UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONSECUENCIA LOGICA E INFORMACION SEMANTICA

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

LEOBARDO PEDRO PLATA PEREZ

MEXICO, D. F. 1981

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

I N D I C E

CAPITULO IV

UN CONCEPTO DE INFORMACION SEMANTICA CUANTITATIVA

INTRODUCCION

En este trabajo se abordará el estudio de la Teoría de la Información Semántica y su relación con el concepto de consecuencia lógica. El trabajo consta fundamentalmente de dos partes. En la primera de ellas, formada por el Capítulo I, se aborda el estudio de esta relación en base al concepto de consecuencia lógica de la Lógica clásica. En la segunda, formada por los tres capítulos restantes, se estudia dicha relación tomando como base la Lógica Relevante que es una lógica en la que el concepto de consecuencia lógica pretende ser más adecuado al sentido común que tiene el término.

Con respecto a la interrelación que existe entre la Teoría de la Información Semántica y el concepto de consecuencia lógica existen dos aspectos, o si se quiere, dos formas opuestas de señalarla:

1o.- Desde un primer punto de vista, la interrelación está dada por la construcción de una Teoría de la Información Semántica, basada en la existencia de un sistema lógico de deducción, con un concepto de consecuencia lógica en la teoría coherente y adecuado a dicho sistema. Los objetivos principales de dicha teoría serían: por un lado, determinar cual es la "información" de un enunciado (proposición), y por otro lado, cuál es la "cantidad de información" numérica que contiene dicho enunciado. La finalidad, es pues, la formulación de dicha Teoría de Información Semántica en base a un sistema lógico que se considera ya dado como primario.

2o.- Desde un segundo punto de vista, punto de vista lógico, la interrelación estaría dada por el esclarecimiento del concepto mismo de consecuencia lógica en base a conceptos de la teoría de la información semántica como primaria.

En la primera parte de este trabajo, Capítulo-I, después de unas breves convenciones, se expone la Teoría de la Información Semántica desarrollada por R. Carnap y Y. Bar-Hillel en base a la Lógica clásica. Como se verá, en este teoría ocurren cosas que pueden considerarse contrarias al sentido común, a la intuición; en particular se tiene que todo enunciado que es una tautología (enunciado demostrable en la Lógica Clásica), no proporciona ninguna información. Por ejemplo: $p \,\&\, q \longrightarrow p$ no da según esta teoría información alguna. Este tipo de "paradojas" se ponen más en duda, desde un punto de vista lógico, cuando se invierten los papeles y se trata de explicar el concepto de consecuencia lógica en base a dicha teoría de información semántica. Esto resulta claro cuando se ve que, en concordancia con los resultados sintácticos, tiene lugar la consecuencia lógica de una proposición verdadera a partir de cualquier otra proposición, es demostrable ---- $p \supset (q \supset p)$, "si p es verdadera, cualquier q la implica". También se tiene que si un enunciado es una tautología, digamos $p \vee \sim p$, se tiene que este enunciado es una consecuencia lógica de cualquier otro enunciado q, bien se dé que este último sea relevante o no para el primero. Esto en concordancia con que en la lógica clásica es demostrable $q \supset p \vee \sim p$.

A partir del surgimiento a finales de los años 50 de los sistemas de lógica relevante, la interrelación entre la Teoría de la Información Semántica y el concepto de consecuencia lógica adquiere nuevas modalidades. - Dichos sistemas pueden ser considerados como una mejor formalización del concepto de consecuencia lógica, pues en ellos no tienen lugar las llamadas "paradojas" de la implicación material o clásica, por ejemplo: No tiene - lugar que para cualquier p y cualquier q:

$p \supset (q \supset p)$, $(p \supset q) \vee (q \supset p)$, ni las llamadas "paradojas" de la implicación estricta de Lewis, por ejemplo:

$\Box p \rightarrow\!\!\!\!\!3\ (q \supset \Box p)$.

Por un lado estos nuevos sistemas pueden ser - utilizados como base para el desarrollo de una teoría - de la información semántica, en la cual ya no tengan lugar hechos similares a los antes citados. Por otro lado surge el problema de formular una teoría de la información semántica adecuada que pueda ser utilizada para esclarecer el sentido que se da a la consecuencia lógica en estos sistemas.

En la segunda parte de este trabajo, en el Capítulo II, se expone el tratamiento de Hanson de éste problema. El define, en su aspecto cualitativo, cuál es la información semántica que nos da una fórmula --- booleana (construida sólo definiendo a los conectivos - &, v, ~), definiendo un concepto de información basado en el fragmento implicacional del sistema E (of --- entailment) de la Lógica Relevante.

En el Capítulo III se exponer el tratamiento - contrario dado por E. K. Voishvillo y J. Sánchez P., - quienes tratan de esclarecer el sentido de consecuencia lógica, de dicho fragmento del sistema E, formulando - primeramente como explicandum un concepto de contenido - semántico de los enunciados.

Ahora bien, el tratamiento que del problema de la interrelación entre la Teoría de la Información Semántica y el concepto de consecuencia lógica hacen Hanson, Voishvillo y Sánchez es meramente cualitativo. En el Capítulo IV se analiza y establece la relación entre los conceptos de información semántica dados por dichos autores y se intenta desarrollar, en analogía a lo dado para la lógica clásica con Carnap y Bar-Hillel, el aspecto cuantitativo.

CAPITULO I

INFORMACION SEMANTICA PARA LA LOGICA CLASICA

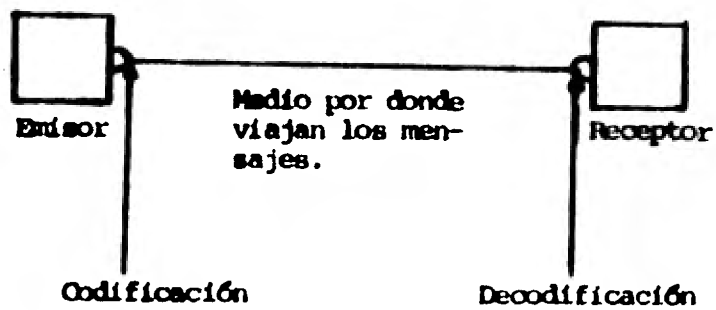
CAPITULO I

INFORMACION SEMANTICA PARA LA LOGICA CLASICA

A. INTRODUCCION.

En este Capítulo se verá como, en base a los trabajos de Carnap y Bar-Hillel, se puede construir un modelo de Información Semántica tomando como base un sistema lógico ya conocido, en este caso la Lógica Clásica. Antes de abordar esto explicaremos brevemente qué se debe entender por dar un modelo semántico y cuál es la diferencia entre Teoría de la Información y Teoría de la Información Semántica.

La Teoría de la Información nace propiamente - en 1947-1948 con los trabajos de Claude Shannon, quien- trata de resolver ciertos problemas técnicos de comunicación. El Modelo de Información de Shannon puede verse en resumen en el siguiente esquema:



Esta teoría estudia problemas que se originan en la transmisión de la información. Busca minimizar gastos encontrando códigos adecuados para enviar los mensajes. Estudia también los lenguajes hablados o escritos pero desde un punto de vista probabilístico-estadístico, al averiguar qué tipo de letras o sílabas aparecen con más frecuencia. Estudiando esto último se pueden hacer programas de simulación en computadoras para generar textos de algún lenguaje a partir de la información estadística con que se cuente.

Por otro lado, la Teoría de Información Semántica más que ver los aspectos técnicos o estadísticos de los mensajes, se ocupa de ver la intensión, el significado de los mensajes. La información semántica en lugar de medir frecuencias o probabilidades de aparición de letras o cadenas de letras en los mensajes, mide el significado de las proposiciones que llevan los mensajes. En esta teoría se miden las proposiciones por sí mismas o relacionándolas con un conjunto de proposiciones dentro de un cierto lenguaje. Aquí el receptor y el emisor juegan sólo un papel pragmático. La información semántica de una proposición puede ser vista como la información semántica "ideal" que recibe un receptor "ideal".

Por "receptor ideal" entendemos un receptor -- que conoce las reglas de la lógica y la matemática para hacer inferencias.

En nuestro estudio de información semántica estaremos interesados en dos aspectos. Dado un mensaje,- Por un lado estaremos interesados en saber qué información contiene, y por otro lado, qué cantidad de información contiene . Todo esto sólo se analizará desde un punto de vista lógigo-semántico y nunca desde un punto de vista linguistico o semiotico general.

B. QUE ES UNA SEMANTICA.

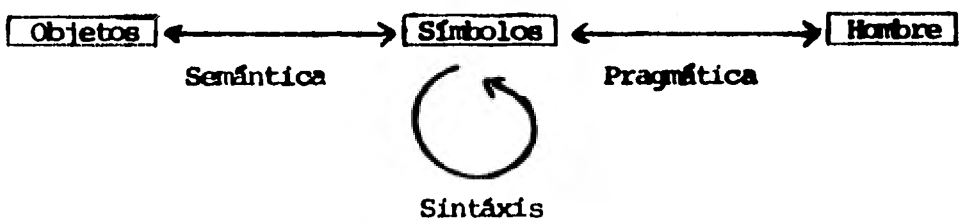
Se conoce con el nombre de <u>Semiótica</u> a la ciencia que se encarga del estudio de los símbolos en general. Intuitivamente podemos intentar definir "símbolo" como "objeto material que se utiliza como nombre de una idea, un objeto o un acto material". Así por ejemplo "2" es el símbolo de la idea intuitiva que tenemos de "dos"; "f'(x)" es el símbolo que utilizamos para referirnos al objeto conocido como la derivada de la función f(x)..

La Semiótica consta de tres partes:

a) Semántica: Parte de la Semiótica que estudia la relación de denotación entre los objetos y los símbolos que los representan.

b) Sintaxis: Parte de la Semiótica que estudia la relación de los símbolos entre sí.

c) Pragmática: Parte de la Semiótica que estudia la relación del hombre con los símbolos.

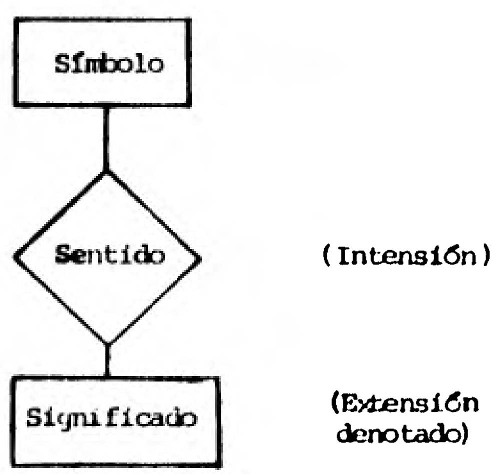


¿Por qué el hombre utiliza un conjunto determi nado de símbolos en lugar de otro? Esta sería una pregunta que respondería la Pragmática.

¿Cuáles son las fórmulas que tienen sentido - dentro de un lenguaje, pensado meramente como un conjunto de símbolos? Para responder habría que recurrir a la Sintáxis.

¿A qué ente ("verdad" o "falsedad") se refiere una cierta proposición? Esto busca su respuesta en la Semántica.

En base a lo anterior podemos responder a la - pregunta que da título a esta sección. Decimos que <u>se tiene una semántica</u> cuando se tiene un procedimiento para relacionar enunciados con los entes "verdadero" o - "falso", es decir, con lo que ellos denotan. Aclaremos esto último con el siguiente esquema:



Si entendemos a los símbolos como los "nombres" de objetos, diremos que los objetos constituyen la extensión, el significado o el denotado de los símbolos. Ahora bien, Frege, en su "Teoría del nombre" aclara que el denotado (significado) de un "nombre" está en función de su sentido (de ahí el esquema anterior). En otras palabras, para hablar de la extensión, es decir, el conjunto de objetos a que se refiere un nombre, es necesario dar un sentido a dicho nombre. Por ejemplo: el nombre "banco" se puede referir a distintos objetos (banco de peces, banco para sentarse, banco como institución, etc.) mientras no se le asigne un sentido. Estos objetos constituyen el denotado del nombre "banco". Otro ejemplo: nombre: "número par"; sentido, "ser múltiplo de dos"; significado: $\{2, 4, 6, 8, \ldots\ldots\ldots\}$.

Lo anterior es bastante general. En nuestro caso los símbolos o "nombres" serán las proposiciones. El sentido de las mismas estará dado por las relaciones de los conectivos lógicos y el significado o extensión estará formado por los entes "verdadero" o "falso". En otras palabras, para Frege, los enunciados o proposiciones son los nombres de los entes existentes "verdad" o "falsedad".

En resumen, diremos que tenemos una semántica- cuando tenemos un método para asignar a las proposicio- nes o enunciados el predicado "verdadero" o el predicado - "falso". Para un estudio más detallado acerca de cómo- hacer este tipo de asignación, se puede ver "Introduction to Mathematical Logic" de Mendelson en su Capítulo II.

En nuestro caso, con lo que expondremos de -- Carnap y Bar-Hillel se tendrá una semántica para la cla se de proposiciones de la Lógica clásica. Carnap y --- Bar-Hillel basaron su teoría de información semántica - en definiciones lo sufucientemente adecuadas para que - en ella se reflejara la Lógica clásica.

C. ACLARACIONES GENERALES. LENGUAJES L_n^{π}

A partir de esta sección empezaremos el desarrollo de un modelo de información semántica para la Lógica Clásica. Primeramente vamos a suponer que nuestro universo de proposiciones está inscrito en un lenguaje de tipo L_n^{π} . Un lenguaje de este estilo se caracteriza por tener un número finito de constantes y letras predicativas unarias. Tiene además los conectivos usuales de la Lógica clásica y a los paréntesis.

$$L_n^{\pi} = \{ P_1, P_2, \dots P_{\pi} ; C_1, C_2, \dots C_n ; \sim, v, \cdot, \supset, \leftrightarrow ; \ ), (\}$$

Los "P_i" son símbolos para referirse a letras predicativas de aridad uno.

Las "C_i" son símbolos constantes para referirse a individuos.

"$\sim$", "v", "$\cdot$", "$\supset$", "$\leftrightarrow$" son los símbolos para la negación, disyunción, conjunción, implicación y equivalencia respectivamene.

"(", ")", son los paréntesis izquierdo y derecho respectivamente.

En los lenguajes L_n^{π} no existen variables ni cuantificadores. Sin embargo, esto no afecta mucho su poder expresivo. Podemos hacer el estudio de las proposiciones de la Lógica clásica pensándolas dentro de un -

lenguaje L_n^* sin afectar de ningún modo la clase de teoremas que se obtienen en Lógica clásica que es en última instancia en lo que estamos interesados.

Las reglas para formar expresiones con sentido, es decir, fórmulas bien formadas (f b f) en estos lenguajes quedarán claras después de lo siguiente:

En un lenguaje L_n^* , tenemos las siguientes definiciones:

a) Proposición atómica es una expresión del estilo "Pa" (a tiene la propiedad P), donde "P" es una letra predicativa y "a" una constante individual.

b) Una Proposición básica es una proposición atómica o su negación.

c) Un Q-Predicator es una conjunción de las letras predicativas en la que cada letra aparece negada o no negada, y no ambas cosas.

d) Una Q-Predicator Completo es una expresión "Mc" donde "M" es un Q-Predicator y "c" una constante.

e) Un State description (descripción de estado) es una expresión "$M_1c_1 \cdot M_2c_2 \cdot \ldots \cdot M_nc_n$" donde cada "$M_i$" es un Q-Predicator y las "c_i" son las n constantes del lenguaje.

