29 2-ejem

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UNICOHERENCIA EN ESPACIOS CONEXOS LOCALMENTE CONEXOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

MARIANA LUISA SAIZ ROLDAN

PRÓLOGO

El objetivo de esta tesis, es el recolectar y presentar en una forma unificada, las principales caracterizaciones de Unicoherencia en la clase de espacios conexos, localmente conexos (hasta la fecha, esta clase de espacios es la más amplia en la cual es posible caracterizar de diferentes maneras no triviales el concepto de unicoherencia).

La parte medular de este trabajo se ubica en el Capítulo II y está basada principalmente, en el artículo [8] de A.H. Stone y en los artículos [2], [3] y [4] de J.H. V. Hunt (el último artículo, fue escrito con E.D. Tymchatyn como coautor). Gran parte de las Demostraciones presentadas aquí, al considerarse que no eran susceptibles de mejorarse, se dieron tal como aparecen en los artículos mencionados antes.

En el capítulo I, se dan los conceptos. básicos acerca de conexidad y se demuestran una serie de resultados que se utilizan en el Capítulo II. Algunas de las demostraciones que se dan en este capítulo, también se presentan tal como aparecen en los artículos de Stone y Hunt, y en el libro [1] de A. García Maynez.

Por último deseo hacer patente mi agradecimiento a mi director de tesis Wilfrido Martínez Torres por la paciencia y el interés que mostró durante la preparación de este trabajo.

Noviembre de 1981.

C O N T E N I D O

CAPITULO I.

RESULTADOS PRELIMINARES SOBRE CONEXIDAD

1. Definición.

Sea (X, τ) un espacio topológico, sean $A, B, D, E \in 2^X$, sean $p, q, \in 2^X$. Decimos que:

a. A y B están *τ-separados*, si:

$A^- \cap B = \phi = A \cap B^-$.

b. $A \cup B$ es una *τ-separación* de D, si:

$A \neq \phi \neq B$, A y B están *τ- separados* y

$D = A \cup B$.

c. D es *τ-conexo*, si:

No existen τ-separaciones de D.

d D es *τ-conexo irreducublemente*, si:

D es τ-conexo, y $D - \{p\}$ no es conexo cuando

$p \in D$.

e. D es τ-*conexo relativo a* E, si:

Para cualquier τ-separación $A \cup B$ de D se cumple que A y E no están τ-separados.

f. A y B están τ-*normalmente separados*, si:

Existen abiertos ajenos U *y* V tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

g. D es τ-***normalmente*** *conexo*, si:

D no se puede expresar como la unión de dos conjuntos no vacíos que estén τ-normalmente separados.

h. C(p) es la τ-***componente*** de p en X y si:

C(p) coincide con la unión de los τ-conexos que contienen a p como elemento. También nos referiremos a las C(p)'s como las τ-componentes de X.

i. X es τ-*localmente conexo*, si:

Existe una base de τ cuyos elementos son τ-conexos.

j. D τ-*separa* a X, si:

X − D no es τ-conexo.

k. D *τ-separa a* p y q, si:

Existe una τ-separación $A \cup B$ de $X - D$ tal que $p \in A$ y $q \in B$.

l. D es *τ-simple,* si:

D y $X - D$ son τ-conexos.

2. <u>Teorema</u>.

a. Si $H, L \in 2^B$, entonces:

H y L están τ-separados $\longleftrightarrow$ H y L están τ_B-separados. (τ_B es la topología relativa de B).

b. Si $A \subset B$, entonces:

A es τ-conexo $\longleftrightarrow$ A es τ_B-conexo.

c. X es conexo si y solamente si los únicos subconjuntos de X abiertos y cerrados a la vez son ϕ y X.

d. C conexo, $C \cap A \neq \phi \neq C \cap (X - A) \longrightarrow C \cap F_r A \neq \phi$.

NOTA:
En el desarrollo del libro omitiremos los prefijos τ-cuando esto no dé lugar a confusión.

e. C conexo, A y B separados, $C \subset A \cup B \rightarrow$ $C \subset A$ ó $C \subset B$.

f. $\{C_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ familia de subconjuntos de X conexos, C conexo, $C \cap C_\alpha \neq \phi \ \forall \alpha \in \Lambda \rightarrow$ $C \cup (\bigcup_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha)$ conexo.

En particular, la unión de conjuntos conexos con intersección no vacía es un conjunto conexo.

g. C conexo, $C \subset C_0 \subset C^- \rightarrow C_0$ conexo.

h. X y N conexos, $X - N = M_1 \cup M_2$ una separación $\rightarrow N \cup M_1$ y $N \cup M_2$ son conexos.

i. X conexo, V abierto con frontera conexa $\rightarrow$ V^- y $X - V$ son conexos.

Demostración.

a. H y L están τ-separados $\leftrightarrow H^- \cap L = \phi = H \cap L^- \leftrightarrow$ $H^- \cap (B \cap L) = \phi = (H \cap B) \cap L^- \leftrightarrow (H^- \cap B) \cap L =$ $= \phi = \ \cap (B \cap L^-) \overset{*}{\leftrightarrow}$ H y L están τ_B-separados.

* Ya que $H^- \cap B$ y $B \cap L^-$ son las τ_B-cerraduras de H y L respectivamente.

b. Tenemos que A no es τ-conexo $\longleftrightarrow$ existe una τ-separación de A $\longleftrightarrow$ existe una τ_B-separación de A $\longleftrightarrow$ A no es τ_B-conexo. Por lo tanto A es τ conexo si y sólo si A es τ_B-conexo.

c. Supongamos que existe $A \neq \phi$ subconjunto propio de X, tal que A es abierto y cerrado en X, entonces $A^- \cap (X-A) = \phi = A \cap (X-A) = A \cap (X-A)^-$ esto implica que $X = A \cup (X-A)$ es una separación de X. ¡Lo cual es una contradicción!

d. Supongamos que $C \cap F_r A = \phi$, entonces:
$C \cap A^- = C \cap (A \cup F_r A) = C \cap A$ y
$C \cap A^- = C \cap (A^\circ \cup F_r A) = C \cap A^\circ$ por lo tanto
$C \cap A = C \cap A^- = C \cap A^\circ$ es un subconjunto propio, no vacío de C, que es τ_C-abierto a la vez. Lo cual contradice el hecho de que C es conexo.

e. Supongamos que $C \cap A \neq \phi \neq C \cap B$, entonces $(C \cap A) \cup (C \cap B)$ es una separación de C ya ya que A y B están separados, contradiciendo el hecho de C es conexo. Por lo tanto $C \subset A$ ó $C \subset B$.

f. Supongamos que $C \cup (\underset{\alpha \in \Lambda}{\cup} C_\alpha) = A \cup B$ con A y B separados, entonces por el inciso anterior $C \subset A$ ó $C \subset B$, supongamos $C \subset A$, análogamente para cada $\alpha \in \Lambda$

$C_\alpha \subset B$ ó $C_\alpha \subset A$, pero como $C \cap C_\alpha \neq \phi$, de donde

$C \cup (\bigcup_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha) \subset A$, pero esto implica que $B = \phi$

y por lo tanto $C \cup (\bigcup_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha)$ es conexo.

g. Supongamos que C_0, no es conexo, esto es que existe una separación $A \cup B$ de C_0, como $C \subset C_0 = A \cup B$ y C es conexo tenemos por el inciso e. que $C \subset A$ ó $C \subset B$, digamos $C \subset A$ esto implica $C_0 \cap B \subset \bar{C} \cap B \subset \bar{A} \cap B = \phi$, de donde $B = \phi$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto C_0 es conexo.

h. Sólo demostraremos que $M_1 \cup N$ es conexo ya que la otra demostración es análoga.

Supongamos entonces que $M_1 \cup N$ no es conexo, esto es, que existe una separación $A \cup B$ de $M_1 \cup N$. Por ser N conexo tenemos que $N \subset A$ ó $N \subset B$, digamos $N \subset A$, esto implica que $N \cap B = \phi$ y por lo tanto $B \subset M_1$. Observemos que $X = M_2 \cup A \cup B$ ya que: $x \notin A \cup B \rightarrow x \notin M_1 \cup N \rightarrow x \notin M_1$ y $x \notin N \rightarrow x \in X-N$ y $x \notin M_1 \rightarrow x \in M_2$. Además M_2 y B están separados ya que $M_2 \cap \bar{B} \subset M_2 \cap M_1 = \phi$. De aquí $X = (M_2 \cup A) \cup B$ es una separación de X. ¡Pero esto contradice el hecho de que X es conexo! Luego $M_1 \cup N$ debe ser conexo.

i. Si $V = \phi$ ó $V^- = X$ entonces la afirmación es trivial, si $V \neq \phi$ y $V^- \neq X$, haciendo $N = FrV$, $M_1 = V$ y $M_2 = X - V^-$ tenemos que $X - N = M_1 \cup M_2$ con M_1 y M_2 separadas, luego por h, $M_1 \cup N = V^-$ es conexo lo mismo que $M_2 \cup N = X - V$.

3. Teorema.

a. Cada componente $C(p)$ en X es un conexo maximal en X, es decir, es un conexo que no está contenido propiamente en ningún otro conexo de X.

b. El conjunto de todas las componentes distintas de X forma una partición de X.

c. Cada componente $C(p)$ en X es cerrada.

