{2*}$.

y entonces

b) Si $f_1 \simeq f_2$ y $g_1 \simeq g_2$, entonces $g_1 f_1 \simeq g_2 f_2$

Teorema A.2. Para cada homomorfismo $\theta : |X:V| \to |Y:S|$, existe un mapeo de presentaciones $f : (X:V) \to (Y:S)$ tal que $f_* = \theta$. Además cualesquier par de mapeos de presentaciones, estos son homotópicos. [1]

Dos presentaciones $(X:V)$ y $(Y:S)$ se dicen del mismo tipo si existen mapeos,

$$(X:V) \underset{f}{\overset{g}{\rightleftarrows}} (Y:S) \text{ tales que } gf \simeq 1 \text{ y}$$

$fg \simeq 1$. Al par f, g se le llama una equivalencia de presentaciones.

Teorema A.3. Dos presentaciones son del

mismo tipo si y sólo si sus grupos son isomorfos llama. Si f, g forman una equivalencia de presentaciones, entonces

$$g_* f_* = (gf)_* = 1_* = 1,$$

$$f_* g_* = (fg)_* = 1_* = 1;$$

como $g_* f_* = 1$, $f_* g_* = 1$, f_* mapea a $|X:R|$ isomorfamente sobre $|Y:S|$ y por tanto $g_* = f_*^{-1}$.

Recíprocamente, si θ mapea $|X:R|$ isomorfamente sobre $|Y:S|$ y $f_* = \theta$, $g_* = \theta^{-1}$, entonces

$$(gf)_* = g_* f_* = \theta^{-1}\theta = 1 = (1)_*, \text{ entonces } gf \simeq 1.$$

$$(fg)_* = f_* g_* = \theta\theta^{-1} = 1 = (1)_*, \text{ entonces } fg \simeq 1.$$

Sea $(X:R)$ una presentación cualquiera y sea s cualquier consecuencia de R. Consideremos ahora la presentación $(Y:S)$ dada por $Y = X$ y

$S = V \cup s$. En este caso se tiene que la consecuencia de V es la misma que la de S. Entonces $(X:V)$, $(Y:S)$ y el automorfismo identidad $1 : F(X) \to F(Y)$ define un mapeo de presentaciones $I : (X:V) \to (Y:S)$. Analogamente $(Y:S)$, $(X:V)$ y la identidad 1 definen un mapeo de presentaciones $I' : (Y:S) \to (X:V)$ y trivialmente I, I' constituyen una equivalencia de presentaciones.

Sea nuevamente $(X:V)$ una presentación arbitraria y sea y un elemento del conjunto subyacente de generadores tal que y no está contenido en X, y sea $\xi \in F(X)$. Consideremos la presentación $(Y:S)$ con $Y = X \cup y$ y $S = V \cup y\xi^{-1}$. El homomorfismo $\Pi : F(X) \to F(Y)$

definido por $\mathrm{II}(x) = x$ para cualquier $x \in X$, mapea r en la consecuencia de s, así $(X:R)$, $(Y:S)$ y $\mathrm{II}: F(X) \to F(Y)$ define un mapeo de presentaciones $\mathrm{II}: (X:R) \to (Y:S)$. También el homomorfismo $\mathrm{II}': F(Y) \to F(X)$ definido por $\mathrm{II}'(x) = x$ para $x \in X$ y $\mathrm{II}'(y) = \xi$ mapea S sobre $R \cup 1$ y por tanto en la consecuencia de R. Se sigue que $(Y:S)$, $(X:R)$, y $\mathrm{II}': F(Y) \to F(X)$ define un mapeo de presentaciones $\mathrm{II}': (Y:S) \to (X:R)$. La composición $\mathrm{II}'\mathrm{II}$ es la identidad. También para cada $x \in X$, $\mathrm{II}\,\mathrm{II}'(x)x^{-1} = 1$, y $\mathrm{II}\,\mathrm{II}'(y)\cdot y^{-1} = \mathrm{II}(\xi)\cdot y^{-1} = \xi y^{-1} = (y\xi^{-1})^{-1}$ que está en la consecuencia de S, por tanto $\mathrm{II}\,\mathrm{II}' \simeq 1$. Entonces el par $\mathrm{II}, \mathrm{II}'$ es una equivalencia de presentaciones.

A I, I', II, II' las llamamos equivalencias de Tietze.

Teorema A.4. Teorema de Tietze

Supongamos que $(X:R) \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} (Y:S)$ es una equivalencia de presentaciones y que las presentaciones $(X:R)$ y $(Y:S)$ son ambas finitas. Entonces existe una sucesión finita $T_1, T_1', \ldots, T_k, T_k'$ de equivalencias de Tietze tales que

$$f = T_1 \cdots T_k \quad y \quad g = T_k' \cdots T_1' .$$

Dem. ver [1].

Ejemplo. Utilizando las equivalencias de Tietze mostraremos que los grupos $|x, y, z : xyz = yzx|$ y $|x, y, a : xa = ax|$ son isomorfos

1) $(x, y, z : xyz(yzx)^{-1}) \xrightarrow{II} (x, y, z, a : xyz(yzx)^{-1}, a(yz)^{-1}) \rightarrow$

$\xrightarrow{I} (x, y, z, a : xa(ax)^{-1}, a(yz)^{-1}, xyz(yzx)^{-1}) \xrightarrow{I'} (x, y, z, a : xa(ax)^{-1}, a(yz)^{-1}) \rightarrow$

$\xrightarrow{I} (x, y, z, a : xa(ax)^{-1}, z(y^{-1}a)^{-1}, a(yz)^{-1}) \xrightarrow{I'} (x, y, a, z : xa(ax)^{-1}, z(y^{-1}a)^{-1}) \rightarrow$

$\xrightarrow[II']{} (x, y, a : xa(ax)^{-1})$.

Teorema A.5. Si $(X:V)$ es cualquier presentación de un grupo, entonces $(X : V \cup \{[x_i,x_j]\ i,j=1,2\})$ es una presentación del abelianizado del grupo factor $|X:V|$. [1].

Teorema A.6*. El abelianizado de un grupo de un nudo es cíclico infinito.

Demostración. Sea G un grupo de un nudo. Utilizando la presentación de Wirtinger y nuestro Teorema anterior se tiene que una presentación del abelianizado de G $G/[G,G]$ es de la forma $(x_1, x_2, \dots, x_n : x_{i+1}^{-1} x_{k(i)}^{\varepsilon} x_i x_{k(i)}^{-\varepsilon}, [x_i, x_j], i,j=1,2,\dots,n-1)$ la cual se puede llevar a la presentación equivalente $(x_1, \dots, x_n : x_{i+1}x_i^{-1}, i=1,\dots,n-1)$ como $x_{i+1}x_i^{-1} = 1$ implica $x_{i+1} = x_i$ resulta que

* Posteriormente mostraremos que podemos asociar un grupo a un nudo dado

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n : x_{i+1} x_i^{-1}\ ,\ i = 1, \ldots, n-1) \simeq (t :)$$

y por tanto se tiene que

$$G/[G:G]$$ es cíclico infinito.

Índice

Capítulo I.

Generalidades.

Definición 1.1. Sea $K \subset \mathbb{R}^3$, diremos que K es un nudo si existe un homeomorfismo φ de S^1 en $\mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(S^1) = K$, donde S^1 es es el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Definición 1.2. Diremos que dos nudos K_1, K_2 son equivalentes si existe un homeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que conserva la orientación y es tal que $\varphi(K_1) = K_2$. (Si K_1 es equivalente a K_2 escribimos

Observación 1.2.1. Esta relación es una relación de equivalencia.

a) K_1 es equivalente a K_1 (lo denotamos $K_1 \sim K_1$)

Basta tomar $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ como $\varphi(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$.

b) Si K_1 es equivalente a K_2 (escribimos $K_1 \sim K_2$)

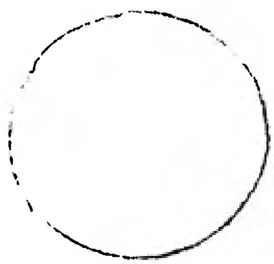
entonces $K_2 \sim K_1$.

Si K_1 es equivalente a K_2 entonces existe un homeomorfismo $\varphi: \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^3$ que conserva la orientación y es tal que $\varphi(K_1) = K_2$, basta entonces tomar $\psi: \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\psi = \varphi^{-1}$ para obtener que $K_2 \sim K_1$.

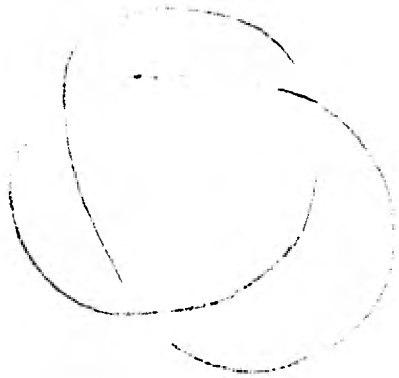
c) Si $K_1 \sim K_2$ y $K_2 \sim K_3$ entonces $K_1 \sim K_3$

Si $K_1 \sim K_2$ y $K_2 \sim K_3$ existen entonces homeomorfismos $\varphi_1: \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\varphi_2: \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^3$ tales que $\varphi_1(K_1) = K_2$ y $\varphi_2(K_2) = K_3$) con φ_1 y φ_2 que conservan la orientación, para obtener que $K_1 \sim K_3$ basta entonces considerar el homeomorfismo $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

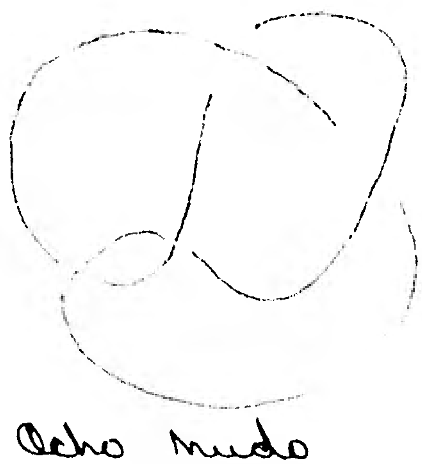
Como ejemplos de nudos tenemos los siguientes.



Nudo trivial



Nudo trébol



Ocho nudo

Posteriormente probaremos que los nudos anteriores no son equivalentes.

Definición 1.3. Dos nudos son del mismo tipo si son equivalentes.

Hasta el momento no es claro que existan diferentes tipos de nudos de hecho tenemos que todos los nudos son homeomorfos puesto que cada uno de ellos es homeomorfo al círculo unitario. Así la propiedad de ser anudado no es una propiedad topológica intrínseca del espacio consistente de los puntos del nudo, pero es una característica de la forma en que el nudo está sumergido en $\mathbb{R}^3$. De esta manera podríamos haber definido nuestra relación de equivalencia entre el conjunto de curvas de curvas de Jordan sumergidas en $\mathbb{R}^3$ y llamar nudo a cada clase de equivalencia que contenga un polígono simple cerrado.