Podemos pensar a los lenguajes L_n^{π} como representaciones de "mundos" en los que sólo hay n individuos y π propiedades básicas que le pueden acontecer o no a los individuos. Un Q-Predicator nos dice en qué estado (acontecer o no acontecer) se encuentran las π propiedades en un momento dado. Un Q-Predicator completo nos dice el estado que guarda un individuo respecto a cada una de las propiedades. Un State description nos dice el estado o posición que guarda cada uno de los individuos respecto de cada una de las π propiedades, en otras palabras, un State description se puede interpretar como la representación del estado total del "mundo" en un momento dado.

Los predicados moleculares se forman a partir de las π letras predicativas con ayuda de los conectivos lógicos como es usual en las definiciones resursivas de formación de fórmulas bien formadas en los Textos de lógica. (ver por ejemplo Mendelson "An Intr. to Mathematical Logic"). Análogamente se forman las proposiciones moleculares a partir de las atómicas.

TEOREMA 1.- En un lenguaje L_n^{π} tienen lugar:

a) El número de proposiciones atómicas es $\pi n = \beta$

b) El número de Q-Predicators es $2^{\pi} = k$

c) El número de State Descriptions es $Z = 2^{\beta} = 2^{\pi n} = k^n$

DEMOSTRACION:

a) Como en L_n^{π} hay π letras predicativas, n constantes y las proposiciones atómicas se forman con una letra predicativa y una constante, se sigue que puede haber πn distintas proposiciones atómicas.

b) Un Q-predicator es un arreglo de π lugares --------- $P'_1\ P'_2 \ldots P'_{\pi}$ en el que cada P'_i es P_i ó $\sim P_i$. De modo que el problema se reduce a encontrar las posibles formas de acomodar dos objetos tomados de π en π, es decir, $OR_2^{\pi} = 2^{\pi}$

c) Los State Descriptions se pueden pensar como arreglos de n lugares (un lugar para cada constante) en los que en cada lugar puede aparecer un Q-predicator. De manera que el problema se reduce a acomodar 2^{π} elementos (los Q-Predicators) tomados de n en n. Por tanto hay $(2^{\pi})^n = 2^{\pi n} = k^n = Z$ State Descriptions.

□

EJEMPLO 1.-

Supóngase que estamos interesados en realizar un censo en un cierto pueblo X donde sólo viven tres habitantes y que sólo nos interesa conocer si los habitantes son hombres o mujeres (no hombres) y si son viejos o jóvenes (no viejos). Designemos los tres individuos por a, b, c y las propiedades H, $\sim$H, J, $\sim$J para hablar de hombre, mujer, joven, viejo, respectivamente. El lenguaje adecuado para hablar exhaustivamente de nuestro censo es L_3^2.

$L_3^2 = \{H, J; a, b, c; \sim, \cdot, \vee, \supset, \leftrightarrow; (,)\}$.

Ha, Hb, Hc, Ja, Jb, Jc, son las proposiciones atómicas de L_3^2 (son $n\pi = 3 \times 2$).

$H \cdot J$, $H \cdot \sim J$, $\sim H \cdot J$, $\sim H \cdot \sim J$ son los Q-predicators (son $2^{\pi} = 2^2 = 4$)

$(H \cdot J)a \cdot (\sim H \cdot J)b \cdot (H \cdot J)c$ es un state description. (La lista total de $2^{\pi n} = 2^{2 \cdot 3}$; $2^6 = 32$ states descriptions aparece en la figura 1).

Notación:

i) En lo que sigue utilizaremos las letras "A", "B", "C"... para referirnos a fbf. Para decir que A es una fbf lógicamente demostrable en la Lógica clásica, escribiremos $\vdash_c A$[1]. Esto significará que A es una fbf que vale en la Lógica clásica, que es verdadera, que es una tautología de acuerdo a las tablas de verdad de la Lógica clásica.

(1) "$\vdash_c A$" significa A es un teorema de la Lógica clásica, es decir, A es demostrable a partir de ciertos axiomas con ayuda de ciertas reglas de inferencia prefijadas de antemano. "$\models A$" significa A es lógicamente válida; en la Lógica clásica las fbf que son lógicamente válidas son aquellas y sólo aquellas cuya tabla de verdad les asigna V en cada asignación de valores de verdad a sus componentes. Los teoremas de Completez y Corrección de la Lógica clásica nos aseguran que $\vdash_c A$ sii $\models A$. (Ver las referencias de libros de lógica en la Bibliografía).

ii) En algunas ocasiones escribiremos $\bar{A}$ en lugar de $\sim A$ y en ocasiones también omitiremos el punto • de la conjunción, escribiendo AB en lugar de A•B.

El State description que se había dado como ejemplo corresponde al número 9 de la Tabla. El número 39 de la Tabla corresponde al State description:

$(\bar{H}\ \bar{J})a \cdot (\bar{H}\ J)b \cdot (\bar{H}\ \ \bar{J})\ c.$

	H.J	H.$\bar{J}$	$\bar{H}$.J	$\overline{HJ}$		H.J	H.$\bar{J}$	$\bar{H}$.J	$\overline{HJ}$
1.	a,b,c	-	-	-	33.	b	-	-	a,c
2.	-	a,b,c	-	-	34.	a	-	-	b,c
3.	-	-	a,b,c	-	35.	-	c	-	a,b
4.	-	-	-	a,b,c	36.	-	b	-	a,c
5.	a,b	c	-	-	37.	-	a	-	b,c
6.	a,c	b	-	-	38.	-	-	c	a,b
7.	b,c	a	-	-	39.	-	-	b	a,c
8.	a,b	-	c	-	40.	-	-	a	b,c
9.	a,c	-	b	-	41.	a	b	c	-
10.	b,c	-	a	-	42.	a	c	b	-
11.	a,b	-	-	c	43.	b	a	c	-
12.	a,c	-	-	b	44.	b	c	a	-
13.	b,c	-	-	a	45.	c	a	b	-
14.	c	a,b	-	-	46.	c	b	a	-
15.	b	a,c	-	-	47.	a	b	-	c
16.	a	b,c	-	-	48.	a	c	-	b
17.	-	a,b	c	-	49.	b	a	-	c
18.	-	a,c	b	-	50.	b	c	-	a
19.	-	b,c	a	-	51.	c	a	-	b
20.	-	a,b	-	c	52.	c	b	-	a
21.	-	a,c	-	b	53.	a	-	b	c
22.	-	b,c	-	a	54.	a	-	c	b
23.	c	-	a,b	-	55.	b	-	a	c
24.	b	-	a,c	-	56.	b	-	c	a
25.	a	-	b,c	-	57.	c	-	a	b
26.	-	c	a,b	-	58.	c	-	b	a
27.	-	b	a,c	-	59.	-	a	b	c
28.	-	a	b,c	-	60.	-	a	c	b
29.	-	-	a,b	c	61.	-	b	a	c
30.	-	-	a,c	b	62.	-	b	c	a
31.	-	-	b,c	a	63.	-	c	a	b
32.	c	-	-	a,b	64.	-	c	b	a

Figura 1

D. INFORMACION SEMANTICA CUALITATIVA.

D.1.- Condiciones.

Ya habíamos notado antes que el interés de la Teoría de Información Semántica de Carnap y Bar-Hillel es encontrar medidas de información para las proposiciones de la lógica. En relación a esto, dada una proposición, se ocurren a la mente dos preguntas:

i) ¿Cuál es la <u>información</u> que carga la proposición?

ii) ¿Cuál es la <u>cantidad de información</u> de la proposición?

En esta sección desarrollamos el concepto de "Cont" para responder a la primera pregunta. El "Cont" de una proposición se interpreta como la información de la proposición, como la información cargada por la proposición, su contenido. Cont, por tanto, será una medida de información cualitativa de una proposición. En la sección siguiente se desarrollarán dos conceptos (cont e inf) para asignar una medida de información cuantitativa a las proposiciones de la lógica clásica. Con esto último se tendrá la respuesta a la segunda pregunta.

El desarrollo que seguiremos para llegar al con cepto de Cont será el siguiente: primero diremos qué condiciones de adecuación a los teoremas de la Lógica clásica debería cumplir un concepto (In) que pretendiera medir la información cualitativa de una proposición. En base a esto se demostrarán ciertas propiedades de dicho concepto para llegar finalmente a la formulación precisa del concepto Cont y sus propiedades.

Cuando afirmamos que tiene lugar $A \supset B$, entendemos que A afirma todo lo que puede afirmar B y tal vez más. Esto nos conduce a pensar que A nos informa más que B, que A tiene toda la información que nos puede dar B y tal vez más. Parece también intuitivamente claro que la información con que una proposición B excede a la información de una proposición A es la información conjunta de las proposiciones A y B menos la información de la proposición A. Supongamos por un momento que "In(A)" significa "la información cargada por la proposición A", la discusión anterior nos lleva a que "In" debe cumplir las siguientes:

CONDICIONES:

I) $In(B) \subseteq In(A)$ sii $\vdash_{c} A \supset B$

II) $In\ (B/A) = In(A \cdot B) - In(A) = In(A \cdot B) \cap \big(In(A)\big)^{c}$

"In(B/A)" debe leerse como "la información en que B excede a la proposición A", "la información de B -

relativa a A", "la información de B dado A". Obsérvese que de acuerdo a estas condiciones nos vemos obligados a medir la información cualitativa de una proposición en forma de conjunto (o de clase en su caso).

Las condiciones I) y II) encierran en sí más información de la que aparentan. En los teoremas siguientes veremos las consecuencias que se siguen de aceptar tales condiciones.

Supongamos que k es la clase cuyos elementos son las In-clases, es decir, las clases que son medida de la información cualitativa de las proposiciones formadas en los lenguajes L_n^{*} .

TEOREMA 2.- Si "In" cumple con las condiciones I) y II) se tiene:

a) In(A) = In(B) sii $\vdash_c A \leftrightarrow B$

b) In(A) = la mínima clase de k[1] sii $\vdash_c A$

c) In(A) = la máxima clase de k[1] sii A es lógicamente falsa (A es una contradicción).

d) In(B) $\subset$ In(A) (contensión propia) sii $\vdash_c A \supset B$ y $\nvdash_c B \supset A$

(1) Por clase mínima de k entendemos una clase que está incluida en todos los miembros de k. Por clase máxima de k entendemos una clase que contiene a todas las clases de k. Las clases mínima y máxima de una clase k pueden coincidir con la clase vacía y la clase total (del tipo correspondiente) respectivamente pero ésto no siempre es así).

e) Clase mínima de $k \subset In(A) \subset$ clase máxima de k sii A es factual [2].

f) $In\ (A \vee B) \subsetneq In(A) \subsetneq In(A \cdot B)$.

DEMOSTRACION.-

a) $In(A)=In(B)$ sii $In(A) \subseteq In(B)$ y $In(B) \subseteq In(A)$

sii $\vdash_{c} B \supset A$ y $\vdash_{c} A \supset B$ ———————— (Condición I)

sii $\vdash_{c} A \leftrightarrow B$ (reglas de adjunción y simplificación)

b) $\Rightarrow$) Supongamos que $In(A)=$ la mínima clase de k

entonces, para cualquier fbf B tenemos $In(A) \subseteq In(B)$

entonces, para cualquier fbf B tenemos $\vdash_{c} B \supset A$

En particular para $B=B$ y para $B=\sim B$ tenemos

$\vdash_{c} B \supset A$ y $\vdash_{c} \sim B \supset A$ ———————————————— (1)

Por otro lado sabemos que $\vdash_{c} B \vee \sim B$.

y que $\vdash_{c} (C \supset E) \supset [(D \supset E) \supset ((C \vee D) \supset E)]$

Tomando $C=B$, $D=\sim B$, $E=A$ tenemos que

$\vdash_{c} (B \supset A) \supset [(\sim B \supset A) \supset ((B \vee \sim B) \supset A)]$

A partir de (1), (2) y $\vdash_{c} B \vee \sim B$ obtenemos que $\vdash_{c} A$

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que $\vdash_{c} A$

entonces para cualquier fbf B se tiene $\vdash_{c} B \supset A$

entonces para cualquier fbf B $In(A) \subseteq In(B)$

(2) Una proposición A es factual si no es tautología ni contradicción. También se les acostumbra llamar contingencias, proposiciones lógicamente indeterminadas, proposiciones sintéticas, etc. Se caracterizan porque en la última columna de su tabla de verdad existen al menos una V y una F.

entonces In(A) es la mínima clase de k.

c) $\Rightarrow$) Supongamos que In(A) = la clase máxima de k

entonces para cualquier fbf B $In(B) \subseteq In(A)$

entonces para cualquier fbf B $\vdash_{\tau} A \supset B$

En particular para B=B y B= $\sim$B se tiene

$\vdash_{\tau} A \supset B$ y $\vdash_{\tau} A \supset \sim B$ ———————— (1)

de ahí que $\vdash_{\tau} \sim B \supset \sim A$ y $\vdash_{\tau} B \supset \sim A$ (por la ley de contrapuesta).

A partir de estas dos últimas expresiones y con ayuda de $\vdash_{\tau} B \vee \sim B$ obtenemos $\vdash_{\tau} \sim A$. Esto significa que $\sim A$ siempre se toma el valor de V en su tabla de verdad. Por tanto A siempre toma el valor F. Por tanto A es lógicamente falsa.

$\Leftarrow$) Si A es lógicamente falsa, tenemos entonces que $\vdash_{\tau} \sim A$

entonces para cualquier fbf B tenemos que $\vdash_{\tau} B \supset \sim A$

en particular para B= $\sim$B también tenemos que

para cualquier fbf B $\vdash_{\tau} \sim B \supset \sim A$

luego entonces para toda fbf B se tiene $\vdash_{\tau} A \supset B$

entonces para cualquier fbf B, $InB \subseteq InA$

entonces In(A) es la clase máxima de k.

d) $\Rightarrow$) Supongamos $In(B) \subset In(A)$ (contensión propia), entonces $In(B) \subseteq In(A)$; de ahí que $\vdash_{\tau} A \supset B$.

También el suponer $In(B) \subset In(A)$ implica que

Existe $w \in In(A)$ tal que $w \notin In(B)$

es decir, no es cierto que $In(A) \subseteq In(B)$

Por tanto $\not\vdash_{\tau} B \supset A$.

$\Leftarrow$) Ahora supongamos que $\vdash_c A \supset B$ y $\nvdash_c B \supset A$

esto significa que $InB \subseteq InA$ y que no es cierto que - $In(A) \subseteq In(B)$

entonces $In(B) \subseteq In(A)$ y existe $w \in In(A)$ tal que $w \notin In(B)$

entonces $In(B) \subseteq In(A)$ y $In(A) \neq In(B)$

por tanto $In(B) \subset In(A)$

e) $\Rightarrow$) Supongamos que clase mínima de $k \subset In(A) \subset$ clase máxima de k.

clase mínima de $k \subset In(A)$ implica

que clase mínima de $k \neq In(A)$ y de ahí que $\nvdash_c A$ (por b)).

$In(A) \subset$ clase máxima de k implica que $In(A) \neq$ clase máxima de k y de ahí que A no es una contradicción (por c)).