Demostración:

a. Es inmediato de 1.h. y 2.f.

b. Es claro que la unión de los elementos de dicho conjunto es X, además cada $C(q)$ es no vacía ($q \in C(q)$), y si $C(p) \cap C(q) \neq \phi$ entonces por 2.f. tenemos que $C(p) \cup C(q)$ es un conexo que contiene a $C(p)$ y a $C(q)$, y de a. obtenemos: $C(p) = C(p) \cup C(q)$, es decir los elementos de la familia son disjuntos entre sí, por lo cual, efectivamente forma una partición.

c. Por 2.g. $(C(p))^-$ es conexa, y entonces por a. tenemos que $C(p) = (C(p))^-$.

4. <u>Proposición</u>.

X y S conexos, C componente de $X - S \rightarrow C$ simple.

<u>Demostración</u>.

Es obvio que C es conexo, falta demostrar que $X - C$ también lo es, supongamos que existen conjuntos separados H y K tales que:

$$X - C = H \cup K \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Como H y K están separados, existe un conjunto abierto G tal que $H \subset G$ y $G^- \cap K = \phi$ de donde:

$$(G^- - G) \cap (H \cup K) = \phi \ldots\ldots (2)$$

Sea $b \in H$ y M la componente de b en G . Si suponemos que $K \neq \phi$ entonces $G \neq X$ y $K^- - G \neq \phi$.

Sea $p \in M^- - G$, entonces por (1) y (2)

$$p \in G^- - G \subset X - (H \cup K) = C$$

Por tanto existe un continuo P tal que $p \in P \subset C$.

Como $b, p \in M^-$ el conjunto $M^- \cup P$ es un continuo que contiene a b,p de donde $M^- \cup P = X$ y $K \subset M^- \cup P$.

Como $K \subset G$ se tiene $K \cap M^- \subset K \cap G^- = \phi$ por (2) y como $P \subset C$ se tiene $K \cap P \subset K \subset C$. Por (1) tenemos $K = \phi$.

5. Teorema.

X es localmente conexo si y solamente si las componentes de los conjuntos abiertos de X son abiertas.

Demostración.

Sea U un abierto de X y C componente de U, si $x \in C \subset U$, tenemos que existe un abierto conexo W tal que $x \in W \subset U$, pero como W es conexo tenemos por 3.a. que $W \subset C$ y por tanto que C es abierta.

Supongamos ahora que las componentes de cada abierto de X son todas abiertas. Demostraremos que $\beta = \{0 \in \tau / 0$ es conexo$\}$ es una base de τ, para esto sea $x \in X$ y U un abierto tal que $x \in U$, entonces la componente W de U que contiene a x es abierta y conexa, por lo tanto es un elemento de β que contiene a x como elemento y que está contenida en U, luego β es una base de τ y por lo tanto X es localmente conexo.

6. Teorema.

Si X es localmente conexo, entonces:

a. X conexo, C cerrado, $\phi \neq C \neq X$, R componente de $X - C \rightarrow \phi \neq \text{Fr } R \subset C$.

b. $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset 2^X \rightarrow \text{Fr}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \subset (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \text{Fr } A_\lambda)^-$

c. X y C conexos, C cerrado. $\{C_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \in 2^X$ tal que cada C_λ es una componente de $X - C \rightarrow$ $C \cup (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda)$ es cerrado y conexo.

d. C componente de $A \rightarrow \text{Fr } C \subset \text{Fr } A$.

Demostración.

a. Como $X - C$ es abierto si $\text{Fr } R = \phi$ entonces R sería a la vez un abierto y cerrado propio no vacío de X. Lo cual es una contradicción pues X es conexo. Entonces $\text{Fr } R$ es no vacío. Si existiera x en $(X - C) \cap \text{Fr } R$, entonces $R \cup \{x\}$ sería conexo en $X - C$ pero como R es componente esto es una contradicción. Por lo tanto $(X - C) \cap \text{Fr } R = \phi$ y esto implica que $\text{Fr } R \subset C$.

b. Supongamos que exista $p \in \text{Fr}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A) - \overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \text{Fr } A}$, por ser X localmente conexo existe un abierto E que contiene a p, por lo tanto p está en $E \cap \text{Fr}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A)$ y esto implica que $E \cap_{\lambda \in \Lambda} (\cup A_\lambda) \neq \phi \neq$ $E - (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)$, y por lo tanto existe $\lambda \in \Lambda$ tal que

$E \cap A_\lambda \neq \phi \neq E - A_\lambda$, entonces por 2.d. al ser E conexo tenemos que $E \cap Fr\, A_\lambda \neq \phi$, pero esto contradice que $E \subset X - \overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} Fr\, A} \subset X - \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Fr\, A_\lambda$.

Luego $Fr(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A) \subset \{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} Fr\, A_\lambda\}^-$.

c. Por a. tenemos que $C \cap C_\lambda^- \neq \phi$ para todo $\lambda \in \Lambda$ luego $C \cup (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} C)$ es conexo, además $Fr\, C_\lambda \subset C$ para toda λ y por b. $Fr \bigcup_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda \subset \overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} Fr\, C_\lambda} \subset C^- = C$ por lo tanto $\overline{(C \cup (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} C))} = C^- \cup \overline{(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda)} =$ $= C \cup (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda) = Fr\, (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda) = C \cup (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda)$ y por lo tanto $C \cup (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda)$ es cerrado.

d. Supongamos que $Fr\, C$ no está contenida en $Fr\, A$, esto es, que existe $p \in Fr\, C - Fr\, A$ como $Fr\, C \subset C^-$ $\subset A^- = A^\circ \cup Fr\, A$ obtenemos entonces que $p \in A^\circ$. Sea L la componente de A° que contiene a p, entonces por 3.a. tenemos que $L \subset C$, y de 5. se sigue que L es abierta, luego $p \in L \subset C^\circ$. Lo cual es una contradicción ya que $p \in Fr\, C$.

7. <u>Observación</u>.

a. Si toda componente de A intersecta a B, entonces A es conexo relativo a B.

b. Si A es conexo relativo a B y $B \subset C$, entonces A es conexo relativo a C.

Demostración.

a. Sea $H \cup L$ una separación cualquiera de A, entonces existe alguna componente K de A que está totalmente contenida en H (por 2.e.), y como $\phi \neq K \cap B \subset H \cap B$ tenemos que H y B no están separados. Luego A es conexo relativo a B.

b. Es obvio.

8. **Teorema.**

Sea X conexo.

a. A es normalmente conexo si y solamente si: $A \cap S \neq \phi \neq A \cap (X - S) \rightarrow A \cap Fr\, S \neq \phi$.

b. Si además X es localmente conexo, entonces A es normalmente conexo si y solamente si: $U \in \tau$, $A \subset U \rightarrow \exists\, B$ conexo tal que $A \subset B \subset U$.

Demostración.

a. Supongamos que A es normalmente conexo y que existe S tal que $A \cap S \neq \phi \neq A \cap (X - S)$ y $A \cap Fr\, S = \phi$, entonces como

$X = S^\circ \cup Fr\ S \cup (X - S)^\circ$, tenemos que $A =$ $= (A \cap S^\circ) \cup (A \cap Fr\ S) \cup (A \cap (X-S)^\circ) =$ $(A \cap S^\circ) \cup (A \cap (X-S)^\circ)$ además $A \cap S^\circ \neq \phi$ ya que $\phi \neq A \cap S \subset A \cap S^- = (A \cap S^\circ) \cup$ $\cup (A \cap Fr\ S) = A \cap S^\circ$ y procediendo de la misma manera obtenemos que: $A \cap (X - S)^\circ \neq \phi$ luego A no es normalmente conexo. Lo cual es una contradicción.

Supongamos ahora que $A \cap S \neq \phi \neq A \cap C_0\ S$ implica que $A \cap Fr\ S \neq \phi$ y que A no es normalmente conexo, esto es, que existen H, K distintos del vacío y normalmente separados tales que $A = H \cup K$. Como H y K están normalmente separados existen U, V abiertos ajenos tales que $H \subset U$ y $K \subset V$ así que $A \subset U \cup V$, entonces $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$ y $A \cap Fr\ U =$ $= \phi$ ya que U es abierto y por lo tanto $Fr\ U \subset X - U$, además $U \subset X - V$ y como V es abierto $X - V$ es cerrado luego $U^- \subset X - V$ esto es $Fr\ U \subset X - V$ y como $A \subset U \cup V$, A no puede intersectar a Fr U. Pero esto es una contradicción ya que $A \cap U = H \neq \phi \neq K = A \cap V =$ $= A \cap (X - U)$.

b. Supongamos que A es normalmente conexo. Sea U un abierto que contiene a A, sea H una componente de U que intersecte a A, sea L la unión de las componentes de U diferentes de H que intersectan a A, como el espacio es localmente conexo, por 5. tenemos que H y L son abiertos, entonces $A = (A \cap H) \cup (A \cap L)$, $A \cap H$ y $A \cap L$ están normalmente separados y $A \cap H \neq \phi$, luego puesto que A es normalmente conexo tenemos que $L = \phi$. Por lo tanto $A \subset H \subset U$.

