(27) 2-jeni

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO MATEMATICO DE LAS ECUACIONES DE VON-KÁRMÁN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

RAFAEL RENE DEL RIO CASTILLO.

México, D. F. 1981

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

INTRODUCCIÓN.

El propósito de este trabajo es hacer un estudio de las ecuaciones

$$\Delta^2 u = [\varphi, u] + \lambda [\varphi_0, u]$$
$$\Delta^2 \varphi = -[u, u] \qquad \dots \ast$$

$$\Delta^2 = \Delta\Delta, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$[h, g] = \frac{\partial h^2}{\partial x^2}\frac{\partial g^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 2\frac{\partial h}{\partial x \partial y}\frac{\partial g}{\partial x \partial y}$$

Primero estudiamos el operador lineal Δ^2 con condiciones de frontera bastante generales; después estudiamos el corchete $[\cdot,\cdot]$. Esto nos sirve para reformular las ecuaciones y entonces usamos la teoría de bifurcaciones para estudiar el problema completo.

Las ecuaciones $\ast$ aparecen en la teoría no lineal de placas elásticas, (ver [1], [2], [3], [13]) y son comunmente llamadas ecuaciones de Von-Kármán. El parametro λ mide la intensidad de las fuerzas aplicadas en el borde de una placa. Si λ es pequeño no observamos flexión vertical, ya que toda la energía se almacena en las deformaciones en el plano de la placa; al aumentar la compresión hay un valor crítico después del cual la placa se flexiona, nosotros trataremos de determinarlos.

INDICE.

§1 ESTUDIO DE LOS CASOS MIXTOS EN EL OPERADOR BIHARMONICO

Consideremos el problema de encontrar una función $v(x,y)$ t.

$$\Delta^2 v = f \quad \text{en } \omega$$

1) $\begin{array}{l} v = g_1 \\ v_\eta = h_1 \end{array}$ en Γ_1 2) $\begin{array}{l} v = g_2 \\ Mv = h_2 \end{array}$ en Γ_2

3) $\begin{array}{l} Mv = g_3 \\ Nv = h_3 \end{array}$ en Γ_3 4) $\begin{array}{l} v_\eta = g_4 \\ Nv = h_4 \end{array}$ en Γ_4

DONDE $Mv = \sigma \Delta v + (1-\sigma) v_{\eta\eta}$

$$Nv = -\frac{\partial}{\partial \eta} \Delta v + (1-\sigma) \frac{\partial}{\partial s} v_{\eta\tau},$$

($v_\eta = \nabla v \cdot \eta$ $\eta = (n_1, n_2)$

$v_t = \nabla v \cdot t$ $t = (-n_2, n_1)$

son las derivadas de v en la dirección normal y tangencial respectivamente,

$\frac{\partial}{\partial S}$ es la derivada respecto a la longitud de arco.)

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 = \partial\omega = \Gamma,$$

$\partial\omega$ es C^ω y ω es simplemente convexo y acotado en $\mathbb{R}^2$. f, g_i, h_i $i=1,2,3,4$ son funciones dadas.

Nos interesa estudiar este problema ya que en las ecuaciones de Von-Kármán que se dedujeron en la sección anterior, aparece el operador biharmónico Δ^2. Nos ocuparemos de estudiar el inverso de este operador y después aplicaremos estos resultados al caso no lineal que nos interesa, i.e. a las ecuaciones de Von-Kármán.

El problema lineal lo obtenemos al "extremizar" la energía de flexión y despreciar la energía que llamamos de extensión. Físicamente se interpreta a $v(x,y)$ como el movimiento en la dirección vertical que sufre el plano medio de una placa que ocupa un área $\omega \subset \mathbb{R}^2$ y tiene el desplazamiento prescrito y también el ángulo que forma con el plano xy en Γ_1. En Γ_2 la placa también tiene el desplazamiento prescrito y además le estamos aplicando una fuerza de flexión Mv. En Γ_3 nuestra placa sufre una fuerza de flexión y además una fuerza de cortante Nv. En Γ_4 el ángulo está dado pero la placa tiene libertad para moverse en la dirección vertical en la cual sufre una fuerza $Nv = h_4$. (ver: [ ] pag. 50, [ ] pag. 462, [ ] pag. 83 y 87).

Haremos primero una formulación débil del problema multiplicando a ambos lados de la igualdad por una función $v \in V \subset W_2^2(\omega)$, (donde V es un espacio apropiado cuya definición se dará en el curso del argumento) así:

$$(\Delta^2 u, v) = (f, v)$$

Procederemos a integrar dos veces por partes el miembro izquierdo. Tenemos así:

$$\int_\omega v \Delta^2 u = \int_\omega v \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right]$$

nótese que aquí hemos reescrito el operador biharmónico introduciendo la llamada constante de Poisson σ, $(0 \leq \sigma < 1)$.

Sea,

$$A(u,v) = \int_\omega \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}(1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)$$

$$B(u,v) = -\int_{\partial\omega} \frac{\partial v}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)\eta_1 - \int_{\partial\omega} \frac{\partial v}{\partial x_1}(1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\eta_2$$

$$-\int_{\partial\omega} \frac{\partial v}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)\eta_2 - \int_{\partial\omega} \frac{\partial v}{\partial x_2}(1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\eta_1$$

$$C(u,v) = \int_{\partial\omega} v \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)\eta_1 + \int_{\partial\omega} v \frac{\partial}{\partial x_2}(1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\eta_1$$

$$+ \int_{\partial\omega} v \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x_1} \right)\eta_2 + \int_{\partial\omega} v \frac{\partial}{\partial x_1}(1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\eta_2$$

entonces
$$\int_\omega v\Delta^2 v = A(v,v) + B(v,v) + C(v,v).$$
Utilizando las formulas
$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial \eta}\eta_1 - \frac{\partial}{\partial s}\eta_2 \ , \ \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial \eta}\eta_2 + \frac{\partial}{\partial s}\eta_1$$
podemos reescribir a $B(v,v)$ así:
$$B(v,v) = -\int_{\partial\omega} \frac{\partial v}{\partial \eta}\left[\sigma\Delta v + (1-\sigma)\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\right]$$
$$- \int_{\partial\omega} \frac{\partial v}{\partial s}\left[(1-\sigma)\frac{\partial^2 v}{\partial\eta\partial T}\right]$$
también para $C(v,v)$ tenemos
$$C(v,v) = \int_{\partial\omega} v\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(\Delta v)\eta_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}(\Delta v)\eta_2\right]$$
$$= \int_{\partial\omega} v\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta v.$$
Ahora haciendo la siguiente integración por partes, (donde $\partial\omega$ está parametrizada por longitud de arco $s\in[0,\ell]$)
$$-\int_{\partial\omega}\frac{\partial v}{\partial s}(1-\sigma)v_{\eta T} = -(1-\sigma)v_{\eta T}\Big|_0^\ell + \int_0^\ell v(1-\sigma)\frac{\partial}{\partial s}v_{\eta T}$$
$$= \int_{\partial\omega} v(1-\sigma)\frac{\partial}{\partial s}v_{\eta T}$$
tenemos que
$$\int_\omega v\Delta^2 v = A(v,v) - \int_{\partial\omega} v\left[-\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta v - (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial s}v_{\eta T}\right] + \int_{\partial\omega}\frac{\partial v}{\partial\eta}\left[\sigma\Delta v + (1-\sigma)v_{\eta\eta}\right]$$

∴ tenemos

$$A(v,v) = \int_{\omega} f v + \int_{\Gamma_1} v N v \, ds + \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \eta} M v \, ds$$

Ahora para hacer la formulación débil de las condiciones de frontera tomamos una función $w \in W_2^2$ ∋. $w = g_1$, $w_\eta = h_1$ en Γ_1, $w = g_2$ en Γ_2, $w_\eta = g_4$ en Γ_4, w es cualquier función en Γ_3 y Γ_4 y w_η es cualquier función en Γ_2, Γ_3 en el sentido de trazas.

Pediremos que $v - w \in V \subset W_2^2 = H^2$ donde

$$V = \left\{ v \in W_2^2 \;\middle|\; \begin{matrix} v = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \end{matrix} \text{ en } \Gamma_1 ,\; v = 0 \text{ en } \Gamma_2 ,\; \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \text{ en } \Gamma_4 \right\}$$

Hasta aquí hemos tenido en cuenta solamente las condiciones de frontera llamadas "estables". Se les llama así debido al hecho de que al tomar una sucesión $v_n \in W_2^2$ de forma que todas las funciones de la sucesión satisfagan estas condiciones en el sentido de trazas y tal que $v_n \xrightarrow{W_2^2} v$, entonces sucede que la función límite v también satisface estas condiciones de frontera, así V resulta ser un conjunto cerrado y con el producto punto que hereda de W_2^2, V es un espacio de Hilbert.

En general para un operador elíptico de orden $2k$ las condiciones estables son aquellas que contienen derivadas a lo más de orden $k-1$. (Ver [ ], pag 356) y $\therefore$ necesitamos que las funciones g_1 y g_2 sean tales que $w \in H^{3/2}(\partial\omega)$ y que h_1 y g_4 sean tales que $\frac{\partial w}{\partial \eta} \in H^{1/2}(\partial\omega)$, lo cual implica cierta regularidad en $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$, $\Gamma_2 \cap \Gamma_4$ y $\Gamma_1 \cap \Gamma_4$. (Por ejemplo necesitamos que g_1 y g_2 y sus derivadas coincidan en $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$).

Ahora para tener en cuenta las condiciones de frontera no estables, no hacemos más que sustituir los valores de M y N en obteniendo

$$A(v,v) = N' + M' + \int_\omega fv$$

donde
$$N'v = \int_{\Gamma_3} v\, h_3\, ds + \int_{\Gamma_4} v\, h_4\, ds$$

$$M'v = \int_{\Gamma_2} \frac{\partial v}{\partial \eta} h_2\, ds + \int_{\Gamma_3} \frac{\partial v}{\partial \eta} g_3\, ds$$

Así damos la siguiente

<u>Definición</u> Una función $v \in W_2^2$ es solución débil al problema $\Longleftrightarrow$ $v - w \in V$ y además

$$A(v,v) = N' + M' + \int_\omega fv \quad \forall v \in V \subset W_2^2 .$$

Para ver que esta definición es razonable tomemos $v \in H^4$ solución débil con $w \in H^4$ y veamos que v resulta ser solución clásica. El converso es claro.

Si usamos el teorema de Green inversamente en $A(v,v)$ obtenemos

$$A(v,v) = \int_\omega v\, \Delta^2 v + \int_\Gamma v\, N v + \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \eta} M v,$$

como $v \in V$ las integrales de frontera las podemos escribir

$$\int_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4} v\, N v + \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} \frac{\partial v}{\partial \eta} M v .$$

Si sustituimos esto en tenemos la igualdad

$$\int_\omega v\, \Delta^2 v + \int_{\Gamma_3} v\, N v + \int_{\Gamma_4} v\, N v + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial v}{\partial \eta} M v + \int_{\Gamma_3} \frac{\partial v}{\partial \eta} M v =$$

$$\int_\omega f v + \int_{\Gamma_3} v\, h_3 + \int_{\Gamma_4} v\, h_4 + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial v}{\partial \eta} h_2 + \int_{\Gamma_3} \frac{\partial v}{\partial \eta} g_3 \qquad \forall v \in V$$

Si tomamos $v = \varphi \in C_0^\infty \subset V$ tendremos

$$\int_\omega \varphi\, \Delta^2 v = \int_\omega f \varphi \implies \int_\omega (\Delta^2 v - f)\, \varphi = 0 .$$

Como C_0^∞ es denso en L^2 tenemos $\Delta^2 v = f$ en el sentido de L^2. Esto implica que

$$\int_\omega v\, \Delta^2 v = \int_\omega f v \qquad \forall v \in V$$

$\therefore$ tenemos la igualdad

$$\int_{\Gamma_3} v\, N v + \int_{\Gamma_4} v\, N v + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial v}{\partial \eta} M v + \int_{\Gamma_3} \frac{\partial v}{\partial \eta} M v =$$

$$\int_{\Gamma_3} v\, h_3 + \int_{\Gamma_4} v\, h_4 + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial v}{\partial \eta} h_2 + \int_{\Gamma_3} \frac{\partial v}{\partial \eta} g_3 \qquad \forall v \in V$$

Ahora demos una función $\varphi : \partial\omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\varphi(s) = \begin{cases} \varphi_1 \in C_0^\infty(\Gamma_l),\ \varphi_1 \neq 0 & \text{en } \Gamma_l \\ 0 & \text{en } \partial\omega - \Gamma_l \end{cases} \qquad l = 3 \text{ ó } 4$$

Por el teorema de trazas podemos encontrar una función $\tilde{v} \in W_2^2$ t.q. $\gamma(\tilde{v}) = \varphi(s)$, ($\gamma$ es el operador de traza ver [ ] pag. 214) y $\gamma\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta}\right) = 0$, (de hecho $\tilde{v} \in V$); sustituyendo esta $\tilde{v}$ en la igualdad obtenemos

$$\int_{\Gamma_\ell} \varphi_1(s)\, N v = \int_{\Gamma_\ell} \varphi_1(s)\, h_\ell$$

Como $C_c^\infty(\Gamma_\ell)$ es denso en $L^2(\Gamma_\ell)$ tenemos que

$$\int_{\Gamma_\ell} \varphi_1 (Nv - h_\ell) = 0 \Rightarrow Nv = h_\ell$$

en el sentido $L^2(\partial\Omega)$. Esto nos implica que

$$\int_{\Gamma_\ell} v\, N v = \int_{\Gamma_\ell} v\, h_\ell \qquad \forall v \in V \quad \ell = 3, 4$$

$\therefore$ la igualdad se reduce a

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial v}{\partial \eta} M v + \int_{\Gamma_3} \frac{\partial v}{\partial \eta} M v = \int_{\Gamma_2} \frac{\partial v}{\partial \eta} h_2 + \int_{\Gamma_3} \frac{\partial v}{\partial \eta} g_3$$

Por el momento y únicamente por comodidad de notación pongamos $g_3 = h_3$.

Análogamente a lo que ya hicimos demos una función $\tilde{\varphi} : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\tilde{\varphi}(s) = \begin{cases} \varphi \in C_c^\infty(\Gamma_k), & \varphi \neq 0 \text{ en } \Gamma_k \\ 0 & \text{en } \Gamma \setminus \Gamma_k \end{cases} \qquad k = 2 \text{ ó } 3$$

Por el teorema de trazas podemos dar $\tilde{v} \in V$ t.q. $\gamma\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta}\right) = \tilde{\varphi}(s)$. Sustituyendo en la igualdad obtenemos

$$\int_{\Gamma_k} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} M v = \int_{\Gamma_k} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} h_k$$

Como $C_c^\infty(\Gamma_k)$ es denso en $L^2(\Gamma_k)$ tenemos $M\nu = h_k$ en Γ_k.

Una vez que ya vimos que nuestra definición de solución débil coincide con la solución clásica para funciones suficientemente regulares procedamos a buscar esta solución débil. Para esto escribamos $v = v - w + w$, $u = v - w \in V$ y $\therefore$ queda

$$A(u, v) = N\nu + M\nu - A(w, v) + \int_\omega f v = l(v).$$

Ahora veremos que el lado izquierdo de la igualdad es un producto escalar que genera una norma equivalente a la norma en W_2^2 y que el lado derecho es un funcional lineal continuo con respecto a la norma W_2^2 y $\therefore$ con respecto a la norma generada por $A(\cdot,\cdot)$. $\therefore$ aplicando el teorema de Riez (ver [ ], pag. 43 teo. II.4) y teniendo en cuenta que V es un espacio de Hilbert tendremos que $\exists!\ u \in V$ $\cdot|\cdot$ la igualdad se cumple. De hecho u es tal que da el mínimo de $\|v\|_A^2 - 2 f(v)$, (donde $\|v\|_A^2 = A(v,v)$) (ver [ ] pag. 403 teo 34.2, [8] cap. I)

Para esto demostraremos primero un lema.

Notación: $\langle \ldots \rangle$ denota espacio generado por ...

m_i denota la medida de Γ_i.

Lema. $\exists\ c > 0$ $\cdot|\cdot$ $A(v, v) \geq c \|v\|_2^2$ si y sólo si tenemos uno de los siguientes casos

1) $m\Gamma_1 \neq 0$ $\quad v \in \Omega_1 = V$.

ó 2) $m\Gamma_1 = 0$ y $m\Gamma_2 \neq 0$, Γ_2 no es una recta, $v \in \Omega_2 = V$.

ó 3) $m\Gamma_1 = 0$, $m\Gamma_2 \neq 0$ y $m\Gamma_4 \neq 0$, Γ_2 es una recta y Γ_4 no es una o varias rectas ortogonales a Γ_2, $v \in \Omega_3 = V$.

ó 4) $m\Gamma_1 = 0$, $m\Gamma_2 \neq 0$, Γ_2 es una recta y Γ_4 es una ó varias rectas perpendiculares a Γ_2, $v \in \Omega_4 = V \cap M_4^{\perp_{L^2}}$, $M_4 = \langle v_0 \rangle$, $v_0 = \alpha + \beta x + \gamma y$ t.q. $v_0 = 0$ es la ecuación de Γ_2.

