



Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

SUPERFICIES ORIENTABLES ASOCIADAS A UN NUDO.

TESIS PROFESIONAL

Que para obtener el título de

MATEMÁTICO

presenta

ALEJANDRO ADEM DIAZ DE LEON

(Becario del Instituto de Matemáticas)

Bajo la Dirección del Dr. Guillermo Torres Díaz.

México, D. F.

1962



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

INDICE

	Paq.
Introducción	(i)
Capítulo I: Algunas Generalidades sobre Nudos	1
Capítulo II: La Presentación Superior del Grupo del nudo	7
Capítulo III: La Matriz y el Polinomio de Alexander	21
Capítulo IV: Superficies de Seifert	38
Capítulo V: Caracterización del Polinomio de Alexander	50
Capítulo VI: Espacios Cubrientes de $S^1 - K$	73
Capítulo VII: Los Invariantes Abelianos	85
Apéndice	103
Bibliografía	106

INTRODUCCION.

En este trabajo se desarrollan los principales invariantes aplicables a los nudos clásicos.

En el primer capítulo se establecen condiciones técnicas respecto a la colocación de un nudo que permiten calcular una presentación finita del grupo fundamental de su complemento en el capítulo II. En el capítulo III se estudian invariantes para distinguir presentaciones finitas de grupos utilizando el Cálculo Libre de Fox, que al ser particularizados a grupos de nudo dan lugar a la Matriz y al Polinomio de Alexander.

El capítulo IV ilustra la construcción dada por Seifert de una superficie compacta orientable M cuya frontera es un nudo a partir de una proyección regular de éste. Además se define la matriz asociada a M inducida por el número de enlace y los generadores de $H_1(M)$. Esto es utilizado en el capítulo V para caracterizar al Polinomio de Alexander.

En el capítulo siguiente se da la construcción explícita de los espacios cubrientes cíclicos de $S^1 - K$. Finalmente, en el capítulo VII se estudia la homología de estos espacios y se muestra que la Matriz de Alexander es una matriz de presentación de cierto módulo sobre el anillo del grupo del nudo.

Este trabajo no pretende ser original; simplemente es una interpretación personal de resultados bien establecidos que puede facilitar su estudio y comprensión.

1. ALGUNAS GENERALIDADES SOBRE NUDOS

1.1 DEFINICION:

Un subespacio $K \subset R^3$ es un nudo si existe un homeomorfismo $h : S^1 \rightarrow K$.

Topológicamente todos los nudos son iguales: circunferencias encajadas en R^3 . Sin embargo, estos encajes varían enormemente y son el factor que los distingue. En otras palabras, los problemas en teoría de nudos son problemas de colocación que pertenecen al estudio de las variedades tridimensionales.

Intuitivamente dos nudos son equivalentes si podemos llevar a uno en el otro mediante movimientos continuos que excluyen cortar el nudo y volverlo a pegar. Esto se formaliza de la siguiente manera:

1.2 DEFINICION

Diremos que dos nudos K_1, K_2 en R^3 son equivalentes si existe un homeomorfismo de parejas.

$$\psi : (R^3, K_1) \longrightarrow (R^3, K_2).$$

Evidentemente esto define una relación de equivalencia. Diremos que dos nudos son del mismo tipo si pertenecen a la misma clase de equivalencia.

Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ un nudo que consta de la unión de un número finito de segmentos de recta (aristas) unidos mediante un número finito de puntos (vértices). A un nudo de esta forma lo llamaremos un nudo-polígono. Por un nudo poligonal entenderemos un nudo que es del mismo tipo que un nudo-polígono. La teoría que desarrollaremos será aplicable exclusivamente a nudos poligonales.

Para estudiar un nudo, partimos de una proyección sobre un plano. Es decir, consideramos su imagen bajo una proyección lineal $P : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sobre el plano ortogonal que pasa por el origen. Si $p \in P(K)$, definimos la multiplicidad de p como la cardinalidad de $P^{-1}(p) \cap K$. A un punto de multiplicidad dos lo llamaremos punto doble.

1.3 DEFINICION:

Una proyección $P : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de un nudo-polígono K es llamada regular si cumple lo siguiente:

- (i) la multiplicidad de cualquier $p \in P(K)$ es 1 ó 2 y sólo hay un número finito de puntos dobles.
- (ii) ningún punto doble es la imagen de algún vértice de K .

Obtenemos el siguiente

1.4 TEOREMA:

Todo nudo poligonal es equivalente a un nudo-polígono que posee una proyección regular.

Demostración: (ver [C-F])

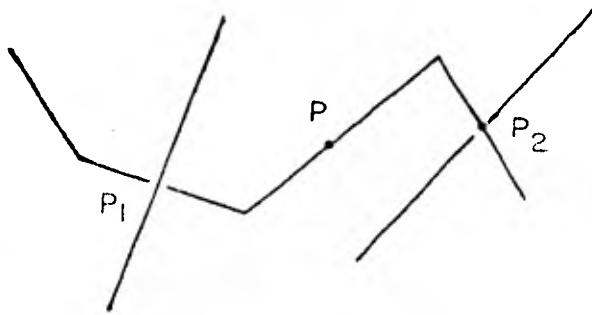
Podemos suponer sin pérdida de generalidad que K es un nudo-polígono. Dos rectas paralelas determinan la misma proyección lineal en R^3 . Sea RP^2 el plano proyectivo al infinito. Entonces rectas paralelas determinan el mismo punto de intersección en RP^2 . Por lo tanto esto establece una biyección entre las familias de rectas paralelas y RP^2 , y cada familia corresponde a una proyección lineal.

Sea T_1 el conjunto de rectas que pasan por un vértice de K y una arista de K . Bajo la biyección corresponden a un número finito de segmentos en RP^2 . Sea \mathcal{L} el conjunto de rectas en R^3 . Si $\ell \in \mathcal{L} - T_1$, entonces la proyección inducida P_ℓ cumple la condición (ii) de la definición 1.3 y sólo puede poseer un número finito de puntos múltiples (con multiplicidad finita). Además, si dos aristas de K pertenecen a rectas paralelas no pueden dar lugar a puntos de multiplicidad tres (considerando otra arista) bajo P_ℓ .

Consideremos ahora tres aristas contenidas en rectas mutuamente oblicuas. El conjunto de rectas en R^3 que cortan a las tres constituye una cuádriga reglada que interseca a RP^2 en una cónica. Sea T_2 la unión de estas colecciones

de rectas correspondientes a las ternas de aristas mutuamente oblicuas. La imagen de T_i bajo la biyección es una unión finita de cónicas. Evidentemente RP^2 no se puede expresar como la unión finita de segmentos y cónicas, por lo cual forzosamente $\mathcal{L} = (T_i \cup T_j) \neq \emptyset$. Si i pertenece a este conjunto, P_i es una proyección regular de K .

Sea K un nudo-polígono no trivial* en posición regular. Podemos escoger un punto $p \in K$ que no sea doble y que cumpla con la siguiente propiedad: se encuentra entre dos puntos p_1 y p_2 en K tal que al ser proyectados caen sobre el punto inferior y superior respectivamente que corresponden a puntos dobles en la proyección.



Es evidente que esto siempre puede lograrse. Ahora recorremos K en el sentido pp_2 hasta aproximarnos a un cruce por de-

* El nudo trivial es la circunferencia desanudada.

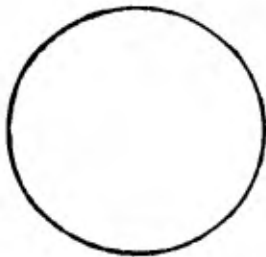
bajo del nudo. Al arco así obtenido lo llamaremos un paso superior. Análogamente recorreremos K en el sentido pp_1 hasta aproximarnos a un cruce por encima del nudo; a este arco lo llamaremos un paso inferior.

Con este procedimiento podemos cubrir a K con dos familias ajenas de arcos de la misma cardinalidad y que se alternan al recorrer el nudo. Este hecho será usado para calcular el grupo fundamental de $R^1 - K$ en el capítulo II.

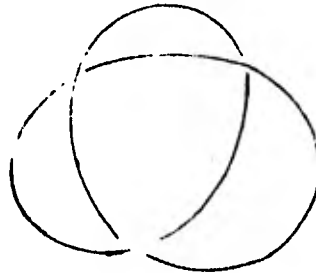
Es evidente que podemos tomar una curva suave en lugar de un polígono sin alterar la proyección regular de éste, por lo cual las figuras consideradas serán siempre lisas.

Ejemplos:

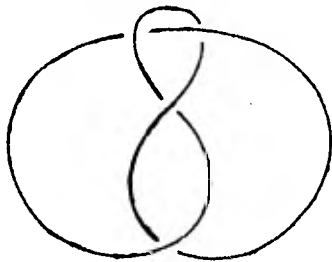
(i) Nudo trivial



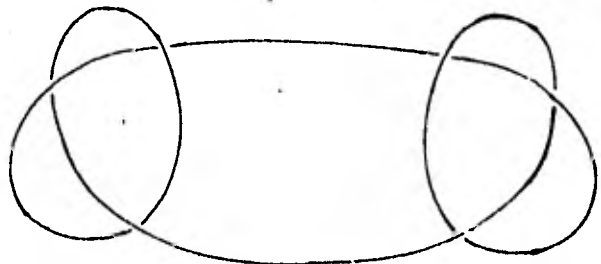
(ii) Trébol



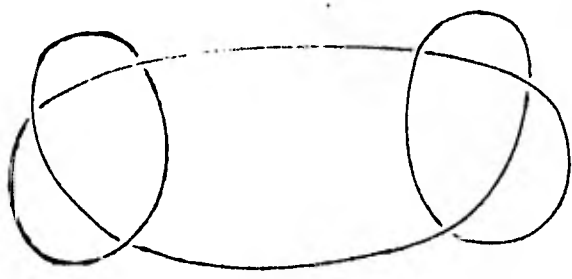
(iii) Nudo del 8



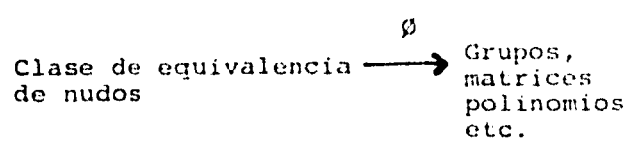
(iv) Nudo cuadrado



(v)



Un invariante de tipo de nudo es una función entre las clases de equivalencia de nudos y ciertos objetos matemáticos



i.e. si $\phi([K]) \neq \phi([K'])$, entonces $[K] \neq [K']$ y $K \neq K'$.

Por lo tanto estos invariantes nos permiten distinguir tipos de nudo. Por ejemplo $\pi_1(R^3 - K)$ es un invariante, ya que si $K \sim K'$, entonces $R^3 - K \cong R^3 - K'$ por lo cual $\pi_1(R^3 - K) \cong \pi_1(R^3 - K')$

En los siguientes capítulos desarrollaremos los principales invariantes de tipo de nudo aplicables a nudos poligonales.

II. LA PRESENTACION SUPERIOR DEL GRUPO DEL NUDO.

Dado un nudo poligonal en R^3 , hemos visto que es equivalente a un nudo poligonal K en posición regular, i.e. existe un plano en R^3 tal que la proyección de K sobre él cumple lo siguiente:

- (i) Cada punto de la proyección proviene de a lo más dos punto en K .
- (ii) Posee un número finito de estos puntos dobles.
- (iii) Ningún punto doble proviene de un vértice de K .

Utilizando una proyección de este tipo, calcularemos el grupo fundamental del complemento de K en R^3 . Nuestra herramienta principal será el Teorema de Seifert-Van Kampen (ver apéndice). A continuación demostraremos dos consecuencias de este teorema que necesitaremos.

2.1 LEMA:

Sean U, V abiertos arco-conectables tales que $X = U \cup V$ y $U \cap V$ es arco-conectable. Sea i_*, j_* los homomorfismos inducidos por las inclusiones:

$$i_* : \pi_1(U) \longrightarrow \pi_1(X) : j_* : \pi_1(U \cap V) \longrightarrow \pi_1(U)$$

Supongamos que V es simplemente conexo.

Entonces i_* es un epimorfismo y su kernel es el mínimo subgrupo normal que contiene a $\text{im } j_*$.

Demostración:

La suprayectividad de j_* es inmediata de Seifert-Van Kampen. Por otro lado es claro que $\text{im } j_* \subseteq \ker i_*$.

Ahora sea K el mínimo subgrupo normal de $\pi_1(U)$ que

que contiene a $\text{im } j_*$. Entonces está bien definido el epimorfismo inducido

$$\pi_1(U)/K \xrightarrow{\bar{i}_*} \pi_1(X) \quad \bar{i}_*(\bar{x}) = i_*x$$

Tenemos además el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & j_* & \rightarrow & \pi_1(U) & \xrightarrow{p} \\ \pi_1(U \cup V) & & \xrightarrow{1} & & \rightarrow \pi_1(U)/K \\ & 1 & \rightarrow & \pi_1(V) & \xrightarrow{1} \end{array}$$

Por Seifert-Van Kampen, existe un homomorfismo

$$h: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(U)/K \quad \text{tal que } h \circ i_* = p$$

entonces $h \circ \bar{i}_*(\bar{x}) = h i_*(x) = \bar{x}$

Por lo tanto \bar{i}_* es un isomorfismo, de donde se sigue que

$$K = \ker i_*$$

Q.E.D.

Podemos considerar a la 3-esfera S^3 como la compactificación unipuntual de \mathbb{R}^3 :

$$S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$$

El siguiente lema muestra que podemos tomar el complemento del nudo en $\mathbb{R}^3 \cup S^3$ sin afectar su primer grupo de homotopía.

2.2 LEMA:

Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ un nudo poligonal. Entonces existe un isomorfismo:

$$\pi_1(S^3 - K) \cong \pi_1(R^3 - K)$$

Demostración:

Sea H una bola cerrada tal que $K \subset H$.

Tomemos $U = R^3 - K$, $V = (R^3 - H) \cup H$

Entonces

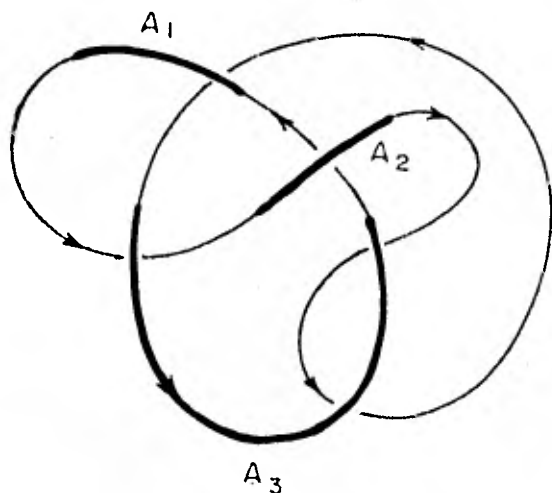
$$S^3 - K = U \cup V, \quad U \cap V = R^3 - H$$

Ahora es claro que V , $U \cap V$ son simplemente conexos.

Aplicando el lema anterior, obtenemos el isomorfismo

$$\pi_1(R^3 - K) \cong \pi_1(S^3 - K). \quad \text{Q.E.D.}$$

Consideremos una proyección regular de un nudo poligonal $K \subset R^3$.



Orientemos el nudo.

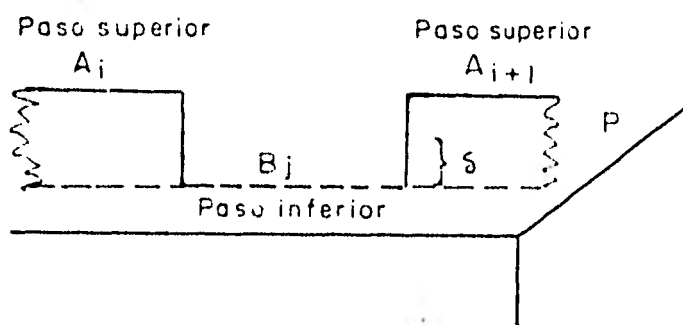
En el capítulo anterior observamos que podemos dividir al nudo en dos familias ajenas de segmentos.

- (a) Los pasos superiores.
- (b) Los pasos inferiores.