Ahora, supongamos que para cada abierto U que contenga a A existe un conexo B tal que $A \subset B \subset U$.

El conjunto vacío es obviamente normalmente conexo, así que podemos suponer que $A \neq \phi$, sean H y L normalmente separados, tales que $A = H \cup L$ y $H \neq \phi$, entonces existen abierto U y V tales que $H \subset U$, $L \subset V$ y $U \cap V = \phi$. Como $A \subset U \cup V$, existe un conexo B tal que $A \subset B \subset U \cup V$, y como U y V están separados, tenemos entonces que $B \subset U$ (ya que $\phi \neq H \subset B$ y $H \subset U$), por lo tanto $L = \phi$ ya que $L \subset A \cap V = \phi$. Luego A es normalmente conexo.

9. Lema.

Si A y B están separados, P y Q están separados, y $X - (A \cup B) = P \cup Q$, entonces:

$M = Q^- \cap A^- \subset Q \cup A$, $N = P^- \cap B^- \subset P \cup B$, $M \cap N = \phi$, y toda componente de $X - M \cup N$ está contenida en $P \cup A$ ó en $Q \cup B$.

Demostración.

Por definición M y N son cerrados, para demostrar que son ajenos observemos que $A^- \cap B = \phi = A \cap B^- \rightarrow (A^- \cap B^-) \cap (A \cup B) = (A^- \cap B^- \cap A) \cup (A^- \cap B^- \cap A) \subset (B^- \cap A) \cup (A^- \cap B) = \phi \rightarrow A^- \cap B^- \subset C_0(A \cup B) = P \cup Q$, análogamente $P^- \cap Q^- \subset A \cup B$.

Entonces:

$M \cap N = (A^- \cap A) \cap (P^- \cap B^-) = (P^- \cap Q^-) \cap (A^- \cap B^-) \subset (A \cup B) \cap (P \cup Q) = \phi$ i.e. M y N son ajenos.

Dado que $A^- \cap B = \phi = P \cap Q^-$

$$M \cap B = (Q^- \cap A^-) \cap B = Q^- \cap (A^- \cap B) = \phi$$

$$M \cap P = (Q^- \cap A^-) \cap P = A^- \cap (Q^- \cap P) = \phi$$

tenemos que $M \subset C_0(P \cup B) = Q \cup A$; análogamente $N \subset P \cup B$.

Ahora, sea C una componente arbitraria de $X - M \cup N$, dado que $P^- \cap Q^- \subset A \cup B$, $P^- \cap Q^- \subset (A^- \cup B^-) \cap (P^- \cup Q^-) = (A^- \cap P^- \cap Q^-) \cup (B^- \cap P^- \cap Q^-) \subset (Q^- \cap A^-) \cup (B^- \cap P^-)$.

Similarmente tenemos que:

$A^- \cap B^- \subset P \cup Q \rightarrow A^- \cap B^- \subset (P^- \cup Q^-) \cap (A^- \cup B^-) =$

$= (P^- \cap A^- \cap B^-) \cup (Q^- \cap A^- \cap B^-) \subset (P^- \cap B^-) \cup$
$(Q^- \cap A^-)$

de donde:

$(Q^- \cup B^-) \cap (P^- \cup A^-) =)P^- \cap Q^-) \cup (Q^- \cap A^-) \cup$
$(P^- \cap B^-) \cup (A^- \cap B^-) = (P^- \cap B^-) \cup (Q^- \cap A^-) =$
$M \cup N.$

Por lo tanto:

$X - (M \cup N) = X - [(Q^- \cup B^-) \cap (P^- \cup A^-)] =$

$[X - (Q^- \cup B^-)] \cup [(X - (P^- \cup A^-)]$

que son dos abiertos ajenos, entonces por 1.2.3)

$C \subset X - Q^- \cup B^-$ ó $C \subset X - P^- \cup A^-$

pero

$X - Q^- \cup B^- = (X - Q^-) \cap (X - B^-) \subset P \cup A$ y
$X - P^- \cup A^- = (X - P^-) \cap (X - A^-) \subset Q \cup B$

así que:

$C \subset P \cup A$ ó $C \subset Q \cup B.$

CAPITULO II

UNICOHERENCIA

Introducción.

En un artículo de K. Kuratowki (7) publicado en 1929, aparece definido el término unicoherencia y se utiliza para dar una caracterización topológica de una esfera, en este mismo artículo Kuratowski menciona que L. Victoris se refería ya a esta propiedad, en un artículo aparecido en 1926, como continua "ohne Henkel". Kuratowski mismo había ya utilizado esta propiedad en otro artículo (6) pero sin definirla explícitamente. De aquí se siguen muchos otros artículos de diferentes autores donde surgen nuevos resultados y aplicaciones de este concepto. De algunas de estas investigaciones hemos tomado las caracterizaciones que presentamos en este capítulo.

1. Definición.

Sea (X, τ) un espacio topológico conexo. Decimos que:

i. (X, τ) es *unicoherente*, si:

A y B cerrados conexos, $X = A \cup B \rightarrow A \cap B$ conexo.

ii. (X, τ) es *abierto-unicoherente*, si:

A y B abiertos conexos, $X = A \cup B \rightarrow A \cap B$ conexo.

2. Observación.

Puesto que dos conjuntos cubren al espacio si y solamente si la intersección de sus complementos es vacía, y dos conjuntos abiertos (o cerrados) tienen intersección vacía si y solamente si están separados, tenemos que:

i. A y B cerrados conexos, $X = A \cup B \longleftrightarrow A$ y B cerrados conexos, $X - A$ y $X - B$ separados.

ii. A y B abiertos conexos, $X = A \cup B \longleftrightarrow A$ y B abiertos conexos, $X - A$ y $X - B$ separados.

Por lo tanto podemos redactar las definiciones anteriores de esta otra manera:

i'. X es *unicoherente*, si:

A y B cerrados conexos, $X - A$ y $X - B$ separados $\rightarrow A \cap B$ conexo.

ii'. X es *abierto-unicoherente*, si:

A y B abiertos conexos, X − A y X − B separados → $A \cap B$ conexo.

3. Nota.

A partir de aquí, y hasta el final del libro (X,τ) o simplemente X nos representará un espacio topológico conexo y localmente conexo (en algunas ocasiones redundaremos sobre este hecho).

A continuación damos la lista de caracterizaciones.

4. Resumen de Caracterizaciones.

Sea X un espacio topológico conexo y localmente conexo. Las siguientes propiedades son equivalentes:

a. X es unicoherente, es decir:

A y B cerrados conexos, X − A y X − B separados → $A \cap B$ conexo.

a'. X es abierto-unicoherente, es decir: A y B abiertos conexos, X − A y X − B separados → $A \cap B$ conexo.

a". A y B, X − A y X − B separados → $A \cap B$ conexo.

b. A y B conexos ajenos, $Fr\ A \subset Fr\ B \rightarrow Fr\ A$ conexo.

c. A cerrado y simple $\rightarrow$ Fr A conexo.

c'. A abierto y simple $\rightarrow$ Fr A conexo.

c". A simple $\rightarrow$ Fr A conexo.

d. A cerrado conexo, C componente de $X - A \rightarrow$ Fr C conexo.

e. A abierto conexo, C componente de $X - \bar{A} \rightarrow$ Fr C conexo.

f. A cerrado, R región, $A \subset R$, A separa a a y b en $R \rightarrow$ A separa a a y b en X.

g. A cerrado, C_1 y C_2 componentes distintas de $X - A$, $F = Fr\ C_1 = Fr\ C_2 \rightarrow$ F conexo.

h. A y B regiones, $A \cap B = \phi$, $F = Fr\ A = Fr\ B$ $\rightarrow$ F conexo.

i. A y B regiones, $Fr\ A \cap Fr\ B = \phi \rightarrow A \cap B$ conexo.

j. A y B cerrados ajenos, $A \cup B$ separa a a y b $\rightarrow$ A ó B separa a a y b.

j'. A y B abiertos ajenos, $A \cup B$ separa a a y b $\rightarrow$ A ó B separa a a y b.

j". A y B separados, $A \cup B$ separa a **a** y **b** $\rightarrow$ A ó B separa a **a** y **b**.

k. A y B cerrados ajenos, $A \cup B$ separa a X $\rightarrow$ A ó B separa a X.

k'. A y B abiertos ajenos, $A \cup B$ separa a X $\rightarrow$ A ó B separa a X.

k". A y B separados, $A \cup B$ separa a X $\rightarrow$ A ó B separa a X.

l. A cerrado que separa irreduciblemente a **a** y **b** $\rightarrow$ A conexo.

m. A cerrado que separa a **a** y **b** $\rightarrow$ Existe C componente de A que separa a **a** y **b**.

m'. A abierto que separa a **a** y **b** $\rightarrow$ Existe C componente de A que separa a **a** y **b**

m". A separa a **a** y **b** $\rightarrow$ Existe C componente de A que los separa.

n. A cerrado que separa a X $\rightarrow$ Existe C componente de A que separa a X.

n'. A abierto que separa a X $\rightarrow$ Existe C componente de A que separa a X.

n". A separa a X $\rightarrow$ Existe C componente de A que separa a X.