Definición 1.4.- Un nudo poligonal es un nudo que es la unión de un número finito de segmentos cerrados de líneas rectas llamados lados y cuyos puntos extremos llamamos vértices.

Definición 1.5. Un nudo es manso si es equivalente a un nudo poligonal, de otra forma lo llamamos nudo salvaje. En lo que resta del presente trabajo nos ocuparemos únicamente del estudio de nudos mansos.

Un nudo K se especifica usualmente por una proyección, consideremos la proyección paralela. $\mathcal{P}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\mathcal{P}(x,y,z) = (x,y,0)$. un punto p de la imágen $\mathcal{P}(K)$ se llama un punto múltiple si $\mathcal{P}^{-1}(p)$ contiene más de un punto de K. El orden de $p \in \mathcal{P}(K)$ es la cardinalidad de $(\mathcal{P}^{-1}(p)) \cap K$.

Definición 1.6 Un nudo K está en posición regular si.

i) Los únicos puntos múltiples de K son puntos dobles y solo hay un número finito de ellos.

ii) Ningún punto doble es la imágen de ningún vértice de K.

Teorema 1.7. Cualquier nudo poligonal K es equivalente a un nudo en posición regular bajo una rotación arbitrariamente pequeña de $\mathbb{R}^3$.

Demostración ver [Fox 1]

Definición 1.8. Si K es un nudo en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ y P_0 es cualquier punto en $\mathbb{R}^3 - K$, entonces el grupo del nudo K es el grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K, P_0)$. Dado que $\mathbb{R}^3 - K$ es conexo diferentes P_0 dan grupos isomorfos así solamente escribimos $\pi(\mathbb{R}^3 - K)$ para el grupo del nudo K.

Definición 1.9. Un invariante de nudos es una función $K \longmapsto f(K)$ que asigna a cada nudo K un objeto $f(K)$ de tal forma que a nudos del mismo tipo se le asignan objetos equivalentes.

Ejemplo 1.9.1 La función que asigna a cada nudo K su grupo de nudo $\pi_1(\mathbb{R}^3-K)$ es un invariante de nudo. De esta forma si tenemos dos nudos K_1 y K_2 cuyos grupos $\pi_1(\mathbb{R}^3-K_1)$ y $\pi_1(\mathbb{R}^3-K_2)$ no son isomorfos podemos entonces afirmar que los nudos K_1 y K_2 no son del mismo tipo.

Con los siguientes dos ejemplos mostraremos un tipo especial de nudos y dentro de esta clase especial de nudos probaremos que hay una infinidad de diferentes tipos de nudo.

Ejemplo 1.10. Un toro puede considerarse como el espacio obtenido a partir del plano $\mathbb{R}^2$ al identificar los puntos (x, y), (x', y') si y sólo si $x - x'$, $y - y'$ son ambos enteros. Designemos por $p: \mathbb{R}^2 \to T$ la identificación. Sea L una línea que pase por el origen de $\mathbb{R}^2$ con pendiente m/n donde $1 < m < n$ y m, n son enteros primos entre sí. La imágen $K = p(L)$ es una curva cerrada simple sobre el toro T; que se enrolla en espiral m veces sobre el toro y da n-vueltas a lo largo de él en el otro sentido. Si suponemos ahora que T está sumergido en $\mathbb{R}^3$ de manera ordinaria, entonces se tiene

$$K \subset T \subset \mathbb{R}^3$$

y así K es un nudo, según nuestra definición. A K lo llamamos nudo tórico de tipo (m, n).

Ejemplo 1.11.- Existe una infinidad de tipos de nudo (i.e. hay una infinidad de clases de equivalencia de nudos).

En [3] se prueba que el grupo G de un nudo tórico de tipo (m,n) admite una presentación con dos generadores $\{\alpha,\beta\}$ y una relación $\alpha^m\beta^n$. Para probar que existe una infinidad de tipos de nudo probaremos que para diferentes valores del par (m,n) los grupos de los nudos tóricos correspondientes no son isomorfos. Para esto consideremos el elemento $\alpha^m = \beta^{-n}$ de este grupo (el grupo del nudo tórico) este elemento conmuta con α y β y por tanto con cualquier elemento, por tanto está en el centro. Sea N el subgrupo generado por este elemento, N es un subgrupo normal. Consideremos ahora el grupo cociente G/N, sean α' y β' las clases de α y β en G/N. Es claro que G/N está generado por los elementos α' y β', y admite la siguiente presentación: $(\alpha', \beta' : \alpha'^m, \beta'^n)$. De esta presentación resulta que G/N es el producto libre de un grupo cíclico de orden m generado por α' y un grupo cíclico de orden n generado por β'. Aplicamos ahora el siguiente hecho que es bastante claro. Dada una colección $\{G_i : i \in I\}$ de grupos que contenga más de un elemento su centro se reduce al elemento neutro. Así el centro de G/N es $\{1\}$. Ahora dado que la imagen del centro de G está contenida en el centro de G/N, se tiene por tanto que N es todo el centro de G. Luego entonces el cociente de G por su centro es el producto libre de dos grupos cíclicos de órdenes m y n. Pero si G, H, G', H' son grupos cíclicos de órdenes m, n, m' y n' respectivamente y $G * H$ es isomorfo a $G' * H'$ ($*$ denota al producto libre), entonces $m = m'$ y $n = n'$ o bien $m = n'$ y $n = m'$. Entonces nuestro enteros m, n están completamente determinados por G. De esta forma para nudos tóricos con diferentes parejas (m, n) sus grupos correspondientes no son isomorfos, entonces de esta forma podemos dar una infinidad de nudos de diferente tipo considerando parejas de enteros distintas (m, n).

Capítulo II

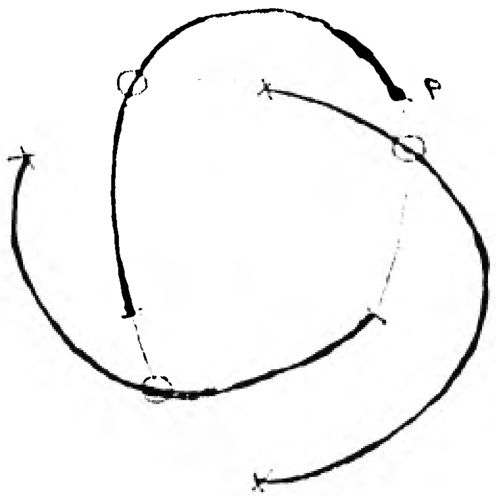
Presentación del grupo de un nudo

Sea K un nudo en posición regular y P la proyección tal que $P(x,y,z) = (x,y,0)$. Escojamos ahora un conjunto de puntos Q sobre el nudo de la siguiente forma. Por definición los únicos puntos múltiples en el nudo son de orden dos, escojamos un punto arbitrario sobre el nudo que no sea un punto doble, recorramos el segmento sobre el que se encuentra el punto en cualquiera de las dos direcciones posibles y detengámonos después de pasar por el primer punto que junto con uno superior e inferior a él (con respecto al eje z en $\mathbb{R}^3$ de manera habitual) constituyen una pareja de puntos dobles y antes de pasar por un segundo punto que junto a otro constituye una pareja de puntos dobles*. A partir del punto en donde nos detuvimos (que lo consideramos ya en nuestro conjunto Q) continuamos recorriendo nuestro segmento en la misma dirección de la que partimos de nuestro primer punto deteniéndonos después de pasar el siguiente punto doble y antes de encontrar otro punto doble. Continuando así llegará un momento en que nuestro primer punto pueda ser escogido nuevamente, siendo este el caso nuestro punto anterior será el último que hayamos escogido. Esta elección nos dará un conjunto de $2n$ puntos

* Si no hay puntos dobles, simplemente escogemos otro punto diferente de nuestro punto original.

que constituyen nuestro conjunto Q. Este número par de puntos nos divide a nuestro nudo K en dos clases de segmentos a los que llamamos pasos superiores, si ninguno de sus puntos que corresponda a una pareja de puntos dobles está por debajo de su pareja. Y llamamos a los segmentos pasos inferiores si todo punto p en el segmento que junto con otro punto $q \in K$ sean una pareja de puntos dobles p está debajo de q. Denotamos los pasos superiores por $A_1, \ldots, A_n$ y a su unión $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ y a los pasos inferiores por $B_1, \ldots, B_n$ y a su unión $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = B$.

Ejemplo 2.1 Sea K el nudo llamado trébol, en la figura los pasos superiores son las marcadas con líneas gruesas y las inferiores con líneas delgadas.



partimos de p
o puntos dobles.
x puntos escogidos.

Un mapeo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es semi-lineal si su restricción a cada segmento de recta compacto es lineal excepto en un número finito de puntos. Es claro que existe un homeomorfismo semi-lineal de $\mathbb{R}^3$ sobre si mismo que desplaza puntos verticalmente y tal que la imagen de A-Q cae sobre el plano XY y la imagen de B-Q bajo el plano XY.

Como K y su imagen son nudos equivalentes, podemos suponer que K está en su posición imagen con la que originalmente estaba. Se sigue que Q cae sobre el plano XY.

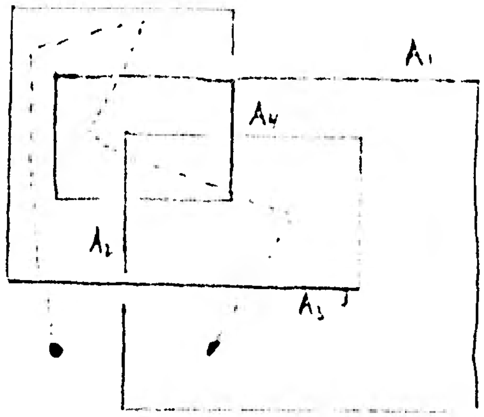
La presentación la haremos (la presentación del grupo del nudo K) con respecto a una orientación de K y de $\mathbb{R}^3$. Para esto trazamos una flecha sobre el nudo para indicar la orientación que hayamos escogido, en $\mathbb{R}^3$ nos referimos a la orientación de un tirabuzón izquierdo. Escogemos un punto base P_0 sobre el nudo que por conveniencia sus coordenadas son $P_0=(0,0,z_0)$ tal que si $(x,y,z)\in K$ entonces $-z_0<z<z_0$ y además escogemos un punto $q_0\in\mathbb{R}^3-K$.

Definición 2.2. Una trayectoria $\alpha \subset \mathbb{R}^2$ es simple ($\mathbb{R}^2$ denota al plano xy) si es poligonal, ni el punto inicial ni el punto terminal pertenecen a ∂K y α intersecta a ∂K en solo un número finito de puntos ninguno de los cuales es un vértice de α o de ∂K.

