INTRODUCCION.

En 1918 Gaston Julia presentó un artículo sobre la iteración de funciones racionales en la esfera de Riemann; la academia de ciencias de París premió el trabajo. La intención de esta tesis, es dar un repaso sobre algunos resultados importantes del artículo anteriormente citado, utilizando un lenguaje mas moderno, sobre todo en el aspecto topológico.

Se han clasificado las fracciones racionales en clases de equivalencia y principalmente en las 1ª y 3ª partes se han tratado de generalizar resultados a nivel de clases. Por otro lado en la 2ª parte se utilizan resultados de geometría algebráica para resolver el problema allí planteado, de una manera mas general.

Finalmente se ha supuesto los conocimientos básicos de topología general, así como de espacios cubrientes y superficies cubrientes, también se presupone un conocimiento elemental de superficies de Riemann.

Todas las definiciones y resultados que se suponen, pueden ser consultadas en la bibliografía que da referencias precisas

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Sea $\mathfrak{F}_K = \{\varphi : S^2 \to S^2 \mid \varphi$ es una fracción racional de grado $K\}$

Definición:

Si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{F}_K$, se dice que φ_1 esta relacionado con φ_2, $\varphi_1 \sim \varphi_2$ si y solo si existe H homografía tal que $H^{-1}\varphi_1 H = \varphi_2$

La relación antes definida es de equivalencia, por lo tanto, existe una partición de $\mathfrak{F}_K$ módulo esa relación (no trivial)

Sea $\mathfrak{F}_K = \bigcup_{i \in I} F_i$ una expresión de $\mathfrak{F}_K$ como unión de clases de equivalencia.

Se denotará por F_i una clase arbitraria de equivalencia, a lo largo del presente capítulo.

Lema:

Sea S una superficie de Riemann y $\varphi : S \to S$ una fracción. Sea $p \in S$ y $\varphi(p) = p$ entonces $D\varphi|_p$ como número complejo, es decir, al tomar cartas coordenadas como derivada de funciones complejas, no depende de la carta coordenada.

Demostración:

Sean (φ_1, U_1) una carta coordenada de S en p.

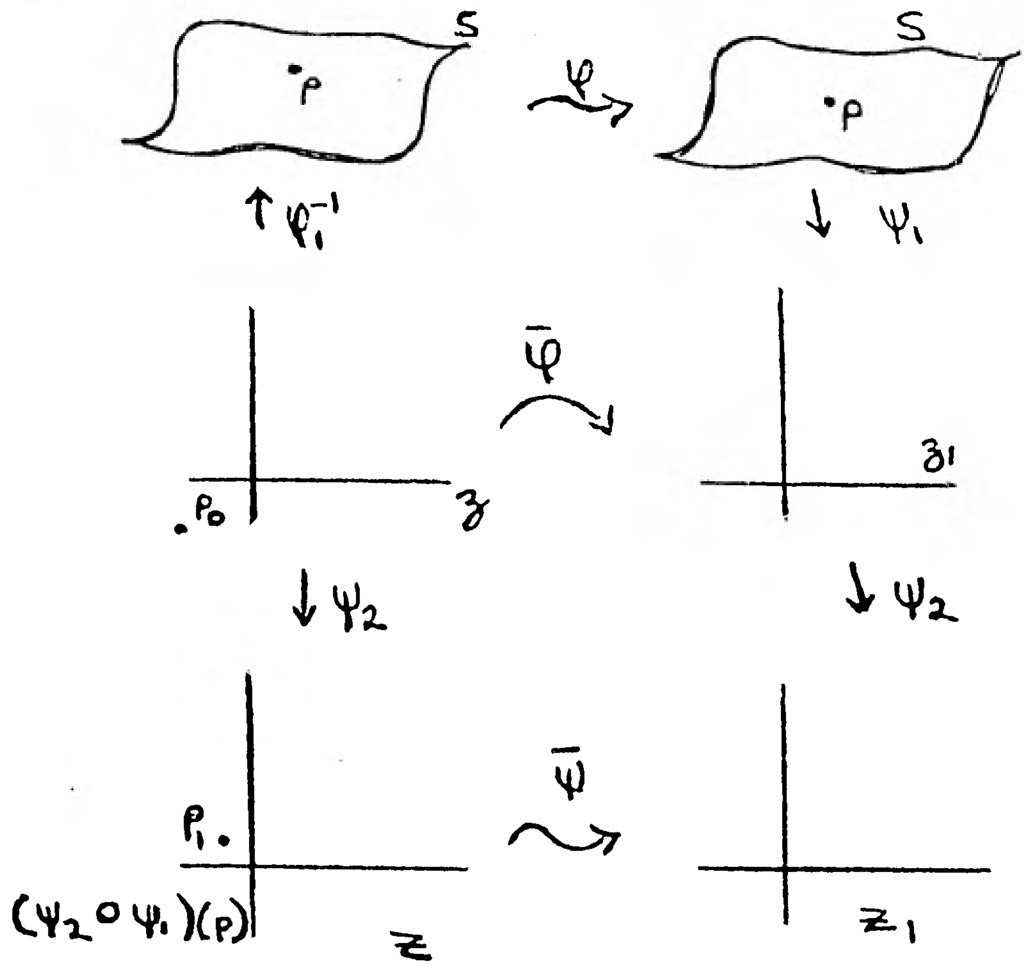
$$\text{Así } \bar{\varphi}(p_0) = \varphi_2 \tilde{\varphi}\ \varphi_2^{-1}(p_0)$$

Pero

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dz}(p_1) = \frac{d\varphi_2}{dz}(p_0)\frac{d\tilde{\varphi}}{dz}(p_0)\frac{d\varphi_2^{-1}}{dz}(p_1)$$

$$= \frac{d\varphi_2}{dz}(p_0)\frac{d\varphi_2^{-1}}{dz}(\varphi_2(p_0))\frac{d\tilde{\varphi}}{dz}(p_0)$$

$$= \frac{d\tilde{\varphi}}{dz}(p_0)$$

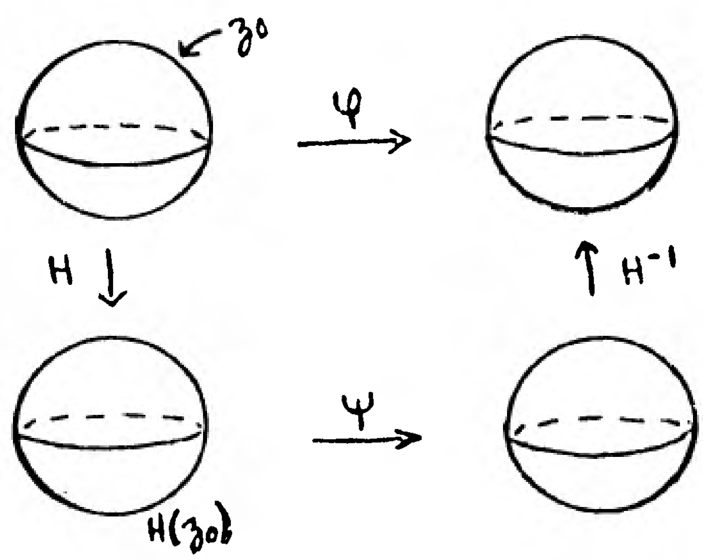


Y en este sentido si $\infty = \varphi(\infty)$ al tomar cartas coordenadas queda definida la derivada de ∞ en ellas.

Corolario:

Si $\varphi, \psi \in Fi$ y H es una homografía, tal que $\varphi = H^{-1}\psi H$, se supone que z_0 es fijo bajo φ. Al tomar cartas coordenadas (φ_1, U_{z_0}) y $(\psi_2, U_{H(z_0)})$ se tiene que como números complejos

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dz}(\varphi_1(z_0)) = \frac{d\bar{\psi}}{dz}(\psi_2(H(z_0)))$$



DEMOSTRACIÓN:

SE CONSIDERA COMO CARTA COORDENADA DE $H(z_0)$ A $(\psi_2 = \psi_1 H^{-1}, U_H(z_0))$, DONDE $U_H(z_0)$ ES UNA VECINDAD SUFICIENTEMENTE PEQUEÑA.

ENTONCES:

$$\frac{d\bar{\psi}}{dz}(\psi_1 H^{-1}(H(z_0))) = \frac{d}{dz}\,\psi_2 \psi \psi_2^{-1}(\psi_1(z_0)) = \frac{d}{dz}\,\psi_1 H^{-1}\psi H \psi_1^{-1}(\psi_1(z_0))$$

$$= \frac{d}{dz}\,\psi_1 \varphi \psi_1^{-1}(\psi_1(z_0)) = \frac{d\bar{\varphi}}{dz}(\psi_1(z_0))$$

PERO POR EL LEMA ANTERIOR ESTE VALOR NO DEPENDE DE LA CARTA COORDENADA.

POR LO TANTO, PARA TODA CARTA COORDENADA ALREDEDOR DE $H(z_0)$ SE TIENE EL RESULTADO (TAMBIÉN PARA TODA CARTA COORDENADA DE z_0) +

(4.1) PROPOSICIÓN:

SEAN $\varphi, \psi \in F_i$ EL NUMERO DE PUNTOS FIJOS DE φ ES EL MISMO QUE EL DE ψ, MAS AÚN ESTE NUMERO ES $\leq K+1$.

DEMOSTRACIÓN:

SEA H UNA homografía TAL QUE $\psi = H^{-1}\varphi H$

SEA z UN PUNTO FIJO DE ψ, $\psi(z) = z$, POR LO TANTO, $H^{-1}\varphi H(z) = z$, ENTONCES $\varphi(H(z)) = H(z)$, $H(z)$ ES PUNTO FIJO DE φ.

DE ESTA MANERA, SI $z_1, \ldots, z_r$ SON r PUNTOS FIJOS DISTINTOS EN ψ, $H(z_1), \ldots, H(z_r)$ SON r PUNTOS DISTINTOS DE φ.

ANALOGAMENTE SI $z'_1, \ldots, z'_r$ SON r PUNTOS DISTINTOS DE φ, $H^{-1}(z'_1), \ldots, H^{-1}(z'_r)$ SON r PUNTOS DISTINTOS DE ψ.

Por lo tanto, existe una biyección entre los puntos fijos de φ y los de ψ ... (*)

Ahora bien, como para toda $\varphi \in \mathfrak{F}_K$ φ tiene orden k, es decir, $\varphi(z) = \dfrac{a_0 + a_1 z + \dots + a_k z^k}{b_0 + b_1 z + \dots + b_k z^k}$ con a_k ó $b_k \neq 0$

Entonces $\varphi(z) = z$.

$$\Leftrightarrow \quad a_0 + a_1 z + \dots + a_k z^k = z^{k+1} b_k + z^k b_{k-1} + \dots + b_0 z$$
$$\Leftrightarrow \quad z^{k+1} b_k + (b_{k-1} - a_k) z^k + \dots + (b_0 - a_1) z + a_0 = 0$$

y este polinomio tiene a lo mas $k+1$ raíces en S^2.

Por lo tanto, el numero de puntos fijos de φ es a lo mas $k+1$ ... (**)

Sea F_i una clase de $\mathfrak{F}_K$ y $\varphi \in F_i$, φ tiene r puntos fijos con $r \leq k+1$ por (**), ademas, para toda $\psi \in F_i$, ψ tiene r puntos fijos por (*).

Así se puede afirmar que el numero de puntos fijos no depende del representante de una clase dada F_i. +

(2) Proposición:

Sean $\varphi, \psi \in F_i$, tales que H es una homografía que satisface $\varphi = H^{-1} \psi H$.

Entonces: $E_\psi = H(E_\varphi)$

Demostración:

Sea $e \in E_\psi$, por hipótesis existe $e_0 \in E_\varphi$ tal que $e_0 = \varphi_N(e_0)$ y $|\varphi'_N(e_0)| > 1$, donde N es el orden de e_0 y $H(e_0) = e$.
Como los puntos fijos son invariantes bajo homografías $e = \psi_N(e)$

Ahora como e es punto fijo de φ_N y H es una homo-
-grafía, entonces $\varphi'_N(e_0) = \varphi'_N(e)$ (por el corolario ante-
-rior) $+$.