La demostración de 4 está dividida en cuatro teoremas que se prueban a continuación:

5. Teorema.

Las siguientes propiedades son equivalentes:

a, b, c", c, c', d, e, f, g, h, i, j, l, m.

Demostraremos que cada propiedad (salvo m) implica la siguiente, y que m implica a.

$$a \longrightarrow b.$$

Supongamos que A y B son conjuntos conexos tales que

$$A \cap B = \phi \neq \mathrm{Fr}\, A \subset \mathrm{Fr}\, B.$$

Sea $\{E_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ el conjunto de componentes de $X - (A \cup B)$; por I.6.d. tenemos que:

$\phi \neq \mathrm{Fr}\, E_\lambda \subset \mathrm{Fr}\, (X - (A \cup B)) = \mathrm{Fr}\, (A \cup B) \subset \mathrm{Fr}\, A \cup \mathrm{Fr}\, B = \mathrm{Fr}\, B$ y por lo tanto que $E_\lambda \cap B^- \neq \phi$ $\lambda \in \Lambda$.

Lo cual implica por I.2.f que $D = B^- \cup (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} E^-_\lambda)$ es conexo. Además, como:

$X - A = B \cup (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda) \subset D = B^- \cup (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} E^-_\lambda) \subset X - A^\circ = (X - A)^-$, tenemos que $D^- = (X - A)^-$. Así, A^- y

$(X - A)^-$ son cerrados conexos que cubren el espacio, y por lo tanto a. implica que Fr A = $A^- \cap$ $(X - A)^-$ es conexo.

b $\rightarrow$ c".

Si A es un conjunto simple, tenemos que A y X - A son conexos ajenos tales que Fr A = Fr (X - A), por lo tanto b implica que Fr A es conexo.

c" $\longrightarrow$ c.

Obviamente, si para cada conjunto simple se tiene que su frontera es conexa, en particular se tiene esto mismo cuando el conjunto simple es cerrado.

c $\longrightarrow$ c'.

Supongamos que A es abierto simple, entonces X - A es cerrado simple y por c. tenemos que Fr A = = Fr (X - A) es conexo.

c' $\longrightarrow$ d.

Supongamos que A es cerrado conexo, y que C es una componente de X - A. Entonces por I.4. tenemos que C es simple, y por I.5. tenemos que C es abierto (pues X - A lo es), por lo tanto c' implica que Fr C es conexo.

$d \longrightarrow e$

Si A es abierto conexo, entonces A^- es cerrado conexo, y por lo tanto d implica que cualquier componente de $X - A^-$ tiene frontera conexa.

$e \longrightarrow f$

Supongamos que: A es cerrado, R es una región, $A \subset R$, A separa a a y b en R, A no separa a a y b en X. Haremos ver que estas suposiciones nos llevan a una contradicción.

Como A no separa a a y b en X tenemos por I.5. que a y b están en la misma componente Q de $X - A$. Sea $F = Fr\ R$, como R es abierto tenemos que $X - F = R \cup (X - R^-)$ observemos ahora que $A \cup F$ separa a a y b puesto que si $D \cup E = R - A$ es una separación entre a y b, tenemos que $X - (A \cup F) = (X - F) - A = (R - A) \cup (X - R^-) = D \cup (E \cup (X - R^-))$. Es una separación entre a y b ya que D y $E \cup (X - R^-)$ son abiertos ajenos. Sea C_a la componente de $X - (A \cup F)$ que contiene a a, y sea C_b la componente de $X - C_a^-$ que contiene a b, por I.5. C_a y C_b son abiertos y entonces la propiedad e nos implica que $H = Fr\ C_b$ es conexo, además $H \subset Fr(X - C_a) =$

$Fr\ C_a \subset Fr\ (X - (A \cup F)) \subset A \cup F$ y H separa a a y b en X, sin embargo, como $a, b \in Q$ conexo en $X - A$ tenemos que $H \cap F \neq \phi$, y como $a, b \in R$ conexo en $X - F$ tenemos que $H \cap A \neq \phi$, por lo tanto $(H \cap A) \cup (H \cap F)$ es una separación de H lo cual es una contradicción.

$$f \longrightarrow g$$

Supongamos que A es cerrado, y que C_1 y C_2 son componentes distintas de $X - A$ que tienen la misma frontera F, pero que $F = H \cup L$ con H y L cerrados ajenos no vacíos, es decir que F no es conexo. Observemos que $C_1 \cup L \cup C_2$ es conexo; tomemos algún $a \in C_1$ y algún $b \in C_2$, y sea R la componente de $X - H$ que contiene a $C_1 \cup L \cup C_2$, entonces por I.5. tenemos que R es una región en donde L separa a a y b (pues $R - L \subset X - F$), por lo cual f implica que L separa a a y b en X, lo cual es una contradicción al hecho de que $C_1 \cup H \cup C_2$ es un conexo en $X - L$ que contiene a a y b.

$$g \longrightarrow h.$$

Supongamos que A y B son regiones ajenas que tienen la misma frontera F. Observemos que A y B son componentes de $X - (X - (A \cup B))$ y $X - (A \cup B)$

es cerrado, por lo cual g implica que F es conexo.

$h \longrightarrow i$

Supongamos que A y B son regiones con fronteras ajenas, tales que $A \cap B$ no es conexo. Sean C y D componentes distintas de $A \cap B$, por I.5. son abiertos ajenos y por lo tanto $D \subset X - C^-$, sea E la componente de $X - C^-$ que contiene a D, nuevamente por I. 5. tenemos que E es un abierto ajeno a C^- y por lo tanto $C \subset X - E^-$, sea G la componente de $X - E^-$ que contiene a C, tenemos que E y G son abiertos conexos ajenos con la misma frontera ya que: $Fr\, G \subset Fr(X - E^-) - E = Fr(E^-) - E \subset E^- - E = Fr\, E$, y $Fr\, E \subset Fr(X - C^-) - G = Fr(C^-) - G \subset C^- - G \subset G^- - G = Fr\, G$. Entonces la propiedad h implica que $F = Fr\, E = Fr\, G$ es conexo, pero esto no puede suceder ya que $F = Fr(E) \subset Fr\, C \subset Fr(A \cap B) \subset Fr\, A \cup Fr\, B$, y como $Fr\, A$ y $Fr\, B$ cerrados ajenos F deberá ser subconjunto de uno de ellos, digamos de $Fr\, A$, por otro lado como $A \cap E \supset D \neq \phi$ y $A \cap (X - E) \supset A \quad (X - E^-) \supset A \cap G \supset C \neq \phi$ tenemos que $A \cap Fr\,(E) \neq \phi$, y por lo tanto $A \cap Fr(A) \neq \phi$. Lo cual es una contradicción.

$i \longrightarrow j$

Supongamos que A y B son cerrados ajenos, y que a y b son tales que $A \cup B$ los separa, pero que ni A ni B los separan. Por I.5. tenemos entonces que a y b están en la misma componente de P de $X - A$, y en la misma componente Q de $X - B$, resultando así que P y Q son regiones cuyas fronteras por 6.d. son subconjuntos de $Fr\ (X - A) \subset A$ y de $Fr\ (X - B) \subset B$ respectivamente y por lo que $P \cap Q$ es conexo y contiene a a y b, además $P \cap Q \subset (X - A) \cap (X - B) = X - (A \cup B)$, y por lo tanto $A \cup B$ no separa a a y b, lo cual es una contradicción.

$j \longrightarrow l$

Supongamos que A es un cerrado que separa irreduciblemente a a y b, pero que A no es conexo, es decir que existen P y Q cerrados ajenos no vacíos cuya unión es A. Como $P \cup Q = A$ separa a a y b, j implica que P ó Q separa a a y b, lo cual nos indica que un cerrado contenido propiamente en A separa a a y b, y por lo tanto que A no separa irreduciblemente a a y b, que es una contradicción.

$l \longrightarrow m.$

Sea A un cerrado que separa a a y b, sean B y D

las componentes de $X - A$ que contienen a **a** y **b** respectivamente y por I.5 B y D son abiertos ajenos, luego $D \subset X - B^{-}$, sea E la componente de $X - B^{-}$ que contiene a D, nuevamente **E** es un abierto ajeno a B, sea G la componente de $X - E^{-}$ que contiene a B, entonces Fr G separa a **a** y **b** (ya que $a \in B \subset G$ y $b \in D \subset E \subset X - G^{-}$), además $\mathrm{Fr}\, G \subset \mathrm{Fr}\, E \subset \mathrm{Fr}\, B \subset \mathrm{Fr}\, (X - A) = \mathrm{Fr}\, A$ por lo tanto, si $x \in \mathrm{Fr}\, E$ tenemos que $G \cup \{x\} \cup E$ es conexo y contiene a **a** y **b**, por lo cual ningún subconjunto propio de Fr G separa a **a** y **b**, es decir Fr G separa irreduciblemente a **a** y **b**, y entonces **l** implica que Fr G es conexo y como $\mathrm{Fr}\, G \subset A$ tenemos que Fr G es subconjunto de alguna componente de H de A, la cual obviamente, separa a **a** y **b**.

$$m \longrightarrow a$$

Supongamos que X no es unicoherente, es decir, que existen cerrados conexos A y B cuya unión es X, y tales que $A \cap B = H \cup K$ con H y K cerrados no vacíos ajenos entre sí.