Por tanto como A no es ni Teorema (y por tanto lógicamente verdadero o tautología) ni contradicción, concluimos que A es factual.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que A es factual

entonces en la tabla de verdad de la proposición A hay al menos un renglón donde A es verdadera y otro donde A es falsa

entonces A no puede ser contradicción y A no puede ser tautología

entonces de acuerdo a b) y c) tenemos el resultado que esperábamos, clase mínima de $K \subset In(A) \subset$ clase máxima de k.

f) Como sabemos que en lógica clásica se tienen los Teoremas :

$A \supset A \vee B$ y $A \cdot B \supset A$ (leyes de adición y simplificación respectivamente),

tenemos entonces $\vdash_c A \supset (A \vee B)$ y $\vdash_c (A \cdot B) \supset A$

es decir, $In(A \vee B) \subseteq In(A)$ y $In(A) \subseteq In(A \cdot B)$

esto último nos da $In(A \vee B) \subseteq In(A) \subseteq In(A \cdot B)$.

$\square$

Este teorema nos aclara las propiedades que debe cumplir el concepto que tomemos como medida de la Información que tiene una proposición. Parece ser que por el momento no habría mucha disconformidad si pensaramos en definir el concepto de Información cualitativa de una proposición como el conjunto de proposiciones que dicha proposición implica. Esta idea parece ser la más adecuada, pero el problema surge al tratar de encontrar dicho conjunto, pues para ello se debe tener bien precisado el concepto de "implicación" y como se verá después, la implicación "generada" por las tablas de verdad (implicación clásica) no resulta muy adecuada para el sentido que el término tiene en su uso común. Por otro lado, para especificar el conjunto de proposiciones que una proposición implica es necesario tener un cierto universo de donde se tomen dichas proposiciones, para lo cual la proposición debe estar escrita en un cierto lenguaje previamente especificado para a partir de ese lenguaje crear el universo de proposiciones posibles .Esperamos que ésto último sirva como justificación para la introducción de los lenguajes L_n^{π} . Nuestra tarea inmediata es utilizar éstos lenguajes para definir a partir de ellos el concepto cualitativo de Información de una proposición.

D.2. CONCEPTO Cont y SUS PROPIEDADES.

Empezamos con dos definiciones:

DEFINICION 1

En un lenguaje L_n^{π}, R(A) es el <u>rango de la proposición A</u> y $R(A) = \{Z/Z$ es state description y $\vdash_c Z \supset A\}$

DEFINICION 2

Un <u>elemento de contenido</u> es la negación de algun state - description.

A los elementos de contenido, los simbolizamos con - las letras E_i y llamamos V_e a la clase de todos los elementos de contenido. En L_n^{π} , ésta clase tiene $2^{\pi n}$ elementos.

Es claro que hay una correspondencia biunívoca entre los state descriptions y los elementos de contenido. Así por ejemplo, al estate description $(HJ)a \cdot (HJ)b \cdot (\bar{H}\bar{J})c$ de nuestro lenguaje L_3^2 , le corresponde el elemento de contenido $\sim((HJ)a \cdot (HJ)b \cdot (\bar{H}\bar{J})c) = (\bar{H}v\bar{J})a \ v \ (\bar{H}v\bar{J})b \ v \ (HvJ)c$

Un state description nos informa el estado total del universo en un momento dado. Una proposición A nos dice - que el estado del universo es uno de los $Z \in R(A)$. Si llamamos V_z a la clase de todos los state descriptions, vemos que A nos dice que el estado del universo no es uno de los $Z \in V_z - R(A)$. Por tanto, si sucede A, se tiene que para los- Z tales que $Z \in V_z - R(A)$; $\vdash_c A \supset \sim Z$. Esto es claro, pues si Z no esta en el rango de A, Z no puede implicar a A, de ahí que Z implique a $\sim$ A. De ésto último se sigue que A impli- que a $\sim$ Z. Veamos ésto formalmente:

TEOREMA 3

Sea $Z \in V_z$ y A una proposición cualquiera de L_n^{π}, entonces $\vdash_c Z \supset A$ o $\vdash_c Z \supset \sim A$

DEMOSTRACION

Podemos pensar que $Z = M_1 c_1 \cdot \ldots \cdot M_n C_n$

donde las M_i son Q- Predicators y las C_i son las n constan- tes del lenguaje. Sin perdida de generalidad podemos supo- ner que $Z = p_1' \cdot p_2' \ldots \cdot p_{\pi n}'$

donde las P_i' son proposiciones básicas que ocurren en Z. Las p_i' son proposiciones atómicas o negaciones de proposicio nes atómicas, segun aparezcan en Z

Es claro que una asignación de valores de verdad a las π n proposiciones atómicas que aparecen en Z, asigna V o F a - cualquier proposición A.

Dado Z, tenemos, asociado a Z, una asignación v tal que

$$v(x_i) = \begin{cases} V & \text{si } x_i \text{ es un conyunto que aparece en Z como proposición atómica.} \\ F & \text{en otro caso } ^{(1)} \end{cases}$$

(1) Esta valuación v no es única en general. Recuerdese que para ver qué valor toma una fórmula bajo una asignación, solo es necesario fi jarse en los valores de la asignación para las letras que aparecen - en la fórmula.

Sea $A' = \begin{cases} A \text{ si } A \text{ toma el valor de V con la valuación v} \\ \sim A \text{ si a toma el valor F con la valuación v} \end{cases}$

Probaremos que $Z \vdash_{c} A'$

Una vez probado esto, tendremos, aplicando el teorema de la deducción, $\vdash Z \supset A'$.

Haremos la prueba por inducción sobre la formación de A

n=0 A=p

donde p es una proposición atómica.

Es claro que en Z aparece p o aparece $\sim p$

si p aparece en Z como conyunto, es fácil ver con simplificación que $Z \vdash_{c} p$

si $\sim p$ aparece en Z como conyunto, es fácil ver también que $Z \vdash_{c} \sim p$

H.I supongamos que si A tiene longitud menor que k, $Z \vdash_{c} A'$

n=k $A = \begin{cases} \sim B \\ B \supset C \end{cases}$

Caso 1 $A = \sim B$

Si B es V bajo la valuación v, A es F, $B' = B$, $A' = \sim A$

por H.I a B, $Z \vdash_{c} B$ $\therefore$ $Z \vdash_{c} \sim\sim B$, pero $\sim\sim B = A'$

si B es F bajo la valuación v, A es V, $B' = \sim B$, $A' = A$

por H.I a B, $Z \vdash_{c} \sim B$ $\therefore$ $Z \vdash_{c} A'$ pues $A' = \sim B$

Caso 2 $A = B \supset C$

Por H.I se tiene que $Z \vdash_{c} B'$ y $Z \vdash_{c} C'$

si B es F bajo la valuación v, A es V, $B' = \sim B$, $A' = A$

por H.I a B, $Z \vdash_{c} \sim B$ y por tanto $Z \vdash_{c} B \supset C$ debido a la tautología $\sim B \supset (B \supset C)$

si C es V bajo la valuación v, A es V, $C' = C$, $A' = A$

por H.I. a C, $Z \vdash_{c} C$ y $\therefore$ $Z \vdash_{c} B \supset C$ por la Tautología $C \supset (B \supset C)$ si C es V y C es F bajo la valuación v, A es F, $B' = B$, $C' = \sim C$, $A' = \sim A$

Por H.I a B y A C, $Z \vdash_{c} B$ y $Z \vdash_{c} \sim C$ $\therefore$ $Z \vdash_{c} \sim (B \supset C)$ debido a la tautología $B \supset (\sim C \supset \sim (B \supset C))$

Por tanto tenemos $Z \vdash_{c} A'$ como queríamos ver.

□

Obsérvese que el "o" de $\vdash_{c} Z \supset A$ ó $\vdash_{c} Z \supset \sim A$ es exclusivo, pues si fuera el caso que para algún $Z \in V_{Z}$ $\vdash_{c} Z \supset A$ y $\vdash_{c} Z \supset \sim A$, se tendría $\vdash_{c} Z \supset A \cdot \sim A$ y por tanto $\vdash_{c} A v \sim A \supset \sim Z$, y de ahí $\vdash_{c} \sim Z$. Pero esto no es posible porque siempre es posible dar una valuación que haga F al elemento de contenido $\sim Z$

LEMA 1.

Sea $d = Z_1 v,,, v Z_m$ la disyunción de todos los state descriptions Entonces $\vdash_{c} d$

DEMOSTRACION.

Supongamos $\not\vdash_{c} d$. Existe una valuación v tal que asigna F a cada Z_i . En particular asigna F a Z_1.

Supóngase que $Z_1 = p_1 \cdot \ldots \cdot p_{n}$

Como en d aparecen todos los state descriptions, existe j tal que $Z_j = p_1' \cdot \ldots \cdot p_{n}'$

$$y \; p_i' = \begin{cases} p_i & \text{si v asigna V a } p_i \\ \sim p_i & \text{si v asigna F a } p_i \end{cases}$$

es claro por la construcción, que v asigna V a p'_i y por tanto v asigna V a Z_j. Por tanto no es cierto que v asigne F a - cada state description.

Por tanto $\vdash_c d$

$\square$

TEOREMA 4.

Para cada elemento de contenido $E_i \in V_e$

a) E_i es factual

b) Si $E_i \neq E_j$ entonces $\vdash_c E_i \vee E_j$

c) la conjunción de todos los E_i es lógicamente falsa

DEMOSTRACION.

a) E_i es factual es equivalente a demostrar que $Z_i = \sim E_i$ es factual.

Haremos ver que los state descriptions son factuales.

Si $Z_i = M_1c_1 \cdot \ldots \cdot M_nc_n$ es un state description, en cada M_i aparece una letra predicativa negada o no negada, de ahí que ningún M_ic_i pueda ser equivalente a una contradicción, - por tanto ningún Z_i es equivalente a una contradicción.

Por otro lado, Z_i tampoco es equivalente a una tautología pues, si así fuera, cada M_ic_i tendría que tomar el valor- de V bajo cualquier asignación. Pero esto sólo se daría- si M_ic_i fuera equivalente a una tautología del estilo -- $Pc_i \vee \sim Pc_i$. Pero esto es imposible por la construcción- de los Q-predicators

b) Supongamos que $E_i \neq E_j$ y que $\begin{cases} E_i = \bar{M}_1 c_1 \ v \ \ldots \ v \ \bar{M}_n c_n \\ E_j = \bar{N}_1 c_1 \ v \ \ldots \ v \ \bar{N}_n c_n \end{cases}$

Para que E_i y E_j sean distintos es necesario que para algún k, $\bar{M}_k$ sea distinto de $\bar{N}_k$, pero como ambos tienen las mismas letras predicativas, son distintos sólo si en alguno aparece una letra predicativa p y en el otro aparece $\sim p$.

Si reacomodamos E_i y E_j tenemos

$E_i = \bar{M}_k c_k \ v \ \bar{M}_1 c_1 \ v \ \ldots \ \bar{M}_{k-1} c_{k-1} \ v \ \bar{M}_{k+1} c_{k+1} \ v \ \ldots \ \bar{M}_n c_n$

$E_j = \bar{N}_k c_k \ v \ \bar{N}_1 c_1 \ v \ \ldots \ \bar{N}_{k-1} c_{k-1} \ v \ \bar{N}_{k-1} c_{k-1} \ v \ \ldots \ \bar{N}_n c_n$

Es claro que $\bar{M}_k c_k \ v \ \bar{N}_k c_k$ es verdadera siempre debido a la letra que comparten N_k y M_k, pues en una aparece la letra no negada y en el otro aparece negada de modo que la tabla de verdad siempre dará V.

Por tanto $E_i v E_j$ dará siempre el valor de V en su tabla de verdad. De ahí que $\vdash_{\mathcal{L}} E_i v E_j$

c) Sabemos que cada E_i es la negación de un state description Z_i, podemos poner sin pérdida de generalidad que $E_i = \sim Z_i$

sea $d = \sim E_1 \ v \ \ldots \ v \sim E_m$ $(m = 2^n)$

$d = \sim\sim Z_1 \ v \ \ldots \ v \ \sim\sim Z_m$

$d = Z_1 \ v \ \ldots \ v \ Z_m$

d es una tautología (por el lema 1)

$\therefore \sim d$ es una contradicción

pero $\sim d = E_1 \cdot E_2 \ldots \cdot E_m$ $\therefore$ la conjunción de los E_i es lógicamente falsa.

$\square$

LEMA 2.

$\vdash_c A$ sii $\forall z \in V_z (\vdash_c z \supset A)$

DEMOSTRACION.

$\Rightarrow$) Si $\vdash_c A$, es fácil ver que para cualquier z, $\vdash_c z \supset A$ debido a la tautología $A \supset (z \supset A)$ y al modus ponens.

$\Leftarrow$) Si $\forall z \in V_z (\vdash_c z \supset A)$, tenemos entonces que si $z_1, \ldots z_m$ son todos los state descriptions,

$\vdash_c z_1 \supset A$, $\vdash_c z_2 \supset A$, ... , $\vdash_c z_m \supset A$

pero entonces $\vdash_c z_1 v \ldots v z_n \supset A$

y por tanto $\vdash_c A$ debido a modus ponens y al lema 1

$\square$

Podemos afirmar que un state description es la proposición factual más fuerte, dice lo máximo que se puede decir de un universo dado sin llegar a informar lo que informa una contradicción. Nos informa el estado que guarda cada individuo con cada predicado. Por otro lado, un elemento de contenido es una de las proposiciones factuales más débiles, dice lo mínimo que se puede decir de un universo dado sin llegar a informar lo que informa una tautología, es decir, nada.

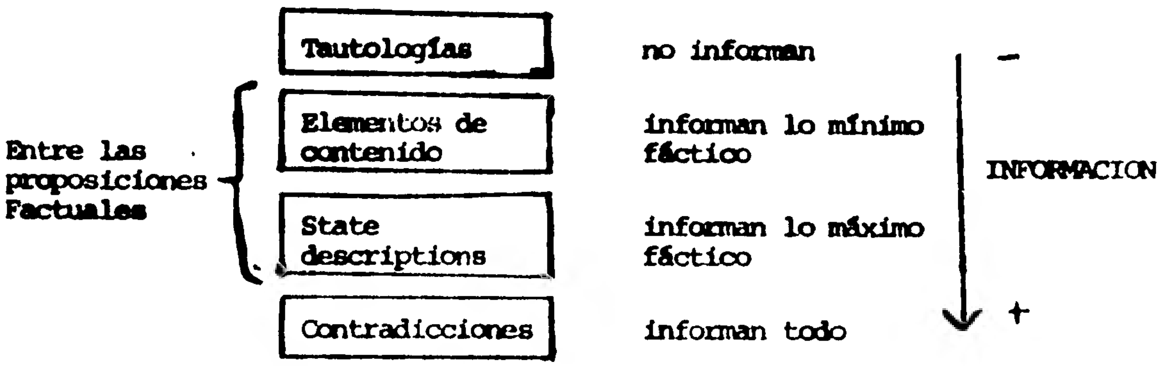
EJEMPLO 2.

El state description $(HJ)a \cdot (\bar{H}J)b \cdot (\bar{H}\bar{J})c$ nos informa lo máximo del universo L_3^2, pues nos dice el estado de cada miembro respecto a los predicados. El elemento de contenido correspondiente:

$(\bar{H}v\bar{J})a$ v $(Hv\bar{J})b$ v $(HvJ)c$

casi no informa nada acerca del estado de los individuos respecto a los predicados, pues sólo dice que el individuo puede estar bajo alguno, algunos o todos los predicados

Gráficamente podemos representar la discusión anterior:



Llamemos Λ_e a la clase nula de V_e.