ó 5) $m\Gamma_1 = m\Gamma_2 = 0$, Γ_4 no es una o varias rectas paralelas, $v \in \Omega_5 = V \cap M_5^{\perp_{L^2}}$, $M_5 = \langle ctes \rangle$, $m\Gamma_4 \neq 0$

ó 6) $m\Gamma_1 = m\Gamma_2 = 0$, $m\Gamma_4 \neq 0$ y $\Gamma_4 \subset \{\bar{a}_i + \bar{b}x + \bar{c}y = 0\}$ y $v \in \Omega_6 = V \cap M_6^{\perp_{L^2}}$, $M_6 = \langle 1, \bar{c}x - \bar{b}y \rangle$

ó 7) $m\Gamma_1 = m\Gamma_2 = m\Gamma_4 = 0$, $v \in \Omega_7 = V \cap M_7^{\perp_{L^2}}$, $M_7 = \langle 1, x, y \rangle$

<u>Demostración</u> Como podemos escribir

$$A(v,v) = \sigma \int_\omega (\Delta v)^2 + (1-\sigma) \int_\omega \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2$$

se tiene que

$$A(v,v) \geq (1-\sigma) \sum_{|\alpha|=2} \| D^\alpha v \|^2_{L^2(\omega)} \quad \forall v \in V$$

$\therefore$ Debemos demostrar que

$$\sum_{|\alpha|=2} \| D^\alpha v \|^2_{L^2(\omega)} \geq K \|v\|^2$$

para tener demostrado el lema. Para esto sumamos a $\sum_{|\alpha|=2} \| D^\alpha v \|^2_{L^2(\omega)}$ términos adecuados de manera que en cada caso particular se anulen, pero que nos permitan demostrar la desigualdad deseada.

Así pues tratemos de probar que

$$\|u\|^2_{W_2^2} \leq C\Big(\sum_{|\alpha|=2}\|D^\alpha u\|^2_{L^2(\omega)} + \|\gamma(u)\|^2_{L^2(\Gamma_i)} + \|\gamma(\tfrac{\partial u}{\partial n})\|^2_{L^2(\Gamma_j)}\Big) \quad \begin{matrix} i=0,1,2 \\ j=0,1,4 \end{matrix} \quad \text{---}\ \overline{\underline{IV}}$$

Cuando los índices toman el valor cero entenderemos que no aparece el término.

Ahora veremos que el suponer falsa esta desigualdad implica que $u = a + bx + cy$ y que

$$\gamma(u) = 0 \quad \text{en } \Gamma_i$$

$$\gamma\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0 \quad \text{en } \Gamma_j$$

y esto en cada caso particular nos llevará a una contradicción junto con la hipótesis $\|u\| \neq 0$.

Para hacer la negación supongamos que $\exists \{u_n'\}$ t.q.

$$\forall n \quad \|u_n'\|^2_{W_2^2} > n\Big(\sum_{|\alpha|=2}\|D^\alpha u_n'\|^2_{L^2(\omega)} + \|\gamma(u_n')\|^2_{L^2(\Gamma_i)} + \|\gamma(\tfrac{\partial u_n'}{\partial n})\|^2_{L^2(\Gamma_j)}\Big)$$

Dividiendo ambos miembros de la desigualdad por $\|u_n'\|^2_{W_2^2}$ vemos que podemos considerar una sucesión $\{u_n\}$ con $\|u_n\|_{W_2^2} = 1$ y por lo tanto tenemos que

$$1 > n\Big(\sum_{|\alpha|=2}\|D^\alpha u_n\|^2_{L^2(\omega)} + \|\gamma(u_n)\|^2_{L^2(\Gamma_i)} + \|\gamma(\tfrac{\partial u_n}{\partial n})\|^2_{L^2(\Gamma_j)} \quad \text{---}\ \overline{\underline{V}}$$

Como $\forall n$, $\|u_n\|_{W_2^2} = 1$ por lema I apéndice sabemos que $\exists \{u_{n_\ell}\}$ subsucesión t.q. $u_{n_\ell} \longrightarrow u$ en W_2^2.

Observemos que si sustituimos u_{n_ℓ} en V y hacemos variar n_ℓ para que V siga siendo válida necesitamos que

$$\|D^\alpha u_{n_\ell}\|_{L^2(\omega)} \xrightarrow{\ell\to\infty} 0 \qquad \text{con } |\alpha| = 2$$

$$\|\gamma(u_{n_\ell})\|_{L^2(\Gamma_i)} \xrightarrow{\ell\to\infty} 0$$

$$\left\|\gamma\left(\frac{\partial U_{n_\ell}}{\partial \eta}\right)\right\|_{L^2(\Gamma_j)} \xrightarrow{\ell\to\infty} 0$$

Ahora usaremos la subsucesión $\{U_{n_\ell}\}$ de dos maneras.

Primero notamos que $U_{n_\ell} \to U$ en $W_2^2 \Rightarrow D^\alpha U_{n_\ell} \to D^\alpha U$ en $L^2(\omega)$, $|\alpha|=2$, y por el lema del apéndice y el hecho de que $\|D^\alpha U_{n_\ell}\| \to 0$ se sigue que $\|D^\alpha U\|=0$ y $\therefore$ U es un polinomio de grado ≤ 1.

Segundo, notemos que $U_{n_\ell} \to U$ en $W_2^2 \Rightarrow U_{n_\ell} \to U$ en W_2^1 debido a la compacidad del encaje $W_2^2 \hookrightarrow W_2^1$ (ver [ ] pag. 144 y [ ] pag. 33). Esto, el teorema de trazas (ver [ ] pag 216, teo. 7.53) y el hecho de que $\|\gamma(U_{n_\ell})\| \to 0$, $\left\|\gamma\left(\frac{\partial U_{n_\ell}}{\partial\eta}\right)\right\| \to 0$ implican que

$$\gamma(U)=0 \quad \text{en } \Gamma_i$$

$$\gamma\left(\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)=0 \quad \text{en } \Gamma_j .$$

Así si la desigualdad fuera falsa tendríamos $U\in W_2^2$, $\|U\|_{W_2^2}=1$, U polinomio de grado ≤ 1 y $\gamma(U)=0$ en Γ_i, $\gamma\left(\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)=0$ en Γ_j.

Ahora en el caso 1) pongamos $i=1$, $j=1$. Entonces

$U=a+bx+cy=0$ en $\Gamma_1 \Rightarrow (b,c)\parallel(\eta_1,\eta_2)$

$\frac{\partial U}{\partial\eta}=U_x\eta_1+U_y\eta_2=b\eta_1+c\eta_2=0$ en $\Gamma_1 \Rightarrow (b,c)\perp(\eta_1,\eta_2)$

((η_1,η_2) es la normal a Γ_1), $\therefore$ $b=c=0$, $\therefore$ $u=a=0$

$\therefore$ $U\equiv 0$ en ω pero $\|U\|_{W_2^2}=1$ ¡contradicción!. Así la desigualdad con $i=j=1$ es cierta en este caso y $\therefore$

$$A(v,v)\geq(1-\sigma)\sum_{|\alpha|=2}\|D^\alpha v\|^2_{L^2(\omega)}=(1-\sigma)\Big(\sum_{|\alpha|=2}\|D^\alpha v\|^2_{L^2(\omega)}+\|\gamma(v)\|_{L^2(\Gamma_i)}+\left\|\gamma\left(\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)\right\|_{L^2(\Gamma_j)}$$

ya que todos los términos que agregamos son nulos lo anterior es mayor o igual que

$$\frac{(1-\delta)}{C} \|u\|^2_{W_2^2} .$$

En el caso 2) tomemos $i=2$, $j=0$ en . Si es falsa esto nos implica que $\Gamma_2 \subset \{(x,y) \mid a+bx+cy=0\}$ pero por hipótesis Γ_2 no es recta ¡

En el caso 3) tomamos $i=2$, $j=4$ tendremos análogamente a lo anterior que

$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ en $\Gamma_4 \Rightarrow u_x \eta_1 + u_y \eta_2 = b\eta_1 + c\eta_2 = 0$

$\Rightarrow (b,c) \perp (\eta_1, \eta_2)$, $u = a+bx+cy$, (η_1,η_2) es la normal a Γ_4.

$\therefore$ también $\Gamma_2 \subset \{(x,y) \mid a+bx+cy=0$, recta de normal $(b,c)\}$ $\therefore$ (b,c) es la normal de Γ_2. Habíamos supuesto que Γ_4 no podía ser perpendicular a Γ_2 $\therefore$ $b=c=0$ $\therefore$ $u=a=0$ ¡ ya que $\|u\|_{W_2^2}=1$

En el caso 4) tomemos $i=2$, $j=0$ en . Si fuera falsa tendríamos $u=a+bx+cy$ y $u=0$ en Γ_2 $\therefore$ $u=ku_0$ pero por hipótesis $(u,u_0)=0 \Rightarrow (ku_0,u_0)=0 \Rightarrow k=0$ $\therefore$ $u\equiv 0$ ¡

En el caso 5) dando $i=0$, $j=4$ tenemos $u=a+bx+cy$ y $\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$ en Γ_4, i.e. $\frac{\partial u}{\partial \eta} = b\eta_1 + c\eta_2 = 0$ donde $\eta = (\eta_1,\eta_2)$ es la normal a Γ_4 y como Γ_4 no es una recta el vector η no es constante y $\therefore$ $b=c=0$, $\therefore$ $u=a$ ¡.

En el caso 6) $u = a + bx + cy$ y $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ en Γ_4 i.e. $b\bar{b} + c\bar{c} = 0 \Rightarrow b = k\bar{c}$, $c = -k\bar{b}$ para alguna $k \neq 0$ $\therefore u = a + k(\bar{c}x - \bar{b}y)$ $\underset{c}{V}$ ya que $u \perp \langle 1, \bar{c}x - \bar{b}y \rangle$ y $\|u\| = 1$

En el caso 7) demos $i = j = 0$, u es un polinomio de grado ≤ 1 $\underset{c}{V}$ ya que $u \perp \langle 1, x, y \rangle$ y $\|u\| = 1$.

Q.E.D.

La simetría de $A(\cdot,\cdot)$ es fácil de probar, al igual que la linealidad. Esto junto con el lema que acabamos de probar implican que $A(\cdot,\cdot)$ es un producto escalar en los subespacios $\Omega_r \subset V$. (Ω_r corresponde al caso r, $r = 1, \dots, 7$). Para ver que $A(\cdot,\cdot)$ es un producto escalar equivalente al producto en W_2^2 observemos que:

$$A(u,u) = \sigma \int_\omega (\Delta u)^2 + (1-\sigma) \int_\omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2$$

Ahora como

$$(1-\sigma)\int_\omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 \leq 2(1-\sigma)\int_\omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x_2}\right)^2$$

$$\leq 2(1-\sigma)\|u\|^2_{W_2^2}.$$

Además como

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \leq \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2$$

tenemos que:

$$\sigma\int_\omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2 = \sigma\int_\omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2+2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

$$\leq 2\sigma\int_\omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2 \leq 2\sigma\,\|u\|^2_{W_2^2}.$$

$\therefore$

$$A(u,u)\leq 2(1-\sigma)\,\|u\|_{W_2^2}+2\sigma\,\|u\|_{W_2^2}=2\,\|u\|^2_{W_2^2}$$

Esto junto con el lema nos dan que

$$C\,\|u\|_{W_2^2}\leq A(u,u)^{1/2}\leq 2\,\|u\|_{W_2^2}\qquad \forall u\in\Omega_r$$

y $\therefore$ $A(\cdot,\cdot)$ es un producto escalar en Ω_r equivalente al producto escalar en W_2^2.

Para aplicar el teorema de Riez probaremos que Ω_r es cerrado, (en los casos $r=1,2,3$ es inmediato porque V es cerrado) y que $l(\cdot)$ (ver) es continuo.

Restringiremos $l(\cdot)$ a Ω_r, despues daremos una interpretación física de esto.

Para ver que Ω_r es cerrado $(r=4,\dots,7)$ observemos que por ser V cerrado en la norma $\|\ \|_{W_2^2}$ y ademas tener que $\|\ \|_{W_2^2}\geq\|\ \|_{L^2}$ resulta que V es un subconjunto cerrado de $L^2(\omega)$. Sea $\{u_n\}_{n=1}^\infty\subset\Omega_r$ una sucesión que converge a $u\in V$, esta sucesión también converge a u en la norma de L^2. Para $v_r\in M_r$ $r=4,5,6,7$ (ver el lema) se tiene

$$0=\int_\omega v_r u_n \xrightarrow{n\to\infty}\int_\omega v_r u\,.$$

$\therefore$ $u\in M_r^\perp$ y como $u\in V$, $u\in V\cap M_r^\perp=\Omega_r$

$\therefore$ Ω_r es cerrado

AHORA DEMOSTRAREMOS QUE

$$\ell : V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longmapsto N'v + M'v - A(w,v) + \int_\omega f v$$

ES CONTINUO. SUPONDREMOS $f \in L^1(\omega)$, $h_3, h_4 \in L^1(\Gamma_3, \Gamma_4)$, $h_2, g_3 \in L^2(\omega)$.

1) $$|A(w,v)| \leq K \int_\omega |D^\alpha w|\,|D^\beta v|$$
$$\leq K\left(\int_\omega |D^\alpha w|^2\right)^{1/2}\left(\int_\omega |D^\beta v|^2\right)^{1/2}$$
$$\leq K\, \|w\|_{W_2^2} \|v\|_{W_2^2}$$

2) $$\left|\int_\omega f v\right| \leq \|f\|_{L^1} \|v\|_{L^\infty} = \|f\|_{L^1} |v|_0 \leq K' \|f\|_{L^1} \|v\|_{W_2^2}$$
$$= K \|v\|_{W_2^2} \qquad \text{DONDE } K = K' \|f\|_{L^1}$$

AQUI HEMOS USADO EL TEOREMA DE ENCAJE DE SOBOLEV QUE NOS DICE QUE SI ω TIENE LA PROPIEDAD DEL CONO, ω ES DE DIMENSION 2, ENTONCES $W_2^2(\omega) \subset C^0_*(\omega)$ Y QUE

$$|v|_0 = \sup_{x \in \omega} |v(x)| \leq K \|v\|_{W_2^2}$$

(VER [ ] pag. 97, [ ] pag. 28).

3) $$\left|\int_{\Gamma_k} v h_k \, ds\right| \leq \|h_k\|_{L^1(\Gamma_k)} \|v\|_{L^\infty(\Gamma_k)} \qquad k = 3ó4$$

AHORA POR EL TEOREMA DE TRAZA $v \in H^{3/2}(\Gamma) \subset H^1(\Gamma)$. (VER [ ] TEO. 7.48). ESTO TAMBIEN ES INMEDIATO DE LA DEFINICION DE ESPACIOS H^s, s FRACCIONARIO QUE DAMOS EN EL APENDICE.

PROBAREMOS QUE

$$H^1(\Gamma) \subset C^{0,1/2}(\Gamma)$$

(para definición de $C^{0,1/2}$ ver [ ] pág. 10, [ ] pág. 56)

$$|v(s)-v(s')| = \left|\int_0^{s'-s} v'\,dt\right| \leq \left(\int_0^{s-s'} dt\right)^{1/2}\left(\int_0^{s'-s} v'^2\,dt\right)^{1/2}$$

$$\leq |s'-s|^{1/2}\,\|v'\|_{L^2}$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{|v(s)-v(s')|}{|s'-s|^{1/2}} \leq \|v'\|_{L^2}$$

$\therefore$

$$\|h_4\|_{L^1}\|v\|_{L^\infty} \leq C'\|h_4\|_{L^1}\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

$$\leq \|h_4\|_{L^1}\|v\|_{H^2}$$

4) Como $H^{1/2} \subset L^2$ (ver [ ] teo. 7.48)

tenemos que

$$\left|\int_{\Gamma_2}\frac{\partial v}{\partial \eta}h_2\,ds\right| \leq \left\|\frac{\partial v}{\partial \eta}\right\|_{L^2}\|h_2\|_{L^2} \leq K'\left\|\frac{\partial v}{\partial \eta}\right\|_{H^{1/2}}\|h_2\|_{L^2}$$

$$\leq K\|v\|_{H^2}\|h_2\|_{L^2} \quad \text{(ver [ ], teo. 7.53)}$$

Se hace lo análogo para $\int_{\Gamma_3}\frac{\partial v}{\partial \eta}g_3\,ds$ y $\therefore$ de 1, 2, 3 y 4 tenemos que $f: V\subset H^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es continuo.

Así que bajo la notación hemos demostrado el siguiente

<u>TEOREMA</u>. Si g_i $i=1,2,4$, h_1 son lo suficientemente regulares para que exista $w\in W_2^2$ t. $w|_{\Gamma_i}=g_i$ $i=1,2$. $w\in H^{3/2}(\partial\Omega)$; $\frac{\partial w}{\partial \eta}|_{\Gamma_1}=h_1$, $\frac{\partial w}{\partial \eta}|_{\Gamma_4}=g_4$, $\frac{\partial w}{\partial \eta}\in H^{1/2}(\partial\Omega)$ y además $f\in L^1(\partial\Omega)$, $h_1, h_4 \in L^1(\Gamma_3,\Gamma_4)$ y $h_2, g_3 \in L^2(\Gamma)$

entonces $\exists!\ u \in \Omega_r$ t.q. $A(u,v) = l(v)\ \ \forall v \in \Omega_r$.

