UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

CONSIDERACIONES SOBRE CANTOR Y EL PROBLEMA DEL INFINITO.

Tesis que para obtener el
título de MATEMATICO presenta

Marcela Elena Zambrana Castañeda

México, D.F. Junio de 1981.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Introducción

Parece una exigencia de nuestra cultura demostrar que, lo que es, se ha constituido históricamente como tal; ello quiere decir que todo estudio histórico adquirirá, bajo esta perspectiva, un carácter demostrativo. La historia, que de este modo ha sido colocada en el centro de las argumentaciones teóricas, debe jugar un papel de cuyo incómodo: de juez y parte; no sólo hay que probar algo históricamente, sino hay que, además, aclarar de qué modo se entiende la historia.

Nuestra historia es una historia del infinito matemático. Contrariamente a lo que se ha afirmado, que el infinito constituye uno de los problemas más viejos para las matemáticas, queremos hacer ver que se trata, antes bien, de un problema muy reciente; queremos mostrar que el infinito en las matemáticas se constituye hasta el siglo $\boxed{XIX}$.

Si bien este será el único punto que intentaremos demostrar (¡cómo escapar al tipo de razonamientos y criterios de demostración que la cultura nos ha impuesto!), vale la pena mencionar el conjunto de ideas de las cuales esta forma parte.

Antes, hemos de reconocer con Bachelard (segunda exigencia cumplida), que la historia de las matemáticas se presenta como una "maravilla de regularidad", y toda pretensión de mostrar la existencia de rupturas epistemológicas, no dejará de parecer arbitraria.

Esto, sin embargo, no deja paso libre a la continuidad; reconocemos en el desarrollo de las matemáticas (y aquí se trata de señalar uno de ellos) la existencia de puntos de inflexión, problemas y teorías que remodelan y reconstituyen el horizonte teórico de las matemáticas. Así, el siglo XIX verá la reconstitución de tres regiones en la matemática: el álgebra, el análisis y la geometría.

Reformulación en tres puntos, aparición de tres nuevos conceptos: grupo, infinito, espacio. Grosso modo esta es nuestra historia: tres conceptos señalan tres renovaciones, tres puntos de inflexión. ~~Afirmar~~

Afirmar que la aparición de un concepto nuevo es el que va a marcar un tal punto de remodelación en una teoría matemática, como el caso del infinito y el análisis, no deja de ser arriesgado. Un primer problema que habría que resolver, y que nos parece el más grave, será el de probar que el infinito efectivamente aparece en el siglo XIX. El problema es grave: ¿de qué hablan Arquímedes, Descartes, Pascal o Barrow? ¿de qué trata el cálculo infinitesimal de Newton y Leibniz? ó, qué es aquéllo que existía antes del siglo XIX, porqué se le llamaba infinito, o aún, porqué afirmamos que el infinito cantoriano es el concepto matemático de infinito. Nuestro segundo gran problema sería determinar, en esta "maravilla de regularidad", la reformulación que hemos mencionado.

Pese a todo, el riesgo debe correrse, el reto debe aceptarse. Jean Cavaillès lo ha hecho. "Seguir la génesis de las nociones, precisar sobre todo los lazos efectivos con los problemas, tal es el trabajo – a la vez sometido a la historia y a la crítica de ésta en nombre de sus resultados – que tiene alguna probabilidad de llegar a un resultado objetivo".

Frente a la teoría de conjuntos, dos alternativas: mostrar su aparición como necesaria o, "y en qué medida, fantasía histórica, estructura autónoma o pluralidad investida en un sistema contingente.

Frente a la barbarie, una sola: "Es necesario resistir, combatir, afrontar la muerte. Así lo exige la verdad, la razón."

Intentaremos seguir su ejemplo.

I. ... A LA METAFÍSICA

La historia del infinito filosófico, expuesta en este primer capítulo, halla su sentido en esto: que el infinito matemático no encuentra allí ni su origen, ni su desarrollo, ni su fundamento. Antes bien, veremos que la filosofía ha explicado, en ocasiones, al infinito de las matemáticas, sin que por ello ésta haya recogido, siquiera, el problema y mucho menos, la solución.

Nuestra historia parte de Aristóteles quien, como es sabido, niega la existencia del infinito en acto. Con ello se cierra la posibilidad de determinar al infinito de otra manera que no sea lo ilimitado, lo indeterminado, lo inacabado. Al mismo tiempo, el universo sólo puede pensarse como cerrado y finito. El universo es un todo finito y bien ordenado, con una estructura espacial que se deriva de una jerarquía de perfección y valor.

Liberarse de este finitismo aristotélico es un proceso largo que se inicia con Cusa y Bruno y que encuentra en Galileo su máxima expresión. Cusa y Bruno están puestos como condición de posibilidad de aquéllo que Galileo plantea: expresar, en la lengua que habla la naturaleza y que es la matemática, las leyes que rigen el movimiento de los cuerpos.

Con Cusa y Bruno un nuevo mundo aparece; un mundo homogéneo, sin jerarquías, donde las leyes que reinan en los cielos son las mismas que en el mundo sublunar. Este nuevo mundo, este universo infinito provoca también un cambio en la problemática. Se trata ahora, de determinar si el predicado infinito conviene a Dios de la misma manera que al mundo. Sin importar la respuesta que se de a este problema, lo cierto es que tenemos frente a nosotros, como trama del universo, un espacio homogéneo en el cual no podemos concebir, ni según la adición ni según la división, ningún principio de limitación. Encontramos así que el infinito aparece como problema en el campo de la metafísica y de la cosmología. Infinito que, si bien es condición de posibilidad para Galileo, permanece como problema en el terreno metafísico.

Es este infinito metafísico el que nos presenta Spinoza, quien, a diferencia de Aristóteles que afirma que los matemáticos no requieren del infinito, reconoce el infinito de las matemáticas, pero lo reconoce como el infinito de la imaginación, como el falso infinito, infinito según el número, a diferencia del infinito verdadero, aquél de la substancia y sólo objeto del entendimiento.

Infinito falso e infinito verdadero que también distingue, en otro sentido, Hegel. Aquí, se trata de determinar al ser y esta determinación no puede ser otra que la infinitud, la del infinito actual, verdadero, que existe y que existe aquí, en oposición al falso infinito o progreso al infinito que no ha sabido eliminar la oposición entre lo finito y lo infinito; falso infinito que no ha logrado recuperar su unidad.

Hegel se refiere además, como lo han hecho antes Aristóteles y Spinoza, al infinito matemático, señalando que éste se refiere al falso infinito y mostrando que en él se halla presente, aunque oculto, el infinito verdadero.

Quisiéramos destacar aquí todas estas referencias que la filosofía hace acerca de las matemáticas. Creemos (y así las tomaremos) que son sólo una exigencia que se hace la propia filosofía en tanto que todo sistema filosófico pretende ser totalizador y acabado.

Tomaremos aquí a Aristóteles como aquél que dirime la cuestión del infinito en el pensamiento griego+ Infinito que, como veremos, es sólo lo ilimitado, lo indefinido, cuya existencia no es nunca en acto, sino sólo en potencia.

+ Acerca del problema de la multiplicidad de lo único y la unicidad de lo múltiple, y que deriva en la idea de apeiron, véase Hegel, G.W.F., Lecciones sobre la Historia de la Filosofía. 1a parte, La Filosofía Griega, De Tales a Arist.

Recordemos primero que, para Aristóteles, la distinción entre acto y potencia le permite, ante todo, postular una explicación del cambio, del movimiento:

"... ciertas cosas reciben el nombre de potencia por ser un principio de movimiento o de cambio, situado en otro o en el mismo en cuanto otro. Otras, por el contrario, reciben este nombre por poseer la facultad de ser puestas en movimiento o de ser cambiadas por otro ser, o por sí mismas en cuanto que son otro ser. Pues por esta potencia lo que recibe una modificación es realmente modificado.

" Además, también se llama potencia todos los estados habituales en los que no se puede sufrir ninguna modificación o ningún cambio.

" ... Por último, todas estas cosas significan que cualquier ser hay que considerarlo en potencia, o bien porque puede hacerse, o porque no puede hacerse, o porque puede hacerse mejor.

" En definitiva, pues, la definición de potencia es el principio de cambio, situado en otro ser o en el mismo en cuanto otro" (1)

Por acto hemos de entender la existencia misma de un ser en un sentido opuesto a como decimos que existe en potencia. " así el acto, dice aristóteles, vendrá a ser como el que construye respecto de la facultad de construir, el que ve respecto del que tiene los ojos cerrados, [...] lo realizado respecto de lo que no está hecho. A la primera parte de estas distinciones démosle el nombre de acto; a la otra parte, el de potencia" (2)

Veamos ahora porqué Aristóteles niega la existencia del infinito en acto. Es necesario, " en primer lugar, determinar en cuántos sentidos se entiende el concepto de infinito. En un sentido pues, se llama infinito lo que no puede ser trascendido ni excedido, porque no es naturalmente apto para ser abarcado o medido; de la misma manera que la voz y el sonido son invisibles. En otro sentido es aquello cuya evolución no tiene término, o bien apenas lo tiene, o bien lo puede tener por su naturaleza, pero no lo tiene de hecho. Por lo demás, todo infinito lo es o bien por adición o bien por división, o bien de una y otra manera" (3)

Se pregunta entonces, si la existencia del infinito en sí, en tanto que substancia, es posible: "así pues, el infinito separado e independiente de los seres sensibles, un infinito que sea él mismo en sí un ser determinado, no puede existir, pues si el infinito en sí no es una magnitud ni una pluralidad, sino que es una substancia y no un accidente, sin duda deberá ser un individuo. Pues lo que es divisible será siempre una magnitud o una pluralidad. Ahora bien, si es individual e indivisible, no será infinito" (4)

¿Será posible como accidente? "Si el infinito existe accidentalmente no puede, en cuanto es infinito, ser un elemento de los que constituyen los seres existentes" ya que "¿cómo es posible que algo sea infinito en sí, cuando ni tan siquiera pueden existir de esta manera, es decir, en sí mismos, la magnitud y el número de quienes el infinito es, por sí mismo, una modalidad?" (5)

De modo tal, que el infinito actual no es posible ni como substancia, ni como accidente o principio, "pues, de ser divisible, cualquier parte de él que se tomara sería también infinita, porque la esencia del infinito es substancia [...] de manera que, o bien es individuo e indivisible, o bien es divisible en infinitos seres infinitos; pero muchos infinitos no pueden ser una única y misma cosa" (6)

"Por consiguiente, debe ser individual e indivisible, pero esto es imposible, al ser infinito en acto, pues es necesario que, para ser individual, posea una cantidad determinada. Concluyendo pues, el infinito se ha de dar en los seres de manera accidental"

Pero ya se ha mostrado que esto no es posible. Y si bien no existe como substancia ni como accidente, tampoco como cuerpo infinito. Si se entiende, con Aristóteles, un cuerpo como «aquello que está limitado por una superficie», la existencia de un cuerpo infinito, sensible e inteligible, no puede postularse. Y es que "... ha sido dispuesto por la naturaleza que todo ser sensible esté en algún lugar, que cada cosa tenga un lugar y que sea uno mismo el lugar de la parte y el todo. De donde, puesto que posee una sola forma, o bien será inmóvil o siempre estará en movimiento de translación. Pero esto es imposible, pues ¿porqué razón se moverá preferentemente hacia abajo y no hacia arriba? o bien ¿dónde se moverá?" (7)

"Por lo demás, continúa, todo cuerpo sensible está en un lugar. Y las diferencias y especies del lugar son el arriba y el abajo, el delante y el detrás, la derecha y la izquierda, y estos espacios no vienen tan solo definidos en relación a nosotros y por la posición, antes están determinados en el mismo universo. Ahora bien; es imposible concebir la existencia de estas diferencias en el seno del infinito..." (8)

Con todo ello, Aristóteles ha mostrado que el infinito no existe en acto ni como substancia, ni como accidente ni como cuerpo. Pero como lo señala inmediatamente después, de no existir el infinito se derivan muchos absurdos: el tiempo tendrá un principio y un fin, las magnitudes no serán divisibles en magnitudes y el número no podrá ser infinito.

Hemos de asumir, por lo tanto, "una solución arbitral intermedia" ya que no nos es dado negar o afirmar la existencia del infinito. Se viene a parar entonces "en la evidencia de que el infinito existe sí, en según qué sentido, y en según que sentido no existe". (9)

Así, aún cuando no existe una magnitud infinita en acto, esta magnitud sí puede ser infinita en su divisibilidad, de donde "permanece, pues, la hipótesis de que existe el infinito en potencia."

"No conviene concebir el infinito, aclara, como un ser determinado, como lo serían, por ejemplo, un hombre o una casa, sino en el sentido en que se dice este día o esta competición, cosas cuya esencia no tiene la cualidad de la sustancia, antes siempre consiste en un continuo nacer y perecer, y aún cuando sean finitas, devienen siempre algo distinto y nuevo. Ahora bien, en las magnitudes acontece esto" (10)

Mas aún, "... el infinito existe potencialmente en el orden de la adición lo cual decimos, es prácticamente lo mismo que el infinito en el orden de la divisibilidad, ya que siempre será posible concebir algo fuera de él" (11)

Es claro, entonces, que el infinito no es aquello fuera de lo cual no hay nada, sino por el contrario, es aquello fuera de lo cual siempre existe aún algo, es aquello en que, tomada una determinada cantidad, siempre es posible tomar algo más fuera de ella.

He aquí el sentido en que existe el infinito, existencia que ha sido señalada como potencial; potencia que, por su naturaleza, no supone que el acto pueda ser realizado jamás. Potencia que siempre permanece potencia, sin llegar a ser nunca actualizada. Infinito que no es el Todo o lo Perfecto, puesto que "no hay nada perfecto sin límite y este límite es un término" Infinito que no es, entonces, sino lo ilimitado, lo indeterminado, lo inacabado.

Por lo demás, dice Aristóteles, "esta discusión de ninguna manera pretende privar a los matemáticos de sus consideraciones al eliminar la posibilidad de que el infinito exista de esta manera [...] pues los matemáticos actualmente no precisan del infinito en sus estudios ni lo emplean, sino conciben la existencia de una magnitud finita tan grande como quieran+. Y de la misma manera es posible en una magnitud todo lo grande que se quiera, seccionar cualquier otra magnitud de una cantidad menor" (12)

+ Acerca de cómo se establece la existencia de magnitudes tan grandes o tan pequeñas como se quiera y que funda el método exhaustivo, en su forma clásica, depurado de toda ingerencia infinitesimal, ver el trabajo de M. Fichant. Idea de una Historia de las ciencias §3. Empleo del concepto de Recurrencia _ Análisis de un ejemplo.

Si bien la idea de un universo cerrado y finito persistió durante toda la edad media, un nuevo punto de vista aparece en la época precopernicana. Punto de vista que afirma un mundo infinito cuyo efecto es la destrucción del perfectísimo cosmos aristotélico. Infinito que se introduce a través de la filosofía y la cosmología, y en donde la elaboración teológica y metafísica precedió las exigencias cosmológicas.

No podemos sino revisar el pensamiento de nicolás de Cusa y de Giordano Bruno+ a fin de ver de qué modo se rompe con la concepción estática del universo y de qué modo quedan marcadas las condiciones de posibilidad para el pensamiento galileano.

Fué Nicolás de Cusa quien por primera vez negó la finitud del mundo y su clausura dentro de las esferas celestes, rechazando con ello, la concepción cosmológica medieval, aristotélica y dominante. Sostiene, por el contrario, un universo que sería una expresión o desarrollo, necesariamente imperfecto e inadecuado, de Dios.

Cusa parte de que Dios es uno y absolutamente máximo: "la unidad absoluta, a la que nada se le opone, es, pues, la absoluta maximidad, la cual es Dios bendito" (13). Al ser Dios el más grande (maximum), es al mismo tiempo el más pequeño (minimum) en tanto que "El máximo, mayor que el cual nada puede haber, [...] que es todo lo que puede ser, está absoluta y radicalmente en acto; y lo mismo que no puede ser mayor, por la misma razón, tampoco puede ser menor, pues es todo aquello que puede ser. El mínimo es, por su parte, aquello menor que lo cual nada puede haber. Y como

+ aunque sabemos que entre Cusa y Bruno hay más de una diferencia, en este trabajo no nos interesan tanto los respectivos dispositivos internos de sus teorías, sino el "efecto acumulado" de las mismas en la coyuntura renacentista. Así pues, analizamos aquí lo que ambos tienen en común para nuestro objetivo (prebenda del historiador) sin que por ello se pueda olvidar las diferencias entre ambos o, peor aún, a otros científicos y filósofos de la época.

el máximo es de la misma índole, es evidente que el mínimo coincide con el máximo". (14)

Dios, reconocido como el Ser Supremo y absolutamente máximo, no puede ser mayor de lo que es, y como ser máximo, es unidad perfecta. Pero además es el mínimo: Dios no puede ser más pequeño de lo que es; es entonces, el perfecto <u>coincidentia oppositorum</u>.

