UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CASCADAS DE FUNCIONES DIFERENCIABLES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO
EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

PRESENTA

JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA

MEXICO, D.F. 1982.

INDICE.

INTRODUCCION.

Antes de empezar a explicar de lo que trata este trabajo conviene presentar algunas definiciones que se usarán a lo largo de éste.

Dadas dos funciones $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciables (por diferenciables, se entenderá, de clase C^∞) en vecindades U, V del cero en $\mathbb{R}^n$. Se dirá que son <u>equivalentes</u> si existe $W \subset V \cap U$ vecindad del cero en $\mathbb{R}^n$ de tal forma que $f/_W = g/_W$. Esta relación es de equivalencia en el conjunto de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ diferenciables en una vecindad del cero en $\mathbb{R}^n$.

A las clases de equivalencia inducidas por esta relación se les llaman <u>gérmenes</u> en el cero de $\mathbb{R}^n$ y son usualmente denotadas por $f: (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^m$, donde f es un representante de la clase. Si el germen es tal que $f(0) = y_0$, se escribirá $f: (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^m, y_0)$.

Una <u>cascada</u> de gérmenes de funciones diferenciables es simplemente una colección finita de gérmenes en el cero $D=\{\tilde{f}_i\}_{i=1}^{n-1}$ donde el espacio dominio de f_{i+1} es el codominio de f_i ; esto es una sucesión de la forma:

$$(\mathbb{R}^{s_1},0) \xrightarrow{\tilde{f}_1} (\mathbb{R}^{s_2},0) \xrightarrow{\tilde{f}_2} \cdots\cdots \xrightarrow{\tilde{f}_{n-1}} (\mathbb{R}^{s_n},0).$$

Dos cascadas $D=\{\tilde{f}_i : (\mathbb{R}^{s_i},0)\to(\mathbb{R}^{s_{i+1}},0)\}_{i=1}^{n-1}$ y $D'=\{\tilde{g}_i : (\mathbb{R}^{s_i},0)\to(\mathbb{R}^{s_{i+1}},0)\}_{i=1}^{n-1}$ se dirán <u>isomorfas</u> si: Existen $\phi_i : (\mathbb{R}^{s_i},0)\to(\mathbb{R}^{s_i},0)$ gérmenes de difeomorfismos locales, $i=1,\dots,n$ tales que $\forall i\in\{1,\dots,n-1\}$ $\phi_{i+1}\circ\tilde{f}_i = \tilde{g}_i\circ\phi_i$.

Un <u>desdoblamiento a p-parámetros de $D=\{\tilde{f}_i\}_{i=1}^{n-1}$</u> es una cascada $F=\{F_i\}_{i=1}^{n-1}$ donde cada F_i es un desdoblamiento a p-parámetros de $\tilde{f}_i$, esto es F_i es un germen de la forma:

$$F_i : (\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_i},0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_{i+1}},0)$$
$$(u,x^i) \longmapsto (u, f_i(u,x^i))$$

tal que $f_i(0,x^i)=\tilde{f}_i(x^i)$.

Si $h:(\mathbb{R}^q,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ es un germen de función diferenciable, <u>la imagen recíproca de F por h</u>, es el desdoblamiento a q-parámetros $h^*F=\{h^*F_i\}_{i=1}^{n-1}$, donde

$$h^*F_i : (\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{s_i}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{s_{i+1}}, 0)$$
$$(v, x^i) \longmapsto (v, f_i(h(v), x^i))$$

Se dirá que dos desdoblamientos a p-parámetros de D, $F = \{F_i\}_{i=1}^{n-1}$ y $G = \{G_i\}_{i=1}^{n-1}$ son <u>desdoblamientos isomorfos</u> si: Existen $\Phi_i : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{s_i}, 0) \to (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{s_{i+1}}, 0)$ desdoblamientos de la identidad de $\mathbb{R}^{s_i}$ (esto es $\Phi_i(u, x^i) = (u, \phi_i(u, x^i))$ y $\phi_i(0, x^i) = x^i$) para $i = 1, .., n$ tales que $\Phi_{i+1} \circ F_i = G_i \circ \Phi_i$.

También se dirá que F y G son <u>desdoblamientos equivalentes</u> a p-parámetros de D si existe $h : (\mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ difeomorfismo local tal que G es isomorfo a h^*F.

Un <u>desdoblamiento de D es trivial</u>, si es isomorfo al <u>desdoblamiento constante ΣD</u> $= \{(u, x^i) \mapsto (u, f_i(x^i))\}_{i=1}^{n-1}$

F se dirá que es un <u>desdoblamiento versal</u> de D si todo otro desdoblamiento G de D es isomorfo a la imagen recíproca de F por alguna función diferenciable.

D es una <u>cascada estable</u> si todos sus desdoblamientos son triviales.

Con estas definiciones en mano se tratará en breves líneas de exponer este trabajo.

Dada una cascada uno se pregunta inmediatamente cuándo es estable, manejar la definición anterior resulta en muchos casos complicado, luego lo que se busca son condiciones que garanticen la estabilidad, una de ellas se presenta aquí, la de infinitesimalmente estable, ésta es una condición analítica y resulta en algunos casos más manejable. Se verá que esta condición es equivalente a ser estable.

Después con el concepto de desdoblamiento versal que sale (de manera natural, como en el caso de un solo germen) para estudiar ahora una familia "estable" de cascadas (o gérmenes) y cuya familia contiene a la cascada (o germen) en estudio, también se introduce lo que es un desdoblamiento infinitesimalmente versal de una cascada.

La parte central de este trabajo es la de demostrar que: Un desdoblamiento es versal si y sólo si es infinitesimalmente versal.

Para este fin se requiere de una fuerte herramienta algebraica que se expone en la parte que se ha hecho llamar preliminares, básicamente es una extensión del Lema de Nakayama.

Se debe aclarar que la necesidad de esta afirmación es fácil y sencilla en el sentido que no requiere material muy avanzado; en la suficiencia, parte más importante del Teorema, es donde la maquinaria algebraica entra en juego y con ésta su gran conectivo el Teorema de Preparación de Malgrange.

Antes de continuar con esta introducción, valdría la pena destacar algunos detalles acerca de los orígenes del estudio de las cascadas; quizá el el iniciador del estudio de cascadas diferenciables debería ser René Thom, pues él en su trabajo "Mathematiques de la Morphogénèse" introduce para sus modelos de morfogénesis la noción de desdoblamiento de un germen y lo que interesa es cuándo esta familia (el desdoblamiento) es versal. En términos de cascadas se verá más adelante que esto será equivalente a que la cascada $(u,x) \to (u, f(u,x)) \to u$ sea estable, donde la primera función es el desdoblamiento que se está considerando.

Otro que se podría considerar de los pioneros es G. Wassermann, pues en su Teoría de catástrofes espacio-temporales, tiene especial interés en deformaciones $f(u,v,x)$ de $f_0(x)=f(0,0,x)$ que sean (r,s)-estables, esto será equivalente a la estabilidad de la cascada

$$(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{F} (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}, 0) \xrightarrow{p} (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s, 0) \xrightarrow{q} (\mathbb{R}^s, 0)$$

donde $F(u,v,x) = (u, v, f(u,v,x))$ y p, q las proyecciones canónicas.

Algunos otros pioneros según J. Dufour son: F. Pham, F. Latour, M.A. Buchner, V.I. Arnold, V. Poenaru, que en distintas ramas, les aparecen cascadas por lo general del tipo $\to\ \to$ (ver, [D.2] pág. 1).

Pero no es hasta 1973, en Nice, Francia, cuando J. Mather en una conferencia define la noción de estabilidad y estabilidad infinitesimal para una cascada cualquiera y muestra que estabilidad infinitesimal implica estabilidad. Motivado por esto J. Dufour, en el año de 1975 presenta sus estudios en la tesis "Deploiements de cascades d'applications", ahí estudia los desdoblamientos universales de cascadas y muestra entre otras cosas la equivalencia entre versalidad y versalidad infinitesimal.

Luego esta Teoría de cascadas que engloba a varias como las de Thom, Mather, Wassermann, etc., es la que se presenta aquí.

Dentro de un Seminario de Teoría de Singularidades en la Facultad de Ciencias, en un intento de avanzar en los estudios iniciados por R. Bulajich, en su tesis se presenta el siguiente problema [B1, pág. 17]. Se definen los conceptos de ST-estable y ST-infinitesimalmente estable y se pregunta si son equivalentes. Este problema nos lleva a estudiar diagramas de gérmenes de función del tipo $\cdot \rightrightarrows :$ y desde luego a buscar un "Teorema de Preparación" adecuado para esta Teoría. Atraidos por todo esto, además del interés que por sí mismo presenta, se ve necesario entrar al estudio de diagramas del tipo $\longrightarrow \longrightarrow \cdots \longrightarrow$. Desde luego los primeros trabajos que se estudian son los de Dufour [D1] [D2] y Wassermann [W]; para este entonces los trabajos de J. Martinet [M1], [M2], en donde la Teoría de Mather, a sido reformulada y planteada en una manera más accesible, influyen dentro del seminario, lo que motiva presentar este trabajo siguiendo algunos esquemas de Martinet, pues estos permiten separar varios aspectos de la Teoría. También hay que destacar que el aspecto local es el que se maneja a lo largo del trabajo no como Dufour cuyo interés es el global.

Podría decirse que lo que pretende esta tesis es presentar de una manera clara y esquemática la Teoría de cascadas de gérmenes de funciones diferenciables; de una manera en donde se puedan detectar las partes importantes de la Teoría, una manera donde los aspectos algebraicos necesarios para la Teoría queden destacados y desde luego una forma que sea de fácil acceso al interesado en el tema.