Corolario.

Con las hipótesis del teorema anterior el orden
de e es igual al de e_0, es decir H preserva ordenes.

Sea $\varphi \in F_i$ y $\mathfrak{z} \in S^2$ un punto atractor de orden 1, es decir $\varphi(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z}$ y $|\varphi'(\mathfrak{z})| < 1$

Definiciones:

1) El dominio de convergencia total de $\mathfrak{z}$, "$D_\mathfrak{z}$", está definido por $D_\mathfrak{z} = \{z \in S^2 \mid \lim_{n\to\infty} \varphi_n(z) = \mathfrak{z}\}$.

2) $\varphi(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z}$, $\mathfrak{z} \in D_\mathfrak{z}$. El dominio de convergencia inmediata de $\mathfrak{z}$, "$R_\mathfrak{z}$", se define como la componente conexa de $D_\mathfrak{z}$ que contiene a $\mathfrak{z}$.

Considerese la siguiente construcción:

Por el   existe $\mathring{C} \in \mathcal{N}_\mathfrak{z}$ tal que si $z \in \mathring{C} \setminus \{\mathfrak{z}\}$ $|\varphi(z) - \mathfrak{z}| < K_0 |z - \mathfrak{z}|$ $K_0 < 1$.

Sin perder generalidad se puede pedir que $\mathring{C} = \{z \in S^2 \mid |z - \mathfrak{z}| < r_0\}$. para algún $r_0 > 0$, es decir $\mathring{C}$ un disco cubierto. Si $\mathfrak{z} = \infty$ se toma carta coordenada.

De lo anterior se sigue que:

$|\varphi_n(z) - \mathfrak{z}| < K_0 |\varphi_{n-1}(z) - \mathfrak{z}| < K_0^2 |\varphi_{n-2}(z) - \mathfrak{z}| < \ldots < K_0^n |z - \mathfrak{z}|$

Asi si $z \in \mathring{C}$, $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(z) = \mathfrak{z}$. , por lo tanto $\mathring{C} \subset R_\mathfrak{z}$.

Considerese $\varphi_{-1}(\mathring{C})$, $\mathfrak{z} \in \varphi_{-1}(\mathring{C})$ y sea $\mathring{C}_{-1}$ la componente conexa de $\varphi_{-1}(\mathring{C})$ que contiene a $\mathfrak{z}$.

Como $\mathfrak{z} \in \mathring{C}$, $\varphi(\mathring{C}) \subset \mathring{C}$ y $\mathring{C}$ es conexo entonces. $\mathring{C}_{-1} \supset \mathring{C}$.

Ahora $\mathfrak{z} \in \varphi_{-1}(\mathring{C}_{-1})$. Sea $\mathring{C}_{-2}$ la componente conexa de $\varphi_{-1}(\mathring{C}_{-1})$ que contiene a $\mathfrak{z}$. Como $\mathfrak{z} \in \mathring{C}_{-1}$, $\varphi(\mathring{C}_{-1}) \subset \mathring{C} \subset \mathring{C}_{-1}$ y $\mathring{C}_{-1}$ es conexo, entonces $\mathring{C}_{-2} \supset \mathring{C}_{-1}$

En general, dada $\mathfrak{z} \in \mathring{C}_{-i+1}$ y $\mathring{C}_{-i+1} \supset \mathring{C}_{-i+2}$, se define $\mathring{C}_{-i}$ como la componente conexa de $\varphi_{-1}(\mathring{C}_{-i+1})$ que contiene a $\mathfrak{z}$. y como $\varphi(\mathring{C}_{-i+1}) \subset \mathring{C}_{-i+2} \subset \mathring{C}_{i+1}$ y $\mathring{C}_{-i+1}$ es conexo entonces $\mathring{C}_{-i} \supset \mathring{C}_{-i+1}$

+

Algunas propiedades inmediatas que se pueden obtener son las siguientes:

1. Afirmación $\forall i \in \mathbb{N}$ $\mathring{C}_{-i}$ es abierto de S^2

Demostración:

$\mathring{C}$ es abierto de S^2 y φ continua, por tanto $\varphi_{-1}(\mathring{C})$ es abierto de S^2 y cada componente conexa de $\varphi_{-1}(\mathring{C})$ es un abierto, por lo tanto, $\mathring{C}_{-1}$ es abierto. Con esta misma idea se prueba que si $\mathring{C}_{-i}$ es abierto $\mathring{C}_{-(i+1)}$ también lo es.

1.1 Corolario: $\bigcup_1^\infty \mathring{C}_{-i}$ es abierto.

2. Afirmación $\bigcup_1^\infty \mathring{C}_{-i}$ es conexo

Demostración.

Para toda $i \in \mathbb{N}$ $\mathring{C}_{-i}$ es conexo y $\zeta \in \bigcap_1^\infty \mathring{C}_{-i} \neq \phi$ esto implica el resultado.

3. Afirmación: $\bigcup_1^\infty \mathring{C}_{-i} \subset D_\zeta$.

Demostración.

Si $z \in \bigcup_1^\infty \mathring{C}_{-i}$, $z \in \mathring{C}_{-i_0}$ para $i_0 \in \mathbb{N}$, $\varphi_{i_0}(z) \in \mathring{C}$, por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(z) = \zeta$.

4. Teorema:

$$R_\zeta = \bigcup_1^\infty \mathring{C}_{-i}$$

Demostración:

Dado que $\bigcup_1^\infty \mathring{C}_{-i}$ es conexo y abierto, solo basta demostrar que $\bigcup_1^\infty \mathring{C}_{-i}$ es cerrado en D_ζ, para lo cual es suficiente con probar que $\partial \bigcup_1^\infty \mathring{C}_{-i} \supset \varphi[\partial \bigcup_1^\infty \mathring{C}_{-i}]$, ya que $\mathring{C} \cap \partial \bigcup_1^\infty \mathring{C}_{-i} = \phi$, y si sucediera la última afirmación $\varphi_n(z) \in \partial \bigcup_1^\infty \mathring{C}_{-i}$, para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda z $\partial \bigcup_1^\infty \mathring{C}_{-i}$, por lo tanto $z \notin D_\zeta$ y $\bigcup_1^\infty \mathring{C}_{-i} \cap D_\zeta = \bigcup_1^\infty \mathring{C}_{-i}$ cerrado en D_ζ.

Sea $z \in \partial \overline{\bigcup_1^\infty \mathring{C}_{-i}}$, por lo tanto, existe $\{q_i\} \subset \bigcup_1^\infty \mathring{C}_{-i}$,

TAL QUE, $\lim_{n\to\infty} q_n = z$, POR CONTINUIDAD $\lim_{n\to\infty} \varphi(q_n) = \varphi(z)$, POR LO TANTO $\varphi(z) \in \bigcup_1^\infty \mathring{C}_{-i}$

Ahora supongase que $\varphi(z) \in \bigcup_1^\infty \mathring{C}_{-i}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, $\varphi(z) \in \mathring{C}_{-N}$, así $z \in \varphi_{-1}(\mathring{C}_{-N})$ el cual es abierto. Existe $V \in N_z$ conexa que cumple $z \in V \subset \varphi_{-1}(\mathring{C}_{-N})$ pero $\mathring{C}_{-N} \subset \mathring{C}_{-(N+M)}$, para toda $M \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, así que $\varphi_{-1}(\mathring{C}_{-(N+M)}) \supset \varphi_{-1}(\mathring{C}_{-N}) \supset V$, y por otro lado para toda $M > N$. $V \cap \mathring{C}_{-M} \neq \phi$.

Sea $M > N$, $M \geq N+1$ y así $M-1 \geq N$, entonces $V \cap \mathring{C}_{-M} \neq \phi$ y $p \in V \subset \varphi_{-1}(\mathring{C}_{-(M-1)})$.

$\mathring{C}_{-M} \cup V$ es un conexo contenido en $\varphi_{-1}(\mathring{C}_{-(M-1)})$, sin embargo $\mathring{C}_{-M}$ es componente conexa, entonces $V \subset \mathring{C}_{M}$, por lo tanto $z \in \mathring{C}_{-M}$ Ɣ entonces $\varphi(z) \notin \bigcup_1^\infty \mathring{C}_{-i}$ de donde se tiene que $\varphi(z) \in \partial\left[\bigcup_1^\infty \mathring{C}_{-i}\right]$ +

4.1 Corolario.

$R_{\mathfrak{z}}$ es abierto y $\varphi(R_{\mathfrak{z}}) = R_{\mathfrak{z}}$.

5 Proposición

Sean $\varphi, \rho \in Fi$ y $\mathfrak{z} \in S^2$ un punto atractor de orden 1 respecto a φ. Sea H una homografía tal que $\varphi = H^{-1}\rho H$. Entonces $H(\mathfrak{z})$ es un punto atractor de orden 1 respecto a ρ y $R_{H(\mathfrak{z})} = H(R_{\mathfrak{z}})$.

Demostración:

Por $\qquad\qquad$ $H(\mathfrak{z})$ es punto atractor de orden 1.

Sea $z \in H(R_{\mathfrak{z}})$ existe $\hat{z} \in R_{\mathfrak{z}}$ tal que $H(\hat{z}) = z$

$\rho_n(z) = H\varphi_n H^{-1}(z) = H\varphi_n(\hat{z})$ pero $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\hat{z}) = \mathfrak{z}$.

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} H\varphi_n(\hat{z}) = H(\mathfrak{z})$, entonces $\lim_{n\to\infty} \rho_n(z) = H(\mathfrak{z})$, por lo tanto $z \in D_{H(\mathfrak{z})}$. Pero $H(R_{\mathfrak{z}})$ es conexo y $H(\mathfrak{z}) \in H(R_{\mathfrak{z}})$, por lo tanto $H(R_{\mathfrak{z}}) \subset R_{H(\mathfrak{z})}$.

SEA $z \in R_{H(z)}$ SE CONSIDERA $H^{-1}(z)$ $\tilde{z} \in S^2$ ENTONCES $\tilde{z} \in H^{-1}(R_{H(z)})$ Y POR UN ARGUMENTO ANALOGO AL ANTERIOR SE TIENE QUE $\tilde{z} \in R_{H^{-1}(H(z))} = R_z$ +

SE PUEDE VER QUE LA PROPOSICIÓN VALE TAMBIEN PARA DOMINIOS DE CONVERGENCIA TOTAL.

ASÍ LOS DOMINIOS DE CONVERGENCIA TOTAL E INMEDIATA SON INVARIANTES BAJO HOMOGRAFÍAS EN EL SENTIDO DE LA PROPOSICIÓN 5.

6. Teorema.

SEA $\varphi \in F_i$ Y SEA O UN PUNTO ATRACTOR DE ORDEN 1 RESPECTO A φ Y SUPONGASE QUE $\infty \notin D_0$, ENTONCES EXISTE $z_0 \in R_0$, TAL QUE, $\varphi'(z_0) = 0$.

DEMOSTRACIÓN:

POR HIPÓTESIS φ HOLOMORFA EN R_0.

i) SI $|\varphi'(0)| = 0$ PARA $z_0 = 0$ SE TIENE EL RESULTADO

ii) SEA $|\varphi'(0)| \neq 0$ Y SUPONGASE QUE R_0 NO TIENE PUNTOS z TALES QUE $\varphi'(z) = 0$.

6.1 AFIRMACIÓN: R_0 ES SIMPLEMENTE CONEXO.

$(\mathring{C}_{-1}, \varphi)$ ES SUPERFICIE SUAVE CUBRIENTE REGULAR SOBRE $\mathring{C}$, COMO $\mathring{C}$ ES SIMPLEMENTE CONEXO [2] ENTONCES $\varphi : \mathring{C}_{-1} \to \mathring{C}$ ES HOMEOMORFISMO, POR LO TANTO $\mathring{C}_{-1}$ ES SIMPLEMENTE CONEXO.