Como tal, Dios reúne en sí mismo, de manera incomprensible, las distinciones y oposiciones que se encuentran en las cosas finitas. Dios, que contiene todas las cosas, es <u>omnia complicans</u>, "..si se consideran las cosas sin Él, no son nada." (15) Y al mismo tiempo que complicación de todas las cosas, Dios es también su explicación, es <u>omnia explicans</u>: "..se sabe que Dios es la complicación y explicación de todas las cosas, y que en cuanto es, es complicación, todo en Él es Él mismo y en cuanto es explicación, Él mismo es en todas las cosas lo que son" (16)

Así, Dios contiene todas las cosas en cuanto que Él es la causa de todas las cosas; las contiene <u>complicative</u>, como una unidad en su esencia divina y simple. Él es en todas las cosas <u>explicative</u>, en el sentido de que es inmanente en todas las cosas, y todas las cosas dependen esencialmente de Él.

A partir de la idea de que Dios es todas las cosas y que las cosas son por Él, Cusa establece que el universo, "aunque no es infinito, sin embargo no puede concebirse como finito por carecer de términos entre los que esté comprendido" (17)

Este universo es para Cusa, el universo máximo contracto. "pues este contracto o concreto, como contenga absolutamente todo esto que es, reproduce en cuanto puede aquello que es máximo absoluto absolutamente" (18) pues aquellas cosas que le convienen al máximo absoluto "absoluta y máximamente, afirmamos que le convienen a él contractamente como contracto" (19)

El universo es, así, el <u>concretum maximum</u>, mientras que Dios es el <u>absolutum maximus</u>. Pero el universo no existe aparte de las cosas individuales y ninguna cosa individual encarna todas las perfecciones de su especie. El <u>absolutum maximus</u> nunca es, entonces, plenamente contraído o hecho concreto: "Dios es, pues, la absoluta quididad del mundo o universo. Y el universo es esta misma quididad contracta. La contracción indica relación a algo para ser esto o aquello. Pues Dios, que es uno, está en el universo uno, pero el universo está contractamente en las cosas universales. Y así puede comprenderse de qué modo Dios, que es unidad simplísima, existiendo en el universo uno, está en todas las cosas - casi mediante el universo, y la pluralidad de las cosas está en Dios mediante el uno universo" (20)

Este uno universo, además de no tener límites, no tiene centro: "Y así como la tierra no es el centro del mundo, tampoco lo es la esfera de las estrellas fijas u otras cosas de su circunferencia" (21)

El centro del mundo no es otro sino Dios, que es, a la vez, circunferencia infinita de todas las cosas y por tanto «centro de todas las esferas y de todas las cosas que hay en el mundo». De esto concluye que "la máquina del mundo tendrá el centro en cualquier lugar y la circunferencia en ninguno, pues la circunferencia y el centro es Dios, que está en todas y en ninguna parte" (22)

Del hecho que Dios nunca es plenamente contraído, se sigue en Cusa una distinción cuando se refiere al infinito de Dios o al infinito del mundo: "no es dable, pues, nada que limite la divina potencia, por lo cual, todo lo que es dado por ella misma es dable como mayor y menor, a no ser que lo dado fuera a la vez el máximo absoluto. Sólo pues, lo absolutamente máximo es infinito negativamente, porque sólo Él es lo que puede ser con toda potencia. El universo, sin embargo, como comprende todas aquellas cosas que no son Dios, no puede ser negativamente infinito, aunque no tenga límites y sea privativamente infinito. Y por esta razón no es ~~infinito~~ ni ~~infinito~~. En efecto, no puede ser mayor que lo que es, y esto sucede por defecto [privación] pues la posibilidad o materia no se extiende más allá de sí misma. (23)

El que este universo no tenga límites autoriza a llamarlo ilimitado, y en tanto que es privativamente infinito, permite pensarlo como aquello que carece de precisión y determinación estricta. Es un universo que, como dice Koyré, nunca alcanza el límite, es indeterminado, indefinido en el pleno sentido de la palabra.

Al igual que en Cusa, en Giordano Bruno nos encontramos frente a un mundo infinito. Para Bruno, el mundo consta de cosas y factores distintos, pero finalmente se ve que es uno, infinito e inmóvil; es decir, un sólo ser, una sóla substancia.

Este uno es infinito y no puede moverse porque no tiene lugar dónde dirigirse; no es materia porque no tiene ni puede tener figura o límite. Tampoco es forma, ya que no confiere a otro forma y figura; es Todo, Uno, Universo. No es medible ni es medida, no comprende ni es comprendido en otro, no tiene partes y no es compuesto: es uno e idéntico a sí mismo.

En palabras de Bruno, "es límite de modo que no es límite, es de tal forma que no es forma, es de tal modo materia que no es materia, es de tal modo alma que no es alma, porque es el todo indiferentemente; es sin embargo uno, el universo es uno" (24)

Afirma además, que el universo es todo centro o que el centro del universo está en todas partes, y que la circunferencia no está en parte alguna en cuanto es diferente del centro, o bien que está en todas partes pero no tiene centro, en cuanto es diferente de ella. He aquí porqué la divinidad es todo y por todo, "no en vano se ha dicho que Zeus llena todas las cosas, habita todas las partes del universo, es centro de lo que tiene ser, uno en todo, gracias al cual todas las cosas son uno" (25)

La diferencia esencial entre el universo y las cosas particulares consiste en que, mientras el universo abarca todo el ser y todos los modos del ser, las cosas particulares comprenden todo el ser y no así sus modos. El hecho que existan infinitos modos del ser no impide que el ente sea uno solo.

Y así como es posible una distinción entre el universo y las cosas, la diferencia entre Dios y el universo es posible en tanto que "llamo al universo 'todo infinito' porque no tiene borde, término o superficie; digo que el universo no es 'totalmente infinito' porque cada parte que de él podemos considerar es finita, y de los innumerables mundos que contiene, cada uno es finito. Llamo a Dios 'todo infinito' porque excluye de sí todo término y cada uno de sus atributos es único e infinito, y llamo a Dios 'totalmente infinito' porque Él, todo entero, está en todo el mundo y está infinita y totalmente en cada una de sus partes, al contrario de la infinitud del universo, la cual está totalmente en todo y no en las partes (si es que, al referirnos al infinito, se puede hablar de partes) que podemos incluir en aquél" (26)

Si la influencia del cusano es particularmente notable cuando Bruno afirma que Dios es el infinito concentrado (<u>complicata</u>) y totalmente mientras que el mundo es el infinito desplegado (<u>explicata</u>) y no totalmente, no lo es menos la influencia de Copérnico, a partir de quien supone la existencia de una multitud de sistemas solares en el espacio ilimitado. En éste, nuestro sol es una estrella más entre otras y no ocupa posición privilegiada, menos aún la tierra. No hay, como se ha visto, centro alguno, ni arriba ni abajo absolutos.

Hay un único espacio general, una única y vasta inmensidad que se denomina vacío; se declara que este espacio es infinito, puesto que ni la razón, ni la conveniencia, ni la percepción de los sentidos o la naturaleza le asignan un límite. En efecto, no hay razón ni defecto de las dotes de la naturaleza que obstaculicen la existencia de otros mundos.

Es interesante señalar, siguiendo a Koyré, que el espacio de Bruno es un vacío, si bien su vacío no está realmente vacío en ningún sitio. Un vacío sin nada supondría una limitación de la acción creadora de Dios, al mismo tiempo que, en contra del principio de razón suficiente, supondría que Dios trata a una parte del espacio de modo distinto a cualquier otra.

No queda, para Bruno, sino admitir que Dios ha creado un mundo infinito, infinitamente rico e infinitamente extenso: " Se magnifica así la excelencia de Dios y se manifiesta la grandeza de su imperio; no se glorifica en uno sino en innumerables soles, no en una tierra y un mundo sino en un millón, quiero decir, en infinitos. De manera que no resulta inútil esa potencia del entendimiento que quiere y puede siempre añadir espacio al espacio, masa a la masa, unidad a la unidad, número al número, por medio de aquella ciencia que nos libera de las cadenas de un imperio angostísimo y nos eleva a la libertad de uno augustísimo" (27)

Es necesario añadir que, en Bruno, la razón aspira a reconocer en todo, la unidad de forma y materia, para lo cual necesita investigar los últimos extremos contrapuestos de las cosas, pugnantes entre sí: el maximum y el minimum. Es precisamente en estos extremos donde las cosas son inteligibles y están en disposición de unirse, y esta unión es la naturaleza infinita; se representa el principio primigenio (forma) bajo el concepto de lo más pequeño que es, al mismo tiempo, lo más grande, de lo uno que es, al propio tiempo, todo. El universo es este uno en todo.

Y es justamente esta razón la que posibilita que sea el hombre quien dé unidad a la diversidad y el universo podrá ser ahora determinado con la pura fuerza de la razón; el hombre podrá ser fundamento del mundo.

Doble triunfo, con Cusa y Bruno; se abre el universo y se abre la razón.

Encontraremos nuevamente en Spinoza una identificación de Dios con la naturaleza, Dios que es pensado como substancia infinita con infinitos atributos. Del hecho de que la substancia existe, se sigue que hay un infinito, que es el verdadero infinito o infinito según el entendimiento. Veremos aparecer también un falso infinito o infinito de la imaginación, y al infinito matemático se le mostrará precisamente como este falso infinito.

La primera pregunta será, entonces, qué es la substancia. Siguiendo a Spinoza, para conocer una cosa es preciso conocer su causa y por ello, el axioma 4 de la Ética afirma que "el conocimiento del efecto depende del conocimiento de la causa y la envuelve" (28)

Ya que, por otro lado, es posible concebir a la substancia como no dependiente de ninguna causa externa, ni para su existencia, ni para sus atributos y modificaciones la substancia se define como "aquéllo que es en sí, y se concibe por sí, es decir, aquello cuyo concepto no necesita del concepto de otra cosa para formarse" (29)

Que la substancia existe es demostrado en la proposición VII de la Ética, a partir de la definición anterior, y de la definición primera que reza "Entiendo por causa de sí, aquella cuya esencia envuelve la existencia, o dicho de otra manera, aquello cuya naturaleza no puede concebirse sino como existente" (30)

Esta existencia es infinita. La proposición VIII asegura: Toda substancia es necesariamente infinita.
"Teniendo una substancia cierto atributo (Def. IV) no puede ser más que única (Proposición V) y pertenece a su naturaleza existir como cosa finita o infinita. Pero no puede existir como cosa finita, porque (Definición II) debería estar limitada por otra naturaleza la cual también debería existir (proposición VII); habría pues, dos substancias de igual atributo, lo cual es absurdo (proposición V). Existe pues como infinita. Q.E.D." (31)

Recordemos que Spinoza entiende por atributo "aquello que el entendimiento percibe de una substancia como constitutivo de su propia esencia"; Definición IV entiende por «finito en su género» aquello que puede ser limitado por otro de la misma naturaleza. "Por ejemplo, un cuerpo se dice que es finito porque siempre concebimos otro mayor" Definición II.

La proposición V a la que se refiere la demostración anterior establece que no puede haber en el mundo dos o más substancias con igual atributo, y por tanto, no podrá haber muchas sustancias, sino una.

La substancia infinita tiene que poseer infinitos atributos como se prueba en la proposición IX y esta substancia infinita con infinitos atributos es llamada Dios. "Entiendo por Dios un ser absolutamente infinito, es decir, una substancia que consta de infinitos atributos, cada uno de los cuales expresa una esencia eterna e infinita" (32)

Queda también demostrado que esta substancia infinita y única es también indivisible y eterna, y que en Dios la existencia y la esencia son una y la misma cosa. Todo lo que es, es en Dios, y nada puede existir ni ser concebido sino Dios.

Demostración: "Fuera de Dios no puede existir ni concebirse substancia alguna [..] Por otra parte, los modos (Def. V) no pueden existir ni concebirse sin una substancia; por consiguiente, pueden únicamente existir en la naturaleza divina y sólo se conciben por ella. Nada existe fuera de las substancias y de los modos (axioma I) Por consiguiente, nada puede existir ni concebirse sin Dios" (33)

La Definición V dice: "Entiendo por modo las afecciones de una substancia, o dicho de otra forma, aquello que existe en otra cosa por medio de lo cual es también concebido" y el axioma I establece que "Todo lo que es, es, o bien en sí, o bien en otra cosa" (34)

La diferencia entre Dios, substancia infinita, y las cosas finitas. radica en que Dios no está determinado en su existencia ni en sus acciones por ninguna causa externa, ya que Dios es causa sui, mientras que las cosas finitas, que son modificaciones de Dios, están determinadas por él respecto de su existencia, esencia y operaciones.

Volviendo a los infinitos atributos de Dios, sólo dos conocemos: el pensamiento y la extensión, siendo las mentes finitas modos de Dios bajo el atributo del pensamiento, y los cuerpos finitos, modos de Dios bajo el atributo de la extensión.

Sin embargo, el tránsito de la substancia infinita a los modos finitos no se da directamente, sino a través de los modos infinitos y eternos. Así, el modo inmediatamente infinito y eterno de Dios, bajo el atributo del pensamiento constituye lo que Spinoza llama «entendimiento absolutamente infinito» mientras que el modo inmediatamente infinito y eterno de Dios, bajo el atributo de la extensión, sería la suma total de movimiento y reposo, o de energía.

La naturaleza, considerada como un sistema espacial o sistema de cuerpos, es llamada, por el contrario «modo mediato infinito y eterno de Dios» bajo el atributo de la extensión. Le llama también «cara del universo»

Así identificados Dios y naturaleza, podemos considerar entonces a la naturaleza, bien como una substancia infinita, sin referencia a sus modificaciones, bien como un «sistema de modos». Si la segunda, hay que entender que un modo dado es causado por un modo o modos precedentes, que son a su vez causados por otros modos y así al infinito. Se sigue que hay una cadena interminable de causas particulares y la cadena de la causalidad finita es la causalidad divina ya que es, como dice Copleston, «la expresión modal de la autodeterminación de Dios». (38)

Con todo, es la naturaleza un sistema infinito en el que hay una cadena infinita de causas particulares, pero la cadena existe solamente porque existe la naturaleza o Dios.

Del infinito en las matemáticas, Spinoza afirma en la famosa carta a Louis Meyer, que es necesario distinguir entre el «infinito verdadero», aquél de la substancia, y el solo objeto del entendimiento, y el «falso infinito», infinito según el número, objeto de la imaginación.

Encuentra que todas las dificultades provienen de confundir estos dos infinitos, ya que se aplica al infinito indivisible de la sustancia, modalidades operatorias (numeración, división etc) que no son practicables ni concebibles más que en el campo de la imaginación, es decir, en un dominio abstracto, donde se pueden señalar partes, separar unidades, recomponerlas luego según reglas dadas.

Pero, por el solo hecho que las matemáticas traten con el «falso infinito» no se les debe rechazar del lado de la imaginación. La matemática es, según la entiende Spinoza, ciencia del entendimiento en tanto que sus definiciones exhiben la esencia positiva de lo definido. Se nos advierte sólo de no confundir las ideas producidas por el entendimiento con las representaciones auxiliares surgidas de la imaginación (número, tiempo, cantidad)

Quiere esto decir que el número es absolutamente inadecuado al infinito verdadero, que es del entendimiento, nunca el de la imaginación.

Dos infinitos: uno falso y otro verdadero, dos infinitos que aparecerán, de muy otra manera, en Hegel.

Queremos terminar esta historia del infinito filosófico con Hegel, para quien el infinito existe, existe aquí y es actual. Para Hegel, el infinito simplemente vale como absoluto, pues está determinado como negación de lo finito. Esta vez lo infinito está determinado.

En su simple determinación, es negación de lo finito y de este modo, se halla en una determinación recíproca con lo finito. Es un infinito abstracto, unilateral, es el falso infinito hegeliano. La constitución del infinito verdadero no es sino el autoeliminarse de este infinito.

Para Hegel, el infinito es la negación de la negación, lo afirmativo, el ser que se ha vuelto a establecer, como veremos, a partir de su limitación y, por ello, lo que existe es sólo el infinito.

Para alcanzar este infinito, no nos queda más que recorrer con Hegel, la determinación cualitativa del ser. Se comprenderá entonces, en toda su riqueza, al infinito y se comprenderá asimismo, el que Hegel haya encontrado en el infinito matemático el verdadero infinito, aunque oculto, en la forma abstracta y vacía del falso infinito.

Partiremos entonces de la unidad del ser y la nada, o si se quiere, de la unidad del ser y del no-ser. Esta unidad constituye precisamente el ser determinado, es ella misma la determinación. Unidad simple del ser y la nada que es, también, la inmediatez del ser. Más aún, es la existencia como tal: el no-ser se halla admitido de tal modo en el ser, que el conjunto concreto está en la forma del ser.

Visto así, la determinación aparece como determinación existente, que es la cualidad, i.e., la realidad.

Es claro que esta determinación existente está sólo puesta en la forma del ser, que ahora es unidad inmediata con el no-ser. Esta determinación, insiste Hegel, está ligada al ser y, de hecho, ya no se va a desligar de él, pues lo verdadero es la unidad del ser con el no-ser, y es esta unidad la que desde ahora permanece como su fundamento; a partir de esta unidad puesta como fundamento, se presentan todas las determinaciones ulteriores.