En primer lugar, observamos que debe existir una componente D de $X - A$ tal que $\mathrm{Fr}\, D \cap H \neq \phi$ y $\mathrm{Fr}\, D \cap K \neq \phi$, ya que en el caso contrario tenemos que cada componente C de $X - A$ tiene su frontera conte nida en H o en K (por I.6.d. $Fr\ C \subset Fr\ A \subset H \cup K$), y así los conjuntos: $H_* = H \cup (\cup \{C | C$ es componente de $X - A$, $Fr\ C \subset H\}$, $K_* = K \cup (\cup \{C|C$ es componente de $X - A$, $Fr\ C \subset K\}$.

Son tales que:

$$B = (A \cap B) \cup (X - A) = (H \cup K) \cup (X - A) = H_* \cup K_*$$

H_* y K_* son no vacíos, y además $Fr(H_*) \subset Fr\ H \cup (\cup \{Fr\ C | C$ es componente de $X - A$, $Fr\ C \subset H\}) \subset H \subset H_*$, es decir H_* es cerrado, procediendo de la misma forma obtenemos que K_* también es, contradiciendo el hecho de que B es conexo.

Ahora, por I.4. tenemos que $X - D$ es conexo, y procediendo de la misma forma que en el párrafo anterior, tomando: $H \cap Fr\ D$ en lugar de H, $K \cap Fr\ D$ en lugar de K y D^- en lugar de A obtenemos una componente E de $X - D^-$ tal que $Fr\ E \cap H \neq 0$ y $Fr\ E \cap K \neq \phi$ (por I.6.d. $Fr E \subset Fr(D^-) \subset Fr\ D \subset H \cup K$), lo cual implica que $Fr\ E$ no es conexa. Escogemos un punto $a \in E$ y un punto $b \in D$, como $Fr\ E$ es cerrado y separa a a y b tenemos por m. que alguna componente F de $Fr\ E$ separa a a y b sin embargo $E \cup (Fr\ E - F) \cup D$. Es un conexo en $X - F$ que contiene a a y b lo cual es una contradicción.

El lema que se demuestra a continuación nos servirá para demostrar el siguiente teorema de este capítulo.

6. Lema.

Considere las siguientes propiedades:

1. A simple $\longrightarrow$ Fr A es normalmente conexo.
2. A y B simples, Fr $A \cap$ Fr $B = \phi \longrightarrow A \subset B$, ó $B \subset A$, ó $B \subset A$, ó $A \cap B = \phi$, ó $A \cup B = X$.
3. A y B, abiertos conexos, $A \cap B \neq \phi$, Fr $A \cap$ Fr $B = \phi \longrightarrow$ Existen A^* y B^* abiertos conexos, tales que $A \subset A^*$, $B \subset B^*$, $A^* \cap B^* = A \cap B$, y $A^* \cup B^* = X$.

Se cumple que: 4.a'. $\longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$.

Demostración.

4.a'. $\longrightarrow$ 1.

Supongamos que X es abierto-unicoherente.

Sea A simple. Supongamos que Fr A no es normalmente conexo, es decir que existen F_1, F_2, V, W tales que: Fr $A = F_1 \cup F_2$, $F_1 \neq \phi \neq F_2$, V y W son abiertos ajenos, $F_1 \subset V$, $F_2 \subset W$.

Sea V' la unión de todas las componentes de V que intersecten a F_1, y sea W' la unión de todas las componentes de W que intersecten a F_2. Entonces por I.5. tenemos que V' y W' son abiertos, además $\phi \neq F_1 \subset V_1$, $\phi \neq F_2 \subset W'$, y $V' \cap W' = \phi$.

Sea $B = A^- \cup V' \cup W'$. Como cada componente de $V' \cup W'$ intersecta a $Fr\ A$, tenemos que B es conexo, además $B = A° \cup Fr\ A \cup V' \cup W' = A° \cup V' \cup W'$, luego B es abierto; análogamente se encuentra que $D = (X - A)^- \cup V' \cup W''$ es también abierto y conexo.

Por otro lado $B \cap D = (A° \cup V' \cup W'') \cap ((X - A)° \cup V' \cup W'') = V' \cup W'$ no es conexo, lo cual es una contradicción ya que $B \cup D = X$, por lo tanto $Fr\ A$ es normalmente conexo.

$1 \longrightarrow 2.$

Supongamos que la frontera de cada conjunto simple es normalmente conexa.

Supongamos que A y B son conjuntos simples tales que $Fr\ A \cap Fr\ B = \phi$, pero que: $A \not\subset B$, $A \cap B \neq \phi$,

$A \cup B \neq X$ y $B \not\subset A$.

Entonces, $A \cap (X - B) \neq \phi \neq A \cap B$ $(X - A) \cap (X - B) \neq \phi \neq (X - A) \cap B$, lo cual implica por I.2.d. que $A \cap Fr\ B \neq \phi \neq (X - A) \cap Fr\ B$, y por I.8.a. tenemos que $Fr\ B \cap Fr\ A \neq \phi$, ¡lo cual es una contradicción!

$2 \longrightarrow 3$.

Supongamos que A y B son conexos abiertos tales que $A \cap B \neq \phi$ y $Fr\ A \cap Fr\ B = \phi$.

Si C y D son componentes de $X - A$ y $X - B$ respectivamente, tenemos por I.4. que son simples, luego 2 implica que $C \cap D = \phi$ ó $C \subset D$ ó $D \subset C$ ó $C \cup D = X$, pero como $C \cup D \subset (X - A) \cup (X - B) = X - A \cap B \neq X$, y $C \neq D$ ya que $Fr\ C \cap Fr\ D \subset Fr\ A \cap Fr\ B = \phi$, tenemos que:

*.- C y D componentes de $X - A$ y $X - B$ respectivamente $\longrightarrow C \cap D = \phi$ ó $C \subsetneq D$ ó $D \subsetneq C'$

Sea $\mathcal{C} = \{C \in 2^X | C$ es componente de $X - A$ y $C \subset X - B\}$

Sea $\mathcal{D} = \{D \in 2^X | D$ es componente de $X - A$ y $D \subset X - A\}$

Sean $A^* = A \cup (\cup \mathcal{C})$ y $B^* = B \cup (\cup \mathcal{D})$

Demostraremos que A^* y B^* cumplen las condiciones requeridas en 3.

Obviamente $A \subset A^*$ y $B \subset B^*$.

$A^* \cap B^* = A \cap B$, que por un lado $A \cap (\cup \mathcal{D}) = \phi = B \cap (\cup \mathcal{C})$, y por otro $(\cup \mathcal{C}) \cap (\cup \mathcal{D}) = \phi$ pues si $C \in \mathcal{C}$ y $D \in \mathcal{D}$ son tales que $C \cap D \neq \phi$ entonces * implica que $C \subsetneq D$ ó $D \subsetneq C$, pero como C es un conexo maximal en X − A y D es un conexo también en X − A tenemos que $C \subset D$ implica $C = D$, y haciendo consideraciones análogas obtenemos que $D \subset C$ implica $C = D$, lo cual es una contradicción.

$X = A^* \cup B^*$, ya que si $x \in X - A \cup B = (X - A) \cap (X - B)$ entonces existen C y D componentes de X − A y X − B respectivamente tales que $x \in C \cap D$, y por * tenemos entonces que $C \subsetneq D$ ó $D \subsetneq C$ lo cual a su vez implica que $C \in \mathcal{C}$ ó $D \in \mathcal{D}$, y por lo tanto $x \in A^*$ ó $x \in B^*$.

A^* es conexo, pues si $C \in \mathcal{C}$ entonces C es cerrado y $\mathrm{Fr}\, C \subset \mathrm{Fr}\,(X - A) = \mathrm{Fr}\, A$, luego $A \cup C = (A \cup \mathrm{Fr} C) \cup (\mathrm{Fr}\, C \cup C)$ es conexo, y entonces $A^* = A \cup (\cup \mathcal{C})$ es conexo.

Demostraremos ahora que A^* es abierto haciendo notar el hecho de que todos sus puntos son interiores a él. Sea $C \in \mathcal{C}$, sea D la componente de $X - B$ que contiene a C, como $Fr\, C \subset Fr\, A$ y $Fr\, D \subset Fr\, B$ tenemos entonces que $C \subset D^\circ$, además por * concluímos que D contiene a todas las componentes de $X - A$ que intersectan a D están contenidas en $X - B$, es decir son elementos de $\mathcal{C}$, entonces $D \cap (X - A) \subset \cup\, \mathcal{C}$ y por lo tanto $D \subset A \cup (\cup\, \mathcal{C}) = A^*$, de donde $C \subset (A^*)^\circ$. Luego A^* es abierto.

Claramente B^* también es abierto y conexo.

7. Teorema.

Las siguientes propiedades son equivalentes a la propiedad **a** ("X es unicoherente"): **n**, **k**, **a'**.

Demostraremos que: $\mathbf{m} \to \mathbf{n} \to \mathbf{k} \to \mathbf{a'} \to \mathbf{i}$

lo cual es suficiente para demostrar este teorema, puesto que por el teorema anterior tanto **m** como **i** son equivalentes a **a**.

$$\mathbf{m} \longrightarrow \mathbf{n}$$

Esta implicación es obvia, puesto que si A es un cerrado que separa a X, entonces separa en particular a algún par de puntos a y b, y por **n** tenemos que alguna componente C de A separa a a y b, y por lo tanto también a X.