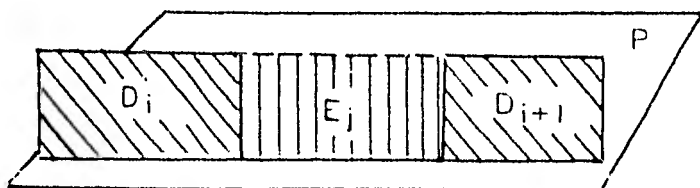
Denotemos por A_1, \dots, A_n a los pasos superiores y por

B_1, \dots, B_n a los pasos inferiores de la proyección. Sin perder generalidad podemos suponer que los pasos inferiores yacen completamente sobre nuestro plano de proyección

$$P = \{(x, y, z) \mid z = 0\}$$



Tomaremos como punto base a un punto p sobre P unido al plano mediante un segmento \bar{r} que no corta a K . Sea $\delta > 0$ tal que en el plano $P' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \delta\}$ no yazcan los pasos superiores. Podemos tomar rectángulos cerrados sobre cada paso inferior y por debajo de cada paso superior de la siguiente forma:



Es claro que podemos lograr que los discos correspondientes a cada tipo de arco sean disjuntos entre si.

Denotemos por D_1, \dots, D_n a los discos correspondientes a los pasos superiores y por E_1, \dots, E_n a los pasos inferiores.

Sea: $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\} - K$

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < \delta\} - \bigcup_1^n E_i \cup \Gamma'$$

(Γ' vecindad tubular de Γ)

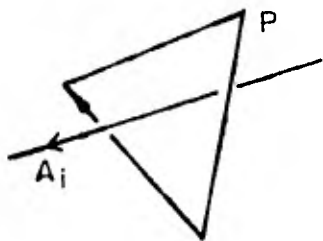
Claramente U, V son abiertos arco-conectables al igual que $U \cap V$. Ahora es evidente que V es simplemente conexo por lo que podemos aplicar el lema 2.1, ya que $\mathbb{R}^3 - K = U \cup V$.

$$\pi_1(U, p) \xrightarrow{j_*} \pi_1(\mathbb{R}^3 - K, p)$$

es un epimorfismo y su kernel es el mínimo subgrupo normal que contiene a $\text{im } j_*$; $j_* : \pi_1(U \cap V) \rightarrow \pi_1(U)$.

Procederemos a calcular $\pi_1(U)$ y $\pi_1(U \cap V)$

Colocamos una flecha por debajo de cada A_i tal que lo corte de izquierda a derecha, y lo completamos para formar un lazo con base en p .



Llamamos x_i al lazo así obtenido. Es claro que podemos lograr que sean disjuntos.

Engrosamos cada D_i para obtener un abierto y le unimos una

vecindad tubular abierta del lazo x_1 , resultando así n abiertos disjuntos W_1, \dots, W_n .

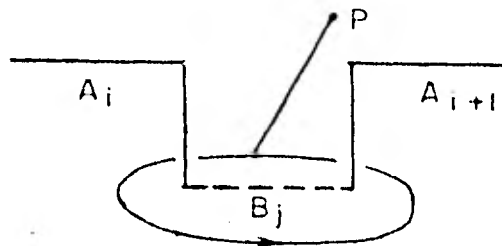
$$\text{Sea } H = U - \bigcup_{i=1}^n D_i, \quad G = \bigcup_{i=1}^n W_i$$

Entonces H , G , $H \cap G$ son abiertos arco-conectables tales que $U = H \cup G$, y además H , $H \cap G$ son simplemente conexos.

Aplicando el lema 2.1, $\pi_1(U) \cong \pi_1(G)$

Ahora G tiene el mismo tipo de homotopía que una cuña de n circunferencias, por lo que $\pi_1(G)$ es el grupo libre sobre los n generadores: $[x_1], [x_2], \dots, [x_n]$. Como el isomorfismo está dado por la inclusión, entonces lo mismo es cierto para $\pi_1(U)$.

Por otro lado $U \cap V$ tiene el tipo de homotopía de un plano con n hoyos, por lo que $\pi_1(U \cap V)$ es un grupo libre en n generadores, cada uno de los cuales tiene como representante a un lazo y_i orientado contra las manecillas del reloj alrededor del paso inferior B_i y unido a p mediante un segmento.



Entonces por el primer teorema de isomorfismo, podemos obtener una presentación de $\pi_1(R^3 - K)$ con generadores

$[x_1], \dots, [x_n]$ y como relaciones las imágenes de $[y_1], \dots, [y_n]$ bajo i_* .

Pero es claro que obtenemos

$$i_*(y_j) \sim (x_{i_1})^{\epsilon_{i_1}} \dots (x_{i_k})^{\epsilon_{i_k}}$$

donde los x_j que aparecen son los que pasan por arriba del lazo y_j ; el orden está determinado por la orientación de y_j y el exponente ϵ_{i_k} es +1 si cruza a Λ_{i_k} de izquierda a derecha, y -1 en el otro caso. Por lo tanto

$$i_*[y_j] = [x_{i_1}]^{\epsilon_{i_1}} \dots [x_{i_k}]^{\epsilon_{i_k}}$$

Además observamos que $i_*[y_j]$ es de la forma

$$[x_i]^{\epsilon_i} \alpha [x_{i+1}]^{-\epsilon_i} \alpha^{-1}$$

donde α es un producto de $[x_k]$'s.

Por lo tanto si llamamos r_j a $i_*([y_j])$ entonces obtenemos la presentación finita

$$([x_1], \dots, [x_n] : r_1, \dots, r_n) \text{ de } \pi_1(R^3 - K, p).$$

2.3 PROPOSICION:

r_n es redundante.

Demostración:

Sea $U_1 = U \cup \{*\}$, $U_2 = U_1 \cup M - K$

$$V^1 = V - \bigcup_1^{n-1} E_i - M \cup \{*\}$$

donde M es un rectángulo con tapas en P y P' respectivamente, que rodea al paso inferior B_n y que no corta a K en ningún otro lado.

Entonces $S^3 - K = U_2 \cup V^1$. Es claro que si aplicamos Seifert Van Kampen a U_1 y V^1 , obtenemos lo mismo, sólo que con relaciones r_1, \dots, r_{n-1} . Pero al unir $M - K$ obtenemos:

$$(M - K) \cap (U_1 \cup V^1) = S^3 - L \quad L \text{ un segmento}$$

Ahora, tanto $M - K$ como $S^3 - L$, son simplemente conexos, por lo que aplicando el lema 2.1

$$\pi_1(S^3 - K) = ([x_1], \dots, [x_n] : r_1, \dots, r_{n-1})$$

Aplicando el lema 2.2, obtenemos una presentación de $\pi_1(R^3 - K)$ con n generadores y $n-1$ relaciones.

Q.E.D.

2.4 PROPOSICION:

La abelianización del grupo fundamental del complemento de un nudo polinomial K en R^3 es el grupo cíclico infinito.

Demostración:

Por lo anterior hay una presentación finita de $\pi_1(R^3 - K)$, dada por

$$(x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_{n-1})$$

cada r_i dice $x_i^{\epsilon_i} \alpha x_{i+1}^{-\epsilon_i} \alpha^{-1} = 1$

Al abelianizar obtenemos las relaciones

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

Por lo que una presentación de $\pi_1(R^3 - K) / [\pi_1(R^3 - K), \pi_1(R^3 - K)]$ es $(t :)$ i.e. es cíclico infinito

Q.E.D.

2.5 EJEMPLOS

1)



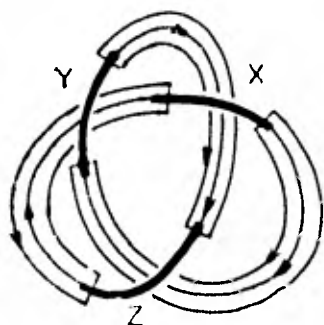
NUDO TRIVIAL

En este caso la presentación es $(x :)$ i.e. $\pi_1(R^3 - K)$

es cíclico infinito

2)

TREBOL



Generadores x, y, z

Relaciones:

$$xzy^{-1}z^{-1} = 1$$

$$x^{-1}y^{-1}zy = 1$$

De la segunda relación

obtenemos $x = y^{-1}zy$;

sustituyendo en la primera obtenemos:

$$y^{-1}zyzy^{-1}z^{-1} = 1$$

i.e.

$$zyz = yzy$$

La presentación es $(y, z : zyz = yzy)$

Definimos $\psi : \pi_1(\mathbb{R}^3 - K) \rightarrow S_3$ mediante

$$\psi(y) = (12), \quad \psi(z) = (13)$$

Es claro que $(12)(13)(12) = (13)(12)(13)$ y además $(12),$

(13) generan a S_3 , por lo que ψ establece un epimorfismo de

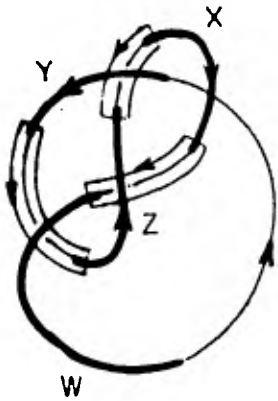
$\pi_1(\mathbb{R}^3 - K)$ en S_3 , un grupo no abeliano. Por lo tanto

$\pi_1(\mathbb{R}^3 - K)$ es no abeliano, por lo que el trébol no es un

nudo trivial i.e. no pertenece a la clase del círculo.

(3)

EL NUDO DEL 8

Generadores: x, y, z, w

Relaciones:

$$x^{-1}y^{-1}zy = 1 \quad (1)$$

$$xz^{-1}w^{-1}z = 1 \quad (2)$$

$$yw^{-1}z^{-1}w = 1 \quad (3)$$

Usando (2), (3) podemos eliminar a x, y y sustituir en (1):

$x = z^{-1}wz, y = w^{-1}zw$
obtenemos la relación

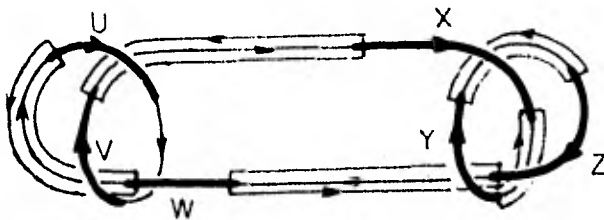
$$z^{-1}w^{-1}z w^{-1}z^{-1}wz w^{-1}zw = 1$$

i.e. $wzw^{-1}zw = zwz^{-1}wz$

La presentación del grupo $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K)$ es

$$(w, z : wzw^{-1}zw = zwz^{-1}wz)$$

(4)



Generadores: x, y, z, w, u, v

Relaciones: $x^{-1}uvu^{-1}$

$$y^{-1}zxx^{-1}$$

$$z^{-1}xyx^{-1}$$

$$w^{-1}yzy^{-1}$$

$$u^{-1}vwv^{-1}$$

i.e. obtenemos

Eliminamos u, w, z

$$x = uvu^{-1}$$

y nos quedan dos relaciones:

$$y = zxz^{-1}$$

$$z = xyx^{-1}$$

$$w = yzy^{-1}$$

(1)

$$x = vyxyx^{-1}y^{-1}vyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}v^{-1}$$

$$u = vwv^{-1}$$

(2)

$$y = xyx^{-1}xyx^{-1}x^{-1} = xyxy^{-1}x^{-1}$$

De (2) obtenemos $xyx = yxy$; sustituyendo en (1)

$$x = vxyxx^{-1}y^{-1}vyxx^{-1}y^{-1}x^{-1}v^{-1}$$

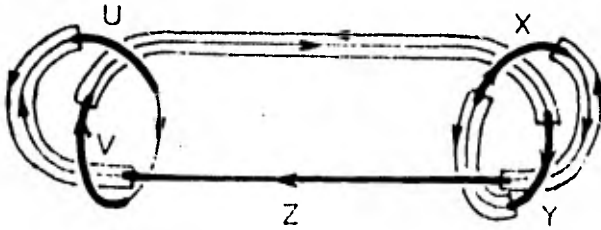
$$x = vxvx^{-1}v^{-1}$$

$$xvx = vxv$$

una presentación de este nudo es

$$(x, y, v : xyx = yxy, vxv = vxv)$$

(5)



Generadores: x, y, z, u, v
 Relaciones: $y^{-1}x^{-1}uvu^{-1}x$
 $x^{-1}z^{-1}yz$
 $xyz^{-1}y^{-1}$
 $zv^{-1}u^{-1}v$

i.e. obtenemos

$$\begin{array}{ll} y = x^{-1}uvu^{-1}x & y = x^{-1}uvu^{-1}x \\ x = z^{-1}yz & x = z^{-1}yz \\ x = yzy^{-1} & z = y^{-1}xy \\ z = v^{-1}uv & u = vzv^{-1} \end{array}$$

Eliminamos u, x y los sustituimos:

$$\begin{array}{ll} z = y^{-1}z^{-1}yzy & (1) \quad zyz = yzy \\ y = z^{-1}y^{-1}zvzv^{-1}vz^{-1}v^{-1}z^{-1}yz & (2) \quad y = z^{-1}y^{-1}zvzv^{-1}v^{-1}z^{-1}yz \\ (2) \text{ se reduce a} & \\ zyz = zvzvz^{-1}v^{-1}z^{-1}yz & 1 = vzvz^{-1}v^{-1}z^{-1} \\ & zvz = vzv \end{array}$$

y tenemos la presentación $(y, z, v : zyz = yzy, zvz = vzv)$ por lo cual tienen grupos fundamentales isomorfos los nudos (4) & (5). Sin embargo, no son equivalentes, pero para distinguirlos se necesitan técnicas más avanzadas (Ver [F] 2)

Observación:

El siguiente teorema es una consecuencia del Lema de Dehn:

2.6 Teorema:

(Ver [R])

Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ un nudo; entonces $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K) = \mathbb{Z}$ si y sólo si K es el nudo trivial.

En otras palabras, el único nudo tal que el grupo fundamental de su complemento es libre, es la circunferencia desanudada en \mathbb{R}^3 .

III LA MATRIZ Y EL POLINOMIO DE ALEXANDER

Hemos descrito un método para calcular una presentación del grupo fundamental de $R^3 - K$, donde K es un nudo poligonal. La presentación resultó ser de tipo finito; sin embargo, es difícil decidir cuando dos presentaciones de grupo presentan grupos isomorfos. El objetivo de esta sección es el de desarrollar una herramienta sencilla de calcular para distinguir tipos de presentación de grupos. Esto se simplifica especialmente en el caso de los grupos de nudo. (Ver [C - F])

3.1 DEFINICION:

Sea G un grupo y ZG el anillo sobre G . Sea $t : ZG \longrightarrow Z$ la única extensión del homomorfismo $g \longmapsto 1$ a ZG , llamado el trivializador. Una derivada en ZG es cualquier función $D: ZG \longrightarrow {}^nG$ que satisface

$$(I) \quad D(h_1+h_2) = D(h_1) + D(h_2)$$

$$(II) \quad D(h_1h_2) = D(h_1)t(h_2) + h_1D(h_2)$$

$$h_1, h_2 \in ZG.$$

La existencia es inmediata de la extensión del mapeo $G \longrightarrow ZG$ dado por $g \longmapsto g - 1$

Definimos al elemento

$$\frac{g^n - 1}{g - 1} = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} g^i & n > 0 \\ -1 & n = 0 \\ -\sum_{i=n}^{\infty} g^i & n < 0 \end{cases}$$

Sea F un grupo libre sobre $\{x_1, x_2, \dots\}$

El siguiente teorema nos caracteriza a las derivadas en ZF .

3.2 TEOREMA:

A cada generador libre x_j , le corresponde una única derivada

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{en } ZF$$

llamada la derivada respecto a x_j con la propiedad de que

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$$

Demostración:

Sea M un conjunto de elementos η_1, η_2, \dots en correspondencia biyectiva con la base de F , bajo la función

$$\psi(\eta_i) = x_i.$$

Tomamos el semigrupo $S(M)$ sobre el alfabeto M constituido por palabras sin cancelación; entonces γ se extiende a un mapeo que preserva productos de $S(M)$ en F tal que palabras equivalentes en $S(M)$ son enviadas al mismo elemento en F .

Ahora definimos $\Gamma_j : S(M) \longrightarrow \mathbb{Z}F$ como sigue:

$$\Gamma_j(1) = 0$$

$$\Gamma_j \eta_i^n = \frac{x_i^n - 1}{x_i - 1} \delta_{ij}$$

$$\Gamma_j(\eta_i^n \eta) = \Gamma_i(\eta_i^n) + x_i^n \Gamma_j(\eta)$$

Como no hay cancelación en $S(M)$, esto define bien a Γ_j , cumpliendo lo siguiente

$$(a) \quad \Gamma_j(\eta w) = \Gamma_j(\eta) + \psi(\eta) \Gamma_j(w)$$

(b) Si dos palabras son equivalentes, entonces sus imágenes bajo Γ_j son iguales.