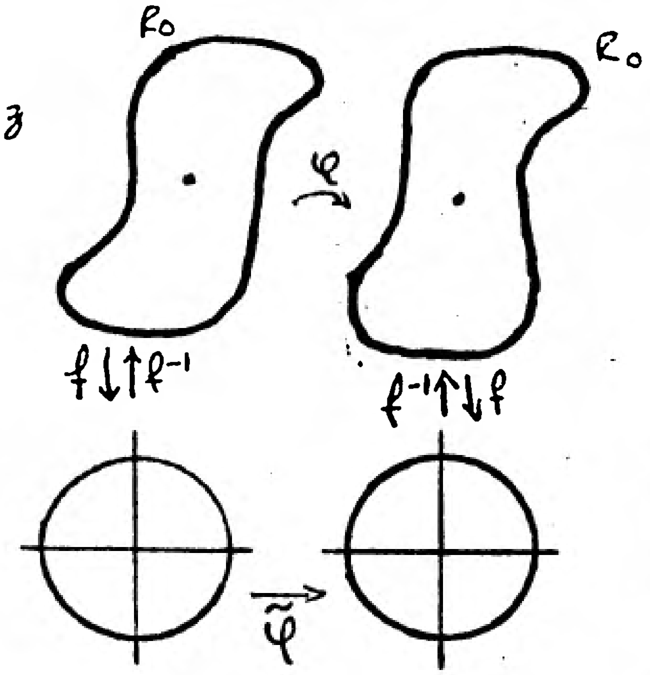
AHORA COMO $R_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathring{C}_{-i}$ SI $\gamma : [0,1] \to R_0$ ES UN LAZO POR COMPACIDAD $\gamma(I) \subset \mathring{C}_{-i_0}$ PARA ALGÚN $i_0 \in \mathbb{N}$ YA QUE $\{\gamma(I) \cap \mathring{C}_{-i}\}_{i=1}^{\infty}$ ES UNA CUBIERTA ABIERTA DE $\gamma(I)$. SE ESCOGE i_0 EL MÁXIMO SUBÍNDICE DE $\gamma(I) \cap \mathring{C}_{-i}$ DE LA SUBCUBIERTA FINITA. PERO $\mathring{C}_{-i_0}$ ES SIMPLEMENTE CONEXO, POR LO TANTO, $\gamma(I)$ ES CONTRACTIBLE EN $\mathring{C}_{-i_0} \subset R_0$ Y CON ESTO R_0 ES SIMPLEMENTE CONEXO

+

UNA VEZ PROBADO EL RESULTADO 6.1 POR EL TEOREMA DEL MAPEO DE RIEMANN [3], EXISTE $f: R_0 \to D$ $D=\{z\in \mathbb{C} \mid |z|<1\}$ ANALÍTICA Y TAL QUE $f(0)=0$, $f'(0)>0$ Y f HOMEOMORFISMO TOPOLÓGICO.

SE DEFINE $\tilde{\varphi}: D\to D$ POR $\tilde{\varphi}=f\varphi f^{-1}$, ES CLARO QUE $\tilde{\varphi}$ ES ANALÍTICA Y SUPRAYECTIVA, PUES $\varphi: R_0\to R_0$ LO ES ADEMÁS $\tilde{\varphi}(0)=0$

ASÍ $\tilde{\varphi}: D\to D$ ES UNA ROTACIÓN [4], ENTONCES $\tilde{\varphi}(z)=\lambda z=e^{irz}$ TAL QUE $|\lambda|=1$, POR LO TANTO $\tilde{\varphi}'(0)=0$ Ó $|\tilde{\varphi}'(0)|=1$. PERO COMO $f'(0)\neq 0$ Y $\varphi'(0)=(f^{-1})'(0)\,\tilde{\varphi}'(0)\,f'(0)=\tilde{\varphi}'(0)$ POR LO TANTO, $\varphi'(0)=0$ Ó $|\varphi'(0)|=1$
Y COMO SE SUPUSO QUE $\varphi'(0)=0$, ENTONCES $|\varphi'(0)|=1$ ↯, YA QUE 0 ES ATRACTOR.



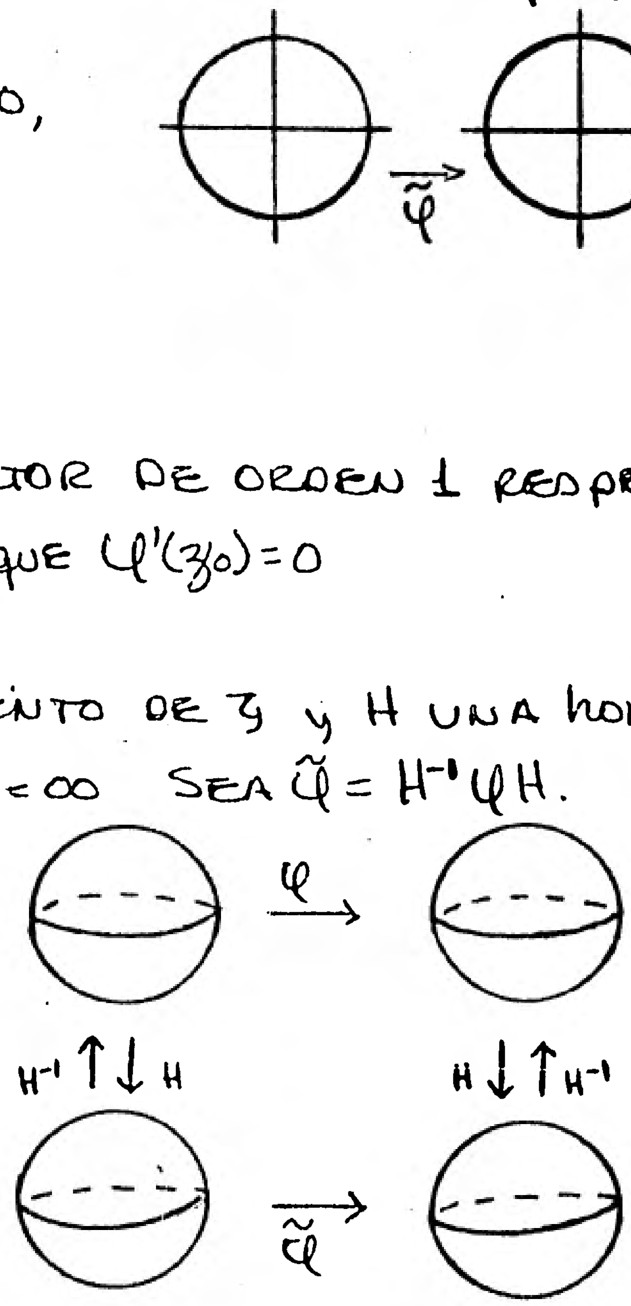
7. PROPOSICIÓN:

SEA $\varphi\in F_i$ Y ζ UN PUNTO ATRACTOR DE ORDEN 1 RESPECTO A φ, ENTONCES EXISTE $z_0\in R_\zeta$ TAL QUE $\varphi'(z_0)=0$

DEMOSTRACIÓN.

SEA z_1 PUNTO FIJO DE φ DISTINTO DE ζ Y H UNA HOMOGRAFÍA TAL QUE $H(\zeta)=0$ Y $H(\zeta_1)=\infty$ SEA $\tilde{\varphi}=H^{-1}\varphi H$.

ENTONCES 0 ES PUNTO ATRACTOR DE ORDEN 1 RESPECTO A $\tilde{\varphi}$ Y $H(R_\zeta)=R_{H(\zeta)}$, DONDE $R_{H(\zeta)}$ SE CONSTRUYE RESPECTO A $\tilde{\varphi}$ (PROP 5) ES CLARO QUE $\infty\notin R_{H(\zeta)}$ YA QUE $z_1\notin R_\zeta$



Supongase que $\varphi'(z) \neq 0$, para toda $z \in R_z$ entonces existe $N \in \mathcal{N}_z$, tal que $\varphi|_N : N \to \varphi(N)$, es homeomorfismo topológico.

Así para toda $\tilde{z} \in R_{A(z)}$ $H^{-1}(\tilde{z}) = z \in R_z$ (props) como $H^{-1}(N) \in \mathcal{N}_{\tilde{z}}$, entonces $\tilde{\varphi}|_{H^{-1}(N)} : H^{-1}(N) \to \tilde{\varphi}(H^{-1}(N))$ es homeomorfismo topológico donde $\tilde{\varphi}(H^{-1}(N)) \in \mathcal{N}_{\tilde{\varphi}(z)}$, por lo tanto, $\tilde{\varphi}'(\tilde{z}) \neq 0$ para toda $\tilde{z} \in R_{H(z)}$!
y esto contradice el teorema anterior. +

Ahora se hará un análisis acerca de las regiones de convergencia de un ciclo atractor; la finalidad será probar que el número de ciclos atractores de $\varphi \in F_i \subset \mathcal{F}_K$, está acotado para todo representante de la clase por una misma cota.

Sea $z, z_1, \dots, z_{p-1}$ un ciclo atractor de orden p. Por definición $z_i = \varphi(z)$, $i = 1, \dots, p-1$. Dado que si $i = 1, 2, \dots, p-1$ $\varphi'_p(z_i) = [\varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi]'(z_i) = \varphi'|\varphi_{p-1}(z_i)| \varphi_{p-2}(z_i)| \dots \varphi'(z_i) = \varphi'(z_{i-1})\varphi'(z_{i-2}) \dots \varphi'(z_i) = \varphi'(z)\varphi'(z_1) \dots \varphi'(z_{p-1}) = \varphi'_p(z)$, se concluye que todo punto del ciclo, es un punto atractor de orden p.

Así, para todo $i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, se tiene definido R_i.

El dominio de convergencia inmediata de z_i bajo la fracción φ_p. Sean $\mathring{C}, \mathring{C}', \dots, \mathring{C}^{p-1}$ los discos iniciales que originan la construcción de los R_i.

8. Proposición: Si R_i es el dominio de convergencia inmediato de z_i, entonces $\varphi_i(R) = R_i$, donde R es el dominio de convergencia inmediata de z.

Demostración:

Basta probar que $\varphi(R_{p-1}) = R$ dado que el resultado es cíclico.

8.1 Afirmación: $\varphi(R) \subset R_1$

Se puede suponer que $\varphi(\mathring{C}) \subset \mathring{C}'$ dado que φ es abierta y $\varphi'(z) \neq 0$, es decir, que φ es holomorfa en C, si C es suficientemente pequeño.

Sea $r \in R$ entonces existe $l \subset R$ una curva que une a z con r. Así que $\varphi(l)$ es una curva que une a $\varphi(r)$ con z_1, además existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_{pj}(l) \subset \mathring{C}$, entonces $\varphi_{pj+1}(l) \subset \mathring{C}'$, pero $\varphi(l)$ es un conexo que contiene a z_1 tal que $\lim_{n \to \infty} \varphi_{np}(z) = z_1$, para toda $z \in \varphi(l)$ entonces $\varphi(l) \subset R_1$, por lo que $\varphi(r) \in R_1$. y así $\varphi(R) \subset R_1$ +

Nota:

De la demostración de la afirmación 8.1 se tiene que para toda $i \in \{1, \dots, p-1\}$, $\varphi(R_i) \subset R_{i+1}$ y $\varphi_n(R_i) \subset \varphi_{n-1}(R_{i+1})$ así en particular $\varphi(R_{p-1}) \subset R$.

Ahora:

$$R = \varphi_p(R) \subset \varphi_{p-1}(R_1) \subset \dots \subset \varphi_2(R_{p-2}) \subset \varphi(R_{p-1}) \subset R,$$

entonces $\varphi(R_{p-1}) = R$ que era lo que se quería demostrar. +

9. Teorema:

Sea $\varphi \in F_k$ y $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ un ciclo atractor de φ en sus respectivos dominios de convergencia inmediata $R_0, R_1, \ldots, R_{n-1}$ construidos respecto a φ_n.