Ineludiblemente estoy obligado con Radmila y León por sus comentarios y el gran impulso que han prestado para la realización de este trabajo.

Y este último espacio, lo he reservado con bastante intención, para expresar sinceramente un agradecimiento a Santiago, sin cuyo asesoramiento hubiera sido imposible realizar esta tesis, a su dirección se deben de atribuir todos los aciertos que en ésta se encuentren, de los desaciertos mi negligencia es la responsable.

José A. Gómez Ortega.

enero, 82.

PRELIMINARES.

Todos los anillos que aparecen en este trabajo son conmutativos y con 1. Si A es un anillo, $r(A)$ denotará al radical de Jacobson, es decir $r(A)$ es la intersección de todos los ideales maximales de A.

Si $\varphi: A \to B$ es un homomorfismo entre anillos, diremos que éste es <u>excelente</u> si: Todo B-módulo de tipo finito M, tal que $M/r(A)M$ es un $A/r(A)$-módulo de tipo finito, es de tipo finito como A-módulo.

Son propiedades de los homomorfismos excelentes las siguientes:

(i) Todo homomorfismo suprayectivo es excelente.

(ii) $\varphi: A \to B$ excelente, $I \subset r(A)$, $J \subset r(B)$ y $\varphi(I) \subset J$ implican que $\varphi': A/I \to B/J$ es excelente.

(iii) $\varphi: A \to B$ y $\psi: B \to C$ excelentes con $\varphi(r(A)) \subset r(B)$ entonces $\psi \circ \varphi: A \to C$ es excelente.

(iv) $\varphi: A \to B$ excelente y C un anillo, entonces $\tilde{\varphi}: C\times A \to C\times B$ dada por $\tilde{\varphi}(c,a) = (c, \varphi(a))$ es excelente.

(v) El homomorfismo $\psi: C\times A \to C\times A\times A$ dado por $\psi(c,a) = (c,a,a)$ es excelente.

En términos de homomorfismos excelentes se puede enunciar el:

TEOREMA DE PREPARACIÓN DE MALGRANGE.

Si $f: (\mathbb{R}^s,0) \to (\mathbb{R}^t,0)$, $x \longmapsto y = f(x)$ es un germen de función de clase C^∞, se tiene que $f^*: \mathcal{E}_y \to \mathcal{E}_x$, $h \mapsto h\circ f$ es excelente. Donde $\mathcal{E}_x = \{h: (\mathbb{R}^s,0) \to \mathbb{R}\,;\ h \text{ es de clase } C^\infty\}$, análogamente $\mathcal{E}_y$.

En los siguientes párrafos se presenta la herramienta algebraica que se necesita para desarrollar este trabajo. La parte central es el Teorema A, que es una generalización del Lema de Nakayama, el uso de éste es sugerido por los trabajos de Dufour [D1] y [D2] en los que da una demostración más complicada, la demostración que aquí se presenta se basa en una idea de Wassermann [W].

Sea $D = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}_i : (\mathbb{R}^{s_i}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{s_{i+1}}, 0) \\ x^i \longmapsto x^{i+1} = \tilde{f}_i(x^i) \end{array} \right\}_{i=1}^{n-1}$ una cascada de gérmenes de funciones y $F = \left\{ \begin{array}{l} F_i : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{s_i}, 0) \to (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{s_{i+1}}, 0) \\ (u, x^i) \mapsto (u, f_i(u, x^i)) \end{array} \right\}_{i=1}^{n-1}$ un desdoblamiento de D a p-parámetros.

Sean $A_{n+1} := \mathcal{E}_u$, $A_i = \mathcal{E}_{u,x^i} \times \dots \times \mathcal{E}_{u,x^n}$ $i = 1, \dots, n$

Sean también, $\varphi_i : A_{i+1} \to A_i$, $\varphi_i(h_{i+1}, \dots, h_n) = (F_i^*(h_{i+1}), h_{i+1}, \dots, h_n)$ $i = 1, \dots, n-1$ y $\varphi_n = \pi^*$ donde $\pi : \begin{array}{l} (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{s_n}, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0) \\ (u, x^n) \longmapsto u \end{array}$.

Es consecuencia inmediata del Teorema de Preparación de Malgrange y de las propiedades de los homomorfismos excelentes el siguiente:

<u>LEMA</u>. $A_{n+1} \xrightarrow{\varphi_n} A_n \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\varphi_1} A_1$ es una cascada de homomorfismos excelentes.

Recordemos también la siguiente versión del:

<u>LEMA DE NAKAYAMA</u>. Sean M un A-módulo de tipo finito y N un submódulo de M, entonces:

$$M = N + r(A)M \implies M = N.$$

PROPOSICIÓN.- Sean $\varphi : A \to B$ un homomorfismo excelente, N_1, M B-módulos, N_2 un A-módulo, M y N_2 de tipo finito, $\alpha_2 : N_2 \to M$ un φ-homomorfismo y $\alpha_1 : N_1 \to M$ un B-homomorfismo. Entonces:

$$\alpha_2(N_2) + \alpha_1(N_1) + r(A)M = M \implies \alpha_2(N_2) + \alpha_1(N_1) = M.$$

Dem:

Sean $\bar{M} := M/\alpha_1(N_1)$ y $p : M \to \bar{M}$ la proyección canónica. Como $p \circ \alpha_2(r(A)N_2) \subset p(\varphi(r(A))M) = \varphi(r(A))\bar{M}$, se tiene que la función $p \circ \alpha_2 : N_2 \to \bar{M}$ induce un homomorfismo $\Lambda : N_2/r(A)N_2 \to \bar{M}/r(A)\bar{M}$ que es suprayectivo, pues $\bar{M}/r(A)\bar{M} = M/\alpha_1(N_1) + r(A)M$ y $\alpha_2(N_2) + \alpha_1(N_1) + r(A)M = M$.

Ahora como N_2 es un A-módulo de tipo finito se tiene que $N_2 \otimes A/r(A) = N_2/r(A)N_2$ es un $A/r(A)$-módulo de tipo finito como Λ es suprayectivo $\bar{M}/r(A)\bar{M}$ es un $A/r(A)$-módulo de tipo finito.

Por otro lado $\bar{M}$ es un B-módulo de tipo finito pues M lo es; y como φ es excelente resulta que $\bar{M}$ es también de tipo finito como A-módulo. Ahora como $\bar{M} = p\circ\alpha_2(N_2) + r(A)\bar{M}$, se tiene, por el lema de Nakayama, que $\bar{M} = p \circ \alpha_2(N_2)$ y esto claramente implica que $\alpha_2(N_2) + \alpha_1(N_1) = M$. ∎

TEOREMA A.

Sea $A_n \xrightarrow{\varphi_{n-1}} A_{n-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\varphi_1} A_1$ una cascada de homomorfismos excelentes, tales que: $\varphi_i(r(A_{i+1})) \subset r(A_i)$ $i=1,\dots,n-1$. Sean N_i, A_i-módulo $i=1,\dots,n$, M un A_1-módulo, $N_2,\dots,N_n, M$ de tipo finito y $\alpha_i : N_i \to M$ un $\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_{i-1}$-homomorfismo $i=2,\dots,n$, $\alpha_1 : N_1 \to M$ un A_1-homomorfismo. Entonces:

$$\alpha_n(N_n) + \cdots + \alpha_1(N_1) + r(A_n)M = M \Rightarrow \alpha_n(N_n) + \cdots + \alpha_1(N_1) = M.$$

Dem.

Se hará por inducción sobre n. Los casos $n=1$ y $n=2$ son el Lema de Nakayama y la proposición anterior respectivamente. Supóngase el resultado cierto para $n-1$.

Sean $\bar{M} := M/\alpha_1(N_1)$ que es un A_1-módulo de tipo finito, $p : M \to \bar{M}$ la proyección canónica, $\alpha_i' := p \circ \alpha_i : N_i \to M$ $i=2,\dots,n$ que es un $\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_{i-1}$-homomorfismo, N_i' el A_2-submódulo de $\bar{M}$

generado por $p\circ\alpha_i(N_i)$ $i=2,\ldots,n$ que es de tipo finito como A_2-módulo. Observaciones:

(a) $r(A_n)M \subset r(A_2)M \Rightarrow \alpha_n(N_n)+\cdots+\alpha_1(N_1)+r(A_2)M = M$.

(b) la inclusión $i: N := N_n'+\cdots+N_2' \hookrightarrow \bar{M}$ induce un homomorfismo $\Lambda: N/r(A_2)N \longrightarrow \bar{M}/r(A_2)\bar{M}$ que por (a) y de que $\bar{M}/r(A_2)\bar{M} = M/\alpha_1(N_1)+r(A_2)M$ es suprayectivo.

(c) $N/r(A_2)N$ es un $A_2/r(A_2)$-módulo de tipo finito, pues N lo es como A_2-módulo.

(d) por (b) y (c) se tiene que $\bar{M}/r(A_2)\bar{M}$ es un $A_2/r(A_2)$-módulo de tipo finito

(e) Como $\bar{M}$ es un A_1-módulo de tipo finito y φ_1 es excelente tenemos por (d) que $\bar{M}$ es un A_2-módulo de tipo finito.