Sea $F(X)$ un grupo libre arbitrario libremente generado por $X=(x_1,\ldots,x_n)$. A cada trayectoria simple en $\mathbb{R}^2-\partial B$ le asignamos un elemento $\alpha^{\#}$ en $F(X)$ definido de la siguiente forma

$$\alpha^{\#} = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_\ell}^{\varepsilon_\ell}$$

donde los pasos superiores proyectados cruzados por α son en orden $\partial A_{i_1},\ldots,\partial A_{i_\ell}$, y donde $\varepsilon_k = 1$ o -1 de acuerdo como α cruze bajo A_{i_k} de izquierda a derecha o de derecha a izquierda. Esta asignación preserva productos (i.e. $(a_1 \cdot a_2)^{\#} = a_1^{\#} a_2^{\#}$



$$a^{\#} = x_3 x_1 x_2 x_4^{-1} x_3^{-1}$$

Para cada punto $p \in \mathbb{R}^2$, sea $\bar{p}$ la trayectoria que corre linealmente desde P_0 paralela a $\mathbb{R}^2$ a un punto directamente sobre p y después cae linealmente sobre p. Para cualquier trayectoria α en $\mathbb{R}^2$ definimos $\quad * \alpha = \overline{\alpha(0)} \cdot \alpha \cdot \overline{\alpha(\|\alpha\|)}^{-1}$

El grupo $F(X)$ va a ser el grupo libre de nuestra presentación del grupo del nudo. Un homomorfismo $\phi : F(X) \to \pi(\mathbb{R}^3 - K, P_0)$ se puede definir como sigue: Sea a_j una trayectoria simple en $\mathbb{R}^2 - \delta B$ tal que $a_j^{\#} = x_j$, $j = 1, \ldots, n$. Definimos

$$\phi x_j = [{}^{*}a_j] \qquad j = 1, \ldots, n,$$

donde [ ] denota la clase de equivalencia del lazo en $\mathbb{R}^3 - K$. El homomorfismo ϕ es la única extensión a todo el grupo $F(X)$ para esta asignación en los generadores $x_1, \ldots, x_n$. Se sigue que

$$\phi\, a_1^{\#} = [{}^{*}a_1]$$

para cualquier trayectoria a_1 en $\mathbb{R}^2 - \delta B$. La demostración de que el homomorfismo ϕ es sobre o bien que $\phi x_1, \ldots, \phi x_n$ generan $\pi(\mathbb{R}^3 - K, p_0)$ puede verse en [Fox].

Las imagenes δB_i, $i = 1, \ldots, n$ de los pasos inferiores son arcos de segmento disjuntos

Entonces podemos escoger conjuntos abiertos disjuntos simplemente conexos en $\mathbb{R}^2$ tales que δB_i este contenido en V_i, $i=1,\ldots,n$ y tales que sus fronteras sean las imágenes disjuntas de lazos simples $v_1,\ldots,v_n$ que corren en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de $V_1,\ldots,V_n$ respectivamente. Los $V_1,\ldots,V_n$ los escogemos de tal forma que el punto q_0 caiga fuera de las cerraduras de todas las regiones V_i. Ahora escogemos trayectorias simples $c_1,\ldots,c_n$ tales que cada c_i tenga punto inicial q_0 y punto terminal $v_i(0)$, y $c_i(t) \in \mathbb{R}^2 - \bigcup_{k=1}^{n} \bar{V}_k$ a menos que $t=\|c_i\|$

Podemos ahora describir nuestra presentación de $\pi(\mathbb{R}^3 - K, p_0)$, ésta es

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n : r_1, \ldots, r_n)_\phi$$

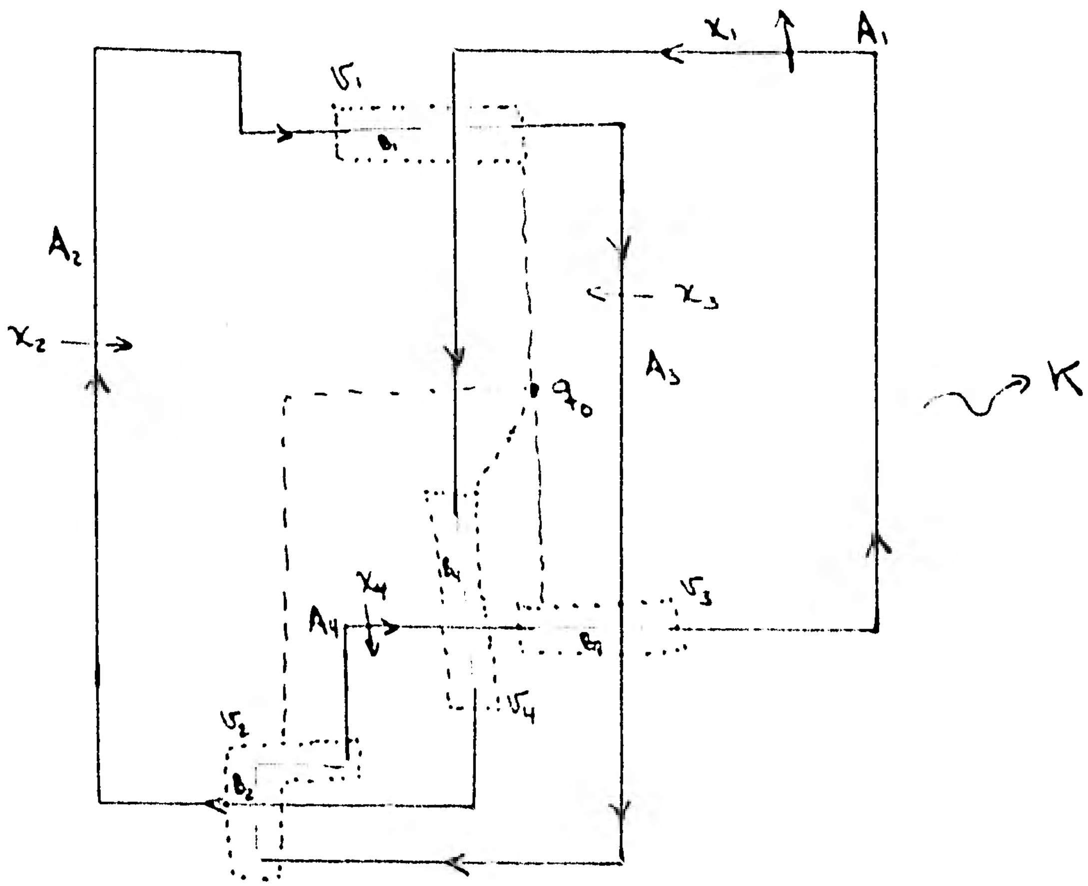
donde $r_i = (c_i v_i c_i')^{*}$, $i = 1, \ldots, n$

La demostración de que efectivamente la anterior es una presentación de nuestro grupo de nudo puede verse en [1].

En el siguiente ejemplo donde obtendremos una presentación del grupo de un nudo ejemplificaremos también el importante Teorema siguiente.

Teorema 2.3. En cualquier presentación superior cualquiera de los relatores $r_1, \ldots, r_n$ es una consecuencia de los otros $n-1$.

Ejemplo 2.4.



$r_1 = x_3^{-1} x_1 x_2 x_1^{-1}$ $\qquad$ $r_2 = x_1 x_2^{-1} x_3 x_2 x_4^{-1} x_1^{-1}$

$r_3 = x_4 x_3^{-1} x_1^{-1} x_3$ $\qquad$ $r_4 = x_1 x_4 x_2^{-1} x_4^{-1}$

Así nuestra presentación del grupo del nudo K es

$$(x_1, x_2, x_3, x_4 : r_1, r_2, r_3, r_4)$$

Veamos ahora que cualquier relación es consecuencia de las otras tres, por ejemplo veamos que

r_2 es consecuencia de r_1, r_3, r_4

Por r_4 tenemos que

$x_1 x_4 x_2^{-1} x_4^{-1} = 1$ implica que $x_4^{-1} x_1^{-1} = x_2^{-1} x_4^{-1}$

Por r_3 se tiene que $x_4^{-1} = x_3^{-1} x_1^{-1} x_3$ entonces

$$\begin{aligned} x_4^{-1} x_1^{-1} &= x_2^{-1} x_4^{-1} \\ &= x_2^{-1} x_3^{-1} x_1^{-1} x_3 \end{aligned}$$

Por r_1 $x_1^{-1} x_3 = x_2 x_1^{-1}$ $\qquad = x_2^{-1} x_3^{-1} x_2 x_1^{-1}$

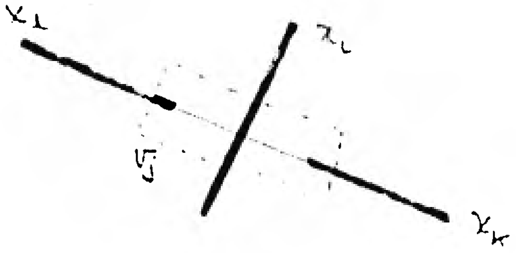
Por tanto obtenemos que

$$1 = x_1 x_2^{-1} x_3 x_2 x_4^{-1} x_1^{-1} = r_2$$

Observación 2.5 La presentación de Wirtinger del grupo de un nudo $\pi(\mathbb{R}^3 - K, P_0)$ que es la presentación

$$(x_1, \ldots, x_n : v_1^{\#}, \ldots, v_n^{\#})_{\phi} .$$

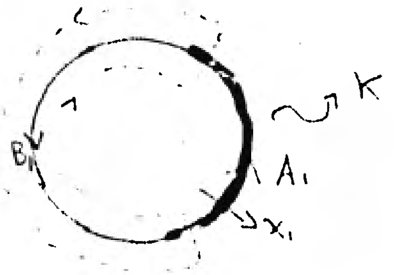
se puede obtener de nuestra presentación mediante n aplicaciones de las operaciones I, I'. La ventaja de esta presentación es que no hay que calcular los elementos $c_1^{\#}, \dots, c_n^{\#}$



$v_j^{\#} = x_k^{-1} x_i^{\varepsilon} x_l x_i^{-\varepsilon}$ donde $\varepsilon = \pm 1$.

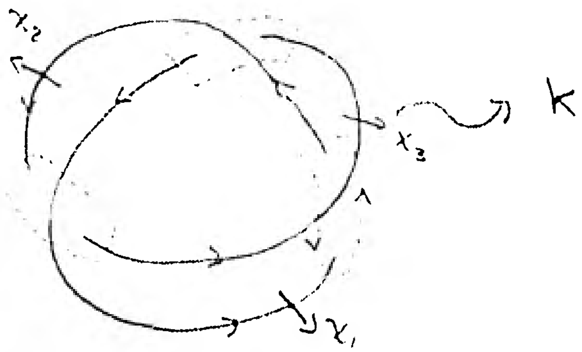
Ejemplos 2.6 de presentaciones. (Wirtinger)

Nudo trivial



$v_1 = x_1 x_1^{-1}$

Por tanto $\pi(\mathbb{R}^3 - K) = |x : | \simeq \mathbb{Z}$.