Entonces definimos $\frac{\partial}{\partial x_j} : F \longrightarrow \mathbb{Z}F$ como

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \psi(\eta) = \Gamma_j(\eta)$$

Ahora esta función está bien definida por la suprayectividad de ψ y (b); además es obvio que $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} (uv) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \psi(ab) = \psi_j(ab) = \psi_j(a) + \psi(a) \psi_j(b) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} u + u \frac{\partial}{\partial x_j} v. \end{aligned}$$

Por lo tanto su única extensión a ZF cumple los requisitos, ya que la unicidad se sigue del hecho de que está definido sobre una base de F.

Q.E.D.

3.3. PROPOSICION:

Un elemento de ZF está determinado por sus derivadas parciales y el valor del trivializador en \mathcal{O}_1 .

Demostración:

Sea $Q \in ZF$; como $\frac{\partial Q}{\partial x_k} = 0$ si x_k no aparece en Q ,

entonces

$$DQ = \sum_j \frac{\partial Q}{\partial x_j} q_j \quad q_j \in ZF$$

define una derivada en ZF.

Aplicándole D a x_j , obtenemos

Ahora sea $\alpha : G \longrightarrow \mathbb{Z}/[G,G] = H$ la abelianización. Entonces $\mathbb{Z}H$ es un anillo conmutativo con 1

3.4 DEFINICION

Llamamos a la matriz derivada del homomorfismo α , con entradas

$$(a_{ij}) = \left(\alpha \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \right)$$

la matriz de Alexander A de la presentación.

A continuación definiremos una relación de equivalencia entre matrices sobre A , un anillo conmutativo con 1 tal que presentaciones equivalentes poseen matrices de Alexander equivalentes.

3.5 DEFINICION

Sean A, A' matrices sobre $(A, 1)$, un anillo conmutativo con 1. Decimos que A, A' son equivalentes, $A \sim A'$, si podemos obtener A' de A aplicando las siguientes operaciones ó sus inversas:

- (i) Permutar renglones ó columnas.
- (ii) Adjuntar un nuevo renglón de ceros.
- (iii) Sumar a un renglón una combinación lineal de otros renglones.
- (iv) Sumar a una columna una combinación lineal de otras Columnas.

$$D(x_j) = q_j$$

Por lo tanto cualquier derivada D tal que $D(x_j) = q_j$ es de la forma $DQ = \sum_j \frac{\partial Q}{\partial x_j} q_j$

En particular $Q \longmapsto Q - tQ$ define una derivada tal que $x_j \longmapsto x_j - 1$. Por lo tanto

$$Q - tQ = \sum_j \frac{\partial Q}{\partial x_j} (x_j - 1)$$

Q.E.D.

Esta es llamada la Fórmula Fundamental del Cálculo Libre.

Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n : r_1, \dots, r_m)$ una presentación de un grupo G i.e. $G = F/R$, donde F es el grupo libre sobre x_1, \dots, x_n y R la consecuencia* de r_1, \dots, r_m . Denotemos por $\theta : F \longrightarrow F/R$ a la proyección canónica y por ψ a un homomorfismo $\psi : G \longrightarrow H$. Entonces obtenemos la siguiente sucesión de homomorfismos de anillos:

$$ZF \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_j}} ZF \xrightarrow{\theta} ZG \xrightarrow{\psi} ZH$$

Sea A_ψ la matriz sobre ZH con entradas $(a_{ij}) = (\psi \frac{\partial r_i}{\partial x_j})$

Llamamos a A_ψ la matriz derivada del homomorfismo ψ .

* El mínimo subgrupo normal que contiene r_1, \dots, r_m .

(v) Adjuntar un nuevo renglón a una nueva columna tal que la entrada de intersección sea 1 y todos los demás nulos

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es sencillo verificar que define una relación de equivalencia. Obtenemos la siguiente proposición:

3.6 PROPOSICION:

Presentaciones finitas de grupo equivalentes definen matrices de Alexander equivalentes.

Demostración

Basta demostrarlo para las equivalencias fundamentales de Tietze, ya que por el Teorema de Tietze* toda equivalencia de presentaciones finitas se descompone en una composición finita donde aparecen estas dos y sus inversos.

Consideremos los dos casos:

a) La equivalencia es de la forma

$$(x_1, \dots, x_n : r_1, \dots, r_n) \xrightarrow{j} (x_1, \dots, x_n : r_1, \dots, r_m, s)$$

donde s está en R , la consecuencia de r_1, \dots, r_m y j es la identidad en el grupo libre $F(x_1, \dots, x_n)$. Calcularemos el

* Ver apéndice.

renglón adicional en la segunda matriz de Alexander.

Como $s = R$, entonces

$$s = \sum_{h=1}^q w_k r_{ik}^{\beta_k} w_k^{-1}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_j} = \frac{\partial w_1 r_{i1}^{\beta_1} w_1^{-1}}{\partial x_j} + w_1 r_{i1}^{\beta_1} w_1^{-1} \frac{\partial w_1 r_{i1}^{\beta_1} w_1^{-1}}{\partial x_j} + \dots$$

$$\sum_{h=1}^{q-1} w_k r_{ik}^{\beta_k} w_k^{-1} \frac{\partial w_k r_{ik}^{\beta_k} w_k^{-1}}{\partial x_j}$$

como $\lambda^0(r_j) = 1$

$$\lambda^0\left(\frac{\partial s}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^q \beta_k \lambda^0\left(\frac{\partial w_k r_{ik}^{\beta_k} w_k^{-1}}{\partial x_j}\right)$$

Además tenemos que

$$\frac{\partial w_k r_{ik}^{\beta_k} w_k^{-1}}{\partial x_j} = \frac{\partial w_k}{\partial x_j} + w_k \left(\frac{r_{ik}^{\beta_k} - 1}{r_{ik}^{\beta_k} - 1}\right) \frac{\partial r_{ik}}{\partial x_j} - w_k r_{ik}^{\beta_k} w_k^{-1} \frac{\partial w_k}{\partial x_j}$$

como $\lambda^0\left(\frac{r_{ik}^{\beta_k} - 1}{r_{ik}^{\beta_k} - 1}\right) = \beta_k$ entonces

$$\lambda^0\left(\frac{\partial}{\partial x_j} w_k r_{ik}^{\beta_k} w_k^{-1}\right) = \beta_k \lambda^0(w_k) \lambda^0\left(\frac{\partial r_{ik}}{\partial x_j}\right)$$

Sea $c_k = \beta_k \lambda^0(u_k)$; entonces

$$0\left(\frac{\partial S}{\partial x_j}\right) = \sum_{h=1}^q c_k \Delta 0\left(\frac{\partial r_{ik}}{\partial x_j}\right)$$

i.e. el renglón adicional es combinación lineal de los demás, por lo que se sigue el resultado.

(b) En este caso la equivalencia es de la forma

$$(x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_m) \xrightarrow{j} (x_1, \dots, x_n, y; r_1, \dots, r_m, yz^{-1})$$

donde $z \in F(x_1, \dots, x_n)$, la identidad en $F(x_1, \dots, x_n)$

Claramente

$$\frac{\partial r_i}{\partial y} = 0$$

$$i = 1, \dots, m$$

$$\frac{\partial yz^{-1}}{\partial y} = 1$$

Por lo tanto la matriz de Alexander es de la forma

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots \quad A$$

Donde A es la matriz de Alexander de la presentación original, de donde obtenemos el resultado deseado.

Q.E.D.

Como consecuencia de lo anterior, tenemos un invariante del tipo de nudo, que es la matriz de Alexander.

Sin embargo, aún se dificulta determinar si dos matrices pertenecen o no a la misma clase de equivalencia. Para ello haremos uso de los ideales elementales.

3.7 DEFINICION:

Sea A una matriz $m \times n$ sobre A ; para todo $k > 0$ definimos el k -ésimo ideal elemental de A como sigue:

Si $0 < n - k \leq m$ $E_k(A)$ es el ideal generado por los determinantes de las submatrices de $n - k \times n - k$ de A .

Si $n - k = 0$, entonces $E_k(A) = 0$

Si $n - k < 0$, entonces $E_k(A) = (1)$

Debido al hecho de que podemos desarrollar los determinantes por cofactores de los elementos de cualquier renglón ó columna, tenemos que los ideales elementales de A constituyen una cadena ascendente

$$E_0(A) \subset E_1(A) \subset \dots \subset E_n(A) = E_{n+1}(A) = \dots = A$$

3.8 PROPOSICION:

Matrices equivalentes definen la misma cadena de ideales elementales.

Demostración:

Es una consecuencia de las propiedades de los determinantes.

Q.E.D.

Por lo tanto si dos matrices poseen algún ideal elemental diferente, entonces no son equivalentes. Dada una presentación finita llamamos al k -ésimo ideal elemental de su matriz de Alexander simplemente el k -ésimo ideal elemental de la presentación.

Hasta ahora hemos construido los siguientes invariantes:

$$R^3 - K \longrightarrow \pi_1(R^3 - K) \longrightarrow A \longrightarrow E_k(A)$$

Matriz de
ideales
Alexander
elementales

Cada vez obtenemos invariantes más débiles, pero más calculables y de hecho son bastante efectivos para distinguir tipos de nudo.

El siguiente paso es particularizar esta herramienta al caso del grupo de nudo.

Sea $K \subset R^3$ un nudo poligonal y sea $G = \pi_1(R^3 - K)$. Entonces $H = G / \langle G, G \rangle$ es un grupo cíclico infinito. Estudiemos el anillo de este grupo.

Sea $H = \langle t \rangle$, entonces todo elemento $h \in ZH$ se puede escribir de la forma

$$h = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n t^n$$

donde casi todos los h_n son nulos.

Las siguientes propiedades de ZH son fáciles de verificar:

- (i) ZH es un dominio de máximo común divisor.
- (ii) ZH posee sólo unidades triviales i.e. $\pm t^n$.

3.9 DEFINICION:

Definimos al generador del mínimo ideal principal que contiene a $E_k(A)$, donde A es la matriz de Alexander de un grupo de nudo como el k -ésimo polinomio del nudo, Δ_k .

Observamos que como ZH es un dominio m.c.d., entonces Δ_k es el máximo común divisor de los elementos que generan a $E_k(A)$ descritos en la definición de este ideal.

3.10 PROPOSICION:

$$\Delta_{k+1} \mid \Delta_k$$

Demostración:

$$E_k(A) \subset E_{k+1}(A) \subset (\Delta_{k+1})$$

Por lo que

$$(\Delta_k) \subset (\Delta_{k+1}) \quad \text{y} \quad \Delta_{k+1} \mid \Delta_k$$

Q.E.D.

Es una consecuencia inmediata de la proposición 3.8 que presentaciones equivalentes poseen los mismos polinomios de nudo, ya que tienen los mismos ideales elementales. Por lo tanto, los polinomios de nudo son invariantes del tipo del nudo.

En el capítulo anterior obtuvimos una presentación de $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K)$ de deficiencia 1: $(x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_{n-1})$; por lo tanto $E_0 = (0)$ y $\Delta_0 = 0$

3.11 PROPOSICION:

Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ un nudo; entonces su primer ideal elemental es principal.

Demostración:

Tomemos la presentación $(x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_{n-1})$ de $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K)$. Por la fórmula fundamental obtenemos

$$r_i - 1 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial x_j} (x_j - 1)$$

Pero $\lambda \otimes (x_k) = 0 \quad j = 1, \dots, n$

$$0 = \lambda \otimes (r_i - 1) = \lambda \otimes \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial x_j} (x_j - 1) \right)$$

$$0 = (t - 1) \left[\sum_{j=1}^n \lambda_j \alpha_j \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \right]$$

Como $\mathbb{Z}H$ es un dominio entero ($H = t^{-1}$), la abelianización de $\pi_1(R^3 - K)$ entonces:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \alpha_j \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) = 0$$

Por lo tanto la suma de los vectores columna de la matriz de Alexander A es nula, por lo que $A = A'$ donde A' se obtiene de A sustituyendo ceros en cualquier columna.

Esto implica que A' sólo posee una submatriz

$$(n-1) \times (n-1)$$

no nula, cuyo determinante forzosamente genera a $E_1(A') = E_1(A)$

i.e. $E_1(A) = (\Delta_1)$

3.12 DEFINICION:

Llamamos al primer ideal elemental $E_1(A)$ el ideal de Alexander del nudo y a su generador Δ_1 el polinomio de Alexander.

3.13 EJEMPLOS

1) Nudo trivial

$\pi_1(R^3 - K) = \mathbb{Z}$, por lo que su presentación es

(t :)

$$A = (0), E_1(A) = (1), \Delta_1 = 1$$

2) Trébol

Tiene una presentación $(z, y : zyz = yzy)$

$$\text{i.e. } r = zyzy^{-1}z^{-1}y^{-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{\partial zyzy^{-1}z^{-1}y^{-1}}{\partial z} = 1 + y \left(\frac{\partial zy^{-1}z^{-1}y^{-1}}{\partial z} \right) \\ &= 1 + zy \left(1 + z \frac{\partial}{\partial z} y^{-1}z^{-1}y^{-1} \right) \\ &= 1 + zy \left(1 + zy^{-1}(-z^{-1}) \right) \\ &= 1 + zy - zyzy^{-1}z^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{Como } \mathcal{A}0(z) = \mathcal{A}0(y) = 1$$

$$\mathcal{A}0\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right) = 1 + t^2 - t$$

$$\text{Por simetría } \frac{\partial r}{\partial y} = - \frac{\partial r}{\partial z}$$

$$A = (1 - t + t^2 \quad -1 + t - t^2)$$

$$E_1(A) = (1 - t + t^2), \quad \Delta_1 = t^2 - t + 1$$

3) Nudo del 8

Tiene una presentación

$$(w, z : wzw^{-1}zwz^{-1}w^{-1}zw^{-1}z^{-1})$$

Basta calcular una entrada para obtener el polinomio

$$\frac{\partial rs^{-1}}{\partial w} = \frac{\partial r}{\partial w} + r \frac{\partial s^{-1}}{\partial w} = \frac{\partial r}{\partial w} - r \frac{\partial r}{\partial w}$$

$$A^{\Theta} \left(\frac{\partial rs^{-1}}{\partial w} \right) = A^{\Theta} \left(\frac{\partial r}{\partial w} \right) - A^{\Theta} \left(\frac{\partial S}{\partial w} \right)$$

sea $r = wz w^{-1} zw$, $s = zwz^{-1} wz$

$$\frac{\partial r}{\partial w} = 1 + wz \frac{\partial w^{-1} zw}{\partial w} = 1 + wz (-w^{-1} + w^{-1} z)$$

$$\frac{\partial S}{\partial w} = z \frac{\partial wz^{-1} wz}{\partial w} = z(1 + wz^{-1})$$

$$A^{\Theta} \left(\frac{\partial r}{\partial w} \right) = 1 + t^2 (-t^{-1} + 1) = 1 - t + t^2$$

$$A^{\Theta} \left(\frac{\partial S}{\partial w} \right) = t(1+1) = 2t$$

$$E_1 = (1 - t + t^2 - 2t) = (t^2 - 3t + 1)$$

i.e. $\Delta_1 = t^2 - 3t + 1$

Por lo tanto el trébol y el 8 no son ni triviales ni equivalentes entre sí.

(4) Nudo Cuadrado.

La presentación obtenida en el capítulo I para ambos es:

$$(x, y, v : xyx = yxy, xv x = vxv)$$

Usando el resultado del trébol, obtenemos la matriz de Alexander siguiente:

$$\begin{bmatrix} t^2 - t + 1 & -t^2 + t - 1 & 0 \\ t^2 - t + 1 & 0 & -t^2 + t - 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1(+) = (t^2 - t + 1)^2 = t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 2t + 1$$

IV. SUPERFICIES DE SEIFERT.

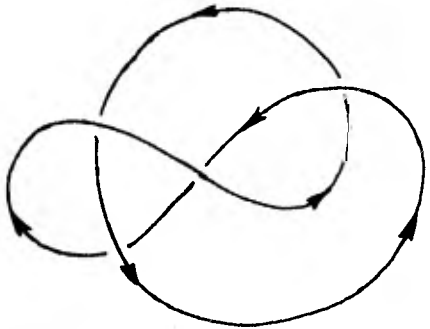
4.1 DEFINICION:

Sea $K \subset S^1$ un nudo poligonal. Una superficie de Seifert para K es una superficie compacta orientable M tal que $\partial M = K$.

Dado un nudo poligonal K , surge la siguiente interrogante: ¿existe una superficie de Seifert para K ?

La construcción que proporcionaremos enseguida resuelve este problema.