(f) $\alpha_n(N_n)+\cdots+\alpha_1(N_1)+r(A_n)M = M \Rightarrow \alpha_n'(N_n)+\cdots+\alpha_2'(N_2)+r(A_n)\bar{M} = \bar{M}$

(g) Como las hipótesis se cumplen para: $A_n \xrightarrow{\varphi_{n-1}} A_{n-1} \rightarrow \cdots \xrightarrow{\varphi_2} A_2$, $N_n,\ldots,N_2,\bar{M}$ y $\alpha_n',\ldots,\alpha_2'$, se concluye por hipótesis de inducción que: $\alpha_n'(N_n)+\cdots+\alpha_2'(N_2) = \bar{M}$.

(h) (g) claramente implica $\alpha_n(N_n)+\cdots+\alpha_1(N_1) = M$. ∎

EL LEMA DE REDUCCIÓN.

Sea $\xi : (\mathbb{R}^p,0) \to (\mathbb{R}^p,0)$ un germen de campo vectorial C^∞, con $x(t,u)$ la curva integral de la ecuación $\dot{u} = \xi(u)$ con condición inicial $x(0,u) = u$.

$$F = \left\{ F_i : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{s_i};0) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{s_{i+1}};0) \\ (u,x^i) & \longmapsto & (u, f_i(u,x^i)) \end{array} \right\}_{i=1}^{n-1}$$ es un <u>desdoblamiento trivial a lo largo de ξ</u> de la cascada $D = \{\tilde{f}_i\}_{i=1}^{n-1}$, si:

Existen $\phi_i : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{s_i};0) \to (\mathbb{R}^{s_i};0)$ con $\phi_i(0,u,x^i) = x^i$ $i=1,\dots,n$ tales que $\forall i \in \{1,\dots,n-1\}$ $f_i(x(t,u),\phi_i(t,u,x^i)) = \phi_{i+1}(t,u,f_i(u,x^i))$.

<u>PROPOSICIÓN</u>.- F es trivial a lo largo de ξ si y sólo si Existen campos vectoriales de la forma $\bar{X}_i(u,x^i) = (\xi(u), X_i(u,x^i))$ en $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{s_i}$, para $i=1,\dots,n$ tales que: $DF_i \cdot \bar{X}_i = \bar{X}_{i+1} \circ F_i$ $i=1,\dots,n-1$.

Dem.

"$\Rightarrow$" Por ser F trivial a lo largo de ξ se tiene que existen $\phi_i : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{s_i};0) \to (\mathbb{R}^{s_i};0)$ gérmenes con $\phi_i(0,u,x^i) = x^i$

tales que: $f_i(\chi(t,u),\phi_i(t,u,x^i)) = \phi_{i+1}(t,u,f_i(u,x^i))$ $i=1,\dots,n-1$.

Luego $\forall i \in \{1,\dots,n-1\}$ y $\forall k \in \{1,\dots,s_{i+1}\}$

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_{i,k}}{\partial u_j}(\chi(t,u),\phi_i(t,u,x^i))\cdot \frac{\partial \chi_j}{\partial t}(t,u) + \sum_{l=1}^{s_i} \frac{\partial f_{i,k}}{\partial x^i_l}(\chi(t,u),\phi_i(t,u,x^i))\frac{\partial \phi_{i,l}}{\partial t}(t,u,x^i) =$$

$$= \frac{\partial \phi_{i+1,k}}{\partial t}(t,u,f_i(u,x^i)).$$

Entonces al tomar $X_{i,k}(u,x^i) = \frac{\partial \phi_{i,k}}{\partial t}(0,u,x^i)$ $\begin{matrix} i=1,\dots,n \\ k=1,\dots,s_i \end{matrix}$

se tiene que: $\forall i \in \{1,\dots,n-1\}$ $DF_i \cdot \bar{X}_i = \bar{X}_{i+1} \circ F_i$.

"$\Leftarrow$"

Dados los campos $\bar{X}_1,\dots \bar{X}_n$ y $(\chi,\phi_1),\dots,(\chi,\phi_n)$ las curvas integrales de estos campos, se tiene por el Teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales que las ϕ_i cumplen la condición de trivialidad. ∎

Si ahora $F = \{F_i\}_{i=1}^{n-1}$ es un desdoblamiento a $p+1$-parámetros de D y si los parámetros son $(u_0,u_1,\dots,u_p)$, el desdoblamiento a p-parámetros, <u>restricción de F al subespacio $u_0=0$</u>, es $F_0 := \{F_{i,0}\}_{i=1}^{n-1}$ donde

$$F_{i,0} : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{s_i}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{s_{i+1}}, 0)$$
$$(u, x^i) \longmapsto (u, f_i(0, u, x^i)) \quad .$$

OBSERVACIÓN.- Si $i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{p+1}$, $u \mapsto (0,u)$ es la inclusión se obtiene que $F_0 = i^* F$.

Sea ξ un campo vectorial en $\mathbb{R}^{p+1}$ de la forma $\xi = \frac{\partial}{\partial u_0} + \sum_{i=1}^{p} \xi_i(u) \frac{\partial}{\partial u_i}$ y sea $h : (\mathbb{R}^{p+1}, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ la retracción canónica, donde las fibras son las curvas integrales $\chi(t,u)$ de ξ.

<u>PROPOSICIÓN</u>.- F es trivial a lo largo de ξ si y sólo si F es isomorfo a $h^* F_0$.

Dem.

"$\Rightarrow$" Sea $k : \mathbb{R}^{p+1} \to \mathbb{R}$ tal que $\chi(k(u), u) = (0, h(u))$.

Por ser F trivial a lo largo de ξ existen $\phi_i : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{s_i}, 0) \to (\mathbb{R}^{s_i}, 0)$ que satisfacen $\phi_i(0, u, x^i) = x^i$ y tales que $\forall i \in \{1, .., n-1\}$ $f_i(\chi(t,u), \phi_i(t, u, x^i)) = \phi_{i+1}(t, u, f_i(u, x^i))$.

$\forall i \in \{1, ..., n\}$ sea
$$\Phi_i : (\mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{s_i}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{s_i}, 0)$$
$$(u, x^i) \longmapsto (u, \phi_i(-k(u), 0, h(u), x^i))$$

claramente estos son desdoblamientos de la identidad y como

$$f_i(u,\phi_i(-k(u),0,h(u),x^i)) = \phi_{i+1}(-k(u),0,h(u),f_i(0,h(u),x^i))$$

se tiene que : $F_i \circ \Phi_i(u,x^i) = F_i(u,\phi_i(-k(u),0,h(u),x^i)) =$

$$= (u, f_i(u,\phi_i(-k(u),0,h(u),x^i))) = (u,\phi_{i+1}(-k(u),0,h(u),f_i(0,h(u),x^i)))=$$

$$= \Phi_{i+1}(u,f_i(0,h(u),x^i)) = (\Phi_{i+1}\circ h^*F_{i,0})(u,x^i).$$

Por tanto F es isomorfo a h^*F_0.

"$\Leftarrow$" F isomorfo a h^*F_0 implica que existen

$$\begin{aligned}\Phi_i : (\mathbb{R}^{p+1}\times\mathbb{R}^{s_i},0) &\longrightarrow (\mathbb{R}^{p+1}\times\mathbb{R}^{s_i},0)\\ (u,x^i) &\longmapsto (u,\hat{\phi}_i(u,x^i))\end{aligned}$$ desdoblamientos de la identidad

en $\mathbb{R}^{s_i}$, $i=1,\dots,n$ tales que: $F_i\circ\Phi_i = \Phi_{i+1}\circ h^*F_{i,0}$ .... (1)

Sean $\Phi_i^{-1}(u,x^i) = (u,\hat{\phi}_i^{-1}(u,x^i))$ los difeomorfismos inversos.

$\forall i\in\{1,\dots,n\}$ sea $$\begin{aligned}\phi_i : (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{p+1}\times\mathbb{R}^{s_i},0) &\longrightarrow (\mathbb{R}^{s_i},0)\\ (t,u,x^i) &\longmapsto \hat{\phi}_i(\chi(t,u),\hat{\phi}_i^{-1}(u,x^i))\end{aligned}$$

Entonces se tiene que:

$$f_i(\chi(t,u),\phi_i(t,u,x^i)) = f_i(\chi(t,u),\hat{\phi}_i(\chi(t,u),\hat{\phi}_i^{-1}(u,x^i))) =$$

$$\underset{(1)}{=} \hat{\phi}_{i+1}(\chi(t,u),f_i(i\circ h(\chi(t,u)),\hat{\phi}_i^{-1}(u,x^i))) =$$

$$= \hat{\phi}_{i+1}(\chi(t,u),f_i(i\circ h(u),\hat{\phi}_i^{-1}(u,x^i))) \text{ ....(2)}$$

Por otro lado:

$$\hat{\phi}_{i+1}(u,f_i(i\circ h(u),\hat{\phi}_i^{-1}(u,x^i))) \underset{(1)}{=} f_i(u,\hat{\phi}_i(u,\hat{\phi}_i^{-1}(u,x^i))) = f_i(u,x^i).$$

$$\therefore\ \hat{\phi}_{i+1}^{-1}(u, f_i(u,x^i)) = \hat{\phi}_{i+1}^{-1}(u, \hat{\phi}_{i+1}(u, f_i(i\circ h(u), \hat{\phi}_i^{-1}(u,x^i)))) =$$

$$= f_i(i\circ h(u), \hat{\phi}_i^{-1}(u,x^i)) \quad \ldots\ldots\ (3)$$

Luego de (2) y (3) se concluye que:

$$f_i(\chi(t,u), \phi_i(t,u,x^i)) = \hat{\phi}_{i+1}(\chi(t,u), \hat{\phi}_{i+1}^{-1}(u, f_i(u,x^i))) = \phi_{i+1}(t,u,f_i(u,x^i)).$$

Por tanto F es trivial a lo largo de ξ. ∎

Si ahora reescribimos los resultados de estas dos últimas proposiciones se obtiene el tan útil.