Entonces existe $z \in R_i$ para algún $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tal que $\varphi'(z) = 0$.

Demostración:

Es claro que z_0 es un punto atractor de orden 1 de la fracción $\tilde{\varphi} = \varphi_p$ por proposición 7 existe $z_0 \in R_0$ tal que $\tilde{\varphi}'(z_0) = 0$

$$\tilde{\varphi}'(z_0) = (\varphi_n)'(z_0) = \varphi'(\varphi_{p-1}(z_0)) \cdot \varphi'(\varphi_{p-2}(z_0)) \ldots \varphi'(z_0) = 0$$

por tanto existe $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ tal que $\varphi'(\varphi_{p-i}(z_0)) = 0$ pero $\varphi_{p-i}(z_0) \in R_{p-i}$, por la proposición 8. +

Notese que si $\varphi \in F_K$ el numero de raíces de $\varphi'(z)$ está acotado por $2(K-1)$

y como a cada ciclo atractor se le asocia una raíz de $\varphi'(z)$ se tiene que.

9.1 Corolario:

El número de ciclos atractores es finito y está acotado por $2(K-1)$.

$\varphi(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ una fracción racional de grado K.

Sea la familia de funciones determinada por $F(t,z) = (1-t)\varphi(z) + tz^2$ parametrizadas por $t \in \mathbb{C}$ así como su iteración de orden M $F_M(t,z) = F(t, F_{M-1}(t,z))$, la cual determina una familia de fracciones racionales de grado K^M, para $t \neq 1$ parametrizadas por $t \in \mathbb{C}$

SEA $V_M = \{(t,z) \in \mathbb{C} \times S^2 \mid F_M(t,z) = z\}$

DESPEJANDO DENOMINADORES V_M QUEDA DEFINI-DA POR ECUACIONES POLINOMIALES Y POR CONSIGUIENTE ES UN SUBCONJUNTO ALGEBRAICO DE DIMENSIÓN 1, ES DECIR, UNA CURVA COMPLEJA, TAL VEZ CON SINGULARIDADES.

SEA $V_M = W_1 \cup \ldots \cup W_l$ SU DESCOMPOSICIÓN EN COMPO-NENTES IRREDUCIBLES.

LEMA:

SEA $U \in \mathcal{N}(0,z_0)$ Y W UNA COMPONENTE IRREDUCIBLE DE $V_M \cap U$ QUE CONTIENE A $(0,z_0)$. SEA $S : V_M \to \mathbb{C}$. $S(t,z) = \frac{dF_M}{dz}(t,z)$, Y SUPONGAMOS QUE $|S(0,z_0)| = 1$

ENTONCES, $S|_W$ ES UNA FUNCIÓN HOLOMORFA NO CONSTANTE.

NOTA: PARA ESTE ARGUMENTO SE UTILIZARÁ LA TOPOLOGÍA DE ZARISKI EN $\mathbb{C} \times S^2$ Y SE UTILIZARÁN RESULTADOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA ALGEBRAICA COMO APARECEN EN Basic Alg. geom. de Shafarevich.

DEMOSTRACIÓN:

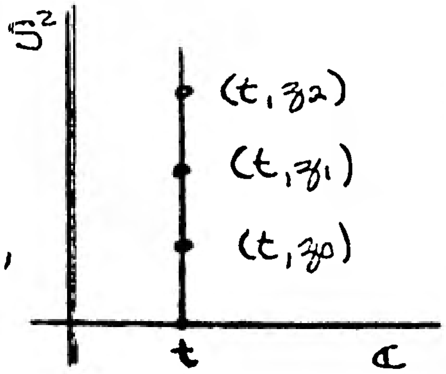
NOTESE QUE S ESTÁ BIEN DEFINIDA AUN PARA PUNTOS DE LA FORMA (t,∞), YA QUE COMO $(t,\infty) \in V_M$, ES PUNTO FIJO DE F_M Y POR EL LEMA 2 $S(t,\infty) \in \mathbb{C}$ ES INDEPENDIENTE DE LA CARTA CON RESPECTO A LA CUAL DERIVAMOS.

SEA $(0,z_0) \in W_i$ $\quad |S(0,z_0)| = 1$ SE QUIERE PROBAR QUE S NO PUEDE SER CONSTANTE EN TODO W_i, DONDE W_i ES COMPONENTE IRREDUCIBLE DE V_M.

SEA $\pi : \mathbb{C} \times S^2 \to \mathbb{C}$ TAL QUE $\pi(t,z) = t$.

$\pi(W_i) = \mathbb{C}$ YA QUE $\pi(W_i)$ ES CERRADO POR SER π MORFISMO PROPIO Y W_i CERRADO DE $\mathbb{C} \times S^2$. TAMBIEN ES IRREDUCIBLE (PUES IMAGEN DE IRREDUCIBLES ES IRREDUCIBLE)

Pero los únicos cerrados irreducibles de $\mathbb{C}$ son $\mathbb{C}$ mismo o un punto, y $0 \in \pi(W)$ si $0 = \pi(W_i)$, como W_i es una curva (dado que está definida por una ecuación) se tendrá que $W_i = \{0\} \times S^2$ lo que implicará que $F_M(0,z)$ es la identidad, contradiciendo el hecho de que el grado es K^M. Así que $\pi(W_i) = \mathbb{C}$



Esto quiere decir que sobre todo $t \in \mathbb{C}$, existe al menos un punto $(t,z) \in W_i$, si S fuera constante tendríase que $S(t,z) = S(0,z_0)$, pero es fácil comprobar que para $t=1$. $F_M(1,z) = z^{2M}$, S no tiene no tiene ningún punto fijo de norma 1. Por lo tanto $1 \notin \pi(W_i)$ ↯. Así se obtiene que S no puede ser constante

Sea $U \in N_{(0,z_0)}$ y W una componente irreducible de $V_M \cap V$, supóngase que $|s(0,z_0)| = 1$ entonces S no puede ser constante en W, ya que W es subconjunto de algún $W_i \subset V_M$ y contiene un abierto de W_i. Así que por continuación analítica a lo largo de los puntos li-sos de W_i se tendría que S es constante en W_i, lo cual no puede ser ↯.

Lema:

Sea $S : D(0,r) \to \mathbb{C}$ una función holomorfa con expan-sión en series $s(t) = a_0 + a_p t^p + \sum_{n>p} a_n t^n$, $|a_0| = 1$ $a_p \neq 0$

Sea $Q(t) = a_0 + a_p t^p$ su primera aproximación, si $|Q(\rho_0 e^{i\theta_0})| < 1$, para $0 < \rho_0 < r$. Entonces existe $\lambda \in (0, \rho_0]$ tal que si $0 < \rho < \lambda$ tenemos $|s(\rho e^{i\theta_0})| < 1$.

DEMOSTRACIÓN:

i) LOS SEGMENTOS DE EXTREMOS $a_0, Q(t)$ y $S(t)\ Q(t)$ TIENEN LAS SIGUIENTES MAGNITUDES:

$$|a_0 - Q(t)| = |a_0 - a_0 + a_p t^p| = |a_p t^p|$$

$$|S(t) - Q(t)| = |a_0 + a_p t^p + \sum_{n>p} a_n t^n - a_0 - a_p t^p| =$$

$$|t|^{p+1} |\sum_{n>p} a_n t^{n-p-1}|$$

ENTONCES: $$\frac{|S(t) - Q(t)|}{|a_0 - Q(t)|} = |t| \frac{|\sum_{n>p} a_n t^{n-p-1}|}{|a_p|}$$

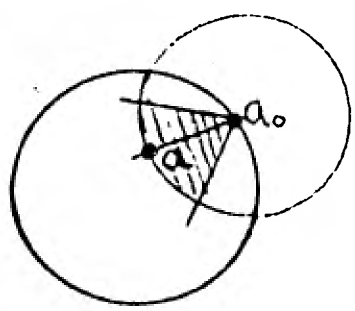
POR LO TANTO: $$\lim_{t \to 0} \frac{|S(t) - Q(t)|}{|a_0 - Q(t)|} = 0 \ldots (*)$$

ii) SEA $\alpha \in (0, \pi)$ TAL QUE

$$B = \{ Q' \mid |Q' - a_0| < |Q(\rho_0 e^{i\theta_0}) - a_0| \text{ y } \left|\mathrm{Arg} \frac{Q' - a_0}{Q(\rho_0 e^{i\theta_0}) - a_0}\right| < \alpha \} \subset D$$

[D DISCO UNITARIO]

NOTA (ES FACIL ...)



iii) SEA $\delta > 0$ TAL QUE

a) SI $|t| < \delta$ ENTONCES $|S(t) - a_0| < |Q(\rho_0 e^{i\theta_0}) - a_0| \ldots (**)$

LA EXISTENCIA DE δ SE DEBE A QUE $S(0) = a_0$, S ES CONTINUA y $|Q(\rho_0 e^{i\theta_0}) - a_0| > 0$

b) Si $|t| < \delta$ entonces

$$\frac{|S(t) - Q(t)|}{|a_0 - Q(t)|} < \operatorname{sen} \alpha$$ [illegible] (*)

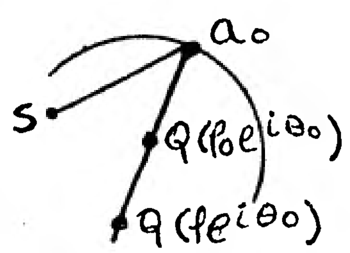
(V) Se propone a $\lambda = \delta$, con δ como en iii)

Así basta probar que los puntos $S(\rho e^{i\theta_0})$ con $\rho \in (0, \lambda)$ están en B. Pues B está contenido en el disco unitario.

La primera condición se satisface por (**), para probar la segunda condición se nota que:

$$\left| \operatorname{Arg}\left(\frac{S(\rho e^{i\theta_0}) - a_0}{Q(\rho e^{i\theta_0}) - a_0} \right) \right| = \left| \operatorname{Arg}\left(\frac{S(\rho e^{i\theta_0}) - a_0}{Q(\rho e^{i\theta_0} - a_0} \right) \right|$$ ya que

$Q(\rho e^{i\theta_0})$ y $Q(\rho_0 e^{i\theta_0})$ son colineales.