Ahora, para tener una solución débil necesitamos una $u \in V$ t.q. $A(u,v) = l(v)\ \ \forall v \in V$. Veremos que esto es posible $\Leftrightarrow l(\bar{v}) = 0\ \ \forall \bar{v} \in \Omega_r^{\perp}$.

Como Ω_r es cerrado en V entonces $V = \Omega_r \oplus \Omega_r^{\perp}$ y $v \in V \Leftrightarrow v = v_1 + \bar{v}$ con $\bar{v} \in \Omega_r^{\perp}$ es una función lineal o constante según el caso y $v_1 \in \Omega_r$.

$$\therefore \quad A(u,v) = A(u,v_1) + A(u,\bar{v}).$$

$A(u,\bar{v}) = 0$ ya que $\bar{v}$ es lineal y A tiene solo segundas derivadas.

$$\therefore \quad A(u,v_1) = l(v_1) + l(\bar{v}).$$

Si u es solución débil, tomando $v_1 = 0$ se tiene $(v = \bar{v})$

$$l(\bar{v}) = 0 \quad y \quad A(u,v_1) = l(v_1) \quad \forall v_1 \in \Omega_r.$$

Como $u = u_1 + u_2$ con $u_2 \in \Omega_r^{\perp}$ tenemos

$$A(u_1,v_1) = l(v_1) \qquad \forall v_1 \in \Omega_r$$

i.e. $u_1 \in \Omega_r$ es la única solución que ya hemos encontrado.

Inversamente tomando la solución que ya hemos encontrado

$$A(u_1,v_1) = l(v_1),$$

entonces u_1 (y $u_1 + u_2$) será solución débil si $l(\bar{v}) = 0$ $\forall \bar{v} \in \Omega_r^{\perp}$.

Estudiemos ahora el significado físico de la condición

$$0 = f(\bar{v}) = \int_{\Gamma_3} \bar{v} h_3 + \int_{\Gamma_4} \bar{v} h_4 + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} h_2 + \int_{\Gamma_3} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} y_3 - A(w,\bar{v}) + \int_{\omega} f \bar{v}$$

para $\bar{v} \in \Omega_r^{\perp}$ $r = 1, \dots, 7$.

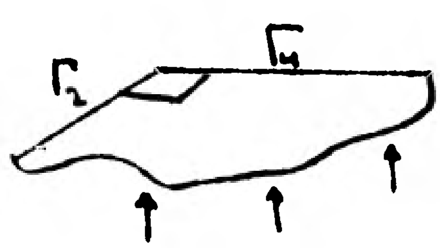
El término $A(w,\bar{v})$ siempre se va a anular porque $\bar{v}$ es lineal.

Para los casos $r = 1,2,3$ sucede que $\Omega_r^{\perp} = \{0\}$.

<u>Caso 4</u>.- Haciendo un cambio de coordenadas adecuado podemos escribir la ecuación de Γ_2 como $bx + cy = 0$ donde $b^2 + c^2 = 1$. Para interpretar

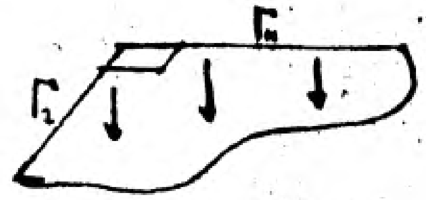
$$\int_{\Gamma_k} v_0 h_k \qquad k = 3,4$$

pensemos en $v_0 = bx + cy = (b,c)\cdot(x,y)$ como la norma de la proyección del vector (x,y) sobre el vector normal a Γ_2 y a h_k como fuerzas normales a la placa.



$\therefore$ $\int_{\Gamma_k} v_0 h_k$ puede ser interpretado como el momento que producen las fuerzas h_k en Γ_k respecto a Γ_2.

Análogamente $\int_{\omega} f v_0$ es el momento que produce la fuerza f (f normal a la placa) con respecto a Γ_2.



Ahora consideremos h_2 y g_3 como fuerzas de flexión.

tenemos que $\int_{\Gamma_2} \frac{\partial v_0}{\partial n} h_2 = \int_{\Gamma_2} h_2$ es el promedio de la fuerza de flexión h_2 aplicada a Γ_2

(Como Γ_2 es una recta $\Rightarrow$ $v_{\tau\tau} = (v/\Gamma_2)'' = 0$

$$Mv = v_{nn} + \sigma v_{\tau\tau} = v_{nn} + \sigma g_2'' \Rightarrow$$

v_{nn} es dado, o sea la curvatura sobre las lineas perpendiculares a Γ_2.)

$$\int_{\Gamma_3} \frac{\partial v_0}{\partial n} g_3 = \int_{\Gamma_3} (b,c)\cdot n\, g_3$$

Si pensamos $g_3 n$ como la componente normal a Γ_3 esta integral se puede interpretar como la contribución de g_3 en la dirección $\perp$ a Γ_2.

Así la condición $f(v_0)=0$ quiere decir físicamente que la suma de los momentos de las fuerzas aplicadas en ω, Γ_3 y Γ_4 respecto a Γ_2, más las contribuciones en la dirección $\perp$ a Γ_2 de las fuerzas aplicadas en Γ_3 mas el promedio de la fuerza aplicada en Γ_2 son cero.

Por lo tanto si los momentos con respecto a Γ_2 no son cero obtendremos un desplazamiento rigido alrededor del eje Γ_2 sin llegar a una posicion de equilibrio.

Si Γ_4 no es una recta $\perp \Gamma_2$ (caso 3)) el tener el ángulo de la placa sobre Γ_4 impide esos movimientos.

Notamos que si $f = h_i = g_j = 0 \quad \forall i, j$ entonces $v = 0$ y v_0 son soluciones.

Caso 5.- Aquí $\bar{v} = cte$. $\therefore \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} = 0 \quad \therefore \ell(\bar{v}) = 0$

$\Rightarrow$ el promedio de las fuerzas aplicadas en Γ_3, Γ_4 y ω es cero.

Caso 6.- Aquí tenemos

a) $\ell(1) = 0 \Rightarrow$ el promedio de las fuerzas aplicadas en Γ_3, Γ_4 y ω es cero.

b) $\ell(cx - by) = 0$, análogamente a lo que hicimos en el caso 4. se tiene que la suma de los momentos respecto a las rectas perpendiculares a Γ_4 de las fuerzas aplicadas en Γ_3, Γ_4 y ω mas las contribuciones en la dirección de Γ_4 de las fuerzas aplicadas en Γ_3 y Γ_2 es cero. Si $f = g_i = h_j = 0$ entonces además de $v = 0$ tenemos la solución $v = cx - by + a$.

Caso 7.- Aquí la condición $\ell(\bar{v}) = 0$, $\bar{v} \in \Omega_1^{\perp}$ nos dice que los promedios de las fuerzas aplicadas en Γ_3, Γ_4 y ω mas los momentos de estas fuerzas respecto a los ejes mas las contribuciones en las direcciones de los ejes de la fuerzas aplicadas en Γ_3 y Γ_2 se anulan.

El significado físico que tiene el restringir $A(\cdot,\cdot)$ a los espacios Ω_r, $r=1,\dots,7$ es el de considerar esencialmente las deformaciones intrínsecas que sufre la placa independientemente de su posición en el espacio, i.e. si las condiciones impuestas en el borde de la placa nos permiten moverla sin forzar nuevas deformaciones en ésta, consideraremos todas estas soluciones iguales. Al hacer esta identificación también tendremos un estado único no deformado.

Por ejemplo, en el caso 1.- la placa está fija en Γ_1 y ∴ al moverla tenemos que deformarla, ∴ $\Omega_1 = V$.

En el caso 2. la placa está soportada sobre Γ_2. Si Γ_2 no es una recta no podemos hacerle un movimiento a la placa sin provocarle nuevas deformaciones, sin embargo si Γ_2 es recta podemos girar alrededor de Γ_2 sin forzar esencialmente nuevas deformaciones y así para identificar todas estas soluciones en el caso 4- consideramos $\Omega_4 = \langle v_0 \rangle^{\perp(\omega)} \cap V$.

En el caso 7,- el borde de la placa está libre y ∴ es posible mover ésta sin forzarle nuevas deformaciones. Con "mover ésta" entendemos sumarle un polinomio de grado ≤ 1, es decir sumarle uno de los estados no deformados.

En el caso 5.- es posible mover la placa paralelamente al plano $z=0$ sin ocasionarle nuevas deformaciones y por esto no consideramos V sino $\Omega_5 = \langle cte \rangle^{\perp L^2} \cap V$

en el caso 6 es posible "girar" la placa respecto a las rectas ortogonales a Γ_4 sin forzar deformaciones y $\therefore$ para tener unicidad nos restringimos a Ω_6.

Ahora tratemos de reducirnos al caso homogeneo. Para esto encontremos una función u_1 t.q. satisface las condiciones de frontera del problema. Esto lo haremos en el lema que va después de la siguiente

DEFINICIÓN.... Si P_i tiene como dominio $D(P_i) = \Gamma_i$ y codominio $C(P_i)$ $(i = a, b)$ definimos

$$P_a \cup P_b : D(P_a) \cup D(P_b) \longrightarrow C(P_a) \cup C(P_b)$$

de manera que $P_a \cup P_b \big|_{\Gamma_i} = P_i$

LEMA.... Si -) $g_1 \cup g_2 \in H^{3/2}(\partial\omega)$ (es decir $\exists$ una extensión a $\partial\omega$ que pertenece a $H^{3/2}(\partial\omega)$).

-) $h_1 \cup g_4 \in H^{1/2}(\partial\omega)$

-) $h_2 \cup g_3 \in H^{1/2}(\partial\omega)$

-) $h_3 \cup h_4 \in H^{1/2}(\partial\omega)$

$\Rightarrow \exists\, u_1 \in H^4(\omega)$ t.q.

$u_1 = g_1$, $u_{1\eta} = h_1$ en Γ_1, $u_1 = g_2$, $Mu_1 = h_2$ en Γ_2, $Mu_1 = g_3$, $Nu_1 = h_3$ en Γ_3, $u_{1\eta} = g_4$, $Nu_1 = h_4$ en Γ_4

Demostración: Para empezar recordemos las expresiones para Mu y Nu que se dan en el apéndice

$$Mu = u_{nn} - \sigma K u_n + \sigma u''$$

$$Nu = u_{nnn} - K u_{nn} + (2-\sigma) u_n'' - K^2 u_n' + (3-\sigma) K u'' + (2-\sigma) K' u'.$$

Ahora, por el teorema de traza sabemos que si $(f_0, f_1, f_2, f_3) \in H^{7/2}(\partial\omega) \times H^{5/2}(\partial\omega) \times H^{3/2}(\partial\omega) \times H^{1/2}(\partial\omega)$ entonces existe $u \in H^4(\omega)$ tal que

$$u/_{\partial\omega} = f_0, \quad u_n|_{\partial\omega} = f_1, \quad u_{nn}/_{\partial\omega} = f_2, \quad u_{nnn}|_{\partial\omega} = f_3$$

Aquí definamos

$$f_0 = \begin{cases} g_1 \text{ en } \Gamma_1 \\ g_2 \text{ en } \Gamma_2 \\ \text{cualquier extensión a } \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \text{ de tal forma que } f_0 \in H^{7/2}(\partial\omega) \end{cases}$$

Por ejemplo podemos tomar $f_0 \equiv 0$ en $\Gamma_3 \cup \Gamma_4$ menos una vecindad de $(\Gamma_3 \cup \Gamma_4) \cap (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$.

Nótese que esto implica compatibilidad de g_1 y g_2 en $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Esto es cierto si g_1 y g_2 y sus derivadas hasta orden 4 coinciden en esos puntos.

$$f_1 = \begin{cases} h_1 \text{ en } \Gamma_1 \\ g_4 \text{ en } \Gamma_4 \\ \text{cualquier extensión a } \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \text{ tal que } f_1 \in H^{5/2}(\partial\omega) \end{cases}$$

$$f_2 = \begin{cases} h_2 + \sigma K f_1 - \sigma g_2'' \text{ en } \Gamma_2 & (f_1 \in H^{5/2},\ g_2'' \in H^{3/2}) \\ g_3 + \sigma K f_1 - \sigma f_0'' \text{ en } \Gamma_3 & (f_1 \in H^{5/2},\ f_0'' \in H^{3/2}) \\ \text{cualquier extensión a } \Gamma_1 \cup \Gamma_4 \text{ t.q. } f_2 \in H^{3/2}(\partial\omega) \end{cases}$$

$$f_3 = \begin{cases} h_3 + K(g_3 + \sigma K f_1 - \sigma f_0'') - (2-\sigma) f_1'' + K^2 f_1' \\ \quad - (3-\sigma) K f_0'' - (2-\sigma) K' f_0' \qquad \text{en } \Gamma_3 \quad (f_1'' \in H^{1/2}) \\ h_4 + K f_2 - (2-\sigma) g_4'' + K^2 g_4' - (3-\sigma) K f_0'' \\ \quad -(2-\sigma) K' f_0' \qquad \text{en } \Gamma_4 \qquad (g_4'' \in H^{1/2}) \\ \text{cualquier extensión a } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \text{ t.q. } f_3 \in H^{1/2}(\partial\omega) \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists\, U_1 \in H^4$ con esas trazas.

Claramente $U_1 = g_1$ sobre Γ_1 y $U_1 = g_2$ en Γ_2.

$U_{1n} = h_1$ en Γ_1, $U_{1n} = g_4$ en Γ_4.

$M U_1 = h_2 + \sigma K f_1 - \sigma g_2'' - \sigma K f_1 + \sigma g_2'' = h_2$ en Γ_2

$M U_1 = g_3$ en Γ_3

$N U_1 = h_3$ en Γ_3

$N U_1 = h_4$ en Γ_4

ya que así construimos f_2, f_3.

Q.E.D.

Ahora que tenemos $U_1 \in H^4(\omega)$ t.q. satisface las condiciones de frontera del problema original I. Escribamos a la solución de I como $U = \bar{U} + U_1$. Sustituyendo vemos que $\bar{U}$ debe ser solución del problema

$$\Delta^2 \bar{U} = -\Delta^2 U_1 + f = g \in L^2(\omega)$$

mas condiciones homogeneas. Y viceversa, si $\bar{U}$ es solución de este problema y U_1 satisface las condiciones de frontera del problema I entonces $U = \bar{U} + U_1$ es solución de I.

Ahora dando una formulación débil al problema homogeneo para $\bar{u}$, tenemos que $\bar{u}$ satisface

$$A(\bar{u},v)=\int_{\omega} g v \quad \forall v \in V$$

donde V es el espacio que satisface las condiciones estables homogeneas y $g=f-\Delta^2 u_1$.

(Notamos que la condición $\int g v = 0 \; \forall v \in \Omega_r^1$ se escribe

$$\int f v - \int \Delta^2 u_1 v = 0 = \int f v - A(u_1,v) + \int_{\partial\omega} v N u_1 + \int_{\partial\omega} \frac{\partial v}{\partial n} M u_1$$

como v es lineal entonces $A(u_1,v)=0 \Rightarrow$

$\int_{\omega} g v = \ell(v)$ para $v \in \Omega_r^1 \cap V$.)

Por lo que hemos hecho anteriormente sabemos que $\exists ! \; \bar{u} \in \Omega_r \subset V$ que satisface la igualdad $\therefore$ podemos definir el operador

$$G_r' : L_1 \longrightarrow \Omega_r$$
$$g \longmapsto \bar{u}$$

Ahora estudiemos las propiedades de este operador.

Proposición.— G_r' tiene las siguientes propiedades:

a) G_r' es lineal

b) G_r' es compacto

c) G_r' es autoadjunto.

Demostración "a)" $A(G_r'(\alpha f+\beta g),v)=\int_{\omega}(\alpha f+\beta g)v \quad \forall v \in V$

(por def. de G_r'), ahora

$A(\alpha G_r' f+\beta G_r' g,v)=\alpha A(G_r' f,v)+\beta A(G_r' g,v)=\int_{\omega}(\alpha f+\beta g)$

$\therefore \quad A(G_r'(\alpha f+\beta g),v)=A(\alpha G_r' f+\beta G_r' g,v) \quad \forall v \in V$

$\therefore$ por la unicidad tenemos que

$$G_r'(\alpha f+\beta g) = \alpha G_r' f + \beta G_r' g$$

$\therefore$ G_r' es lineal

"b)" tenemos que

$$\|u\|^2_{W_2^1} = A(u,u) = \int_\omega f u \leq \|f\|_{L^1} \|u\|_{L^\infty}$$

Recordemos que por el teorema de encaje de Sobolev tenemos que $W_2^2(\omega) \subset C_0^0(\omega)$ y que

$$|u|_0 = \sup_{x\in\omega} |u(x)| \leq K \|u\|_{W_2^1}$$

$$\therefore \quad \|f\|_{L^1} \|u\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1} K \|u\|_{W_2^1}$$

$$\therefore \quad \|u\|^2_{W_2^1} \leq K \|f\|_{L^1} \|u\|_{W_2^1}$$

$$y \therefore \quad \|u\|_{W_2^1} \leq K \|f\|_{L^1},$$

como $u = G_r' f$ tenemos que

$$\|G_r' f\|_{W_2^1} \leq K \|f\|_{L^1}$$

sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^1(\omega)$ t.q. $\|f_n\|_{L^1} < M'$ $\forall n$.