<u>LEMA DE REDUCCIÓN DE UN DESDOBLAMIENTO.</u>

Sea $\xi = \frac{\partial}{\partial u_0} + \sum_{i=1}^{p} \xi_i(u)\frac{\partial}{\partial u_i}$ un campo vectorial, $h:(\mathbb{R}^{p+1},0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ la retracción canónica. Entonces:

F es isomorfo a h^*F_0 si y sólo si existen campos vectoriales de la forma $\bar{X}_i(u,x^i) = (\xi(u), X_i(u,x^i))$ en $\mathbb{R}^{p+1}\times\mathbb{R}^{s_i}$ $i=1,\ldots,n$ tales que $DF_i\cdot\bar{X}_i = \bar{X}_{i+1}\circ F_i$ para $i=1,\ldots,n-1$. ∎

Una observación más en esta parte, considérese el caso en que $F=\{F_i\}_{i=1}^{n-1}$ sea un desdoblamiento a un solo parámetro, esto es cuando $p=0$, en primer lugar la existencia de una retracción $h:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^{\circ},0)$ tal que F sea isomorfo a h^*F_0 es equivalente a que F sea trivial, pues el desdoblamiento constante a un parámetro se puede pensar como $(i\circ h)^*F$ donde h es la retracción de arriba e $i:(\mathbb{R}^{\circ},0)\to(\mathbb{R},0)$ luego de esto y del lema de reducción se tiene que:

$$F=\left\{ \begin{array}{c} F_i:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{s_i},0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{s_{i+1}},0) \\ (u,x^i)\longmapsto(u,f_i(u,x^i)) \end{array}\right\}_{i=1}^{n-1}$$ es trivial si y sólo si existen $$\begin{array}{c} \bar{X}_i:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{s_i},0)\longrightarrow(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{s_i},0) \\ (u,x^i)\longmapsto(1,X_i(u,x^i)) \end{array}$$ gérmenes de campos vectoriales $i=1,\dots,n$ tales que:

$$\forall i\in\{1,\dots,n-1\}\quad \frac{\partial f_i}{\partial u}+\sum_{j=1}^{s_i} X_{i,j}\frac{\partial f_i}{\partial x_j^i}=X_{i+1}\circ F_i .$$

Esto último se puede escribir también como:

$$\frac{\partial f_i}{\partial u}=-\sum_{j=1}^{s_i} X_{i,j}\frac{\partial f_i}{\partial x_j^i}+X_{i+1}\circ F_i .$$

EL ESPACIO TANGENTE A UNA CASCADA.

Antes de entrar a la definición del espacio tangente para una cascada recordemos un poco como se definía éste para un germen $f_0 : (\mathbb{R}^s, 0) \to (\mathbb{R}^t, 0)$. Se tomaba un desdoblamiento a un parámetro de f_0, $F : (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^s, 0) \to (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^t, 0)$, $(u,x) \longmapsto (u, f(u,x))$ y se sabía (ver la observación anterior) que:

F es trivial si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial u}(u,x) = -\sum_{j=1}^{s} X_{1,j}(u,x)\frac{\partial f}{\partial x_j}(u,x) + X_2 \circ F(u,x)$

para algunos campos vectoriales $\overline{X}_1 : (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^s, 0) \to (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^s, 0)$ y $\overline{X}_2 : (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^t, 0) \to (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^t, 0)$ de la forma: $\overline{X}_1(u,x) = (1, X_1(u,x))$, $\overline{X}_2(u,y) =$
$= (1, X_2(u,y))$.

Reescribiendo esto último:

F es trivial si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial u} \in \mathcal{E}_{u,x}\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_s} \rangle + (F^*\mathcal{E}_{u,y})^t$.

Luego al hacer $u=0$, en la afirmación anterior, obteníamos una condición necesaria (pero no siempre suficiente) de trivialidad:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,x) \in \mathcal{E}_x \langle \frac{\partial f_0}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_0}{\partial x_s} \rangle + (f_0^* \mathcal{E}_y)^t$$

Esto motivaba definir al espacio tangente de f_0 como:

$$Tf_0 := \mathcal{E}_x \langle \frac{\partial f_0}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_0}{\partial x_s} \rangle + (f_0^* \mathcal{E}_y)^t.$$

Ahora siguiendo un poco la notación de Mather [Ma], se tiene que si:

$tf_0 : (\mathcal{E}_x)^s \to (\mathcal{E}_x)^t$ es el $\mathcal{E}_x$-homomorfismo dado por $tf_0(\xi) = -df_0 \cdot \xi$,

$wf_0 : (\mathcal{E}_y)^t \to (\mathcal{E}_x)^t$ el f_0^*-homomorfismo dado por $wf_0(\eta) = \eta \circ f_0$ y

finalmente $\alpha : (\mathcal{E}_x)^s \times (\mathcal{E}_y)^t \longrightarrow (\mathcal{E}_x)^t$ dado por $\alpha(\xi, \eta) = tf_0(\xi) + wf_0(\eta)$, entonces se puede comprobar fácilmente que:

$$Tf_0 = \operatorname{Im} \alpha .$$

Regresemos al estudio de las cascadas. Para definir el espacio tangente a una cascada se procede por analogía con el caso del espacio tangente a un germen. Primeramente se tiene que si $D = \{\tilde{f}_i\}_{i=1}^{n-1}$ es como siempre nuestra cascada y si $F = \{F_i\}_{i=1}^{n-1}$ es un desdoblamiento a 1-parámetro de D, éste es trivial si y sólo si existen campos vectoriales de la forma $\bar{X}_i(u, x^i) = (1, X_i(u, x^i))$ en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{s_i}$ $i = 1, \dots, n$ tales que:

$$\frac{\partial f_i}{\partial u} = -\sum_{j=1}^{s_i} X_{i,j} \frac{\partial f_i}{\partial x_j^i} + X_{i+1} \circ F_i \qquad \text{para } i = 1, \ldots, n-1.$$

Por tanto al hacer $u=0$, tenemos que si F es trivial entonces necesariamente existen $h_i \in (\mathcal{E}_{x^i})^{s_i}$ $i=1,\ldots,n$ tales que:

$$\frac{\partial f_i}{\partial u}(0,x^i) = -\sum_{j=1}^{s_i} h_{i,j}(x^i) \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_j^i}(x^i) + h_{i+1} \circ \tilde{f}_i(x^i).$$

Luego esto motiva a definir al espacio tangente de la cascada D de la siguiente manera:

Sean $\widetilde{\Lambda D} := (\mathcal{E}_{x^1})^{s_1} \times \cdots \times (\mathcal{E}_{x^n})^{s_n}$, $\widetilde{\theta D} := (\mathcal{E}_{x^1})^{s_2} \times \cdots \times (\mathcal{E}_{x^{n-1}})^{s_n}$ y $\tilde{\alpha} : \widetilde{\Lambda D} \to \widetilde{\theta D}$ dada por:

$$\tilde{\alpha}(h_1, \ldots, h_n) = (-d\tilde{f}_1 \cdot h_1 + h_2 \circ \tilde{f}_1, \ldots, -d\tilde{f}_{n-1} \cdot h_{n-1} + h_n \circ \tilde{f}_{n-1}),$$

donde $d\tilde{f}_i \cdot h_i = \sum_{j=1}^{s_i} h_{i,j} \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_j^i}$.

<u>DEFINICIÓN</u>: El <u>espacio tangente a D</u> es $TD := \operatorname{Im} \tilde{\alpha}$.

La notación que se usa aquí está sugerida por la de Mather y es la que usa Dufour [D1].

En el caso en que $D=\{\tilde{f}_i\}_{i=1}^{n-1}$ sea una cascada estable, se tiene que si se considera un elemento cualquiera $(g_1,\dots,g_{n-1})\in\widetilde{\theta D}$ y $F=\{F_i\}_{i=1}^{n-1}$ el desdoblamiento a 1-parámetro de D dado por $F_i(u,x^i)=(u,\tilde{f}_i(x^i)+ug_i(x^i))$ que es trivial (pues D es estable), se tiene que existen $(h_1,\dots,h_n)\in\widehat{\Lambda D}$ tales que:

$$g_i(x^i)=\frac{\partial f_i}{\partial u}(0,x^i)=-d\tilde{f}_i(x^i)\cdot h_i(x^i)+h_{i+1}\cdot\tilde{f}_i(x^i),$$

esto es que : $\tilde{\alpha}(h_1,\dots,h_n)=(g_1,\dots,g_{n-1})$ y por tanto la función $\tilde{\alpha}$ es supravectiva, esto es $TD=\widetilde{\theta D}$.

<u>DEFINICIÓN</u>.- D es <u>infinitesimalmente estable</u> si $TD=\widetilde{\theta D}$.

Una pregunta que se presenta inmediatamente es qué relación hay entre infinitesimalmente estable y estable, esta cuestión se resuelve líneas abajo.

Dado un desdoblamiento a p-parámetros

$$F=\left\{F_i:(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_i},0)\to(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_{i+1}},0)\atop (u,x^i)\longmapsto(u,f_i(u,x^i))\right\}_{i=1}^{n-1}$$ de D, al elemento

$$\dot{F}_j=(\dot{F}_{1,j}(x^1),\dots,\dot{F}_{n-1,j}(x^{n-1})):=\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_j}(0,x^1),\dots,\frac{\partial f_{n-1}}{\partial u_j}(0,x^{n-1})\right)\in\widetilde{\theta D}$$

se le llamará, la velocidad inicial del desdoblamiento en la dirección u_j.