$v_1 = x_1^{-1} x_2 x_3 x_2^{-1}$

$v_2 = x_2^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1}$

$v_3 = x_3^{-1} x_1 x_2 x_1^{-1}$

Por tanto una presentación del grupo de nudo del trébol $\pi(\mathbb{R}^3-K)$ es

$$(x_1, x_2, x_3 \ : \ x_1^{-1}x_2x_3x_2^{-1} \ , \ x_2^{-1}x_3x_1x_3^{-1})$$

de donde hemos eliminado r_3 que sabemos es consecuencia de r_1 y r_2. Otra forma de reducir lo que sería nuestra presentación original $(x_1, x_2, x_3 : r_1, r_2, r_3)$ es la siguiente.

Sustituimos $x_3 = x_1x_2x_1^{-1}$ en las otras relaciones para obtener $x_1 = x_2x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}$, $x_2 = x_1x_2x_1^{-1}x_1x_2^{-1}x_1^{-1}$ multiplicando por la derecha a ambos miembros de la segunda expresión por $x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}$ obtenemos $x_2x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1} = x_1$ así obtenemos la expresión uno. Por tanto obtenemos la presentación de $\pi(\mathbb{R}^3-K)$ siguiente $(x_1, x_2 \ : \ x_1x_2x_1 = x_2x_1x_2)$

Capitulo III

Ideales Elementales

Definición 3.1. Sea G un grupo multiplicativo arbitrario, definimos el anillo de grupo $\mathbb{Z}G$ (donde $\mathbb{Z}$ denota al anillo conmutativo de los enteros) de la siguiente forma; $\mathbb{Z}G$ es el conjunto de mapeos $f: G \to \mathbb{Z}$ tales que $f(g)=0$ para casi toda $g \in G$ junto con las operaciones

$$(f_1 + f_2)g = f_1 g + f_2 g$$

$$(f_1 f_2)g = \sum_{h \in G} (f_1 g)(f_2 h^{-1} g).$$

Es facil verificar que con esto $\mathbb{Z}G$ constituye efectivamente un anillo

Observación 3.1.1. Los elementos de $\mathbb{Z}G$ se pueden ver como combinaciones lineales de elementos de G con coeficientes enteros.

Sea $\gamma : G \to \mathbb{Z}G$ tal que $\gamma(g) = g^*$ donde $g^*(h) = 1$ si $h = g$, 0 si $h \neq g$ entonces γ es un monomorfismo sobre su imagen, sea entonces $f \in \mathbb{Z}G$ $f \neq 0$ y sean $g_1, \dots, g_n$ $n \geq 1$ tales que $f(g_i) \neq 0$ $i = 1, \dots, n$ es claro entonces que $f = n_1 g_1^* + n_2 g_2^* + \cdots + n_n g_n^*$. Tenemos entonces que la imagen de γ genera al grupo aditivo de $\mathbb{Z}G$ entonces basta identificar g con g^* y obtendremos que los elementos de $\mathbb{Z}G$ son de la forma

$$n_1 g_1 + n_2 g_2 + \cdots + n_k g_k$$

con $n_i \in \mathbb{Z}$ y $g_i \in G$ $i = 1, \dots, k$.

Teorema 3.2. Sea $\phi : G \to A$ un mapeo arbitrario a un grupo abeliano aditivo A. Entonces existe una única extensión $\Phi : \mathbb{Z}G \to A$ con Φ un homomorfismo aditivo. Si además se tiene que Φ preserva productos en G, la extensión es un homomorfismo de anillos.

Dem. Sea $\Phi(0) = 0$. Observemos ahora que la expresión de un elemento de $\mathbb{Z}G$ es única si $n_i \neq 0$ $i=1,\dots,k$ i.e. si $f \in \mathbb{Z}G$ entonces

$f = n_1 g_1 + \dots + n_k g_k$ es única si $n_i \neq 0$ $i=1,\dots,k$.

entonces basta definir $\Phi : \mathbb{Z}G \to A$ como

$$\Phi(f) = n_1 \Phi(g_1) + n_2 \Phi(g_2) + \dots + n_k \Phi(g_k)$$

así es claramente una extensión y además es única dado que todo homomorfismo aditivo debe satisfacer la ecuación anterior. Si además se tiene que Φ preserva productos en G tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}\phi(f_1 f_2) &= \phi\left(\sum n_i g_i \sum n'_j g'_j\right) \qquad \begin{array}{l} i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,l\end{array}\\ &= \phi\left(\sum_{i,j} n_i n'_j g_i g'_j\right)\\ &= \sum_{i,j} n_i n'_j \,\phi g_i \,\phi g'_j\\ &= \sum_i n_i \phi g_i \sum_j n'_j \phi g'_j\\ &= \phi\left(\sum_i n_i g_i\right) \phi \sum_j n'_j \phi g'_j\\ &= \phi f_1 \,\phi f_2 \,.\end{aligned}$$

Por tanto $\phi : ZG \to A$ es un homomorfismo de anillos.

Teorema 3.3. Cada homomorfismo de grupos $\phi : G \to G'$ tiene una única extensión a un homomorfismo de anillos.

Definición 3.4. Para cualquier grupo G consideremos el mapeo $t : G \to Z$ definido por $t(g)=1$

para todo $g \in G$. Definimos el trivializador como la única extensión de t al homomorfismo de anillos $t: \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$. Claramente

$$t\left(\sum_i n_i g_i\right) = \sum_i n_i .$$

Definición 3.5. Sea G un grupo multiplicativo arbitrario y D un mapeo cualquiera de G en $\mathbb{Z}G$ tal que

$$D(g_1 g_2) = Dg_1 + g_1 Dg_2$$

definimos a la única extensión $D: \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G$ del mapeo D como una derivada.

Observación 3.5.1. Si $D: \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G$ es una derivada se satisface que

a) $D(\sum n_i g_i) = \sum n_i Dg_i$

b) $Dn = 0$ para todo entero n.

c) $Dg^{-1} = -g^{-1}Dg$ para todo $g \in G$.

Demostración.

a) D es un homomorfismo aditivo

b) Dado que $n = 1+1+\cdots+1$ basta probar que

$D(1) = 0$, $D(1) = D(1\cdot 1) = D(1) + 1\cdot D(1) = D(1) + D(1)$ $\therefore D(1)=0$

c) Tenemos que $0 = D(1) = D(g^{-1}g) = D(g^{-1}) + g^{-1}D(g)$

por tanto $Dg^{-1} = -g^{-1}Dg$.

Definición 3.6. Definimos el elemento del anillo de grupo como.

$$\frac{g^n - 1}{g-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} g^i & \text{si } n > 0 \\ -\sum_{i=n}^{-1} g^i , & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

se tiene entonces que:

$$D g^n = \frac{g^n - 1}{g-1} D g$$

Demostración por inducción.

1) Si $n=0, \pm 1$; $D(g^0) = D(1) = 0 = \frac{g^0-1}{g-1} Dg$

$$Dg = \frac{g-1}{g-1} Dg = 1 \cdot Dg = Dg$$

$$Dg^{-1} = -g^{-1}Dg = \frac{g^{-1}-1}{g-1} Dg = -\sum_{i=-1}^{-1} g^i Dg = -g^{-1}Dg$$

2) Supongamos lo cierto para n $|n|>1$

Si $n>0$ $\qquad Dg^{n+1} = D(g^n g) = Dg^n + g^n Dg$

$$= \frac{g^n-1}{g-1} Dg + g^n Dg$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} g^i Dg + g^n Dg$$

$$= \sum_{i=0}^{n} g^i Dg$$

$$= \frac{g^{n+1}-1}{g-1} Dg .$$

Para $n<-1$ $\qquad Dg^{n-1} = D(g^n g^{-1}) = Dg^n + g^n Dg^{-1}$

$$= -\sum_{i=n}^{-1} g^i Dg - g^{n-1} Dg$$

$$= -\sum_{i=n-1}^{-1} g^i Dg$$

$$= \frac{g^{n-1}-1}{g-1} Dg$$

Observación 3.7. Si nuestro grupo es el

grupo libre F con base $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$; los elementos de $\mathbb{Z}F$ son sumas finitas de productos finitos de potencias de los x's, a estos elementos los denotamos por $f(x) = \sum n_i u_i$, $u_i \in F$ a estos elementos los llamamos polinomios libres.

Teorema 3.8 Para cada generador libre x_j, existe una única derivada $D_j = \partial/\partial x_j$ en $\mathbb{Z}F$, la cual la llamamos la derivada con respecto a x_j y que tiene la propiedad que

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = 1 \quad \text{si } i = j \text{ y es } 0 \text{ si } i \neq j.$$

Como los valores de la derivada se especifican para un conjunto generador de F la unicidad es inmediata.

Sea A un alfabeto con elementos

$a_1, a_2, \ldots;$ en correspondencia uno a uno con $x_1, x_2, \ldots;$ bajo la asignación $\theta a_i = x_i$. Sabemos que θ se puede extender a un mapeo preservador de productos del semigrupo de palabras $W(A)$ sobre el grupo F, donde palabras equivalentes en $W(A)$ se mapean en el mismo elemento de F. Definimos un mapeo $\Delta_j : W(A) \to ZF$ que nos inducirá la derivada $\partial/\partial x_j$.

$$\Delta_j 1 = 0 \qquad (1 \text{ la palabra vacía})$$

$$\Delta_j a_i^n = \frac{x_i^n - 1}{x_i - 1} \delta_{ij} \qquad \delta_{ij} \text{ la delta de Kronecker.}$$

Lema 3.9. $\Delta_j(ab) = \Delta_j a + \theta a \cdot \Delta_j b$

$a, b \in W(A)$.

Demostración por inducción en las sílabas de ab.