Un state description nos informa el estado total del universo en un momento dado. Una proposición A nos dice que el estado del universo es uno de los $Z \in R(A)$. -

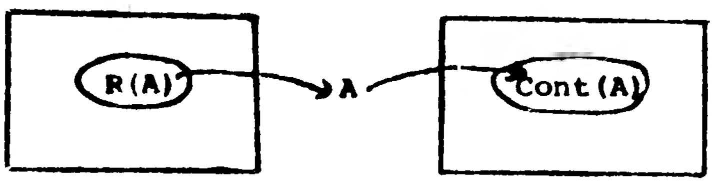
Si $Z \notin R(A)$ entonces Z no puede implicar a A y por tanto, por el Teorema 3, Z implica a $\sim A$. De ahí que A implique $\sim Z$ para $Z \notin R(A)$. A este conjunto de elementos $\sim Z$ es a lo que llamaremos el contenido o información de la proposición A, es decir, aquello que A " implica".

DEFINICION 3.

El <u>contenido de información</u> de la proposición A es

$$\mathrm{Cont}(A) = \{ \sim Z / Z \in V_z \text{ y } Z \notin R(A) \}$$
$$= \{ \sim Z / \vdash_e A \supset \sim Z \text{ y } Z \in V_z \}$$

Resumiendo: hemos establecido que dada una proposición A, R(A) es el conjunto de state descriptions que implican a A y que el contenido de A, Cont(A), es el conjunto de negaciones de state descriptions que no implican a A, en otras palabras, aquello que A implica.



State descriptions

Elementos de contenido (negaciones de state descriptions)

TEOREMA 5.

a) $\mathrm{Cont}(A) = \Lambda_e$ sii $\vdash_e A$

b) $\mathrm{Cont}(A) = V_e$ sii A es contradicción

c) $\Lambda_e \subset \mathrm{Cont}(A) \subset V_e$ sii A es factual

d) $\mathrm{Cont}(B) \subseteq \mathrm{Cont}(B)$ sii $\vdash_c A \supset B$

e) $\mathrm{Cont}(A) = \mathrm{Cont}(B)$ sii $\vdash_c A \leftrightarrow B$

DEMOSTRACION.

a) $\mathrm{Cont}(A) = \Lambda_e$ significa que

$\{\sim z \in V_e / \vdash_c A \supset \sim z\}$ es la clase nula

sii para cada $\sim z \in V_e$ se tiene que no es cierto $\vdash_c A \supset \sim z$

sii para cada $z \in V_z$ se tiene que no es cierto que $\vdash_c z \supset \sim A$

sii para cada $z \in V_z$ se tiene que $\vdash_c z \supset A$, (por el teorema 3)

sii $\vdash_c A$ por el lema 2.

b) $\mathrm{Cont}(A) = V_e$ significa que $\{\sim z \in V_e / \vdash_c A \supset \sim z\} = V_e$

sii para cada $\sim z \in V_e$ se tiene $\vdash_c A \supset \sim z$

sii para cada $z \in V_z$ se tiene $\vdash_c z \supset \sim A$

sii $\vdash_c \sim A$ (por el Lema 2)

sii A es una contradicción.

c) Supongase $\Lambda_e \subset \mathrm{Cont}(A) \subset V_e$

existen $z_1 \in \mathrm{Cont}(A)$ y $z_2 \in V_e$ tal que $z_2 \notin \mathrm{Cont}(A)$

existe z_1 tal que $\vdash_c A \supset z_1$ y existe z_2 tal que $\nvdash_c A \supset z_2$

existe z_1 tal que $\vdash_c \sim z_1 \supset \sim A$ y existe z_2 tal que $\nvdash_c A \supset z_2$

existe z_1 tal que $\nvdash_c \sim z_1 \supset A$ y existe z_2 tal que $\nvdash_c A \supset z_2$

(ésto debido a que $\sim z_1 \in V_z$ y al Teorema 3)

por tanto hay una valuación que hace V a $\sim z_1$ y hace F a A

y hay una que hace V a A y hace F a z_2. $\therefore$ A es factual

Supongase que A es factual

entonces $\nvdash_{c} A$ y A no es contradicción

entonces, por a) y b), se tiene que $Cont(A) \neq \Lambda_e$ y $Cont(A) \neq V_e$

por tanto $\Lambda_e \subset Cont(A) \subset V_e$

d) Supongamos $Cont(B) \subseteq Cont(A)$

$\forall z \in V_e (z \in Cont(B) \Rightarrow z \in Cont(A))$

$\forall z \in V_e (\vdash_c B \supset z \Rightarrow \vdash_c A \supset z)$

$\forall z \in V_e (\vdash_c (B \supset z) \supset (A \supset z))$

$\forall z \in V_e (\vdash_c (\sim z \supset \sim B) \supset (\sim z \supset \sim A))$

$\forall z \in V_e (\vdash_c \sim z \supset (\sim B \supset \sim A))$,

(ésto debido a la tautología $((A \supset B) \supset (A \supset C)) \supset (A \supset (B \supset C))$)[1]

$\forall z \in V_e (\vdash_c \sim z \supset (A \supset B))$

Pero recuerdese que $z \in V_e$ sii $\sim z \in V_z$

por tanto, tenemos que todas las negaciones de los elementos de contenido, es decir, todos los state descriptions implican $A \supset B$ $\therefore \vdash_c A \supset B$ (por el Lema 2)

Sup. $\vdash_c A \supset B$ y sea $z \in Cont(B)$

se tiene entonces que $\vdash_c B \supset z$

pero entonces por transitividad se obtiene $\vdash_c A \supset z$

y de ahí que $z \in Cont(A)$

como z es arbitrario, se tiene que $Cont(B) \subseteq Cont(A)$

e) $Cont(A) = Cont(B)$ sii $Cont(A) \subseteq Cont(B)$ y $Cont(B) \subseteq Cont(A)$

sii $\vdash_c B \supset A$ y $\vdash_c A \supset B$ sii $\vdash_c A \leftrightarrow B$

$\square$

(1) Este Teorema es el recíproco del axioma A3 de Mendelson (Autodistribución)

El inciso d) del teorema anterior nos asegura que - Cont es un buen explicatum para el concepto In de que -- habíamos hablado antes, es decir, si In(A) es la infor-- mación cargada por la proposición A entonces, la definición de Cont(A) es una buena definición para explicar el significado de In(A).

En el siguiente lema, mostramos algunas propiedades de R(A) que nos serán de utilidad posteriormente.

LEMA 3.

Si $\bar{R}(A)=\{\sim Z/Z \in R(A)\}$, entonces

a) $R(\sim A)=V_z - R(A)$

b) $R(A\cdot B)=R(A)\cap R(B)$

c) $R(A v B)=R(A)\cup R(B)$

d) $\bar{R}(A\cdot B)=\bar{R}(A)\cap \bar{R}(B)$

DEMOSTRACION.

Para simplificar la notación, implícitamente suponemos - que los Z recorren el conjunto V_z

a) $Z\in R(\sim A)$ sii $Z\in \{Z/\vdash_c Z\supset \sim A\}$

sii $Z\in \{Z/\nvdash_c Z\supset A\}$

sii $Z\in V_z$ y $Z\notin R(A)$

sii $Z\in (V_z - R(A))$

b) Z $R(A\cdot B)$ sii $Z\in \{Z/\vdash_c Z\supset A\cdot B\}$

sii $Z\in \{Z/\vdash_c Z\supset A$ y $\vdash_c Z\supset B\}$

(éste último sii debido al teor. de la deducción, simplificación y adjunción)

sii $Z\in \{Z/\vdash_c Z\supset A\}\cap \{Z/\vdash_c Z\supset B\}$

sii $Z\in R(A)\cap R(B)$

c) $Z \in R(A \vee B)$ sii $Z \in \{Z/\vdash_c Z \supset A \vee B\}$

sii $Z \in \{Z/\vdash_c Z \supset A$ ó $\vdash_c Z \supset B\}$

($\Rightarrow$) Si $\vdash_c Z \supset A \vee B$ y $\not\vdash_c Z \supset A$ entonces, $\vdash_c Z \supset (\sim A \supset B)$ y $\vdash_c Z \supset \sim A$ y por tanto $\vdash_c Z \supset B$.

($\Leftarrow$) Fácil debido a $\vdash_c A \supset (A \vee B)$)

sii $Z \in \{Z/\vdash_c Z \supset A\} \cup \{Z/\vdash_c Z \supset B\}$

sii $Z \in R(A) \cup R(B)$

d) $\bar{R}(A \cdot B) = \{\sim Z/Z \in R(A \cdot B)\} = \{\sim Z/\vdash_c Z \supset A \cdot B\}$

$= \{\sim Z/\vdash_c Z \supset A$ y $\vdash_c Z \supset B\}$

$= \{\sim Z/\vdash_c Z \supset A\} \cap \{\sim Z/\vdash_c Z \supset B\}$

$= \bar{R}(A) \cap \bar{R}(B)$

$\square$

TEOREMA 6.

a) $Cont(\sim A) = (Cont(A))^c$

b) $Cont(A \vee B) = Cont(A) \cap Cont(B)$

c) $Cont(A \cdot B) = Cont(A) \cup Cont(B)$

DEMOSTRACION.

Tomando como base a $R(A)$, el rango de A, definimos antes $\bar{R}(A)$ como el conjunto de las negaciones de los miembros de $R(A)$. Por tanto $\bar{R}(A) \subseteq V_e$. Más aún, $Cont(A) = \bar{R}(\sim A)$ (1)

a) $Cont(\sim A) = \bar{R}(\sim\sim A) = \bar{R}(A) = \{\sim Z/\vdash_c Z \supset A\}$

$= \{\sim Z/\not\vdash_c Z \supset \sim A\}$ (Teorema 3)

$= \{\sim Z/\not\vdash_c A \supset \sim Z\}$

$= (Cont(A))^c$

b) $Cont(A \vee B) = \bar{R}(\sim(A \vee B)) = \bar{R}(\sim A \cdot \sim B) = \bar{R}(\sim A) \cap \bar{R}(\sim B)$ (Lema 3)

$= Cont(A) \cap Cont(B)$

(1) $\bar{R}(\sim A) = \{\sim Z/Z \supset \sim A\} = \{\sim Z/A \supset \sim Z\} = Cont(A)$.

c) $Cont(A \cdot B) = Cont(\sim(\sim A v \sim B)) = (Cont(\sim A v \sim B))^c$

$= (Cont(\sim A) \cap Cont(\sim B))^c$

$= (Cont(\sim A))^c \cup (Cont(\sim B))^c$

$= Cont(\sim\sim A) \cup Cont(\sim\sim B)$

$= Cont(A) \cup Cont(B)$

□

Este teorema refleja el comportamiento esperado de Cont. Finalmente definimos Cont(A/B) y damos algunas de sus propiedades. Interprétese intuitivamente "A/B" como en el caso de In(A/B).

DEFINICION 4.

$Cont(A/B) = Cont(A \cdot B) - Cont(B)$

Obsérveseque la definición es buena pues el miembro derecho tambien es conjunto.

TEOREMA 7.

a) Si $\vdash_c A \leftrightarrow B$ entonces $Cont(C/A) = Cont(C/B)$ y $Cont(A/C) = Cont(B/C)$.

b) Si $\vdash_c A \supset B$ entonces $Cont(B/A) = \Lambda_e$

c) Si $\vdash_c A$ entonces $Cont(A/B) = \Lambda_e$

d) Si $\vdash_c A$ entonces $Cont(B/A) = Cont(B)$

DEMOSTRACION

Obsérvese que $Cont(A/B) = Cont(A \cdot B) - Cont(B) = Cont(A) - Cont(B)$

a) Si $\vdash_c A \leftrightarrow B$ entonces $Cont(A) = Cont(B)$ (por teorema 5)

$Cont(C/A) = Cont(C) - Cont(A)$

$= Cont(C) - Cont(B)$

$= Cont(C/B)$

$\mathrm{Cont}(A/C) = \mathrm{Cont}(A) - \mathrm{Cont}(C)$

$= \mathrm{Cont}(B) - \mathrm{Cont}(C)$

$= \mathrm{Cont}(B/C)$

b) Supongamos que $\vdash_{\ell} A \supset B$, entonces $\mathrm{Cont}(B) \subseteq \mathrm{Cont}(A)$ de ahí que $\mathrm{Cont}(B/A) = \mathrm{Cont}(B) - \mathrm{Cont}(A) = \Lambda_e$

c) Supongamos que $\vdash_{\ell} A$, entonces $\mathrm{Cont}(A) = \Lambda_e$ de ahí que $\mathrm{Cont}(A/B) = \mathrm{Cont}(A) - \mathrm{Cont}(B) = \Lambda_e$

d) Supongamos que $\vdash_{\ell} A$, entonces $\mathrm{Cont}(A) = \Lambda_e$ de ahí que $\mathrm{Cont}(B/A) = \mathrm{Cont}(B) - \mathrm{Cont}(A) = \mathrm{Cont}(B)$

El inciso d) del teorema anterior, nos brinda un camino alternativo para hacer la construcción que hemos hecho. Pudimos haber dejado Cont(A/B) como primitivo y haber definido Cont(A) como el caso de Cont(A/B) en que B es una Tautología. Sin embargo creemos más conveniente definir primero Cont(A) ya que sólo consta de un argumento, en cambio, Cont(A/B) consta de dos argumentos.

E. INFORMACION SEMANTICA CUANTITATIVA (cont e inf).

E1. FUNCIONES M-PROPIAS.

Al finalizar ésta sección habremos dado dos medidas-- alternativas de la cantidad de información. La idea que tenemos en mente es la de que éstas medidas reflejen numéricamente las propiedades del Cont definido en la sección anterir. Deseamos por ejemplo, que la cantidad de información de A, sea mayor o igual que la cantidad de información de B, si A implica B; que la cantidad de información de A sea cero si A es una Tautología; que la cantidad de información de A sea la máxima en el caso de que A sea una contradicción.

De acuerdo a las últimas ideas del párrafo anterior, lo que tenemos en mente es definir la cantidad de información - de una proposición como la suma de las cantidades de infor-- mación de sus elementos de contenido. Para lograr nuestro -- objetivo, primero definimos una función que toma valores numéricos y que sistematiza ciertas propiedades intuitivas y - deseables de los state descriptions. En base a ésta función, definirémos el primer concepto de cantidad de información -- cuantitativa. La idea de definir primero la función, es analizar el comportamiento de los state descriptions y conocer- asímismo a los elementos de contenido en base a los cuales - se quiere definir la cantidad de información contenida en -- una proposición.

DEFINICION 5.