Sucede que

$$\|u_n\|_{W_2^1} = \|G_r' f_n\|_{W_2^1} < KM' = M$$

y por el apéndice tenemos que $\exists \{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ subsucesión de $\{u_n\}$ t.q. $u_{n_k} \xrightarrow{n\to\infty} u$

Así

$$\|u_{n_k} - u\|^2_{W_2^1} = (u_{n_k}, u_{n_k}) + (u,u) - 2(u_{n_k}, u)$$
$$\leq |(u_{n_k}, u_{n_k}) - (u,u)| + 2|(u,u) - (u_{n_k}, u)|$$

Basta demostrar que $|(u_{n_k}, u_{n_k}) - (u,u)|$ tiende a cero ya que el otro término tiende a cero por la convergencia débil. Para demostrar que $|(u_{n_k}, u_{n_k}) - (u,u)|$ tiende a cero, tenemos que:

$$(u_{n_k}, v) = \int f v \quad \forall v \in \Omega_r$$

$$\Rightarrow \left| (u_{n_k}, u_{n_k}) - (u_{n_k}, u) \right| = \left| \int f (u_{n_k} - u) \right| \leq M' \| u_{n_k} - u \|_{L^\infty}$$

$$\leq C M' \| u_{n_k} - u \|_{H^1} \longrightarrow 0$$

Como por la convergencia débil

$$(u_{n_k}, u) \longrightarrow \|u\|^2$$

entonces se sigue que $\|u_{n_k}\|^2 \longrightarrow \|u\|^2$.

"c)" Observemos que

$$(G_r f, v) = \int f v \quad \forall v \in \Omega_r$$

$$= (G_r v, f) \quad \text{si } f \in \Omega_r$$

y $\therefore$ G_r es autoadjunto.

§2. PARTE NO-LINEAL

LAS ECUACIONES QUE NOS INTERESAN ESTUDIAR SON DEL TIPO

$$\Delta^2 \varphi = -[u,u]$$
$$\Delta^2 u = [F,u] \quad \text{en } \omega$$

CON CONDICIONES

$$\varphi = 0 \quad \text{en } \partial\omega$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \quad \text{en } \partial\omega$$

y

$$\left.\begin{array}{l} u=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}=0 \end{array}\right\} \text{en } \Gamma_1 \qquad \left.\begin{array}{l} u=0 \\ M(u)=0 \end{array}\right\} \text{en } \Gamma_2$$

$$\left.\begin{array}{l} M(u)=0 \\ N(u)=0 \end{array}\right\} \text{en } \Gamma_3 \qquad \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial \eta}=0 \\ N(u)=0 \end{array}\right\} \text{en } \Gamma_4$$

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 = \partial\omega$$

AHORA ESTUDIEMOS LA NO-LINEARIDAD QUE APARECE EN LAS ECUACIONES DE VON-KÁRMÁN CON EL CORCHETE:

(Recordemos que cuando $n=g$ obtenemos la expresión para la curvatura Gaussiana (ver [ ] pag. 14, (1.3))

$$[\cdot,\cdot]: W_2^2 \times W_2^2 \longrightarrow L^1(\omega)$$
$$(h,g) \longmapsto h_{xx}g_{yy} + h_{yy}g_{xx} - 2h_{xy}g_{xy}$$

<u>TEOREMA</u>

$$\|[h,g]\|_{L^1} \leq K \|h\|_{W_2^2} \|g\|_{W_2^2}.$$

<u>DEM.</u>

$$\|[h,g]\|_{L^1} = \int_\omega |h_{xx}g_{yy} + h_{yy}g_{xx} - 2h_{xy}g_{xy}|$$
$$\leq \int_\omega |h_{xx}||g_{yy}| + |h_{yy}||g_{xx}| + 2|h_{xy}||g_{xy}|$$
$$\leq \left(\int_\omega |h_{xx}|^2\right)^{1/2} \left(\int_\omega |g_{yy}|^2\right)^{1/2} + \left(\int_\omega |h_{yy}|^2\right)^{1/2} \left(\int_\omega |g_{xx}|^2\right)^{1/2}$$
$$+ 2\left(\int_\omega |h_{xy}|^2\right)^{1/2} \left(\int_\omega |g_{xy}|^2\right)^{1/2}$$

ahora utilizando Schwarz tenemos que

$$\|[h,g]\|_{L^1} \leq \left(\int_\omega |h_{xx}|^2 + |h_{yy}|^2 + 2|h_{xy}|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\int_\omega |g_{yy}|^2 + |g_{xx}|^2 + 2|g_{xy}|^2\right)^{1/2}$$
$$\leq K \|h\|_{W_2^2} \|g\|_{W_2^2}$$

■

Llamemos G_r a la composición $G_r' \circ [\cdot,\cdot] : W_2^2 \times W_2^2 \longrightarrow \Omega_r$, como $[\cdot,\cdot]$ es continuo y G_r' es compacto, G_r resulta ser compacto.
En particular si damos F_0 fija en W_2^2 tenemos que

$$G_r(\ ,F_0) : W_2^2 \longrightarrow \Omega_r$$
$$h \longmapsto G_r(h,F_0)$$

es un operador compacto, en particular $L_r = G_r(\cdot,F_0)/_{\Omega_r}$ lo es.

Ahora supongamos que $\forall \bar{v} \in \Omega_r^{\perp}$, $(F = \Psi + \lambda F_0)$

$$l_1(\bar{v}) = \int_\omega [u,u]\,\bar{v}$$

$$l_2(\bar{v}) = \int_\omega [F,u]\,\bar{v} = \int_\omega [\Psi,u]\,\bar{v} + \lambda \int_\omega [F_0,u]\,\bar{v}$$

se anulan. Por lo que se ha visto antes tenemos que si (u,Ψ) es solución de las ecuaciones de Von-Kármán entonces

$$\Psi = -\hat{G}_1(u,u)$$

$$u = G_r(F,u)$$

donde $\hat{\Omega}_1 = \Omega_1$ con $\Gamma_1 = \partial\omega$, $\hat{G}_1 = G_1 : L_1 \to \hat{\Omega}_1$, e inversamente si (u,Ψ) es solución de S entonces es solución débil ~~de las~~ ecuaciones de Von-Kármán y solución fuerte si u y Ψ son suficientemente regulares.

Poniendo $F = \Psi + \lambda F_0$ en la 2^{da} ecuación de queda

$$u = G_r(\Psi,u) + \lambda L_r u$$

$(L_r = G_r(\cdot\,,F_0)\big|_{\Omega_r})$. Sustituyendo en esta ecuación $\Psi = -\hat{G}_r(u,u)$ obtenemos

$$u + \mathcal{G}_r u = \lambda L_r u$$

donde $\mathcal{G}_r u = G_r(\hat{G}_1(u,u),u)$. Como Ψ viene dado en términos de u basta estudiar esta última ecuación.

Para ver que $l_1(\bar{v})$ y $l_2(\bar{v})$ se anulan $\forall v \in \Omega_r^{\perp}$ demostremos lo siguiente:

<u>PROPOSICIÓN</u>. LA IGUALDAD
$$\int_\omega [v,w]\bar v = \int_\omega [\bar v, w]\bar v \quad \text{ES CIERTA } \forall v, w, \bar v \in H^2$$
SI $\exists\, u \in H^2$ t.q. SOBRE Γ_1 $u = u_n = 0$ y $v=u$ ó $w=u$ ó $\bar v = u$,

SOBRE Γ_2 $v = \bar v = 0$

SOBRE Γ_3 $w_{n\tau} = w_{\tau\tau} = 0$

SOBRE Γ_4 $w_{n\tau} = 0$, $v_n = \bar v_n = 0$

<u>DEMOSTRACIÓN</u>. CONSIDEREMOS $v, w, \bar v \in C^\infty(\omega)$; INTEGRANDO POR PARTES TENEMOS QUE
$$\int_\omega [v,w]\bar v = \int_\omega [(w_{yy}v_x - w_{xy}v_y)_x + (w_{xx}v_y - w_{xy}v_x)_y]\,\bar v\, d\omega$$
$$= \int_\omega (w_{xy}v_y - w_{yy}v_x)\bar v_x + (w_{xy}v_x - w_{xx}v_y)\bar v_y\, d\omega$$
$$+ \int_{\partial\omega} (w_{yy}v_x - w_{xy}v_y)\bar v\, n_1 + (w_{xx}v_y - w_{xy}v_x)\bar v\, n_2\, ds.$$

POR OTRO LADO OBSERVEMOS QUE
$$\frac{\partial}{\partial s} w_y = -w_{yx}n_2 + w_{yy}n_1$$
$$\frac{\partial}{\partial s} w_x = -w_{xx}n_2 + w_{xy}n_1$$

ENTONCES PODEMOS ESCRIBIR LA IGUALDAD:
$$\int_\omega [v,w]\bar v = \int_\omega [\bar v, w] v + \int_{\partial\omega} \frac{\partial}{\partial s} w_y (v_x \bar v - v\bar v_x) - \frac{\partial}{\partial s} w_x (v_y \bar v - v \bar v_y)$$
PARA $v, w, \bar v \in C^\infty(\omega)$.

AHORA VEREMOS QUE ESTAS INTEGRALES TIENEN SENTIDO $\forall v, w, \bar v \in H^2 = W_2^2$. POR EL TEOREMA DE TRAZAS $v_x, w_y \in H^{1/2}$, $\bar v \in H^{3/2}$. TENEMOS QUE $\frac{\partial}{\partial s} w_y \in H^{-1/2}$ (0) SI $\bar v \in H^{3/2}$, RECORDANDO QUE $H^{3/2} \subset C^{0,1/2}$ TENEMOS QUE:

(0) VER APÉNDICE.

$$\left|\int_{\partial\omega} \frac{\partial}{\partial S}(W_y)\, v_x \bar{v}\right| \leq \sup_{\text{en } \partial\omega} |\bar{v}| \left|\int_{\partial\omega} \frac{\partial}{\partial S}(W_y)\, v_x\right| < \infty$$

haciendo lo análogo para los demás términos que aparecen en , vemos que las integrales tienen sentido $\forall\, v, w, \bar{v} \in H^2$.

Ahora separemos la integral de frontera que aparece en en 4 partes así:

$$\int_{\omega} = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4}$$

y veamos que si se cumplen las condiciones de la proposición cada una de estas cuatro integrales se anula. Con esto quedará concluida la demostración.

Para la 1ra integral observemos que $u = u_\eta = 0$ en Γ_1 $\Rightarrow u = u_x = u_y = 0$ en Γ_1. Esto se sigue de inmediato si expresamos u_x y u_y en función de u_η y $\frac{\partial u}{\partial S}$. Si alguna de las tres funciones es igual a 0 en Γ_1, simplemente sustituyendo en la integral sobre Γ_1 vemos que ésta se anula.

Para la 2da integral el resultado se sigue de inmediato haciendo la sustitución.

Para la 3ra y 4ta integral necesitaremos reformular el integrando. Tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial S}\begin{pmatrix} W_y \\ -W_x \end{pmatrix} \cdot \nabla v = \frac{d}{dS}\begin{pmatrix} W_y \\ -W_x \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\cdot \eta + \frac{\partial v}{\partial T}\cdot T\right)$$

$$= \begin{pmatrix} -W_{yx}\eta_2 + W_{yy}\eta_1 \\ W_{xx}\eta_2 - W_{xy}\eta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}\frac{\partial v}{\partial \eta} + \begin{pmatrix} -W_{yx}\eta_2 + W_{yy}\eta_1 \\ W_{xx}\eta_2 - W_{xy}\eta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\eta_2 \\ \eta_1 \end{pmatrix}\frac{\partial v}{\partial T}$$

$$= W_{TT} v_\eta - W_{\eta T} v_T \qquad \text{(ver apéndice)}$$

Multiplicando por $\bar{v}$ obtenemos $w_{\tau\tau} v_n \bar{v} - w_{n\tau} v_\tau \bar{v}$.
Análogamente

$$v \frac{d}{ds}\begin{pmatrix} w_y \\ -w_x \end{pmatrix} \nabla \bar{v} = w_{\tau\tau} \bar{v}_n v - w_{n\tau} \bar{v}_\tau v$$

sumando obtenemos que

$$\frac{d}{ds}(w_y)(v_x \bar{v} - v \bar{v}_x) - \frac{d}{ds}(w_x)(v_y \bar{v} - v \bar{v}_y)$$

$$= w_{\tau\tau}(v_n \bar{v} - v \bar{v}_n) - w_{n\tau}(v_\tau \bar{v} - v \bar{v}_\tau).$$

Una vez que tenemos el integrando en esta forma es obvio que la 3^era^ integral se anula.

Para la 4^ta^ integral, si hacemos $v_n = \bar{v}_n = 0$ el integrando queda

$$w_{n\tau}(v_\tau \bar{v} - v \bar{v}_\tau) = 0 \quad \text{por hipotesis.}$$

Asi concluimos la prueba de la proposición.

Q.E.D.

Con la ayuda de la Proposición veamos que

$$l_i(\bar{v}) = 0 \quad \forall \bar{v} \in \Omega_i^\perp, \quad i = 1,2.$$

Para el caso de l_1, resulta que $\bar{v} \in \hat{\Omega}_1^\perp = \{0\}$, ya que las condiciones de frontera sobre ψ son $\psi = \psi_n = 0$ en $\partial\omega$.

Para el caso de l_2 observemos que

$$\int_\omega [\psi, v]\bar{v} = \int_\omega [\bar{v}, v]\psi + \int_{\partial\omega} \frac{d}{ds}(v_y)(\psi_x \bar{v} - \psi \bar{v}_x) - \frac{d}{ds}(v_x)(\psi_y \bar{v} - \psi \bar{v}_y)$$

$$= \int_\omega [\bar{v}, v]\psi$$ debido a las condiciones de frontera $0 = \psi = \psi_n \Rightarrow \psi = \psi_x = \psi_y = 0$.

Ahora como $\bar{v}$ es una función lineal y en el corchete aparecen derivadas de 2° orden tenemos

$$\int_\omega [\varphi, v]\,\bar{v} = \int_\omega [\bar{v}, v]\,\varphi = 0 .$$

Solo falta estudiar

$$\int_\omega [F_o, v]\,\bar{v}$$

Para esto impondremos las siguientes condiciones sobre F_o

$$F_{o_{nn}} = F_{o_{\tau\tau}} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_3$$

$$F_{o_{n\tau}} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_4$$

Esto junto con el hecho de que $v \in V$ nos da, aplicando la proposición, que

$$\int_\omega [F_o, v]\,\bar{v} = \int_\omega [\bar{v}, v]\,F_o = 0$$

Así hemos visto que $l_i(\bar{v}) = 0 \ \forall \bar{v} \in \Omega_r^\perp$ si damos ciertas hipótesis sobre F_o.

Excepto en el caso 4 estas hipotesis sobre F_o son las más débiles. Para ver esto supongamos que

$$\int_{\partial\omega} \frac{d}{ds} F_{oy}\,(v_x \bar{v} - v \bar{v}_x) - \frac{d}{ds} F_{ox}\,(v_y \bar{v} - v \bar{v}_y) = 0 \qquad \forall \bar{v} \in \Omega_r^\perp$$

y veamos que condiciones debe satisfacer F_o.

Separamos la integral así:

$$\int_{\partial\omega} = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4}$$

Se tiene que $\int_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_2} = 0$, esto debido a que $v \in V$ y para la integral sobre Γ_2 también porque en los casos 1, 2, 3 $\bar{v} = 0$, en el caso 4 $\bar{v} = 0$ en Γ_2 y en los casos 5, 6, 7, $m\Gamma_2 = 0$.