$n \longrightarrow k.$

Supongamos que k es falsa, es decir que existen cerrados A y B que no separan a X, pero tales que su unión sí lo separa. n implica que existe una componente C de $A \cup B$ que separa a X, y por 2.e. tenemos que $C \subset A$ ó $C \subset B$. Supongamos que $C \subset A$, entonces $X - A$ es un abierto conexo contenido en $X - C$, y como la frontera de cada componente de A está contenida en $Fr\ A = Fr\ (X - A)$, y las componentes de $A - C$ son precisamente las componentes de A diferentes de C, tenemos que $X - C = (X - A) \cup (X - C)$ es conexo, ¡lo cual es una contradicción!

$k \longrightarrow a'.$

Supongamos que A y B son abiertos conexos tales que $X - A$ y $X - B$ están separados. Como $X - A$ y $X - B$ son cerrados ajenos que no separan a X, tenemos que k implica que $(X - A) \cup (X - B)$ tampoco separa a X, es decir que $A \cap B = X - ((X - A) \cup (X - B))$ es conexo.

$a' \longrightarrow i.$

Supongamos que A y B son abiertos conexos tales que $Fr\ A \cap Fr\ B = \phi$. Por el lema anterior sabemos que a' implica 6.3., y por lo tanto si $A \cap B$ es no vacío, entonces existen A^* y B^* abiertos conexos tales que: $X = A^* \cup B^*$ y $A^* \cap B^* = A \cap B$, y entonces a' implica que $A^* \cap B^* = A \cap B$ es conexo.

8. Teorema.

Las siguientes proposiciones son equivalentes a unicoherencia: m', m", n' y n".

Demostración.

Demostraremos que $m'' \longrightarrow n'' \longrightarrow n'$, que $m'' \longrightarrow m' \longrightarrow n'$ y por último que $n' \longrightarrow a \longrightarrow m''$.

Las dos primeras series de implicaciones son triviales como veremos.

$m'' \longrightarrow n''$

Supongamos que A separa a X entonces $X - A = M \cup N$ con M y N conjuntos separados no vacíos por lo tanto existen $a \in M$ y $b \in N$ entonces A separa a a y b luego por m" existe C componente de A que también separa a a y b, esto es $X - C = M' \cup N''$ conjuntos separados con $a \in M'$ y $b \in N'$, pero que M' y N' sean no vacíos y separados quiere decir que son una separación o lo que es lo mismo que C separa a X.

$m'' \longrightarrow m'$

Supongamos que A es un abierto que separa a a y b entonces por m" existe C componente de A que separa a a y b.

$n'' \longrightarrow n'$

Supongamos que A es un abierto que separa a X entonces A cumple n" y por lo tanto existe C componente de A que separa a X.

$m' \longrightarrow n'$

Supongamos que A es un abierto que separa a X entonces en particular A separa dos puntos y por m' existe C componente de A que separa a estos dos puntos y por tanto al espacio.

$n' \longrightarrow a$

Supongamos que si A es un abierto que separa a X entonces existe C componente de A que separa a X pe

NOTA:

La última serie de implicaciones de este teorema es un poco más larga que las anteriores, para la demostración de $a \rightarrow m''$ necesitaremos los dos lemas que siguen a la siguiente demostración.

ro supongamos que X no es unicoherente. Entonces existen conjuntos cerrados conexos M, N tales que $X = M \cup N$ y $M \cap N = A \cup B$ donde A y B son conjuntos cerrados ajenos vacíos. Afirmamos que existe C componente de $X - N$ tal que $A \cap \mathrm{Fr}\, C \neq \phi \neq B \cap \mathrm{Fr}\, C$. De no ser así se sigue de la conexidad y la conexidad local de X que la frontera de cada componente de $X - N$ es un subconjunto no vacío de A o de B. Sea entonces A' la unión de A y todas las componentes de $X - N$ cuyas fronteras están contenidas en A y sea B' la unión de B y todas las componentes de $X - N$ cuyas fronteras están contenidas en B. Entonces A' y B' son conjuntos no vacíos cuya unión es M. Es más dado que A y B son cerrados se sigue del teorema 6.b. del capítulo 1 que $\mathrm{Fr}\, A' \subset A$ y $\mathrm{Fr}\, B' \subset B$ por lo que A' y B' son cerrados.

Pero esto contradice la conexidad de M. Así que existe C cuya frontera intersecta a ambos A y B. Hagamos $U = C \cup (X - \overline{C})$. Debido a la conexidad y conexidad local de X tenemos que ninguna componente de U separa a X. Sin embargo $X - U = \mathrm{Fr}\, C$ no es conexo. Esto contradice a lo cual completa la prueba.

9. <u>Lema</u>.

Sean M y N conjuntos cerrados ajenos en un espa cio conexo localmente conexo unicoherente X y sea X una componente de $X - M \cup N$. Entonces M_C, N_C son conjuntos cerrados ajenos tales que $X - C = M_C \cup N_C$ y $\mathrm{Fr}\, M_C = M \cap C^-$, $\mathrm{Fr}\, N_C = N \cap C^-$. Más aún si E, F son componentes de $X - N$, $X - M$ respectivamente, que contienen a C, entonces $E - C \subset M_C$, $F - C \subset N_C$.

Demostración.

Sea D una componente arbitraria de $X - C$. Hacemos la proposición siguiente:

$$\mathrm{Fr}\, D \subset M \cap \overline{C} \quad \text{ó} \quad \mathrm{Fr}\, D \subset N \cap \overline{C} \; . \; . \; . \; (1)$$

y procederemos a demostrarla.

Es una consecuencia de la conexidad del espacio que $\mathrm{Fr}\, D \neq \phi$, y de la conexidad local que $\mathrm{Fr}\, D \subset \mathrm{Fr}\, C$. Esta inclusión y la unicoherencia del espacio implican que $\mathrm{Fr}\, D$ es conexa, por la propiedad b y el teorema 5.

Dado que $\mathrm{Fr}\, C \subset M \cup N$ y M, N son conjuntos cerrados ajenos, se sigue que $\mathrm{Fr}\, D \subset M \cap \overline{C}$ ó $\mathrm{Fr}\, D \subset \overline{N}$. Las dos posibilidades son exclusivas pues $\mathrm{Fr}\, D \neq \phi$.

Es una consecuencia inmediata de (1) que M_C, N_C son conjuntos ajenos tales que $X - C = M_C \cup N_C$. Para probar que M_C es cerrado, es suficiente demostrar que

$$Fr\ Mc \subset M \cap C^- \subset Mc.$$

Para esto sea $\{D_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ la colección de componentes de Ac.

Entonces por el teorema 6b del capítulo 1.

$$Fr\ Mc = Fr\ (\bigcup_\alpha D_\alpha) \subset (\cup\ Fr\ D_\alpha)^- \subset M \cap C^-$$

Por otro lado, sea $x \in M \cap C^-$. Entonces x pertenece a una componente D de $X - C$ y dado que Fr D intersecta a $M \cap C^-$ al menos en x, se sigue de (1) que $Fr\ D \subset M \cap C^-$. Esto es, $Fr\ D \subset M$, lo que significa que D es componente de Mc.

En particular $x \in Mc$. Así que $M \cap C^- \subset Mc$. Análogamente se pueba que $Fr\ Nc \subset C^- \subset Nc$.

Lo que implica que Nc es cerrado.

De las contensiones anteriores se sigue que $Fr\ Mc = M \cap C^-$ y $Fr\ Nc = N \cap C^-$.

Por último, supongamos que $E - C$ no está contenido en Mc. Entonces la relación $X - C = Ac \cup Nc$, implica que una componente D de Nc intersecta a $E - C$.

Por definición $Fr\ D \subset N$, y esto implica que $E \cap Fr\ D = \phi$, ya que E es una componente de $X - N$. Así que $D \cap E$ es un subconjunto abierto y cerrado relativo del subespacio E, y $D \cap E \neq \phi \neq C \subset E - D$.

Esta contradicción a la conexidad de E demuestra que $E - C \subset A_C$. Análogamente se demuestra que $F - C \subset Nc$.

En el siguiente lema introducimos la notación de J.H.V. Hunt, $L = [M] \cup [N]$ que significa que $L = M \cup N$ y M, N son conjuntos separados. La frase $L = [M] \cup [N]$ es una separación significa además que $M \neq \phi \neq N$.

10. Lema.

Sean A, B y P, Q parejas de conjuntos separados en un espacio conexo localmente conexo unicoherente X tales que sus uniones son complementarias, así que podemos escribir

$$X - A \cup B = [P] \cup [Q]$$

Sea $M = Q^{-} \cap A^{-}$, $N = P^{-} \cap B^{-}$ y C una componente de $X - M \cup N$. Entonces

$$X - A = [Mc - A] \cup [Nc \cup C - A]$$

$$X - B = [Mc \cup C - B] \cup [Nc - B],$$

y la primera de estas alternativas se cumple si $C \subset P \cup A$, mientras que la segunda se cumple si $C \subset Q \cup B$.

Demostración.