DEFINICIÓN.- Un desdoblamiento a p-parámetros F de la cascada D es un desdoblamiento infinitesimalmente versal si: $TD + \mathbb{R}\langle \dot{F}_1, \ldots, \dot{F}_p \rangle = \widehat{\theta D}$.

La parte central de la Teoría, radica en el:

TEOREMA DE DESDOBLAMIENTOS VERSALES:

Un desdoblamiento F de la cascada D es versal si y sólo si es infinitesimalmente versal.

TEOREMA DE DESDOBLAMIENTOS VERSALES.

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD:

Sea $F=\{F_i:(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_i},0)\to(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_{i+1}},0)\}_{i=1}^{n-1}$, $(u,x^i)\mapsto(u,f_i(u,x^i))$ un desdoblamiento versal de la cascada $D=\{\hat{f}_i\}_{i=1}^{n-1}$. Sea también $g=(g_1,\dots,g_{n-1})\in\widetilde{\theta D}$ y considérese el siguiente desdoblamiento a un parámetro $G=\{G_i\}_{i=1}^{n-1}$ de D, donde $G_i(t,x^i)=(t,\hat{f}_i(x^i)+t\,g_i(x^i))$.

El ser F versal implica la existencia de un germen de función diferenciable $h:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ de tal forma que G es isomorfo a h^*F. Luego existen $\Phi_i:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{s_i},0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{s_i},0)$, $(t,x^i)\mapsto(t,\phi_i(t,x^i))$ desdoblamientos de la identidad de $\mathbb{R}^{s_i}$, $i=1,\dots,n$ de tal manera que: $\Phi_{i+1}\circ G_i=h^*F_i\circ\Phi_i$ para $i=1,\dots,n-1$, de esto se tiene que: $\phi_{i+1}(t,\hat{f}_i(x^i)+t g_i(x^i))=f_i(h(t),\phi_i(t,x^i))$ $i=1,\dots,n-1$

Luego al derivar con respecto a t y evaluar en $t=0$, se tiene que:

$$\frac{\partial\phi_{i+1}}{\partial t}(0,\hat{f}_i(x^i))+g_i(x^i)=\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(0,x^i)\frac{\partial h_j}{\partial t}(0)+\sum_{j=1}^{s_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_j^i}(0,x^i)\frac{\partial\phi_{ij}}{\partial t}(0,x^i)$$

$$\therefore\ g_i(x^i)=\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial h_j}{\partial t}(0)\dot{F}_{ij}+d\hat{f}_i(x^i)\cdot\frac{\partial\phi_i}{\partial t}(0,x^i)-\frac{\partial\phi_{i+1}}{\partial t}(0,\hat{f}_i(x^i))$$

al hacer $\alpha_j := \frac{\partial h_j}{\partial t}(0)$ y $\eta_i(x^i) := -\frac{\partial \phi_i}{\partial t}(0, x^i)$, se tiene que:

$$g_i(x^i) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \dot{F}_{i,j} - d\hat{f}_i \cdot \eta_i + \eta_{i+1} \circ \tilde{f}_i$$

por tanto $g = (g_1, \ldots, g_{n-1}) \in \mathbb{R}\langle \dot{F}_1, \ldots, \dot{F}_p \rangle + \mathrm{Im}\,\tilde{\alpha}$

luego F es infinitesimalmente versal. ∎

La demostración de la suficiencia de este teorema nos ocupará la última parte del trabajo, antes de entrar en ésta veamos algunas observaciones.

El teorema muestra en el caso particular $p=0$, que una cascada D es estable si y sólo si es infinitesimalmente estable, pues si D es infinitesimalmente estable, por el Teorema es versal, luego todo desdoblamiento de D es isomorfo a la imagen recíproca de D, pero éste es constante, luego, los desdoblamientos de D son triviales y por tanto D es estable. La necesidad ya se ha hecho notar.

La <u>codimensión de D</u> es la dimensión como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de $\tilde{\theta D}/TD$, a este último espacio se le conoce como <u>espacio normal de D</u> y se denotará por ND.

Si D es de codimensión finita c y si $g_i = (g_i^1, \dots, g_i^{n-1}) \in \tilde{\theta D}$ $i=1,\dots,c$ son base del suplemento de TD en $\tilde{\theta D}$, entonces se tiene por el teorema que

$$F = \left\{ \begin{array}{rcl} F_i : (\mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^{s_i}; 0) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^{s_{i+1}}; 0) \\ (u, x^i) & \longmapsto & (u, \bar{f}_i(x^i) + \sum_{j=1}^{c} u_j g_j^i(x^i)) \end{array} \right\}_{i=1}^{n-1} \text{ es versal.}$$

<u>TEOREMA</u>. Todos los desdoblamientos versales a c-parámetros de una cascada D de codimensión c son equivalentes. Se llamaran a estos <u>desdoblamientos universales de D</u>.

Dem.

Sean $F = \{F_i\}_{i=1}^{n-1}$ y $G = \{G_i\}_{i=1}^{n-1}$ dos desdoblamientos versales a c-parámetros de D, entonces, existe $h : (\mathbb{R}^c; 0) \to (\mathbb{R}^c; 0)$ tal que G es isomorfo a h^*F. Se quiere ver que h es difeomorfismo local.

G isomorfo a h^*F implica que existen $\Phi_i : (\mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^{s_i}; 0) \to (\mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^{s_i}; 0)$ $i=1,\dots,n$ desdoblamientos de la identidad tales que:

$$G_i \circ \Phi_i = \Phi_{i+1} \circ h^* F_i \qquad i=1,\dots,n-1.$$

$$\Rightarrow \forall i \in \{1,\dots,n-1\}\ \forall j \in \{1,\dots,c\} \qquad \dot{G}_{i,j} = \sum_{r=1}^{c} \frac{\partial h_r(0)}{\partial u_j} \dot{F}_{i,r}$$

$$\Rightarrow \forall j \in \{1,\dots,c\} \quad \dot{G}_j = (\dot{G}_{1,j}, \dots, \dot{G}_{n-1,j}) =$$

$$= \left(\sum_{r=1}^{c} \frac{\partial h_r}{\partial u_j}(0) \dot{F}_{1,r}, \dots, \sum_{r=1}^{c} \frac{\partial h_r}{\partial u_j}(0) \dot{F}_{n-1,r} \right)$$

$$= \sum_{r=1}^{c} \frac{\partial h_r}{\partial u_j}(0) \left(\dot{F}_{1,r}, \dots, \dot{F}_{n-1,r} \right) = \sum_{r=1}^{c} \frac{\partial h_r}{\partial u_j} \dot{F}_r$$

Pero como $\{\dot{G}_j\}_{j=1}^{c}$ y $\{\dot{F}_j\}_{j=1}^{c}$ dan lugar a bases de ND al pasar al cociente, $\left(\frac{\partial h_r}{\partial u_j}(0)\right)$ es invertible y por tanto h es un difeomorfismo local. ∎

<u>TEOREMA</u>.- Todo desdoblamiento versal a p-parámetros $(p>c)$ de D es equivalente a un desdoblamiento constante a $(p-c)$-parámetros de un desdoblamiento universal de D.

Dem.

Sean F un desdoblamiento universal de D y G un desdoblamiento versal a p-parámetros de D, con $p>c$.

F universal $\Rightarrow \exists\, h : (\mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^c, 0)$ tal que G es isomorfo a h^*F. De manera análoga a la demostración del teorema anterior se puede ver que h es una sumersión, luego si K es el desdoblamiento constante a $(p-c)$-parámetros de F y si $\bar{h}:(\mathbb{R}^{p-c}\times\mathbb{R}^c,0)\to(\mathbb{R}^{p-c}\times\mathbb{R}^c,0)$ es el difeomorfismo dado por $\bar{h}(u,v)=(u,h(u,v))$ tenemos que G es isomorfo a $\bar{h}^*K$. ∎

Cabe aclarar que estos dos últimos teoremas usan del teorema de desdoblamientos versales sólo la parte que ya se ha demostrado.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE DESDOBLAMIENTOS VERSALES.

En toda esta parte D será la cascada $\{\tilde{f}_i : (\mathbb{R}^{s_i}, 0) \to (\mathbb{R}^{s_{i+1}}, 0)\}_{i=1}^{n-1}$, F el desdoblamiento a p-parámetros $\left\{ \begin{array}{rcl} F_i : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{s_i}, 0) & \to & (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{s_{i+1}}, 0) \\ (u, x^i) & \mapsto & (u, f_i(u, x^i)) \end{array} \right\}_{i=1}^{n-1}$,

$\begin{array}{rcl} \pi : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{s_n}, 0) & \to & (\mathbb{R}^p, 0) \\ (u, x^n) & \mapsto & u \end{array}$ y (F, π) la cascada

$$\{ (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{s_1}, 0) \xrightarrow{F_1} (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{s_2}, 0) \to \dots \xrightarrow{F_{n-1}} (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{s_n}, 0) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{R}^p, 0) \}.$$

La demostración que se presenta párrafos abajo del teorema de desdoblamientos versales es una demostración indirecta y consta de varios pasos que es conveniente empezar a aclarar, primeramente se establece un Lema donde está la presencia del Teorema de Preparación de Malgrange que hace a esta Teoría una Teoría no trivial y abusando un poco se llamará a éste, Lema de Preparación. Inmediatamente después se demuestra un caso particular del Teorema, cuando $p=0$, esto es, se verá que D es estable si y sólo si D es infinitesimalmente estable ; este caso bastará, junto con algunas otras observaciones, para verificar el Teorema más general. Los siguientes eslabones serán dos ; primero se observará que : F es infinitesimalmente versal si y sólo si (F, π) es infinitesimalmente estable, y después que : F es versal si y sólo si (F, π) es estable. Por último se podra concluir el Teorema que se ha venido presentando.