Consideremos una proyección regular de K y orientemos al nudo

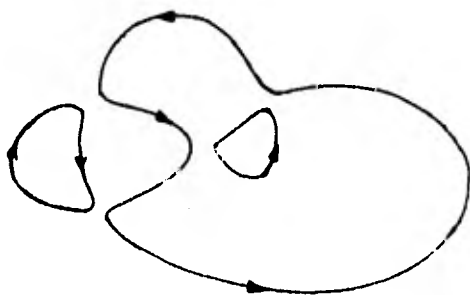


- (i) Escogemos un punto $p \in K$ que no sea doble.
- (ii) Recorremos el nudo siguiendo su orientación hasta llegar al primer punto doble.
- (iii) Descendemos ó ascendemos mediante un segmento de rec

- ta al otro punto que se proyecta sobre el doble,
- (iv) Volvemos a recorrer el nudo siguiendo su orientación y repetimos lo anterior.

Es claro que al llevar a cabo este procedimiento regresamos al punto original, y habremos descrito una curva cerrada simple que alterna segmentos de recta con arcos del nudo.

- (v) Repetimos (i)-(iv) hasta cubrir los arcos del nudo con n curvas cerradas simples que se intersectan sólo por parejas sobre los segmentos de recta. De hecho en cada segmento inciden exactamente dos de estas curvas.



- (vi) Sean K_1, \dots, K_n estas curvas con la orientación inducida por K . Extendemos un disco cerrado D_i en cada K_i de tal forma que resulten ajenos (levantándolos si resultan anidados) excepto por las intersecciones de las curvas. Estos discos heredan una orientación a partir de su frontera.

(vii) Sea $M = \bigcup_{i=1}^n D_i$; al unir estos discos desaparecen

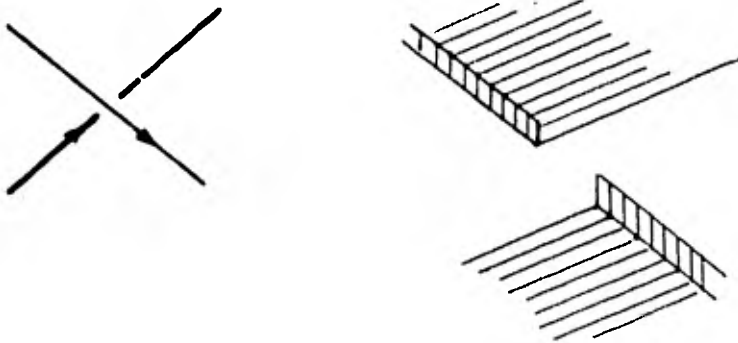
los segmentos de recta, por lo que M es una superficie compacta tal que $\partial M = K$

4.1 PROPOSICION:

M es orientable

Demostración:

En la construcción anterior obtuvimos n curvas cerradas simples orientadas, que inducen orientaciones sobre los discos extendidos en ellas. De esta forma obtenemos n discos orientados con la propiedad de que poseen orientaciones opuestas sobre el segmento de recta usado para pegarlos 2 a 2:



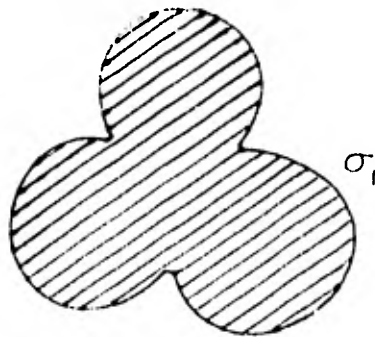
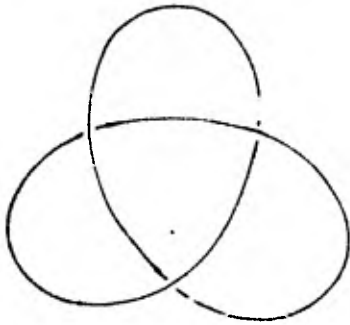
Esta coherencia permite extender la orientación de los discos en forma compatible a todo M . Además, si a cada disco le asociamos un collar doble (es decir, dotamos a sus lados con signos contrarios), entonces podemos extender uno a todo M .

Q.E.D.

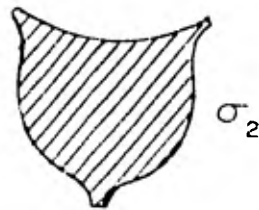
Cada proyección regular de K da lugar a una superficie de Seifert.

4.3 Ejemplos

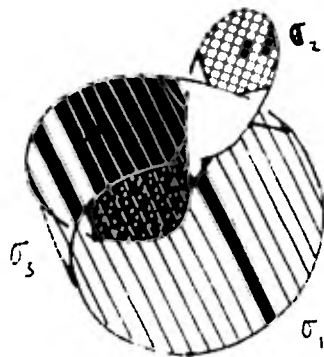
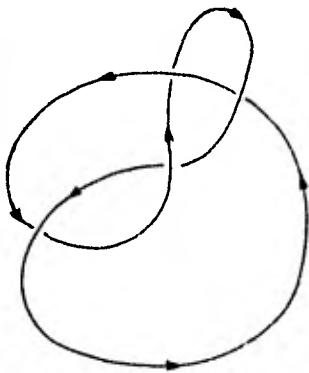
Trébol:



Pegamos las dos 2-células con tres bandas volteadas.



4.4 NUDC DEL 2.



En este caso hay tres 2-células, con π_1 por encima de π_2 .

Las superficies compactas con frontera están bien clasificadas por el siguiente teorema

4.5 TEOREMA (Véase [Ma])

Dos superficies compactas con frontera son homeomorfas si y sólo si tienen el mismo número de componentes de frontera, ambas son orientables o no-orientables y si poseen la misma característica de Euler.

Ahora tenemos la siguiente proposición:

4.6 PROPOSICION

Cualquier superficie compacta orientable con una componente de frontera es homeomorfa a un disco en R^2 con parejas de bandas ajenas adheridas a él.

Demostración:

Sea M una superficie compacta con una componente de frontera, y sea $X(M) = m$.

Sea D un disco en R^2 ; es claro que $X(D) = 2$. Ahora $X(M)$ se calcula extendiendo un disco sobre la frontera y calculando la característica de la superficie resultante, que por ser orientable es una suma conexa de TOROS. Por lo tanto, si g es el género de esta superficie, entonces

$$g \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - X(M) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m = X(M) < 2$$

Pegemos una banda al disco D ; sea D_1 el resultante; entonces es fácil verificar que

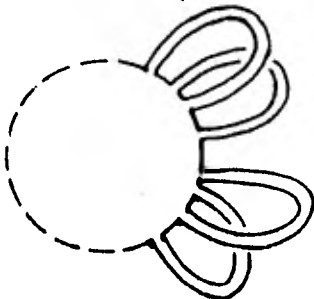
$$X(D_1) = X(D) - 1 = 1$$

Por lo tanto, al pegarle una pareja de bandas, la característica resultante baja en 2. Sea $m = -2K$ con $k \geq 0$ (en el caso $X(M) = 2$ no necesitamos usar bandas)

$$m = 2 - 2(k + 1) = X(D) - 2(k + 1)$$

Esto lo podemos lograr pegando $k + 1$ parejas de bandas a D , de tal suerte que se traslapen para que el resultante M^1 tenga una componente de frontera

$k + 1$
parejas
ajenas



Claramente M^1 es orientable
y $X(M^1) = X(M)$
 M es homeomorfo a M^1 y se
sigue el resultado.

Q.E.D.

Es importante notar que se necesitan tantas parejas como el género de M .

En la construcción de la Superficie de Seifert, obtenemos una descomposición de ella en términos de 2-células.

Sea $a =$ no. de puntos dobles

$b =$ no. de células

Tomamos los arcos del nudo y los segmentos de recta como aristas y los puntos que corresponden a uno doble como vértices. Extendemos un disco en la frontera para obtener una superficie T . Obtenemos así una estructura como 2-complejo a partir de la cual podemos calcular su característica.

$$X(T) = \text{Vértices} - \text{Aristas} + \text{Caras}$$

$$X(T) = (2a) - (3a) + (b + 1) = b - a + 1$$

Pero $X(M) = X(T)$, por lo que $X(M) = b - a + 1$

$$\Rightarrow g(M) = g(T) = 2 - X(T)/2 = 2 - (b - a + 1)/2$$

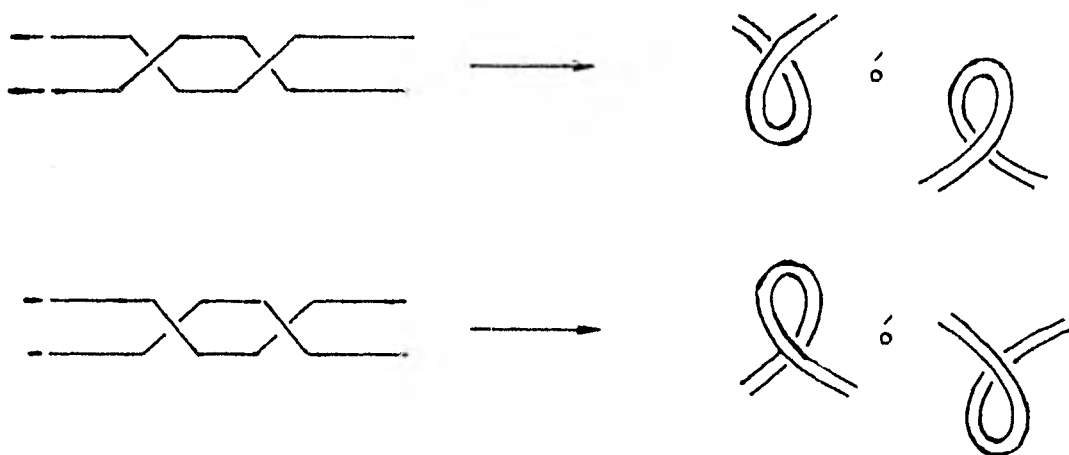
$$g(M) = \frac{a - b + 1}{2}$$

Por lo tanto M es homeomorfo a un disco con $a - b + 1$ cintas pegadas a él de la forma descrita anteriormente.

Sea K un nudo poligonal y M una superficie de Seifert construida con una proyección. Entonces tenemos un homeomorfismo abstracto de M en una superficie con frontera de la forma anterior. Usando esto se puede construir una isotopía de S^3 ó R^3 en si mismo que envíe a M en un disco con parejas de bandas enredadas adheridas a él.

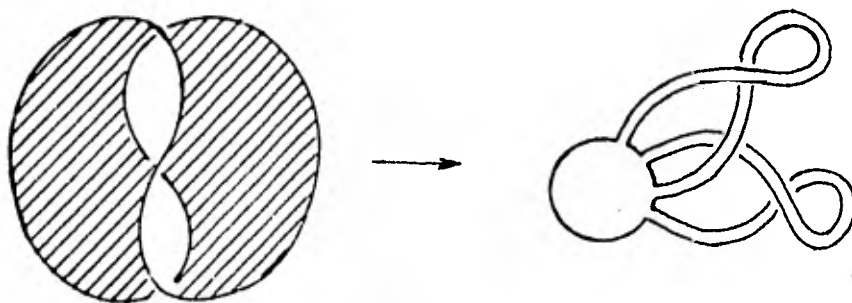
En general, como M es orientable, cada banda posee un número par de torceduras; podemos considerar a la superfi

cie aplanada si hacemos las sustituciones:



Ejemplo: TREBOL:

Es más sencillo utilizar la proyección siguiente:



(iii) MATRICES DE SEIFERT4.7 DEFINICION

Sean K_1, K_2 dos nudos poligonales disjuntos orientados en R^3 ó S^3 ; consideremos una proyección regular de $K_1 \cup K_2$. Sea m la suma algebraica de las veces que K_2 pasa por encima de K_1 de izquierda a derecha siguiendo su orientación. Definimos m como el número de enlace de K_1 con respecto a K_2 , y lo denotamos por $m = lk(K_1, K_2)$

Sea $K \subset S^3$ cualquier nudo poligonal orientado y sea M una superficie de Seifert para K . Consideremos un lazo w sobre M . Como M posee dos lados bien definidos, podemos levantar a w sobre M en una dirección normal positiva y en una negativa para obtener w^+ y w^- respectivamente.

En cada banda de M podemos escoger un lazo orientado a favor de las manecillas del reloj. Estos lazos orientados a_1, \dots, a_g constituyen una base de la homología $H_1(M)$ de M , donde g es el género de M y a_{2g-1}, a_{2g} corresponden a la pareja i -ésima de bandas.

4.8 DEFINICION:

Sea $v_{ij} = lk(a_i^+, a_j)$. A la matriz $v = (v_{ij})$ la llamaremos la matriz de Seifert de M .

Es importante hacer la observación de que esta matriz no es un invariante del tipo del nudo y que depende de la superficie de Seifert utilizada.

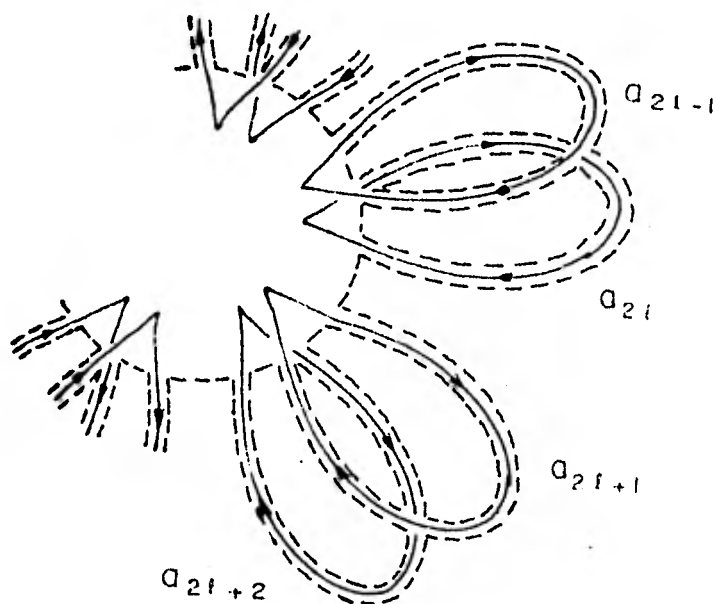
EJEMPLO

Trébol

Observando la figura en la página 45, obtenemos

$$V = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sean a_1, \dots, a_{2g} los lazos sobre las bandas de M y supongamos que a_i, a_j no corresponden a una misma pareja i.e. $i \neq 2k-1, 1 \leq k \leq g$. Entonces podemos suponer que a_i y a_j no se intersectan



Entonces por la simetría del número de enlace obtenemos:

$$lk(a_i^+, a_j) = lk(a_i, a_j) = lk(a_j, a_i) = lk(a_j^+, a_i)$$

Ahora supongamos que $i = 2i - 1$, $j = 2j - 1$, $1 \leq i, j \leq g$. Entonces podemos suponer que a_i, a_j se centran en un solo punto. Si levantamos a_i localmente en este punto a \tilde{a}_i obtenemos

$$lk(a_i^+, a_j) = lk(\tilde{a}_i, a_j) = lk(a_j, \tilde{a}_i) = lk(a_j^+, a_i) - 1$$

De esta manera obtenemos

4.9 PROPOSICION:

Sea V una matriz de Seifert de $2g \times 2g$:

Entonces cumple lo siguiente

$$V - V^T = \begin{pmatrix} H & O \\ O & H \end{pmatrix} \quad g \text{ veces}$$

donde $H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

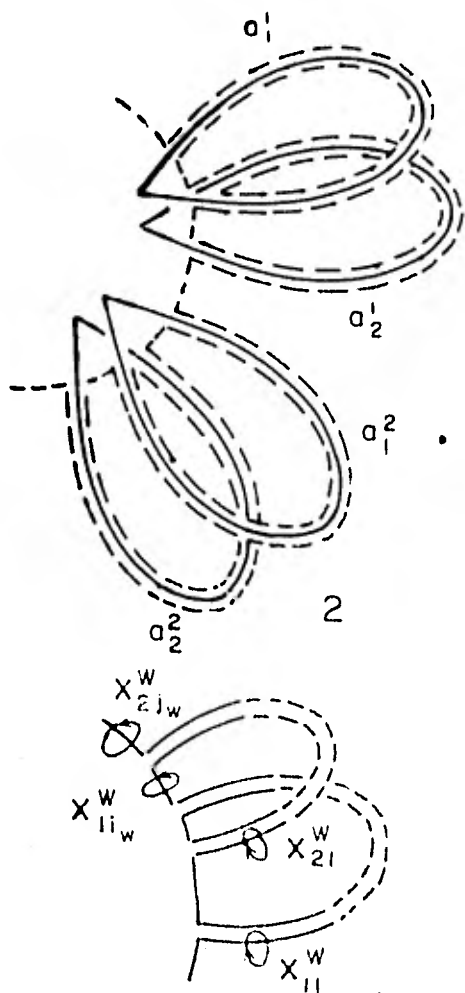
Usando argumentos análogos a los anteriores, se puede demostrar que

$$(lk(a_i^-, a_j)) = (lk(a_i^+, a_j))^T = V^T$$

Estas propiedades serán fundamentales para la caracterización del polinomio de Alexander que llevaremos a cabo en el siguiente capítulo.