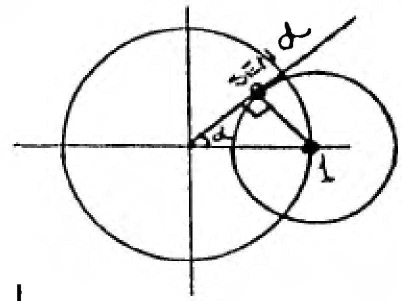


y $$\frac{S(\rho e^{i\theta_0}) - a_0}{Q(\rho e^{i\theta_0}) - a_0} = \frac{S(\rho e^{i\theta_0}) - Q(\rho e^{i\theta_0}) + Q(\rho e^{i\theta_0}) - a_0}{Q(\rho e^{i\theta_0}) - a_0}$$

$$= \frac{S(\rho e^{i\theta_0}) - Q(\rho e^{i\theta_0})}{Q(\rho e^{i\theta_0}) - a_0}$$

$$\left| \frac{S(\rho e^{i\theta_0}) - a_0}{Q(\rho e^{i\theta_0}) - a_0} - 1 \right| = \left| \frac{S(\rho e^{i\theta_0}) - Q(\rho e^{i\theta_0})}{Q(\rho e^{i\theta_0}) - a_0} \right| < \operatorname{sen} \alpha$$

por (***) y recordando el círculo trigonométrico



SE OBTIENE QUE
$$\left| \text{Arg.}\ \frac{S(\rho e^{i\theta_0}) - a_0}{Q(\rho e^{i\theta_0}) - a_0} \right| < \alpha$$

POR LO TANTO $$\left| \text{Arg.}\ \frac{S(\rho e^{i\theta_0}) - a_0}{Q(\rho_0 e^{i\theta_0} - a_0} \right| < \alpha$$

POR LO TANTO $S(\rho e^{i\theta_0}) \in B$

ENTONCES $|S(\rho e^{i\theta_0})| < 1$ $+$

AFIRMACIÓN: DADO UN CONJUNTO DE ECUACIONES
$$S_1(t) - S_1(0) = A_1 t^{p_1} + \dots$$
$$S_2(t) - S_2(0) = A_2 t^{p_2} + \dots$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$S_n(t) - S_n(0) = A_n t^{p_n} + \dots$$

DONDE $S_i : D_i \to \mathbb{C}$ [D_i UNA VECINDAD DE CERO]

$0 \neq A_i \in \mathbb{C}$, $|S_i(0)| = 1$ y $p_i \in \mathbb{Z}$;

$S_i(0) = S_i \wedge Q_i(t) = S_i + A_{p_i} t^{p_i}$ PARA TODA $i \in \{1, \dots, n\}$

ENTONCES EXISTE $t \in \bigcap D_i$ TAL QUE $|Q_i(t)| < 1$, i variando en un subconjunto de $\{1, \dots, n\}$ de cardinalidad $\frac{n}{2}$

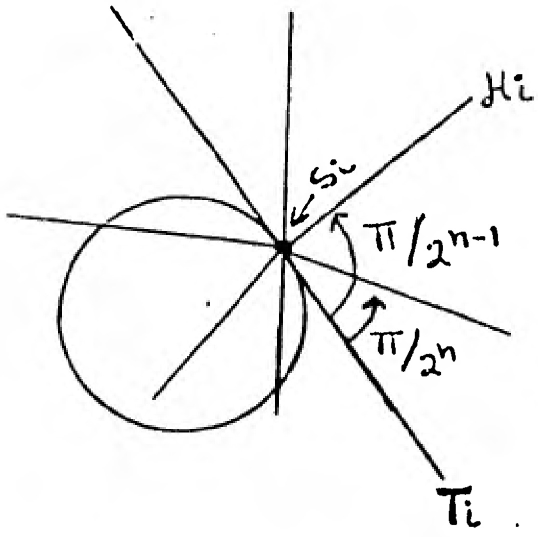
Demostración:

CLARAMENTE S_i ESTÁ SOBRE EL CÍRCULO UNITARIO.

SEA 2^h LA MÁXIMA POTENCIA DE 2 QUE DIVIDE A ALGUNO DE LOS p_i $i \in \{1, \dots, n\}$)

EN CADA S_i SE TOMA LA TANGENTE AL CÍRCULO UNITARIO Y SE CONSIDERA EL HAZ DE SEMIRECTAS H_i TALES QUE TIENEN POR EXTREMO A S_i Y FORMAN UN ÁNGULO DE UN MULTIPLO DE $\frac{\pi}{2^h}$ CON LA TANGENTE EN S_i.

Si $Q_i(t)$ está en $\mathcal{H}_i$, el argumento θ_i de t puede tomar varios valores [un nº finito].



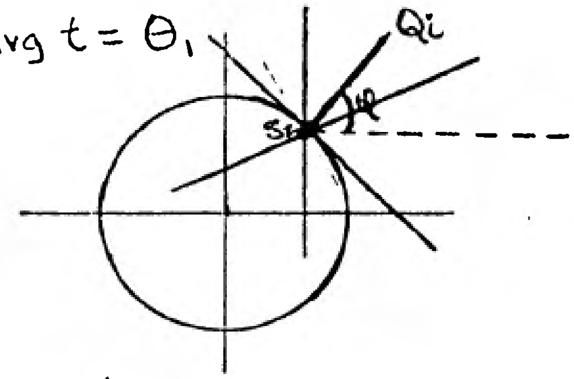
Sean $\theta_1^{\prime i}, \dots, \theta_{j_i}^{\prime i}$, se define

[la idea es construir θ_1 de manera que $Q_i(t) \notin \mathcal{H}_i$ para toda i]

$\theta_0 = \theta_1 + \theta_2$ de manera que:

$$\theta_1 \neq \theta_1^{\prime 1}, \theta_2^{\prime 1}, \dots, \theta_{j_1}^{\prime 1}, \theta_1^{\prime 2}, \theta_2^{\prime 2}, \dots, \theta_{j_2}^{\prime 2}, \dots, \theta_1^{\prime n}, \theta_2^{\prime n}, \dots, \theta_{j_n}^{\prime n}$$

Así sea $\varphi = \operatorname{Arg}(S_i Q_i(t))$ cuando el $\operatorname{Arg} t = \theta_1$



Sea $\theta_2 = \pi\left[a_1 + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_h}{2^h}\right]$

donde las a_i valen 1 ó 0 y quedan determinadas de la siguiente manera:

a) Se agrupan las S_i para las cuales $2^h / p_i$, así $p_i = 2^h(2\lambda+1)$. Sea $\operatorname{Arg} t = \theta_0$, se tiene que el $\operatorname{Arg}[S_i Q_i(t)]$ es $\varphi + \pi a_h$ [o un multiplo de 2π]

Si la mitad o más de los $S_i Q_i(t)$ están del lado del círculo que determina T_i y por tanto para un ℓ suficientemente pequeño son interiores al círculo, se toma $a_h = 0$. Si no se toma $a_h = 1$ y se obtiene que más de la mitad de los segmentos son interiores al círculo. Así a_n queda determinada.

b) Se agrupan los S_i para los cuales $2^{h-1} | p_i \wedge 2^h \nmid p_i$

Así $p_i = 2^{h-1}(2N+1)$. Sea $\operatorname{Arg} t = \theta$, entonces $\operatorname{Arg} S_i Q_i(t)$ es $\varphi + \frac{2\lambda+1}{2}\pi a_h + \pi a_{h-1} = \varphi' + \pi a_{h-1}$ [o un multiplo de π]

Como la dirección φ no es dirección de ninguna semirecta de $\mathcal{H}_i$ ($\wedge \frac{2\lambda+1}{2}$ es $\frac{K}{2}$ para K impar) φ' no puede ser dirección de T_i.

Si la mitad o más de las $S_iQ_i(t)$ están del mismo lado que el círculo, se toma $a_h=0$, si no se toma $a_h=1$. Así a_{h-1} queda determinada

c) Se agrupa análogamente el siguiente conjunto, y así $p_i = 2^{h-2}(2\gamma+1)$ y el argumento de PQ_i está dado por:

$$\varphi + \frac{2\lambda+1}{2^2}\pi a_h + \frac{2\mu+1}{2}\pi a_{h-1} + \pi a_{h-2} = \varphi' + \pi a_{h-2}$$

Se ve que φ' no puede ser dirección tangente al círculo en S_i, así $a_{h-2}=0$ ó $a_{h-2}=1$ por un razonamiento análogo a los anteriores. Este procedimiento se puede continuar y como $h \in \mathbb{Z}$ se termina.

Así escogemos $t = \rho_0 e^{i\theta_0}$ de manera que $\rho_0 < \rho_i$ [ρ_i el radio de D_i]. $\theta_0 = \theta_1 + \theta_2$ según fueron construidas. Así para toda $i \in \{1, \dots, N\}$ $\quad S_iQ_i(t) = A_i t^{p_i} = A_i \rho_0 e^{i\theta_0 p_i} =$
$A_i\rho_0 e^{i[\theta_1+\theta_2]p_i} = A_i\rho_0 e^{i\theta_1 p_i} \cdot e^{i\theta_2 p_i} \ldots (*)$

Por la construcción anterior p_i está en alguno de los conjuntos determinados. $i \in p_i = 2^{h-k}(2\delta+1)$ donde $2^{(h-k)+1} \nmid p_i \quad k \leq h$.

$$\text{Así } e^{i2^{h-k}(2\delta+1)\pi[a_1 + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_h}{2^h}]} =$$
$$e^{i(2\delta+1)\pi[2^{h-k}a_1 + 2^{h-k-1}a_2 + \dots + a_{h-k} + \frac{a_{h-k}}{2} + \dots + \frac{a_h}{2^{h-k}}]} =$$
$$e^{i(2\delta+1)\pi[a_{h-k} + \frac{a_{h-k+1}}{2} + \dots + \frac{a_h}{2^{h-k}}]} =$$
$$e^{i\{(2\delta+1)\pi a_{h-k} + \frac{(2\delta+1)}{2^{h-k+1}}\pi a_{h-k+1} + \dots + \pi\frac{(2\delta+1)}{2^{h-k}}a_h\}} =$$
$$e^{i\{\pi a_{h-k} + \frac{(2\gamma+1)}{2}\pi a_{h-k+1} + \dots + \frac{(2\mu+1)}{2^{h-k+1}}\pi a_{h-1} + \frac{(2\lambda+1)}{2^{h-k}}\pi a_h\}}$$

$$\operatorname{Arg}(*) = \varphi + \pi a_{h-k} + \dots + \frac{(2\mu+1)}{2^{h-k+1}}\pi a_{h-1} + \frac{(2\lambda+1)}{2^{h-k}}\pi a_h$$

Por lo tanto, la mitad o más de los puntos del conjunto asociado satisfacen que: para ρ_0 suficientemente pequeño $S_iQ_i(t)$ está en el disco unitario, por lo tanto,

$|Q_i(t)|<1$ y como son un numero finito i, por lo tanto, existen $\frac{n}{2}$ valores de i, para los cuales $|Q_i(t)|<1$

3. Proposición:

Sea $\varphi(z)$ una fracción racional de grado K que posee N ciclos mixtos, al menos, entonces, existe una fracción racional de grado K, que posee $\frac{N}{2}$ ciclos atractores.

Demostración:

Sea $F:\mathbb{C}\times S^2 \to \mathbb{C}$ definida por $F(t,z)=(1-t)\varphi(z)+tz^2$ nótese que $F(0,z)=\varphi(z)$ y se define $F_m:\mathbb{C}\times S^2\to\mathbb{C}$ por $F_m(t,z)=F(t,F_{m-1}(t,z))$.

Sean $z_1, z_2, \dots, z_N$ elementos de cada uno de los N ciclos respectivamente de φ y sean $m^1,\dots,m^N$ los ordenes de los N ciclos, asi $\varphi_{m^j}(z_j)=z_j$ y $|\varphi_{m^j}'(z_j)|=|s_j|=1$ $j=\{1,\dots,N\}$

Sea $V_j=\{(t,z)\in\mathbb{C}\times S^2 \mid F_{m^j}(t,z)=z\}$, es claro que $(0,z_j)\in V_j$. Sea $V_j=W_1\cup\dots\cup W_l$ su descomposición en com-ponentes irreducibles. Por lo tanto, $(0,z_j)\in W_i$ para algun $i\in\{1,\dots,l\}$.

Asi se considera $U_0\in N(0,z_j)$ tal que $F_{m^j}(t,z)-z$ sea holomorfa y sea $W=W_i\cap U_0$ que contiene a $(0,z_j)$, por el lema anterior se tiene que si $S(t,z)=\frac{dF_{m^j}}{dz}(t,z)$ como $|S_j(0,z_j)|=1$ entonces $S|W$ es una función holomorfa no constante.

Como V_j es un conjunto algebraico de dimensión 1, es decir, una curva compleja tal vez con singularidades, existe $f:D\to V_j$ D un disco centrado en 0 holomorfa y bi-yectiva
$0\to(0,z)$

Mas aún, $f:D-\{0\}\to V_j-\{(0,z_j)\}$ es un difeomorfismo analítico

Por otro lado $G(t,z) = F_{mj}(t,z) - z$ la cual es holo-morfa en U_0, tiene una expresión $G(t,z) = \prod_{i=1}^{n} g_i(t,z)$ en factores primos en el anillo de series de poten-cias de t y z. Mas aún $G(0,z)$ no es constante en U. Note-se que $G(0,z) = F_{mj}(0,z) - z = \varphi_{mj}(z) - z$, pero φ_{mj} tiene grado mayor que 1.