Si $\bar{v} = 1$ en los casos 5, 6, 7 tenemos

$$0 = \int_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4} F_{0TT}(v_n) - \int_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4} F_{0nT}(v_T) \quad \forall v \in V.$$

Demos una función $\varphi : \partial\omega \longrightarrow \mathbb{R}$ t.q.

$$\varphi(s) = \begin{cases} \varphi_1 \in C_0^\infty(\Gamma_3), \ \dfrac{d\varphi_1}{ds} \neq 0 & \text{en } \Gamma_3 \\ 0 & \text{en } \partial\omega - \Gamma_3 \end{cases}$$

Usando el teorema de trazas podemos encontrar $v \in V$ t.q.

$$\gamma(v) = \varphi$$

$$\gamma\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right) = 0$$

Como $C_0^\infty(\Gamma_3)$ es denso en $L^2(\Gamma_3)$ se sigue que

$$\int_{\Gamma_3} F_{0nT} v_T = 0 \implies F_{0nT} = 0 \text{ en } \Gamma_3.$$

Análogamente tomando una función

$$\xi(s) = \begin{cases} \xi^0 \in C_0^\infty(\Gamma_3), \ \xi^0 \neq 0 & \text{en } \Gamma_3 \\ 0 & \text{en } \partial\omega - \Gamma_3 \end{cases}$$

por el teorema de trazas tenemos que $\exists\, v \in V$ t.q.

$$\gamma(v) = 0$$

$$\gamma\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right) = \xi$$

Como $C_0^\infty(\Gamma_3)$ es denso en $L^2(\Gamma_3)$ se tiene que

$$\int_{\Gamma_3} F_{0TT} v_n = 0 \implies F_{0TT} = 0 \text{ en } \Gamma_3.$$

Ahora se tiene que

$$0 = \int_{\Gamma_4} = -\int_{\Gamma_4} F_{0nT}(v_T \bar{v} - \bar{v}_T v) + F_{0TT} \bar{v}_n v$$

ya que $u \in V \Rightarrow u_n = 0$ en Γ_4.
tomando $\bar{v} = 1$ resulta

$$\int_{\Gamma_4} F_{onT}\, u_T = 0$$

y haciendo lo análogo a lo anterior, usando el teorema de traza podemos concluir que

$$F_{onT} = 0 \text{ en } \Gamma_4 \quad \text{en los casos } 5, 6, 7.$$

Observemos que

$$F_{onT} = f_{oT} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{ds} F_{ox} = \frac{d}{ds} F_{oy} = 0.$$

(ver apéndice).

En el caso 4 tenemos $\bar{v}_4 = a + bx + cy$, $\bar{v} = 0$ sobre Γ_2 y $\bar{v}_n = 0$ en Γ_4, $\Gamma_4 = \{c_i + cx - by = 0\}$ ($\Gamma_4 \perp \Gamma_2$), $n = \binom{c}{-b}\frac{1}{\sqrt{c^2+b^2}}$,

$\bar{v}_T|_{\Gamma_4} = \binom{b}{c} \cdot \binom{b}{c} \frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}} = \sqrt{b^2+c^2} = 1$ tomando $b^2 + c^2 = 1$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_4} F_{onn}(u_n \bar{v} - u \bar{v}_n) - F_{onT}(u_T \bar{v} - u \bar{v}_T) = \int_{\Gamma_4} F_{onT}(\varphi' \bar{v} - \varphi \bar{v}_T) = 0$$

ya que como $u, \bar{v} \in V$, se tiene $u_n = \bar{v}_n = 0$. tomando $\varphi \in C_0^\infty(\Gamma_4)$ y u t.q. $u|_{\partial\omega} = \begin{cases} \varphi & \text{en } \Gamma_4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$, $u_n|_{\partial\omega} = 0$.
reescribiendo la ultima integral tenemos

$$-\int_{\Gamma_4} ((F_{onT}\bar{v})' + \bar{v}' F_{onT})\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Gamma_4).$$

Como $C_0^\infty(\Gamma_4)$ es denso en $L^2(\Gamma_4)$ se obtiene

$$\underline{F_{onT}'(a + bx + cy) + 2F_{onT} = 0} \quad \text{sobre } \Gamma_4$$

con $y = \dfrac{c_i + cx}{b}$

Sobre Γ_3, en el caso 4 tenemos

$$\int_{\Gamma_3} F_{0\tau\tau}(v_n\bar{v}-v\bar{v}_n)-F_{0n\tau}(v_\tau\bar{v}-v\bar{v}_\tau)=0 \quad \forall v\in V$$

tomando $\varphi\in C_0^\infty(\Gamma_3)$ y v t.q. $v|_{\partial\omega}=\begin{cases}\varphi & \text{en } \Gamma_3\\ 0 & \text{en } \partial\omega\setminus\Gamma_3\end{cases}$

$\varphi\neq 0$ $\qquad \dfrac{\partial v}{\partial\eta}\Big|_{\partial\omega}=0$.

se tiene

$$\int_{\Gamma_3}\left(-F_{0\tau\tau}\bar{v}_n+F_{0n\tau}\bar{v}_\tau+(F_{0n\tau}\bar{v})'\right)\varphi=0$$

entonces $F_{0\tau\tau}\bar{v}_n=2F_{0n\tau}\bar{v}'+F_{0n\tau}'\bar{v}$

tomando v t.q. $v|_{\partial\omega}=0$ $\dfrac{\partial v}{\partial\eta}\Big|_{\partial\omega}=\begin{cases}\varphi & \text{en } \Gamma_3\\ 0 & \text{en } \partial\omega-\Gamma_3\end{cases}$

tenemos $\int_{\Gamma_3}F_{0\tau\tau}\bar{v}\varphi=0$ $\quad\therefore F_{0\tau\tau}\bar{v}=0$

Ahora como $\bar{v}\neq 0$ entonces $F_{0\tau\tau}=0$ (si $\Gamma_3\neq\emptyset$).

$$\therefore F_{0n\tau}'\bar{v}+2F_{0n\tau}\bar{v}'=0 \quad \text{en } \Gamma_3.$$

Nosotros supondremos

$F_{0n\tau}=F_{0\tau\tau}$ en Γ_3

$F_{0n\tau}=0$ en Γ_4.

Como $F_{\tau\tau}=-\lambda f$, $-F_{n\tau}=-\lambda g$ en $\partial\omega$, (véase deducción de las ecuaciones) y además $F=\lambda F_0+\psi$ donde ψ satisface las condiciones homogéneas ($\psi=\psi_n=0$, lo cual implica $\psi_{n\tau}=(\psi_n)'+\kappa\psi'=0$, $\psi_{\tau\tau}=\psi''-\kappa\psi_n=0$) y entonces $-\lambda F_{0\tau\tau}=\lambda f$, $\lambda F_{0n\tau}=\lambda g$, la condición

$\therefore F_{o\tau\tau} = F_{o1\tau} = 0$ en Γ_3
implica que no hay fuerzas externas f y g aplicadas en el borde libre.

Análogamente la condición $F_{o1\tau} = 0$ en Γ_4 implica que $\lambda g = 0$ en Γ_4.

Así pues ya hemos justificado la reformulación, puesto que hemos visto que dados las hipótesis

$$F_{o1\tau} = F_{o\tau\tau} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_3$$
$$F_{o1\tau} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_4$$

sucede que $l_i(\bar{v}) = 0 \quad \forall \bar{v} \in \Omega_r^1$. $i = 1, 2$.

Ahora procedamos a estudiar la ecuación

$$U + G_r U = \lambda L_r U \qquad \text{(ver pag.}$$

Para esto hagamos 2 cosas

i) Un estudio del problema espectral para
$$U = \lambda L_r U$$

ii) Veremos que $G_r U$ es "chico" comparado con U si U es chico y daremos hipótesis para que $(G_r U, U)$ sea positivo.

Esto nos servirá para probar que si λ no es valor propio de L_r la única solución a la ecuación es $U \equiv 0$, (para norma de U pequeña) y para ver que existe bifurcación cuando λ es valor propio y que las ramas se abren a la derecha. (Para definición de bifurcación ver [ ] pag. 151)

Para el estudio de "i)" demostremos el siguiente

TEOREMA — Sea $F_0 \in H^2$ t.q. $F_{0\eta\tau} = F_{0\tau\tau} = 0$ en Γ_3, $F_{0\eta\tau} = 0$ en Γ_4, entonces

$$L_r = G_r(\cdot, F_0)|_{\Omega_r} : \Omega_r \longrightarrow \Omega_r$$

es compacto y autoadjunto.

DEMOSTRACIÓN La compacidad de L_r se sigue de la compacidad de G_r (ya probada).

Ahora como L_r es continuo para demostrar que es autoadjunto sólo necesitamos demostrar que es simétrico. Demos $h, g \in \Omega_r$, entonces

$$(L_r h, g)_{\Omega_r} = A(L_r h, g) = \int_\omega [h, F_0]\, g \, d\omega$$

$$= \int_\omega [g, F_0]\, h \, d\omega = A(L_r g, h) = (L_r g, h)_{\Omega_r}$$

gracias a la proposición.

Q.E.D.

Ahora el espectro de operadores compactos y autoadjuntos tiene propiedades bien conocidas (ver [ ] pag. 455 y [ ] pag. 203), a saber es un conjunto discreto cuyo único posible punto de acumulación es el cero. Para cada eigenvalor no cero sólo existe un número finito de eigenvectores linealmente independientes y además el sistema ortogonal de los eigenvectores del operador es completo.

Esta es la información que necesitabamos saber sobre el espectro de L_r.
Ahora para el estudio de "ii)" definamos

$$G_r(U,V,W) = G_r(U, \hat{G}_1(V,W))$$

(en particular $G_r U = G_r(U,U,U)$)

LEMA

a) $G_r(\cdot,\cdot,\cdot)$ es trilineal, es decir, es lineal en cada una de las variables

b) $\| G_r(U,V,W)\|_{H^2} \leq K \| U\|_{H^2} \|V\|_{H^2} \|W\|_{H^2}$
lo cual implica que G_r es continua en cada una de las variables.

Demostración

"a)" $G_r(\cdot,\cdot,\cdot)$ es obviamente trilineal ya que $G_r(\cdot,\cdot)$ es bilineal

"b)" ya vimos que $G_r(\cdot,\cdot)$ es bilineal y compacto, $\therefore$ bilineal y continuo.

$\therefore \quad \| G_r(U,V)\|_{\Omega_r} \leq K \| U\|_{\Omega_r} \|V\|_{\Omega_r}$ (ver [ ] pag 70)

$$\therefore \| G_r(U,V,W)\|_{\Omega_r} = \| G_r(U, \hat{G}_1(V,W))\|_{\Omega_r} \leq K' \|U\|_{\Omega_r} \| \hat{G}_1(V,W)\|_{\Omega_r}$$

$$\leq K \|U\|_V \|V\|_V \|W\|_V .$$

Para ver que G_r es continuo tenemos que

$$\| G_r(U_1,U_2,U_3) - G_r(\bar{U}_1,\bar{U}_2,\bar{U}_3)\| =$$

$$\| G_r(U_1-\bar{U}_1, U_2, U_3) + G_r(\bar{U}_1, U_2-\bar{U}_2, U_3) + G_r(\bar{U}_1,\bar{U}_2,U_3-\bar{U}_3)\|$$

$$\leq C \left(\|U_1-\bar{U}_1\| \|U_2\| \|U_3\| + \|\bar{U}_1\| \|U_2-\bar{U}_2\| \|U_3\| + \|\bar{U}_1\| \|\bar{U}_2\| \|U_3-\bar{U}_3\| \right)$$

Q.E.D.

En particular tenemos que:

$$\|G_r w\|_{\Omega_r} \leq K \|w\|^3_{\Omega_r}.$$

Notemos que de la proposición es inmediato que si $g \in \hat{\Omega}_1$ y $h, \phi \in \Omega_r$ $(r = 1, \ldots, 7)$ entonces

$$(G_r(h,g), \phi)_{\Omega_r} = (\hat{G}_1(h,\phi), g)_{\hat{\Omega}_1} \quad \text{y}$$

$$|(G_r(u), u)|_{\Omega_r} = \|\hat{G}_1(u,u\|^2 \geq 0$$

Ahora demostremos el siguiente

<u>Lema</u> Sea $F_0 \in H^2(\omega)$ t.q. $F_0|_{\Gamma_4} = F_{0n}|_{\Gamma_4} = 0$. Sea u eigenvector de $L_r = G_r(\cdot, F_0)|_{\Omega_r}$ con eigenvalor $\lambda_0 \neq 0$. Afirmamos que $(G_r u, u) = 0$ $\Rightarrow u \equiv 0$

<u>Demostración</u> Supondremos que u es suficientemente regular para satisfacer las condiciones de frontera.

Primero observemos que

$$(G_r u, u) = 0 \Rightarrow \|\hat{G}_1(u,u)\|^2 = 0 \Rightarrow (\hat{G}_1(u,u), v)_{\hat{\Omega}_1} = 0 \quad \forall v \in \hat{\Omega}_1$$

$$\Rightarrow \int_\omega [u,u]\, v = 0 \quad \forall v \in \hat{\Omega}_1 \Rightarrow [u,u] = 0$$

$\therefore$ $u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 = 0$. Ahora como

$$\underbrace{\begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ -n_2 & n_1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} n_1 & -n_2 \\ n_2 & n_1 \end{pmatrix}}_{P} = \begin{pmatrix} u_{nn} & u_{nT} \\ u_{nT} & u_{TT} \end{pmatrix}$$

y como $\det P^{-1}AP = \det P^{-1} \det A \det P = \det A$, porque P es matriz unitaria $\det P = 1 = \det P^{-1}$ $\therefore$ tenemos que

$$U_{nn} U_{\tau\tau} - U_{n\tau}^2 = 0 .$$

Ahora usando la proposición veremos que se tiene
$$\int_\omega [U,U] F_0 = \int_\omega [F_0, U] U .$$

Como $U \in V$ entonces $U = U_n = 0$ sobre Γ_1 y $U = 0$ en Γ_2.
$\therefore$ se cumplen las dos primeras hipótesis de la proposición.

Sobre Γ_3 queremos ver que $U_{n\tau} = U_{\tau\tau} = 0$. Para esto observemos que $MU = \sigma U_{\tau\tau} + U_{nn} = 0$ en Γ_3 [Si $\Omega = \omega$, no se necesita regularidad ya que
$$\int_\omega [U,U] \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) = \int_\omega \left[U, \frac{x^2+y^2}{2}\right] U = \int_\omega (U_{xx} + U_{yy}) U = \int_\omega \Delta U \cdot U$$
$$= -\int_\omega |\nabla U|^2 + 0$$
$\Rightarrow \nabla U = 0 \Rightarrow U = \text{cte.} = 0$. $\therefore$ si $U \in H_0^2$ y $[U,U] = 0$ tenemos $U \equiv 0$. (ver [ ]. pag. 85. cor. 2.2-1)]

$\therefore$ $-\sigma U_{\tau\tau} = U_{nn}$. Usando tenemos que
$$-\sigma U_{\tau\tau}^2 - U_{n\tau}^2 = 0 \Rightarrow U_{\tau\tau} = U_{n\tau} = 0 \text{ en } \Gamma_3 .$$

Las condiciones $F_0|_{\Gamma_4} = F_{0n}|_{\Gamma_4} = 0$ nos anulan la $\int_{\Gamma_4}$ de la proposición y $\therefore$ la igualdad es cierta.

Ahora como $[U,U] = 0$ tenemos que
$$0 = \left|\int_\omega [U,U] F_0\right| = \left|\int_\omega [F_0, U] U\right| = \left|(G_r(F_0,U),U)\right| = \left|(L_r U, U)\right| = |\lambda_0| \|U\|^2$$

$\therefore$ $U \equiv 0$ Q.E.D.

§3. ESTUDIO DE LAS BIFURCACIONES

<u>LEMA</u> — Sea $\{u_j\}_{j=1}^{p}$ un conjunto ortonormal de funciones en H un espacio de Hilbert. Dada $u \in H$, u se puede escribir como $u = y + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j$ donde $(y, u_j) = 0$ $\forall j$.

<u>Dem.</u> Sea $\varepsilon_j = (u, u_j)$ y definamos $y = u - \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j$, obviamente $u = y + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j$ y $(y, u_j) = 0$ $\forall j$ ∎

<u>LEMA</u> — Sea μ_0 un eigenvalor de L_p con eigenvectores $u_1, \dots, u_p$. Sea $P: \Omega_p \to \Omega_p$ la proyección sobre $\langle u_1, \dots, u_p \rangle^{\perp}$ así: Sea $L_p' = L_p|_{P(\Omega_p)}$. Entonces $L_p' P(\Omega_p) \subset P(\Omega_p)$. Además, $\exists\, \varepsilon' > 0$ t.q. $\forall \mu \in (\mu_0 - \varepsilon', \mu_0 + \varepsilon')$, el operador $(L_p - \mu)|_{P(\Omega_p)} = (L_p' - \mu)$ tiene inversa continua $(L_p' - \mu)^{-1} : P(\Omega_p) \to P(\Omega_p)$ $(p = 1, 2, \dots, 6)$

<u>Dem.</u> Recordemos que $\sigma(L_p)$ está formado por un conjunto discreto de eigenvalores de multiplicidad finita con cero como único posible punto de acumulación. (Ver [ ], pág. 203). ∴ podemos dar $\varepsilon' > 0$ de manera que en el intervalo $I = (\mu_0 - \varepsilon', \mu_0 + \varepsilon')$ no se encuentre ningún eigenvalor $\mu_n \neq \mu_0$. Ahora si $\mu \in I$ y $\mu \neq \mu_0$ tenemos que $(L_p - \mu)^{-1}$ existe.