La determinación puesta sobre la nada, no puede ser la misma determinación puesta sobre el ser; ella misma ha de ser determinada. Así, la nada es lo determinado de una determinación, es decir, algo reflejado, esto es, una negación.

Es por ello que la determinación, como unidad del ser y la nada, muestra una diferencia: la diferencia entre realidad y negación. Diferencia que no permanece como tal, sino que es eliminada en tanto que la realidad contiene ella misma la negación y por ende es una existencia. La nada está puesta, así, como un existente.

Mediante esta eliminación que se da cuando se muestra que una determinación está en la otra, y ésta en aquélla, se obtiene otra vez la unidad entre el ser y la nada, pero ya no es aquella unidad inmediata del ser determinado, sino que es mediada justamente por esta eliminación.

El ser determinado está, entonces, mediado consigo mismo, es un reflejarse en sí de sí mismo, es una negación de la negación, es el ser determinado, determinado. Como tal, es un ser-en-sí, un existente determinado, un algo.

Un algo que también es un devenir y cuyos momentos no son el ser y la nada, sino que estos se han mostrado como existentes (cualidad y negación ya no son más, distintos) y por lo tanto son entes determinados.

Así, la nada, como momento del algo, es una nada determinada, pero determinada como lo negativo del algo, vale decir, un otro.

Tenemos ahora la unidad inmediata del algo y del otro, que como unidad inmediata del ser y la nada (determinados) es un ser determinado. Para mostrar cómo se da la diferencia entre cualidad y negación, debe hacerse primero la consideración siguiente:

1. que algo y otro son entes determinados, i.e, algos
2. que cada uno de ellos es también un otro; se sigue que ambos son otros.

Así, los dos son determinados como algos y también como otros, por lo tanto son lo mismo, y no se presenta todavía ninguna diferencia entre ellos. Sin embargo, señala Hegel, esta mismidad de las determinaciones es sólo la reflexión exterior a partir de la comparación entre ambos.

Siguiendo la comparación, tal parece que una existencia sólo se halla determinada como otra, por medio de la comparación con un tercero; por otro lado, parece que lo estuviera sólo a causa del otro que está fuera de ella, es decir, que no estuviese determinada por sí.

De modo que el otro está puesto por sí, en relación al algo, sin duda, pero está por sí, es decir, fuera del algo.

3. El otro tiene que ser tomado, por ello, como aislado, en relación consigo mismo y por tanto, de manera abstracta como el otro

~~Veamos~~ como se comporta este otro así considerado. lo otro por sí, en relación consigo mismo, es lo otro en sí mismo; como ser en sí mismo (como algo) tiene a un otro, de aquí que sea lo otro de lo otro, o lo otro de sí mismo. Es por lo tanto, dice Hegel, lo absolutamente desigual en sí, que se niega y se cambia a sí mismo y que, sin embargo, permanece idéntico a sí mismo, ya que lo otro (aquello que se transforma), no está determinado más que como ser otro. La negación de sí mismo no lo conduce más que a él mismo.

De todo ello resulta que el otro que se opone al algo es este otro aislado, este otro por sí, que permanece siendo un otro.

El algo, pues, se conserva en su no existir. Se halla en su relación con su ser otro, pero no es puramente su ser otro. El ser otro está al mismo tiempo contenido en él, y sin embargo, separado de él: el algo es un ser-para-otro. Es así como se muestra la diferencia: el algo como ser-en-sí distinto del ser-para-otro.

Ser-en-sí y ser-para-otro constituyen los dos momentos del algo, que como se verá inmediatamente, cada uno contiene en sí, a la vez, también el momento diferente de él. De este modo, se elimina la diferencia y nos volvemos a encontrar con la unidad, otra vez mediata, entre el ser y la nada.

Si tomamos al ser-en-sí vemos que, en primer lugar, es relación negativa con el no-existir, y tiene al ser otro fuera de sí y se halla contra él, pero, en segundo lugar, tiene al no-ser en sí mismo, pues es el no-ser del ser-para-otro.

Por otro lado, el ser para otro es la negación de la referencia del ser hacia sí, que ante todo está como existir y un algo, y en cuanto algo se halla en otro, o para otro, carece del propio ser. Pero además, el ser-para-otro no es el no-existir, que como ya se vió, indica hacia el ser-en-sí.

De esta manera, se ha eliminado la diferencia y estamos frente a la unidad del algo consigo mismo, en donde el algo está en sí, cuando al salir del ser-para-otro ha vuelto en sí. Pero el algo, además, está determinado en sí, y esta determinación en él es una circunstancia y, como tal, está en él exteriormente, por lo tanto, es un ser para otro.

Se ve entonces que el ser-para-otro, en la unidad del algo consigo mismo, es idéntico con su en-sí; el ser en-sí se halla inmediatamente en unidad con el ser-para-otro. La determinación reflejada de esta manera (según la unidad mostrada) vuelve a ser, como antes, una determinación existente y, por lo tanto, una nueva cualidad.

Esta nueva cualidad la llama Hegel destinación y no determinación (Bestimmung y no Bestimmheit) porque la destinación no es nada más la determinación existente (i.e., la determinación en tanto ser-en-sí) sino que, además, el algo permanece conforme con ésta, frente a su implicación con otro, por el cual sería determinado, es decir, la hace valer en su ser-para-otro.

Se dice que el algo llena su destinación a medida que la determinación - que ante todo se acrecienta en múltiples formas por medio de su comportarse hacia otros, de conformidad con su ser-en-sí - se convierte en plenitud. La destinación contiene lo siguiente: que lo que algo es en sí, está también en él.

Pero esta destinación se halla a su vez sólo como un deber ser: el algo llena su destinación, pero este rellenamiento de su ser-en-sí se halla en contra de la existencia que no ha sido incorporada a la destinación.

De aquí se sigue que, si a través de la destinación lo que algo es en-sí está en-él, también, a través de la destinación enfrentada a la existencia que no se le ha incorporado, lo que el algo tiene en-él es una existencia exterior del algo, que es también su existir, pero que no pertenece a su ser-en-sí. La determinación de esta manera es una <u>constitución</u>.

Es así como la determinación existente es la unidad de la destinación y de la constitución.

Pero, como se verá en lo que sigue, la destinación traspasa por sí misma a la constitución y ésta se transforma en aquélla y de este modo, se recupera la unidad; la determinación existente se refleja en sí misma y es, entonces, una determinación existente-en-sí o como lo llama Hegel, una destinación (Bestimmung).

Que esta unidad se recupera resulta del hecho que, en cuanto aquello que algo es en-sí, está también en él, se halla afectado por el ser-para-otro; la destinación por lo tanto se encuentra, como tal, abierta a la relación con otro.

Como la determinación contiene la diferencia cualitativa, o sea, diferente del ser-en-sí, es lo negativo del algo, es decir, otra existencia.

La determinación que comprende así lo otro dentro de sí, o sea, la destinación, en tanto que lo negativo es algo, o como ya se dijo, otra existencia, se ve rebajada a constitución

Inversamente, el ser-para-otro, aislado como constitución y puesto por sí, es en-él lo mismo que es el otro como tal, es el otro en él mismo, el otro de sí mismo y, por tanto, es un ser determinado que se refiere a sí mismo, un ser-en-sí, con una determinación, es decir, una destinación.

De modo tal, que el hecho de que la determinación existente sea una determinación existente en sí, muestra que la negación se halla puesta como inmanente dentro del algo, como su desarrollado ser dentro-de-sí.

Así, el algo (ser-en-sí) se refiere al otro a partir de sí mismo, porque el ser-otro se halla puesto en él como su propio momento. Su ser dentro-de-sí comprende en sí la negación, por cuya mediación (este haber puesto al ser otro, que antes le era exterior, como un momento suyo), el algo tiene ahora su afirmativo existir.

Pero el otro sigue estando como distinto del algo y por lo tanto, se halla puesto fuera de él: el ser-dentro-de-sí es el no-ser del ser-otro que se halla contenido en él (vía la destinación), pero es a la vez exterior y diferente como existente. Y así, el ser-dentro-de-sí se comporta ahora como una negación del otro algo exterior a sí.

Es de esta manera como el ser-para-otro se enfrenta al ser-para-sí de dos modos: primero como momento del ser-en-sí, que será negado por el ser-dentro-de-sí y segundo, como negación del algo. Es justamente esto lo que los encadena uno al otro y lo que a su vez los separa, porque cada uno niega al otro; esta determinación es la que Hegel llama término.

Cada uno niega al otro, es decir, este término es el no-ser del otro, no del algo mismo. Pero el otro es, en sí mismo, un algo en general; el término, que el algo tiene frente al otro, es también término del otro como algo, es término de él mismo, por cuyo medio mantiene alejado, por así decirlo, al primer algo como su otro, o sea, es su no-ser de aquel otro.

De este modo, el término no sólo es el no-ser del otro, sino tanto del uno como del otro algo y, por lo tanto, del algo en general.

El término es, por ello, el no ser del algo y el no ser del otro, de modo que algo existe por medio de su término.

En cuanto algo es lo que limita, se halla él mismo rebajado a ser limitado; pero su término, en cuanto es un terminar del otro en él, es a la vez él mismo, sólo el ser del algo. El algo es lo que es, por la vía del término; tiene en él su cualidad.

El algo, como existencia inmediata, como cualidad, es el término frente a otro algo, pero tiene este término en él mismo y es algo por vía de la mediación de él, que constituye igualmente su no-ser. El término es la mediación, por cuyo medio el algo y el otro tanto existen como no existen.

De modo que la unidad del algo consigo mismo es, esta vez, su relación consigo mismo. El ser-dentro-de-sí, idéntico consigo, se refiere de este modo a sí mismo como a su propio no-ser, pero lo hace como negación de la negación, como lo que niega eso mismo que conserva a la vez en él, el existir.

De aquí que el algo en su término existe y no existe. Dicho de otro modo, el algo tiene su existencia sólo en el término. Pero el término y el inmediato existir son ambos lo negativo el uno del otro, ya que el algo fuera de su término, es el algo indefinido, sólo la existencia en general, inmediata, y no se distingue del otro; ambos son lo que son, i.e., diferentes uno del otro, sólo con el término como determinación.

Entonces, el algo, que existe sólo en su término, se separa a la vez de sí mismo y señala allende sí mismo, hacia su no-ser, lo expresa como su ser y, de este modo, se traspasa en él.

Ahora bien, el algo puesto con su término, como esta contradicción de sí mismo, por cuyo medio se haya dirigido e impulsado más allá de sí mismo, es lo finito.

Se verá ahora la determinación de lo finito como la relación de su destinación hacia su término y de lo que de aquí resulta: el paso de lo finito a lo infinito.

En lo finito, el algo pone su propio término como negativo, que a la vez es esencial; no es sólo un término como tal, sino un límite. Además, el ser-en-sí, como relación negativa en la destinación con su término distinto de él, es relación hacia sí mismo como límite, es decir, deber-ser.

A fin de que el término, que se halla en general en el algo, sea límite, es preciso que el algo al mismo tiempo lo supere y se refiera ~~en~~ sí mismo a él como a un no existente. La relación de la destinación hacia su término es ahora la relación del deber ser hacia el límite.

Sin embargo, el límite de lo finito no es algo exterior, sino que su propia determinación es también su límite y éste es también un deber-ser tanto como él mismo. Y así, como deber-ser, el algo se halla elevado por encima de su límite y, por el contrario, sólo en tanto deber-ser tiene su límite. Ambos son inseparables.

De este modo, el deber-ser por sí mismo contiene el límite, y el límite contiene el deber-ser. Su mutua relación es lo finito mismo, que los contiene a ambos en su ser-dentro-de-sí. Estos momentos de su destinación se hallan opuestos uno al otro cualitativamente; el límite está determinado como lo negativo del deber-ser y el deber-ser está determinado como lo negativo del límite. Lo finito, así, es la contradicción de sí dentro de sí, se elimina a sí mismo, perece.

Pero perece de un cierto modo, ya que en su perecer no perece, se ha convertido en un otro finito que perece nuevamente en otro finito y así, al infinito.

De aquí que, en este traspasar, en este negarse a sí mismo, coincida consigo mismo. Es por tanto, una negación de sí mismo, una reflexión en sí mismo, esto es, un ser-en-sí.

Ser-en-sí que, como identidad consigo mismo es un ser afirmativo, que inmediatamente es lo otro de sí mismo, en cuanto es lo que debe tener la primera negación como determinación suya. Este otro es lo infinito.

Lo infinito aparece determinado expresamente como negación de lo finito, y por lo tanto, la limitación representa en lo infinito una relación expresamente considerada y como tal, negada en él. En la infinitud se halla, dice Hegel, la satisfacción de toda alteración o determinación todo límite y, con él también, ha desaparecido el deber-ser; está puesta la nada de lo finito.

El infinito existe como unidad inmediata con la negación de un otro, lo finito. Es un algo determinado y, como tal, un término. Y así, el ser inmediato del infinito despierta el ser de su negación, vale decir, otra vez de lo finito, que parecía primeramente desaparecido en el infinito.

Y esto, porque el infinito está puesto contra lo finito en una relación cualitativa de otros, el uno frente al otro. Y este infinito, puesto como lo otro de lo finito, es el falso infinito, el infinito del intelecto.

De aquí, de esta oposición, se dan dos mundos: uno finito y otro infinito, y en su relación, el infinito es sólo el término de lo finito y, por lo tanto, un infinito determinado, que es, él mismo, un infinito finito.

Así, lo finito pone su no-ser en este infinito y, de la misma manera, el infinito pone su no-ser en lo finito. Por esta vía, la unidad de lo finito y lo infinito está como un "volcarse" de lo finito en lo infinito y viceversa, un propio nacer en el otro. Esta es la determinación recíproca de lo finito y lo infinito. Y esta determinación recíproca se presenta como el progreso al infinito, que no es más que la mismidad que se repite, una sola y misma alternación de este finito e infinito.

Si, como en el progreso al infinito, consideramos la oposición del infinito con su otro, que al mismo tiempo se determina en su otro, observamos que del hecho de que el infinito se halle puesto como existente en sí, se sigue que no es el todo, es sólo una parte de la oposición, y por ello es finito. En esta separación de lo infinito está justamente su finitud, y con ello su unidad con lo finito.

Lo finito, existiendo como tal, traspasa, como se ha visto, a lo infinito, y así, lo finito es también infinito. Sin esta relación, ninguno de los dos es lo que es - ambos contienen de este modo su otro en su propia determinación (progreso al infinito) - cada uno tomado por sí, considerado en sí mismo, tiene a su otro situado en él como su propio momento. Esto da la unidad de lo finito y lo infinito.

Ahora, ellos, lo finito y lo infinito, tienen que ser también distintos; cada uno es en sí mismo la unidad de ambos, y así se presentan dos de tales unidades. Y cada uno es en sí mismo una de estas dos unidades y el infinito es tal, sólo como su mismo eliminarse, donde uno no tendrá sobre el otro, el privilegio del ser-en-sí. Tal como se mostró anteriormente, existe la finitud, sólo como un ir más allá de sí. En ella, por lo tanto, está contenida la infinitud, lo otro de ella misma. Igualmente la infinitud es sólo un ir más allá de lo finito; por lo tanto, contiene esencialmente su otro, y de este modo es en sí lo otro de ella misma. Lo finito no se halla eliminado por el infinito como por un poder que se presente fuera de él, sino que es él su propia infinidad, su eliminarse a sí mismo.

Sin embargo, este eliminarse no es el eliminarse del algo, aquello donde lo finito se elimina es el infinito en tanto negación de la finitud. Así, la infinitud está determinada como lo negativo de la finitud, y con eso, de la determinación en general, determinación que, como se recordará, es primera negación.

Su eliminarse en lo finito es una negación del más allá, que es un negativo en sí mismo. Ambos son, pues, negación de la negación, afirmación.

Puede hacerse aún otra consideración en torno al progreso al infinito. En este, primero está lo finito, cuando se le supera se tiene lo infinito, que se le supera a su vez para tener otra vez lo finito. De igual forma, podemos partir del infinito, superarlo en lo finito y tener, con ello, nuevamente al infinito.

En ambos casos, lo finito y lo infinito resurgen ellos mismos de donde habían partido, han coincidido consigo mismos y sólo se han encontrado otra vez a sí mismos en su más allá.

De modo que considerar primero a uno u otro es lo mismo, puesto que ambos, lo finito y lo infinito, son ellos mismos momentos del progreso, son de manera común lo finito y en cuanto se hallan a la vez de manera común negados en él y en el resultado, este resultado, como negación de aquélla finitud de ambos, se llama <u>en verdad infinito</u>.

Lo finito tiene el doble sentido de ser, en primer lugar, sólo lo finito contra el infinito que se le opone y, en segundo lugar, de ser a la vez lo finito y lo infinito que se le opone. También el infinito tiene el doble sentido de ser uno de aquellos dos momentos y de ser el infinito en el cual aquellos dos, el mismo y su otro, son sólo momentos.