1) Si a es la palabra vacía el resultado es inmediato, entonces suponemos que a contiene al menos una sílaba, entonces $a = a_i^n c$. Por tanto $\Lambda_j(ab) = \Lambda_j(a_i^n cb) = \Lambda_j a_i^n + x_i^n \Lambda(cb)$ aplicando lo que sería nuestra hipótesis de inducción dado que c tiene una sílaba menos que a, tenemos que

$$\Lambda_j(ab) = \Lambda_j a_i^n + x_i^n \Lambda_j(c) + x_i^n \theta c \cdot \Lambda_j b$$

$$= \Lambda_j a_i^n c + \theta a_i^n c \Lambda_j b$$

$$= \Lambda_j a + \theta a \Lambda_j b$$

Veamos ahora que Λ_j está bien definida i.e palabras equivalentes tienen la misma imagen bajo Λ_j.

$$\Lambda_j(a a_i^0 b) = \Lambda_j(a a_i^0) + \theta(a a_i^0) \cdot \Lambda_j b =$$

$$= \Delta_j a + \theta a \, \Delta(1) + \theta(a) \Delta_j b$$

$$= \Delta_j a + \theta a \, \Delta_j b$$

$$= \Delta_j (ab)$$

$$\Delta_j (a a_i^{m+n} b) = \Delta_j (a a_i^m a_i^n b)$$

$$\Delta_j (a a_i^{m+n} b) = \Delta_j (a a_i^{m+n}) + \theta(a a_i^{m+n}) \Delta_j b$$

$$= \Delta_j (a) + \theta a \, \Delta_j (a_i^{m+n}) + \theta(a a_i^m a_i^n) \Delta_j b$$

$$= \Delta_j (a) + \theta a \, \frac{x_i^{m+n} - 1}{x_i - 1} \delta_{ij} + \theta(a a_i^m a_i^n) \Delta_j b$$

$$= \Delta_j (a) + \theta a \left(\frac{x_i^m - 1}{x_i - 1} + x_i^m \frac{x_i^n - 1}{x_i - 1} \right) \delta_{ij} + \theta(a a_i^m a_i^n) \Delta_j b$$

$$= \Delta_j (a) + \theta a \, \Delta_j (a_i^m a_i^n) + \theta(a a_i^m a_i^n) \Delta_j b$$

$$= \Delta_j (a a_i^m a_i^n b).$$

Definimos ahora $\partial/\partial x_j : F \to \mathbb{Z}F$ como

$$\partial/\partial x_j \, \theta(a) = \Delta_j a$$

$\partial/\partial x_j$ está bien definida y efectivamente su dominio es todo F dado que θ es sobre. Basta solamente

solamente verificar que $\partial/\partial x_j$ satisface que

$\partial/\partial x_j\, uv = \partial/\partial x_j\, u + u\, \partial/\partial x_j\, v$ tenemos

$$\partial/\partial x_j\,(uv) = \partial/\partial x_j\, \theta(ab) = \Delta_j(ab) = \Delta a + u\,\Delta_j b$$

$$= \partial/\partial x_j\, u + u\, \partial/\partial x_j\, v$$

basta ahora considerar la extensión de $\partial/\partial x_j$ a $\mathbb{Z}F$ para obtener la derivada deseada. Es claro además que $\partial x_i/\partial x_j = \delta_{ij}$.

Ideales Elementales

Definición 3.10. Sea R un anillo conmutativo con elemento unitario y sea A una matriz de $m\times n$ con entradas en R para cualquier k ($k\in\mathbb{Z}$, $k\geq 0$) definimos el k-ésimo ideal elemental $E_k(A)$ correspondiente a la matriz A como:

Si $0 < n-k \leq m$, entonces $E_k(A)$ es el ideal generado por los determinantes de todas las submatrices de $(n-k)\times(n-k)$ de A.

Si $(n-k)>m$, entonces $E_k(A)=0$

Si $n-k\leq 0$, entonces $E_k(A)=R$

Teorema 3.11. Los ideales elementales forman una cadena ascendente con respecto a la contención. i.e.

$$E_0(A)\subset E_1(A)\subset\cdots\subset E_n(A)=E_{n+1}(A)=\cdots=R$$

Dem. Basta observar que cada generador de $E_j(A)$ es un generador de $E_{j+1}(A)$ al desarrollar algún determinante de $(n-j)\times(n-j)$ por menores que consta de una combinación de determinantes de $(n-j-1)\times(n-j-1)$ con coeficientes en R y que son generadores de $E_{j+1}(A)$.

Definición 3.12. Si A y A' son dos matrices con entradas en R, diremos que A es equivalente a A' y escribiremos $A \sim A'$ si existe una sucesión finita de matrices $A_1, \ldots, A_n$ tales que $A = A_1$, $A' = A_n$; A_{i+1} se obtiene de A_i o A_i de A_{i+1} mediante cualquiera de las operaciones siguientes

i) Permutar renglones o columnas

ii) Agregar a nuestra matriz un renglón de ceros

$$A \mapsto \left\| \begin{matrix} A \\ 0 \end{matrix} \right\|$$

iii) Sumar a un renglón una combinación lineal de los otros renglones.

iv) Sumar a una columna una combinación lineal de las otras columnas.

v) Agregar un renglón de ceros y una columna de ceros en cuya única entrada en la que aparece un 1 es en la intersección del renglón y la columna. $A \mapsto \left\| \begin{matrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|$

V') $A \sim \left\| \begin{matrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} A & 0 \\ a & 1 \end{matrix} \right\|$ donde las entradas que a representa son arbitrarias, para probar lo anterior basta aplicar a A V) y n veces iv).

Teorema 3.15. Matrices equivalentes definen la misma cadena de ideales elementales.

Dem. Sean A y A' matrices equivalentes. Basta checar el resultado con cada una de las operaciones i), ii), ..., V) definidas anteriormente. Para las operaciones i), iii), iv) el resultado es inmediato dadas las características de estas, las operaciones válidas en los determinantes y dado

además que estamos en un anillo conmutativo.
Para la operación ii) tenemos que $n = n'$ y $m' = m+1$ donde A es una matriz de $m \times n$ y A' es de $m' \times n'$ es claro que para el rango $0 < n-k \leq m$ se tiene $E_k(A) = E_k(A')$ dado que $0 < n'-k \leq m'$. La otra posibilidad es que $n-k = m' > m$ entonces $E_k(A) = 0$, pero entonces $E_k(A') = 0$ dado que todas las submatrices de $m' \times m'$ de A' contienen un renglón de ceros a saber el último. Falta solo checar la operación v). Aquí $n' = n+1$, $m' = m+1$. Si $n-k > m$ entonces $n'-k \leq 1$ si $n'-k < 1$ entonces $E_k(A) = E_k(A') = R$ si $n'-k = 1$ pero entonces $E_k(A') = R$ dado que es generado por los elementos

de A y uno de estos es el 1 de R. Si $0 < n-k \leq m$ en este caso se tiene que cualquier submatriz de A de $(n-k)\times(n-k)$ se puede extender a una submatriz de A' de $(n'-k)\times(n'-k)$ que contenga elementos apropiados del mismo renglón y la misma columna de A' contiene este el 1, expansión por menores sobre esta columna de este determinante de esta matriz de $(n'-k)\times(n'-k)$ nos muestra que este determinante es igual al de la matriz de $(n-k)\times(n-k)$ y por tanto se tiene que $E_k(A) \subset E_k(A')$. Inversamente consideremos cualquier submatriz de A' de $(n'-k)\times(n'-k)$ cuyos renglones pueden incluir o no el mismo renglón de A'. Si lo contienen expansión por menores nos muestra que el determinante de esta submatriz es un generador de $E_k(A)$. Si sus renglones no incluyen al nuevo renglón de A' su determinante pertenece a $E_{k-1}(A) \subset E_k(A)$ y por tanto $E_k(A') \subset E_k(A)$ de donde $E_k(A) = E_k(A')$.

Definición 3.14. Si $\phi: R \to R'$ es un homomorfismo de anillos arbitrario y A es una matriz con entradas en R, definimos la matriz imagen ϕA como $\phi A = \|\phi(a_{ij})\|$ donde $A = \|a_{ij}\|$.

Observación 3.14.1. Si ϕ es sobre, entonces $\phi E_k(A) = E_k(\phi A)$.

Es claro que $\phi(0) = 0$. Como ϕ es sobre se tiene que $\phi R = R'$ si $n-k \leq 0$. Además obviamente la imagen del conjunto de determinantes de todas las submatrices de $(n-k)\times(n-k)$ de A es igual al conjunto de todas las submatrices de $(n-k)\times(n-k)$ de $\phi(A)$. Y además tenemos siempre que ϕ sea sobre que la imagen del ideal generado en R por $a_1,\ldots,a_r$ es el ideal generado por las imagenes $\phi a_1,\ldots,\phi a_r$ en R'.

Consideremos una presentación (x,r) de un grupo de un modo con $x=(x_1,x_2,\ldots)$ la base del grupo libre F. Sea R la consecuencia de r y sea $|x:r| = F/R$ el grupo factor de nuestra presentación entonces tenemos la siguiente composición

$$F \xrightarrow{\gamma} |x:r| \xrightarrow{ar} H$$

donde γ es la proyección, ar es el abelianizador, y H el abelianizado de $|X:Y|$. Ahora podemos extender nuestra composición anterior a la composición

$$\mathbb{Z}F \xrightarrow{\partial/\partial x_j} \mathbb{Z}F \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}|X:Y| \xrightarrow{ab} \mathbb{Z}H$$

que sabemos que es única puesto que cada extensión es única.

Definición 3.15 Definimos la matriz de Alexander de la presentación $(X:Y)$ de la siguiente forma. La matriz de Alexander (a_{ij}) es la matriz cuyas entradas a_{ij} son

$$a_{ij} = ab\,\gamma\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)$$

Observemos que así nuestra matriz de Alexander no está definida de manera única, depende del orden que demos a los generadores del grupo libre $(x_1, x_2, \dots)$

pero dos matrices cualesquiera de nuestra presentación diferirán por permutaciones de renglones o columnas y por nuestras operaciones de matrices definidas anteriormente resultan ser matrices equivalentes

Definición 3.16. Sea $(X:Y)$ una presentación finita de un grupo de un nudo, definimos para cada entero no negativo k el k-ésimo ideal elemental de la presentación $(X:Y)$ como el k-ésimo ideal elemental de alguna matriz de Alexander de $(X:Y)$ que sabemos que cualesquiera dos son equivalentes y que matrices equivalentes definen la misma cadena de ideales elementales

Probaremos ahora que los ideales elementales son invariantes del tipo de la presentación.

Tendríamos que si $f:(X:V) \to (Y:S)$ sería un mapeo de presentaciones existiría un homomorfismo inducido f_* entre los grupos factor $|X:V|$, $|Y:S|$ y éste a su vez induce un homomorfismo f_{**} entre los abelianizados de $|X:V|$, $|Y:S|$.

Observación 2.17. Si f, g es una equivalencia de presentaciones entre $(X:V) \to (Y:S)$ entonces f_{**}, g_{**} son isomorfismos siendo uno inverso del otro. Esto es claro dado que tenemos

$$f:(X:V) \to (Y:S) \qquad g:(Y:S) \to (X:V)$$

$$y \quad fg = \text{identidad} \qquad gf = \text{la identidad}$$

entonces $f_* g_*$ es la identidad y por tanto $f_{**} g_{**}$ es también la identidad lo mismo que $g_{**} f_{**}$. Es claro que esto se cumple también para sus extensiones al anillo de grupo.

Teorema 3.18. Si $(X:R)$ y $(Y:S)$ son presentaciones finitas de un grupo de un nudo y $f:(X:R) \to (Y:S)$ es una equivalencia de presentaciones, entonces el k-ésimo ideal de $(X:R)$ se mapea por f_{**} sobre el k-ésimo ideal elemental de $(Y:S)$.

En vista del Teorema de Tietze basta probarlo para las equivalencias I, I', II, II' y dado que si se cumple para I, II se cumple también para I', II' (esto por nuestra observación anterior) basta checarlo solamente para I, II.