Para estudiar el caso $\mu \in I$, $\mu = \mu_0$ primero demostremos que L_p' es compacto en $P(\Omega_p)$ y que $L_p(P(\Omega_p)) \subset P(\Omega_p)$.
Así, sea $y \in P(\Omega_p)$, $\forall j = 1, \dots, p$ $(L_p(y), u_j) = (y, L_p u_j) = (y, \mu_0 u_j) = 0$
∴ $L_p y \in P(\Omega_p)$.
Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada en $P(\Omega_p)$. Como L_p es compacto $\exists\, \{L_p u_{n_t}\}_{t=1}^{\infty} = \{L_p' u_{n_t}\}_{t=1}^{\infty}$ t.q. $L_p' u_{n_t} \xrightarrow{t \to \infty} v \in \Omega_p$.
Como

$$|(v, u_j)| \leq |(v - L_p' u_{n_t}, u_j)| + |(L_p' u_{n_t}, u_j)|$$
$$\leq \|v - L_p' u_{n_t}\| \longrightarrow 0,$$

resulta que $v \in P(\Omega_r)$. $\therefore$ L'_r es compacto. Como por definición de μ_0 $(L'_r - \mu_0)u = 0$ solo cuando $u \equiv 0$, la alternativa de Fredholm nos dice que $(L'_r - \mu_0)^{-1}$ existe y es continua. ■

El número λ que aparece en la ecuación

$$U + G_r U - \lambda L_r U = 0,$$

mide, de alguna manera, la fuerza que estamos aplicando al borde de la placa. Veremos que si la norma de λ es menor que la norma del eigenvalor más chico de L_r, entonces la placa no se deforma, i.e. la única solución es la trivial y también estudiaremos que sucede cuando λ es un eigenvalor, (carga de flexión). Los dos lemas anteriores nos servirán para este propósito.

TEOREMA Si $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ no es eigenvalor del operador L_r entonces existen constantes $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ de manera que si $\lambda \in \mathbb{R}$ es tal que $|\lambda - \lambda_0| \leq C_1$ y $u \in \Omega_r$ es tal que $\|u\|_{\Omega_r} \leq C_2$, la única solución del problema $u + G_r(u) - \lambda L_r(u) = 0$ es $u \equiv 0$. $(r = 1,2,3,4,5,6,7)$

Dem.

$$\|u + G_r(u) - \lambda L_r(u)\| = \|u - \lambda_0 L_r(u) + G_r(u) - \lambda L_r(u) + \lambda_0 L_r(u)\|$$

$$\geq \|u - \lambda_0 L_r(u)\| - \|G_r(u)\| - |\lambda - \lambda_0| \, \|L_r(u)\|$$

Como λ_0 no es eigenvalor de L_p y como L_p es auto-adjunto y compacto, λ_0 está en la resolvente de L_p y $\therefore$ el operador $(I-\lambda_0 L_p)^{-1}$ existe y es acotado, es decir, $\exists\ K_1>0$ t.q.

$$\|(I-\lambda_0 L_p)^{-1}u\| \le \frac{1}{K_1}\|u\|$$

y $\therefore$

a) $\|(I-\lambda_0 L_p)u\| \geq K_1\|u\|$

también por la [illegible] se tiene que

b) $\|G_p(u)\| \le K_2\|u\|^3$

y como L_p es acotado se tiene que

c) $\|L_p(u)\| \le K_3\|u\|$

$\therefore$ por a), b) y c) tenemos que

$$\|u+G_p(u)-\lambda L_p(u)\| \geq K_1\|u\| + K_2\|u\|^3 + K_3\|u\|\,|\lambda-\lambda_0|$$

Ahora sean $C_1 = \frac{K_1}{4K_3}$ y $C_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{K_1}{K_2}\right)^{1/2}$, tenemos que si $|\lambda-\lambda_0| \le C_1$ y $\|u\| \le C_2$ entonces

$$K_3|\lambda-\lambda_0|\,\|u\| \le \frac{K_1}{4}\|u\|$$

y

$$K_2\|u\|^3 \le \frac{K_1}{4}\|u\|$$

Usando estas dos desigualdades tenemos que

$$K_1\|u\| - K_2\|u\|^3 - K_3|\lambda-\lambda_0|\,\|u\| \geq K_1\|u\| - \frac{K_1}{4}\|u\| - \frac{K_1}{4}\|u\| = \frac{K_1}{2}\|u\|$$

y $\therefore$ $\|u+G_p(u)-\lambda L_p(u)\| \geq K_1/2\,\|u\|$

De aquí, si u es solución del problema

$u+G_p(u)-\lambda L_p(u)=0$ entonces $u=0$ $\blacksquare$

TEOREMA Sea $|\mu_1|$ como en el lema 1 del apéndice $\lambda_1 = 1/\mu_1$ entonces

$$|\lambda| \leq |\lambda_1| \Rightarrow [u + G_r(u) - \lambda L_r(u) = 0 \Leftrightarrow u \equiv 0] \quad (r = 1, \ldots, 7)$$

DEMOSTRACIÓN Supongamos que u satisface $u + G_r(u) = \lambda L_r(u)$ multiplicando por u tenemos

$$(u - \lambda L_r(u), u) + (G_r(u), u) = 0$$

por el lema 1 del apéndice tenemos que

$$|\lambda_1| \leq \frac{\|u\|^2}{|(L_r(u), u)|}.$$

Si $|\lambda| < |\lambda_1|$ podemos concluir que

$$(u, u) - (\lambda L_r(u), u) \geq \|u\|^2 - |\lambda|\,|(L_r u, u)| > 0$$

Además $(G_r(u), u) = \|G_1(u, u)\|^2 \geq 0$

$\therefore$ necesitamos que $u = 0$ para que

$$(u - \lambda L_r(u), u) + (G_r(u), u) = 0.$$

Si $\lambda = \lambda_1$ y $|\lambda_1| < \frac{\|u\|^2}{|(L_r u, u)|}$ hacemos exactamente lo que acabamos de hacer.

Si $|\lambda_1| = \frac{\|u\|^2}{|(L_r u, u)|}$ entonces sabemos que u es eigenvector de L_r, aplicamos el lema y tenemos $(G_r u, u) > 0$ $\cancel{\text{?}}$, $\therefore$ $u \equiv 0$.

Q.E.D.

Ahora reformulemos la ecuación $u + G_r u - \lambda L_r u = 0$ poniendo $\lambda = 1/\mu$, $u = 1/\sqrt{|\mu|} \cdot w$. tenemos: (donde sgn = signo de λ)

$$\sqrt{|\lambda|}\, w + G_r(\sqrt{|\lambda|}\, w) = 1/\mu \, L_r(\sqrt{|\lambda|}\, w)$$

$$\sqrt{|\lambda|}\, w + |\lambda|^{3/2} G_r(w) = |\lambda|^{3/2} L_r(w)\, sgn$$

$$\frac{|\lambda|^{1/2}}{|\lambda|^{3/2}} w = L_r(w)\, sgn - G_r(w)$$

$$|\mu|\, w = L_r(w)\, sgn - G_r(w)$$

$\therefore$ LA ECUACIÓN QUEDA

$$\mu w = L_r(w) - sgn\, G_r(w)$$

Supondremos que:

$$F_{o_{1r}} = F_{o_{2r}} = 0 \quad \text{en } \Gamma_3$$

$$F_o = F_{o_1} = 0 \quad \text{en } \Gamma_4$$

Sea $D = \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \exists\, w_\lambda \neq 0 \text{ t.q. } \lambda L_r(w_\lambda) = w_\lambda \}$

TEOREMA ... $\lambda_0 \in D \Rightarrow \exists\, \varepsilon, \rho > 0$ t.q. $\forall \lambda \in [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0]$ si $\lambda_0 > 0$ y $\forall \lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon]$ si $\lambda_0 < 0$
se tiene que:

$$\left[\|w\| \le \rho \text{ y } \frac{1}{\lambda} w = L_r(w) - sgn\, G_r(w) \right] \Longleftrightarrow w \equiv 0.$$

Demostración. Sean $u_1, u_2, \ldots, u_p$ las eigenfunciones normalizadas correspondientes a λ.

Si $P : \Omega_r \to \langle u_1, \ldots, u_p \rangle^{\perp \Omega_r}$ es la proyección de Ω_r en el ortogonal del espacio generado por los vectores $u_1, \ldots, u_p$ tenemos que

$$1/\lambda\, w = L_r(w) - sgn\, G_r(w)$$

$\Leftrightarrow$ $P(\mu w - L_r(w) + sgn\, G_r(w)) = 0$ y $(\mu w - L_r w + sgn\, G_r w, u_j) = 0$
$j = 1, \ldots, p.$

Si escribimos $w = y + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j$ (ver lema) y sustituimos en las dos en las dos igualdades anteriores, observando que $P(L_r(y)) = L_r(y)$ y que $P(L_r(\sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j)) = 0$, obtenemos:

$$(L_r - M)(y) = \operatorname{sgn} P\left(G_r\left(y + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j\right)\right)$$

y también p ecuaciones

$$(M - M_0)\varepsilon_j = -\operatorname{sgn}\left(G_r\left(y + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j\right), u_j\right), \quad j = 1, \dots, p$$

Sea $e^2 = \|\sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j\|^2$.

La aplicación $T_e y = \operatorname{sgn} (L_r - M)^{-1} P G_r (y + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j)$ está bien definida para $M \in (M_0 - \varepsilon', M_0 + \varepsilon')$ por el lema . Ahora hagamos la demostración en dos etapas

<u>1era etapa</u>. Demostremos la existencia de un punto fijo para T_e. Esto lo haremos de dos formas, primero usando el teorema de contracción de Banach y después usando el teorema de la función implícita.

Para aplicar el teorema de contracción de Banach demostremos que $\exists\, r_0, e_0 \in \mathbb{R}^+$ t.q. si $\|y\| \le r_0$ entonces $\|T_e y\| \le r_0$ siempre y cuando e cumpla con la condición $e \le e_0$. Para esto observemos que:

$$\|T_e y\| = \|(L_r - M)^{-1} \operatorname{sgn} P G_r (y + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j)\| \le$$
$$\|(L_r - M)^{-1} P\| \, \|G_r(y + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j\| \le$$
$$K\|y + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j\|^3 \le K(\|y\| + e)^3.$$

Si $\|y\| \leq r$ entonces $\|T_e y\| \leq K(r+e)^3$.
Queremos ver cuando podemos tener $K(r+e)^3 \leq r$.
Para esto consideremos la función $f_e(r) = K(r+e)^3 - r$
y estudiemos que condiciones hay que dar sobre e
y sobre r para tener $f_e(r) \leq 0$
Ahora

$$f_e(0) = Ke^3 > 0 \quad , \quad f_e(r) \xrightarrow{r \to \infty} \infty,$$

$$f_e'(0) = 3Ke^2 - 1 \quad , \quad f_e'(r) = 3K(r+e)^2 - 1,$$

$$f_e'(r) = 0 \quad \text{si} \quad r+e = \pm \frac{1}{(3K)^{1/2}}$$

entonces hay un punto crítico para $r \geq 0$ solo si $e \leq (3K)^{-1/2}$ (el otro es negativo). Si $e > (3K)^{-1/2}$ se tiene que $f_e' > 0$ y $\therefore$ $f_e > 0$. Así pues hay que restringir e. Para tener r s.t. $f_e \leq 0$ necesitamos que

$$f((3K)^{-1/2} - e) \leq 0.$$

Ahora ya que

$$f((3K)^{-1/2} - e) = K((3K)^{-1/2})^3 - (3K)^{-1/2} + e$$
$$= e - (1 - 1/3)(3K)^{-1/2}$$
$$= e - \frac{2}{3}(3K)^{-1/2}$$

entonces $e \leq 2/3\,(3K)^{-1/2}$.

Tomando $e_0 = 2/3\,(3K)^{-1/2}$, $r_0 = 1/3\,(3K)^{-1/2}$.
Se tiene que $K(r_0+e_0)^3 = r_0$. $\therefore$ si $\|y\| \leq r_0$
$e = e_0$ se tiene que

$$\|T_e y\| \leq K(\|y\| + e)^3 \leq K(r_0+e_0)^3 = r_0 .$$

Ahora demostremos que T_ε es una contracción

$$\|T_\varepsilon y - T_\varepsilon z\| = \|(L_r - u)^{-1} \operatorname{sgn} P(G_r(y+\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j) - G_r(z+\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j))\|$$

$$\le K(\|y-z\|\,\|y+\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j\|^2 + \|y-z\|\,\|z+\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j\|^2$$

$$+ \|y-z\|\,\|y+\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j\|\,\|z+\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j\|)$$

$$\le K\|y-z\|(\|y+\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j\| + \|z+\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j\|)^2$$ (ver pag.)

$$\le K(\|y\|+\|z\|+2\varepsilon)^2\,\|y-z\|$$

$$\le K(\tfrac{2}{3}(3K)^{-1/2}+2\varepsilon)^2\,\|y-z\| = \tilde K\,\|y-z\|$$

si $\|y\|, \|z\| \le r_0 = \frac{1}{3}(3K)^{-1/2}$.

Ahora para tener $\tilde K < 1$ observemos que si $\frac{2}{3}(3K)^{-1/2} + 2\varepsilon < K^{-1/2}$ entonces

$$2\varepsilon < K^{-1/2}\left(1-\tfrac{2}{3\sqrt3}\right).$$

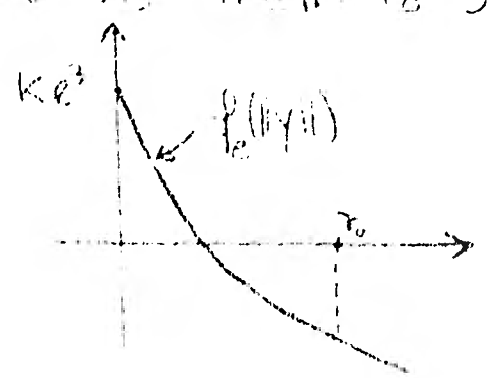
Por ejemplo si tomamos $\varepsilon \le \varepsilon_1 = \frac{1}{3}(3K)^{-1/2} < \varepsilon_0$, $\tilde K = \frac{16}{27} < 1$.

Así aplicando el teorema de la contracción hemos demostrado que para cada $\varepsilon \le \varepsilon_1$ $\exists!$ punto fijo en la bola $\|y\| \le r_0$.

[illegible] el punto fijo es ...

[illegible] $= K(\|y\|+\varepsilon)^3 \Rightarrow f_\varepsilon(\|y\|) > 0$

[illegible] $\|y\| = r_0$ se tiene en la gráfica de f_ε



Calculando se tiene que $f_e(2k\varepsilon^3)<0$, $\therefore$ el punto fijo es tal que

$$\|y\| \leq 2k\varepsilon^3.$$

Ahora usaremos el teorema de la función implícita (ver [ ] pag. 115 y 134) para demostrar la existencia y unicidad del punto fijo.

Para esto consideremos el mapeo

$$F(\cdot,\cdot,\cdot): \mathbb{R}\times\mathbb{R}^p\times \text{Dominio}(L_r-\mu) \longrightarrow W_2^2$$

$$(\mu,\ x,\ y) \longmapsto (L_r-\mu)y - \operatorname{sgn}P\, G_r(x+y)$$

(Aqui $x=\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j$).

Ya está probado que F es continuo. también se tiene que $F(\mu,0,0)=0$. (μ en una vecindad de μ_0).

Ahora calculemos las derivadas parciales de F

$$F(\mu,x+h,y+l)-F(\mu,x,y)=(L_r-\mu)l-\operatorname{sgn}P(G_r(x_1+y_1)-G_r(x+y))$$

donde $x_1=x+h$, $y_1=y+l$. Hagamos $x_1+y_1=z+k$, $x+y=z$ entonces lo anterior es igual a:

$$(L_r-\mu)l-\operatorname{sgn}P[G_r(z+k,z+k,z+k)-G_r(z,z,z)]$$

$$=(L_r-\mu)l-\operatorname{sgn}P[G_r(k,z,z)+G_r(z,k,z)+G_r(z,z,k)$$
$$+G_r(z,k,k)+G_r(k,k,z)+G_r(k,z,k)+G_r(k,k,k)]$$

(ya que G_r es trilineal).

Los últimos 4 sumandos son cuadráticos en k, mientras que los 4 primeros son lineales en k de esta observación podemos concluir que:

$$F_x(\mu,x,y)h = -\operatorname{sgn} P\left[G_r(h,z,z) + G_r(z,h,z) + G_r(z,z,h)\right]$$

$$F_y(\mu,x,y)l = (L_r-\mu)l - \operatorname{sgn} P\left[G_r(l,z,z) + G_r(z,l,z) + G_r(z,z,l)\right]$$

$$F_\mu(\mu,x,y)\nu = \nu y$$

$\therefore$ se tiene que F_x es continua y también F_μ.
Además $F_y(\mu_0,0,0)l = (L_r-\mu_0)l$ es un homeomorfismo
$\therefore$ por el teorema de la función implícita
$\exists!\ y = y(\mu,x) \in C^1$ t.q. $F(\mu,x,y(\mu,x)) = 0$
$y(\mu,0)=0$, μ cerca de μ_0 $\quad F(\mu,0,0)=0$
en una vecindad de $(\mu_0,0)$ y y en una vecindad de cero.