Cabe hacer una observación más, el Teorema de desdoblamientos versales se puede demostrar directamente haciendo uso del Lema de Preparación, que es la manera como lo presenta Dufour. La razón por la cual se ha elegido hacerlo de esta manera, es principalmente por cuestiones de claridad, pues aquí se presenta primero el caso particular $p=0$ que es a la vez el más interesante y cuya demostración es bastante más simple que la demostración del Teorema de versalidad, y el paso de la afirmación particular al Teorema se hace a través de dos resultados resultados cuyas demostraciones son sencillas en el sentido de que no requieren del Teorema de Preparación de Malgrange. Estos resultados que nos permiten establecer la relación son por sí mismos interesantes dentro la Teoría y esto ya había sido observado por Dufour [D2].

Recordemos que el espacio tangente TD se definia como la Imagen de $\tilde{\alpha}: \tilde{\Lambda D} \to \tilde{\theta D}$, donde $\tilde{\Lambda D} = (\mathcal{E}_{x^1})^{s_1} \times \cdots \times (\mathcal{E}_{x^n})^{s_n}$
$\tilde{\theta D} = (\mathcal{E}_{x^1})^{s_2} \times \cdots \times (\mathcal{E}_{x^{n-1}})^{s_n}$ y

$$\tilde{\alpha}(h_1, \ldots, h_n) = (-d\tilde{f}_1 \cdot h_1 + h_2 \circ \tilde{f}_1, \ldots, -d\tilde{f}_{n-1} \cdot h_{n-1} + h_n \circ \tilde{f}_{n-1}).$$

Sean ahora $\theta D := (\mathcal{E}_{u,x^1})^{s_2} \times \cdots \times (\mathcal{E}_{u,x^{n-1}})^{s_n}$, $g_1, \ldots, g_r \in \theta D$ donde $g_i = (g_i^1, \ldots, g_i^{n-1})$ y sean $g_{1,0}, \ldots, g_{r,0} \in \tilde{\theta D}$ dadas por

$$g_{i,0}^j(x^j) = g_i^j(0, x^j) \qquad i = 1, \ldots, r \qquad j = 1, \ldots, n-1.$$

Sea también $\alpha: (\mathcal{E}_{u,x^1})^{s_1} \times \cdots \times (\mathcal{E}_{u,x^n})^{s_n} \times (\mathcal{E}_u)^r \to \theta D$ dada por : $\alpha(h_1,h_2,\dots,h_n,\mu) = (-df_1\cdot h_1 + h_2\circ F_1 - \sum_{j=1}^{r}\mu_j g_j^1, \dots, -df_{n-1}\cdot h_{n-1} + h_n\circ F_{n-1} - \sum_{j=1}^{r}\mu_j g_j^{n-1})$.

Considérese la cascada de homomorfismos excelentes dada en el Lema de los Preliminares (pág. 13),

$A_{n+1} \xrightarrow{\varphi_n} A_n \longrightarrow \dots \xrightarrow{\varphi_1} A_1$.

Sean $M := \Theta D$, $N_{n+1} := (\mathcal{E}_u)^r$, $N_i := (\mathcal{E}_{u,x^i})^{s_i}$ $i=1,\dots,n$

$\alpha_{n+1} : N_{n+1} \longrightarrow M$ dada por $\alpha_{n+1}(\mu) = (-\sum_{j=1}^{r}\mu_j g_j^1, \dots, -\sum_{j=1}^{r}\mu_j g_j^{n-1})$

y $\alpha_i : N_i \longrightarrow M$ dada por

$$\alpha_i(h_i) = \begin{cases} (-df_1\cdot h_1, 0,\dots,0) & \text{si } i=1 \\ (0,\dots,0, h_i\circ F_{i-1}, -df_i\cdot h_i, 0,\dots,0) & \text{si } 1<i<n \\ (0,\dots,0, h_n\circ F_{n-1}) & \text{si } i=n. \end{cases}$$

Observemos algunas cosas:

(a) Los N_i son A_i-módulos de tipo finito para $i=1,\dots,n+1$.

(b) M también es un A_1-módulo de tipo finito.

(c) Las $\alpha_i : N_i \to M$ son $\varphi_1\circ\dots\circ\varphi_{i-1}$-homomorfismos $i=2,\dots,n+1$

y $\alpha_1 : N_1 \to M$ es un A_1-homomorfismo.

(d) $\alpha_{n+1}(N_{n+1}) = \mathcal{E}_u\langle g_1,\dots,g_r\rangle$

(e) $Im\, \alpha = \alpha_{n+1}(N_{n+1}) + \dots + \alpha_1(N_1)$.

LEMA DE PREPARACIÓN.- Son equivalentes:

(a) $\operatorname{Im}\tilde{\alpha} + \mathbb{R}\langle g_{1,0}, \dots, g_{r,0}\rangle = \widetilde{\theta D}$

(b) $\operatorname{Im}\alpha = \theta D$.

Dem. (b) $\Rightarrow$ (a) es clara.

"(a) $\Rightarrow$ (b)". Se probará primero que $\operatorname{Im}\alpha + m_u\theta D = \theta D$ ...... (1)

Sea $z = (z_1, \dots, z_{n-1}) \in \theta D$, entonces

$$z(0,x) := (z_1(0,x^1), \dots, z_{n-1}(0,x^{n-1})) \in \widetilde{\theta D} = \operatorname{Im}\tilde{\alpha} + \mathbb{R}\langle g_{1,0}, \dots, g_{r,0}\rangle$$

luego existen $(\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_n) \in \tilde{\Lambda} D$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\} \quad z_i(0,x^i) = -d\tilde{f}_i \cdot \tilde{h}_i + \tilde{h}_{i+1} \circ \tilde{f}_i + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j g_{j,0}^i .$$

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$ se definen $h_i \in (\mathcal{E}_{u,x^i})^{s_i}$ por $h_i(u,x^i) := \tilde{h}_i(x^i)$ y también se define $\mu \in (\mathcal{E}_u)^r$ por $\mu(u) = (-\lambda_1, \dots, \lambda_r)$.

Sea $y = (y_1, \dots, y_{n-1}) := \alpha(h_1, \dots, h_n, \mu)$. Luego $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$

$$y_i(0,x^i) = -(df_i \cdot h_i)(0,x^i) + h_{i+1} \circ F_i(0,x^i) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j g_j^i(0,x^i) =$$

$$= -d\tilde{f}_i \cdot \tilde{h}_i(x^i) + \tilde{h}_{i+1} \circ \tilde{f}_i(x^i) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j g_{j,0}^i(x^i) = z_i(0,x^i)$$

Luego $z_i(u,x^i) - y_i(u,x^i) \in m_u(\mathcal{E}_{u,x^i})^{s_i}$ y $\therefore$ $z - y \in m_u\theta D$

Por tanto $z = y + (z-y) \in \operatorname{Im}\alpha + m_u\theta D$ y esto establece (1). Ahora por el Teorema A (pág. 15) y (1) se tiene que $\operatorname{Im}\alpha = \theta D$. ∎

PROPOSICIÓN O.- D es estable si y sólo si D es infinitesimalmente estable.

Dem.

La necesidad ya se ha hecho notar (pág. 26 y 28) se verá ahora la suficiencia.

Sea $F=\{F_i\}_{i=1}^{n-1}$ un desdoblamiento cualquiera a p-parámetros de D. Que D sea infinitesimalmente estable quiere decir que $Im\hat{\alpha}=\hat{\theta D}$ pero por el Lema de Preparación también que $Im\,\alpha=\theta D$ (notese que aquí las $g_i=0$). Claramente $\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1},\dots,\frac{\partial f_{n-1}}{\partial u_1}\right)\in\theta D=Im\,\alpha$ luego existen $(h_1,\dots,h_n)\in(\mathcal{E}_{u,x'})^{s_1}\times\dots\times(\mathcal{E}_{u,x^n})^{s_n}$ tales que $\forall i\in\{1,\dots,n-1\}$ $\frac{\partial f_i}{\partial u_1}(u,x^i)=-df_i\cdot h_i(u,x^i)+h_{i+1}\circ F_i(u,x^i)$. Ahora para cada $i\in\{1,\dots,n\}$ sea $\bar{X}_i(u,x^i):=(1,0,\dots,0,h_i(u,x^i))$, que es un campo vectorial en $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_i}$, además estos cumplen que $DF_i\cdot\bar{X}_i=\bar{X}_{i+1}\circ F_i$, $i=1,\dots,n-1$. Entonces por el Lema de Reducción se tiene que existe $h:(\mathbb{R}^p,0)\to(\mathbb{R}^{p-1},0)$ retracción tal que F es isomorfo a $h^*F|_{u_1=0}$. Por inducción F es isomorfo a la imagen recíproca de $D=(F|_{u_1=\dots=u_p=0})$ por un germen de retracción $(\mathbb{R}^p,0)\to(\mathbb{R}^0,0)$, es decir al desdoblamiento constante, luego D es estable ∎

Las siguientes dos proposiciones que por su notación y longitud parecerán un poco complicadas, en realidad no lo son, las ideas de las demostraciones son bastante sencillas, pues para la primera, lo que se quiere probar es en sí, que dadas dos funciones $\underset{\sim}{\alpha}$ y α^* el que una sea suprayectiva garantice que la otra lo sea, y esto se logra analizando las relaciones que guardan las funciones $\underset{\sim}{\alpha}$ y α^*.