Sea entonces $(X:R)$ una presentación finita con $X=(x_1,\dots,x_n)$, $R=(r_1,r_2,\dots,r_m)$

rea s una consecuencia de r y I muestra equivalencia de Tietze $I:(x:r) \to (x: r \cup s)$, entonces $I: F(x) \to F(x)$ es el mapeo identidad de donde I_*, I_{**} son identidades. Por tanto basta probar que $(x:r)$ y $(x: r\cup s)$ tienen matrices de Alexander equivalentes (que inducen la misma cadena de ideales). Como s es consecuencia de r se tiene que.

$$s = \prod_{k=1}^{p} U_k r_{i_k}^{\alpha_k} U_k^{-1}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(U_1 r_{i_1} U_1^{-1}) + U_1 r_{i_1}^{\alpha_1} U_1^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}(U_2 r_{i_2}^{\alpha_2} U_2^{-1}) + \cdots +$$

$$+ \prod_{k=1}^{p-1}(U_k r_{i_k}^{\alpha_k} U_k^{-1}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}(U_p r_{i_p}^{\alpha_p} U_p^{-1})$$

como $\gamma(r_i) = 1$ se tiene que

$$\gamma\left(\frac{\partial s}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^{p} \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(U_k r_{i_k}^{\alpha_k} U_k^{-1}\right)$$

y como

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_k y_{i_k}^{\alpha_k} u_k^{-1}\right) = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + u_k \frac{y_{i_k}^{\alpha_k}-1}{y_{i_k}-1}\frac{\partial y_{i_k}}{\partial x_j} - u_k y_{i_k}^{\alpha_k} u_k^{-1}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

y
$$\gamma\left(\frac{y_{i_k}^{\alpha_k}-1}{y_{i_k}-1}\right) = \alpha_k$$

se sigue entonces que

$$\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_k y_{i_k}^{\alpha_k} u_k^{-1}\right)\right) = \gamma\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) + \gamma(u_k)\,\alpha_k\,\gamma\left(\frac{\partial y_{i_k}}{\partial x_j}\right) - \gamma\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$
$$= \alpha_k\,\gamma(u_k)\,\gamma\left(\frac{\partial y_{i_k}}{\partial x_j}\right)$$

si definimos $c_k = \alpha_k\, ab\,\gamma(u_k)$ obtenemos finalmente

$$ab\,\gamma\left(\frac{\partial s}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^{p} c_k\, ab\,\gamma\left(\frac{\partial y_{i_k}}{\partial x_j}\right).$$

entonces la matriz de Alexander de $(x : r \cup s)$ es la misma que la de $(x : r)$ excepto porque tiene un renglón más que la de $(x : r)$, pero este renglón es combinación lineal de los otros de la de $(x : r)$, por tanto la matriz de $(x : r \cup s)$ es equivalente a la de $(x : r)$.

Lo haremos ahora para la equivalencia de Tietze II. Sea nuevamente $(x : r)$ una presentación.

finita con $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $Y=(Y_1,Y_2,\dots,Y_m)\subset F(X)$ sea $\xi\in F(X)$ y sea y tal que $y\notin X$, sea $s=Y\cup y\xi^{-1}$ entonces $\Pi:(X:Y)\to(X\cup y : Y\cup y\xi^{-1})$ con Π la inclusión de $F(X)$ en $F(X\cup y)$. Sea $G=|X:Y|$ y $G'=|X\cup y : Y\cup y\xi^{-1}|$ y H, H' los abelianizados de G y G' respectivamente. Tenemos entonces el siguiente arreglo de homomorfismos.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}F(X) \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d] & \mathbb{Z}F(X\cup y) \arrow[d] \\
\mathbb{Z}G \arrow[r, "\Pi_*"] \arrow[d] & \mathbb{Z}G' \arrow[d] \\
\mathbb{Z}H \arrow[r, "\Pi_{**}"] & \mathbb{Z}H'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{l}
\gamma'\Pi=\Pi_*\gamma\,, \\[2em]
\alpha\Pi_* = \Pi_{**}\alpha\,.
\end{array}$$

Denotemos por $A=\|a_{ij}\|$ y $A'=\|a'_{ij}\|$ las matrices de Alexander de $(X:Y)$ y $(X\cup y : Y\cup y\xi^{-1})$ respectivamente $\quad a_{ij}=\alpha\gamma\left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_j}\right)\quad \begin{array}{l} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n\,. \end{array}$

y $$\Pi_{**} a_{ij} = \Pi_{**} a_r \gamma\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j}\right) = a_r' \gamma' \Pi\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j}\right)$$

$$= a_r' \gamma' \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j}\right)$$

$$= a'_{ij}$$

y claramente $\frac{\partial \gamma_i}{\partial y} = 0$ y $\frac{\partial}{\partial y}(y\xi^{-1}) = 1$.

ahora si denotamos los elementos del renglón

$a'\gamma'\left(\frac{\partial}{\partial x_j} y\xi^{-1}\right)$, $j = 1, \dots, n$, por α', se tiene.

$$A' = \left\| \begin{matrix} \Pi_{**}A & 0 \\ \alpha' & 1 \end{matrix} \right\|$$

ahora por la ecuación V') de equivalencia de matrices se tiene que $A' \sim \Pi_{**}A$,

y se sigue entonces que

$$E_k(A') = E_k(\Pi_{**}A) = \Pi_{**}E_k(A).$$

Capítulo IV

Polinomios asociados a un nudo

Primeramente mencionaremos algunos resultados de la teoría de nudos de los que haremos uso posteriormente.

4.1 a) Sean* $a, b \in R$ decimos que a divide a b y escribimos $a|b$ si $\exists\ c \in R$ tal que $b = ac$.

b) $a, b \in R$ son asociados si $a|b$, $b|a$

c) R es dominio entero si para cualquiera $a, b \in R$ $ab = 0$ implica $a = 0$ o $b = 0$.

d) Dos elementos en un dominio entero con 1 son asociados si y sólo si uno es múltiplo del otro.

e) Un anillo conmutativo R se dice asociado a un subanillo Q de R si existe un mapeo $P: R \to Q$ tales que para cualquiera $a, b \in R$ los elementos a y Pa

* En lo sucesivo R denota un anillo conmutativo arbitrario con identidad multiplicativa 1.

son asociados y $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$. Además si Q es dominio entero, entonces R es dominio entero.

f) R se dice dominio de máximo común divisor si es dominio entero y cada subconjunto finito de elementos de R tiene máximo común divisor.

g) Si R es asociado a un subanillo Q que es un dominio de máximo común divisor entonces R es dominio de máximo común divisor (m.c.d).

h) Un dominio entero R con 1 se dice un dominio de factorización única si para cualquier elemento de R que no sea cero o unidad tiene esencialmente una única factorización en primos.

i) Un dominio de factorización única es un dominio de máximo común divisor.

j) Un ideal es principal si está generado por un solo elemento.

k) El anillo de grupo de un grupo cíclico infinito es un dominio de máximo común divisor [Fox 1].

l) El anillo de grupo de un grupo cíclico infinito tiene solamente unidades triviales.

m) Teorema. Si R es un anillo conmutativo con 1, y $a_1, \dots, a_n \in R$, entonces d es m.c.d. de $a_1, \dots, a_n$ si y sólo si la intersección de todos los ideales principales de R que contienen a $a_1, \dots, a_n$ es ella misma un ideal principal generado por d.

n) En un dominio de m.c.d. con uno, el m.c.d. de cualquier conjunto finito de elementos es el generador del ideal principal más pequeño que los contiene.

Definición 4.2. Para cualquier entero $K \geq 0$ definimos el K-ésimo polinomio de nudo Δ_K de la presentación finita $(x : r) = (x_1, \ldots, x_n : r_1, \ldots, r_m)$ de un grupo de un nudo como el máximo común divisor de los determinantes de todas las submatrices de $(n-K) \times (n-K)$ de la matriz de Alexander de $(x : r)$ donde se entiende que

$$\Delta_K = 0 \qquad \text{si } n-K > m,$$

$$\Delta_K = 1 \qquad \text{si } n-K \leq 0 .$$

Teorema 4.3 Los polinomios de nudo existen y son únicos salvo asociados i.e. salvo múltiplos de unidades $\pm t^n$, con n un entero y t un generador del abelianizado del grupo de la presentación $(x : r)$ de un grupo de un nudo.

Dem. El grupo $|X:Y|$ es canónicamente isomorfo al grupo de nudo que presenta por su abelianizado es cíclico infinito basta entonces aplicar 4.1 k) y 4.1 l).

Teorema 4.4 Cada polinomio de nudo Δ_k es el generador del menor ideal principal que contiene al ideal elemental E_k. 4.1 m).

Teorema 4.5 $\Delta_{k+1} | \Delta_k$

Demostración. Sean (Δ_k) y (Δ_{k+1}) los ideales principales generados por Δ_k y Δ_{k+1} respectivamente, tenemos por 4.4 $(\Delta_{k+1}) \supset E_{k+1} \supset E_k$. Pero (Δ_k) es el menor ideal principal que contiene a E_k luego entonces $(\Delta_{k+1}) \supset (\Delta_k)$ y por tanto $\Delta_k = a\Delta_{k+1}$ y por tanto Δ_{k+1} divide a Δ_k.

El siguiente teorema implica directamente que los polinomios de nudo son un invariante.

Teorema 4.6. Si $(X:Y)$ y $(Y:S)$ son presentaciones finitas de grupos de nudos y

$$f:(X:Y) \to (Y:S)$$

es una equivalencia de presentaciones, entonces salvo asociados, el k-ésimo polinomio de nudo Δ_k de $(X:Y)$ es mapeado por f_{**} sobre el k-ésimo polinomio de nudo Δ'_k de $(Y:S)$.

Dem. Denotemos por (Δ_k) y (Δ'_k) los ideales principales generados por Δ_k y Δ'_k respectivamente y por E_k, E'_k los k-ésimos ideales elementales de $(X:Y)$ y $(Y:S)$ respectivamente. Entonces

$E_k \subset (\Delta_k)$, $E'_k \subset (\Delta'_k)$ y $t_{**}E_k = E'_k$

Ahora una imágen isomórfica de un ideal principal es principal y $t_{**}(\Delta_k) \supset t_{**}E_k = E'_k$.

Dado que (Δ'_k) es minimal se sigue que

$$t_{**}(\Delta_k) \supset (\Delta'_k)$$

Por el mismo argumento $t_{**}^{-1}(\Delta'_k) \supset (\Delta_k)$,

y por tanto $\qquad t_{**}(\Delta_k) = (\Delta'_k)$.

Dado que $t_{**}(\Delta_k)$ es generado por $t_{**}\Delta_k$, los elementos Δ'_k y $t_{**}\Delta_k$ son asociados.