Asi por el teorema de parametrización para cur-vas en $\mathbb{C}^2$. Existen vecindades producto conexas arbi-trariamente pequeñas $U = U_1 \times U_2$ de $(0,z)$ y subvarie-dades analíticas.

$$V_i = \{(t,z) \in U_1 \times U_2 \mid g_i(t,z) = 0\},$$
$$V = \{(t,z) \in U_1 \times U_2 \mid G(t,z) = 0\} = \bigcup_i^n V_i$$
$$V_i \cap V_j = \phi \quad n\, i \neq j$$

Tal que la proyección en el primer factor $\pi_1 : V_i \to U_1$ es una transformación propia, suprayectiva con fibras finitas y $\pi_1^{-1}(0,0) = \{(0,z_j)\}$.

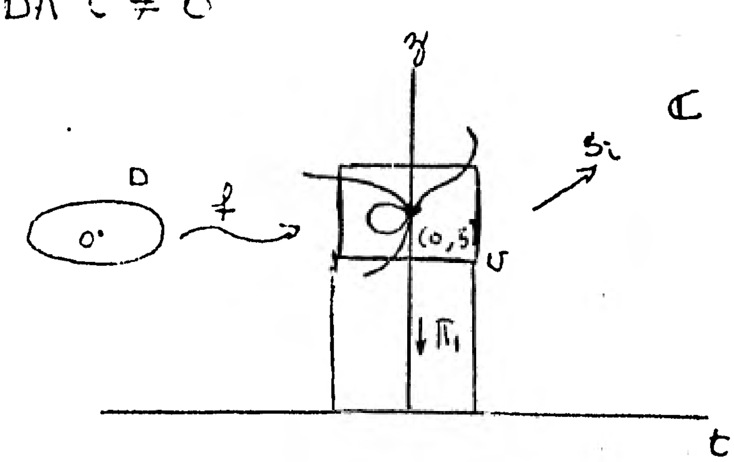
$\pi_1 : V_i - \{(0,z)\} \to U_1 - \{0\}$ es un espacio cubriente finito.

Asi restringiendo V_j a U y restringiendo el do-minio de f, que se seguirá llamando D, se tiene que:

$\pi_1 f : D - \{0\} \to U_1 - \{0\}$ es un espacio cubriente finito, por lo tanto $\pi_1 f(t') = t'^r$ para toda $t \neq 0$

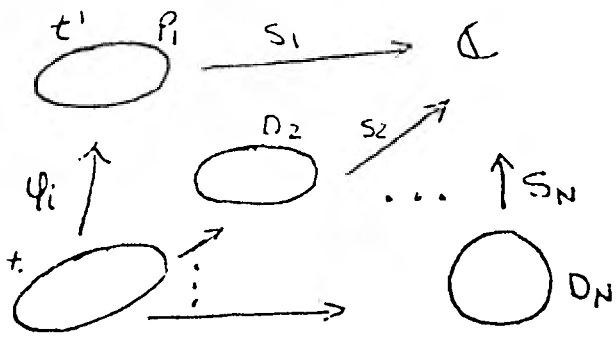
Entonces $S_j f : D \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa en variable t'. Mas aún $S_j f(t') = S_j(t'^r, z(t'))$

Por lo tanto $S_j(t'^r, z(r')) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t'^n$



AHORA $A_0 = S_j(0, z(0)) = S_j(0, \zeta_j)$ YA QUE EN U $\pi^{-1}(0) = \{(0,\zeta)\}$, POR LO TANTO, $|A_0| = 1$

PERO ESTO VALE PARA TODA $j \in \{1, \dots, N\}$ ASÍ QUE HACIENDO UN CAMBIO DE VARIABLE



$\varphi_i : D \to D_i$ DONDE φ_i ES HOMEO-

$t \quad t'_i$

$0 \to 0$ -MORFISMO TOPOLÓ-

-GICO ANALÍTICO SE TIENE QUE PARA TODA $i \in \{1, \dots, N\}$

$S_j(t) = S_j(\varphi_i{}^r(t), z(\varphi_i(t))) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n t^n$, PERO ADEMÁS

$A_0 = S_j(\varphi_i{}^r(0), z(\varphi_i(0)))$ Y COMO $\varphi_i(0) = 0$

$B_0 = S_j(0, z(0)) = S_j(0, \zeta_j)$ POR LO TANTO $|B_0| = 1$

ASÍ PUES SE TIENE UN SISTEMA DE N ECUACIONES COMO EL SIGUIENTE:

$$
\begin{aligned}
S_1(t) - s_1 &= A_{p_1} t^{r_1} + \dots \\
S_2(t) - s_2 &= A_{p_2} t^{r_2} + \dots \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \\
S_N(t) - s_N &= A_{p_N} t^{r_N} + \dots
\end{aligned}
$$

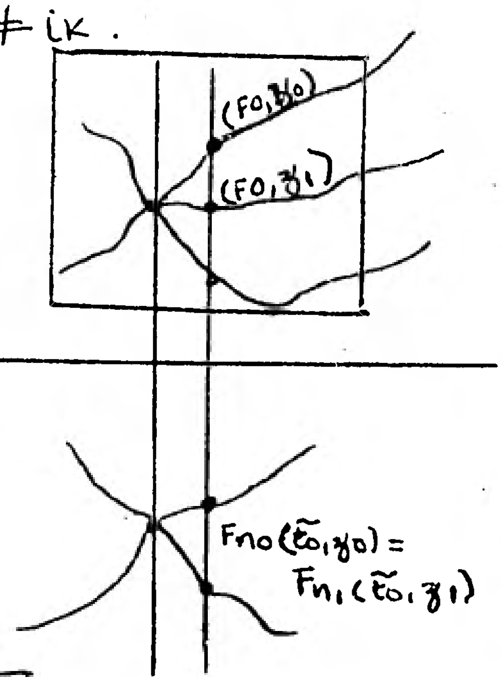
PARA EL CUAL $r_i \in \mathbb{Z}$ Y $s_i = |S_i(0, \zeta_i)| = 1$ Y $A_{p_i} \neq 0$, PARA TODA $i \in \{1, \dots, N\}$

SEA $Q_i(t) = s_i + A_{p_i} t^{r_i}$ LA PRIMERA APROXIMACIÓN DE $S_i(t)$, POR LA AFIRMACIÓN ANTERIOR EXISTEN $i_1, i_2, \dots, i_{N/2}$ VALORES DISTINTOS DE i, PARA LOS CUALES $|Q_i(t)| < 1$ PARA ALGÚN $t \in V_0$, $V_0 \in N_0$ DONDE TODAS LAS S_i ESTÁN DEFINIDAS. ASÍ SI $t = \rho e^{i\theta}$ POR EL LEMA ANTERIOR PARA CADA i_j CON $j \in \{1, \dots, N/2\}$ EXISTE $\lambda_j \in (0, \rho)$ TAL QUE SI $0 < \rho' < \lambda_j$, ENTONCES, $|S_{i_j}(\rho' e^{i\theta})| < 1$

SEA $\lambda = \min\{\lambda_1, \dots, \lambda_{N/2}\}$ Y $0 < \rho_0 < \lambda$, ENTONCES, $|S_{i_j}(\rho_0 e^{i\theta})| < 1$ PARA TODA $j \in \{1, \dots, N/2\}$ SEA $\rho_0 e^{i\theta} = t_0$

Asi pues fijando t_0. Sea $\varphi_{ij}^{r_{ij}}(t_0)=\tilde{t}_0$; $F(\tilde{t}_0, z)$ es una función racional de grado k para la cual
$$\frac{d}{dz}F^{m^{ij}}(\tilde{t}_0, z(\tilde{t}_0)) = S_{ij}(t_0) \text{ y } F^{m^{ij}}(\tilde{t}_0, z(\tilde{t}_0)) = z(\tilde{t}_0)$$

Finalmente la prueba estará concluida si se demuestra que $i \neq j$ al considerar $F(\tilde{t}_0, z)$ el ciclo determinado por $z(\tilde{t}_0)$ de orden m^{ij} es distinto a cualquier otro ciclo determinado por $z_1(\tilde{t}_0) \in U$ de orden m^{ik} con $ij \neq ik$.



Pero es claro que $z_1(\tilde{t}_0) = z_1 \neq z = z(\tilde{t}_0)$ si se supone que ambos determinan un mismo ciclo existe $n_0 < ij$ y $n_1 < ik$ tal que, $F_{n_0}(\tilde{t}_0, z_0) = F_{n_1}(\tilde{t}_0, z_1)$ . . . (*)

Sin embargo la función
$$Id \times F(t,z) : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}\times\mathbb{C}$$
$$(t,z) \to (t, F(t,z))$$

tiene una derivada de la forma $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \frac{dF}{dz} \end{bmatrix}$ que al aplicarse a $(0, z_i)$ es invertible pues $\frac{dF}{dz}(0, z_i) = \varphi'(z_i) \neq 0$ mas aun como $\varphi'(\varphi_s(z_i)) \neq 0$ ya que $\varphi_s(z)$ es punto del ciclo mixto; determinado por z_i, es invertible en $(0, \varphi_s(z_i))$ $s < m^i$.

Por tanto $Id \times F(t,z)$ es isomorfismo local alrededor de $(0, \varphi_s(z_i))$, para toda $s \in \{1, \ldots, m^i - 1\}$ y escogiendo una vecindad U suficientemente pequeña, suponer (*) lleva a una contradicción $\dashv$

TEOREMA FUNDAMENTAL:

SEA $\varphi \in F_i$ TAL QUE 0 ES UN PUNTO REPULSOR DE ORDEN 1, ENTONCES SI $V \in N_0$ Y SE DEFINE $V_i = \varphi_i(V)$, $\#\{S^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\} \leq 2$

DEMOSTRACIÓN:

SUPONGASE QUE EXISTEN TRES PUNTOS DISTINTOS $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ EN $S^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$, SE CONSIDERA LA FAMILIA DE FUNCIONES $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, LA CUAL ESTA DEFINIDA EN V.

POR DEFINICIÓN $\varphi_j(z) \neq \gamma_i$, PARA TODA $j \in \mathbb{N}$, PARA TODA $z \in V$ Y $i \in \{1,2,3\}$

POR LO TANTO, $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ES UNA FAMILIA NORMAL EN V (5.4)

ASÍ EXISTE UNA SUBSUCESIÓN DE FUNCIONES DE ESTA FAMILIA $\{\varphi_i\}_{j \in J}$ $J \subset \mathbb{N}$ NUMERABLE QUE CONVERGE UNIFORMEMENTE A UNA FUNCIÓN f MEROMORFA EN V.

ASÍ f ES ANALÍTICA EN $V \setminus P$ PARA $P = \{p \in S^2 \mid p$ ES POLO DE $f\}$, PERO $f(0) = 0$, POR LO TANTO, f ES ANALÍTICA EN 0.
$f'(0) = k \neq \infty$

PERO POR OTRO LADO φ ES ANALÍTICA EN CERO.

POR LO TANTO, $\varphi(z) = \varphi(0) + \varphi'(0)z + \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{n+2} = \varphi'(0)z + \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{n+2}$, EN UNA VECINDAD DE CERO.