En la segunda proposición, la necesidad, consta de varios pasos sencillos que serian : (1) tomar un desdoblamiento cualquiera $(\tilde{F}, \tilde{\pi})$ de (F, π) y ver inmediatamente que este desdoblamiento es isomorfo a uno de la forma $(\mathbb{F}, \Pi)$, donde Π es el desdoblamiento constante de π. (2) usando el hecho de que F es versal, se ve que $(\mathbb{F}, \Pi)$ es isomorfo a (h^*F, Π) para alguna h. (3) por último se verá que (h^*F, Π) es isomorfo al desdoblamiento constante.

La suficiencia de esta segunda proposición se basa en unos cálculos sencillos.

Sean: $\alpha^*: (\mathcal{E}_{u,x^1})^{s_1}\times\cdots\times(\mathcal{E}_{u,x^n})^{s_n}\times(\mathcal{E}_u)^p \longrightarrow (\mathcal{E}_{u,x^1})^{s_2}\times\cdots\times(\mathcal{E}_{u,x^{n-1}})^{s_n}$ dada por

$\alpha^*(h_1,\dots,h_n,g) = (-df_{1_u}\cdot g - df_{1_x}\cdot h_1 + h_2\circ F_1, \dots, -df_{n-1_u}\cdot g - df_{n-1_x}\cdot h_{n-1} + h_n\circ F_{n-1})$

y $\underset{\sim}{\alpha}: (\mathcal{E}_{u,x})^p\times(\mathcal{E}_{u,x^1})^{s_1}\times\cdots\times(\mathcal{E}_{u,x^n})^p\times(\mathcal{E}_{u,x^n})^{s_n}\times(\mathcal{E}_u)^p \longrightarrow (\mathcal{E}_{u,x^1})^p\times(\mathcal{E}_{u,x^1})^{s_2}\times\cdots\times(\mathcal{E}_{u,x^{n-1}})^p\times(\mathcal{E}_{u,x^{n-1}})^{s_n}\times(\mathcal{E}_{u,x^n})^p$

dada por: $\underset{\sim}{\alpha}(k_1,h_1,k_2,h_2,\dots,k_n,h_n,g) = (-k_1 + k_2\circ F_1, -df_{1_u}\cdot k_1 -$

$-df_{1_x}\cdot h_1 + h_2\circ F_1, \dots, -k_i + k_{i+1}\circ F_i, -df_{i_u}\cdot k_i - df_{i_x}\cdot h_i + h_{i+1}\circ F_i, \dots, -k_n + g\circ\pi)$.

donde $df_{i_u}\cdot k_i = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial u_j}\cdot k_{i,j}$ y $df_{i_x}\cdot h_i = \sum_{j=1}^{s_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j^i}\cdot h_{i,j}$.

Recordemos que F es infinitesimalmente versal si $\operatorname{Im}\tilde{\alpha} + R\langle \dot{F}_1,\dots,\dot{F}_p\rangle = \tilde{\theta}D$, pero por el Lema de Preparación esto último es equivalente a que $\operatorname{Im}\alpha^* = \theta D$.

Y también la cascada (F,π) es infinitesimalmente estable si $\operatorname{Im}\underset{\sim}{\alpha} = (\mathcal{E}_{u,x^1})^p\times(\mathcal{E}_{u,x^1})^{s_2}\times\cdots\times(\mathcal{E}_{u,x^{n-1}})^p\times(\mathcal{E}_{u,x^{n-1}})^{s_n}\times(\mathcal{E}_{u,x^n})^p =: \underset{\sim}{\theta D}$.

<u>PROPOSICIÓN 1</u> .- F es infinitesimalmente versal si y sólo si (F,π) es infinitesimalmente estable.

Dem.

"$\Rightarrow$" Sea $(\psi_1,\phi_1,\dots,\psi_{n-1},\phi_{n-1},\psi_n)\in\underset{\sim}{\theta D}$, queremos encontrar

$(k_1, h_1, \ldots, k_n, h_n, g)$ tales que $\alpha(k_1, h_1, \ldots, k_n, h_n, g) = (\psi_1, \phi_1, \ldots, \psi_n)$ veamos que deben cumplir; la última igualdad nos dice que:

$$(-k_1 + k_2 \circ F_1, -df_{1u} \cdot k_1 - df_{1x} \cdot h_1 + h_2 \circ F_1, \ldots, -k_n + g \circ \pi) = (\psi_1, \phi_1, \ldots, \psi_n)$$

luego debe suceder primero que:

$$-k_n + g \circ \pi = \psi_n \quad \text{y} \quad -k_i + k_{i+1} \circ F_i = \psi_i \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

lo cual implica que:

$$\left.\begin{aligned} k_n &= g \circ \pi - \psi_n \\ k_i &= g \circ \pi \circ F_{n-1} \circ \cdots \circ F_i - \psi_n \circ F_{n-1} \circ \cdots \circ F_i - \cdots - \psi_{i+1} \circ F_i - \psi_i \\ &= g - \psi_n \circ F_{n-1} \circ \cdots \circ F_i - \cdots - \psi_{i+1} \circ F_i - \psi_i \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (1)$$

Además debe tenerse que:

$$-df_{iu} \cdot k_i - df_{ix} \cdot h_i + h_{i+1} \circ F_i = \phi_i \quad , \text{ para } i = 1, \ldots, n-1.$$

esto implica que: $-df_{iu}(g - \psi_n \circ F_{n-1} \circ \cdots \circ F_i - \cdots - \psi_{i+1} \circ F_i - \psi_i) - df_{ix} \cdot h_i +$

$$+ h_{i+1} \circ F_i = \phi_i$$

luego: $-df_{iu} \cdot g - df_{ix} \cdot h_i + h_{i+1} \circ F_i = \phi_i - df_{iu}(\psi_n \circ F_{n-1} \circ \cdots \circ F_i + \cdots + \psi_{i+1} \circ F_i + \psi_i)$.

Pero como $\operatorname{Im} \alpha^* = \Theta D$, es claro que siempre se pueden elegir $(h_1, \ldots, h_n, g)$ de tal manera que cumplan la última ecuación. Por tanto al tomar ahora estas funciones

$h_1,\dots,h_n, g$ y las $k_1,\dots,k_n$ definidas como en (1), se tiene inmediatamente que : $\underset{\sim}{\alpha}(k_1,h_1,\dots,k_n,h_n,g) = (\psi_1,\phi_1,\dots,\psi_{n-1},\phi_{n-1},\psi_n)$

Esto es $Im\, \underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{\theta D}$.

"$\Leftarrow$" Sea $(\phi_1,\dots,\phi_{n-1}) \in \theta D$, entonces $(0,\phi_1,0,\dots,\phi_{n-1},0) \in \underset{\sim}{\theta D}$ como $\underset{\sim}{\alpha}$ es supravectiva existen $(k_1,h_1,\dots,k_n,h_n,g)$ tales que $\underset{\sim}{\alpha}(k_1,h_1,\dots,k_n,h_n,g) = (0,\phi_1,0,\dots,\phi_{n-1},0)$. Esto implica que $\forall i \in \{1,\dots,n-1\}$ $\phi_i = -df_{iu}\cdot k_i - df_{ix}\cdot h_i + h_{i+1}\circ F_i$ y $-k_i + k_{i+1}\circ F_i = 0$ y además que $-k_n + g\circ\pi = 0$. Se puede ver fácilmente que:

$$k_n(u,x^n) = k_{n-1}(u,x^{n-1}) = \dots = k_1(u,x^1) = g\circ\pi(u,x^n) = g(u).$$

Por tanto $\forall i \in \{1,\dots,n-1\}$ $\phi_i = -df_{iu}\cdot g - df_{ix}\cdot h_i + h_{i+1}\circ F_i$.

Luego se tiene que $\alpha^*(h_1,h_2,\dots,h_n,g) = (\phi_1,\dots,\phi_{n-1})$ y por tanto $Im\,\alpha^* = \theta D$. ∎

<u>PROPOSICIÓN 2.</u>- F es versal si y sólo si (F,π) es estable.

Dem.

"$\Rightarrow$" Sea $(\tilde{F},\tilde{\pi})$ un desdoblamiento a q-parámetros de (F,π). Si $\tilde{F}_i(v,u,x^i) = (v,\tilde{f}_i^1(v,u,x^i),\tilde{f}_i^2(v,u,x^i))$ $i=1,\dots,n-1$ y

$\tilde{\pi}(v,u,x^n) = (v, g(v,u,x^n))$, sean :

$$\Phi_{n+1}:(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p,0)\to(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p,0), \quad (v,u)\mapsto(v,u) \quad , \quad \Phi_n:(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_n},0)\to(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_n},0), \quad (v,u,x^n)\mapsto(v,g(v,u,x^n),x^n)$$

y $\Phi_i:(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_i},0)\longrightarrow(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_i},0)$, $(v,u,x^i)\longmapsto(v,\phi_i(v,u,x^i),x^i)$ para $i=1,\ldots,n-1$.

donde $\phi_i(v,u,x^i) := \phi_{i+1}(v,\tilde{f}_i^1(v,u,x^i),\tilde{f}_i^2(v,u,x^i))$.

Como $g(0,u,x^i)=\tilde{f}_i^1(0,u,x^i)=u$, se tiene que los gérmenes Φ_i son desdoblamientos de la identidad en $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_i}$ para $i=1,\ldots,n$

Consideremos también la siguiente cascada : $\mathbb{F}=\{\mathbb{F}_i\}_{i=1}^{n-1}$

donde $\mathbb{F}_i:(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_i},0)\longrightarrow(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_{i+1}},0)$, $(v,u,x^i)\longmapsto(v,u,\mathbb{f}_i(v,u,x^i))$, donde $\mathbb{f}_i:=\tilde{f}_i^2\circ\Phi_i^{-1}$.