V CARACTERIZACION DEL POLINOMIO DE ALEXANDER

Consideremos una superficie de Seifert para un nudo K , la cual podemos tomar de la siguiente forma:



Así obtenemos los elementos.

Enumeramos las g parejas de bandas que aparecen. Calcularemos a partir de esta proyección una presentación de $\pi_1(R^1 - K)$

En cada pareja tomamos los generadores que se indican a la izquierda. Al recorrer las bandas a partir de su inicio, obtenemos nuevos generadores según las obstrucciones de las bandas.

$$x_{11}^w, \dots, x_{1i_w}^w$$

$$w = 1, \dots, g$$

$$x_{21}^w, \dots, x_{2j_w}^w$$

Asimismo si denotamos con x'_{1k} a los generadores que corresponden a los bordes adyacentes, obtenemos:

$$x_{11}^{w'} \dots x_{1i_w}^{w'} \text{ y } x_{21}^{w'} \dots x_{2j_w}^{w'} \quad w = 1, \dots, g$$

Es claro que estos elementos generan a $\pi_1(R^1 - K)$.

Obtenemos las siguientes relaciones:

$$x_{1\ k+1}^w = \left[(X_{pq}^{f'})^{-1} X_{pq}^{f'} \right]^{-1} x_{1k}^w \left[(X_{pq}^{f'})^{-1} X_{pq}^{f'} \right]^{f-1}$$

$$x_{1\ k+1}^{w'} = \left[(X_{pq}^{f'})^{-1} X_{pq}^{f'} \right]^{-1} x_{1k}^{w'} \left[(X_{pq}^{f'})^{-1} X_{pq}^{f'} \right]^{f-1}$$

$$w = 1, \dots, g$$

$$k = 1, \dots, i_w - 1$$

Análogamente para la segunda banda en cada pareja obtenemos:

$$x_{2\ k+1}^w = \left[(X_{st}^{\lambda'})^{-1} X_{st}^{\lambda'} \right]^{-1} x_{2k}^w \left[(X_{st}^{\lambda'})^{-1} X_{st}^{\lambda'} \right]^{f-1}$$

$$x_{2\ k+1}^{w'} = \left[(X_{st}^{\lambda'})^{-1} X_{st}^{\lambda'} \right]^{-1} x_{2k}^{w'} \left[(X_{st}^{\lambda'})^{-1} X_{st}^{\lambda'} \right]^{f-1}$$

$$w = 1, \dots, g$$

$$k = 1, \dots, j_w - 1$$

Además obtenemos

$$J_w \left\{ \begin{array}{l} X_{11}^{w'} = X_{21}^w \\ X_{21}^{w'} = X_{1i_w}^{w'} \\ X_{1i}^w = X_{2j_w}^w \\ X_{11}^w = X_{2j_w}^{w+1} \end{array} \right. \quad w = 1, \dots, g$$

Esto determina una presentación cuadrada del grupo del nudo, de donde podemos eliminar la última relación para que sea de deficiencia uno.*

Procedemos a introducir los siguientes generadores acompañados de relaciones:

$$U_{1k}^w = (X_{1k}^{w'})^{-1} X_{1k}^w \quad w = 1, \dots, g$$

$$k = 1, \dots, i_w - 1$$

$$U_{2k}^w = (X_{2k}^{w'})^{-1} X_{2k}^w \quad k = 1, \dots, j_w - 1$$

$$U_1^w \{ U_{pq}^{w+1} U_{1k}^w U_{pq}^{w+1} = U_{1k+1}^w \quad w = 1, \dots, g$$

$$k = 1, \dots, i_w - 1$$

$$U_2^w \{ U_{st}^{w+1} U_{2k}^w U_{st}^{w+1} = U_{2k+1}^w \quad k = 1, \dots, j_w - 1$$

* Denotamos por J_n^* a J_n con la última relación suprimida.

Las relaciones originales en términos de la U's son:

$$U_{pq}^{\Gamma+1} X_{1k}^w U_{pq}^{\Gamma+1} = X_{1k+1}^w \quad \text{A} \quad w = 1, \dots, g$$

$$U_{pq}^{\Gamma+1} X_{1k}^{w'} U_{pq}^{\Gamma+1} = X_{1k+1}^{w'} \quad k = 1, \dots, i_w - 1$$

$$U_{st}^{\lambda+1} X_{2k}^w U_{st}^{\lambda+1} = X_{2k+1}^w \quad \text{B} \quad w = 1, \dots, g$$

$$U_{st}^{\lambda+1} X_{2k}^{w'} U_{st}^{\lambda+1} = X_{2k+1}^{w'} \quad k = 1, \dots, j_w - 1$$

Es sencillo verificar que podemos obtener el segundo y cuarto bloque de estas relaciones a partir de las otras que involucran a las U's. Por lo tanto son redundantes. Ahora para $w = 1, \dots, g$, $k \neq 1, i_w$ y $l \neq 1, j_w$

$$X_{1k}^{w'} = X_{1k}^w (U_{1k}^w)^{-1} \quad X_{2l}^{w'} = X_{2l}^w (U_{2l}^w)^{-1}$$

y para estas k, l respectivamente no vuelven a aparecer $X_{1k}^{w'}$, $X_{2l}^{w'}$ por lo cual pueden ser eliminadas.

Considerando las relaciones A,B es claro que sustituyendo repetidamente se reducen a las relaciones

$$R_1^w \quad X_{1i_w}^w = R_1^w X_{11}^w (U_1^w)^{-1} \quad w = 1, \dots, g$$

$$R_2^w \quad X_{2j_w}^w = R_2^w X_{21}^w (U_1^w)^{-1}$$

donde Ω_i^w es el producto de las U's que aparecen sucesivamente al recorrer la banda i -ésima de la pareja w -ésima.

Además podemos eliminar a

$$X_{12}^w, \dots, X_{1i_w}^w - 1$$

$$w = 1, \dots, g$$

$$X_{22}^w, \dots, X_{2j_w}^w - 1$$

Ahora podemos sustituir las relaciones

$$U_{21}^w = (X_{21}^w)^{-1} X_{21}^w$$

$$U_{11}^w = (X_{11}^w)^{-1} X_{11}^w$$

$$w=1, \dots, g$$

$$U_{1i_w}^w = (X_{1i_w}^w)^{-1} X_{1i_w}^w$$

$$U_{2j_w}^w = (X_{2j_w}^w)^{-1} X_{2j_w}^w$$

en J_w y eliminarlas junto con las X 's

$$J_w \left\{ \begin{array}{l} X_{21}^w = X_{11}^w (U_{11}^w)^{-1} \\ X_{21}^w (U_{21}^w)^{-1} = X_{1i_w}^w (U_{1i_w}^w)^{-1} \\ X_{1i_w}^w = X_{2j_w}^w (U_{2j_w}^w)^{-1} \\ X_{11}^w = X_{2j_w}^{w+1} \end{array} \right.$$

$$w = 1, \dots, g-1$$

$$w = 1, \dots, g - 1$$

Por lo tanto nuestra presentación final es de la siguiente forma:

GENERADORES:

$$x_{11}^w, x_{1i_w}^w$$

$$x_{21}^w, x_{2j_w}^w$$

$$u_{11}^w, \dots, u_{1i_w}^w$$

$$u_{21}^w, \dots, u_{2j_w}^w$$

RELACIONES:

$$\left. \begin{array}{l} R_1^w, R_2^w \\ U_1^w, U_2^w \end{array} \right\} w = 1, \dots, g$$

$$J_w \quad w = 1, \dots, g^{-1}$$

$$J_g^*$$

Consideremos u_{1i}^w ; registra las veces que las otras bandas cruzan a la i -ésima banda de la pareja w . Para derivar estas relaciones con respecto a alguna U , podemos hacer todas las demás triviales, ya que bajo la abelianización corresponden al 1. Entonces si t es la suma algebraica de los exponentes de U en R_1^w :

$$\frac{\partial R_1^w}{\partial U} = \frac{\partial u_{1i}^w x_{1i}^w (u_{1i}^w)^{-1}}{\partial U} = \frac{\partial u_{1i}^w x_{1i}^w U^{-t}}{\partial U} = \dots (1-t)$$

Ahora si sumamos los \dots correspondientes a las derivadas de todas las U 's de la banda j -ésima de la pareja w , entonces obtenemos la suma algebraica de las veces que esta

Finalmente sea E la matriz obtenida de derivar a los R_i^w respecto a las U's con el orden dado de los generadores.

Por lo tanto, nuestra matriz de Alexander resulta ser:

$$A = \begin{array}{c|cc} & P & E \\ \hline & & B & C \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ 0 & & 0 & \cdot & 0 \\ & & & \cdot & \\ & & 0 & & B_g \\ \hline L & & 0 & K_1 & 0 \\ & \cdot & & \cdot & \\ & \cdot & & \cdot & \\ 0 & & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ & & \cdot & & \cdot & \\ & & L & & & K_{g-1} \\ c & & L^* & 0 & & K_g \end{array}$$

Multiplicando y sumando adecuadamente, podemos usar los B_w para sumar todo en columnas a intervalos i_w, j_w respectivamente.

i.e. E se convierte en E':

$$\begin{bmatrix}
 v_{11} & 0 & \dots & 0 & v_{12} & \dots & \overbrace{v_{1B-1} 0 \dots 0}^{i_j} & \overbrace{v_{1B} 0 \dots 0}^{j_i} \\
 v_{21} & & & & v_{22} & & & \\
 & & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
 v_{g1} & 0 & \dots & 0 & v_{g2} & \dots & v_{gB-1} 0 \dots 0 & v_{gB} 0 \dots 0
 \end{bmatrix} \quad (1-t)$$

Las k_w en diagonal se transforman en k'_w

$$\begin{bmatrix}
 \overbrace{t \ 0 \ \dots \ 0}^{i_w} & \overbrace{\dots \ 0}^{j_w} \\
 t \ 0 \ \dots \ 0 & -t \ 0 \ \dots \ 0 \\
 0 \ \dots \ 0 & t \ 0 \ \dots \ 0 \\
 0 & \dots \ 0
 \end{bmatrix}$$

es decir $\begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$ baja sobre la diagonal a distancia de i_w, j_w alternadamente, como en lo anterior

		$V_{11}(1-t)$	$V_{12}(1-t)$	$V_{1g}(1-t)$	
	P		0	0	0
		$V_{g1}(1-t)$	$V_{g2}(1-t)$	$V_{gg}(1-t)$	
A		B_1			
	0				
		0		0	
					B_g
L		K'_1			
	0				0
	0	0			
		L			K'_{g-1}
		L*			K'_g

Podemos utilizar las columnas 2,3 de L,L* para eliminar las t en los K'_w ; arriba aparecen t sobre la diagonal

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{array} \end{array} \right]$$

Reordenando apropiadamente:

$$A \sim \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 0 \\ (1-t)V + t \sum_{k=1}^M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \text{Id} \end{array} \right]$$

Haciendo la reducción $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim M$ sucesivamente:

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & (1-t)V + t \sum_{k=1}^M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

En el capítulo IV vimos que

$$V - V^T = \sum_{k=1}^r \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda \sim \left(\begin{array}{c} 0 \\ (1-t)V + t(V-V^T) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ V-tV^T \end{array} \right)$$

Por lo tanto obtenemos el siguiente teorema

5.1 TEOREMA

Sea $K \subset S^3$ un nudo poligonal, M una superficie de Seifert para K y V su matriz. Entonces salvo equivalencia

$$\left(\begin{array}{c} 0 \\ V-tV^T \end{array} \right)$$

es la matriz de Alexander de K , y salvo unidades el polinomio de Alexander de K es:

$$\Delta(t) = \det (V - tV^T)$$

□

Esta forma de la matriz de Alexander nos conduce a caracterizar el polinomio de Alexander de un nudo.

5.2 TEOREMA:

Para cualquier nudo poligonal $K \subset S^3$ el polinomio de Alexander de K , $\Delta(t)$, satisface lo siguiente:

$$(i) |\Delta(1)| = 1$$

(ii) existe un entero par tal que

$$\Delta(t) = t^n \Delta\left(\frac{1}{t}\right)$$

Demostración

Basta hacerlo para un asociado. Construimos una superficie de Seifert para K , digamos M , y tomamos V su matriz asociada, de $2g \times 2g$.

Entonces por el teorema 5.1, salvo asociado:

$$\Delta(t) = \det (V - tV^T)$$

$$|\Delta(1)| = |\det (V - V^T)|$$

$$= \left| \det \begin{matrix} \frac{0}{t} & (0 & 1) \\ k=1 & -1 & 0 \end{matrix} \right| = 1$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \det \left(V - \frac{1}{t} V^T \right) &= \det \left(-\frac{1}{t} (V^T - tV) \right) \\ &= \left(-\frac{1}{t} \right)^{2g} \det (V^T - tV) \\ &= \left(-\frac{1}{t} \right)^{2g} \det (V^T - tV)^T \\ &= t^{-2g} \det (V - tV^T) \\ &= t^{-2g} \Delta(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto se sigue que

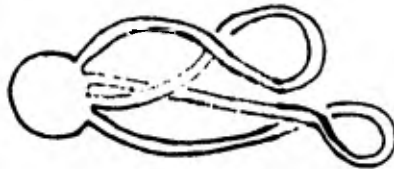
$$\Delta(t) = t^{2g} \Delta\left(\frac{1}{t}\right)$$

Q.E.D.

Ejemplo

El Trébol:

En el capítulo IV vimos que el trébol tiene a la siguiente superficie como Superficie de Seifert:



$$v = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$v^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \Delta(t) = \det (v - tv^T)$$

$$= \begin{vmatrix} -1+t & -t \\ 1 & -1+t \end{vmatrix} = t^2 - 2t + 1 + t = t^2 - t + 1$$

Sea $E = (E_{ij})$ una matriz de $2h \times 2h$ con entradas en los enteros.

A partir de ella podemos obtener el siguiente determinante:

$$D = \begin{vmatrix} E_{11}(1-t) & E_{12}(1-t)+t & \dots & E_{1\ 2h-1}(1-t) & E_{1\ 2h}(1-t) \\ E_{12}(1-t)-1 & E_{22}(1-t) & \dots & E_{2\ 2h-1}(1-t) & E_{2\ 2h}(1-t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_{2h-1\ 2h-1}(1-t) & E_{2h-1\ 2h}(1-t)+t \\ E_{12h}(1-t) & E_{22h}(1-t) & \dots & E_{2h-1\ 2h}(1-t)-1 & E_{2h\ 2h}(1-t) \end{vmatrix}$$

Sea W_h el determinante de $2h \times 2h$ obtenido del anterior haciendo

$E_{14}, E_{36}, \dots, E_{2h-3\ 2h}$ y E_{22} iguales a 1

$E_{13}, E_{35}, \dots, E_{2h-3, 2h-1}$ y E_{11} sin determinar y los demás nulos

$$W_1 = \begin{vmatrix} E_{11}(1-t) & t \\ -1 & 1-t \end{vmatrix}$$

Sea $p(t)$ un polinomio normalizado que cumple las siguientes condiciones:

(i) Existe un entero n tal que

$$p(t) = t^{2n} p\left(\frac{1}{t}\right)$$

(ii) $|p(1)| = 1$

Entonces podemos escoger coeficientes (E_{ij}) tal que $W_n = p(t)$

Demostración

Lo demostraremos por inducción sobre n .

Para $n = 1$

$$p(t) = C_0 + (1-2C_0)t + C_0t^2$$

Sea $E_{11} = C_0$.

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} E_{11}(1-t) & t \\ -1 & 1-t \end{vmatrix} = C_0(1-t)^2 + t = C_0 - 2C_0t + C_0t^2 + t \\ &= C_0 + (1-2C_0)t + C_0t^2 = p(t) \end{aligned}$$

Supongamoslo cierto para $n-1$ i.e. podemos lograr cualquier polinomio simétrico de grado $2n-2$ que valga 1 evaluando en 1 usando W_{n-1} .

$$\text{Sea } q(t) = p(t) - C_0(1-t)^{2n} / t$$

Es un polinomio, ya que el coeficiente constante de la resta es nulo. Además, por la simetría de $p(t)$, el exponente mayor de $q(t)$ es $2n-2$. Es fácil verificar que $q(t)$ cumple (i), (ii). Por la hipótesis de inducción podemos escoger coeficientes t_n tales que $W_{n-1} = q(t)$

Por * tenemos:

$$W_n = (-1)^{n-1} E_{2n-3 \ 2n-1} (1-t)^{2n} + t W_{n-1}$$

Sea $E_{2n-3 \ 2n-1} = (-1)^{n-1} C_0$; por lo tanto

$$W_n = C_0(1-t)^{2n} + t q(t)$$

$$= C_0(1-t)^{2n} + p(t) - C_0(1-t)^{2n} = p(t)$$

Q.E.D.