PARA TODA $n \in \mathbb{N}$ $\exists V_n \in N_0$ TAL QUE φ_n ES ANALÍTICA Y POR LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

$$\varphi_n(z) = [\varphi'(0)]^n z + \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{n+2}$$

Por lo tanto, $\varphi_n'(0) = [\varphi'(0)]^n$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} |\varphi_n'(0)| = \lim_{n\to\infty} |\varphi'(0)|^n = \infty \quad \forall$$

(Nótese que como f es analítica en cero tiene un [illegible] en series)

(4) Proposición:

Sea φ como en el teorema anterior y $\psi \in F_i$. la misma clase de φ. Si H es la homografía que satisface $\varphi = H^{-1}\psi H$. Entonces:

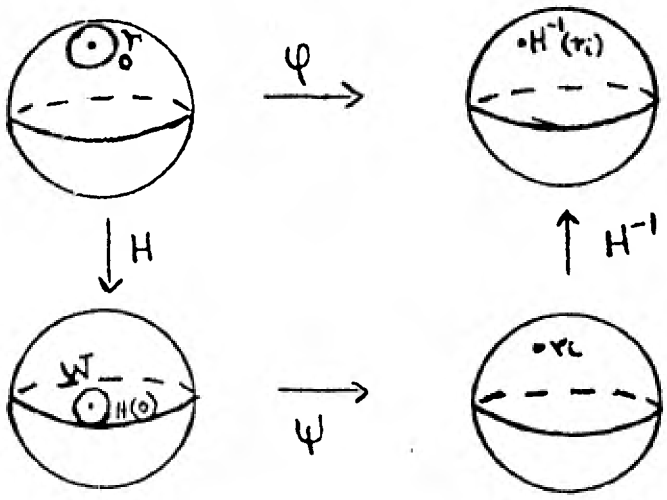
i) $H(0)$ es un punto repulsor de orden 1.

ii) si $W \in \mathcal{N}_{H(0)}$ y $W_i = \psi_i(W)$, entonces $\#\{S^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i\} \le 2$

Demostración:

Como $\varphi(0) = 0$ y de la demostración de la proposición (2) se tiene que $H(0)$ es un punto repulsor de orden 1.

Sea $W \in \mathcal{N}_{H(0)}$ se escoje $V \in \mathcal{N}_0$ para lo cual vale el teorema anterior, de manera que $H(V) \subset W$.



Supongase que existen tres puntos distintos r_1, r_2, r_3 de S^2, tales que:

$$\{r_1, r_2, r_3\} \subset S^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$$

Por el teorema (3) existe $i_0 \in \{1,2,3\}$ tal que $H^{-1}(r_{i_0}) = \varphi_j(z_0)$ para algún $j \in \mathbb{N}$ y $z_0 \in V$

Existe $V' \subset V$, $V' \in \mathcal{N}_0$ para lo cual sigue valiendo el teorema (3), de manera que para algún $z_1 \in V'$, $\varphi_n(z_1) = H^{-1}(r_{i_0})$

$(n \in \mathbb{N})$ $\quad H^{-1}\psi_n H(z_1) = H^{-1}(r_{i_0})$

$\psi_n H(z_1) = r_{i_0}$ pero $H(z_1) \in W$

por lo tanto, $r_{i_0} \in \psi_n(W) = W_n \quad \forall$

$+$

SEA $\varphi \in F_i \subset \hat{F}_K$ Y SUPONGASE QUE ζ ES UN PUNTO REPULSOR DE ORDEN 1, RESPECTO A φ, ENTONCES EXISTE $\varphi_0 \in F_i$ UN ELEMENTO DISTINGUIDO QUE SE OBTIENE POR LA TRASLACIÓN QUE LLEVA ζ A O. ASI O ES UN PUNTO REPULSOR DE ORDEN 1 RESPECTO A φ_0 Y SI $V \in N_0$, $\# \{S^2 \setminus \bigcup_{i}^{\infty} V_i\} \leq 2$. AHORA POR LOS RESULTADOS ANTERIORES SI $\psi \in F_i$, $(\varphi_0, 0)$ GENERARÁ UN PUNTO REPULSOR EN S^2 DE ORDEN 1 RESPECTO A ψ. PARA EL CUAL TAMBIEN VALE EL TEOREMA FUNDAMENTAL.

ASI PUES UNA VEZ DETERMINADO UN PUNTO ATRACTOR DE ORDEN 1 RESPECTO A UNA FRACCIÓN EN F_i, SE TIENE QUE DADA CUALQUIER OTRA FUNCIÓN EN LA MISMA CLASE QUEDA DETERMINADO UN PUNTO REPULSOR DE ORDEN 1 RESPECTO A ESTA FRACCIÓN.

SI ζ ES UN PUNTO ATRACTOR DE ORDEN n RESPECTO A $\varphi \in F_i$ SE CONSIDERA $\tilde{\varphi} = \varphi_n$ Y ζ ES UN PUNTO REPULSOR DE ORDEN 1 DE $\tilde{\varphi} \in \hat{F}_{nK}$ Y TODO EL ANÁLISIS VALE PARA LA CLASE QUE REPRESENTA $\tilde{\varphi}$ EN $\hat{F}_{nK}$.

SEA $W \in N_\zeta$, ζ PUNTO REPULSOR DE ORDEN 1 RESPECTO A ψ, ENTONCES $\#(S^2 \setminus \bigcup_{i}^{\infty} W_i)$ PUEDE SER 0, 1 Ó 2.

ES CLARO QUE ESTE NÚMERO DEPENDE DE ψ Y DE W, POR EJEMPLO SI $W = S^2$ CLARAMENTE VALE 0. SIN EMBARGO SE PUEDEN DAR CIERTAS CONDICIONES PARA W DE MANERA QUE TAL VALOR SEA EL MÁXIMO POSIBLE Y SOLO DEPENDA DE ψ. TODAVÍA MAS, SE PROBARÁ QUE BAJO CIERTAS CONDICIONES ESTE NUMERO ES INVARIANTE EN F_i.

CON ESTA PERSPECTIVA LA IDEA ES PODER DETERMINAR A PRIORI UNA VECINDAD DISTINGUIDA W^1 DE ζ, QUE CUMPLA LA SIGUIENTE PROPIEDAD: SI $W^2 \in N_\zeta$ Y $W^2 \subset W^1$, ENTONCES $\#(S^2 \setminus \bigcup_1^\infty W_i^1) = \#(S^2 \setminus \bigcup_1^\infty W_i^2)$.

(4.2) Proposición:

SEA $\varphi \in F_i \subset \mathcal{F}_K$, SUPONGASE QUE ζ ES UN PUNTO REPULSOR DE ORDEN 1 PARA EL CUAL EXISTE $W \in N_\zeta$, TAL QUE, $S^2 \setminus \bigcup_1^\infty W_i = \{r_1, r_2\}$ (EL CASO DE SOLO UN PUNTO ES ANALOGO), ENTONCES $\varphi(r_i) = r_i$ $i = 1,2$ ó $\varphi(r_i) = r_i$ y $\varphi_2(r_i) = r_i$ PARA $i \neq j$ E $i,j = 1,2$

DEMOSTRACIÓN:

SEA $z_0 \in S^2$ tal que $\varphi(z_0) = r_i$, si $z_0 \in \bigcup_1^\infty W_i$, ENTONCES $\varphi(z_0) \in \bigcup_1^\infty W_i$. $z_0 \notin \bigcup_1^\infty W_i$ POR LO TANTO $z_0 = r_i$ ó $z_0 = r_j$ $j \neq i$.

Si $z_0 = r_i$ ENTONCES $\varphi(r_i) = r_i$ PARA $i = 1,2$

Si $z_0 = r_j$ ENTONCES $\varphi(r_j) = r_i$ PERO $\varphi: S^2 \to S^2$ ES SUPRAYECTIVA, $\exists z \in S^2$ tal que $\varphi(z) = r_j$ PERO $z \neq r_j$ y $z \notin \bigcup_1^\infty W$, POR LO TANTO $z = r_i$, $\varphi(r_i = r_j$, ASÍ $\varphi_2(r_i) = r_i$ $i \in 1,2$ +

4.3 COROLARIO:

CON EL ENUNCIADO DE LA PROPOSICIÓN ANTERIOR $\varphi(r_i) = r_i$ $i = 1,2$ ó $\varphi_2(r_i) = r_i$ $i \neq 1,2$

4.4 COROLARIO:

CON LAS HIPÓTESIS DE LA PROPOSICIÓN ANTERIOR SI $S^2 \setminus \bigcup_1^\infty W_i = \{r\}$ ENTONCES $\varphi(r) = r$.

VOLVIENDO A LA DISCUSIÓN ANTERIOR, YA SE PUEDE DETERMINAR UNA VECINDAD DISTINGUIDA W^1 Y DE HECHO TODA UNA BASE LOCAL DE VECINDADES DE ζ QUE SATISFAGA LA PROPIEDAD DESEADA.

Los puntos fijos de ψ y de ψ_2 son un número finito. Por lo tanto existe $W' \in N_z$ tal que $\psi(z) \neq z$ $\wedge$ $\psi_2(z) \neq z$, para toda $z \in W' \setminus \{z\}$

Afirmación:

Si $\psi \in F_i$, z es punto repulsor de orden 1 y W' satisface las propiedades enunciadas en el renglón anterior, entonces si $W \in N_z$ y $W \subset W'$ se tiene que $\bigcup_{i}^{\infty} W_i = \bigcup_{i}^{\infty} W_i'$

Demostración:

Como $W \subset W'$, entonces $\bigcup_{i}^{\infty} W_i \subset \bigcup_{i}^{\infty} W_i'$

Sea $r \in S^2 \setminus \bigcup_{i}^{\infty} W_i$, $\psi(r) = r$ ó $\psi_2(r) = r$ así $r \notin W'$ por tanto $W' \subset \bigcup_{i}^{\infty} W'$ entonces $W_j' \subset \bigcup_{i}^{\infty} W_i$, para toda $j \in \mathbb{N}$, así $\bigcup_{i}^{\infty} W_i' \subset \bigcup_{i}^{\infty} W_i$

$+$

Por la afirmación anterior cualquier vecindad contenida en una vecindad distinguida tiene la propiedad deseada, así existe una base de vecindades que pueden ser consideradas vecindades distinguidas.

Dado $\psi \in F_i$ y z un punto repulsor de orden 1, queda determinado ψ_0.

Definición:

1) $A\psi_0 = \bigcup_{i}^{\infty} V_i'$ donde V' es una vecindad distinguida de 0 respecto a ψ_0.

2) Si $\psi \neq \psi_0$ sea $A_{\psi}^{H} = \bigcup_{i}^{\infty} W_i'$ donde W' es vecindad distinguida de $H(0)$ respecto a ψ y H es la homografía, tal que $H^{-1}\psi H = \psi_0$.

5.1 lema.

SEA ζ EL PUNTO REPULSOR DE ORDEN 1 RESPECTO A ψ Y SEA H LA HOMOGRAFÍA QUE SATISFACE $\varphi_0 = H^{-1}\psi H$, ENTONCES $r \in S^2 \setminus A\varphi_0 \iff H(r) \in S^2 \setminus A_\psi^H$

SEAN $V' \in N_0$ Y $W' \in N_\zeta$ LAS VECINDADES DISTINGUIDAS QUE DEFINEN $A\varphi_0$ Y $A\psi$ RESPECTIVAMENTE, SE PUEDE SUPONER QUE $W' \subset H(V')$ POR LA AFIRMACIÓN ANTERIOR

SI $z \in A\psi$ ENTONCES $\exists z_0 \in W'$ TAL QUE $\psi_n(z_0) = z$, ENTONCES $H(\varphi_0)_n H^{-1}(z_0) = z$, ENTONCES $(\varphi_0)_n H^{-1}(z_0) = H(z)$ PERO $H^{-1}(z_0) \in V'$, POR LO TANTO $H(z) \in A\varphi_0$

SE PUEDE SUPONER QUE $H^{-1}(W') \supset V'$ MAS AUN SI $z \in A\varphi_0$ ENTONCES EXISTE $z_0 \in V_1$, TAL QUE $(\varphi_0)_i(z_0) = z$ SIN EMBARGO SE PUEDE ENCONTRAR $z_1 \in V'$ TAL QUE $(\varphi_0)_n(z_1) = z$ PARA $n \in \mathbb{N}$
$z = (\varphi_0)_n(z_1) = H^{-1}\psi_n H(z_1)$ ENTONCES $H(z) = \psi_n(H(z_n))$
PERO $H(z_1) \in W'$, POR LO TANTO, $H(z) \in A_\psi^H$ +

5. PROPOSICIÓN:

SEA $\varphi \in F_i$ Y ζ UN PUNTO REPULSOR DE ORDEN 1, ENTONCES PARA TODA $\psi \in F_i$, SI H ES UNA HOMOGRAFÍA TAL QUE $\varphi_0 = H^{-1}\psi H$ ENTONCES $\#(S^2 \setminus A_\psi^H) = \#(S^2 \setminus A\varphi_0)$.