El modo en el que aparece el infinito consiste en el proceso donde él se rebaja a ser sólo una de sus determinaciones en contra de lo finito y, de este modo, ser él mismo sólo uno de los finitos; en eliminar luego esta diferencia de sí con respecto a sí mismo para llegar a la afirmación de sí, y en estar, por vía de esta mediación, como infinito verdadero.

Tenemos, finalmente, que el infinito se halla puesto como negando la negación, contiene la negación en general y por tanto la determinación. Existe y existe aquí, presente, actual.

Por el contrario, el infinito falso se halla puesto como el más allá, porque es sólo la negación de lo finito, como negación primera; no tiene en él la afirmación de la existencia. No debe ni siquiera existir, debe ser inalcanzable.

Se ha visto que el ser-para-sí es la infinitud que se ha derrumbado en el simple ser; es un ser determinado en tanto la naturaleza negativa del infinito se halla puesta como simple determinación cualitativa. Y es un ser determinado de tal manera, que ya no es un otro y un ser-para-otro, sino que se ha replegado en su unidad infinita del ser-para-sí, y el momento del ser determinado se presenta en el ser-para-sí como ser-para-uno.

De esta manera, el ser-para-sí es la simple unidad de sí mismo y de su momento, el ser-para-uno. La sola determinación que aquí aparece es la referencia a sí mismo del eliminarse. Los momentos del ser-para-sí han vuelto a caer en la indistinción, que es inmediación o ser, pero una inmediación que se fundamenta en el negar, que es su determinación. Por ello, el ser-para-sí es un existente para sí, y en cuanto en esta inmediación desaparece su significado interior, es el término totalmente abstracto de sí mismo, <u>lo uno</u>.

Este uno es la simple referencia del ser-para-sí a sí mismo, en la cual sus momentos han recaído dentro de sí, y por lo tanto él tiene la forma de la inmediación y sus momentos se vuelven, entonces, existentes.

Ahora bien, en él mismo, lo uno en general existe; es un ser determinado, pero no en referencia a otro, no es una constitución. Su determinación, dice Hegel, consiste precisamente en haber negado esta esfera de categorías: el uno ya no es capaz de convertirse en otro, es inmutable. Aparece entonces como indeterminado, en donde la indeterminación es la determinación que es una referencia a sí mismo. Lo uno tiene, como se ha visto, una diferencia en él, una dirección que marcha desde sí hasta lo exterior, respecto a otro, pero que inmediatamente se vuelca porque no hay ningún otro hacia el cual pueda proceder

No existe, o más bien, ha desaparecido la mediación del ser determinado y con ella, la distinción. No hay nada en lo uno; esta nada, puesta en lo uno, es la nada como vacío.

Ahora, el ser-para-sí, en su inmediato ser determinado, es lo uno y el vacío.

Pero puesto que el ser-para-sí se halla fijado como uno, como existente en sí, su relación negativa hacia sí es, a la vez, relación hacia un existente; por tanto, es una referencia a un otro, que como referencia a sí mismo, no es la negación indeterminada, no es el vacío, sino lo uno. Lo uno, por tal razón, es un "devenir" muchos unos. Y no es un devenir como traspaso del ser en la nada, lo uno se convierte sólo en lo uno. Esta referencia negativa de lo uno a sí mismo es la repulsión.

Estos muchos uno son, por cierto, lo mismo; cada uno de ellos es uno como lo es otro. La repulsión es ella misma un referir: el uno que excluye a los unos se refiere él mismo a ellos, a los unos, i.e., a sí mismo. Este negativo referirse de los unos no es más que un solo coincidir consigo. Esta identidad, en la que se traspasa su rechazarse, es la eliminación de la diferencia. Este ponerse en-un-sólo-uno los muchos unos, este coincidir consigo, es la atracción.

Es claro que lo existente-para-sí se halla puesto ahora no como para excluir a su otro, sino que está puesto, antes bien, para continuar en él de modo afirmativo, es él, el ser otro, en tanto se presenta otra vez en esta continuidad el existir, su determinación no es más la determinación inmediata del algo existente, sino que se halla puesta como rechazándose a sí misma, para tener en otro existente-para-sí la referencia a sí como determinación. Y en cuanto éstos están al mismo tiempo como términos indiferentes, reflejados en sí, carentes de relación, la determinación se halla en general fuera de sí, es un algo absolutamente extrínseco a sí. Tal término, que es la indiferencia de él en sí mismo y la del algo frente a él, constituye la determinación cuantitativa de éste.

Así, si la cualidad es la primera e inmediata determinación, la cantidad es la determinación que se ha vuelto indiferente al ser, es un término que al mismo tiempo no es tal, es el ser-para-sí que es en absoluto idéntico con el ser-para-otro; es la repulsión de los muchos unos, que de inmediato es no repulsión y continuidad de ellos.

En primer lugar, hay que distinguir la cantidad pura de la cantidad determinada.

La cantidad pura no tiene todavía ninguna determinación. En cuanto ésta se pone en ella se convierte en cuanto. El cuanto, que es cantidad con una determinación o un término en general, en su completa determinación es el número. Dicho cuanto se diferencia ante todo en un cuanto extensivo, en el cual el término está como limitación de la multiplicidad existente, luego, dado que esta existencia traspasa el ser-para-sí, a un cuanto intensivo o grado, que tiene su determinación en un otro, dado que está para sí y por ende como término indiferente, está de modo igualmente inmediato fuera de sí.

Como tal contradicción puesta, entre el ser así determinado simplemente en sí y tener su determinación fuera de sí e indicar para ella fuera de sí, el cuanto traspasa a la infinitud cuantitativa, que es la determinación indiferente (aquélla del cuanto) eliminada, es la restauración de la cualidad.

Este traspasar a lo infinito no es sino la expresión de la contradicción ya señalada del cuanto: el cuanto se convierte en un otro, pero se continúa en su ser otro; este otro, con ello, sigue siendo un cuanto. Más aún, este otro no sólo es el otro de un único cuanto, sino del cuanto en general, es lo negativo del cuanto (como terminado) y por lo tanto es su ilimitación, su infinitud.

Es pertinente hacer aquí una distinción entre infinitud cualitativa y cuantitativa. Si consideramos la primera, tenemos que el traspaso de lo finito en lo infinito, está sólo en lo en-sí, vale decir, en su concepto. La determinación cualitativa se halla como inmediata y se refiere al ser-otro esencialmente como a un ser-otro suyo; no está puesta como para tener su negación, su otro, en sí misma. Lo finito y lo infinito cualitativos permanecen, por lo tanto, uno frente al otro de manera absoluta, es decir, abstracta; su unidad consiste en la relación interior que yace en su fundamento. Lo finito se continúa en su contrario sólo en sí, pero no en él.

Por el contrario, la infinitud cuantitativa, el término en sí mismo, es el que remite y continúa en su más allá, por lo cual, también el infinito cuantitativo se halla puesto como para tener el cuanto en él mismo; pues el cuanto en su ser-fuera-de-sí es a la vez él mismo y su exterioridad pertenece a su determinación.

Y la expresión de esta contradicción es el infinito progreso, es el perpetuo engendrarse del infinito, sin que salga más allá del cuanto: si el cuanto tiene en su concepto el de tener un más allá de sí mismo, también tiene el de ser él mismo, el otro de sí mismo, este más allá de sí mismo. De este modo, el infinito, el más allá, es sólo un cuanto.

El progreso no es, entonces, sino un repetir lo mismo y precisamente lo mismo, un poner, eliminar y volver a poner y volver a eliminar.

Es, dice Hegel, una impotencia de lo negativo, al que lo que él elimina por medio de su eliminar mismo, retorna como un continuo. Son dos tan vinculados entre ellos, que se huyen absolutamente, y porque se huyen no pueden separarse, sino que se hallan anudados en su recíproca huida.

Por ello dice acerca del cuanto infinito, como infinitamente grande o infinitamente pequeño, que es en sí mismo infinito progreso: es un cuanto en tanto es grande o pequeño, y al mismo tiempo el no-ser del cuanto. Son representaciones que se muestran, dice Hegel, "como nieblas y sombras nulas".

La contradicción que se halla puesta en este progreso al infinito debe eliminarse. Por ello, afirma Hegel, "si tomamos este progreso ante todo en sus determinaciones abstractas, tal como se presentan, entonces está en él el eliminarse del cuanto, pero también, el de su más allá, y por lo mismo la negación del cuanto, así como la negación de esta negación. Su verdad consiste en la unidad de ellas, donde ellas están, pero como momentos. Esta [unidad] es la solución de la contradicción, cuya expresión es aquel (progreso infinito), y su sentido más próximo es por lo tanto la restauración del concepto de magnitud, por lo cual ésta es un término indiferente o exterior."

En el progreso al infinito, continúa, suele reflexionarse sólo en esto, que el cuanto, ya sea todavía grande, ya sea pequeño desaparece, y que debe poder pensarse más allá de él; pero no puede reflexionarse que este su eliminarse, que es el más allá o el malo infinito, desaparece también él mismo" (36)

El concepto de cuanto se halla así restaurado, o lo que es lo mismo, ha surgido el cuanto determinado según su concepto. La exterioridad es ahora lo opuesto de sí misma, y el cuanto está de tal modo puesto, que por la mediación de su no-ser, esto es, la infinitud, tiene su determinación en un otro cuanto, es decir, es cualitativamente lo que es. El cuanto, pues, ha vuelto a la cualidad, se halla determinado cualitativamente.

Su cualidad es, además, la exterioridad, la indiferencia respecto a la determinación, y el cuanto se halla ahora puesto como para ser en su exterioridad más bien él mismo, y estar en simple unidad consigo, es decir, para ser determinado cualitativamente.

Para terminar y antes de tratar el infinito matemático, una última consideración. Se trata de que el cuanto, referido en sí mismo a su exterioridad, como término indiferente (y con ello puesto de modo cualitativo) constituye la relación cuantitativa. En la relación, el cuanto es exterior a sí, diferente de sí; esta exterioridad es la relación de un cuanto con otro, de los que cada uno vale sólo en esta relación suya con su otro, y esta relación constituye la determinación del cuanto, que existe como tal unidad.

Para Hegel, el infinito matemático es importante, en sentido filosófico, porque en su fondo está el verdadero infinito.

Comienza por establecer que algo que puede ser aumentado o disminuido, y por lo tanto un término indiferente, es lo que en matemáticas se define como magnitud. Si lo infinitamente grande o lo infinitamente pequeño es tal que ya no puede ser aumentado o disminuido, tenemos que en realidad ya no es un cuanto como tal.

De este modo el cuanto infinito ya no es un cierto cuanto finito, ni una determinación de magnitud, que tenga una existencia como cuanto, sino que sólo existe como momento; es una determinación de magnitud cualitativa; su infinitud consiste en existir como una determinación cualitativa.

"Como momento, dice Hegel, está en unidad esencial con su otro, sólo como determinado por medio de ése su otro, vale decir, que tiene sólo un significado con respecto a algo que está en <u>relación</u> con él. Fuera de esta relación es cero; porque precisamente el cuanto como tal, indiferente <u>con respecto a la relación</u>, debe ser en sí todavía una <u>inmediata</u> determinación en reposo. <u>En la relación</u>, como sólo momento no es algo por sí indiferente; está en la infinitud como un ser-para-sí, en tanto es a la vez una determinación cuantitativa, y está sólo como un <u>ser-para-uno</u>" (37)

Pasa luego a analizar 2/7 o 1/1-a, en tanto relación. Ve en esta relación la determinación, primero de ser un cuanto y, segundo, que este cuanto no está como un inmediato, sino que tiene con él la oposición cualitativa. Queda en la relación aquel cuanto determinado, indiferente, porque ha vuelto en sí desde su ser otro, y por lo tanto es también un infinito.

Ahora bien, el quebrado 2/7 puede expresarse como 0.285714... y el quebrado 1/1-a como $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots$ que de este modo existen como series infinitas. El infinito no está aquí en la relación, sino en la infinitud de la serie, que es la mala infinitud del progreso.

"La serie, dice Hegel, contiene y manifiesta la contradicción de presentar algo que es una relación y tiene en sí una naturaleza <u>cualitativa</u>, como algo carente de relación, como un puro <u>cuanto</u>, como un monto. La consecuencia de esto es que siempre hace falta algo en el monto que se halla expresado en la serie, de modo que para alcanzar la determinación requerida, hay que salir siempre más allá de lo que se halla puesto (...) El monto puede por cierto ser convertido en tan exacto como se <u>necesite</u>, por medio de la continuación de la serie; pero su expresión por medio de la serie permanece siempre sólo un deber-ser; se ve siempre afectada por un *más allá* que no puede ser eliminado, porque expresar como *cuanto* algo que reposa sobre una determinación *cualitativa* es una contradicción permanente" (38)

Lo que distingue la serie infinita de la relación (o expresión finita) consiste en esto:

"... en la serie infinita lo negativo se halla fuera de sus miembros, que están presentes sólo en cuanto valen como partes del *monto*. En la expresión finita, en cambio, que es una relación, lo negativo se halla inmanente como el ser-determinados los términos de la relación el *uno por medio del otro*, lo cual significa un haber vuelto en sí, una unidad que se refiere a sí misma, como negación de la negación (pues *los dos* términos de la relación están solo como *momentos*), y por lo tanto tienen dentro de sí la determinación de la infinitud. En la realidad, por ende, la habitualmente *llamada suma*, el 2/7 o el 1/1-a es una relación y esta llamada *expresión finita* es la verdadera *expresión infinita*. La serie infinita, al contrario, es en verdad una suma, que es la *expresión finita*, porque es el agregado inacabado y permanece esencialmente como algo defectuoso" (39)

Veremos para terminar, qué es lo que se halla puesto en el coeficiente diferencial dy/dx.

Para Hegel, en una ecuación donde x y y se hallan puestos ante todo como determinados por una relación de potencias ($y^2/x = p$), x y y deben tener todavía, como tales, el significado de cuantos; este significado se corrompe por completo en las llamadas *diferencias infinitamente pequeñas*; dx, dy ya no son cuantos, ni siquiera deben tener tal significado, sino que tienen un significado sólo en su relación, tienen un sentido sólo como momentos. No son más algos, si se toma el algo como cuanto, no son diferencias finitas, pero tampoco son nada, tampoco son el cero carente de determinación. Fuera de su diferencia son puros ceros, pero deben ser tomados sólo como momentos de la relación, como determinaciones del coeficiente diferencial dy/dx.

En este concepto del infinito, el cuanto está verdaderamente acabado y convertido en una existencia cualitativa; está puesto como realmente infinito; está eliminado no sólo como este o como aquel cuanto, sino como cuanto en general

Quisiéramos, para finalizar, hacer énfasis en esto que creemos ha aparecido con más o menos claridad: que para la filosofía el infinito se plantea como aquello puesto en oposición a lo real limitado, a lo finito.

Infinito que, como el tiempo, no tiene ningún principio ni ningún fin; universo infinito que no conoce límites; espacio infinito al que siempre es posible añadir espacio, del mismo modo que siempre es posible añadir unidad a la unidad, número al número; substancia infinita con infinitos atributos; substancia infinita e indivisible, dios eterno.

Infinito que es sólo lo indefinido, lo indeterminado, lo ilimitado.

Mostraremos ahora, el largo camino que la matemática ha debido recorrer para salir de lo indefinido, el trabajo necesario para determinar lo indeterminado, en fin, la fundación de una teoría del infinito.

Bibliografía

① Aristóteles, 1967. Metafísica, V, 12, 1019 b/1020 a, en obras. Ed. Aguilar, Madrid.

② Ibid, IX, 7, 1048 a/1048 b

③ Aristóteles, 1967. Física libro III, Cap. 4, 203 b/204 a en Obras. Ed. Aguilar, Madrid.

④ Ibid, III, 5, 203 b/204 a a 205 b/206 a

⑤ Ibid

⑥ Ibid

⑦ Ibid

⑧ Ibid

⑨ Ibid, III, 6, 206 a

⑩ Ibid, III, 6, 206 a/206 b/207 a

⑪ Ibid

⑫ Ibid, Lib. III, Cap. 7, 207 a/208 a.

⑬ Cusa, 1973, La Docta Ignorancia. Ed. Aguilar, Argentina. libro II, Cap 5. pg. 36.

⑭ Ibid. Lib. II, Cap. 3, pg 111

⑮ cfr. Historia de la Filosofía, Copleston, La Filosofía del Renacimiento.

⑯ Cusa, op. cit. pg. 115

17 Ibid, libro II, Capítulo XI, pg. 150

⑱ Ibid

⑲ Ibid

⑳ Ibid, pg. 118

㉑ Ibid. Lib III, Cap. XII, pg. 155

㉒ Ibid

(23) Ibid

(24) Bruno, G, Della causa, principio e uno. Libro V, citado por Angel J. Cappelletti en el prólogo al libro del mismo Bruno Sobre el infinito universo y los mundos en la ed. de Aguilar, 1972, Argentina

(25) ibid

(26) Bruno G, Sobre el infinito universo y los mundos, Ed. Aguilar Argentina, 1972. Diálogo primero, pg. 95

(27) Ibid. Epístola introductoria, pg. 74

(28) Spinoza, Etica, Ed. Aguilar, 1973; 1a parte, pg. 29

(29) Ibid. pg. 27

(30) Ibid. pg. 27

(31) Ibid pg. 33

(32) Ibid. pg. 28

(33) Ibid. pg. 44

(34) Ibid.