Sea $V = (V_{ij})$ una matriz de Seifert. Las igualdades

$$V_{ij} - tV_{ji} = V_{ij}(1-t) + t \quad i = 2\ell-1$$

$$V_{ji} - tV_{ij} = V_{ij}(1-t) - t \quad j = 2\ell$$

$$V_{ij} = v_{ji} \quad i \neq 2\ell-1 \quad \& \quad j \neq 2\ell$$

muestran que si tomamos $(E_{ij}) = (V_{ij})$ en el determinante D , entonces

$$D = |V - tV^T|$$

Evidentemente V puede ser la matriz de Seifert de una infinidad de nudos, por lo cual el lema 5.3 nos conduce al siguiente teorema:

5.4 TEOREMA

Cualquier polinomio $p(t)$ que cumpla con las propiedades (i), (ii) del lema 5.3 es el polinomio de Alexander de un nudo.

Por lo tanto los teoremas 5.2, 5.4 caracterizan al Polinomio de Alexander.

VI ESPACIOS CUBRIENTES DE $S^1 - K$

Dado un nudo poligonal $K \subset S^1$ construimos una superficie compacta orientable M tal que $\partial M = K$. En este capítulo construiremos espacios cubrientes de $S^1 - K$ a partir de M .

Por ser una 3-variedad, S^1 es triangulable y posee una estructura de complejo simplicial finito donde M figura como un subcomplejo bidimensional y K como un subcomplejo unidimensional.

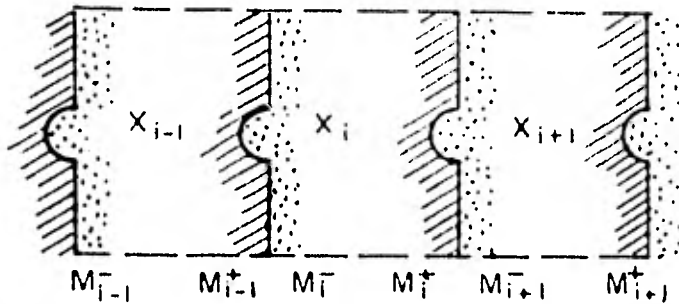
Sea C_1 una colección de 3-simplejos disjuntos en correspondencia biunívoca con los de la triangulación anterior de S^1 .

Unimos dos de ellos sobre un 2-simplejo cerrado si los correspondientes en S^1 están unidos mediante una cara que no está en M . De este espacio resultante eliminamos los 1-simplejos que corresponden a K y así obtenemos un complejo X y un mapeo natural $\phi : X \rightarrow S^1 - K$ que hace corresponder dos 2-simplejos en X a un 2 simplejo en M . A este espacio lo llamaremos $S^1 - K$ partido sobre M .

Sea $C_2 = \{X_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ una colección disjunta numerable de copias de X . Cada X_i posee dos copias de M , que denotaremos por M_i^+ , M_i^- .

Ahora formamos el siguiente espacio de identificación: unimos X_i con X_{i+1} identificando M_i^- con M_{i+1}^+ en forma natural. De esta manera obtenemos un complejo \hat{X} y un mapeo $p : \hat{X} \rightarrow S^1 - K$

inducido por las ϕ_i .



Como M es orientable y de hecho posee un collar doble podemos considerar al espacio de identificación obtenido \hat{X} como el resultado de pegar los X_i utilizando copias de M i.e. pegamos X_i sobre un lado de M y X_{i+1} sobre el otro.

6.1 PROPOSICION

(\hat{X}, p) es un espacio cubriente de $S^1 - K$.

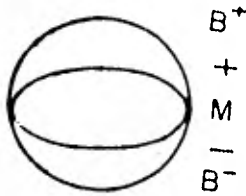
Demostración:

Es evidente que \hat{X} es un espacio arco-conectable y que p es una función suprayectiva y continua.

Si $x \notin M$, es claro que alrededor de x existe una vecindad lo suficientemente pequeña V tal que las arco-componentes de su imagen inversa se mapeen homeomorficamente

sobre ella; ya que esta imagen inversa es la unión ajena de vecindades idénticas a V en cada X_i .

Ahora sea $x \in M$ y B una bola alrededor de x tal que yaza totalmente sobre $M - K$. El collar doble de M induce una división de B en dos semi-bolas B^+ , B^- cuya frontera común es un disco sobre M .



En cada X_i hay una copia B^+ sobre B^- y una copia B^- sobre B^+ .

Tenemos las siguientes igualdades:

$$p^{-1}(B^+) = \coprod B_i^+$$

$$p^{-1}(B^-) = \coprod B_i^-$$

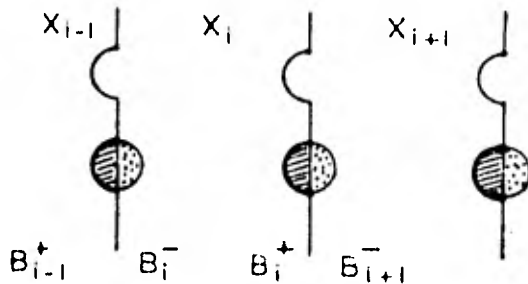
Entonces

$$p^{-1}(B) = (\coprod B_i^+) \cup (\coprod B_i^-)$$

$$= \coprod (B_i^+ \cup B_i^-)$$

Donde $B_i^+ \cup B_i^-$ es un abierto en X y es claro que se mapea homeomorficamente sobre B .

El siguiente diagrama muestra lo anterior:



Por lo tanto todo punto de $S^1 - K$ posee una vecindad bien cubierta, por lo que (\hat{X}, p) es un espacio cubriente de $S^1 - K$.

El espacio $S^1 - K$ es una 3-variedad no compacta, por lo que obtenemos el siguiente corolario:

COROLARIO:

\hat{X} es una 3-variedad no compacta.

□

Es un resultado conocido que los espacios cubrientes de X se corresponden biunivocamente con las clases de conjugación de subgrupos de $\pi_1(X)$. Mostraremos ahora que \hat{X} es de hecho un espacio cubriente regular i.e.

$$p_* \pi_1(\hat{X}) \triangleleft \pi_1(X)$$

$$X = S^1 - K$$

y que de hecho $p_* \pi_1(\hat{X}) = [\pi_1(X), \pi_1(X)]$, el subgrupo conmutador de $\pi_1(X)$.

6.2 PROPOSICION:

Sea (Y, q) un espacio cubriente de $X = S^1 - K$ donde K es un nudo poligonal. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) Un lazo w en $S^1 - K$ se levanta a un lazo en Y si y sólo si $\ell K(w, K) = 0$
- (ii) $q_* \pi_1(Y)$ es el subgrupo conmutador de $\pi_1(X)$.

Demostración:

El entero $\ell K(w, K)$ es la suma algebraica de las veces que w pasa por debajo de K de izquierda a derecha. Podemos considerar a $[w]$ como un elemento de $\pi_1(X)$. Entonces se puede expresar a $[w]$ como un producto de generadores en la presentación superior de este grupo. Es evidente que aparece un generador cada vez que w pasa por debajo de K y el signo está determinado según si es de izquierda a derecha o al revés.

$$\text{i.e.} \quad [w] = X_{i_1}^{r_1} \dots X_{i_k}^{r_k}$$

$$\text{Pero entonces } \ell K(w, K) = \sum_{j=1}^k r_j = 0$$

Sea $\mathcal{A} : \pi_1(X) \longrightarrow H_1(X)$ el abelianizador; como $\mathcal{A}(X_{i_j}^{r_j}) = r_j t_j$,

entonces $\mu([w]) = 1$

Inversamente es claro que la suma de los exponentes de un elemento del conmutador es nulo de donde obtenemos

$$(1) \quad \ell_k(w, K) = 0 \iff [w] \in [\pi_1(X), \pi_1(X)]$$

Ahora (i) es equivalente a

$$[w] \in q_* \pi_1(Y) \iff \ell_k(w, K) = 0$$

y (ii) es equivalente a

$$[w] \in q_* \pi_1(Y) \iff [w] \in [\pi_1(X), \pi_1(X)]$$

por lo cual el resultado se desprende inmediatamente de (1)

Q.E.D.

6.3 PROPOSICION:

Sea (\tilde{X}, p) la cubierta cíclica infinita de $S^1 - K$

Entonces, si α es un lazo en $S^1 - K$,

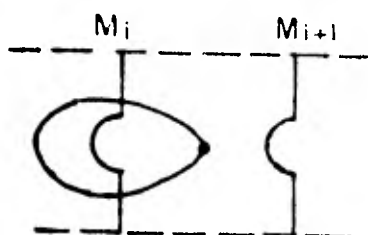
$$\ell_k(\alpha, K) = 0 \iff [\alpha] \in p_* \pi_1(\tilde{X})$$

Demostración

\Rightarrow) Sea $\alpha: I \longrightarrow S^1 - K$ con punto base x_0 y sea $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$.

Tomemos $\tilde{\alpha}$ el único levantamiento de α con punto inicial \tilde{x}_i .

La condición $\ell K(\alpha, K) = 0$ implica que α corta a la superficie de Seifert M de K de $+$ a $-$ igual número de veces que de $-$ a $+$. Lo mismo será cierto de la trayectoria $\tilde{\alpha}$ con respecto a la copia involucrada de M .



Esto implica que forzosa-
mente $\tilde{\alpha}$ debe terminar en su
punto inicial, ya que debe
cruzar a M_i por cada lado
el mismo número de veces.

Entonces α induce la permutación trivial sobre la fibra $p^{-1}(x_0)$ y claramente $[\alpha] \in p_* \pi_1(\tilde{X})$.

\Leftarrow) Si $[\alpha] \in p_* \pi_1(\tilde{X})$, entonces se levanta a un lazo de donde se desprende que

$$\ell K(\alpha, K) = 0$$

Q.E.D.

Como consecuencia inmediata de 6.2 y 6.3, obtenemos el teorema siguiente:

6.4 TEOREMA:

Sea $K \subset S^3$ un nudo poligonal y sea (\tilde{X}, p) su cubierta cíclica infinita. Entonces:

$$p_* \pi_1(\hat{X}) = [\pi_1(X), \tau_1(X)]$$

□

6.5 COROLARIO

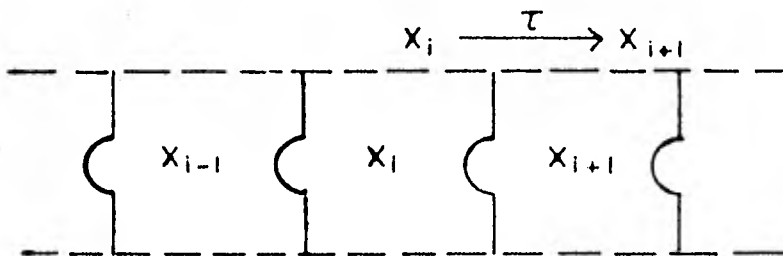
(\hat{X}, p) es un espacio cubriente regular de $X = S^1 - K$
y $\text{Aut}(\hat{X}, p) \cong \mathbb{Z}$.

Demostración:

Se sigue del hecho de que $[\pi_1(X), \pi_1(X)] \cong \pi_1(X)$
y $\text{Aut}(\hat{X}, p) \cong \pi_1(X) / p_* \pi_1(\hat{X}) \cong \mathbb{Z}$.

Q.E.D.

Es evidente que $\text{Aut}(\hat{X}, p)$ está generado por una traslación



6.6 PROPOSICION

Sea (\hat{X}, p) un espacio cubriente regular de $X = S^1 - K$.
Entonces $\text{Aut}(\hat{X}, p) \cong \mathbb{Z}$ si y sólo si \hat{X} es isomorfo a la cubierta cíclica infinita de X .

Demostración:

Basta mostrar que $p_* \pi_1(\tilde{X}) = [\pi_1(X), \pi_1(X)]$

Tenemos la sucesión exacta

$$1 \longrightarrow \pi_1(\tilde{X}) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X) \xrightarrow{\psi} \text{Aut}(\tilde{X}, p) \longrightarrow 1$$

como $\pi_1(X) / p_* \pi_1(\tilde{X}) \cong \text{Aut}(\tilde{X}, p) \cong \mathbb{Z}$, entonces

$[\pi_1(X), \pi_1(X)] \subset p_* \pi_1(\tilde{X})$. Por lo tanto está bien definido el epimorfismo inducido:

$$\pi_1(X) / [\pi_1(X), \pi_1(X)] \xrightarrow{\tilde{\psi}} \text{Aut}(\tilde{X}, p) \longrightarrow 1$$

Como todo epimorfismo en \mathbb{Z} es isomorfismo, entonces $\text{kernel } \tilde{\psi}$
 $= p_* \pi_1(\tilde{X}) / [\pi_1(X), \pi_1(X)] = 1$

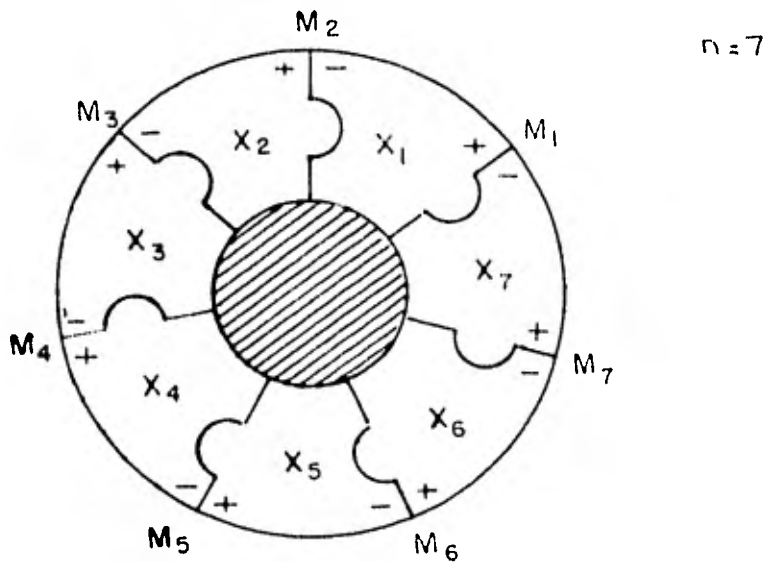
i.e. $p_* \pi_1(\tilde{X}) = [\pi_1(X), \pi_1(X)]$

Q.E.D.

Se verifica además que la cubierta cíclica infinita cubre a cualquier otro espacio cubriente regular de $S^1 - K$ cuyo grupo de automorfismos es abeliano. Por lo tanto (\tilde{X}, p) es llamada la cubierta abeliana universal de $S^1 - K$, ya que esta propiedad caracteriza a \tilde{X} salvo isomorfismo.

Dado un entero n , es claro que podemos construir un espacio cubriente de $S^1 - K$ con n copias de $S^1 - K$ partido sobre la superficie de Seifert M de K . Simplemente pegamos las n -copias como en el caso anterior y los extremos i.e. pegamos

X_i con X_n usando una copia de M .



$X_i = S^3 - K$ partido sobre M .

De nuevo obtenemos un espacio cubriente de $S^3 - K$ que denotaremos por (\hat{X}_n, p_n)

6.7 PROPOSICION

(\hat{X}_n, p_n) es un espacio cubriente regular de $S^3 - K$ que corresponde al kernel del mapeo

$$\pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(X) / [\pi_1(X), \pi_1(X)] \longrightarrow \mathbb{Z}/(n)$$

Demostración:

Sea α un lazo en $S^1 - K$ basado en x_0 .

Si el levantamiento $\tilde{\alpha}$ con punto inicial $x p_n^{-1}(x_0)$ es un lazo, es evidente que lo mismo ocurre en cada punto de la fibra. Igualmente si no ocurre en x , no ocurre en ningún punto de la fibra. Por lo tanto (\tilde{X}_n, p_n) es un espacio cubriente regular de $S^1 - K$.