Además tenemos las siguientes expresiones:

$$y_\mu(\mu,x)\nu = -\left[F_y(\mu,x,y(\mu,x))\right]^{-1} F_\mu(\mu,x,y(\mu,x))\nu \Rightarrow y_\mu(\mu,0)=0$$

$$y_x(\mu,x)\tilde{x} = -\left[F_y(\mu,x,y(\mu,x))\right]^{-1} F_x(\mu,x,y(\mu,x))\tilde{x} \Rightarrow y_x(\mu,0)=0$$

Podemos calcular $F_{x\mu}(\mu,x,y)(\nu,h)=0$.

$$F_{y\mu}(\mu,x,y)(\nu,l) = -\nu l \Rightarrow F_{y\mu x} = F_{yy\mu} = F_{y\mu\mu} = 0$$

$$F_{xx}(x,y,\mu)(h_1,h_2) = -\operatorname{sgn} P\big(G_r(h_1,h_2,z) + G_r(h_1,z,h_2) + G_r(h_2,h_1,z) + G_r(z,h_1,h_2) + G_r(h_2,z,h_1) + G_r(z,h_2,h_1)\big)$$

F_{yy} es similar con l_1 y l_2.

$F_{xxx}(x,y,\mu)(h_1,h_2,h_3) = F_{xx}(h_3,0,\mu)(h_1,h_2)$ ya que F_{xx} es lineal
$\therefore$ Derivadas de orden 4 son cero y F es analítica. El teorema de la función implícita nos asegura que $y(x,\mu)$ es analítica en x y μ (ver [ ] pag. 134).
Ahora daremos una expresión para $y(x,\mu)$. Para esto

Consideremos el desarrollo

$y(x,\mu) = y(0,\mu) + y_x(0,\mu)x + \tfrac{1}{2} y_{xx}(0,\mu)x^2 + \dots$

Los dos 1^{eros} términos se anulan. Como

$$F_x(x,\mu,y(x,\mu))x + F_y(x,\mu,y(x,\mu))\, y_x(x,\mu)x = 0$$

(ya que $F(x,\mu,y(x,\mu))=0$), derivando con respecto a x tenemos

$$F_{xx}(x,\mu,y(x,\mu))(x,x) + F_{xy}(x,\mu,y(x,\mu))(x, y_x(x,\mu)x)$$
$$+ F_{xy}(x,\mu,y(x,\mu))(y_x(x,\mu)x,x) + F_{yy}(x,\mu,y(x,\mu))(y_x x, y_x(x,\mu)x)$$
$$+ F_y(x,\mu,y(x,\mu))\, y_{xx}(x,\mu)(x,x) = 0.$$

En $x=0$, $y(0,\mu)=0 \therefore x+y=z=0$ y $F_{xx}(0,\mu,0)=0$.
también $0 = F_{xy}(0,0,\mu) = F_{yy}(0,0,\mu)$, y

$$F_y(0,0,\mu)\, y_{xx}(0,\mu)(x,x) = 0 \implies y_{xx}(0,\mu) = 0.$$

Derivando otra vez con respecto a x y evaluando en cero tenemos:

$$F_{xxx}(0,0,\mu)(x,x,x) + F_y(0,0,\mu)\, y_{xxx}(x,x,x) = 0 \quad \text{con } y_x = y_{xx} = 0.$$

$$\therefore y_{xxx}x^3 = -(L_r-\mu)^{-1} F_{xxx}(0,0,\mu)x^3 = 6(L-\mu)^{-1}\operatorname{sgn} PG_r(x,x,x)$$

$\therefore$ la expresión buscada es

$$y(x,\mu) = (L_r-\mu)^{-1}\operatorname{sgn} PG_r(x,x,x) + O(x^4).$$

Esta expresión la usaremos en el siguiente teorema

<u>2^{da} etapa</u> Ahora demostremos que si $\mu > \mu_0$, $\mu_0>0$ o si $\mu<\mu_0$, $\mu_0<0$ y $y \in B_{r_0} = \{y \mid \|y\| \le r_0\}$ es el punto fijo de T_e, entonces $\exists\, \delta>0$ t.q. $e<\delta \implies$

$$\left\{ \left[(\mu-\mu_0)\varepsilon_j = -\operatorname{sgn}\left(G_r\left(y + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j v_j\right), v_j\right),\ j=1,\dots,p \right] \implies e = 0 \right\}$$

Multiplicando por ε_j y sumando sobre j de 1 a P obtenemos:

$$\frac{(\mu-\mu_0)\,\alpha^2}{\mathrm{sgn}} = -\left(G_r\left(y+\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j\right), \sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j\right)$$

Desarrollando el lado derecho tenemos

$$\left(G_r\left(y+\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j\right), \sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j\right) = R + \left(G_r\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j , \sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j\right)$$

donde

$$R=\Big(G_r(y,y,y)+G_r(y,y,\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j)+G_r(y,\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j,y)+G_r(\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j,y,y)$$
$$+G_r(y,\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j,\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j)+G_r(\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j,y,\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j)+G_r(\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j,\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j,y),$$
$$\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j\Big)$$

Debido a que G_r es trilineal y continua y gracias a la estimación que tenemos para la y resulta que

$$|R| \leq K'\left[\alpha^{10}+3\alpha^{8}+3\alpha^{6}\right]$$

Tomando $\alpha<1$ se tiene $|R| \leq C\alpha^6$.

Ahora tomemos $v\in\mathbb{R}^p$, $\|v\|=1$. Por el lema sabemos que $(G_r v, v)>0$, por continuidad se tiene que $\exists\, K>0$ t.q.

$$(G_r v, v) \geq K>0 \qquad \forall v\in\mathbb{R}^p,\ \|v\|=1$$

Pongamos $\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j = v\alpha$. Entonces se sigue que

$$\left(G_r\left(\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j\right), \sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j\right) = (G_r(v\alpha), v\alpha)$$
$$= \alpha^4 (G_r v, v) \geq \alpha^4 K.$$

Sabemos que $|R| \leq C\alpha^6$, $\therefore$ $|R| < \frac{K\alpha^4}{2}$, si $\alpha^2 < \frac{K}{2C}$

De aqui se sigue que

$$-\left(G_r \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j , \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j\right) - R < 0$$

$$\therefore \quad -\left(G_r (y + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j), \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j\right) < 0$$

Ahora como siempre $\frac{(\mu-\mu_0)}{sgn} \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j^2 \geq 0$ resulta que la igualdad

$$\frac{\mu-\mu_0}{sgn} \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j^2 = -\left(G_r(y + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j), \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j\right)$$

$$= -R - \left(G_r\left(\sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j\right), \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j\right)$$

es imposible a menos que $\varepsilon_j = 0$, $j=1,\dots,p$, lo que a su vez implica que $\|y\| = 0$ y $\therefore$ la única solución que existe es la trivial.

Como $\mu_0 > 0$, $\mu > \mu_0 \Rightarrow \lambda < \lambda_0$ y si $\mu_0 < 0$, $\mu \leq \mu_0 \Rightarrow \lambda \geq \lambda_0$

Q.E.D.

<u>TEOREMA</u> Si la multiplicidad de μ_0 es 1 ($x = \varepsilon u$, $\|u\| = 1$) entonces hay bifurcación a la derecha si $\mu_0 > 0$, a la izquierda si $\mu_0 < 0$; las soluciones bifurcadas forman una curva analítica en ε es decir:

$$sgn(\mu-\mu_0) = -\alpha_2 \varepsilon^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n \varepsilon^{2n} \quad \text{con } \alpha_2 > 0$$

$$x + y = \varepsilon u + \sum_{n\geq 1} \varepsilon^{2n+1} v_n \quad \text{con } v_n \perp u.$$

y las series son convergentes para $|\varepsilon| < \varepsilon_0$.

<u>Demostración</u>: La ecuación de bifurcación es

$$sgn(\mu-\mu_0)\varepsilon = -\alpha\varepsilon^3 - R(\varepsilon,\mu)$$

con $\alpha = (G_r(u), u) > 0$ por el lema

$$R = \big(G_r(y(\varepsilon u,\mu)) + \varepsilon^2 G_r(y,u,u) + 2\varepsilon\, G_r(y,y,u) + \varepsilon G_r(u,y,y) + 2\varepsilon^2 G_r(u,y,u), u\big)$$

Sabemos que $y(\varepsilon v, \mu)$ es analítica en ε y μ y

$y(\varepsilon v, \mu) = \varepsilon^3 (L_r - \mu)^{-1} \operatorname{sgn} P\, G_r(v,v,v) + O(\varepsilon^4)$

Si definimos $z(\varepsilon v, \mu) = \dfrac{y(\varepsilon v, \mu)}{\varepsilon^3}$

entonces $z(\varepsilon v, \mu)$ es analítica (es decir la serie es absolutamente convergente, todas las derivadas con respecto a μ y ε existen) y $z(-\varepsilon, \mu) = z(\varepsilon, \mu)$.

$$R(\varepsilon, \mu) = \varepsilon^5 (\varepsilon^4 G_r(z) + G_r(z, v, v) + 2\varepsilon^2 G_r(z, z, v) + \varepsilon^2 G_r(v, z, z) + 2 G_r(v, z, v), v)$$
$$= \varepsilon^5 H(\varepsilon, \mu) \text{ con } H(\varepsilon, \mu) \text{ analítico con}$$

respecto a ε y μ. $R(-\varepsilon, \mu) = -R(\varepsilon, \mu)$ y $H(-\varepsilon, \mu) = H(\varepsilon, \mu)$

La ecuación de bifurcación tiene una solución $\varepsilon = 0$ (solución $x + y = 0$ trivial) y si $\varepsilon \neq 0$ se escribe como

$$\operatorname{sgn}(\mu - \mu_0) + \alpha \varepsilon^2 + \varepsilon^4 H(\varepsilon, \mu) = g(\mu, \varepsilon) = 0 .$$

Ahora $g(\mu_0, 0) = 0$,

$g_\mu(\mu_0, 0) = \operatorname{sgn} = \pm 1$

g es analítica en ε y μ.

$\Rightarrow$ (por el teorema de la función implícita) $\exists!\ \mu(\varepsilon)$ t.q.

$g(\mu(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ para $|\varepsilon| < \varepsilon_0$.

Además $\mu(\varepsilon)$ es analítica en ε.

Como $g(\mu, -\varepsilon) = g(\mu, \varepsilon)$ y $\mu(\varepsilon)$ es única entonces

$\mu(\varepsilon) = \mu(-\varepsilon)$ $\therefore$ μ es par.

La serie para μ solo tiene potencias pares, además a partir de $g(\mu, \varepsilon) = 0$ el primer término de la serie es $-\alpha$.

Finalmente $y(\varepsilon v, \mu)$ es analítica en ε y μ entonces $y(\varepsilon v; \mu(\varepsilon))$ es analítica en ε con la primera potencia ε^3,

$$y(-\varepsilon v, \mu(-\varepsilon)) = -y(\varepsilon v, \mu(\varepsilon)).$$

Las potencias son impares

Esto justifica los calculos formados de esas series

$$\lambda = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_0 + \mu - \mu_0} = \frac{1}{\mu_0\left(1 + \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\right)} = \frac{1}{\mu_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0}\right)^n$$

Para $\left|\frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0}\right| < 1$

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0^2} + \cdots\cdots$$

$$= \lambda_0 - \frac{\mu - \mu_0}{|\mu_0|^2} + \cdots$$

$$= \lambda_0 + \frac{\alpha_2 \varepsilon^2}{|\mu_0| \mu_0} + \sum_{n \geq 2} \beta \varepsilon^{2n}$$

Q.E.D.

<u>TEOREMA:</u> $\forall \lambda_n \in \sigma(L_i)$ resulta que $(0, \lambda_n)$ es un punto de bifurcación. La bifurcacion es a la derecha si $\lambda_n > 0$ y a la izquierda si $\lambda_n < 0$. (Suponemos $\mu_0 = 1/\lambda_n > 0$. Lo mismo se hace par $\mu_0 < 0$).

<u>Demostración</u>: Demos las ecuaciones

XIII $\quad (L_r - \mu) y = P G_r(y + v) \qquad v = \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j v_j$

XIV $\quad (\mu - \mu_0) c_k = -(G_r(y + v), v_k) \qquad k = 1, \cdots, p$

Supongamos que ya tenemos el punto fijo y que satisface XIII

a) Demostremos primero que

$$(G_r(x),\cdot)$$

es la derivada de $(G_r(x),x)/4$. Para esto consideremos la diferencia.

$$(G_r(x+h),x+h)-(G_r(x),x)=(G_r(x+h)-G_r(x),x)+(G_r(x+h),h)$$

$$=(G_r(x+h,\hat{G}_1(x+h,x+h))-G_r(x,\hat{G}_1(x,x)),x)$$
$$+(G_r(x+h,\hat{G}_1(x+h,x+h)),h)$$

$$=(G_r(x,2\hat{G}_1(x,h)+\hat{G}_1(h,h))+G_r(h,\hat{G}_1(x,x)+2\hat{G}_1(x,h)$$
$$+\hat{G}_1(h,h)),x)$$
$$+(G_r(x,\hat{G}_1(x,x)+2\hat{G}_1(x,h)+\hat{G}_1(h,h)),h)$$
$$+(G_r(h,\hat{G}_1(x+h,x+h),h)$$

Ahora reagrupando tenemos:

$$(G_r(x,2\hat{G}_1(x,h)),x)+(G_r(h,\hat{G}_1(x,x)),x)+(G_r(x,\hat{G}_1(x,x)),h)$$

$$+\boxed{\begin{array}{l}(G_r(x,\hat{G}_1(h,h))+G_r(h,2\hat{G}_1(x,h)+\hat{G}_1(h,h)),x)\\ +(G_r((x,2\hat{G}_1(x,h)+\hat{G}_1(h,h)),h)\\ +(G_r(h,\hat{G}_1(x+h,x+h)),h)\end{array}}$$

Usando la trilinealidad y el hecho de que G_r es acotado se tiene que los términos encerrados en el rectángulo son menores o iguales que Kh^2.

Ahora aplicando la proposición a los 3 sumandos que no estan en el rectangulo podemos escribir que la expresión de arriba es igual a

$$4(\hat{G}_1(x,h), \hat{G}_1(x,x)) + O(h^2)$$

$$= 4((G_r(x,x,x), h) + O(h^2)$$

Asi terminamos la demostracion de a)

b) Ahora consideremos

$$g(\mu, v) = \frac{(\mu_0 - \mu)\|v\|^2}{2} + \frac{((L_r - \mu)\, y(v,\mu), y(v,\mu))}{2}$$

$$+ \frac{(G_r(v + y(v,\mu)), v + y(v,\mu))}{4} : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$$

μ fijo, entonces

$$g(v+h) - g(v) = (\mu_0 - \mu)\left((v,h) + \frac{\|h\|^2}{2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}((L_r - \mu)\, y(v+h), y(v+h)) - \frac{1}{2}((L_r - \mu)\, y(v), y(v))$$

$$- \frac{1}{4}(G_r(v+h+y(v+h)), v+h+y(v+h))$$

$$+ \frac{1}{4}(G_r(v+y(v)), y(v)+v).$$

Ahora usando el teorema de la funcion implícita ya se demostró que $y \in C'$. $\therefore$ podemos escribir $y(v+h) = y(v) + y'(v)\, h + o(h^2)$. Sustituyendo esto se obtiene que

$$g(v+h) - g(v)$$

es igual a:

$$(M-M_0)(v,h)+o(h^2)$$
$$+\tfrac{1}{2}\left[\left((L_r-M)y'(v)h,\,y(v)\right)+\left((L_r-M)y(v),\,y'(v)h\right)\right]+o(h^2)$$
$$-\tfrac{1}{4}\left(G_r(v+h+y(v)+y'(v)h),\,v+h+y(v)+y'(v)h\right)$$
$$+\tfrac{1}{4}\left(G_r(v+y(v)),\,y(v)+v\right)+o(h^2).$$

Ahora usando el hecho de que L_r-M es auto-adjunto y también que a primer orden se tiene que:

$$\tfrac{1}{4}\left[(G_r(x+k),x+k)-(G_r(x),x)\right]=(G_r(x),k)$$

poniendo $x=v+y(v)$ y $k=h+y'(v)h$ podemos escribir que la expresión anterior es igual a

$$(M-M_0)(v,h)+((L_r-M)y(v),y'(v)h)-(G_r(y(v)+v),h+y'(v)h)+o(h^2) \qquad \underline{XV}$$

Ahora considerando la ecuación $\overline{\underline{XIII}}$ se tiene que

$$((L_r-M)y(v),y'(v)h)=(PG_r(y(v)+v),y'(v)h).$$

$y(v)\in\mathcal{R}(L_r-M)$, por definición de derivada se tiene que $y'(v)h\in\mathcal{R}(L_r-M)$ (Rango de L_r-M)

$$\therefore\quad (PG_r(y(v)+v),y'(v)h)=(G_r(y(v)+v),y'(v)h)$$

$\therefore$ de la ecuación queda

$$g(v+h)-g(v)$$
$$=(M_0-M)(v,h)-(G_r(y(v)+v),h)+o(h^2)$$

Ahora tomando $h=tU_k$ donde $v=\sum_{k=1}^{p}\varepsilon_j v_j$, U_k son los eigenvectores de L_r en M_0 ortogonalizados.