Sea m una función numérica que se valua en las proposiciones de L_n^{π}. Decimos que <u>m es una función propia</u> si satisface que para cada A, B, fbf y para cada $Z_i \in V_z$:

i) $m(Z_i) > 0$

ii) la suma de todos los $m(Z_i)$ es 1

iii) si B es una contradicción, $m(B)=0$

iv) si B no es una contradicción, $m(B)= \sum m(Z), Z \in R(B)$

v) si Z_j se obtiene de Z_i por permutación de algunas ó todas las constantes individuales de Z_i, entonces $m(Z_j)=m(Z_i)$.

vi) si Z_j se obtiene de Z_i por permutación de algunos ó todos los predicados de Z_i entonces $m(Z_j)=m(Z_i)$.

vii) si Z_j se obtiene de Z_i reemplazando las ocurrencias de cualquier predicado de Z_i por su negación, $m(Z_j)=m(Z_i)$

viii) si A y B no tienen predicados primitivos en comun, entonces $m(A \cdot B)=m(A)m(B)$

TEOREMA 8.

a) $0 \leq m(A) \leq 1$

b) $m(A)=1$ sii $\vdash_{\mathcal{L}} A$

(c) $m(A)=0$ sii A es una contradicción

d) $0 < m(A) < 1$ sii A es factual

e) si $\vdash_{\mathcal{L}} A \supset B$ entonces $m(A) \leq m(B)$

f) $m(A \cdot B) \leq m(A) \leq m(A v B)$

g) $m(AvB)=m(A)+m(B)-m(A\cdot B)$

h) $m(A\cdot B)=m(A)+m(B)-m(AvB)$

i) $m(\sim A)=1-m(A)$

j) $m(AvB)=m(A)+m(B)$ sii $A\cdot B$ es una contradicción.

DEMOSTRACION

a) Sea A una proposición, es claro que A, O es una con-- tradicción ó no es una contradicción. Entonces por -- iii) y iv) se tiene que $m(A)=0$ ó $m(A)= \sum m(Z), Z\in R(A)$ Pero el máximo valor que puede tomar ésta suma es 1 de acuerdo con ii). Por tanto $0\leq m(A)\leq 1$

b) $\Rightarrow$ Supongamos $m(A)=1$ y $\not\vdash_c A$

existe $Z\in V_z$ tal que $\not\vdash_c Z\supset A$ (por el lema 2)

entonces $R(A)\neq V_z$

como $m(A)=1$, A no es contradicción (por iii))

por tanto $m(A)= \sum m(Z), Z\in R(A)$ (por iv))

pero entonces $m(A)<1$ (por i), ii) y prque $R(A)\subsetneq V_z$)

lo cual es una contradicción.

$\Leftarrow$ Supongamos $\vdash_c A$

entonces $\forall Z\in V_z, \vdash_c Z\supset A$ (por el lema 2)

por tanto $R(A)=V_z$

por tanto $m(A)=\sum_{Z\in V_z} m(Z)=1$ (por iv) y ii))

c) $\Rightarrow$ Si A no es contradicción entonces $R(A)\neq\Lambda_Z$ y por lo tanto $m(A)= \sum_{Z\in R(A)} m(Z) \neq 0$

$\therefore$ $m(A)=0$ implica que A es una contradicción

$\Leftarrow$ Se obtiene inmediatamente de iii).

d) $0< m(A)<1$ sii(b),c)) A no es teorema y A no es una contradicción sii A es factual.

e) Supongamos $\vdash_{c} A \supset B$

entonces $\forall Z \in V_z \vdash_{c} Z \supset (A \supset B)$, por el lema 2

entonces $\forall Z \in V_z$, si $\vdash_{c} Z \supset A$ entonces $\vdash_{c} Z \supset B$

entonces $R(A) \subseteq R(B)$

entonces $\sum_{Z \in R(B)} m(Z) \geq \sum_{Z \in R(A)} m(Z)$

entonces $m(B) \geq m(A)$

f) Como se tiene que $\vdash_{c} A \cdot B \supset A$ y $\vdash_{c} A \supset AvB$

entonces, de acuerdo a e), se tiene

$m(A \cdot B) \leq m(A)$ y $m(A) \leq m(AvB)$

g) $m(AvB) = \sum_{Z \in R(AvB)} m(Z)$

$= \sum_{Z \in R(A) \cup R(B)} m(Z)$ por el lema 3

$= \sum_{Z \in R(A)} m(Z) + \sum_{Z \in R(B)} m(Z) - \sum_{Z \in R(A) \cap R(B)} m(Z)$

$= m(A) + m(B) - \sum_{Z \in R(A \cdot B)} m(Z)$ por el lema 3

$= m(A) + m(B) - m(A \cdot B)$.

h) obvio a partir de g).

i) $m(\sim A) = \sum_{Z \in R(\sim A)} m(Z) = \sum_{Z \in (V_z - R(A))} m(Z) = \sum_{Z \in V_z} m(Z) - \sum_{Z \in R(A)} m(Z)$

(la segunda igualdad es consecuencia del lema 3)

$m(\sim A) = 1 - m(A)$

j) $m(AvB) = m(A) + m(B)$ sii $m(A \cdot B) = 0$ (debido a g))

sii $A \cdot B$ es una contradicción (por c)).

$\square$

E2. EL CONCEPTO cont Y SUS PROPIEDADES.

De acuerdo al teorema anterior, es conveniente dar por fin la definición de medida de información cuantitativa de una proposición de la siguiente manera:

DEFINICION 6.

Si A es una proposición y m una función propia definimos cont(A), cantidad de información semántica de A como $cont(A)=m(\sim A)$

TEOREMA 9.

a) $cont(A)=1-m(A)$

b) $cont(\sim A)=m(A)$

c) $m(A)=1-cont(A)$

DEMOSTRACION.

a) $cont(A)=m(\sim A)=1-m(A)$

b) $cont(\sim A)=m(\sim\sim A)=m(A)$

c) $1-cont(A)=1-m(\sim A)=1-(1-m(A))=m(A)$

$\square$

En el siguiente teorema veremos las propiedades de cont respecto a los conectivos lógicos.

TEOREMA 10.

a) $0\leq cont(A)\leq 1$

b) $cont(A)=0$ sii $\vdash_{a} A$

c) $\mathrm{cont}(A)=1$ sii A es contradictoria

d) $0<\mathrm{cont}(A)<1$ sii A es factual

e) $\vdash_c A\supset B$ entonces $\mathrm{cont}(A)\geq \mathrm{cont}(B)$

f) $\mathrm{cont}(A\vee B)\leq \mathrm{cont}(A)\leq \mathrm{cont}(A\cdot B)$

g) $\mathrm{cont}(A\vee B)=\mathrm{cont}(A)+\mathrm{cont}(B)-\mathrm{cont}(A\cdot B)$

h) $\mathrm{cont}(\sim A)=1-\mathrm{cont}(A)$

i) $\mathrm{cont}(A\cdot B)=\mathrm{cont}(A)+\mathrm{cont}(B)-\mathrm{cont}(A\vee B)$

j) $\mathrm{cont}(A\cdot B)=\mathrm{cont}(A)+\mathrm{cont}(B)$ sii $\vdash_c A\vee B$

DEMOSTRACION.

a) Se sabe que $0\leq m(A)\leq 1$ para cualquier fbf A en particular para A igual a $\sim A$ se tiene $0\leq m(\sim A)\leq 1$. De ahí que $0\leq \mathrm{cont}(A)\leq 1$.

b) $\mathrm{cont}(A)=0$ sii $m(\sim A)=0$ sii $1-m(A)=0$ sii $m(A)=1$ sii $\vdash_c A$

c) Análogamente a b)

d) $0<\mathrm{cont}(A)<1$ sii $0 \quad m(\sim A) \quad 1$ sii $\sim A$ es factual sii A es factual.

e) Si $\vdash_c A\supset B$ entonces $m(A)\leq m(B)$ según un teorema anterior, pero entonces $1-m(\sim A)\leq 1-m(\sim B)$
de ahí que $m(\sim A)\geq m(\sim B)$
y por tanto $\mathrm{cont}(A)\geq \mathrm{cont}(B)$

f) Es consecuencia de e) y de los teoremas $\vdash_c A\supset A\vee B$ y $\vdash_c A\cdot B\supset A$

h) $cont(\sim A)=m(\sim\sim A)=m(A)=1-m(\sim A)=1-cont(A)$

i) $cont(A\cdot B)=m\big(\sim(A\cdot B)\big)=m(\sim A v \sim B)$

$=m(\sim A)+m(\sim B)-m(\sim A\cdot\sim B)$

$=cont(A)+cont(B)-m\big(\sim(AvB)\big)$

$=cont(A)+cont(B)-cont(AvB)$

j) $cont(A\cdot B)=cont(A)+cont(B)$ sii $cont(AvB)=0$

sii $\vdash_{c} AvB$ $\square$

Obsérvese que la demostración de este teorema resultó trivial debido a las propiedades de las funcio-- nes propias, de ahí la importancia de haberlas definido- primero.

También obsérvese que e) no es "si y sólo si"; esto resulta así porque la función m sólo cumple que si $\vdash_{c} A\supset B$ entonces $m(A)\leq m(B)$, es decir, si se tiene que A implica a B, entonces la medida de cantidad de informa-- ción de todo aquello que implica a A es menor que la de todo aquello que implica a B, pero dejamos abierta la po sibilidad de tener dos enunciados A y B, tales que $m(A)<m(b)$ y sin embargo no se de que $\vdash_{c} A\supset B$.

En seguida vamos a definir cont(B/A), la can- tidad de información en que B excede a A, para después -

demostrar un interesante teorema que discutiremos en capí tulos posteriores:

DEFINICION 7.

$\text{Cont}(B/A)=\text{Cont}(A\cdot B)-\text{Cont}(A)$

TEOREMA 11.

$\text{Cont}(B/A)=\text{cont}(A\supset B)$

DEMOSTRACION

Obsérvese que $\vdash_{L} B\leftrightarrow(A\vee B)\cdot(\sim A\vee B)$

$$
\begin{aligned}
\text{Cont}(B/A) &= \text{Cont}(A\cdot B)-\text{cont}(A)\\
&= \text{Cont}(A)+\text{Cont}(B)-\text{Cont}(A\vee B)-\text{cont}(A)\\
&= \text{cont}(B)-\text{cont}(A\vee B)\\
&= \text{Cont}\ (A\vee B)\cdot(\sim A\vee B)\ -\text{cont}(A\vee B)\\
&= \text{Cont}(A\vee B)+\text{Cont}(\sim A\vee B)-\text{Cont}\big((A\vee B)\vee(\sim A\vee B)\big)\ -\text{cont}(A\vee B)\\
&= \text{Cont}(\sim A\vee B)-\text{Cont}\ \big((A\vee\sim A)\vee B\big)\\
&= \text{Cont}(\sim A\vee B)\ \text{ pues } \vdash_{L}(A\vee\sim A)\vee B\\
&= \text{Cont}(A\supset B)
\end{aligned}
$$

$\square$

Obsérvese que en esta demostración juega un papel de primordial importancia el que $\sim A\vee B$ sea equivalente a $A\supset B$.

Si un receptor "ideal", conoce A y se le entrega B, entonces su posesión de información es la misma que si -

en lugar de B se le entregara $A \supset B$, pues se supone que - por ser receptor "ideal", sí conoce A y $A \supset B$, puede inmediatamente inferir B. Si $\vdash_L A \supset B$ entonces $cont(B/A)=0$.

En lo que sigue obtenemos medidas de cantidad de información con el concepto de cont para las proposiciones básicas y para las formas normales conjuntivas y - disyuntivas.

TEOREMA 12.

Si B es una proposición básica entonces $cont(B)=\frac{1}{2}$

DEMOSTRACION.

$m(B \vee \sim B)=1$

de ahí que $m(B)+m(\sim B)-m(B \cdot \sim B)=1$

por lo que $m(B)+m(\sim B)=1$ pues $B \cdot \sim B$ es contradicción

$2m(B)=1$ por vii) de la definición de m

$m(B)=\frac{1}{2}=m(\sim B)$

$\square$

TEOREMA 13.

Sean C_n una conjunción de n proposiciones atómicas con n predicados distintos.

D_n una disyunción de n proposiciones atómicas con n predicados distintos,

entonces a) $cont(C_n)=1-\frac{1}{2^n}$ y b) $cont(D_n)=\frac{1}{2^n}$

DEMOSTRACION.

Obsérvese primero que si A y B no tienen predicados primitivos en común, entonces de acuerdo a viii) de la definición de m se tiene $m(A\cdot B)=m(A)m(B)$

Por tanto $m(AvB)=m(A)+m(B)-m(A)m(B)$

a) Por inducción sobre el número de letras predicativas - que aparecen en Cn: $n=1$, $C_n=c$, c proposición atómica.

$$\text{cont}(C_n)=\text{cont}(c)=\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2^1}$$

supongamos que $\text{cont}(C_n)=1-\frac{1}{2^n}$ para $n<k$

para $n=k$ tenemos $C_k=c_1\cdot c_2\ldots c_{k-1}\cdot c_k=(c_1\cdot c_2\ldots c_{k-1})\cdot c_k$

$$\text{cont}(C_k)=\text{cont}\ (c_1\cdot c_2\ \ldots\ c_{k-1})\cdot c_k$$
$$=m(\sim(c_1\cdot c_2\ \ldots\ c_{k-1})v\sim c_k)$$
$$=m(\sim(c_1\cdot c_2\ \ldots\ c_{k-1}))+m(\sim c_k)-m(\sim(c_1\ c_2\ \ldots\ c_{k-1}))\,m(\sim c_k)$$
$$=\text{cont}(c_1\cdot c_2\ \ldots\ c_{k-1})+\text{cont}(c_k)-\text{cont}(c_1\ \ldots\ c_{k-1})\text{cont}(c_k)$$
$$=1-\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2}-(1-\frac{1}{2^{k-1}})\frac{1}{2}\quad \text{Por hipótesis de inducción.}$$
$$=(1-\frac{1}{2^{k-1}})(1-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2^k}\qquad \therefore\ \text{cont}\ C_n=1-\frac{1}{2^n}$$

b) Por inducción sobre las letras predicativas que aparecen en Dn

$n=1$

$D_n=d_1$ donde d_1 es una proposición atómica

$\text{cont}(D_n) = \text{cont}(d_1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$

supongamos que $\text{cont}(D_n) = \frac{1}{2^n}$ para n k

entonces para n=k tenemos $D_k = d_1 v d_2 v \ldots v d_{k-1} v d_k$

$\text{cont}(D_k) = \text{cont}\left((d_1 v d_2 \ldots v d_{k-1}) v d_k\right)$

$= \text{cont} \sim\left(\sim(d_1 v d_2 \ldots v d_{k-1}) \cdot \sim d_k\right)$

$= \text{cont}\left[\sim (\sim D_{k-1} \cdot \sim d_k)\right]$ donde $D_{k-1} = d_1 v \ldots v d_{k-1}$

$= m(\sim D_{k-1} \cdot \sim d_k)$

$= m(\sim D_{k-1}) m(\sim d_k)$

$= m(\sim D_{k-1}) m(\sim d_k)$ por viii, ya que $\sim D_{k-1}$ y $\sim d_k$ no tienen predicados en común

$= \text{cont}(D_{k-1}) \text{cont}(d_k)$

$= \frac{1}{2^{k-1}} \frac{1}{2}$ por hipótesis de inducción

$= \frac{1}{2^k}$

$\therefore \text{cont}(D_n) = \frac{1}{2^n}$

$\square$

EJEMPLO 3.