Toda componente de $X - M \cup N$ está contenida ya sea en $P \cup A$ o en $Q \cup B$ por el lema 9 del capítulo 1.

Entonces suponiendo primero $C \subset P \cup A$ tenemos por el lema anterior que $X - C = Mc \cup Nc$ y por lo tanto

$$X - A = (Mc - A) \cup (Nc \cup C - A)$$

veremos que además esto es una separación. Para esto basta mostrar que $Mc - A$ y $C - A$ están separados, pues Mc y Nc son cerrados ajenos por el lema 9 de este mismo capítulo. El que Mc sea cerrado implica que

$$Mc - A \cap (C - A) \subset Mc \cap C \subset \phi .$$

La relación $Mc \cap C = \phi$ implica que $Mc \cap C^{-} \subset Fr\ Mc$. Esto es, $Mc \cap C^{-} \subset M$, otra vez por el lema 9 (pues $Fr\ Mc = M \cap C^{-}$) y por consecuencia

$$(Mc - A) \cap C^{-} \subset M - A$$

y

$$(Mc - A) \cap \overline{C - A} \subset (M - A) \cap \overline{C - A}.$$

Pero $M \subset Q \cup A$ por el lema 9 del capítulo 1 y estamos suponiendo $C \subset P \cup A$ así que

$$(M - A) \cap \overline{C - A} \subset Q \cap \overline{P} \subset \phi$$

pues P y Q están separados. Esto demuestra que

$$Mc - A, \quad C - A \text{ están separados,}$$

si suponemos que $C \subset Q \cup B$ análogamente se demuestra que

$$X - B = [Mc \cup C - B] \cup [Nc - B]$$

Los dos lemas anteriores los utilizaremos para demostrar que **a ⟶ m"** pero esta demostración no se hará directamente sino a través de demostraciones "auxiliares" que son en realidad **a ⟶ k" ⟶ a"** y otro lema más.

a ⟶ k" .

Supongamos entonces que **X** es unicoherente y sean **A y B** conjuntos separados tales que su unión separa a **X** esto es

$$X - A \cup B = [P] \cup [Q] .$$

Hagamos $M = \overline{Q} \cap \overline{A}$, $N = \overline{P} \cap \overline{B}$. Si $M = \phi$ entonces **B** separa a **X** y si $N = \phi$ entonces **A** separa a **X**, pues si $M = \phi$ entonces

$X - B = [P \cup A] \cup [Q]$ análogamente si $N = \phi$ entonces

$$X - A = [P] \cup [Q \cup B].$$

Supongamos entonces que $M \neq \phi \neq N$. Como M y N son conjuntos cerrados ajenos por el Lema 9 del Capítulo 1, se sigue de la conexidad y la conexidad local del espacio que existe una componente C de $X - M \cup N$ tal que $M \cap \overline{C} \neq \phi \neq N \cap \overline{C}$. Además $C \subset P \cup A$ ó $C \subset Q \cup B$ por el mismo lema 9.

Supongamos primero entonces que $C \subset P \cup A$ entonces por el lema anterior tenemos

$$X - A = [Mc - A] \cup [Nc \cup C - B].$$

Para demostrar que A separa a X se debe demostrar que $Mc - A \neq \phi \neq Nc \cup C - A$. De hecho $Mc \cap Q \neq \phi$ pues de lo contrario si $Mc \cap Q = \phi$ entonces $Q \subset Nc$ pues $X - C = Mc \cup Nc$ por el lema 1 y $C \subset P \cup A$ por hipótesis. Esto es, $\overline{Q} \subset Nc$, porque Nc es cerrado por el lema 1. Dado que $M = \overline{Q} \cap \overline{A}$, se sigue que $M \cap \overline{C} \subset Nc$. Sin embargo, $M \cap \overline{C} \subset Mc$ pues por el lema 1, $Fr\, Mc = M \cap \overline{C}$ y Mc es cerrado.

Así que $Mc \cap Nc \neq \phi$ pues $M \cap \overline{C} \neq \phi$. Esta contradicción al Lema 1 implica que $Mc \cap Q \neq \phi$. En consecuencia $Mc - A \neq \phi$. Por otro lado, la relación $N \subset P \cup B$

en el lema 9 implica que $(N \cap \overline{C}) \cap A = \phi$.

Dado que $N \cap \overline{C} \subset Nc$ por el lema 1, se sigue que $N \cap \overline{C}$ es un subconjunto no vacío de $Nc \cup C - A$. Esto demuestra que A separa a X. Análogamente se demuestra que si $C \subset Q \cup B$, entonces B separa a X.

k" $\longrightarrow$ a"

Supongamos ahora que se cumple k" y que A y B son conexos tales que $X - A$ y $X - B$ están separados y supongamos que $A \cap B$ no es conexo, sea entonces $A \cap B = [P] \cup [Q]$ y hagamos $M = X - B$, $N = X - A$. Entonces M, N conjuntos separados y

$$X - M \cup N = [P] \cup [Q]$$

se sigue de k" que M separa a X ó N separa a X. Sin embargo los complementos de M y N son A y B ¡ambos conexos!

11. Lema.

Sean p, q puntos en un espacio localmente conexo X y sean P_i, Q_i conjuntos que contienen a p, q respectivamente, tales que $P_i = \overline{P}_i - \overline{Q}_i$, $Q_i = \overline{Q}_i - \overline{P}_i$. Sea

R la componente de $X - \overline{Q}_i$ que contiene a p y sea $P_{i+1} =$ $= R \cap P_i$, $Q_{i+1} = (X - R) - \overline{P}_{i+1}$. Entonces $p \in P_{i+1}$, $q \in Q_{i+1}$, $X - (P_{i+1} \cup Q_{i+1}) \subset X - (P_i \cup Q_i)$ y

$$P_{i+1} = \overline{P}_{i+1} - \overline{Q}_{i+1}, \quad Q_{i+1} = \overline{Q}_{i+1} - \overline{P}_{i+1}.$$

Demostración.

Por definición $p \in P_{i+1}$. Dado que $Q \cap R = \phi$ y $Q_i \cap \overline{P}_1 = \phi$, $\overline{P}_{i+1} \subset \overline{P}_i$, se sigue que $Q_i \subset X - (R \cup \overline{P}_{i+1})$

Esto es, $Q_i \subset Q_{i+1}$, y así $q \in Q_{i+1}$.

Dado que $P_i \subset X - \overline{Q}_i$ y $P_{i+1} = R \cap P_i$,

$$P_i \subset P_{i+1} \cup ((X - \overline{Q}_i) - R).$$

Por la conexidad local de X, las componentes de $X - \overline{Q}_i$ son abiertas y $(X - \overline{Q}_i) - R$ es entonces un conjunto abier_ to que no intersecta a P_{i+1}; i.e.,

$$((X - \overline{Q}_i) - R) \cap \overline{P}_{i+1} = \phi.$$

Así que $(X - \overline{Q}_i) - R \subset (X - R) \cap (X - \overline{P}_{i+1}) = X - (R \cup \overline{P}_{i+1}) =$ $= Q_{i+1}$.

Así que $P_i \cup Q_i \subset P_{i+1} \cup Q_{i+1}$; i.e.

$X - (P_{i+1} \cup Q_{i+1}) \subset X - (P_i \cup Q_i)$.

Para probar las igualdades, primero denotaremos que

$$\overline{Q}_{i+1} = X - R.$$

Dado que $Q_{i+1} \subset X - R$ y $X - R$ es cerrado por la conexidad local del espacio, $\overline{Q}_{i+1} \subset X - R$. Por otro lado $\overline{P}_{i+1} \subset \overline{R}$ y por tanto $X - \overline{R} \neq (X - R) \cap (X - \overline{P}_{i+1}) = X - (R \cup \overline{P}_{i+1}) = Q_{i+1}$. También $\overline{R} - R \subset \overline{Q}_i \subset \overline{Q}_{i+1}$, la última inclusión es consecuencia de $Q_i \subset Q_{i+1}$, lo cual ya hemos demostrado. De aquí $X - R = (X - \overline{R}) \cup (\overline{R} - R)$ $\overline{Q}_{i+1}$. Así que $\overline{Q}_{i+1} = X - R$.

Ahora $P_{i+1} = R \cap P_i = R \cap (\overline{P}_i - \overline{Q}_i) = R \cap \overline{P}_i$. Dado que R es abierto, $R \cap \overline{P}_i = R \cap \overline{R \cap P_i} = R \cap \overline{P_{i+1}}$. Así que $R_{i+1} = R \cap \overline{P}_{i+1} = \overline{P}_{i+1} - (X - R) = \overline{P}_{i+1} - \overline{Q}_{i+1}$. También $Q_{i+1} = X - (R \cup \overline{P}_{i+1}) = (X - R) - \overline{P}_{i+1} + \overline{Q}_{i+1} - P_{i+1}$.

$a \longrightarrow m''$

Supongamos que X es unicoherente y que $X - L = P \cup Q$, donde P, Q son conjuntos separados que contienen a p, q respectivamente. Sea $P_0 = \overline{P} - \overline{Q}$, $Q_0 = \overline{Q} - \overline{P}$ entonces dado que P y Q están separados, $P \subset P_0 \subset \overline{P}$, $Q \subset Q_0 \subset \overline{Q}$. En consecuencia $p \in P_0$, $q \in Q_0$, $X - (P_0 \cup Q_0) \subset L$ y $P_0 = \overline{P}_0 - \overline{Q}_0$, $Q_0 = \overline{Q}_0 - \overline{P}_0$.