Ahora cualquier automorfismo ψ de (\tilde{X}_n, p_n) debe llevar a \tilde{X} homeomorficamente en si mismo tal que el diagrama siguiente conmute:

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{X}_n & \xrightarrow{\psi} & \tilde{X}_n \\
 p_n \searrow & & \swarrow p_n \\
 & x &
 \end{array}$$

Por lo tanto es claro que $\text{Aut}(\tilde{X}_n, p_n)$ está generado por la rotación de $X_i \longrightarrow X_{i+1}$ de orden n . i.e.

$$\text{Aut}(\tilde{X}_n, p_n) \cong \mathbb{Z}/(n).$$

Por lo tanto obtenemos la sucesión exacta:

$$1 \longrightarrow \pi_1(\tilde{X}_n) \xrightarrow{p_{n*}} \pi_1(X) \longrightarrow \mathbb{Z}/(n) \longrightarrow 1$$

Como $\mathbb{Z}/(n)$ es abeliano, $[\pi_1(X), \pi_1(X)] \subset p_{n*}^{-1}(1)$

Por lo que está bien definido el epimorfismo inducido

$$Z = \pi_1(X) / [\pi_1(X), \pi_1(X)] \longrightarrow Z/(n) \longrightarrow 1$$

con kernel $p_{n*} \pi_1(\hat{X}_n) / [\pi_1(X), \pi_1(X)]$. Pero forzosamente este kernel debe ser nZ , el kernel de la proyección canónica.

$\Rightarrow p_{n*} \pi_1(\hat{X}_n)$ es el kernel del mapeo dado.

Q. E. D.

VII LOS INVARIANTES ABELIANOS.

(i) A primera vista, los invariantes abelianos más importantes de un espacio son sus grupos de homología y cohomología y sus grupos superiores de homotopía. Sin embargo, en el caso de un nudo poligonal en S^3 no son relevantes.

7.1 TEOREMA

Sea K un nudo poligonal, entonces

$$(i) H_i(S^3 - K) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$(ii) H_i(R^3 - K) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, 1, 2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Demostración:

$S^3 - K$ y $R^3 - K$ son 3-variedades no compactas por lo que $H_i(S^3 - K) = H_i(R^3 - K) = 0 \quad i \geq 3$

Ahora sea V una vecindad tubular de K en S^3 y sea U el complemento de una vecindad tubular V' de radio menor que V . entonces $U \cup V' = S^3 - K$ y U tiene el tipo de homotopía de $S^3 - K$ y $U \cap V'$ la de un toro. Aplicando Mayer-Vietoris obtenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow H_3(S^3) \longrightarrow H_2(U \cap V') \longrightarrow H_2(U) \oplus H_2(V') \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow Z \longrightarrow H_2(U) \longrightarrow 0 \quad (*)$$

Por el teorema de dualidad de Poincaré-Lefschetz, obtenemos un isomorfismo

$$\begin{aligned} H_2(U) &= H_2(S^3 - V') = H^1(S^3 - V', \mathcal{G}(S^3 - V')) \\ &= H^1(S^3 - V', T') \end{aligned}$$

donde T' es un toro. Pero por otra parte

$$H^1(S^3 - V', T') \cong \text{Ext}(H_0(S^3 - V', T'), Z) \oplus \text{Hom}(H_1(S^3 - V', T'), Z)$$

Pero como $H_0(S^3 - V', T')$ es libre abeliano, entonces el primer sumando se anula

$$\text{i.e. } H_2(U) \cong \text{Hom}(H_1(S^3 - V', T'), Z)$$

Por (*), $H_2(U)$ ó es nulo o es isomorfo a algún Z/k ; pero el segundo caso es imposible por el isomorfismo anterior

$$H_2(U) = H_2(S^3 - K) = 0$$

Por la proposición 2.4, sabemos que $H_2(S^3 - K) = Z$, de donde obtenemos (i):

$$H_i(S^3 - K) = \begin{cases} Z & i = 0, 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Ahora consideremos las sucesiones exactas de parejas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H_1(S^1) & \longrightarrow & H_1(S^1, S^1 - K) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \cong & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & H_1(R^1, R^1 - K) & \longrightarrow & H_1(R^1 - K) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Por excisión $H_1(R^1, R^1 - K) \cong H_1(S^1, S^1 - K)$, de donde se desprende del diagrama anterior que $H_1(R^1 - K) = \mathbb{Z}$.

Por el lema 2.2, $H_i(R^1 - K) = H_i(S^1 - K)$, de donde obtenemos

$$(ii) \quad H_i(R^1 - K) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, 1, 2. \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

7.2 COROLARIO:

$$H^*(S^1 - K) = H_*(S^1 - K) \quad H^*(R^1 - K) = H_*(R^1 - K)$$

Demostración:

Es consecuencia del isomorfismo

$$H^n(X) \cong \text{Ext}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}) \oplus \text{Hom}(H_n(X), \mathbb{Z})$$

□

7.3 TEOREMA DE PAPAKYRIAKOPOULOS (Ver [R])

Si $X = S^1 - K$ es el complemento de un nudo en S^1 , entonces $\pi_i(X) = 0 \quad i \geq 2$.

Demostración:

Supongamos que $\pi_2(X) \neq 0$; el teorema de la esfera asegura la existencia de una esfera H que no es contraíble en X . El teorema de Schönflies implica que las cerraduras de ambos lados de $S^1 - H$ son 3-bolas. Como K es conexo, yace en alguno de estos lados; la esfera se contrae a un punto en el otro lado y por lo tanto en X , lo cual es una contradicción, de donde $\pi_2(X) = 0$.

Sea U la cubierta universal de $S^1 - K$; entonces es una 3-variedad no compacta por lo que $H_i(U) = 0 \quad i \geq 3$. Como U es simplemente conexo, entonces por el Teorema de Isomorfismo de Hurewicz, se tiene que $H_2(U) \cong \pi_2(U) \cong \pi_2(X) = 0$. Por lo tanto $H_i(U) = 0 \quad i \geq 1$. Aplicando este teorema sucesivamente, obtenemos isomorfismos

$$\pi_n(U) \cong H_n(U) = 0$$

De donde se sigue el resultado.

□ E □

Observación:

Este resultado no es cierto para $R^2 - K$.

(ii) La homología de los espacios cubrientes de $S^1 - K$,
construidos en VI es un invariante relativamente sencillo
de calcular que distingue muchos tipos de nudo.

Sea (\tilde{X}, p) la cubierta cíclica infinita de $X = S^1 - K$,
donde K es un nudo poligonal. Sea $\tau : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ el automor-
fismo generador de $\text{Aut}(\tilde{X}, p)$.

Sea $t : H_*(\tilde{X}) \rightarrow H_*(\tilde{X})$ el isomorfismo inducido por τ .

7.4 TEOREMA: (Ver [M1])

$t - 1 : H_i(\tilde{X}) \rightarrow H_i(\tilde{X})$ es un isomorfismo $\forall i > 0$
y el homomorfismo trivial para $i = 0$.

Demostración:

Tomemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow C_*(\tilde{X}) \xrightarrow{t-1} C_*(\tilde{X}) \xrightarrow{p_*} C_*(X) \longrightarrow 0$$

Da lugar a la siguiente sucesión larga de homología:

$$\dots \longrightarrow H_i(\tilde{X}) \xrightarrow{t-1} H_i(\tilde{X}) \xrightarrow{p} H_i(X) \xrightarrow{\partial} H_{i-1}(\tilde{X}) \longrightarrow \dots$$

En nuestro caso $H_*(X) = H_*(S^1)$, por lo cual obtenemos:

$$0 \longrightarrow H_i(\tilde{X}) \xrightarrow{t-1} H_i(\tilde{X}) \longrightarrow 0 \quad i > 2$$

lo que queda es la sucesión

$$0 \longrightarrow H_1(\hat{X}) \xrightarrow{t-1} H_1(\hat{X}) \xrightarrow{p_*} H_1(X) \xrightarrow{\beta} H_0(\hat{X}) \xrightarrow{t-1} H_0(\hat{X}) \xrightarrow{p_*} H_0(X) \longrightarrow 0$$

como todo epimorfismo en \mathbb{Z} es un isomorfismo, esto se convierte en

$$0 \longrightarrow H_1(\hat{X}) \xrightarrow{t-1} H_1(\hat{X}) \xrightarrow{0} H_1(\hat{X}) \cong H_0(\hat{X}) \xrightarrow{0} H_0(\hat{X}) \cong H_0(X) \longrightarrow 0$$

De donde obtenemos el isomorfismo

$$0 \longrightarrow H_1(\hat{X}) \xrightarrow{t-1} H_1(\hat{X}) \longrightarrow 0$$

y el homomorfismo trivial

$$H_0(\hat{X}) \xrightarrow{t-1=0} H_0(\hat{X}) .$$

Q.E.D.

Sea $K \subset S^1$ un nudo y sea \hat{X} su cubierta abeliana universal.

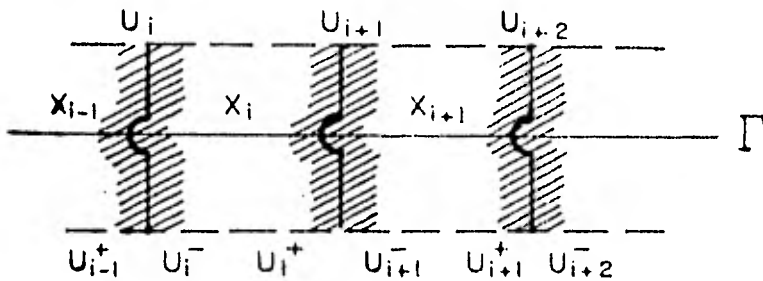
Mediante una sucesión de Mayer-Viaectoris calcularemos la homología singular de \hat{X} .

Por el teorema 6.1, \hat{X} es una 3-variedad no compacta, por lo que $H_i(\hat{X}) = 0 \quad i \geq 3$

Construimos \hat{X} a partir de copias X_i de $S^1 - K$ partido sobre M , (una superficie de Seifert para K) y pegadas usando las dos copias distintas de M que posee, digamos M_1^+ , M_1^- .

Sean U_i^+ , U_i^- vecindades abiertas sobre M_1^+ , M_1^- respectivamente en X_i . Sea U_i una vecindad alrededor de cada copia de M en \hat{X} tal que $U_i - M = U_{i-1}^+ \cup U_i^-$.

Sea $U = (\cup U_i) \cup \Gamma$, con Γ un segmento para unir las piezas.



Sea $V_i = \text{int } X_i$, y sea $V = (\cup V_i) \cup \Gamma$

Evidentemente $\hat{X} = U \cup V$ y además tenemos $U \cap V = \cup (U_i^+ \cup U_i^-) \cup \Gamma$. Aplicando Mayer-Vietoris, obtenemos la sucesión exacta:

$$\dots \longrightarrow H_n(U \cap V) \xrightarrow{(i_*, -j_*)} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{i_* + j_*} H_n(\hat{X}) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(U \cap V) \longrightarrow$$

Cada U_i tiene el tipo de homotopía de M , que a su vez tiene el tipo de homotopía de una gráfica. Por lo tanto $H_2(U) = 0$. Cada V_i tiene el tipo de homotopía de $S^1 - M$; haciendo un cálculo parecido al del teorema 7.1 se puede ver que la homo-

leña del complemento de una gráfica en S^1 se anula en dimensión 2 por lo que $H_2(S^1 - M) = 0$ y por lo tanto $H_2(V) = 0$

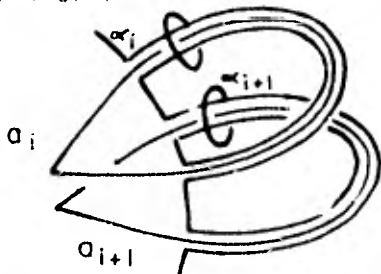
U_i^+ y U_i^- tienen el tipo de homotopía de M , por lo que $H_2(U \cap V) = 0$

Consideremos la copia U_0 ; $H_1(U_0)$ es un grupo libre abeliano con base a_1, \dots, a_{2g} donde g es el número de bandas de M y los generadores corresponden a ciclos sobre ellas. Es claro entonces que

$$t^j a_1, \dots, t^j a_{2g} \quad j \in \mathbb{Z}$$

Son una base para $H_1(U)$

Tomemos ahora V_0 , es una copia de $S^1 - M$, por lo cual $H_1(V_0)$ posee una base con $2g$ generadores:



La base es a_1, \dots, a_{2g}

Por lo tanto $t^j a_1, \dots, t^j a_{2g} \quad j \in \mathbb{Z}$ constituye una base para $H_1(V)$.

Finalmente consideremos U_0^+ ; $H_1(U_0^+)$ tiene una base x_1^+, \dots, x_{2g}^+ que corresponde a la de $H_1(M)$ levantado en forma normal positiva; análogamente x_1^-, \dots, x_{2g}^- es una base para $H_1(U_0^-)$. Por lo tanto $t^j x_1^+, \dots, t^j x_{2g}^+ ; t^j x_1^-, \dots, t^j x_{2g}^-$

es una base para $H_1(U \cap V)$,

Obtenemos la sucesión exacta reducida:

$$0 \longrightarrow H_2(\tilde{X}) \xrightarrow{\partial} H_1(U \cap V) \xrightarrow{\psi} H_1(U) \oplus H_1(V) \longrightarrow H_1(\tilde{X}) \longrightarrow 0$$

Afirmamos que $\partial = 0$

Sea $y \neq 0$, $y \in \text{im } \partial \subset H_1(U \cap V)$; por lo tanto tiene una expresión única en términos de su base, que denotaremos por

$\{t^j e_i\} \quad j \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, 4g.$

$$y = \sum_{j=k}^m \sum_{i=1}^n C_{ij} t^j e_i$$

donde k es la mínima j con algún $C_{ij} \neq 0$ y m la máxima

Sea M un entero positivo cualquiera; por la proposición 7.4,

$(t-1)^M: H_2(\tilde{X}) \longrightarrow H_2(\tilde{X})$ es suprayectiva, y existe $u \in H_2(\tilde{X})$ tal que

$$y = \partial \left[(t-1)^N u \right] = (t-1)^N \partial u^*$$

donde podemos expresar ∂u como

$$\sum_{j=S}^r \sum_{i=2}^t d_{ij} t^j e_i$$

con S la mínima j tal que algún $d_{ij} \neq 0$ y r la máxima.

Esto implica que

* t conmuta con inclusiones y fronteras.

$$m = S + M$$

$$k = r$$

Por lo tanto $m - k = S + M - r = M + (S - r) \geq M$
 para todo M entero positivo, lo cual es una contradicción.
 Deducimos que $\partial = 0$

Ahora $H_2(\hat{X}) \cong \text{im } \partial$, por lo que $H_2(\hat{X}) = 0$
 y obtenemos $H_1(\hat{X}) \cong \text{Coker } \psi$, donde

$$\psi = (i_*, -j_*) : H_1(U \cap V) \longrightarrow H_1(U) \oplus H_1(V)$$

Por lo tanto obtenemos la siguiente presentación in-
 finita de $H_1(\hat{X})$ como grupo abeliano:

$$\text{GENERADORES: } t^j a_i, t^j \alpha_i \quad j \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, 2g$$

RELACIONES:

$$i_*(t^j x_i^+) = t^{j+1} a_i = j_*(t^j x_i^+) \quad i = 1, \dots, 2g$$

$$j \in \mathbb{Z}$$

$$i_*(t^j x_i^+) = t^j a_i = j_*(t^j x_i^-)$$

Por lo tanto podemos eliminar a los generadores $t^j a_i$ y ob-
 tener la siguiente presentación:

$$(t^j \alpha_i : t^j j_*(x_i^+) = t^{j+1} j_*(x_i^-) \quad j \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, 2g)$$

Consideremos ahora la cubierta cíclica finita \tilde{X}_k de $S^3 - K$. Como \tilde{X} cubre a \tilde{X}_k , obtenemos la siguiente sucesión exacta de cadenas:

$$0 \longrightarrow C_*(\tilde{X}) \xrightarrow{t^k - 1} C_*(\tilde{X}) \longrightarrow C_*(\tilde{X}_k) \longrightarrow 0$$

Induce la sucesión larga de homología:

$$\dots \rightarrow H_i(\tilde{X}) \xrightarrow{t^{k-1}} H_i(\tilde{X}) \longrightarrow H_i(\tilde{X}_k) \xrightarrow{\Delta} H_{i-1}(\tilde{X}) \longrightarrow \dots$$

como

$$H_2(\tilde{X}) = 0 \quad \text{y} \quad H_i(\tilde{X}_k) = 0 \quad i \geq 3 \quad \text{obtenemos}$$

$$0 \longrightarrow H_2(\tilde{X}_k) \longrightarrow H_1(\tilde{X}) \xrightarrow{t^{k-1}} H_1(\tilde{X}) \longrightarrow H_1(\tilde{X}_k) \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

Por la inyectividad de t^{k-1} , $H_1(\tilde{X}_k) = 0$

Reduciendo mod $\text{im } t^{k-1}$ obtenemos:

$$0 \longrightarrow \text{Coker } t^k - 1 \longrightarrow H_1(\tilde{X}_k) \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

Como Z es proyectivo, se escinde esta sucesión, por lo que

$$H_1(\tilde{X}_k) \cong \text{Coker}(t^k - 1) \oplus Z.$$

Así obtenemos la siguiente presentación finita de $H_1(\hat{X}_k)$:

$$(\gamma_i, t^j \alpha_i : t^i j_*(x_i^+) = t^{j+1} j_*(x_i^-) \quad i = 1, \dots, 2g \quad 0 \leq j < k)$$

(iii) $H_1(\hat{X})$ visto como $Z[t, t^{-1}]$ - módulo

Sea $\tau : \hat{X} \rightarrow \hat{X}$ el generador canónico de $\text{Aut}(\hat{X}, p)$ determinado por una orientación de K y de S^1 .