Es claro por la construcción que : $\Phi_{i+1}\circ\tilde{F}_i=\mathbb{F}_i\circ\Phi_i$ para $i=1,\ldots,n-1$

y $\Phi_{n+1}\circ\tilde{\pi}=\Pi\circ\Phi_n$ donde $\Pi:(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_n},0)\to(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p,0)$, $(v,u,x^n)\longmapsto(v,u)$ es el desdoblamiento constante de π.

Luego el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_1},0) \arrow[r, "\tilde{F}_1"] \arrow[d, "\Phi_1"] & (\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_2},0) \arrow[r, "\tilde{F}_2"] \arrow[d, "\Phi_2"] & \cdots \arrow[r, "\tilde{F}_{n-1}"] & (\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_n},0) \arrow[r, "\tilde{\pi}"] \arrow[d, "\Phi_n"] & (\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p,0) \arrow[d, "\Phi_{n+1}"] \\
(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_1},0) \arrow[r, "\mathbb{F}_1"] & (\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_2},0) \arrow[r, "\mathbb{F}_2"] & \cdots \arrow[r, "\mathbb{F}_{n-1}"] & (\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_n},0) \arrow[r, "\Pi"] & (\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p,0)
\end{tikzcd}$$

Esto es las cascadas $(\tilde{F},\tilde{\pi})$ y $(\mathbb{F},\Pi)$ son isomorfas como desdoblamientos de (F,π).

Ahora bien como F es un desdoblamiento versal de D, se tiene que $\mathbb{F}$ es isomorfo a h^*F para alguna retracción $h:(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$. Pero es entonces claro que también $(\mathbb{F},\Pi)$ y (h^*F,Π) son isomorfos como desdoblamientos de (F,π).

Definiendo $\Psi_i:\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_i},0) & \to & (\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_i},0)\\ (v,u,x^i) & \mapsto & (v,h(v,u),x^i)\end{array}$ $\quad i=1,\dots,n$

y $\Psi_{n+1}:\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p,0) & \to & (\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p,0)\\ (v,u) & \mapsto & (v,h(v,u))\end{array}$, se tiene que estos son desdoblamientos a q-parámetros de la identidad correspondiente y hacen que el siguiente diagrama sea conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_1},0) \arrow[r, "h^*F_1"] \arrow[d, "\Psi_1"] & (\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_2},0) \arrow[r, "h^*F_2"] \arrow[d, "\Psi_2"] & \cdots \arrow[r, "h^*F_{n-1}"] & (\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_n},0) \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "\Psi_n"] & (\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p,0) \arrow[d, "\Psi_{n+1}"] \\
(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_1},0) \arrow[r, "\Sigma F_1"] & (\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_2},0) \arrow[r, "\Sigma F_2"] & \cdots \arrow[r, "\Sigma F_{n-1}"] & (\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_n},0) \arrow[r, "\Pi"] & (\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p,0)
\end{tikzcd}$$

Donde $\Sigma F=\{\Sigma F_i\}_{i=1}^{n-1}$ es el desdoblamiento constante a q-parámetros de F. Luego (h^*F,Π) y $(\Sigma F,\Pi)$ son isomorfos, luego resumiendo tenemos que $(\tilde{F},\tilde{\pi})$ es isomorfo a $(\Sigma F,\Pi)$ y por tanto (F,π) es estable.

"$\Leftarrow$" Sea $G=\{G_i\}_{i=1}^{n-1}$ un desdoblamiento a q-parámetros de D. Supóngase que es de la forma $G_i(v,x^i)=(v,\tilde{f}_i(x^i)+g_i(v,x^i))$ con $g_i(0,x^i)=0$. Sea $H=\{H_i\}_{i=1}^{n-1}$ el desdoblamiento a $(p+q)$-parámetros de D suma de F y G, es decir

$$H_i:(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_i};0)\to(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_{i+1}};0)$$
$$(v,u,x^i)\longmapsto(v,u,f_i(u,x^i)+g(v,x^i))$$

que es también un desdoblamiento a q-parámetros de F

Como (F,π) es estable, (H,Π) es un desdoblamiento trivial existen

$$\tilde{\Phi}_i:(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_i};0)\to(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_i};0)$$
$$(v,u,x^i)\longmapsto(v,\phi_i^1(v,u,x^i),\phi_i^2(v,u,x^i))$$

desdoblamientos de la identidad de $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_i}$ para $i=1,\dots,n$ y

$$K:(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p;0)\to(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p;0)$$
$$(v,u)\longmapsto(v,k(v,u))$$

desdoblamiento de la identidad de $\mathbb{R}^p$, tales que: $\Sigma F_i\circ\tilde{\Phi}_i=\tilde{\Phi}_{i+1}\circ H_i$ para $i=1,\dots,n-1$ ...... $(*)$

y $\Pi\circ\tilde{\Phi}_n=K\circ\Pi$ esto es que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_1};0) \arrow[r, "H_1"] \arrow[d, "\tilde{\Phi}_1"] & (\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_2};0) \arrow[r, "H_2"] \arrow[d, "\tilde{\Phi}_2"] & \cdots \arrow[r, "H_{n-1}"] & (\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_n};0) \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "\tilde{\Phi}_n"] & (\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p;0) \arrow[d, "K"] \\
(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_1};0) \arrow[r, "\Sigma F_1"] & (\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_2};0) \arrow[r, "\Sigma F_2"] & \cdots \arrow[r, "\Sigma F_{n-1}"] & (\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{s_n};0) \arrow[r, "\Pi"] & (\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p;0)
\end{tikzcd}$$

la conmutatividad de este diagrama implica que:

$$\phi_1^1(v,u,x^1)=\phi_2^1(v,u,x^2)=\dots=\phi_n^1(v,u,x^n)=k(v,u).$$

Sean ahora $h : (\mathbb{R}^q, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ dada por

$h(v) = k(v,0) = \phi_1'(v,0,x^1) = \dots = \phi_n'(v,0,x^n)$ y $\Phi_i : (\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{s_i}, 0) \to (\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{s_i}, 0)$
$(v, x^i) \mapsto (v, \phi_i^2(v,0,x^i))$

para $i = 1, \dots, n$, luego de las ecuaciones (*) se tiene que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{s_1}, 0) \arrow[r, "G_1"] \arrow[d, "\Phi_1"] & (\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{s_2}, 0) \arrow[r, "G_2"] \arrow[d, "\Phi_2"] & \cdots \arrow[r, "G_{n-1}"] & (\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{s_n}, 0) \arrow[d, "\Phi_n"] \\
(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{s_1}, 0) \arrow[r, "h^*F_1"] & (\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{s_2}, 0) \arrow[r, "h^*F_2"] & \cdots \arrow[r, "h^*F_{n-1}"] & (\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{s_n}, 0)
\end{tikzcd}$$

luego G es isomorfo a h^*F y por tanto F es versal. ∎

Con toda la maquinaria desarrollada hasta aquí, resulta evidente cual deberá ser la demostración del:

<u>TEOREMA DE DESDOBLAMIENTOS VERSALES</u>:-

Un desdoblamiento F de la cascada D es versal si y sólo si es infinitesimalmente versal.

Dem.

F es versal $\Leftrightarrow$ (F, π) es estable (Proposición 2)

(F, π) es estable $\Leftrightarrow$ (F, π) es infinitesimalmente estable (Proposición 0).

(F, π) es infinitesimalmente estable $\Leftarrow$ F es infinitesimalmente versal (Proposición 1)

■

Resta hacer una última observación, la manera en que se ha desarrollado la Teoría, permite esclarecer en qué partes es necesario utilizar el Teorema de Preparación de Malgrange, primeramente hay que observar que la parte "fácil" del Teorema de desdoblamientos, esto es la necesidad no requiere de dicho Teorema, así mismo en lo absoluto las Proposiciones* 1 y 2, éste solo es usado en el Lema de Preparación que a su vez es requerido en su parte difícil para la suficiencia de la proposición 0. Luego se ha tratado de que quede bien claro en qué partes es necesario el tan socorrido Teorema de Preparación de Malgrange.

*Cuando se demostro la Proposición 1, se hizo referencia al lema de Preparación, pero en su parte fácil. ((b) ⇒ (a)).

BIBLIOGRAFÍA.

[B] Bulajich, Radmila. Space-Time stability. M.Sc. Thesis Warwick (1977).

[D1] Dufour, Jean P. Déploiements de cascades d'applications différentiables. Thése 3e cycle. Montpellier (1975).

[D2] Dufour, Jean P. Diagrammes d'applications différentiables. Thése de docteur d'etat. Lanquedoc (1979)

[M1] Martinet, Jean. Déploiments versels des applications différentiables et classification des applications stables.

Singularités d'applications différentiables Plan sur Bex. (1975). Lecture Notes in Mathematics 535.

[M2] Martinet, Jean. Singularités des functions et applications différentiables.

Lecture Notes P.U.C. Rio de Janeiro (1974)

[Ma] Mather, John. Stability of C^∞ mappings II: Infinitesimal stability implies stability.
Ann. of Math. 89 n°2 (1969).

[T] Tougeron, Jean C. Idéaux de fonctions différentiables.
Springer-Verlag 72. Berlin (1972).

[W] Wassermann, Gordon. Stability of unfoldings in space and time.
Acta Math. 135 (1975).