LA DEMOSTRACIÓN SE SIGUE DEL LEMA ANTERIOR

NOTA: ESTE NÚMERO DEPENDE SOLO DE LA CLASE

DEFINICIÓN:

$M_i = \#(S^2 \setminus A\varphi_0)$ PARA $\varphi_0 \in F_i$.

PARA CADA F_i, $M_i \leq 2$.

SI $M_i = 2$ PARA TODA $\psi \in F_i$ SE TIENE QUE $S^2 \setminus A_\psi^H = \{r_1^{\psi_H}, r_2^{\psi_H}\}$ DONDE $r_1^{\psi_H}, r_2^{\psi_H} \in S^2$ Y SON DISTINTOS

DEFINICIÓN:

PARA TODA $i \in I$ SI $M_i = 2$ SE ASOCIA A F_i EL CONJUNTO $\{\alpha_1^i, \alpha_2^i\}$, ESTE CONJUNTO REPRESENTARÁ LA CLASE DE EQUIVALENCIA DE LOS CONJUNTOS $\{\gamma_1^{\psi H}, \gamma_2^{\psi H}\}$ PARA TODA $\psi \in F_i$ (DETERMINADA POR LA CARDINALIDAD).

$\{\alpha_1^i, \alpha_2^i\}$ SERA LLAMADO EL CONJUNTO DESCUBIERTO DE F_i Y TENDRÁ SU REPRESENTANTE PARA TODA ψ.

SI $M_i = 1$ SE DEFINE ANALOGAMENTE EL CONJUNTO DES-CUBIERTO DE F_i QUE SOLO TENDRÁ UN ELEMENTO

Lema:

SEAN $\varphi, \psi \in F_i$ Y H UNA homografía TAL QUE $\varphi = H^{-1} \psi H$

SUPONGASE QUE z, $H(z) \neq \infty$ Y φ, ψ SON ANALÍTICAS EN z Y $H(z)$ RESPECTIVAMENTE, ENTONCES $\varphi'(z) = 0 \iff \psi'(H(z)) = 0$

$\varphi'(z) = H^{-1\prime}(\psi H(z))\, \psi'(H(z)) \cdot H'(z)$ SI $z \neq \infty$, ψ ANALÍTICA EN $H(z)$ Y $\psi H(z) \neq \infty$. LO ULTIMO SE TIENE PORQUE ψ ES ANALÍTICA EN $H(z)$, PERO H ES ISOMORFISMO DE $\mathbb{C}$ EN $\mathbb{C}$

ASI $\varphi'(z) = 0 \Rightarrow \psi'(H(z)) = 0$ LA OTRA IMPLICACIÓN SE PRUEBA ANALOGAMENTE.

Proposición:

Sea $\varphi \in Fi$ y ξ un punto repulsor de orden 1 y supongo que el conjunto descubierto de Fi es $\{a_1^i, a_2^i\}$ con cardinalidad 2.

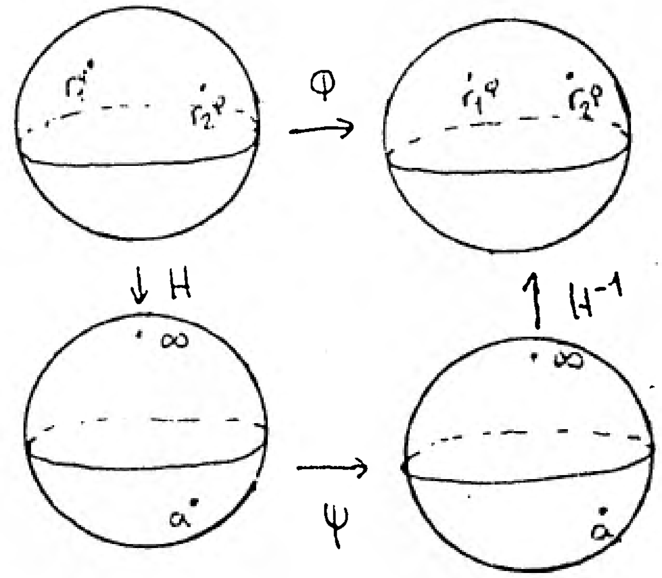
i) si $\varphi(r_i^\varphi) = r_i^\varphi$ $i \in \{1,2\}$.

y $\psi(z) = (z-a)^k + a$ $a \in \mathbb{C}$ entonces $\psi \in Fi$

2) si $\varphi(r_i^\varphi) = r_j^\varphi$ $i \neq j$

y $\psi(z) = \dfrac{1}{(z-a)^k} + a$ $a \in \mathbb{C}$ entonces $\psi \in Fi$

Demostración



1) como $\varphi(r_1^\varphi) = r_1^\varphi$ y $\varphi(r_2^\varphi) = r_2^\varphi$ sea H una homografía tal que $H(r_1^\varphi) = a$ y $H(r_2^\varphi) = \infty$ de hecho esta condición la satisface una familia de homografías como H debe cumplir $\varphi = H^{-1}\psi H$ entonces $\psi(a) = a$ y $\psi(\infty) = \infty$ por tanto el único antecedente de ∞ es ∞ y análogamente sucede para a $\psi(z) = R(z-a)^k + a$ finalmente R es una constante que depende de la familia de homografías que mandan r_1^φ, r_2^φ en a, ∞ respectivamente. Así $\psi(z) = (z-a)^k + a$ la determina una homografía particular la cual es obtenida explícitamente en la siguiente afirmación. Por tanto $\psi \in Fi$ y se prueba 1.

2) Como $\varphi(r_1^\varphi) = r_2^\varphi$ y $\varphi(r_2^\varphi) = r_1^\varphi$ por un razonamiento análogo al anterior, se obtiene que existe una homografía H tal que $H(r_1^\varphi) = a$ y $H(r_2^\varphi) = \infty$ y si $\psi(z) = \dfrac{1}{(z-a)^k} + a$ entonces $\varphi = H^{-1}\psi H$ así $\psi \in Fi$

afirmación.

Sea $\psi(z) = R(z-a)^k + a$ con $0 \neq R \in \mathbb{C}$ y sea $\tilde{\psi}(z) = (z-a)^k + a$
entonces si $\tilde{H}(z) = r(z-a) + a = rz + a(1-r)$ y r es raíz de orden $k-1$ de R
se tiene que $\tilde{H}\psi\tilde{H}^{-1} = \psi$

Demostración.

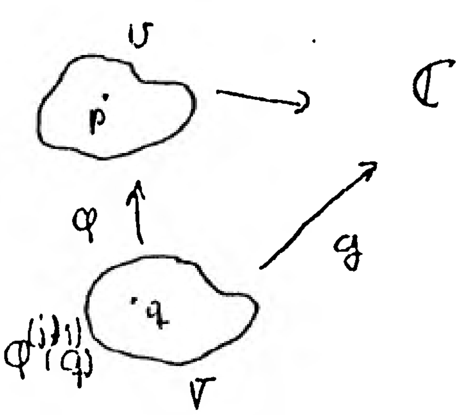
Por definición $\tilde{H}^{-1}(z) = \frac{1}{r}z + \frac{a(r-1)}{r}$

por lo tanto
$$\tilde{H}\psi\tilde{H}^{-1}(z) = \tilde{H}\psi\left(\frac{1}{r}z + \frac{a(r-1)}{r}\right)$$
$$= \tilde{H}\left(R\left(\frac{1}{r}z + \frac{a(r-1)}{r} - a\right)^k + a\right)$$
$$= \tilde{H}\left(R\left(\frac{1}{r}z - \frac{a}{r}\right)^k + a\right)$$
$$= \frac{r.R}{r^k}(z-a)^k + a$$
$$= (z-a)^k + a = \tilde{\psi}(z)$$
+

Lema: Sea $U \subset \mathbb{C}$, $p \in U$ y $f : U \to \mathbb{C}$ función holomorfa
tal que $f^{(i)}(p) = 0$ para $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, $f^{(k)}(p) \neq 0$
y $\varphi : V \to U$ un difeomorfismo holomorfo. Si $g : V \to \mathbb{C}$ es $g = f \circ \varphi$
y $\varphi^{-1}(p) = q$
Entonces $g^{(i)}(q) = 0$ $i \in \{1, \dots, k-1\}$ y $g^{(k)}(q) \neq 0$.

Demostración

$$g'(q) = f'(\varphi(q)) \cdot \varphi'(q)$$
$$g''(q) = f''(\varphi(q))\varphi'(q) + f'(\varphi(q)) \cdot \varphi''(q)$$
$$\vdots$$
$$g^{(j)}(q) = f^{(j)}(\varphi(q))\varphi'(q) + f^{(j-1)}(\varphi(q))\varphi^{(2)}(q) + \cdots$$
$$\cdots + f'(\varphi(q))\varphi^{(j)}(q)$$



$\therefore$ $g^{(k)}(q) = f^{(k)}(p)\varphi'(q) \neq 0$ y $g^{(j)}(q) = 0$ si $0 < j < k$ +.

Lema:

Con las mismas hipotesis de la proposicion anterior si se cumple 1) entonces.

$$\varphi^{(n)}(r_i^{\varphi}) = \begin{cases} 0 & n<k \\ \neq 0 & n=k \end{cases}$$

Demostración:

Parametrizo alrededor de r_1^{φ} con H^{-1}. así $H^{-1}(r_1^{\varphi})=a$ se tiene que en una vecindad V de r_1^{φ} (H^{-1}, V) es una carta coordenada pero $\varphi^{(n)}(z)=0$ si $n<k$ y $\varphi^{(n)}(z)\neq 0$ n $n=k$.
así por el lema anterior se sigue el resultado para r_1^{φ}.
Para r_2^{φ} tambien se tiene el resultado, si en la proposición pasada en vez de que $H(r_1^{\varphi})=a$ tuviera $H(r_2^{\varphi})=a$ y como esto no altera en nada la conclusión, se tiene el resultado. +.

Lema:

Con las hipotesis de la proposicion pasada si se cumple 2) entonces

$$\varphi^{(n)}(r_i^{\varphi}) = \begin{cases} 0 & n<k \\ \neq 0 & n=k \end{cases}$$

Demostración

Por simplicidad en el caso 2 tomo $a=0$ así la definición de $\varphi(z)$, aplico la homografia $\tilde{H}(z)=\frac{1}{z}$ y obtengo una expresion de $\varphi(z)=z^k$. bajo esta expresión $r_1^{\varphi}\mapsto 0$ según su definición así aplicando el argumento del lema anterior obtengo el resultado. para r_1^{φ}. y lo mismo sucede para r_2^{φ}. +

BIBLIOGRAFIA

1. AHLFORS L.V "COMPLEX ANALISIS. 3a EDITION MC GRAW-HILL. 1979.

2. AHLFORS L.V "RIEMANN SURFACES" PRINCETON UNIVERSITY PRESS. 1974

3. CHURCHILL R BROWN, J. VERHEY R "COMPLEX VARIABLES AND APPLICATIONS" 3a EDITION MC GRAW 1974

4. WILLARD. S "GENERAL TOPOLOGY" ADISON-WESLEY PUBLISHING CO. 1970

5. DUGUNDJI, J. "GENERAL TOPOLOGY" ADISON-WESLEY PUBLISHING CO 1976.

6. MASSEY W. "ALGEBRAIC TOPOLOGY" NEW YORK, HARCOURT 1967.