$\therefore\ g(v+\tau U_k)-g(v)$
$$= \tau(M_0-M)\varepsilon_k - \tau(G_r(v+y(v)),U_k)+O(\tau^2)$$

$$\therefore\ \frac{\partial g}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = (M_0-M)\varepsilon_k - (G_r(v+y(v)),U_k)$$

$\therefore$ los puntos críticos de g son soluciones de las ecuaciones XIII y XIV. El inverso es obvio.

Ahora veamos que g tiene en realidad puntos críticos.

Para esto pongamo $\|v\|=r$. Recordando que $\|y\|\leq k\|v\|$ y usando el hecho de que G_r es trilineal y acotado podemos escribir

$$g(v,M)=(M_0-M)\frac{r^2}{2}-\frac{1}{4}(G_r(v),v)+O_M(r^6).$$

Por la positividad y la homogeneidad, haciendo lo que hicimos en la 2da etapa del teorema [14], se tiene que $(G_r(v),v)>\alpha r^4$. Por trilinealidad y continuidad también se sabe que

$$|(G_r(v),v)|\leq k r^4.$$

Ahora es claro que $\exists r_0$ t.q. si $r\leq r_0$ entonces.

$$g(v,M_0)<-\frac{\alpha}{4}r^4+O_{M_0}(r^6)<-\frac{\alpha}{8}r^4$$

Ahora, $O_M(r^6)$ depende de M continuamente

$\therefore\ \exists\varepsilon$ t.q. $|M_0-M|<\varepsilon \Rightarrow -\frac{\alpha}{4}r^4\,O_M(r^6)<-\frac{\alpha}{8}r^4$ (si $r<r_0$)

$\therefore$ si $\|v\| = r_0$, $-1/4\,(G_r(v), v) + O(r^6) < -\frac{r}{8} r_0^4$

Si ADEMAS pedimos que μ este suficientemente cercano a μ_0 para satisfacer la desigualdad

$\mu_0 - \mu < \frac{r_0^2 \alpha}{8}$ tendremos que si $\|v\| = r_0$,

$$g(v,\mu) = (\mu_0 - \mu)\frac{r_0^2}{2} - \frac{1}{4}(G_r(v), v) + O_\mu(r_0^6)$$

$$\leq \frac{\alpha r_0^4}{16} - \frac{\alpha}{8} r_0^4 = -\frac{\alpha r_0^4}{16}$$

$\therefore$ para μ t.q. $|\mu_0 - \mu|$ es suficientemente pequeño, $\exists\, r_0$ t.q. si $\|v\| = r_0$ tenemos que

$$g(v,\mu) \leq -\frac{\alpha r_0^4}{16} < 0$$

Por otro lado para r suficientemente pequeño sucede que $g(v,\mu) > 0$ si $\mu_0 - \mu > 0$ ya que el termino de orden r^2 domina.

De aqui concluimos que en la bola $\|v\| \leq r_0$, $g(v,\mu)$ tiene un máximo estrictamente positivo. (el punto cero corresponde a un minimo local).

Notemos que si $r < r_0$ se tiene que

$$g(v,\mu) \leq (\mu - \mu_0)\frac{r^2}{2} - \frac{\alpha r^4}{2}$$

y esto es menor que cero si $r^2 > \frac{\mu - \mu_0}{2}$

$\therefore$ para el máximo se tiene que

$$r^2 = \|v\|^2 < \frac{\mu - \mu_0}{2} \to 0 \quad \text{si } \mu \to \mu_0$$

∴ hay efectivamente un punto de bifurcación y para cada μ t.q. $\mu - \varepsilon < \mu < \mu_0$ hay un par de soluciones $\pm u$, con $\|u\| \to 0$ si $\mu \to \mu_0$.

<u>Nota</u>. Usando el "género" se puede probar que hay p pares de soluciones $(u, -u)$.

APÉNDICE.

ESPACIOS DE SOBOLEV y TRAZAS.

Denotemos por α al vector cuyas coordenadas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ son enteros no negativos, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$. Denotemos también

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N} u}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_N^{\alpha_N}},$$

usando la notación $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$ tenemos

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Si $|\alpha| = 0$, $D^\alpha u = u$.

Ahora definamos el funcional $\| \ \|_{m,p}$, donde m es un entero no negativo y $1 \leq p \leq \infty$, así

$$\|u\|_{m,p} = \Big\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \Big\}^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty$$

(donde $\| \ \|_p$ es la norma L^p, $1 \leq p \leq \infty$).

Ahora definamos

$$H^{m,p}(\Omega) = \overline{\{u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty\}}^{\|\cdot\|_{m,p}}$$

(la barra denota cerradura respecto a la norma indicada)

$$W_p^m(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para } 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

aquí $D^\alpha u$ es la derivada débil de u definida como la función $v \in L^2(\Omega)$ .t.

$$\int_\Omega v\varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u D^\alpha \varphi\, dx \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Se tiene un teorema de Meyers y Serrin que afirma que

$$H^{m,p}(\Omega) \equiv W_p^m(\Omega) \quad \text{para todo dominio } \Omega.$$

(ver [ ], pag. 52). Los espacios $W_p^m(\Omega)$ son espacios de Banach (ver [ ], pag. 45) en particular $W_2^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio cerrado. Para toda función continua en Ω y especialmente para toda función $u \in C^\infty(\Omega)$, los valores $u(s)$ en la frontera están dados de manera única. La función $u(s)$ la llamaremos la traza de la función $u(x) \in C^\infty(\Omega)$ en $\partial\Omega$.

La traza de la función $u(x) \in C^\infty(\Omega)$ es obviamente continua en $\partial\Omega$ y $\therefore$ es de cuadrado integrable en $\partial\Omega$ $\therefore$

$$u(x) \in C^\infty(\Omega) \Rightarrow u(s) \in L_2(\partial\Omega).$$

Ahora para extender el concepto de traza a funciones de $W_2^m(\Omega)$, $m \geq 1$, se tiene el siguiente teorema (ver [ ] pag. 15 y [ ] pag 337)

Sea Ω un dominio con una frontera de Lipschitz. Entonces existe exactamente un operador lineal acotado γ que mapea el espacio $W_2^1(\Omega)$ en el espacio $L_2(\partial\Omega)$. Para $u(x) \in C^\infty(\Omega)$ se tiene $\gamma u(x) = u(s)$.

(para la definición de frontera de Lipschitz vease [ ] pag. 324)

De hecho hay un teorema mas general que afirma:

Si $\Omega \in \mathfrak{N}^{(m),1}$, $p>1$ (para definición de $\mathfrak{N}^{(m),1}$ ver [ ], pag. 55. Esto generaliza la condición de que $\partial\Omega$ sea de Lipchitz), entonces el mapeo

$$U \longmapsto \gamma(U) = (\gamma_0 U, \ldots, \gamma_{m-1} U)$$

donde $\gamma_j U = \dfrac{\partial^j U}{\partial \eta^j}$.

se extiende por continuidad a un isomorfismo y homeomorfismo de

$$W_p^m(\Omega)/\ker\gamma \quad \text{sobre} \quad \prod_{k=0}^{m-1} W_p^{m-k-1/p}(\partial\Omega)$$

(ver [ ] pag. 216, [ ] pag. 104).

A este resultado nos referiremos continuamente llamandolo "El teorema de traza"

Los lemas que siguen se pueden encontrar en cualquier libro de Análisis Funcional.

Lema . Sea A un operador autoadjunto y compacto definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Afirmo que $\exists$ μ_1 eigenvalor de A t.q.

$$|\mu_1| = \sup_{u \neq 0} \frac{|(Au,u)|}{\|u\|^2}$$

y si μ es otro eigenvalor de A se tiene $|\mu| \leq |\mu_1|$.

Dem: Supongamos cierta la primera igualdad, entonces si μ es otro eigenvalor con eigenvector v se tiene

$$\frac{|(Av,v)|}{(v,v)} = |\mu| \leq \sup_{u \neq 0} \frac{|(Au,u)|}{\|u\|^2} = |\mu_1| .$$

Para mostrar la igualdad usemos el hecho de que $\exists$ $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión t.q. $\|u_n\| = 1$ y t.q.

$$|(Au_n,u_n)| \xrightarrow{n \to \infty} \sup_{\|v\|=1} |(Av,v)|$$

ya que el supremo es un punto de acumulación.

Como $\|u_n\| = 1$, $\exists$ una subsucesión $\{u_{n_j}\}$ t.q. $u_{n_j} \xrightarrow{j \to \infty} u$ (Lema). Como A es compacto manda convergencia débil en fuerte (ver [ ], pág.),

$\therefore$ $Au_{n_j} \to Au$.

Ahora

$$|(Au_{n_j}, u_{n_j})| = |(Au_{n_j} - Au, u_{n_j}) + (Au, u_{n_j})|$$

$$\therefore |(Au_{n_j}, u_{n_j})| \to |(Au,u)|$$

Como $|(Au_{n_j}, u_{n_j})| \to \sup_{\|v\|=1} |(Av,v)|$

se tiene que

$$|(Au,u)| = \sup_{\|v\|=1} |(Av,v)| = \|A\|$$

De aquí si aplicamos Schwarz tenemos que

$$\|A\| = |(Au,u)| \leq \|A\| \, \|u\|^2$$

$\therefore \quad \|u\| \geq 1$

también $u_{n_j} \to u$, $\|u_{n_j}\| = 1$ entonces por el Lema

$\|u\| \leq 1 \qquad \therefore \|u\| = 1$

Ahora por Schwarz se tiene que

$$\|A\| = |(Au,u)| \leq \|Au\| \, \|u\| \leq \|A\|$$

$\therefore$ tenemos que

$$|(Au,u)| = \|Au\| \, \|u\|$$

$\therefore \exists \mu_1$ t.q. $Au = \mu_1 u$ y además

$$\sup_{\|v\|=1} |(Av,v)| = |(Au,u)| = |\mu_1| \, \|u\|^2$$

$$\therefore |\mu_1| = \frac{|(Au,u)|}{\|u\|^2}$$

■

Lema Sea H un espacio de Hilbert, $\{u_n\} \subset H$ una sucesión t.q. $\|u_n\| < M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces $\exists$ una subsucesión $\{u_{n_i}\}$ t.q. $u_{n_i} \xrightarrow{w} u$ para alguna u.

Dem. Por la desigualdad de Schwarz tenemos que

$$|(u_n, v_1)| \leq M^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\{(u_n, v_1)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales acotada sabemos que $\exists \{u_{n,(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ subsucesión tal que $\{(u_{n,(i)}, v_1)\}_{i=1}^{\infty}$ converge. Ahora consideremos la sucesión $\{(u_{n,(i)}, v_2)\}_{i=1}^{\infty}$ como $|(u_{n,(i)}, v_2)| \leq M^2$ resulta que $\exists \{u_{n,(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{u_{n,(i)}\}$ t.q. $\{(u_{n,(i)}, v_2)\}$ converge. Siguiendo así encontramos subsucesiones $\{u_{n_k(i)}\}$ de manera que $\{u_{n_{k+1}(i)}\}$ es subsucesión de $\{u_{n_k(i)}\}$ y además $\{(u_{n_k(i)}, u_k)\}$ converge cuando $i \to \infty$. En particular $\{(u_{n_k(i)}, u_j)\}$ converge para $j = 1, 2, \ldots, k$.

Ahora usaremos el conocido truco de diagonalización y consideraremos la sucesión $\{u_{\hat{n}_k(i)}\}$ donde $\hat{n}(k) = n_k(k)$.

Entonces $u_{\hat{n}(k)}, u_{\hat{n}(k+1)}, \ldots\ldots$ es una subsucesión de $\{u_{n_k(i)}\}$ de manera que $\{(u_{\hat{n}(i)}, u_k)\}$ converge cuando $i \to \infty$ $\forall k$.

Ahora $\{(u_{\hat{n}(i)}, w)\}$ converge para $w = \sum_{i=1}^{N} c_i u_i$.

Sea $W = \langle u_1, u_2, \ldots \rangle$, como W es cerrado por definición y por lo tanto completo, dada $w \in W$ existe una sucesión $\{w_i\}$ de combinaciones lineales finitas de u_j tal que $w_i \to w$ en $\mathcal{H}$.

Observemos que

$$(u_{\hat{n}(j)} - u_{\hat{n}(l)}, w) = (u_{\hat{n}(j)} - u_{\hat{n}(l)}, w - w_i) + (u_{\hat{n}(j)} - u_{\hat{n}(l)}, w_i),$$

sea $\varepsilon > 0$ y sea i t.q. $\|w - w_i\| \leq \frac{\varepsilon}{4M}$, entonces

$$|(u_{\hat{n}(j)} - u_{\hat{n}(l)}, w - w_i)| \leq \|u_{\hat{n}(j)} - u_{\hat{n}(l)}\| \, \|w - w_i\| \leq 2M \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea N t.q. $|(u_{\hat{n}(j)} - u_{\hat{n}(l)}, w_i)| \leq \varepsilon/2$ para $j, l > N$ entonces

$|(u_{\hat{n}(j)} - u_{\hat{n}(l)}, w)| < \varepsilon$ si $j, l > N$ y $\therefore$ es de Cauchy y por completez

$(u_{\hat{n}(j)}, w)$ converge cuando $j \to \infty$ $\forall w \in W$.

Para $v \in W^{\perp}$, $(u_{\hat{n}(j)}, v) = 0$ por definición de W.

Para $v \in W_2^2$ tenemos que $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in W$, $v_2 \in W^{\perp}$

$\therefore$ $(u_{\hat{n}(j)}, v) = (u_{\hat{n}(j)}, v_1)$ que converge cuando $j \to \infty$.

Ahora sea $L_{\hat{n}(j)} v = (u_{\hat{n}(j)}, v)$ funcional lineal acotado con $\|L_{\hat{n}(j)}\| = \|u_{\hat{n}(j)}\| \leq M^2$.

Sea $Lv = \lim_{j\to\infty} (u_{\hat{n}(j)}, v)$. Es fácil ver que L es lineal y acotado. Ahora usando el lema de Riesz se tiene que $\exists\, u \in W_2^2$ t. $Lv = (u,v)$ y

$\therefore \quad (u_{\hat{n}(i)}, v) \xrightarrow[i\to\infty]{} (u,v) \quad \forall v \in W_2^2$

i.e. $\quad u_{\hat{n}(i)} \xrightarrow[i\to\infty]{} u$. ■

Lema. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $\{u_n\} \subset \mathcal{H}$.

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u \implies \|u\| \leq \underline{\lim} \|u_n\|$$

Dem. Sea $\|u\| \neq 0$, como $u_n \longrightarrow u$, dado $\varepsilon > 0$, $\exists N$ t.

$|(u,u) - (u_n,u)| \leq \varepsilon'$ si $n > N$ donde $\varepsilon' = \|u\|\varepsilon$

$\therefore \quad |(u,u)| - |(u_n,u)| \leq \varepsilon'$ si $n > N$

$\therefore \quad \|u\|^2 \leq \|u\|\varepsilon + |(u_n,u)| \leq \|u\|\varepsilon + \|u_n\|\,\|u\|$

Dividiendo entre $\|u\|$ obtenemos:

$$\|u\| \leq \varepsilon + \|u_n\| \quad \forall n > N$$

$$\therefore \quad \|u\| \leq \varepsilon + \operatorname*{Inf}_{k>N} \|u_k\|$$

$$\leq \varepsilon + \sup_N \operatorname*{Inf}_{k>N} \|u_k\|$$

$$= \varepsilon + \underline{\lim} \|u_n\|.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitraria concluimos que

$$\|u\| \leq \underline{\lim} \|u_n\|.$$

Cuando $\|u\| = 0$, el resultado es trivial. ■

BIBLIOGRAFIA.

1) L.D. LANDAU AND E.M. LIFSHITZ
Theory of elasticity.
ED. PERGAMON PRESS,

2) A.E.H. LOVE
A treatise on the mathematical theory of elasticity
ED. DOVER

3) Stephen P. Timoshenko AND S. WOINOWSKY-KRIEGER
Theory of Plates AND Shells.
ED. Mc Graw-Hill, Kogakusha

4) Karel Rektorys
Variational Methods in Mathematics, Science AND Engineering.
D. Reidel Publishing. Company

5) ADAMS, Robert A.
Sobolev Spaces
Academic Press, 1975

6) Ize Jorge
Teoria de Existencia para Ecs. en Derivadas Parciales
Comunicaciones Técnicas, IIMAS.

7) Reed Michael and Simon Barry
Methods of Modern Mathematical Physics
Vol. 1. Functional Analysis, Academic Press

8) S.G. Mikhlin.
The Problem of the Minimum of a Quadratic Functional
Holden-Day Series in Math. Physics

9) S.G. Mikhlin.
Mathematical Physics, an Advanced Course
North-Holland Publishing Company

10) Nečas, Jindřich
Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.
Academia, Editeurs, Prague

11) Do Carmo, Manfredo
Differential Geometry of Curves and Surfaces.
Prentice-Hall, Inc.

12) Berger, Melvin S.
Nonlinearity and Functional Analysis
Academic Press

13) Philippe G. Ciarlet and Patrick Rabier.
Les Equations de Von-Kármán.
Lecture Notes in Math. #826, Springer-Verlag.