Sea $t = \tau_* : H_1(\hat{X}) \rightarrow H_1(\hat{X})$

Tomemos un elemento $p(t) = \sum_{k=r}^s C_k t^k \in Z[t, t^{-1}]$

y sea $x \in H_1(\hat{X})$. Definimos

$$p(t)x = \sum_{k=r}^s C_k \tau_*^k x = \sum_{k=r}^s C_k t^k x \in H_1(\hat{X})$$

Este producto le otorga a $H_1(\hat{X})$ una estructura de

$Z[t, t^{-1}]$ - módulo.

A continuación mostraremos que esta estructura da lugar a invariantes del nudo que son manejables y relacionados a los invariantes algebraicos del capítulo III.

7.5 PROPOSICION:

$H_1(\hat{X})$ es un $\Lambda = Z[t, t^{-1}]$ - módulo finitamente presentado y de torsión; $H_0(\hat{X})$ es un Λ -módulo cíclico de orden $t-1$.

Demostración:

En el anillo Λ , t^j es una unidad por lo cual la presentación infinita de $H_1(\hat{X})$ como grupo abeliano se convierte en

la siguiente presentación finita:

Generadores: $a_i \quad i = 1, \dots, 2g$

Relaciones: $j_*(x_i^+) = t j_*(x_i^-)$
 $i = 1, \dots, 2g$

Para ver que es de torsión observamos que $t - 1: H_1(\tilde{X}) \rightarrow H_1(\tilde{X})$ es un epimorfismo por 7.4. Entonces podemos escribir para el conjunto de generadores a_1, \dots, a_{2g}

$$a_i = (t-1) \sum_{j=1}^{2g} C_{ij} a_j$$

i.e.

$$\sum_{j=1}^{2g} C'_{ij} a_j = 0 \quad \text{donde} \quad C'_{ij} = (t-1) C_{ij}$$

$$C'_{ii} = (t-1) C_{ii} - 1$$

Ahora sea $\Delta = \det (C'_{ij})$; entonces

$$\Delta a_i = 0 \quad i = 1, \dots, 2g, \text{ por lo que } \Delta y = 0$$

$\forall y \in H_1(\tilde{X})$. Ahora sea $t: \Delta \rightarrow \mathbb{Z}$ el trivializador:

$$t(C'_{ij}) = -\delta_{ij}$$

por lo que $t(\Delta) = \pm 1$ y por lo tanto $\Delta \neq 0$.

Esto demuestra que $H_1(\tilde{X})$ es de torsión.

Ahora como grupo abeliano, $H_0(\tilde{X}) = \mathbb{Z}$, por lo que es evidentemente cíclico como Δ -módulo. Además en la demos-

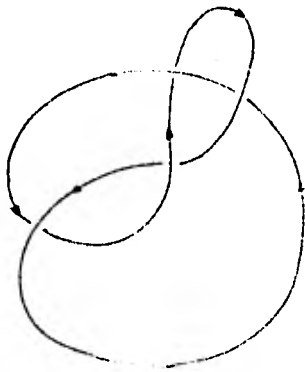
Proposición de 7.4, obtuvimos que el morfismo $H_1(\tilde{X}) \xrightarrow{\tau-1} H_0(\tilde{X})$ es el morfismo cero; se sigue como consecuencia de esto que

$$H_0(\tilde{X}) \cong \mathbb{Z}/(t-1)$$

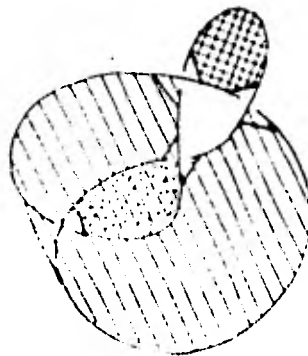
Q.E.D.

7.6 UN EJEMPLO

El nudo del 8 : (a) $H_1(\tilde{X}_2)$

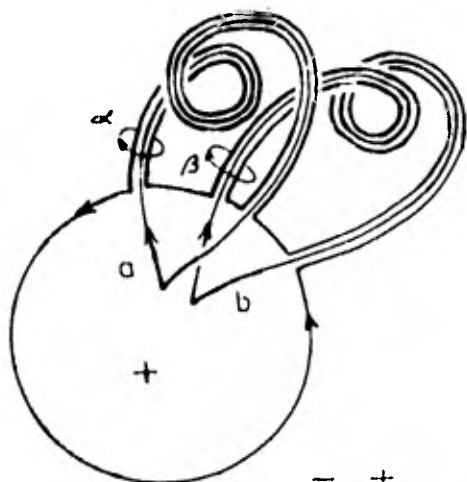


PROYECCION



SUPERFICIE DE SEIFERT

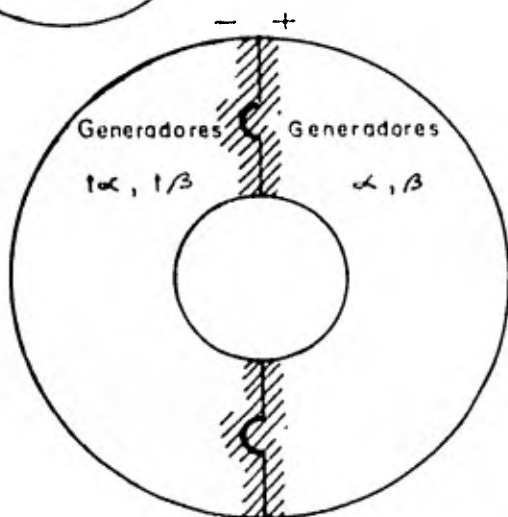
Podemos deformar esta superficie para obtener la siguiente:



Para obtener $H_1(\tilde{X}_1)$ y $H_1(\tilde{X})$, simplemente necesitamos las relaciones

$$j_{\bullet} a^+ = j_{\bullet} a^-$$

$$j_{\bullet} b^+ = j_{\bullet} b^-$$



$$j_{\bullet} a^+ = a$$

$$j_{\bullet} b^+ = -a - \beta$$

$$j_{\bullet} a^- = a - \beta$$

$$j_{\bullet} b^- = -\beta$$

Nuestra presentación para

$H_1(\tilde{X}_1)$ es

$$(a, \beta, t\alpha, t\beta, \quad : a = t(a-\beta), a+\beta=t\beta$$

$$a - \beta = t\alpha, \quad \beta = t(+\beta))$$

Podemos eliminar $t\alpha, t\beta$, para obtener

$$(a, \beta, \gamma : 2a + \gamma = a - \beta, \beta = 2a)$$

$$(a, \gamma : 5a = 0$$

Por lo tanto $H_1(\tilde{X}_1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(5)$

(b) el A -módulo $H_1(\tilde{X})$:

La presentación está dada por

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta & : \alpha = t(\alpha - \beta), \alpha + \beta = t\beta) \\ \sim (\beta & : t\beta - \beta = t(t\beta - 2\beta)) \\ \sim (\beta & : (t^2 - 3t + 1)\beta) = \Delta/(t^2 - 3t + 1) \end{aligned}$$

observemos que $t^2 - 3t + 1$ es el polinomio de Alexander del nudo del 8.

(iv) La relación entre $H_1(\tilde{X})$ y la matriz de Alexander.

En esta sección uniremos los resultados de este capítulo con los del capítulo III utilizando para ello la forma de la matriz de Alexander obtenida a partir de las superficies de Seifert.

Sea $K \subset S^3$ un nudo, M una superficie de Seifert para K y $V = (V_{ij}) = (\sum_k (a_{ik}^+, a_j^-))$ su matriz asociada, donde los a_i son ciclos que corresponden a cada banda. Consideremos la presentación de $H_1(\tilde{X})$:

$$(\alpha_i : j_*(x_i^+) = t j_*(x_i^-) \quad i = 1, \dots, 2g)$$

Para obtener $j_*(x_i^+)$, basta levantar a_i en dirección normal positiva, y ver su expresión en términos de la base α_i de $S^3 - M$; análogamente para $j_*(x_i^-)$. Podemos expresar (en forma única) :

$$j_*(x_i^+) = \sum_{j=1}^{2g} q_{ij}^+ a_j$$

Pero q_{ij} no es más que la suma algebraica de las veces que la banda j -ésima pasa encima de a_i de izquierda a derecha

$$\text{i.e. } q_{ij}^+ = v_{ij} = \langle K(a_i^+, a_j) \rangle$$

Análogamente si $j_*(x_i^-) = \sum_{j=1}^{2g} q_{ij}^- a_j$, entonces

$$q_{ij}^- = \langle K(a_i^-, a_j) \rangle$$

Por lo tanto las relaciones $j_*(x_i^+) = t j_*(x_i^-)$ se expresan en la siguiente matriz de presentación:

$$(q_{ij}^+) = t (q_{ij}^-)$$

$$\langle K(a_i^+, a_j) \rangle = t \langle K(a_i^-, a_j) \rangle$$

pero $\langle K(a_i^-, a_j) \rangle = (-1)^{ij} \langle K(a_i^+, a_j) \rangle^T$ (Ver cap. IV)

Por lo tanto, nuestra matriz de presentación es

$$(v - tv^T)$$

Recordando la equivalencia de matrices definida en el capítulo III, se puede verificar que matrices equivalentes presentan Λ -módulos isomorfos y vice-versa, donde el anillo en este caso es $\Lambda = \mathbb{Z} [t, t^{-1}]$.

En el capítulo V vimos que la matriz de Alexander de K , salvo equivalencia, es $(0 \quad V - tV^T)$, por lo que concluimos lo siguiente:

7.7 TEOREMA:

La matriz de Alexander es una matriz de presentación del Λ -módulo $\Lambda \otimes H_1(\tilde{X})$, donde \tilde{X} es la cubierta cíclica infinita de $S^1 - K$ y $\Lambda = \mathbb{Z} [t, t^{-1}]$.

APENDICE(A1) TEOREMA DE SEIFERT-VAN KAMPEN (ver [Ma])

Sean $U, V \subset X$ tales que $X = U \cup V$ y $U, V, U \cap V$ son abiertos arco-conectables. Sea G cualquier grupo y h_1, h_2, h_3 homomorfismos tales que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_1(U, x_0) & \\
 \phi_1 \nearrow & & \searrow h_1 \\
 \pi_1(U \cap V, x_0) & \xrightarrow{h_3} & \pi_1(X, x_0) \\
 \phi_2 \searrow & & \nearrow h_2 \\
 & \pi_1(V, x_0) &
 \end{array}$$

ϕ_1, ϕ_2 inducidos por las inclusiones.

Entonces existe un único homomorfismo $c : \pi_1(X, x_0) \rightarrow G$ tal que conmutan los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 & \pi_1(X, x_0) & \\
 \nearrow & \downarrow \mathcal{J} & \\
 \pi_1(U, x_0) & & G
 \end{array}
 &
 \begin{array}{ccc}
 & \pi_1(X, x_0) & \\
 \nearrow & \downarrow \mathcal{J} & \\
 \pi_1(V, x_0) & & G
 \end{array}
 &
 \begin{array}{ccc}
 & \pi_1(X, x_0) & \\
 \nearrow & \downarrow \mathcal{J} & \\
 \pi_1(U \cap V, x_0) & & G
 \end{array}
 \end{array}$$

ψ_1, ψ_2, ψ_3 inducidos por las inclusiones.

(A2) DEFINICION: (Ver [C-F])

Una presentación de grupo $(X : r)$ es un objeto que consta de un conjunto X de generadores y un subconjunto r del grupo libre $F(X)$ generado por X . Los elementos de X son los generadores y los de r los relatores de la presentación. El grupo definido por esta presentación es $|X : r| = F(X)/R$ donde R es el mínimo subgrupo normal que contiene a r .

A.3 DEFINICION:

(i) Un mapeo de presentaciones $f : (X : r) \longrightarrow (Y : s)$ consiste de un homomorfismo de grupos $f : F(X) \longrightarrow F(Y)$ tal que $f(r)$ está contenido en el mínimo subgrupo normal que contiene a s i.e. $f(r) \subseteq S$.

(ii) $f_1, f_2 : (X:r) \longrightarrow (Y:s)$ son homotopicos si para todo $x \in X$, $f_1(x) f_2(x^{-1}) \in S$.

(iii) Dos presentaciones $(X : r), (Y : s)$ son equivalentes si existen mapeos $(X : r) \xrightleftharpoons[f]{f} (Y : s)$ tales que $gf = 1, fg = 1$.

(A4) DEFINICION:

Definimos las siguientes equivalencias elementales de Tietze:

$$(X : r) \xrightleftharpoons[I']{I} (X : r \cup u) \quad u \in R$$

$$i = \text{id}, \quad I' = \text{id}.$$

$$(X : r) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{II}} \\ \xleftarrow{\text{II}'} \end{array} (X, z : r \cup z \langle i^{-1} \rangle) \quad z/X \quad \text{E(P(X))}$$

$$\text{II}(x) = x; \quad \text{II}'(x) = x, \quad \text{II}'(z) = \xi$$

(A5) TEOREMA DE TIETZE

Supongamos que $(X : r) \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} (Y : s)$ es una equivalencia

de presentaciones y las presentaciones son ambas finitas (i.e. finitamente generada y relatada). Entonces existe una sucesión finita $T_1, T'_1; \dots; T_k, T'_k$ de equivalencias de Tietze tales que $f = T_1 \dots T_k$ y $g = T'_1 \dots T'_k$

BIBLIOGRAFIA.

- [C] - R.H. Crowell, "THE DERIVED MODULE OF A HOMOMORPHISM"
Advances in Mathematics 6, pp.210-238 (1971)
- [C-F] - R.H. Crowell & R. Fox, "AN INTRODUCTION TO KNOT THEORY"
Springer-Verlag GTM. 1977.
- [F]₁ - R. Fox, "A QUICK TRIP THROUGH KNOT THEORY"
Topology of 3-Manifolds & related Topics.
(Proc. Univ. of Georgia Inst., 1961)
Prentice-Hall 1962, pp. 120-167
- [F]₂ - R. Fox, "ON THE COMPLEMENTARY DOMAINS OF A PAIR
OF INEQUIVALENT KNOTS".
Ned. Akad. Wetensch. Indag. Math. 14 (1952)
pp. 37-40.
- [G] - C. Mc A. Gordon, "SOME ASPECTS OF CLASSICAL KNOT
THEORY"
Knot theory, Proceedings Plans-sur-Bex. Switz 1977
Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag
pp. 1-60
- [L] - J. Levine, "KNOT MODULES I"
Tr. Am. M.S., Vol. 229, 1977.
- [Ma] - W. Massey, "ALGEBRAIC TOPOLOGY: AN INTRODUCTION"
Springer-Verlag GRM, 1977.
- [Mi] - J. Milnor, "INFINITE CYCLIC COVERINGS"
Conference on the Topology of Manifolds,
Prindle, Weber & Schmidt, 1968 pp. 115-133.
- [N] - L. Neuwirth, "KNOT GROUPS"
Ann. of Math. Studies 56, Princeton University Press.
Princeton N.J. 1965.
- [S] - H. Seifert, "ÜBER DAS GESCHLECHT VON KNOTEN"
Ann. 110 (1934) pp. 571-592.
- [R] - R. Rolfsen, "KNOTS & LINKS"
Mathematics Lecture Series 7,
Publish or Perish Inc., 1976.
- [T]₁ - G. Torres, "SOBRE LAS SUPERFICIES EXTENSIBLES EN
NUDOS"
Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana
Vol. 8, pp. 1-14, 1951.

- [T]₂ - G. Torres. "ON THE ALEXANDER POLYNOMIAL"
Ann of Math., Vol. 57, pp. 57-89, 1953.
- [V] - J. Vick, "HOMOLOGY THEORY"
Academic Press, 1973.