Teorema 4.4 La matriz de Alexander A de cualquier presentación finita de un grupo de un nudo que satisface $a_n \gamma x_i = a_n \gamma x_j$ $i,j = 1,\dots,n$ es equivalente a la matriz que se obtiene de A remplazando en A cualquier columna por una columna de ceros. Dem [Fox 4]. Se sigue entonces

Teorema 4.8. El primer ideal elemental de un grupo de un nudo es un ideal principal generado por el primer polinomio de nudo Δ_1, al cual llamaremos polinomio de Alexander y escribiremos

$$\Delta_1(t) = \Delta(t).$$

Observación 4.9. El 0-ésimo ideal elemental E_0 y el 0-ésimo polinomio de nudo Δ_0 de un grupo de un nudo son triviales i.e.

$$E_0 = \Delta_0 = 0.$$

Dem. De 2.3. se tiene que en cualquier presentación superior de un grupo de nudo cualquier relator es consecuencia de los otros y por tanto puede ser eliminado. Por tanto cada grupo de nudo tiene una presentación cuya matriz de Alexander es $(n-1) \times n$. De aquí es inmediato el Resultado.

La relación $r_i = s_i$ corresponde al relator $r_i s_i^{-1}$. Tenemos

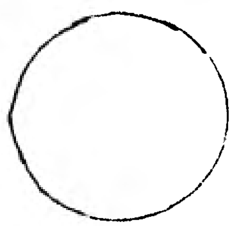
$$\frac{\partial r_i s_i^{-1}}{\partial x_j} = \frac{\partial r_i}{\partial x_j} - r_i s_i^{-1} \frac{\partial s_i}{\partial x_j}$$

Dado que el homomorfismo canónico γ mapea cada relator sobre 1, se simplifica la evaluación de a_{ij}.

$$a_{ij} = an\,\gamma\left(\frac{\partial r_i s_i^{-1}}{\partial x_j}\right) = an\,\gamma \frac{\partial}{\partial x_j}(r_i - s_i).$$

Ejemplos de aplicación del polinomio de nudos.

Nudo trivial.



$\rightsquigarrow K$

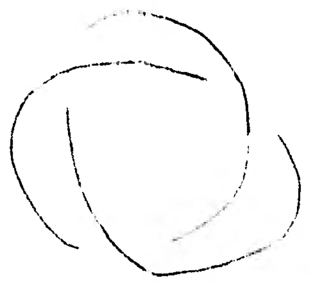
$$\pi(\mathbb{R}^3 - K) = |x : |$$

La presentación $(x:)$ es del mismo tipo que $(x:1)$

por tanto la matriz de Alexander de esta presentación es simplemente $\|0\|$ y por tanto

$$\Delta_k = 1 \quad \text{para } k \geq 1 .$$

Nudo Trébol



En 2.6 calculamos $\pi(\mathbb{R}^3 - K) = | x, y : xyx = yxy |$

Las dos entradas de la matriz de Alexander son

$$a_{11} = \mathrm{ab}\,\gamma \frac{\partial}{\partial x}(xyx - yxy) = \mathrm{ab}\,\gamma(1 + xy - y)$$

$$a_{12} = \mathrm{ab}\,\gamma \frac{\partial}{\partial y}(xyx - yxy) = \mathrm{ab}\,\gamma(x - 1 - yx)$$

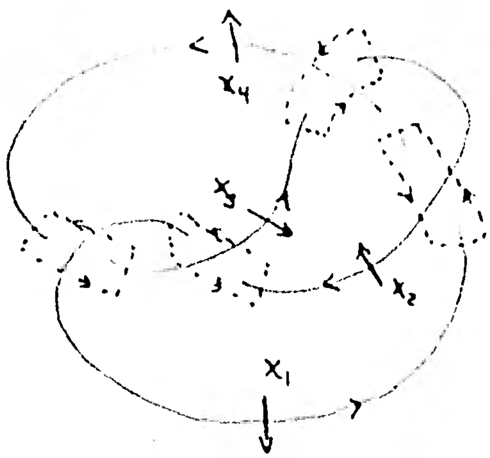
Sea $\mathrm{ab}\,\gamma x = \mathrm{ab}\,\gamma y = t$, entonces obtenemos

$$A = \| 1 - t + t^2 \qquad -1 + t - t^2 \|$$

y por tanto $\Delta_1 = 1 - t + t^2$ $\quad \Delta_k = 1$ si $k \geq 2$.

Por tanto se tiene que el trébol es de diferente tipo que el nudo trivial

Ocho nudo



1) $r_1 = x_1^{-1}x_3x_2x_3^{-1}$; 2) $r_2 = x_4^{-1}x_3x_4x_2^{-1}$; 3) $r_3 = x_4x_1^{-1}x_3^{-1}x_1$ -

1) $x_3x_2 = x_1x_3$ implica 1') $x_2 = x_3^{-1}x_1x_3$

2) $x_3x_4 = x_4x_2$

3) $x_3x_1 = x_1x_4$ implica 3') $x_4 = x_1^{-1}x_3x_1$

sustituimos 1') y 3') en 2) para obtener

$$x_3x_1^{-1}x_3x_1 = x_1^{-1}x_3x_1x_3^{-1}x_1x_3$$

$$x_3x_1^{-1}x_3x_1x_3^{-1} = x_1^{-1}x_3x_1x_3^{-1}x_1$$

Entonces una presentación del grupo del nudo ocho es $(x_1, x_3 : x_3 x_1^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} = x_1^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} x_1)$

Sea $\operatorname{an}\gamma\, x_1 = \operatorname{an}\gamma\, x_3 = t$. Dado que se satisface 4.7 para esta presentación, alguna de las dos entradas de la matriz de Alexander correspondiente se puede poner como Δ_1 así

$$\Delta_1 = \operatorname{an}\gamma \frac{\partial}{\partial x}\left(x_3 x_1^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} - x_1^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} x_1\right)$$

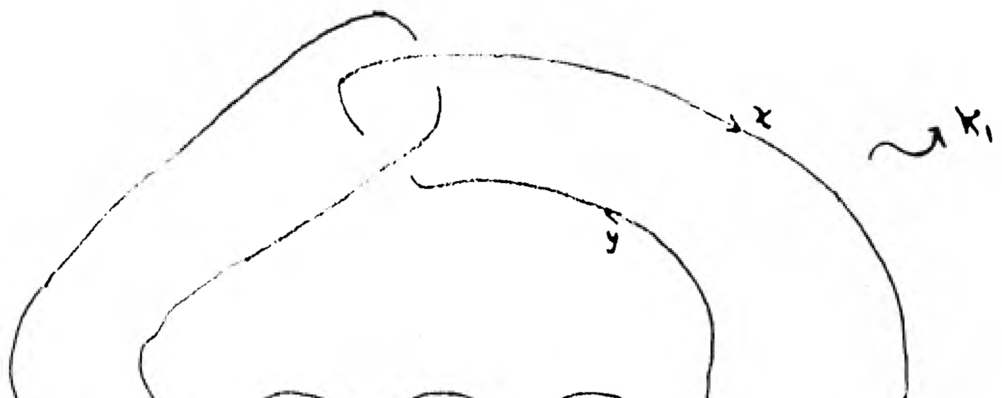
$$= -1 + t + t^{-1} - 1 - 1 = t - 3 + t^{-1}$$

normalizando este polinomio (i.e. término constante positivo y potencias positivas) obtenemos

$$\Delta_1 = t^2 - 3t + 1$$

y claramente $\Delta_k = 1$ para $k \geq 2$. De aquí podemos concluir que el nudo ocho es de diferente tipo del nudo trivial y del nudo trébol.

Los invariantes que hemos considerado nos sirven para decidir cuando dos nudos no son del mismo tipo, por ejemplo si la cadena de ideales elementales de dos nudos es diferente podemos afirmar que no son del mismo tipo lo mismo que con los polinomios asociados, en los siguientes dos ejemplos veremos dos nudos que poseen los mismos polinomios y sus diferentes sucesiones de ideales elementales.



$$\pi(\mathbb{R}^3 - K_1) = | \, x, y \; : \; (xy^{-1})^{-2} y (xy^{-1})^{2} x = y (xy^{-1})^{-2} y (xy^{-1})^{2} \, |$$

Sea $an\gamma x = an\gamma y = t$, tenemos inmediatamente

$$\Delta_1 = an\gamma \frac{\partial}{\partial x}\left[(xy^{-1})^{-2}y(xy^{-1})^{2}x - y(xy^{-1})^{-2}y(xy^{-1})^{2}\right]$$

$$= -2 + 2t + t - (-2t + 2t^2)$$

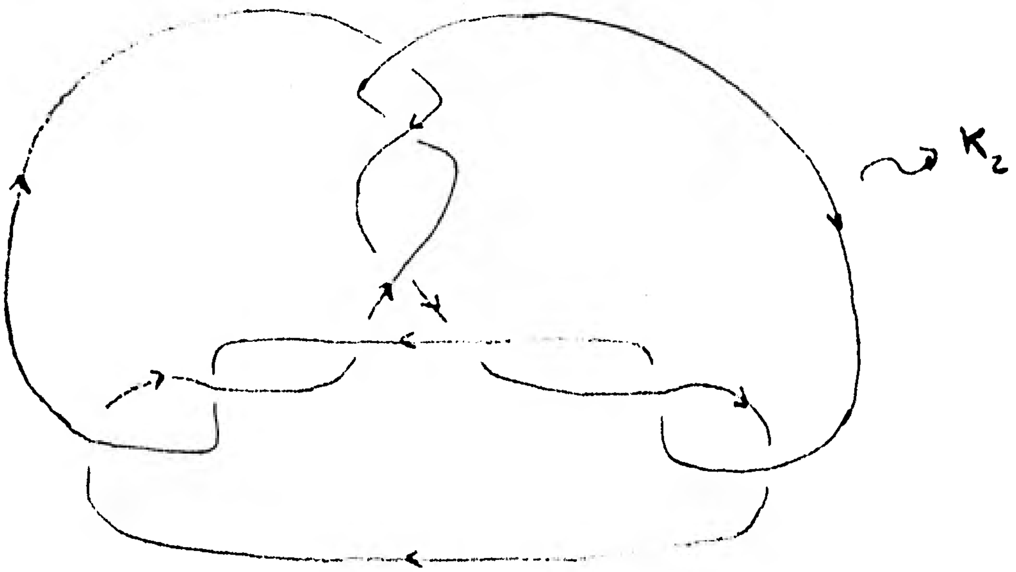
$$= -2t^2 + 5t - 2$$

Normalizando obtenemos $\Delta_1 = 2t^2 - 5t + 2$

$\Delta_k = 1$ para $k \geq 2$.