En nuestro L_3^2 se cumple que

$\text{cont}(Ha \text{ v } Jb) = \text{cont}(Ha \text{ v } Ja) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$\mathrm{cont}(Ha \cdot \sim Jb) = 1-\frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$

$\mathrm{cont}(Ha \vee Hb) = \mathrm{cont}(\sim Ha \vee \sim Hb) = 1-\mathrm{cont}(Ha \cdot Hb)$

En este último ejemplo se ve claramente que dos proposiciones pueden tener la misma cantidad de información y sin embargo, no ser equivalentes. Este ejemplo también nos aclara el sentido que se le da a la medida de la cantidad de información a través de la función m, ya que ésta sólo cumple que si $\vdash_L A \leftrightarrow B$, entonces $m(A)=m(B)$, al pedírsele que cumpla con las condiciones v, vi, y vii.

DEFINICION 8.

Una FNDO (forma normal disyuntiva óptima) es una Disyunción $C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_m$ es la que cada C_i es una conjunción de n proposiciones atómicas en la que aparecen n predicados distintos y tal que cada predicado aparece en cada C_i.

Una FNCO (forma normal conjuntiva óptima) es una conjunción $D_1 \cdot D_2 \ldots \cdot D_m$ en la que cada D_i es una disyunción de n proposiciones atómicas en la que aparecen n predicados distintos y tal que cada predicado aparece en cada D_i.

TEOREMA 14.

Si A es una FNCO y B es una FNDO

a) $\text{cont}(A) = \frac{m}{2^n}$

b) $\text{cont}(B) = 1 - \frac{m}{2^n}$

DEMOSTRACION

a) Inducción sobre m

$m=1$

$\text{cont}(D_1) = \frac{1}{2^n}$ según el teorema anterior

supongamos que el resultado vale para $m < k$

para $m=k$ $\quad FNCO = D_1 \cdot D_2 \ldots \cdot D_k$

$\text{cont}(FNCO) = \text{cont}\big((D_1 \cdot \ldots \cdot D_{k-1}) \cdot D_k\big)$

$$= \text{cont}(D_1 \cdot \ldots \cdot D_{k-1}) + \text{cont}(D_k) - \text{cont}\big((D_1 \cdot \ldots \cdot D_{k-1}) \vee D_k\big)$$

pero $\text{cont}\big((D_1 \cdot \ldots \cdot D_{k-1}) \vee D_k\big) = \text{cont}\left[(D_1 \vee D_k) \cdot \ldots \cdot (D_{k-1} \vee D_k)\right]$

$$= \text{cont}(\alpha)$$

$$= 0$$

pues $\vdash_c \alpha$ al tenerse que $\vdash_c D_i \vee D_k$ para $i=1,\ldots k-1$, pues para que $D_i \neq D_k$ es necesario que uno tenga al menos una proposición atómica afirmada y el otro tenga la misma proposición atómica negada.

Por tanto $\text{cont}(FNCO) = \text{cont}(D_1 \cdot \ldots \cdot D_{k-1}) + \text{cont}\ D_k$

$$= \frac{k-1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \quad \text{por hipótesis de inducción}$$

$\therefore\ \text{cont}(FNCO) = \frac{k}{2^n}$ como se quería demostrar

b) Si B es una FNDO

$$B = C_1 \vee \ldots \vee C_m$$

inducción sobre m

$m = 1$

$cont(B) = cont(C_1) = 1 - \frac{1}{2^n}$ que coincide con lo que se quiere

supongamos que el resultado vale para m k

para $m = k$ $\quad B = C_1 \vee \ldots \vee C_k$

$$cont(B) = cont\left[(C_1 \vee \ldots \vee C_{k-1}) \vee C_k\right]$$

$$= cont(C_1 \vee \ldots \vee C_{k-1}) + cont(C_k) - cont\left[(C_1 \vee \ldots \vee C_{k-1}) \cdot C_k\right]$$

ahora bien, $cont\left[(C_1 \vee \ldots \vee C_{k-1}) \cdot C_k\right] = cont(C_1 \cdot C_k \vee \ldots \vee C_{k-1} \cdot C_k) = 1$

puesto que $C_1 \cdot C_k \vee \ldots \vee C_{k-1} \cdot C_k$ es una contradicción, pues en cada $C_i \cdot C_k$ aparece una proposición atómica y su negación

por tanto $cont(B) = cont(C_1 \vee \ldots C_{k-1}) + cont(C_k) - 1$

$$= 1 - \frac{k-1}{2^n} + 1 - \frac{1}{2^n} - 1 \quad \text{por hipótesis de inducción}$$

$$= 1 - \frac{k-1}{2^n} - \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{k}{2^n}$$

$$cont(B) = 1 - \frac{k}{2^n} \quad \text{como queríamos probar}$$

$\square$

EJEMPLO 4.

En nuestro L_3^2 se tiene

$$\text{cont}\left[(Ha\cdot Jb) \vee (\sim Ha\cdot Jb) \vee (Ha\cdot \sim Jb)\right] = 1 - \frac{3}{2^2} = \frac{1}{4}$$

pues en una FNDO con n=2 y m=3

$$\text{cont}\left[(Ha \vee Jb)\cdot (\sim Ha \vee Jb)\cdot (Ha \vee \sim Jb)\right] = \frac{3}{2^2} = \frac{3}{4}$$

pues es una FNCO con n=2 y m=3

Pasamos ahora a ver ciertas características del concepto de cont que no son muy deseables, por lo que nos lanzaremos a la tarea de formular un nuevo concepto de medida de cantidad de información de una proposición en la siguiente sección.

TEOREMA 15.

a) Si B_i y B_j con dos proposiciones básicas con predicados distintos, entonces

$$\text{cont}(B_j/B_i) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\ \text{cont}(B_i)$$

b) Si $B_1, B_2, \ldots, B_n$ son n proposiciones básicas con n predicados distintos y C_m es la conjunción de las primeras m de ellas (m=2,...,n-1), entonces

$$\text{cont}(B_{m+1}/C_m) = \frac{1}{2^{m+1}}$$

DEMOSTRACION

a) $\text{cont}(B_j/B_i) = \text{cont}(B_j\cdot B_i) - \text{cont}(B_i)$

$$= 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ \text{cont}(B_i)$$

b) Como $C_m \cdot B_{m+1} = C_{m+1}$

$$\mathrm{cont}(B_{m+1}/C_m) = \mathrm{cont}(C_m \cdot B_{m+1}) - \mathrm{cont}(C_m)$$

$$= \mathrm{cont}(C_{m+1}) - \mathrm{cont}(C_m)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^{m+1}}\right) - \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) = \frac{1}{2^{m+1}}$$

□

CONSIDERACIONES.

Según la parte a) del teorema anterior, para - proposiciones básicas con distintos predicados se tiene que- $\mathrm{cont}(B_j/B_i) = \frac{1}{2}\,\mathrm{cont}(B_i)$. Esto quiere decir que la cantidad de información en que B_j excede a B_i, es decir, la cantidad de información de B_j dado B_i, es la mitad de la información de B_i. Esto no parece razonable, pues si B_j y B_i son proposiciones básicas de predicados distintos, son "independientes" y por tanto $\mathrm{cont}(B_j/B_i)$ no debería depender de B_i.

Según la parte b) del teorema anterior se tiene que para $B_1 \ldots B_n$ del mismo tipo que las B_i y B_j anteriores:

$$\mathrm{cont}(B_3/B_1 \cdot B_2) = \frac{1}{2^{2+1}} = \frac{1}{8}$$

$$\mathrm{cont}(B_4/B_1 \cdot B_2 \cdot B_3) = \frac{1}{2^{3+1}} = \frac{1}{16}$$

$$\mathrm{cont}(B_5/B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \cdot B_4) = \frac{1}{2^{4+1}} = \frac{1}{32}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\mathrm{cont}(B_n/B_1 \cdot B_2 \ldots \cdot B_{n-1}) = \frac{1}{2^n}$$

Supóngase qué un receptor que conoce B_1 y B_2 recibe sucesivamente mensajes B_3, $B_4,\ldots,B_n$. El teorema dice que mientras se vaya incrementando el número de mensajes recibidos, la medida de la cantidad de información de recibir el siguiente mensaje dado que se conocen los anteriores, cada vez va disminuyendo. Esto no va de acuerdo a nuestra intuición, pues si los B_i son "independientes" el cont de B_k - dado los anteriores, no debe depender de los anteriores sino del mismo B_k.

Por otro lado se tiene que las fórmulas para - FNCO y para FNDO se acercan hacia 0 y hacia 1 de una manera nó lineal y muy lenta al ir incrementando el número de proposiciones atómicas distintas, pero el incremento de proposiciones atómicas distintas si se puede pensar razonsablemente que crece linealmente, de manera que las fórmulas resultan inadecuadas.

La discusión anterior nos lleva a proponer un nuevo explicatum para el concepto de cantidad de información semántica.

E3. EL CONCEPTO inf Y SUS PROPIEDADES.

Anteriormente se obtuvo que si $B_1 \ldots B_n$ son proposiciones básicas con n predicados distintos:

$$cont(B_j/B_i) = \frac{1}{2}\, cont(B_i)$$

$$cont(C_n) = cont(B_1 \cdot B_2 \ldots \cdot B_n) = 1 - \frac{1}{2^n}$$

En lugar de la primera iqualdad nos gustaría tener un cont' tal que $cont'(B_j/B_i) = cont'(B_j)$ ya que B_i y B_j son "independientes", para obtener esto se necesita que $cont'(B_i \cdot B_j) = cont'(B_i) + cont'(B_j)$, puesto que así se tendría

$$cont'(B_j/B_i) \underset{Def.}{=} cont'(B_i \cdot B_j) - cont'(B_i) = cont'(B_i) + cont'(B_j) - cont'(B_i)$$
$$= cont'(B_j).$$

Esto último nos da idea de que sería bueno tener $cont'(B_1 \ldots B_n) = \sum_{i=1}^{n} cont(B_i)$, ya que así la medida de información de C_n crecería en la misma proporción que el aumento de las B_i, lo cual no ocurre con la medida $1-\frac{1}{2^n}$ que se acerca muy lentamente a 1.

Para efectos de normalización vamos a pedir que si las B_i son como se ha dicho antes, entonces

$cont'(B_i) = 1$ y $cont'(C_n) = n$ (*)

obsérvese que si $cont(C_n) = 1 - \frac{1}{2^n}$

entonces $\frac{1}{2^n} = 1 - \text{cont}(Cn)$

de ahí $2^n = \frac{1}{1-\text{cont}(Cn)}$

$n = \log\left(\frac{1}{1-\text{cont}(Cn)}\right)$ (log en base 2)

pero de acuerdo a (*) nos gustaría que $n = \text{cont}'(Cn)$

de ahí que $\text{cont}'(Cn) = \log\left(\frac{1}{1-\text{cont}(Cn)}\right)$.

Generalizando, en lugar de Cn pongamos cualquier fbf A y llamemos "inf" a "cont'", "inf" es el nuevo explicatum de medida de cantidad de información.

DEFINICION 9.

Si A es una fbf

$\text{inf}(A) = \log\left(\frac{1}{1-\text{cont}(A)}\right)$

TEOREMA 16.

a) $\text{inf}(A) = -\log(1-\text{cont}(A)) = \log\left(\frac{1}{\text{cont}(\sim A)}\right) = -\log \text{cont}(\sim A)$

b) $\text{inf}(A) = \log\left(\frac{1}{m(A)}\right) = -\log m(A)$

c) $\text{inf}(\sim A) = -\log \text{cont}(A)$

d) $\text{inf}(\sim A) = -\log(1-m(A))$

e) $0 \leq \text{inf}(A) \leq \infty$

DEMOSTRACION

a) $\text{inf}(A) = \log\left(\frac{1}{1-\text{cont}(A)}\right) = \log(1) - \log(1-\text{cont}(A)) = -\log(1-\text{cont}(A))$

$= -\log \text{cont}(\sim A)$

b) $\inf(A)=\log(\frac{1}{1-\mathrm{cont}(A)})=-\log(1-\mathrm{cont}(A))=-\log\ m(A)\ =\log(\frac{1}{m(A)})$

c) $\inf(\sim A)=-\log(1-\mathrm{cont}(\sim A))=-\log\ \mathrm{cont}(A)$

d) $\inf(\sim A)=-\log\ m(\sim A)\ =-\log(1-m(A))$

e) $\inf(A)=-\log\ m(A)$ por b)

sabemos que $0\leq m(A)\leq 1$

de ahí que $1\leq\frac{1}{m(A)}\leq\infty$

como log es creciente $\log(1)\leq\log(\frac{1}{m(A)})$ $\lim_{x\to\infty}\log x$

$$0\leq-\log\ m(A)\leq\infty$$

y por tanto c) $0\leq\inf(A)\leq\infty$

$\square$

En seguida daremos más propiedades de inf respecto a los conectivos lógicos.

TEOREMA 17.

a) $\inf(A)=0$ sii $\vdash_c A$

b) $\inf(A)=\infty$ sii A es una contradicción

c) si $\vdash_c A\supset B$ entonces $\inf(A)\geq\inf(B)$

d) $\inf(A\cdot B)\geq\inf(A)\geq\inf(A\vee B)$

e) $\inf(A\cdot B)=-\log\ \mathrm{cont}(\sim A\vee\sim B)$

f) $\inf(A\vee B)=-\log\ \mathrm{cont}(\sim A\cdot\sim B)$

g) $\inf(A\cdot B)=\inf(A)+\inf(B)$ sii $m(A\cdot B)=m(A)m(B)$ [1]

(1) Cuando A,B cumplen que $m(A\cdot B)=m(A)m(B)$ se dice que A y B son inductivamente independientes.

DEMOSTRACION.

a) A sii $m(A)=1$ sii $\log(mA)=0$ sii $-\log m(A)=0$

sii $\inf(A)=0$

b) A es una contradicción sii $m(A)=0$ sii $\log m(A)=-\infty$

sii $\inf(A)=\infty$

c) (por contrapuesta)

supongamos $\inf(A) < \inf(B)$

$-\log m(A) < -\log m(B)$ por b) del teorema 16.