(35) Cfr. Copleston, Historia de la Filosofía. De Descartes a Leibniz. Spinoza I, Spinoza II

(36) Hegel, J.G.F. Lógica, libro I, la doctrina del ser, pg. 210

(37) Ibid, pg. 215

(38) Ibid pg. 217

(39) Ibid.

Si como afirmamos, ninguna de las determinaciones sobre el infinito que hemos mostrado forma parte del infinito matemático, estamos obligados, por ello, a establecer determinaciones distintas del infinito. Nuestra tarea es, entonces, mostrar que estas determinaciones surgen de la propia práctica matemática; mas aún, que es esta determinación en el interior de la matemática y para la matemática, lo que es, al mismo tiempo, constitución del infinito de la matemática.

Es pues, esta constitución la que tendremos que mostrar. Sólo entonces estaremos autorizados a hablar de un infinito matemático, es decir, de un concepto matemático que ha surgido como respuesta a problemas planteados en el seno de la matemática misma.

En lo que sigue, nos restringiremos a aquella parte del trabajo matemático en la que se ha situado la aparición de este concepto: la teoría de funciones. Creemos que es allí donde se plantean los problemas cuya solución será posibilitada gracias al nuevo concepto. En todo caso, es allí donde hemos de trazar su historia.

Antes una exigencia: la de indicar la organización del campo de enunciados en el que aparece y circula el nuevo concepto. Exigencia cargada de dificultades, pues nos parece que, en este caso, no podremos mostrar la organización particular de nuestro cuerpo de enunciados sino a condición de referirla a su propia constitución. Exigencia cargada, también, de consecuencias: tan pronto somos capaces de indicar dónde surge el nuevo concepto, es sólo para darnos cuenta que su aparición provoca una reorganización del cuerpo de enunciados.

Habremos de situarnos, ante todo, en el espacio teórico inaugurado por Galileo, y que no es otro que el de la física moderna.

Con Galileo, es bien sabido, se opera la ruptura con la física aristotélica. Ruptura que permite la fusión de la física terrestre con la física celeste. Cielo y tierra son ahora parte del mismo universo infinito cuyas leyes han de establecerse matemáticamente. En esta nueva física, el movimiento pensado como un proceso de cambio no tiene lugar. Se le piensa ahora, al igual que al reposo, como estados de la materia. Como estados de la materia, un cuerpo en movimiento permanecerá eternamente en movimiento y uno en reposo se mantendrá igualmente en reposo indefinidamente, a menos que se aplique una fuerza que los haga cambiar de estado.

Como bien señala Koyré, ésto no puede pensarse si no se supone, previamente, la posibilidad de aislar un cuerpo dado de todo su entorno físico y pensarlo como algo que se realiza simplemente en el espacio, además de concebir al espacio como el espacio homogéneo infinito euclidiano. (1)

Pensar esto es pensar una naturaleza fundamentalmente distinta que la legada por el aristotelismo. La naturaleza no es más la naturaleza empírica, inmediata, cuyo estudio, basado en la percepción sensible no se deja matematizar. Ahora, el gran libro de la naturaleza está escrito en caracteres geométricos. Es esta, indudablemente, una nueva cualidad impuesta al mundo, una nueva manera de legislar: la matemática puede hablar de la naturaleza.

Es en este contexto en el que queremos inscribir al proyecto cartesiano. Es este espacio teórico el que nos explica no sólo el proyecto mismo sino, particularmente, su vigencia durante tantos siglos.

Con Descartes, se establece un modo de sanción sobre la realidad según el cual la realidad de los objetos está dada en términos geométricos. Hay aparejado en ello un concepto de materia, en tanto que res extensa, y que aparece tan clara y distinta al entendimiento que no puede dejar de ser considerada como una verdad fundamental, ontológica.

Es importante señalar, en lo que nos concierne, que esta sanción geométrica impuesta al mundo no olvida, y no podría hacerlo, al movimiento. Y no podría hacerlo, repetimos, porque como dice Koyré, " el universo cartesiano, esto se sabe demasiado, es construído con muy cosa. Materia y movimiento; o mejor - pues la materia cartesiana, homogénea y uniforme, no es más que extensión - extensión y movimiento; o mejor aún - pues la extensión cartesiana es estrictamente geométrica, espacio y movimiento. El universo cartesiano, se sabe bien, es la geometría realizada" (2)

En Descartes, los cuerpos describen dos movimientos: uno en línea recta y el otro en curva; el primero proviene de Dios, el segundo de la materia. Se rechazan, con ello, todos los movimientos cualitativamente distintos que usaban los escolásticos (de la forma, del calor etc). Se afirma como único, aquél que describen " las líneas de los geómetras" que hace que los cuerpos pasen de un lugar a otro y que ocupen sucesivamente todos los espacios entre los dos lugares. (3)

No es sorprendente entonces que, luego de la geometría analítica, se excluyan todas aquellas curvas que no sean susceptibles de una definición analítica precisa. Mas aún, las expresiones algebraicas y analíticas tienen que quedar reducidas a aquéllas que son definidas por curvas geométricas simples.

Es esta la confusión creada por Descartes, dice Bourbaki. Es éste el establecimiento de un nuevo espacio teórico que opera conforme a lo dicho por Descartes, afirmamos nosotros.

Nada hay de sorprendente entonces, en que Hankel feche la matemática moderna en el instante en que

Descartes, "a partir del tratamiento puramente algebraico llega a estudiar las variaciones de magnitud que sufre una expresión algebraica cuando una magnitud designada en ella de manera general, recorre una serie continua de valores". (4)

Probar la afirmación que hacemos, para el campo que nos ocupa, no resulta complicado. Basta seguir el hilo de la historia y comprobar, por ejemplo que para Jean Bernoulli y Leibniz (quien introduce la palabra), una función arbitraria de x no es "sino una cantidad formada de una manera cualquiera a partir de x y de constantes". Euler retoma textualmente esta definición: "Se llama función de una magnitud variable una cantidad compuesta, de cualquier manera que esto sea, de esta magnitud variable y de constantes".

No es otra la idea clásica en el siglo XVIII, idea que, ya desde Descartes, y sin apartarse de él, restringe únicamente a las operaciones algebraicas los procedimientos de formación admisibles en tal definición. Señalaremos aquí, con Bourbaki, que diversas operaciones trascendentes, el logaritmo, la exponencial, las funciones trigonométricas, sumación de series, fueron poco a poco adquiriendo el "derecho de ciudadanía", a veces por caminos muy indirectos.

En todo caso, se puede constatar que prácticamente todo el trabajo de esa época está basado en expresiones analíticas (algebraicas y/o trascendentes), a las que se aplicaba la operación de diferenciación e integración y que, exceptuando en algunos puntos, se sabía cómo representar por medio de curvas continuas que admiten tangentes.

"Así, asegura Desanti, no podían concebir otras funciones que las que así definían y manejaban y a las que llamaron funciones continuas. Sin duda lo hicieron para indicar que estaban siempre bien definidas, infinitamente diferenciables, capaces de expansión en series de Taylor, integrables y capaces de ser representadas gráficamente por una curva algebraica o trascendente (5)

Es pues, la composición quien define la función. Si ahora pensamos la definición que da Cauchy - "Se dice que y es una función de x si para todo valor definido de x corresponde un valor de y, sin importar qué forma de relación ocurra entre x y y - es claro que lo que es fundamental es la idea de dependencia o correspondencia funcional, independientemente de cualquier expresión analítica. Cabe preguntarse, entonces, acerca de la validez de la formulación - por ejemplo,- de Bourbaki: "La noción de función es introducida y precisada de muchas maneras a lo largo del siglo XVII"

Tomaremos en lo que vale el argumento: "toda cinemática se basa en una idea intuitiva, y de algún modo experimental, de las cantidades variables con el tiempo, es decir, de funciones del tiempo, y ya hemos visto cómo se llega así a la función de un parámetro, tal como aparece en Barrow, y, con el nombre de ~~fluyente~~, en Newton. La noción de 'curva cualquiera' aparece a menudo, pero no se precisa nunca. Puede que se haya concebido muchas veces en forma cinemática o en todo caso experimental, y sin que se considerase necesario que una curva fuese susceptible de una caracterización geométrica o analítica para poder ser objeto de razonamiento". (6)

Semejante argumentación no nos parece mostrar nada como no sea, justamente, la dificultad del problema: de qué modo puede la matemática pensar aquéllo que aparecía sólo en forma cinemática o en todo caso experimental; y no sólo de qué modo, sino además, porqué la matemática ha de pensar de modo distinto las funciones.

Una vez más, volveremos sobre Bourbaki, para quien "la historia del cálculo diferencial e integral, a partir de finales del siglo XVII se divide en dos épocas: Una se relaciona con las aplicaciones de este cálculo, cada vez más ricas y variadas. A la geometría diferencial de las curvas planas, a las ecuaciones diferenciales, a las series de potencias, al cálculo de variaciones [...] vienen a unirse a la geometría diferencial de las curvas alabeadas y después de las superficies, las integrales múltiples, las ecuaciones en derivadas parciales, las series trigonométricas, el estudio de las funciones especiales y otros muchos tipos de problemas." (7)

En esta ocasión queremos reconocer en esto que Bourbaki ha llamado dos épocas distintas, mas bien dos modos distintos de trabajo matemático: uno, que en tanto que aplicación del cálculo, no ha renunciado al mundo; otro que, por el contrario, parece haberlo hecho.

¿Habrá perdido validez el principio galileano? Podemos decir que no y añadimos con Cavaillès que "a esta renuncia frente a la mecánica, el movimiento espontáneo de las matemáticas, en tanto que expresión - y solución - de todo problema planteado, obligaba a plantear otro" (8)

En 1753, Daniel Bernoulli y Euler estudiaban el movimiento de las cuerdas vibrantes, que no necesitamos decirlo, es un problema eminentemente práctico, o si se quiere, de «aplicación del cálculo». Se trataba de dar a la ecuación con derivadas parciales $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ la solución más general que satisficiera un cierto número de condiciones iniciales. En particular, para $t=0$, la función $y = f(x,t)$ debe representar la posición inicial de la cuerda.

En 1747, D'Alambert había mostrado que la solución de este problema dependía de dos funciones arbitrarias sujetas a ciertas restricciones. Un año más tarde Euler encuentra una solución en términos de curvas dibujadas arbitrariamente y no en términos de las curvas analíticas (que hubieran sido convenientes) (9)

Nada obliga a encontrar una representación a través de series trigonométricas a estas curvas arbitrarias, como pretendía Euler, como no sea la de buscar

La "validación" de la solución al problema por el único camino que la ofrece: la representación analítica.

En 1807 Fourier da un procedimiento regular para construir esta serie:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx$$

cuyos coeficientes

$$a_\mu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \mu x\, dx \qquad b_\mu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} \mu x\, dx$$

se calculan fácilmente:

$$\text{Si } f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \cos \nu x + b_\nu \operatorname{sen} \nu x$$

Sea

$$f(x) \cos \mu x = \frac{1}{2} a_0 \cos \mu x + \cos \mu x \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \cos \nu x + b_\nu \operatorname{sen} \nu x$$

Integrando de $-\pi$ a π

$$\int_{-\pi}^{-\pi} f(x) \cos \mu x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos \mu x \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \cos \nu x + b_\nu \operatorname{sen} \nu x$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos \mu x\, a_\nu \cos \nu x + \int_{-\pi}^{\pi} \cos \mu x\, b_\nu \operatorname{sen} \nu x$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \mu x) = a_\nu \int_{-\pi}^{\pi} \cos \mu x \cos \nu x\, dx + b_\nu \int_{\pi}^{\pi} \cos \mu x \operatorname{sen} \nu x$$

sea $\mu = \nu$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \mu x = a_\nu \pi + b_\nu (0)$$

$$a_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \mu x\, dx$$

Si multiplicamos $f(x)$ por $\operatorname{sen} kx$ obtendremos, de la misma manera $b_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \mu x\, dx$

Tenemos así, por primera vez, la representación analítica de una curva mecánica. Éstas han "ganado el derecho" a ser consideradas, también, funciones.

Tal triunfo exhibe, inmediatamente, una derrota: Las formas de relación, algebraicas o trascendentes, a través de las cuales la función puede expresarse, no garantizan más, como hasta entonces lo habían hecho, continuidad, diferenciabilidad, integrabilidad etc; nada tienen que ver con las propiedades de la función, o lo que es lo mismo, no definen a la función.

He aquí porqué el concepto de función debe, necesariamente reformularse.

Es a partir de lo que las series de Fourier causan en la matemática, que los coeficientes de esta serie (anteriormente empleados por Lagrange y Euler) adquieren importancia: qué condiciones debe satisfacer la función arbitraria para que una cierta integración sea posible. Problema del que se ocupará Dirichlet.

El trabajo de Dirichlet se formula en torno a la pregunta por el límite, cuando n crece indefinidamente, de la suma parcial de los primeros n términos de la serie de Fourier

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\alpha)\,\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(\alpha-x)}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha-x}{2}}\,d\alpha \quad --- \quad (1)$$

Se trata de establecer qué condiciones son suficientes para que la serie converja a la función $\varphi(x)$.

Mas allá de las funciones continuas, monótonas y finitas, Dirichlet puede afirmar, siguiendo a Cauchy, que la serie converge si $\varphi(x)$ satisface tres condiciones:

1. permanecer finita en el intervalo $-\pi, \ldots, +\pi$
2. no tener sino un número finito de discontinuidades de 1era especie
3. no tener sino un número finito de máximos y mínimos.

Recordemos brevemente que Cauchy establece que

1º Si la integral de una función en un intervalo es la suma de las integrales extendidas a un número finito de intervalos parciales en el que el primer intervalo se dividió, se puede asignar a $\varphi(x)$ un número finito de máximos y mínimos.

2º Si $\int_a^x f(\alpha)\,d\alpha$ tiende hacia un límite determinado cuando $x \to b$, b punto de singularidad de f (punto de discontinuidad o punto donde f es infinita) Cauchy define a través de este límite a la $\int_a^b f(\alpha)\,d\alpha$.

En particular, si $f(x)$ tiende hacia un límite determinado $f(b-0)$ ó $f(b+0)$ (notación de Dirichlet) para $x \to b$ creciendo o decreciendo, es decir, si b es un punto de discontinuidad de 1era especie, las dos integrales $\int_a^{b-0} f(\alpha)\,d\alpha$ y $\int_{b+0}^{c} f(\alpha)\,d\alpha$ tendrán valores bien determinados y la integral $\int_a^c f(\alpha)\,d\alpha$ $a<b<c$, será definida como la suma de ambas. (10)

Como veremos en lo que sigue, son estas precisiones hechas por Cauchy, las que marcarán el camino al mismo Dirichlet y a Lipschitz, en el momento de demostrar que ninguna de las tres condiciones iniciales es irreductible. Mas aún, veremos que en este trabajo de transformar las condiciones de Dirichlet se encuentran planteados algunos de los problemas que serán resueltos por la teoría de conjuntos.

La primera restricción fué levantada en 1837. La función puede volverse infinita. Es necesario, sin embargo, que el número de puntos donde esto ocurra sea finito, ya que de esta manera, si $\int_x^y \varphi(\alpha)\,d\alpha$ es una función finita y continua de las variables x y y ($\varphi(\alpha)$ puede tomar valores infinitos entre x y y), cualesquiera que sean los valores tomados por x y y entre $-\pi$ y π (es decir, si $\varphi(\alpha)$ es integrable según Cauchy entre $-\pi$ y π) entonces, la integral (I) tomada no entre $-\pi$ y π sino entre dos valores arbitrariamente próximos alrededor del valor que hace a $\varphi(x)$ infinita, puede hacerse tan pequeña como se quiera.

Se trata, claramente, de encerrar al punto donde la función se hace infinita, en un intervalo arbitrariamente pequeño, de modo que la contribución de la integral tomada sobre ese intervalo sea despreciable.

Este mismo artificio parece ser aplicable al conjunto de puntos de discontinuidades; éstas podrían ser una infinidad pero "es necesario, precisa Dirichlet, que la función $\varphi(x)$ sea tal que, si designamos por a y b dos cantidades cualesquiera comprendidas entre $-\pi$ y π, puedan encontrarse siempre otras cantidades r y s entre a y b bastante próximas para que la función sea continua en el intervalo entre r y s. Se sentirá fácilmente la necesidad de esta restricción al considerar que los diferentes términos de la serie [de Fourier] son integrales definidas y remontándose a la noción fundamental de integral. Se verá entonces que la integral de una función no tiene otro significado que el de que la función satisface la condición enunciada anteriormente" (II)

Se establece como condición, en términos actuales, que el conjunto de discontinuidades sea no denso entre $-\pi$ y π, cuando el objetivo era, como se ha dicho, encerrar los puntos de discontinuidad en intervalos cuya contribución pueda anularse en la integral total.