Ahora sea R la componente de $X - \overline{Q}_0$ que contiene a p, y sea $P_1 = R \cap P_0$, $Q_1 = X - (R \cup \overline{P}_1)$. Entonces por el lema 11, $p \in P_1$, $q \in Q_1$, $X - (P_1 \cup Q_1) \subset X - (P_0 \cup Q_0) \subset L$ y $P_1 = \overline{P}_1 - \overline{Q}_1$, $Q_1 = \overline{Q}_1 - \overline{P}_1$.

Ahora sea S la componente de $X - \overline{P}_1$ que contiene a q, y sea $Q_2 = S \cap Q_1$, $P_2 = X - (S \cup \overline{Q}_2)$. Entonces otra vez, por el lema 11, tenemos que $p \in P_2$, $q \in Q_2$, $X - (P_2 \cup Q_2) \subset X - (P_1 \cup Q_1) \subset A$ y $P_2 = \overline{P}_2 - \overline{Q}_2$, $Q_2 = \overline{Q}_2 - \overline{P}_2$.

Afirmamos que $X - P_2$, $X - Q_2$ son conjuntos conexos. En el caso de que $X - P_2 = S \cup \overline{Q}_2$ esto es claro ya que S es conexo y $S \cup \overline{Q}_2 \subset \overline{S}$. Dado que $\overline{P}_1 \subset X - Q_1$, tenemos

$$
\begin{aligned}
& X - Q_2 \\
&= X - (Q_1 \cap S), \\
&= (X - Q_1) \cup (X - S)
\end{aligned}
$$

$$= (X - Q_1) \cup ((X - S) - \overline{P}_1) \cup ((X - S) \cap \overline{P}_1)$$

$$= (X - Q_1) \cup ((X - S) - \overline{P}_1)$$

$$= R \cup \overline{P}_1 \cup ((X - \overline{P}_1) - S)$$

Ahora $R \cup \overline{P}_1$ es conexo, dado que R es conexo y $R \cup \overline{P}_1 \subset \overline{R}$. También, si T es cualquier componente de $X - \overline{P}_1$, entonces $\phi \neq \mathrm{Fr}\, T \subset \overline{P}$, por la conexidad y conexidad local de X; en consecuencia $R \cup \overline{P}_1 \cup T$ es conexo. Dado que las componentes de $(X - \overline{P}_1) - S$ son precisamente las de $X - \overline{P}_1$ diferentes de S, se sigue que $X - Q_2$ es conexo. Así que $X - P_2$, $X - Q_2$ son conjuntos conexos. Dado que P_2, Q_2 son ajenos, $X = (X - P_2) \cup (X - Q_2)$ y $(X - P_2) - (X - Q_2) = Q_2$, $(X - Q_2) - (X - P_2) = P_2$. Dado que Q_2, P_2 están separados, entonces ya que X es unicoherente y haciendo $A = X - Q_2$, $B = X - P_2$ se sigue de a" que $(X - Q_2) \cap (X - P_2) = X - (Q_2 \cup P_2)$ es conexo esto es $X - (P_2 \cup Q_2)$ es un conjunto conexo que separa a P_2, Q_2, y por lo tanto a p, q. Dado que $X - (P_2 \cup Q_2) \subset L$ tenemos que una componente de L separa a p, q.

12. Teorema.

Las siguientes proposiciones son equivalentes a unicoherencia: m'' , j'' , j' , k'' , k' , a''.

Demostraremos que $m'' \longrightarrow j'' \longrightarrow j' \longrightarrow k' \longrightarrow a$ y que $j'' \longrightarrow k'' \longrightarrow a'' \longrightarrow a$ y como en el teorema 8 vimos que $a \longrightarrow m''$ tendremos que todas las proporciones son equivalentes.

$m'' \Longrightarrow j''$

Sean $a, b \in X$ y $A, B \in 2^X$ tales que A y B están separados y $A \cup B$ separa a a y b.

Por m'' existe C componente de $A \cup B$ que separa a a y b. Es decir existen H y L separados tales que: $X - C = H \cup L$, $a \in H$ y $b \in L$.

Como A y B están separados y C es conexo, entonces $C \subset A$ ó $C \subset B$, sin pérdida de generalidad, supongamos que $C \subset A$. Entonces, $X - A \subset X - C = H \cup L$

$\therefore$ $X - A = ((X - A) \cap H) \cup ((X - A) \cap L)$. Sean $H' =$ $= (X - A) \cap H$ y $L' = (X - A) \cap L$. Tenemos que: H' y

L' estén separados pues

$X' \subset H$, $L' \subset L$ y H y L están separados.

Además $X - A = H' \cup L'$, por otro lado $a \in H$ y $a \notin A$ (de hecho $a \notin A \cup B$) análogamente $b \in L'$ y $\therefore$ A separa a a y b .

$j'' \longrightarrow j'$

Sean A y B abiertos ajenos tales que $A \cup B$ separa a a y b entonces como por j'' siempre que A y B sean tales que $A \cup B$ separa a a y b entonces A ó B separa a a y b tenemos que para este caso particular de A y B abiertos también A ó B separa a a y b .

$j' \longrightarrow k'$

Supongamos que A y B son abiertos ajenos tales que $A \cup B$ separa a X, esto es $X - (A \cup B) = M \cup N$ conjuntos separados no vacíos, luego existen $a \in M$ y $b \in N$, es decir $A \cup B$ separa a a y b luego por j' tenemos que A ó B separa a X esto es $X - A = P \cup Q$ separados con $a \in P$ y $b \in Q$ ó bien $X - B = P \cup Q$ separados con $a \in P$ y $b \in Q$, en cualquier caso A ó B separa a X.

$k' \Longrightarrow a$

Sean A y B cerrados conexos, tales que $X - A$ y $X-B$ están separados, demostraremos por contradicción que $A \cap B$ es conexo.

Supongamos que $A \cap B$ no es conexo.

Sea $D = X - A$ y $E = X - B$, tenemos que D y E son abiertos y están separados, además

$$D \cup E = (X - A) \cup (X - B) = X - (A \cap B)$$

Por lo tanto $X - (D \cup E) = A \cap B$ no es conexo, por lo tanto $D \cup E$ separa a X y k' implica que D ó E separa a X, por lo tanto $X - D = A$ ó $X - E = B$ no es conexo, lo cual es una contradicción.

$j'' \longrightarrow k''$

Supongamos que A y B son conjuntos separados en 2^X tales que $A \cup B$ separa a X, entonces $X - A \cup B = M \cup N$ conjuntos separados no vacíos, esto es existen $a \in M$ y $b \in N$ separados por $A \cup B$ luego por j'' A ó B también los separa; supongamos que A los separa esto es $X - A =$ $= P \cup Q$ conjuntos separados tales que $a \in P$ y $b \in Q$ pero esto quiere decir que A separa a X análogamente tendríamos para B.

$k'' \Longrightarrow a''$

Sean A y B conexos tales que $X - A$ y $X - B$ están separados, demostraremos por contradicción que $A \cap B$ es conexo.

Supongamos que $A \cap B$ no es conexo.

Sean $D = X - A$ y $E = X - B$, tenemos que D y E están separados y

$$D \cup E = (X - A) \cup (X - B) = X - (A \cap B)$$

por lo tanto $X - (D \cup E) = A \cap B$ no es conexo luego $D \cup E$ separa a X y k'' implica que D ó E separa a X y entonces $X - D = A$ ó $X - E = B$ no es conexo, lo cual es una contradicción.

$a'' \longrightarrow a$

Supongamos que A y B son cerrados conexos tales que $X - A$ y $X - B$ están separados, en particular son conexos tales que $X - A$ y $X - B$ están separados luego por a'' tenemos que $A \cap B$ es conexo.

Los teoremas 5, 7, 8 y 12 demuestran la equivalencia de todas las caracterizaciones de unicoherencia presentadas en 4.

BIBLIOGRAFIA

1. García Maynez Adalberto, *Introducción a la Topología de Conjuntos*, Editorial Trillas, México 1971.

2. Hunt J.H.V., *The Phragmen Brower Theorem for Separated sets*, Bol. Soc. Mat. Mex. 1974.

3. ______________________, *A characterization of unicoherence in terms* of *separating open sets*. Centro de Investigación y de estudios avanzados del I.P.N. México.

4. ______________________ and E.D. Tymchatyn, *A Theorem on involutions* on *unicoherent spaces*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. México. 1981.

5. Kuratowski Kazimiriez, *Topology*, Vol. II, PWN-Polish Scientific Publishers, Worsaw, and Accademic Press, New York and London, 1968.

6. ______________________, *Sur le continua de Jordan et le Théorème de M. Brower.* Fund. Math. 8(1926) 137-150.

7. ______________________, *Une characterisation topologique de la surface de la sphère,* Fund. Math. 13 (1929) 307-318.

8. Stone A.H., *Incidence relations in unicoherent spaces,* Trans. Amer. Math. Soc. 65 (1949) 427-447.