$\log\frac{1}{m(A)} < \log(\frac{1}{m(B)})$

$\frac{1}{m(A)} < \frac{1}{m(B)}$ puesto que log es creciente

$m(B) < m(A)$

ahora recordemos que "si $\vdash_c A \supset B$ entonces $m(A) \leq m(B)$"

por tanto tenemos que $\nvdash_c A \supset B$

d) como se tiene que $\vdash_c A \cdot B \supset A$ y que $\vdash_c A \supset AvB$

por c) se tiene que $\inf(A \cdot B) \geq \inf(A)$ y que $\inf(A) \geq \inf(AvB)$

e) $\inf(A \cdot B)=-\log m(A \cdot B) =- \mathrm{cont}(\sim (A \cdot B))$

$=-\log \mathrm{cont}(\sim A \vee \sim B)$

f) $\inf(AvB)=-\log m(AvB) =-\log(\mathrm{cont} \sim (AvB)) =-\log \mathrm{cont}(\sim A \cdot \sim B)$

g) $\inf(A \cdot B)=\inf(A)+\inf(B)$

sii $-\log m(A \cdot B) =-\log m(A) -\log m(B)$

sii $\log m(A \cdot B) =\log m(A) +\log m(B)$

sii $\log m(A \cdot B) =\log m(A)m(B)$

sii $m(A \cdot B)=m(A)m(B)$

□

Si Cn, Dn, FNCO y FNDO se definen como se definieron anteriormente para cont se tiene:

TEOREMA 18.

a) $\inf(Dn) = \log\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}n}\right) = n - \log(2^n-1)$

b) $\inf(Cn) = n$

c) $\inf(FNDO) = n - \log m$

d) $\inf(FNCO) = n - \log(2^n-m)$

DEMOSTRACION

a) $\inf(Dn) = -\log m(Dn)$

$= -\log(1-\text{cont}(Dn))$

$= -\log(1-\frac{1}{2}n)$

$= -\log\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}n}\right) = \log\left(\dfrac{2^n}{2^n-1}\right) = n - \log(2^n-1)$

b) $\inf(Cn) = -\log m(Cn)$

$= -\log(1-\text{cont}(Cn))$

$= -\log(1-(1-\frac{1}{2}n))$

$= -\log(\frac{1}{2}n)$

$= n$

c) $\inf(FNDO) = -\log(m(FNDO))$

$= -\log(1-\text{cont}(FNDO))$

$= -\log(1-(1-\frac{m}{2}n))$

$= -\log(\frac{m}{2}n)$

$= n - \log m$

d) $\inf(FNCO) = -\log(1-\text{cont } FNC)$

$= -\log(1-\frac{m}{2}n)$

$= -\log\left(\dfrac{2^n-m}{2^n}\right)$

$= n - \log(2^n-m)$

□

DEFINICION 10

inf (B/A) = inf (A·B) -- inf (A)

Bajo esta definición se puede ver ahora que si B_1, ..., B_n son proposiciones basicas sin predicados en comun y Cm, es la conjunción de las m primeras Bi:

$$\text{inf } (B_j/B_i) = 1 = \text{inf } (B_j)$$

$$\text{inf } (Bm+1/_{Cm}) = 1 = \text{inf } Bm+1$$

Esto nos hace ver que inf tiene las propiedades que le pedimos a cont' y de ahí que inf sea tal vez un buen explicatum para cantidad de información de una proposición.

Sin embargo si se tienen varios lenguajes L_n^π con distintas n y π, inf no ayuda a esclarecer mucho el sentido de cantidad de información pues se pueden asignarnumeros muy distintos a proposiciones que intuitivamente sean equivalentes, solo que escritas en distintos lenguajes.

En el capitulo IV hablaremos nuevamente de la asignación de medidas de cantidad de información a lae proposiciones de la lógica.

¿Porque los conceptos Cont, cont e inf generan semánticas para el calculo de proposiciones de la lógica clásica?

Recuerdese que si se tiene una semántica para un conjunto de símbolos (en este caso los enunciados formados en los lenguajes L_n^π que representan proposiciones de la lógica clásica) cuando hay un procedimiento para asignar a los enunciados los predicados "ser verdaderos" o " ser falso".

En nuestro caso los tres conceptos tienen teoremas que - caracterizan a las proposiciones falsas y a las verdaderas, a saber, cont (A) = 0 sii $\vdash_{c} A$ y cont(A) = 1 sii A es falsa, contradictoria., y los correspondientes teoremas de Cont y de inf. De manera que cada uno de los tres conceptos, genera una semántica para el calculo de proposiciones.

En el capítulo siguiente se haran una serie de observaciones a ésta teoria de la información semantica de --- Carnap y Bar-Hillel para introducirnos en los sistemas de lógica relevante que pretenden ser una mejor formalización del concepto de consecuencia lógica que se usa comunmente, ya que se habrá observado que muchos de los resultados hasta aquí obtenidos, descansan su validez en ciertas "verdades" discutibles de la lógica clásica:

si $\vdash_{c} A$ entonces $\vdash_{c} B \supset A$,

$\vdash A \& \sim A \supset B$,etc.

CAPITULO II

UN CONCEPTO DE INFORMACION SEMANTICA EN BASE AL SISTEMA E.

A. INTRODUCCION.

B. LAS "PARADOJAS" DE LA SEMANTICA DE CARNAP.

C. LA LOGICA RELEVANTE. EL SISTEMA E.

D. LA SEMANTICA DE HANSON.

A. INTRODUCCION.

En este capítulo se expone la construcción del concepto cualitativo de información semántica dado por William H. Hanson. Dicho concepto se construye de modo tal que resulte adecuado al fragmento implicativo de primer orden del sistema E(1) de la Lógica Relevante, es decir, Hanson parte de que el concepto de consecuencia lógica reflejado por el sistema E es correcto y en base a él genera un concepto de información semántica (en el capítulo siguiente se hará el tratamiento contrario).

Para llegar a la construcción del concepto de información semántica de Hanson, primero hacemos ciertas objeciones a los conceptos de información de Carnap y vemos que las inconveniencias de dichos conceptos son el reflejo de ciertas objeciones que se pueden hacer al sistema lógico en que se basan. En seguida, tomando como punto de partida dichas objeciones a la Lógica Clásica, exponemos de manera muy breve el desarrollo de la Lógica Relevante hasta llegar a la formulación del sistema E y algunas de sus propiedades. La relación de consecuencia lógica del sistema E de la Lógica Relevan-

(1) Por "fragmento implicativo del primer orden del sistema E" entendemos el conjunto de fbf demostrables en dicho sistema que tienen la forma $A \rightarrow B$ y tales que en A y en B aparecen solamente símbolos de conjunción, disyunción y negación.

te pretende reflejar de manera más adecuada el sentido - que tiene el concepto de consecuencia lógica en su uso - ordinario.

B. LAS "PARADOJAS" DE LA SEMANTICA DE CARNAP.

De acuerdo a los conceptos de información semántica de Carnap. se tiene que si T es una tautología, la información de T es nula; es cero en el caso de la información cuantitativa y es el vacío en el caso de la información cualitativa. Por otro lado se tiene también que si C es una contradicción, la información de C es la total, la máxima. Resulta difícil pensar que el conocimiento de verdades como $A \wedge B \rightarrow B$ ó $A \vee B \rightarrow B \vee A$ no nos esté informando nada, o que el conocimiento de $A \wedge \sim A$ nos dé la información de todo. ¿Por qué surgen estas "paradojas"(1) en los conceptos de Carnap?

La idea central de Carnap es buena. El considera la información cualitativa de A como aquello a que A conlleva, aquello que A puede implicar en un momento dado. La información cuantitativa que considera es simplemente un reflejo numérico del concepto cualitativo. Podemos afirmar que la medida cuantitativa de la información de A es un número que refleja, según Carnap, aquello que la proposición A puede implicar, de modo que mien-

(1) El término "paradoja" se emplea generalmente de dos maneras:
   a) Para referirse a una proposición contradictoria, es decir, a una proposición tal que su afirmación conduce a la afirmación de su negación, y viceversa.
   b) Para referirse a todo el proceso de razonamiento que conduce a algo contradictorio, por ejem.: paradojas de Russell, Richard, etc.

   Aquí utilizamos el término entre comillas para indicar únicamente la "no adecuación al sentido común" de lo que consideramos como "paradójico", de manera que no nos referimos a ninguno de los sentidos a) ó b).

tras mayor sea dicho número, mayor será el número de proposiciones que A implica.

Ahora bien, si las ideas y definiciones centrales de los conceptos de información semántica de Carnap son aceptados sin recelo, entonces lo que acarrea las "paradojas" de que hemos hablado son las herramientas utilizadas en las demostraciones de dichas "paradojas".- Recuérdese que en la demostración de que la información de una tautología es nula se usa el teorema de la Lógica clásica que afirma que si una proposición es siempre verdadera entonces cualquier proposición la implica.

(1) $\vdash_c A \supset T$ para T Tautología y A cualquier fórmula.

A partir de la aceptación de (1) se obtiene que la clase de los elementos de contenido de una tautología es la clase nula y de ahí que su información sea nula. - Del mismo modo, al tenerse

(2) $\vdash_c C \supset A$ para C contradicción y A cualquier fórmula.

Se tiene que si algo es siempre falso, entonces "implica" cualquier cosa y de ahí que la clase de los elementos de contenido de una contradicción sea la clase total (ver las demostraciones en el capítulo I).

En resumen: la aceptación de la validez de los conceptos de información semántica del capítulo I descansa fuertemente en la aceptación de la validez de la-

"implicación" que conllevan ciertos teoremas de la Lógica clásica como (1) y (2) que reflejan un sentido de implicación inadecuado al significado ordinario que se le da al término según veremos en la siguiente sección.

C. LA LOGICA RELEVANTE: EL SISTEMA E.

En esta sección introducimos brevemente algunos resultados de la Lógica relevante que serán de utilidad para el desarrollo posterior del trabajo. La introducción que hacemos de la Lógica relevante puede reforzarse con algunos de los artículos que se incluyen en la Bibliografía.

Uno de los problemas cardinales de la Lógica es y ha sido siempre el problema de la deducción, es decir, el de tener una forma de decidir adecuadamente cuando podemos concluir la proposición B a partir de la proposición A, cuándo, de A se sigue B, en símbolos: cuándo, $A \vdash B$ (léase "de A se deduce B") es cierto.

La intuición nos dice que $A \vdash B$ debe ser válido sólo, y sólo cuando la proposición "A <u>implica</u> B" sea también válida. En la lógica tradicional escribimos "A implica B" como "$A \supset B$" y la forma de saber si "$A \supset B$" es válida, es recurrir a la tabla de verdad de $A \supset B$ que nos dice que la proposición es válida tan sólo si A es falsa o si B es verdadera. Con esto lo que se está haciendo en la Lógica clásica es remitir la validez de una relación de consecuencia puramente lógica (la deducción) entre A y B a la contrastación de la veracidad individual de las pro_ posiciones. ¿Qué tan bueno es esto? ¿Cómo se afecta - la relación intuitiva de "implicar" al usar el procedimiento de las tablas de verdad? Si tenemos que $A \supset B$ es válido de acuerdo a las tablas de verdad, ¿Realmente - podremos deducir B de la suposición de A?

De acuerdo a las tablas de verdad se tiene que son "lógicamente" válidas las siguientes proposiciones:

a) $A \supset (B \supset A)$

b) $\sim A \supset (A \supset B)$

c) $\sim (A \supset B) \supset (A \supset \sim B)$

d) $\sim (A \supset B) \supset (B \supset A)$

e) $A \& B \supset (A \supset B)$

f) $\sim A \& \sim B \supset (A \supset B)$

g) $A \supset (B \supset B)$

Imaginemos que esta implicación generada por - las tablas de verdad (implicación material) sí recupera el significado intuitivo que tenemos de la implicación, es decir, $A \supset B$ es válida si y sólo si $A \vdash B$. Aceptando - esto podemos interpretar las proposiciones anteriores - de la siguiente manera:

a) Si A es verdadera entonces cualquier B la implica.
   Si suponemos A entonces A se deduce de cualquier B.

b) Si A es falsa entonces A implica cualquier cosa.

Si Suponemos $\sim A$ entonces cualquier B se deduce de A[1].

c) Si no es cierto que A implique B, entonces A implica $\sim B$.

Si de A no se deduce B entonces $\sim B$ se deduce de A.

d) Si no es cierto que A implique B, entonces B implica A.

De dos proposiciones cualesquiera, al menos una se deduce de la otra.

e) Si dos proposiciones son verdaderas, una implica la otra.

Si dos proposiciones son verdaderas, una se deduce de la otra.

f) Si dos proposiciones son falsas, una implica la otra.

Si dos proposiciones son falsas, una se deduce de la --- otra.

g) La Ley lógica de identidad es consecuencia de cualquier- proposición B.

Parece claro que a)-g) resultan ser una ofensa -- al sentido común y al significado intuitivo que se tiene - de derivación, de decucción, de "se deduce de". De ahí - que "$\supset$" no es una implicación lo suficientemente adecuada a este concepto. ¿Por qué es esto?

En lógica tradicional, la relación $A \supset B$ se ve - simplemente como $\sim A \vee B$, es decir, la validez de una relación de consecuencia lógica se analiza como la de una-

(1) Obsérvese que la aceptación de a) y b) como validas nos generaba las "paradojas" de que hablamos en la sección anterior de - la semántica de Carnap.

función de verdad; se considera que si $\sim A \vee B$ es verdad, entonces también lo es $A \supset B$ (interpretado como "A implica B"). Pero la verdad de "$A \vee B$" con "v" como función de verdad no es condición suficiente para garantizar la verdad de "si no fuera el caso que A, entonces B". Por ejemplo:

"Napoleón nació en Córcega ó el número 666 es perfecto"

es una proposición verdadera, pero de ahí no podemos afirmar que "si Napoleón no hubiera nacido en Córcega, entonces el número 666 sería perfecto". Es obvio que a partir del conocimiento de la historia de Napoleón no se puede concluir una propiedad de la aritmética.

Por tanto, las "paradojas" a)-g) son el resultado de ver a la implicación lógica como una función de verdad. El símbolo "$\supset$" de la Lógica Clásica refleja sólo un cierto tipo de implicación que no es el adecuado al sentido usual del término. Con esto no queremos decir que la implicación material sea totalmente mala, dicha implicación produce teoremas no sospechosos, tales como:

$$(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$$

$$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)) .$$

Por otro lado, si interpretamos $A \supset B$ en su sentido material de $\sim A \vee B$, entonces ninguna de las proposiciones a)-f) resulta ser "paradójica".

Si $A \supset (B \supset A)$ se entiende como $A \supset (\sim B \vee A)$,

$\sim A \supset (A \supset B)$ se entiende como $\sim A \supset (\sim A \vee B)$,

$A \supset (\sim A \supset B)$ se entiende como $A \supset (A \vee B)$, etc.

entonces "$\supset$" no contiene ninguna paradoja, el problema está en sostener que "A implica B" es "no-A ó B", es decir, que la relación de consecuencia lógica sea una función de verdad.

Ahora bien, si las tablas de verdad de la Lógica clásica no resultan útiles para saber cuándo una implicación es válida, es necesario recurrir a nuevos tipos de implicación. En respuesta a esta necesidad nace la lógica relevante y los sistemas de implicación relevante.

En el camino seguidó por algunos lógicos en la búsqueda de sistemas de axiomas adecuados para la creación de un sistema de deducción que refleje el sentido adecuado de la implicación, ha habido varias etapas. No es el propósito del presente trabajo hacer énfasis en dichas etapas.

Los primeros pasos se dieron con C.I. Lewis, a principios del presente siglo, quien creó los sistemas -

S1, S2, S3, S4, S5; introdujo un nuevo tipo de implicación denominado "implicación estricta" (⥽) y definió en base a ella las categorías modales (posibilidad, necesidad, imposibilidad). Con esto, una proposición ya no sólo es verdadera o falsa sino que ahora puede ser posible, necesaria o imposible.

Sin embargo, en los cálculos de Lewis, a pesar de que desaparecieron "paradojas" como $A ⥽ (B ⥽ A)$, surgieron otras "paradojas".

En los años 50, W. Ackerman mejora los intentos anteriores y da un paso decisivo con su artículo ----- "Begrundung Einer Strengen Implikation" (ver la Bibliografía final). En dicho trabajo se estudian los sistemas Π' y Σ' y se introduce un símbolo (Λ) en el lenguaje para referirse al absurdo y así introducir las modalidades. Tiempo después se muestra que dicho símbolo no es necesario y que se pueden definir las modalidades sin necesidad de introducir dicho símbolo.

A principios de los años 60, Anderson y Belnap, basándose en los resultados de Ackerman, crean el sistema E que es hasta la fecha el que mejor recupera el sentido usual de la implicación.