Siguiendo a Cavaillès, "tal parece que hubo interferencia entre dos consideraciones: el de la medida, que debía llevar a la noción de grupo integrable y la de repartición de puntos de discontinuidad alrededor de puntos límites, noción de cjto derivado que debía precisar Cantor (12)

Es Lipschitz quien, por la vía de la segunda consideración, y siempre buscando la manera de encerrar en intervalos adecuados a las discontinuidades, asegura la integrabilidad de la función si suponemos que el conjunto infinito de puntos de discontinuidad tiene sólo un número finito de puntos límites. Éstos pueden encerrarse en un número finito de intervalos de longitud arbitrariamente pequeña. Al integrar sobre cada uno de ellos, las integrales correspondientes son despreciables pues "cada una de estas integrales es la suma de una infinidad de integrales constituídas de manera que esta misma suma puede volverse tan pequeña como se quiera" (13)

No nos extrañe entonces que, para mostrar que se puede suprimir la tercera condición, Lipschitz recurra al mismo tipo de consideraciones: "o bien se puede intercalar entre a y b números $r-\delta$ y $r+\delta$ tales que halla un número finito de máximos y mínimos en $(a, r-\delta)$ y $(r+\delta, b)$, pero un número infinito entre $r-\delta$ y $r+\delta$, no importa qué tan pequeña sea la distancia 2δ de estos dos números; o bien, cualesquiera que sean las cantidades r y s situadas en el intervalo (a,b) y a una distancia finita la una de la otra, no podremos jamás encontrar un número finito de máximos y mínimos en el intervalo (r,s); o bien el intervalo considerado contiene un número finito de intervalos no nulos en los cuales ó una ó la otra hipótesis se realiza" (14)

Si bien Lipschitz no hace jugar estas consideraciones en la demostración de que la serie (I) converge si en todos los puntos donde la función oscila, la oscilación $\omega = |f(x+\delta) - f(x)|$ es tal que $\omega < K\delta^{\alpha}$, $K = cte$, $\alpha > 0$, la repartición en estos tres casos, como señala Cavaillès, permite diferenciar conjunto no denso y conjuntos de primera derivada finito: "Si en efecto, se reemplaza la definición del primer caso por aquella de Dirichlet: conjunto de máximos o mínimos no denso, y en aquélla del tercer caso la palabra finito por "finito o infinito", la repartición es esta vez exhaustiva" (15)

Veremos que la introducción de una nueva definición de integral trae aparejada la introducción de un nuevo tipo de conjunto.

A partir del procedimiento operatorio que señala Cauchy para calcular la integral de una función continua, Riemann es capaz de dar una nueva definición de integral:

"Si la suma $S = \delta_1 f(x_1) + \delta_2 f(x_2) + \ldots + \delta_n f(x_n)$

(δ_i = intervalos parciales en que se divide el intervalo de integración (a,b), x_i = puntos cualesquiera en el interior de los δ_i) tiende hacia un límite, cualesquiera que sean los δ_i « cuando ellos devienen todos infinitamente pequeños, su valor se llama

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

si .. [la suma S] no tiene esta propiedad, $\int_a^b f(x)dx$ no tiene ningún significado »" (16)

La condición necesaria y suficiente para que S tenga límite, i.e., para que $f(x)$ sea integrable [$f(x)$ finita en (a,b)], es que para cada $\alpha > 0$, exista una subdivisión de (a,b) en intervalos parciales cuya longitud máxima sea suficientemente pequeña para que la suma de las longitudes de los intervalos de esta subdivisión en los que la oscilación es mayor que α, sea arbitrariamente pequeña, definiendo oscilación como la diferencia entre el límite superior y el límite inferior en cada intervalo δ_i (17)

Es así como se extiende y precisa la idea de Dirichlet – Lipschitz: " no solamente es suficiente que los puntos de discontinuidad de una función integrable puedan ser encerrados en un número finito de intervalos de longitud total arbitrariamente pequeña, es decir, formen lo que du Bois-Reymond debía llamar un grupo integrable, sino además, no hay más que considerar la importancia de las discontinuidades relativamente a los intervalos donde ellos aparecen: si los puntos donde los saltos [límite al cual tiende $f(x+\varepsilon) - f(x-\eta)$ cuando ε y η tienden a cero: $f(x+0) - f(x-0)$] son mayores que una cantidad dada forman un grupo integrable, la integral existe" (18)

Hemos mostrado aquí el camino que se ha seguido, de Dirichlet a Riemann, en el establecimiento de las condiciones suficientes para la integrabilidad de una función. En toda esta historia, lo que queremos destacar es que, la extensión de las funciones integrables sólo ha sido posible a condición de establecer «intervalos despreciables», conjuntos de puntos (puntos donde la función se vuelve infinita, discontinua, puntos donde hay máximos y mínimos, en fin, puntos donde la oscilación de la función es mayor que α) que tienen que mostrarse como absolutamente carentes de efecto si la integral se efectúa sobre ellos.

Encontramos así tres tipos de conjuntos que no fueron reconocidos, en un principio, como distintos. Se trata, como ya hemos visto, de los conjuntos derivados finitos, los conjuntos no Densos y aquellos conjuntos de puntos que pueden ser encerrados en un número finito de intervalos de longitud arbitrariamente pequeña.

Si estos conjuntos aparecen de manera tan importante en el establecimiento de las condiciones suficientes, no lo hacen menos en el establecimiento de las condiciones necesarias, estudio que emprende Riemann, luego de dar un giro en el modo de enfrentarse al problema de la representación de funciones por series trigonométricas.

giro que aparentemente es necesario puesto que si ahora una función puede ser integrable (en el sentido de Riemann) aún cuando tenga un número infinito de discontinuidades, qué quiere decir que una función sea representable por una serie que no converge a la función en un número infinito de puntos.

Riemann comienza por considerar la serie trigonométrica

$$\Omega(x) = A_0 + A_1(x) + A_2(x) + \ldots + A_n(x) + \ldots$$

donde $A_0 = \frac{1}{2}a_0$, $A_n(x) = a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$

y $A_n(x) \to 0$ si n crece indefinidamente.

Tenemos entonces una serie trigonométrica que no tiene por que ser una serie de Fourier, puesto que no se establece ninguna determinación sobre los coeficientes a_n y b_n que ocurren en Ω.

Integrando término a término 2 veces la serie Ω, se obtiene

$$F(x) = C + C'x + \frac{A_0 x^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(x)}{n^2}$$

Esta serie converge para todo valor de x y representa una función continua de x. Tiene además, dos propiedades importantes.

1. $D^2F(x)$ existe y es igual a $\Omega(x)$ cuando Ω converge.

$$D^2F(x) = \lim_{a,b\to 0} \frac{F(x+a+b) - F(x+a-b) - F(x-a+b) + F(x-a-b)}{4ab}$$

2. $\forall x, \ \lim_{a\to 0} \frac{F(x+a) - 2F(x) + F(x-a)}{a} = 0$

A partir de estos resultados, Riemann establece condiciones necesarias (que encuentra al mismo tiempo suficientes) para la representabilidad de una función por una serie; queda establecido que, « cuando los coeficientes de la serie devienen infinitamente pequeños con $\frac{1}{n}$, su convergencia, para un cierto valor de x no depende sino del comportamiento de la función en la vecindad inmediata de este valor» (19)

Que las condiciones que son necesarias sean también suficientes, obliga a Riemann a investigar las condiciones suficientes:

Si la función f(x) satisface las tres condiciones de Dirichlet transformadas (no ser infinita, ser Riemann integrable, no tener sino un número finito de máximos y mínimos) y si los coeficientes $A_n(x)$ en $\Omega(x)$ tiende a 0 con $\frac{1}{n}$, entonces los coeficientes de $\Omega(x)$ son los coeficientes de Fourier y la serie converge en todos los puntos cuyas vecindades no tengan un número infinito de discontinuidades de la función.

Qué pasa, se pregunta Riemann, si los $A_n(x)$ en $\Omega(x)$ no tienden a cero con $\frac{1}{n}$ para todo valor de x. Si la función f(x) es integrable esto no ocurre puesto que la función puede representarse a través de series de Fourier y se sabe que los coeficientes de esta serie devienen infinitamente pequeños. (20)
Si la función f(x) no es integrable, pero tiene sólo un número finito de máximos y mínimos, la serie converge sólo en un número finito de puntos y entonces no puede hablarse de representación.

¿Quiere esto decir que la representación a través de series trigonométricas es única?

Retrocediendo un poco, encontramos que el procedimiento de Fourier garantiza la respuesta: Fourier basó la existencia y unicidad de una representación por medio de series trigonométricas en la posibilidad de integrar término a término la serie. Cuando esta posibilidad se restringe, el problema de la unicidad de la representación vuelve a plantearse.

La restricción sobre la integración termino a término de la serie se establece luego del análisis sobre la velocidad de convergencia de la serie. Seidel escribe, en 1848, que "si se tiene una serie convergente que representa una función discontinua de x, cuyos términos son funciones continuas de x, se debe encontrar, en la vecindad del valor donde la función salta, valores de x para los cuales la serie converge arbitrariamente lentamente" (21)

Weierstrass muestra, posteriormente, que la condición necesaria y suficiente para que se pueda integrar término a término es que la serie converja uniformemente, es decir, que la velocidad de convergencia de la serie sea la misma para todos los puntos del intervalo:

$\forall x$ en el intervalo, se tiene que si $n > N$

$$|U_{n+m}(x) - U_n(x)| < \varepsilon \quad , \quad \varepsilon > 0 \ , \ N(\varepsilon) \ y \ m,n \in \mathbb{N}.$$

Heine introduce la noción de convergencia uniforme en general luego de observar que una serie de Fourier de una función continua que satisface la condición de Dirichlet (número finito de máximos y mínimos) debe converger uniformemente. Sin embargo, esta convergencia es necesariamente no uniforme en la vecindad del punto para el cual $f(x+) \neq f(x-)$. Si $f(x)$ satisface la condición de Dirichlet (número finito de discontinuidades), la serie de Fourier converge a $f(x)$ uniformemente en general, ya que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ definida para x en $[a,b]$ converge uniformemente en general a $f(x)$ en $[a,b]$, si existe un número finito de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en $[a,b]$, tal que la serie converge uniformemente a $f(x)$ en cualquier subintervalo de $[a,b]$ que no contenga a ningún x_i

La idea de Heine es mostrar la unicidad de la representación de una serie trigonométrica que converge uniformemente en general a la función.

Partiendo de la diferencia de dos posibles representaciones de una misma función f, Heine se pregunta entonces si los coeficientes de la serie que representa a 0, son todos iguales a cero:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx = 0 \quad \ldots \quad (H)$$

Heine lo puede mostrar cuando la convergencia de H es uniforme en general, es decir, en el interior de los intervalos $(x_n, \ldots x_{n+1})$, los extremos de los cuales son aquellos puntos, en número finito, para los cuales cesa la convergencia uniforme.

En estos intervalos, Heine puede integrar término a término y obtener, como lo hacía Riemann, la función $F(x) = \frac{1}{2} A_0 x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(x)}{n^2}$. Usando la 2ª propiedad establecida por el propio Riemann, $\lim_{a \to 0} \frac{F(x+a) - 2F(x) + F(x-a)}{a}$

Poco tiempo después, Cantor es capaz de asegurar la unicidad de la representación cuando el conjunto de puntos donde no hay convergencia uniforme es infinito. La idea es similar a la que utiliza Lipschitz cuando permite que el número de discontinuidades sea infinito. Sin embargo esta vez se admite que el conjunto de puntos límites del conjunto de discontinuidades sea, él mismo, infinito. Se permiten así sucesivas derivaciones y con ello, se extienden las posibilidades de los conjuntos no densos.

Bajo esta suposición, Cantor puede mostrar que los coeficientes en (H) son todos cero si la convergencia uniforme de (H) está garantizada en todo punto excepto en un conjunto de 1era especie, es decir, un conjunto con n-ésimo conjunto derivado finito.

"Tal es el acto de nacimiento, dice Cavaillès, al menos de la Teoría Cantoriana de los conjuntos [..] No hay teoría de conjuntos sino con la aparición [..] de un modo de razonamiento original: este es aquél del cual hace uso Cantor por primera vez al generalizar el teorema de Heine; de éste, que encontraremos de nuevo bajo el nombre de iteración transfinita - depende una parte esencial del futuro edificio" (21)

(1) Koyré A. Estudios de Historia del Pensamiento científico. Ed. Siglo XXI

(2) Koyré A. Galilée et la loi d'inertie. Cit. por J. Labastida en Producción, ciencia y Sociedad: de Descartes a Marx

(3) Cfr, en el mismo libro de Labastida, pg. 195

(4) Citado por Cavaillés en Philosophie mathématique. pg. 44

(5) Cfr. el artículo de J.T. Desanti que aparece en Great Currents of Mathematical Thought. de Le Lionnais. (From Cauchy to Riemann, or the Birth of the theory of real functions) Ed. Dover. Vol. I

(6) Cfr. el artículo de Bourbaki Cálculo Infinitesimal en Elementos de Historia de las Matemáticas, Alianza Editorial, pg. 266

(7) Ibid pg. 270

(8) Cavaillés J, op. cit., pg. 45.

(9) Cfr. el artículo de G. Valiron, The Origin & the evolution of the notion of an analitic function of one variable, que aparece, también, en el libro editado por Le Lionnais, Great currents of . . .

(10) Cavaillés, J. Philosophie Mathématique, pg. 48, Hermann, París, 1962.

(11) Citado por Bourbaki en el estudio de "Integración" en Elementos de Historia de las Mat. pg. 302

(12) Cavaillés J. op. cit. pg. 51

(13) Ibid

(14) Ibid. pg 52

(15) Ibid pg. 52

(16) Citado por Cavaillés, op. cit., pg. 53

(17) Cfr. Cavaillés, op. cit. pg. 53-54

(18) ibid.

(19) citado por Cavaillés, op. cit., pg. 55
(20) cfr. Cavaillés, op. cit. pg. 53
(21) Cavaillés, J. op. cit. pg. 60

III. ... AL NOMBRE

Gracias a este modo original de razonar, como lo ha bautizado Cavaillès, Cantor puede, en 1871, introducir la noción de series fundamentales, con las cuales definirá a los números irracionales.

A partir de conjunto de números racionales, Cantor considera el conjunto de series convergentes formadas con estos números. Este será el conjunto de números irracionales de orden 1. Se ve que todo número racional a, tiene aquí un representante: $(a, a, \ldots)$. Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, elementos del conjunto de números irracionales de orden 1, forman ellos mismos una serie convergente, siempre es posible formar, con los números racionales de sus series fundamentales respectivas, una sola serie fundamental que define un nuevo elemento β, llamado límite de la serie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Tenemos de este modo una superposición: las series fundamentales de elementos de orden 0 (los racionales) o de orden 1 forman a su vez, series fundamentales que definen un elemento de orden 2 y así sucesivamente.

Si se definen, con Cantor, como puntos racionales sobre un eje los puntos cuya abscisa está dada por un racional, a todo punto del eje, si nos es conocido por una construcción cualquiera, puede asignársele una serie fundamental de tal modo que los puntos que tengan por abscisa a los a_n, esten indefinidamente cerca de él. El problema inverso, i.e. a todo número irracional corresponde un punto de la recta que tiene este número por abscisa, constituye el axioma de Cantor ya que «no está en su naturaleza poder ser demostrado de manera general» (1)

A partir de esto, y según la manera en que ha definido al conjunto derivado de ν^{ava} especie, Cantor muestra como ejemplo de conjunto de ν^{ava} especie, aquél representado por un solo punto, si su abscisa está dada por un número irracional de orden ν. "Si resolvemos, en efecto, este número en sus elementos, los términos de orden $\nu-1$ de la serie fundamental correspondiente, luego aquéllos en sus elementos constitutivos de orden $\nu-2$ etc, se obtiene una infinidad de números racionales, el conjunto de puntos correspondientes es un conjunto de ν^{ava} especie." (2)

Es sobre esta idea de representar al continuo como conjunto de todos los límites superpuestos de series de números racionales, así como el empleo sistemático de la reducción de n-adas en series simples o linearización, que se fundan las investigaciones de Cantor acerca del infinito.

En 1873, el problema para Cantor es saber si el conjunto de números reales puede ser puesto en forma de serie simple. Tal parece que no, ya que "(n), escribe Cantor a Dedekin el 29 de noviembre, está formado de partes discretas, mientras que (x) constituye un continuo" (3) En cuestión de días (7 de Diciembre), Cantor muestra efectivamente la imposibilidad de arreglar a los reales en una serie $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ (3)

"En el mismo orden de ideas, escribe Cantor, se presenta también la cuestión siguiente: ¿puede uno coordinar de manera [biunívoca] una superficie y una línea?" (5 de enero de 1874) Aquéllo que parecía absurdo se demuestra, 3 años después, como perfectamente posible.

Mediante el proceso de linearización, un sistema con n fracciones decimales indefinidas, es decir, las n coordenadas de un punto en el espacio de n dimensiones, puede ponerse en forma de una sola fracción decimal indefinida que corresponde a la abscisa de un punto en la recta.