$E_1 = (2t^2 - 5t + 2)$

$E_k = (1)$ para $k \geq 2$.



$$\pi(R^3 - K) = |x, y, z : y^{-1}xyx^{-1}y = x^{-1}zx^{-1}zxz^{-1}x ,\ x^{-1}zxz^{-1}x = y^{-1}zyz^{-1}y|$$

Sea $\dot{a}nY_x = anY_y = anY_z = t$. Tenemos

$$a_{11} = anY\left(\frac{\partial Y_1}{\partial x}\right) = 3t^{-1} - 3$$

$$a_{12} = anY\left(\frac{\partial Y_1}{\partial y}\right) = -t^{-1} + 2$$

$$a_{13} = anY\left(\frac{\partial Y_1}{\partial z}\right) = -2t^{-1} + 1$$

$$a_{21} = anY\left(\frac{\partial Y_2}{\partial x}\right) = -t^{-1} + 2$$

$$a_{22} = anY\left(\frac{\partial Y_2}{\partial y}\right) = t^{-1} - 2$$

$$a_{23} = anY\left(\frac{\partial Y_2}{\partial z}\right) = 0.$$

Así

$$A = \left\|\begin{matrix} 3t^{-1} - 3 & -t^{-1} + 2 & -2t^{-1} + 1 \\ -t^{-1} + 2 & t^{-1} - 2 & 0 \end{matrix}\right\|$$

$$\sim \left\|\begin{matrix} 3 - 3t & -1 + 2t & 0 \\ -1 + 2t & 1 - 2t & 0 \end{matrix}\right\|$$

$$\sim \left\|\begin{matrix} 2 - t & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2t & 0 \end{matrix}\right\|.$$

Dado que $2-t$ y $1-2t$ son dos polinomios distintos e irreducibles, su m.c.d. es 1. Entonces,

$$\Delta_1 = (2-t)(1-2t) = 2-5t+2t^2$$

$$\Delta_K = 1 \quad \text{para} \quad K \geq 2 .$$

Con esto obtenemos que como en nuestro ejemplo anterior los nudos poseen los mismos polinomios, sin embargo estos nudos no son del mismo tipo dado que su cadena de ideales elementales es diferente. Tenemos que para nuestro nudo K_2 los ideales elementales son:

$$E_1 = (2t^2 - 5t + 2)$$

El segundo ideal elemental E_2 está generado por $2-t$ y $2t-1$. Mapeando homomórficamente ZH sobre Z por medio de $t \mapsto 1$, $t^{-1} \mapsto -1$ se tiene que bajo este homomorfismo el ideal E_2 se mapea sobre el ideal generado por 3 dado que $2-t \mapsto 3$ y $1-2t \mapsto 3$. Esto nos muestra que E_2 no es todo el anillo de grupo $\mathbb{Z}H$*. Tenemos entonces

$$E_1 = (2t^2 - 5t + 2)$$

$$E_2 = (2-t, 1-2t)$$

$$E_k = (1) \quad \text{para } k \geq 3 .$$

A continuación trataremos con propiedades características de los polinomios de nudo.

Teorema 4.10 Para cualquier presentación finita $(x:r)$ de un grupo de un nudo y cualquier entero $k \geq 1$ la imagen bajo el trivializador del k-ésimo ideal elemental E_k de $(x:r)$ es todo $\mathbb{Z}$.

Demostración. Sea $(x:r) = (x_1, \dots, x_n : r_1, \dots, r_m)$ y sea A su matriz de Alexander por el abelianizado de un grupo de nudo puede ser presentado

* El anillo de grupo del abelianizado del grupo de la presentación.

por $(x : r, [x_i, x_j],\ i, j = 1, \ldots, n)$. Denotemos por A' la matriz de Alexander de esta presentación. Por

el abelianizado de un grupo de un nudo es cíclico infinito por tanto $(x : r, [x_i, x_j],\ i, j = 1, \ldots, n)$ es del mismo tipo que $(x :)$. Los ideales elementales de esta última son $E_0 = (0)$, $E_1 = E_2 = \cdots = (1)$ se sigue entonces de 3.18 que

$$E_k(A') = \begin{cases} (0), & k = 0 \\ (1), & k \geq 1 \end{cases}$$

Observemos ahora que la imagen de cualquier matriz de Alexander bajo el trivializador es idéntica a la imagen de la matriz original de derivadas bajo el trivializador. Por tanto.

$$\frac{\partial}{\partial x_k}[x_i, x_j] = \delta_{ik}(1 - x_i x_j x_i^{-1}) + \delta_{jk}(x_i - x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1})$$

y entonces $\quad t\frac{\partial}{\partial x_k}[x_i, x_j] = 0, \quad i, j, k = 1, \ldots, n.$

Por tanto
$$tA' = \left(\left\| t \frac{\partial r_i}{\partial x_i} \right\| \atop 0 \right) = \begin{pmatrix} tA \\ 0 \end{pmatrix} \sim tA$$

Que por 3.13 y 3.14.1 obtenemos
$$tE_k(A) = E_k(tA) = E_k(tA') = tE_k(A') = \begin{cases} (0), & \text{si } k=0 \\ \mathbb{Z}, & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

Teorema 4.11. $|\Delta_k(1)| = 1 \quad k = 1, 2, \ldots$

Demostración. Observemos primero que afirmar que $|\Delta_k(1)| = 1 \quad k = 1, 2, \ldots$ es equivalente a afirmar que $|\Delta_1(1)| = 1$ dado que por 4.5 se tiene que $\Delta_{k+1} | \Delta_k$. (Para probar 4.11 probaremos que 4.11 y 4.10 son equivalentes). Los ideales elementales forman una cadena ascendente por tanto 4.10 es equivalente a decir $tE_1 = \mathbb{Z}$. Aplicando ahora 4.8 se sigue que tE_1 esta generado por $t\Delta_1 = \Delta_1(1)$. Si suponemos que $|\Delta_1(1)| = 1$ se tiene entonces que $tE_1 = \mathbb{Z}$.

Para la otra implicación se tiene que, dado que el generador de un ideal en un dominio entero es único salvo asociados, si suponemos $tE_1 = \mathbb{Z}$ entonces $|\Delta_1(1)| = 1$.

Definición 4.12. Consideremos el mapeo $i : G \to G$ de un grupo G arbitrario en sí mismo con la asignación $i(g) = g^{-1}$ para cada elemento g de G. Definimos como una conjugación a la única extensión lineal de i al anillo de grupo $\mathbb{Z}G$. A la conjugación la denotamos con una barra y entonces $\overline{\sum a_i g_i} = \sum a_i (g_i)^{-1}$ $\quad a_i \in \mathbb{Z}$, $g_i \in G$.

Definición 4.13.- Si $f : R \to R'$ es cualquier homomorfismo y $a_1, a_2 \in R$, escribimos $a_1 \equiv a_2 \pmod f$ (decimos a_1 congruente con a_2 módulo f)

siempre que $fa_1 = fa_2$.

Presentaciones Duales

Definición* 4.14. Dos presentaciones finitas $(x:r) = (x_1,\ldots,x_n : r_1,\ldots,r_n)$ y $(y:s) = (y_1,\ldots,y_n : s_1,\ldots,s_n)$ forman un par de presentaciones duales, si existe una equivalencia de presentaciones $\theta : (x:r) \to (y:s)$ tal que

a) $\theta x_i \equiv y_i^{-1} \pmod{\operatorname{ar} \gamma}$ $\quad i = 1,\ldots,n$

b) $\theta\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}(x_j - 1)\right) \equiv \overline{\frac{\partial s_j}{\partial y_i}(y_i - 1)} \pmod{\operatorname{ar} \gamma}$, $i,j = 1,\ldots,n$.

En [ ] se prueba el resultado mas fuerte para un par de presentaciones duales. $\theta\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right) \equiv \overline{\frac{\partial s_j}{\partial y_i}} \pmod{\operatorname{ar} \gamma}$.

Esto es si A y B son las matrices de Alexander de $(x:r)$ y $(y:s)$, respectivamente, entonces

$\theta_{**} A = \overline{B^t}$.

* ver [2] y [4]

Teorema 4.15. Los ideales elementales E_k de cualquier presentación finita de un grupo de un nudo son invariantes bajo conjugación.

Demostración. Queremos probar que $\overline{E_k} = E_k$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$. La transpuesta de una matriz cuadrada obviamente tiene los mismos ideales elementales que la original. Sean $(X:V)$, $(Y:S)$ un par de presentaciones duales de nuestro grupo de nudo (existencia ver [1]) y sean A, B las matrices de Alexander correspondientes a estas presentaciones respectivamente, sean $E_k(A)$ y $E_k(B)$ sus k-ésimos ideales elementales, tenemos por 3.14.1 y 3.18 que

$$\begin{aligned} E_k(B) = \theta_{**} E_k(A) = E_k(\theta_{**} A) &= E_k(\overline{B}^t) \\ &= E_k(\overline{B}) \\ &= \overline{E_k(B)} \end{aligned}$$

Teorema 4.16. Para cualquier polinomio de nudo $\Delta_K(t)$, existe un entero par n tal que

$$\Delta_K(t) = t^n \Delta_K\left(\frac{1}{t}\right)$$

Demostración. Sea (Δ_K) el ideal generado por el polinomio de nudo Δ_K. (Δ_K) es el menor ideal principal que contiene a E_K ver 4.4. Dado que $E_K \subset (\Delta_K)$, $E_K = \overline{E_K} \subset (\overline{\Delta_K})$. En el anillo de grupo de un grupo abeliano, la conjugación es un isomorfismo de anillos. Entonces $\overline{(\Delta_K)}$ es un ideal principal, y $(\overline{\Delta_K}) = \overline{(\Delta_K)}$. Dado que (Δ_K) es minimal $(\Delta_K) \subset (\overline{\Delta_K}) \subset (\overline{\overline{\Delta_K}}) = (\Delta_K)$

Concluimos que $(\Delta_K) = (\overline{\Delta_K})$

Los generadores de un ideal principal en un dominio entero son únicos salvo unidades, entonces

$$\Delta_K(t) = \varepsilon t^n \Delta_K\left(\frac{1}{t}\right),$$

donde $\varepsilon = \pm 1$ ($\Delta_K t = \Delta_K$, $\Delta_K(\frac{1}{t}) = \bar{\Delta}_K$). Para $K = 0$ ambos lados de la ecuación son cero. Para $K > 0$ sabemos de 4.11 que $\Delta_K(1) \neq 0$. Entonces si $t = 1$ se tiene $\varepsilon = 1$. Escribiendo $\Delta_K(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n$, tenemos $c_i = c_{n-i}$, $i = 0, \ldots, n$. Si n fuera impar por 4.11 nuevamente, tendríamos

$$|\Delta_K(1)| = 1 = 2\,|c_0 + \cdots + c_{(n-1)/2}|$$ lo cual es imposible.

Corolario 4.16.1. Cada polinomio de nudo es de grado par.

Corolario 4.16.2 Los coeficientes de los polinomios de nudo son simétricos i.e. $c_{n-i} = c_i$.

Bibliografía.

[1] Richard H. Crowell, Ralph H. Fox
"Introduction to Knot theory"
Springer Verlag

[2] Guillermo Torres Díaz
"On the Alexander Polynomial"
Ann. of. Math, Vol 57, P.P 57-89 1953.

[3] William S. Massey
"Introducción a la Topología Algebraica"
Editorial Reverté.

[4] R. H. Fox "A. Quick trip through Knot theory"
(Proc. Univ. of Georgia Inst, 1961)
Prentice-Hall 1962 pp. 120-167.

[5] Reidemeister, K. Knotentheorie in
Ergebnisse der Mathematik, vol 1. No1
1932.