La demostración de este resultado se encuentra en la carta del 20 de junio de 1887 a Dedekin:

"Todo número $X \geq 0 \atop \leq 1$ puede ser representado de una manera y de una sola bajo la forma de una fracción decimal ilimitada. Sea

$$X = \alpha_1 \cdot \frac{1}{10} + \alpha_2 \cdot \frac{1}{10^2} + \dots + \alpha_\nu \cdot \frac{1}{10^\nu} + \dots$$

donde los α_ν son números enteros ≥ 0 y ≤ 9. Así todo número x determina una serie infinita $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ y recíprocamente.

Podemos escribir entonces: —

$$X_1 = \alpha_{1,1} \cdot \frac{1}{10} + \alpha_{1,2} \frac{1}{10^2} + \dots + \alpha_{1\nu} \frac{1}{10^\nu} + \dots$$

$$X_2 = \alpha_{2,1} \frac{1}{10} + \alpha_{2,2} \frac{1}{10^2} + \dots + \alpha_{2\nu} \frac{1}{10^\nu} + \dots$$

$$\vdots$$

$$X_\rho = \alpha_{\rho,1} \frac{1}{10} + \alpha_{\rho,2} \frac{1}{10^2} + \dots + \alpha_{\rho,\nu} \frac{1}{10^\nu} + \dots$$

De estos ρ números, se puede deducir un $(\rho+1)$-ésimo número y:

$$y = \beta_1 \cdot \frac{1}{10} + \beta_2 \cdot \frac{1}{10^2} + \dots + \beta_\nu \cdot \frac{1}{10^\nu} + \dots$$

donde $\beta_{(n-1)\rho+1} = \alpha_{1,n}$; $\beta_{(n-1)\rho+2} = \alpha_{2,n}$; $\dots$ $\beta_{(n-1)\rho+\sigma} = \alpha_{\sigma,n}$; $\dots$ $\beta_{(n-1)\rho+\rho} = \alpha_{\rho,n}$. — — — — — (I)

Como todo número entero positivo ν puede ponerse de una sola manera, y de una sola, bajo la forma

$$\nu = (n-1)\rho + \sigma \quad \text{donde} \quad \sigma {\geq 0 \atop \leq \rho},$$

se ve que la serie $\beta_1, \beta_2, \dots$ y por consiguiente también y, son plenamente determinados por las ecuaciones (I);

Recíprocamente, si se parte del número y, y en consecuencia de la serie $\beta_1, \beta_2 \ldots$, las ρ series

$$\alpha_{1,1},\ \alpha_{1,2},\ \ldots$$
$$\vdots$$
$$\alpha_{\sigma,1},\ \alpha_{\sigma,2}\ \ldots$$
$$\vdots$$
$$\alpha_{\rho,1},\ \alpha_{\rho,2},\ \ldots$$

son determinados de manera unívoca por las ecuaciones (2'') y en consecuencia, también los ρ números $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$. (4)

El 22 de junio de ese mismo año, Dedekin, en una carta a Cantor expone sus objeciones: Puesto que la representación de cualquier número $x \overset{\geq 0}{\leq 1}$ debe ser bajo la forma de fracción decimal ilimitada, los números de la forma $x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots + \frac{\alpha_\nu}{10^\nu} + \frac{0}{10^{\nu+1}} + \frac{0}{10^{\nu+2}} + \cdots + \frac{0}{10^{\nu+\nu'}}$

deberán escribirse como

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots + \frac{\alpha_\nu - 1}{10^\nu} + \frac{9}{10^{\nu+1}} + \frac{9}{10^{\nu+2}} + \frac{9}{10^{\nu+\nu'}}$$

Esto quiere decir que si

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots \quad = 0.\alpha_1\alpha_2, \ldots \alpha_\nu \ldots$$

$$y = \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \cdots \quad = 0.\beta_1\beta_2 \ldots \beta_\nu \ldots$$

el número $z = 0.\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_n$ que se obtenga de ambos, donde $\gamma_1 = \alpha_1$; $\gamma_2 = \beta_1$; $\gamma_3 = \alpha_2$ $\gamma_4 = \beta_2$ etc, nunca podrá ser del tipo de $0.47831080709 0\alpha_7 0\alpha_8 0\alpha_9 0 \ldots \alpha_\nu 0$ en donde la abscisa tiene un desarrollo con periodicidad de 0 (periodo inferior o igual a n) ya que se han excluido expresamente la representación que a partir de un cierto índice tiene como coeficiente al cero (5) a partir de esta objeción Cantor se ve obligado a reformular la demostración (6) Esta vez, no lo puede hacer sino a condición de estudiar las relaciones entre conjuntos y subconjuntos, transitividad de las aplicaciones (correspondencias biunívocas, todo lo cual lo lleva a la noción de potencia:

"Si dos conjuntos bien definidos M y N se dejan coordinar el uno al otro, elemento por elemento, de manera unívoca y completa, me sirvo de la expresión.. que tienen <u>igual potencia</u> o que son equivalentes. Por parte integrante de un conjunto M entendemos todo otro conjunto M' cuyos elementos son al mismo tiempo elementos de M. Si dos conjuntos M y N no tienen igual potencia, o bien M tiene una potencia igual a la de una parte integrante de N, o N aquélla de una parte integrante de M. En el primer caso, llamamos la potencia de M más pequeña, en el segundo caso la llamamos más grande que la de N." (7)

Así definida la potencia, se muestra inmediatamente que las potencias del continuo y del conjunto de enteros son distintas. Se establecen asimismo, varios resultados:

1º "Si M', M'', M''' es una serie finita o infinita de conjuntos, teniendo cada uno la potencia de la serie de enteros positivos, el conjunto M formado de la reunión de estos conjuntos tiene también la misma potencia" (8)

2º la adición o substracción de la potencia de los enteros a la potencia del continuo da la potencia del continuo

3º La multiplicación de la potencia del continuo por ella misma da la potencia del continuo "Como si el infinito de puntos de una superficie, escribe Cantor a Dedekin el 10 de junio de 1877, fuese obtenido a partir de los puntos de una linea elevándolos al cuadrado, aquél de los puntos de un volumen, elevándolos al cubo."

El problema que ahora se plantea es establecer que relación hay entre la potencia del continuo y la potencia del conjunto de los números enteros, luego de que se plantea la hipótesis de que todo conjunto imaginable de puntos o de números reales, pueden repartirse en clases según su potencia y que el número de clases es finita e igual a dos.

Para demostrar esta hipótesis, Cantor arriesga la operación de derivación que, recordemos, consiste en obtener de un conjunto A el conjunto A' de sus puntos límites (i.e., su primer conjunto derivado); si ésto fuere no finito, puede obtenerse el segundo conjunto derivado A'' y así sucesivamente. Se puede caracterizar así, al conjunto A dependiendo del número de derivaciones sucesivas que puedan efectuarse.

Se describen entonces dos géneros de conjuntos: aquéllos que son reducidos a 0 en un número finito de derivaciones, que corresponderán a los conjuntos de 1er género, y aquéllos conjuntos (de 2º género) para los que la serie indefinida de conjuntos derivados nunca termina.

Aventurarse por este camino no parece peligroso; mas aún, parece ser el camino adecuado y seguro que permitirá caracterizar convenientemente a los conjuntos cuya potencia se quiera determinar. Esta caracterización de los conjuntos se ha vuelto necesaria a partir del momento en que la potencia se define no sólo para conjuntos de puntos, sino también para conjuntos de objetos cualquiera (líneas, superficies, cuerpos).

Ahora, el que toda pareja de conjuntos bien definidos tenga o no la misma potencia, es una determinación intrínseca de los propios conjuntos. Ahora, que dos conjuntos no puedan tener sino alguna de las dos potencias, es también una determinación intrínseca.

Por ello se arriesga la operación de derivación: se sabe ya que un conjunto cuyo n-ésimo derivado es nulo, tiene la primera potencia. Se sabe, además, que a partir del 2º derivado, todos los derivados son parte integrante de su predecesor. Es esta propiedad la que permitirá "... una generación dialéctica de conceptos que conduce siempre más lejos y [que], libre de toda arbitrariedad, permanece necesaria en sí y consecuente." (9) Si todas las derivadas finitas tienen puntos, se le considerará como conjunto derivado de rango ∞ y el conjunto de puntos comunes a toda la serie se denominará P^{∞}. Nada impide efectuar una nueva derivación e introducir los símbolos transfinitos $\infty+1$, $\infty+2$, $\infty+n$, ... así como una nueva parte común $P^{2\infty}$, P^{∞^2}, P^{∞^∞}, $P^{\infty^{\infty^\infty}}$.

Se extienden, con ello, los resultados acerca de la potencia:

1º Se llama conjunto aislado a un conjunto que no tiene puntos comunes con su derivado (por ejemplo, la diferencia $P'-P''$). Todo conjunto aislado es numerable.

2º Si el 1er conjunto derivado P' de un conjunto P es numerable, P es numerable (P = conjunto aislado + conjunto derivado)

3º Todo conjunto cuyo derivado de orden α es nulo, (α finito o cualquiera de los símbolos transfinitos) es numerable

Si α es finito, la demostración, por 2, es inmediata. Si α es transfinito, la demostración sería la misma, efectuada con ayuda de la inducción completa. Inducción completa que "no puede probar, escribe Cavaillès, numerabilidad mas que a condición de realizar, ella misma, un infinito numerable de etapas." (10)

"Si la unión, continua, entre inducción y generación de ∞ permanece, imposible superar lo numerable, el lazo con el continuo falta. Si se quiere alcanzar esto, es necesario que los símbolos ∞ sean otra cosa que las etapas de una generación progresiva, sino los representantes de una realidad inmanente que nuevos métodos permiten alcanzar, y que obligan a comprometerse en el verdadero dominio del transfinito" (11)

Toda esta historia para entender porqué Cantor escribe, en el otoño de 1882 que: "Tal como he conducido hasta ahora la presentación de mis investigaciones concernientes a la teoría de conjuntos se llega a un punto en que no puedo avanzar más que extendiendo, más allá de sus límites anteriores, el concepto de número real.

" Es tan grande la dependencia en que me veo colocado frente a esta extensión del concepto de número, que me sería difícilmente posible, sin ella, continuar progresando libremente en la teoría de sistemas; se puede encontrar en este hecho algo que me justifique, o si es necesario, me excuse por introducir en mis reflexiones, nociones aparentemente insólitas."

Así comienza la memoria de octubre de 1882, Fundamentos de una Teoría General de Conjuntos, memoria en la que Cantor extiende, mas allá del infinito, la serie de números enteros reales.

Es en esta extensión "mas allá del infinito", que el infinito encuentra su determinación. El infinito deja de ser lo indeterminado, lo ilimitado, lo indefinido para presentarse bajo una forma determinada y definida.

Estas nociones, «aparentemente insólitas» como Cantor mismo señala, no pueden sino enfrentarse a las concepciones ampliamente difundidas sobre el infinito matemático y a los puntos de vista sobre la esencia de las magnitudes numéricas. Enfrentamiento que ocurre en la filosofía al igual que en la matemática.

La cuestión, en la matemática, debe plantearse del siguiente modo. Hay que reconocer, dice Cantor, en el infinito matemático, en primer lugar "la significación de una magnitud variable, creciendo más allá de todo límite, o bien, decreciendo tanto como uno quiera, pero permaneciendo siempre finito." (12) Magnitud indeterminada y que como tal deberá llamarse infinito impropiamente dicho. "Al lado de éste, continúa, se ha constituido en los últimos tiempos, sea en la geometría, sea particularmente en la teoría de funciones, un nuevo tipo de concepto de infinitud, igualmente legítimo" (13). Para verlo, baste considerar el plano complejo, con un único punto situado en el infinito (i.e, infinitamente extendido pero determinado). Aparece así el infinito como punto, o más generalmente, como posición y, cuando se presenta de esta manera, bajo una forma determinada, se le llama infinito propiamente dicho.

En el terreno de la filosofía el desacuerdo es manifiesto en tanto que "por diferentes que sean las doctrinas de los autores, los textos en torno a lo finito y a lo finito acuerdan en que la finitud ha sido sancionada como formando parte del concepto de número, y por otra parte, el infinito verdadero o absoluto, que es DIOS, no sufre ninguna determinación" (14). Lo que refleja esta posición es la permanencia, desde Aristóteles, de una petición de principio: no hay sino números finitos. A esta petición de principio habría que añadirle otra: «omnis determinatio est negatio».

Es claro que el desacuerdo no puede salvarse: "esto que afirmo y creo haber demostrado por el presente trabajo, así como por mis tentativas anteriores, es que después de lo finito existe un transfinitum (que igual podría llamarse suprafinitum), es decir, una escala ilimitada de modos determinados que por naturaleza no son finitos sino infinitos y que, sin embargo, pueden ser precisados, tanto como lo finito, por números determinados, bien definidos y distinguibles" (15)

Después de Cantor «omnia seu finita seu infinita definita sunt et excepto Deo ab intellecta determinari possunt»

Subrayamos, con Cantor, determinari possunt: no se puede conceder ningún ser a lo indeterminado, a lo variable, al infinito impropiamente dicho, no importa la forma en que aparezca. Por ello, si el infinito que se considera fuese el infinito impropiamente dicho, se podría suscribir la proposición «infinitum actu non datur» que sería, todo lo más, una mera tautología. Encuentra además, en esta proposición, la imposibilidad de plantear conceptualmente una infinitud determinada y por ello la tiene como falsa.

Un último problema que es necesario aclarar: la existencia, en la matemática, de estos números enteros reales infinitos que construye Cantor. Son ellos, números concretos en el sentido real afirma Cantor, "tienen el mismo carácter de determinación que encontramos en el punto infinitamente extendido de la teoría de funciones analíticas; pertenecen a las formas y especificaciones del infinito propiamente dicho. Señalaremos aquí los puntos más importantes de la discusión en torno a este problema.

"Podemos tomar la realidad o existencia de los números enteros, tanto finitos como infinitos, en dos sentidos, que, para tomarlo exactamente, son dos aspectos bajo los cuales se puede considerar la realidad de no importa que concepto o noción. Podemos, para atribuir una realidad a los números enteros, retener el hecho de que, sobre la base de las definiciones ellos ocupan en nuestro entendimiento un lugar bien determinado, se distinguen perfectamente de todas las otras partes constitutivas de nuestro pensamiento, entran en relaciones determinadas con ellas y así modifican la substancia de nuestro espíritu de una manera determinada; que me sea permitido nombrar este tipo de realidad de nuestros números, su realidad intrasubjetiva o inmanente

"Pero se puede también, para atribuir una realidad a estos números, retener el hecho de que deben ser considerados como la expresión o la reproducción de procesos y de relaciones existentes en el mundo exterior, opuestos al intelecto, y que, las diversas clases de números (I), (II), (III) etc, representan potencias que de hecho existen en la naturaleza física y espiritual. Llamo a este segundo tipo de realidad, la realidad transubjetiva o trascendente de los números enteros." (16)

Que estas dos realidades se encuentran siempre unidas, también es afirmado por Cantor, para quien la tarea de darle la significación trascendente recae en la metafísica. Extrae de esto una consecuencia fundamental: la matemática "debe tomar en consideración para constituir su material gnocional única y solamente la realidad inmanente de sus conceptos, y no está, en consecuencia, en modo alguno, de probarlos desde el punto de vista de su realidad trascendente. En razón de esta posición eminente, que la distingue de todas las otras ciencias [...] ella merece, muy particularmente el nombre de matemática libre". (17)

En medio de estas referencias filosóficas, excusas reiteradas, discusiones sobre la esencia de las matemáticas etc, encontramos expuesta, de manera desordenada, la manera en que Cantor ha llegado a construir los números transfinitos. En lo que sigue, trataremos de señalar, con mayor o menor detalle, esta parte de la obra de Cantor.

Comenzaremos por definir, junto con él, lo que es un conjunto:

1. Teoría de Conjuntos — Por estas palabras, yo designo un concepto teórico muy amplio, que hasta ahora no he intentado desarrollar sino bajo la forma especializada de una teoría de sistemas aritméticos o geométricos. Por un «conjunto» o «sistema» entiendo de manera general

toda multiplicidad que puede ser pensada como unidad, es decir, toda colección de elementos determinados que puede ser, por una ley, combinada en un todo" (18)

Los números determinados infinitos hallan su determinación gracias a dos principios de engendramiento, que garantizan que cualquier límite en la formación de estos números puede ser superado, y a un principio de limitación, mediante el cual se imponen sucesivos límites al proceso de formación que no conoce «absolutamente ningún fin»

De esta manera se obtienen divisiones naturales en la serie absolutamente infinita de los números enteros reales, divisiones que son las clases de números, de las cuales la primera clase corresponde a los números enteros 1, 2, 3, ..., ν, ...; a la primera clase le sigue la segunda (II) compuesta de ciertos números enteros infinitos que siguen una sucesión determinada; a esta clase definida sigue la (III), la (IV), etc.

Estos nuevos números están definidos en relación a otro concepto, que es el de potencia, según el cual, a todo sistema bien definido le conviene una determinada potencia, y la misma potencia se atribuye a dos sistemas cuando se puede establecer entre ellos, elemento a elemento, una correspondencia biunívoca. Cuando el sistema es finito, la potencia coincide con el numeral que además es el mismo para cualquier arreglo. Ciertamente este no es el caso para conjuntos infinitos y sin embargo, podría atribuírseles a ellos también una potencia determinada.

Este es el problema que trata de resolver Cantor, para quien "La potencia más pequeña conveniente a los sistemas infinitos deberá necesariamente [...] ser atribuida a los sistemas que pueden ser puestos en correspondencia biunívoca con la primera clase de números y desde entonces, la misma potencia que ella. Falta, en cambio, una definición igualmente simple y natural de potencias más elevadas." (19)

Introduce inmediatamente el concepto de <u>numeral</u> de elementos de un conjunto infinito bien ordenado, concepto que siempre es expresado por un número enteramente determinado del dominio de números extendido. Por un conjunto bien ordenado debemos entender " todo sistema bien definido en el cual los elementos son coordinados por una sucesión dada de manera determinada, según la cual existe un primer elemento del sistema y según la cual no solamente todo elemento particular (siempre y cuando no sea el último en la sucesión) se encuentra seguido de un elemento determinado, sino además, a todo sistema arbitrario finito o infinito, pertenece un elemento determinado que en la sucesión es el elemento que los sigue a todos inmediatamente (siempre y cuando exista un elemento que les siga a todos en la sucesión) (20)

Esta idea de numeral de conjuntos infinitos bien ordenados le permite encontrar la diferencia esencial entre los sistemas finitos y los infinitos. Mientras un sistema finito siempre tiene el mismo numeral, no importa de qué modo se arreglen los elementos, un conjunto infinito tendrá diferentes numerales dependiendo de cómo se les ordene. Si la potencia de un conjunto aparece como independiente de la sucesión de los elementos de un conjunto, el numeral, por el contrario, depende de élla.

"Tomemos, escribe Cantor, un sistema que tenga la potencia de la primera clase y arreglemos los elementos en una sucesión determinada cualquiera, de tal manera que obtengamos un «sistema bien ordenado»: su numeral es siempre un número determinado de la segunda clase y no puede ser determinado jamás por un número de otra clase que la segunda. Por otra parte todo sistema de la primera potencia puede ser ordenado en una sucesión tal que su numeral, en relación a esta sucesión, sea igual a un número de la segunda clase, designado previamente" (21)

Casi al término de la memoria, nos muestra cómo se halla conducido a la definición de los nuevos números y de qué manera se obtienen, en la serie de números reales enteros absolutamente infinitos, las divisiones naturales que él llama clases de números. En esta parte de la memoria se restringe a la segunda clase y a sus relaciones con la primera.

Comienza por explicar cómo la formación de los números enteros reales finitos reposa en el principio de adición de una unidad a un número ya formado. Este será su primer principio de engendramiento. El numeral ν de la clase (I): $1, 2, 3, \ldots \nu, \ldots$ que así se forma es infinito y además, no hay ninguno de entre ellos que sea el más grande de todos.

Si, como dice Cantor, ν expresa un número finito determinado de posiciones sucesivas así como la reunión en un todo de las unidades puestas, "no hay nada chocante en imaginar un <u>nuevo</u> número, que llamaremos ω, que servirá para expresar el hecho que la colección (I) entera está dada conforme a su ley, en su sucesión natural. (De la misma manera que ν sirve para expresar el hecho de que un cierto número finito de unidades está reunido en un todo). Nos está igualmente permitido imaginar al número ω que recién hemos creado, como un límite hacia el cual tienden los números ν, a condición de entender por esto solamente que ω debe ser el primer número entero que sigue a todos los números ν, es decir, debe ser declarado superior a cada uno de estos números. Haciendo seguir la posición de ω mediante las posiciones ulteriores de la unidad, se obtiene con ayuda del primer principio de engendramiento los números ulteriores: $\omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\nu \ldots$. Dado que por este proceso no se llega, una vez más, a ningún número máximo, se imagina un nuevo número, que puede llamarse 2ω y que será el primer número que siga a todos los números obtenidos hasta ahora: ν y $\omega+\nu$"

La función lógica, como la llama Cantor, que permite construir a ω y 2ω, es distinta de aquélla que nos permite construir $\omega+1$, $2\omega+1$. A esta segunda se le llama segundo principio de engendramiento. Si se combinan las dos leyes de engendramiento, se pueden establecer las series sucesivas:

$$2\omega,\ 2\omega+1,\ 2\omega+2,\ \ldots\ 2\omega+\nu,\ \ldots$$
$$3\omega,\ 3\omega+1,\ 3\omega+2,\ \ldots\ 3\omega+\nu,\ \ldots$$
$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$
$$\mu\omega,\ \mu\omega+1,\ \mu\omega+2,\ \ldots\ \mu\omega+\nu,\ \ldots$$

El 2º principio nos conduce entonces, a introducir un número que sigue inmediatamente a todos los números $\mu\omega+\nu$ y que podemos llamar ω^2, a partir del cual podremos alcanzar números de la forma $\lambda\omega^2+\mu\omega+\gamma$ y, aplicando nuevamente los dos principios, a números de la forma $\nu_0\omega^\mu+\nu_1\omega^{\mu-1}+\ldots+\nu_{\mu-1}\omega+\nu_\mu$ y aquí podemos poner un nuevo número superior a todos los anteriores y que podemos llamar ω^ω. Es este un proceso sin fin; siempre nuevos números, nuevas series.

¿Cómo no perderse en lo ilimitado?

"Parecería [..] confiesa Cantor, que no estamos en condición de imponer a este proceso sinfín un término provisorio que nos proporcionara una limitación análoga a aquélla que en cierto sentido nos estaba dada objetivamente por la vieja clase (I); aquí no había sino uso del primer principio de engendramiento y así, era imposible salir de la serie (I). A cambio, el segundo principio nos conduce no sólo más allá del dominio de números dados hasta entonces, sino se revela como un medio que permite, junto con el primer principio, franquear todo límite en la formación conceptual de números enteros.

"Es necesario sin embargo, señalar que todos los números obtenidos hasta ahora y aquéllos que les siguen inmediatamente satisfacen una cierta condición: ésta última, siempre y cuando se le exija a todos los números por formar inmediatamente, se revela como un nuevo principio [...] y que llamo principio de detención o limitación. Tiene por efecto, como lo mostraré, que la segunda clase de números (II) no adquiera solamente una potencia superior a aquélla de la clase (I), sino precisamente la potencia inmediatamente superior, o sea, la segunda potencia.

"Dicha condición, que, como se puede ver inmediatamente se encuentra satisfecha por cada uno de los números infinitos α definidos hasta aquí es la siguiente: el sistema de números que en la serie preceden a aquél que se considera, tiene la potencia de la primera clase (I). Tomemos por ejemplo el número ω^ω; los números que le preceden están contenidos en la fórmula $\nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \dots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu$ donde $\mu, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_\mu$ deben tomar todos los valores numéricos enteros positivos finitos, incluyendo el cero, y excluyendo $\nu_0 = \nu_1 = \dots = \nu_\mu = 0$. Como se sabe, este sistema se puede poner bajo la forma de una serie simplemente infinita: tiene pues la potencia de (I)." (23)

La clase de números (II) se define entonces como "la colección de todos los números que pueden ser formados con la ayuda de los dos principios de engendramiento y que progresando siguiendo una sucesión determinada

$\omega, \omega+1, \dots, \nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \dots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu, \dots, \omega^\omega, \dots, \alpha$

se someten a la condición de que todos los números precedentes a α, a partir de I, forman un sistema que tiene la potencia de la clase (I)." (24)

(1) Citado por Cavaillès J. Philosophie Mathematique. Hermann. París, 1962, pg. 43

(2) ibid pg. 43

(3) Cit por Cavaillès J. op. cit. pg. 73

(4) Cfr. Correspondencia Cantor - Dedekin en la obra citada de J. Cavaillès.

(5) Correspondencia Cantor - Dedekin

(6) Cfr. Carta del 25 de Junio en la correspondencia Cantor - Dedekin

(7) Cit. por Cavaillès. op. cit. se refiere a la obra de Cantor, VIII, pg. 119.

(8) Cantor VIII, cit. por Cavaillès op. cit.

(9) Citado por Cavaillès, op. cit. pg 82.

(10) Cavaillès J. op. cit. pg. 83

(11) Ibid

(12) Cantor G. Fondements d'une théorie générale des ensembles
Cahiers pour l'analyse N° 10
pg. 36

(13) ibid

(14) ibid pg. 46

(15) ibid pgs 43-44

(16) ibid pg. 48

(17) ibid

(18) ibid. pg. 38

(19) Ibid

(20) ibid

(21) ibid pg. 39

(22) Ibid pg. 50

(23) ibid pg. 51

(24) ibid. pg 51

IV. ... A LA RAZÓN

Para terminar, quisiéramos tomar una frase escrita en la memoria de octubre: "sin los dos conceptos que mencioné (potencia y numeral) estoy convencido que no se puede hacer progresar la teoría de conjuntos, y esto vale también, yo creo, para los dominios que dependen o están en estrecha conexión con ella, tales como, por ejemplo, la moderna teoría de funciones de una parte, la lógica y la teoría del conocimiento, de la otra" (1)

Es indudable el gran desarrollo de la teoría de funciones alcanzado luego del establecimiento de la teoría de conjuntos. Los ejemplos, tomados de J. Cavaillès, son numerosos: "Desde 1873, en una carta a Du Bois Reymond, Weierstrass se servía de la numerabilidad de los números algebraicos – recién mostrada por Cantor, para extender un teorema sobre las funciones de variables reales (carta del 15 de dic. 1874, Acta matemática, t. 39 (1924)) A partir de 1884 con las memorias de Poincaré sobre la estructura del dominio de existencia de las funciones automorfas, de Mittag-Leffler, sobre la posibilidad de construir funciones con singularidades dadas, se desarrollan una serie de aplicaciones cada día más importantes en análisis.+

"Contrariamente al intento de Cantor, encaminado hacia las funciones analíticas, es sobre todo al estudio de funciones de variables reales que la teoría hace hacer los progresos más considerables. Los trabajos de Baire, Borel, Lebesgue, dan modos novedosos de generación o de puesta en correspondencia en el espacio cartesiano y transforman la teoría de la integración (...). Tres disciplinas manifiestan una dependencia directa y esencial con la teoría de conjuntos: el

\+ J. Cavaillès envía a J. Denjoy, Introduction a la théorie des fonctions de variables réelles. Paris, Hermann 1937, p. 12: "La revolución más grande que la matemática había conocido después de la invención del cálculo diferencial e integral acababa de iniciarse" análisis general o topología funcional, fundado en 1904 por Fréchet, (...) la teoría de la medida y de la integración desarrolladas por Borel, Lebesgue y Denjoy, en fin, la topología combinatoria." (2)

Con todo esto no hemos querido sino constatar lo afirmado por Cantor: el desarrollo de la moderna teoría de funciones, en estrecha conexión con la teoría de conjuntos.

Es precisamente este hecho, el gran desarrollo logrado a partir de los conceptos novedosos introducidos por Cantor, el que nos recuerda aquella otra frase, escrita en la misma memoria de octubre: "... todo concepto matemático lleva en sí mismo su correctivo necesario; si él es estéril o inadecuado, lo manifiesta muy pronto por su poco uso, y es entonces abandonado por su falta de eficacia" (3)

Imposible calificar de estériles los conceptos puestos por la teoría de conjuntos y, sin embargo, "apenas recibe la consagración del mundo matemático la construcción terminada, escribe Cavaillès, que el descubrimiento de antinomias provoca una conmoción que amenaza extenderse al análisis, contra lo cual no se ha encontrado, hasta la fecha, ningún remedio eficaz.

" En 1925, von Neumann concluía un nuevo ensayo de axiomatización por la puesta en evidencia del carácter irreductible no categórico+ de todo sistema de axiomas que quisiera salvaguardar lo esencial de la teoría: «No podemos hacer otra cosa que constatar que aquí reside una nueva objeción contra la teoría de conjuntos y que por el momento no se ve ningún modo de rehabilitación»." (4)

La lógica va más allá de lo que planteaba Cantor en 1882: "La matemática es plenamente libre en su desarrollo, y no conoce sino una sola obligación: sus conceptos deben ser no

+Es decir, que el sistema de axiomas considerado como definición implícita no determina de manera unívoca a su objeto. Se remite, para esta noción, a J. Cavaillès, Méthode axiomatique et formalism. París, Hermann, 1937, cap. II.

contradictorios en sí mismos y sostener por otra parte, con los conceptos anteriormente formados, ahora presentes y asegurados, relaciones fijas, regladas por definiciones. En particular, para introducir números nuevos, solamente se requiere dar definiciones que les confieran una precisión y, si se presenta el caso, una relación tal con los números antiguos, que se puede, en los casos dados, distinguir los unos de los otros de manera determinada. Cuando un número satisface todas estas condiciones, puede y debe ser considerado como existente y real en la matemática." (5)

La lógica va más allá, decimos, cuanto que la así llamada crisis de los fundamentos deriva de esta problemática. Vemos así que la referencia que hace Cantor a la lógica en aquél párrafo con el que iniciamos esta parte del trabajo no es una referencia hueca o vacía.

Quedaría una sóla cosa por aclarar y esta sería la relación entre los nuevos conceptos de la teoría de conjuntos y la teoría del conocimiento. La relación, creemos, no puede ser otra que la manera en que la teoría del conocimiento dará cuenta de estos conceptos surgidos en el interior de la matemática.

En el trabajo de Cantor de 1882, no encontramos más que la siguiente referencia a la teoría del conocimiento:
"Para formar correctamente un concepto (Ding) desprovisto de propiedades, que en principio no es nada más que una palabra o un signo A, al que se le confiere, de manera ordenada, diversos predicados inteligibles (...) de los cuales se puede conocer la significación por el examen de nociones ya dadas, y que no deben contradecirse entre ellas; así se hallan determinadas las relaciones de A a los conceptos ya dados y especialmente a los conceptos emparentados"

Más allá de las relaciones de no contradicción, es necesario, si se quiere dar cuenta de la aparición de un concepto nuevo, preguntarse si modifica, reorganiza, provoca rupturas etc, en el campo teórico en el que aparece. Se trata, en fin, de averiguar en qué (si es pertinente) se modifica el cuerpo teórico que ha conformado y posibilitado el surgimiento del nuevo concepto.

Habíamos señalado, en otra parte del trabajo, una exigencia: la de mostrar este campo teórico en el que aparece el nuevo concepto. El haberlo hecho nos permitió plantear cómo "... la revolución cartesiana, al asegurar un paralelismo completo entre número y extensión, al inaugurar el estudio de las variaciones, incorporaba el continuo al álgebra", como ésta, "devenida autónoma, deberá definir por sus propios medios los objetos empleados, precisar, extender ella misma los modos de empleo" en fin, cómo "dar un fundamento puramente analítico a las nociones y propiedades aseguradas, hasta entonces, solamente por la evidencia de su correlato geométrico; cómo desarrollar los unos y los otros fuera de los límites arbitrarios impuestos por la intuición" (6)

Estos "cómos" conducen, según hemos visto, al establecimiento riguroso de la teoría de funciones continuas, a la extensión de las operaciones analíticas que exigirán la creación de nociones esenciales de la teoría de conjuntos.

Nos planteamos ahora los "qués" de esta teoría: qué significa incorporar el continuo al álgebra; qué significa que élla defina, por sus propios medios, los objetos empleados y los modos de empleo, en fin, qué quiere decir dar un fundamento analítico.

Son estos "qués" los que nos permitirán, en todo caso, dar una respuesta a nuestra pregunta. Son estos "qués", que sólo tienen sentido para nosotros, post-cantorianos los que nos colocan, de inmediato, en el lugar justo de la discusión.

Si nuestras preguntas sólo tienen sentido después de los trabajos de Cantor, es porque se han operado allí una serie de "reajustes" - por llamarlos de algún modo- que permiten alcanzar a la matemática su autonomía; autonomía que gana creando sus propios instrumentos, instrumentando, más allá de los límites de la geometría y de la intuición, sus propias regulaciones y validaciones.

No hay más garantías que las que el propio análisis puede dar. He aquí lo que quiere decir devenir autónomo; he aquí lo que la construcción matemática del concepto de infinito permite; he aquí la manera en que eso que hemos llamado espacio teórico se modifica: nueva garantía matemática para hacer lo que se hace, nueva garantía matemática para decir lo que se dice.

(1) Cantor G. Fondements d'une théorie générale des ensembles. en Cahiers pour l'analyse Nº 10 . pg. 47

(2) Cavaillés J. Philosophie Mathématique . Hermann. Paris 1962, pg. 27

(3) Cantor G. op. cit. pg. 49

(4) Cavaillés J. op. cit. pg. 25

(5) Cantor G. op. cit pg. 48

(6) cfr. Cavaillés, op. cit. pg. 32

INDICE

INTRODUCCIÓN i

I. ... A LA METAFÍSICA pg. 1

II ... AL NÚMERO pg. 37

III ... AL NOMBRE pg. 56

IV ... A LA RAZÓN pg. 75