ACLARACION: A partir de aquí vamos a utilizar - el símbolo "$\rightarrow$" para referirnos a la implicación que se trabaja en los sistemas relevantes. En ocasiones utilizaremos el término entailment(1) (ocasionar, incluir, envolver) para referirnos a dicha implicación. Tradúzcase "A entails B" como "A E-implica B", "si A entonces B". - En todas estas expresiones se está considerando el sentido intuitivo de implicar-deducir.

Vamos a detenernos un poco en el análisis de lo que hubo que tener en cuenta para evitar las "paradojas" de la implicación material.

Se considera que $A \rightarrow (B \rightarrow B)$ es "paradójico" porque no es posible que una ley lógica como $B \rightarrow B$ sea consecuencia de una proposición A que puede ser contingente. - Del mismo modo se rechaza $A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ puesto que no es sostenible si se considera A contingente, pues en ese caso no es posible que A se deduzca de una ley lógica.(2) - $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ es mala porque no es posible que un entailment (una relación de consecuencia lógica), sea consecuencia de algo contingente. Para evitar estas falacias se pide la condición siguiente:

NECESIDAD: La validez de una inferencia debe -

(1) De ahí el nombre de sistema E.
(2) Esto debido a que A puede ser contingente y a partir de A se tendría $(A \rightarrow A) \rightarrow A$, lo cual indica que de una ley lógica (que se considera necesaria) se deduce algo contingente.

ser necesaria[1] y no depender de contingencias o accidentes de la naturaleza. Con esto se asegura que si A→B es verdadera entonces A→B es necesariamente verdadera.

Anderson y Belnap transforman la parte implicativa del sistema de la lógica intuicionista (H_I) para garantizar que las verdades lógicas que se expresen en él sean necesarias.

Si A es verdadera, es bueno aceptar que A→A es verdadera, pero si A es verdadera, no debemos decir que B→A también lo es o que A se deduce de cualquier proposición B, sea ésta relevante o no para A. Por ejemplo: En la implicación material tomamos como verdadera a la proposición "si la luna es de queso verde entonces "2=1+1" simplemente porque es cierto que 2=1+1, sin importarnos si la hipótesis de la condicional habla del mismo tema que la consecuencia. Es claro que del hecho de que la luna sea de queso verde nunca vamos a deducir que 2=1+1, de ahí que nos vemos obligados a pedir la condicion siguiente:

RELEVANCIA: Si A→B es verdadera entonces A debe ser relevante[2] para B, A debe ser realmente usada para derivar B.

Anderson y Belnap observaron que la parte impli

(1) Entiéndase por necesario, aquello que es válido por sí mismo, aquello que no puede no ser, aquello que no puede ser de otro modo.

(2) De ahí el nombre de Lógica Relevante. Anderson y Belnap muestran que, sintácticamente, la relevancia entre A y B debe cumplir la condición de que A y B compartan al menos una variable.

cativa del sistema de Church (W_I) cumple con la condición de relevancia. Posteriormente al unir en un solo sistema las condiciones de relevancia y necesidad, dichos autores crean el sistema E que observa las condiciones de relevancia y necesidad.

Es importante hacer notar que un cálculo lógico no está dado simplemente por los axiomas y reglas de inferencia, también juega un papel muy importante la definición de deducción que se trabaje en dicho cálculo. Teniendo presente este hecho y la preservación del metateorema de deducción, Anderson y Belnap observaron las condiciones que se deberían cumplir para evitar las "paradojas" de relevancia y necesidad, y así llegaron a la formulación de un conjunto de axiomas adecuados para crear el sistema E.

A continuación damos el sistema E y en seguida mostraremos unas características que nos serán de utilidad posteriormente.

SISTEMA E (1)

AXIOMAS:

E1. $A \to A \to B \to B$

E2. $A \to B \to . B \to C \to . A \to C$

E3. $(A \to . A \to B) \to . A \to B$

(1) Se define necesidad de A; NA $=_{\text{Def.}}$ $A \to A \to A$

	E4.	$A \& B \rightarrow A$
&	E5.	$A \& B \rightarrow B$
	E6.	$(A \rightarrow B) \& (A \rightarrow C) \rightarrow . A \rightarrow (B \& C)$
N&	E7.	$NA \& NB \rightarrow N(A \& B)$
	E8.	$A \rightarrow A v B$
v	E9.	$B \rightarrow A v B$
	E10.	$(A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C) \rightarrow . (A v B) \rightarrow C$
&v	E11.	$A \& (B v C) \rightarrow (A \& B) v C$
	E12.	$A \rightarrow \sim A \rightarrow \sim A$
~	E13.	$A \rightarrow \sim B \rightarrow . B \rightarrow \sim A$
	E14.	$\sim \sim A \rightarrow A$

REGLAS DE INFERENCIA:

R1) $\dfrac{A \rightarrow B,\ A}{B}$ (modus ponens)

Si $A \rightarrow B$ se afirma, entonces de A inferir B

R2) $\dfrac{A, B}{A \& B}$ (adjunción)

De A y B inferir $A \& B$

DEFINICION DE DEDUCCION:

Si Γ es un conjunto de fbf y A es una fbf, decimos que la sucesión $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una <u>deducción de A a partir de Γ</u> si y sólo si $A_n = A$ y cada A_i es elemento de Γ o un axioma o es consecuencia de anteriores por las reglas R1 y R2.

DEFINICION 1.

Por fórmula del lenguaje CDN entendemos una fbf formada a partir de variables proposicionales $P_1, P_2, \ldots$ y que sólo incluye en su construcción a los conectivos: Conjunción (&), Disyunción (v) y Negación ($\sim$) como constantes lógicas iniciales.

Utilizamos las letras A, B, C,... como metavariables para referirnos a fbf y las letras $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots$ como metavariables para referirnos a letras proposicionales.

DEFINICION 2.

Un entailment de primer grado es un entailment de la forma $A \rightarrow B$ y tal que A y B son fbf del lenguaje CDN.

Estamos interesados en probar que un entailment de primer grado $A \rightarrow B$ es probable en E si y sólo si $A \rightarrow B$ es una "E-implicación tautológica". ¿Qué es una E-implicación tautológica?

DEFINICION 3.

i) Un átomo es una variable proposicional o la negación de una variable proposicional.

ii) Una disyunción primitiva es una disyunción $A_1 v \ldots v A_m$ donde cada A_i es un átomo.

iii) Una conjunción primitiva es una conjunción $B_1 \& \ldots \& B_n$ donde cada B_j es un átomo.

iv) Un entailment primitivo es un entailment $A \rightarrow B$ donde A es conjunción primitiva y B es disyunción primitiva.

Observaciones intuitivas.

a) Si A y B son átomos, entonces $A \rightarrow B$ es válida sii A y B son el mismo átomo. Ejemplo: $p \rightarrow p$, $\sim q \rightarrow \sim q$ son válidos pero $p \rightarrow q$, $\sim p \rightarrow p$ no son válidos.

b) Si $A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_m$ es una conjunción primitiva y $B_1 v \ldots v B_n$ es una disyunción primitiva, entonces $A_1 \& \ldots \& A_m \rightarrow B_1 v \ldots v B_n$ es válido sii algún B_j es el mismo que algún A_i.

entailments primitivos válidos.

$p \& q \rightarrow pvr$ $\quad \sim p \& q \& r \rightarrow sv \sim pv \sim r$ $\quad p \& vp \rightarrow \sim p$

entailments primitivos inválidos:

$p \& \sim q \rightarrow r$ $\quad \sim p \rightarrow pvqvr$ $\quad p \& \sim p \rightarrow q$ $\quad q \rightarrow pv \sim p$.

DEFINICION 4.

Un entailment primitivo $A \rightarrow B$ es explícitamente tautológico sii algún átomo conyunto de A es el mismo que algún átomo disyunto de B.

Obsérvese que con la definición 4 se está tomando en cuenta el requerimiento de relevación para la validez de $A \rightarrow B$. Por otro lado, se está dando un criterio para conocer la validez de $A \rightarrow B$ sin tener que conocer, como en la lógica clásica, la verdad de B o la falsedad de A.

Es claro que los entailments explícitamente tautológicos son válidos. Parece ser que no podemos aumentar de otro modo el conjunto de los entailments primitivos válidos, de manera que tenemos:

DEFINICION 5.

Un entailment primitivo es válido sii es explícitamente tautológico.

Veamos ahora cómo debe verse la cuestión de la validez para entailments de primer orden no primitivos y construidos en el lenguaje CDN.

Obsérvese que es conveniente tener:

$A \rightarrow B \& C$ válido sii $A \rightarrow B$ y $A \rightarrow C$ son válidos ambos.

$AvB \rightarrow C$ válido sii $A \rightarrow C$ y $B \rightarrow C$ son válidos ambos.

Esto sugiere dar un criterio para la validez de entailments escritos en "forma normal".

DEFINICION 6.

Un entailment en forma normal es un entailment $A \rightarrow B$ que tiene la forma $A_1 v \ldots v A_n \rightarrow B_1 \& \ldots \& B_m$ donde cada A_i es una conjunción primitiva y cada B_j es una disyunción primitiva.

DEFINICION 7.

Un entailment en forma normal es válido sii --- $A_i \rightarrow B_j$ es explícitamente tautológico para cada i y cada j.

Hasta aquí tenemos un criterio para conocer la validez de un entailment en forma normal. Si cualquier-entailment de primer orden se pudiera llevar a su forma normal tendríamos un criterio para conocer la validez de un entailment de primer orden. Afortunadamente, ésto ¡Sí se puede hacer!

Es ya conocido de la lógica clásica que podemos transformar cualquier fbf del lenguaje CDN a una forma normal disyuntiva o a una forma normal conjuntiva utilizando sólo reglas de sustitución:

1) Conmutatividad de &,v
2) Asociatividad de &,v
3) Distributividades
4) Doble negación
5) Leyes de De Morgan

Posteriormente, en el capítulo siguiente, mostramos semánticamente que 1)-5) tienen lugar. Como la semántica que construiremos es adecuada al fragmento implicativo del sistema E, tenemos que 1)-5) son teoremas en el sistema E(1). Es claro pues que dado cualquier entailment de primer orden $A \rightarrow B$, siempre se puede transformar en un entailment de forma normal:

"forma normal disyuntiva de A" $\rightarrow$ "forma normal conjuntiva de B"

o sea: $A_1 v \ldots v A_n \rightarrow B_1 \& \ldots \& B_m$

donde cada A_i es una conjunción primitiva y cada B_j es una

(1) La demostración de 1)-5) se puede obtener también directamente del sistema E.

disyunción primitiva.

Una vez hecha la transformación, podemos aplicar el criterio de validez generado por la definición 7 y tenemos así un criterio para conocer la validez de cualquier entailment de primer orden.

Resumimos ahora todo en la siguiente definición:

DEFINICION 8.

Un entailment de primer grado $A \rightarrow B$ donde A y B están en el lenguaje CDN es una <u>E-implicación tautológica</u>[1] sii una forma normal $A_1 v \ldots v A_n \rightarrow B_1 \& \ldots \& B_m$ de $A \rightarrow B$ es tal que para cada i y cada j, $A_i \rightarrow B_j$ es explícitamente tautológico. (e.d., si su forma normal es válida).

EJEMPLO 1.

$(\sim pvq)\&(\sim qvr) \rightarrow \sim pvr$ no es una E-implicación tautológica: llevándolo a su forma normal por medio de la utilización de las reglas 1)-5), se transforma en

$(\sim p \& \sim q) v (\sim p \& r) v (q \& \sim q) v (q \& r) \rightarrow (\sim pvr)$

pero aquí se observa que $q \& \sim q \rightarrow \sim pvr$ no es explícitamente tautológico y por tanto el entailment no es válido.

TEOREMA 1.

Un entailment de primer orden $A \rightarrow B$ es probable-

(1) Se acostumbra usar también "entailment tautológico" en lugar de "E-implicación tautológica". Hemos elegido este último por razones que se verán después.

en E si y sólo si $A \rightarrow B$ es una E-implicación tautológica.

DEMOSTRACION.

Por el artículo de Acherman se puede mostrar que:

(1) $\vdash_E A \rightarrow B$ sii una forma normal $A_1 v \ldots v A_m \rightarrow B_1 v \ldots v B_n$ es probable en E.

Este hecho es debido a que las propiedades 1), 2), 3), 4), y 5) son probables en E y en E se tiene como regla derivada una regla de sustitución.

Ahora supongamos que $\vdash_E A_1 v \ldots v A_m \rightarrow B_1 \& \ldots \& B_n$,
llamemos $A: A_1 v \ldots v A_m$, $B: B_1 \& B_2 \ldots \& B_n$
entonces:

1)	$A \rightarrow B$	por hipótesis
2)	$B \rightarrow B_j$	con E4 y E5 (para cualquier B_j)
3)	$A \rightarrow B_j$	de 1) y 2) con E2 y M.P.
4)	$A_i \rightarrow A_i c \ldots v A_m$	con E8 y E9 (para cualquier A_i)
5)	$A_i \rightarrow B_j$	de 3) y 4) con E2 y M.P.

por tanto $\vdash_E A \rightarrow B \quad \Rightarrow \vdash_E A_i \rightarrow B_j \quad \forall i \ \forall j$ (*)

Supongamos ahora que $\vdash_E A_i \rightarrow B_j \ \forall i \ \forall j$

$$\begin{array}{ll} & A_1 \rightarrow B_j \\ 1) & A_2 \rightarrow B_j \qquad \text{para cualquier } B_j \\ & \ldots \\ & A_m \rightarrow B_j \end{array}$$

2) $(A_1 \rightarrow B_j) \& (A_2 \rightarrow B_j)$ · Conjunción

3) $(A_1 \vee A_2) \rightarrow B_j$ De 2) con E10

...

4) $A_1 \vee \ldots \vee A_m \rightarrow B_j$ Con el mismo procedimiento de 2) y 3). Para cualquier B_j

5)
$A \rightarrow B_1$
$A \rightarrow B_2$ De 4), recuérdese que $A = A_1 \vee \ldots \vee A_m$
...
$A \rightarrow B_n$

6) $(A \rightarrow B_1) \& (A \rightarrow B_2)$ Conjunción

7) $A \rightarrow B_1 \& B_2$ De 6) con E6 y M.P.

...

8) $A \rightarrow B_1 \& \ldots \& B_n$ Con el mismo procedimiento de 6) y 7).

9) $A \rightarrow B$ Recuérdese que $B = B_1 \& \ldots \& B_n$

por tanto se tiene $\vdash_E A_i \rightarrow B_j \ \forall_i \ \forall_j \Rightarrow \vdash_E A \rightarrow B$ (**)

con (*) y (**). obtenemos

(2) $A_1 \vee \ldots \vee A_m \rightarrow B_1 \& \ldots \& B_n$ sii $\vdash_E A_i \rightarrow B_j \ \forall_i \ \forall_j$

Es fácil ver, con ayuda de E2, E4-5, E8-9, que todo entailment explícitamente tautológico es probable en E.

(3) $\forall_i \ \forall_j \ A_i \rightarrow B_j$ es explícitamente tautológico $\Rightarrow \forall_i \ \forall_j \vdash_E A_i \rightarrow B_j$.

combinando (1), (2) y (3) tenemos:

$\vdash_E A \rightarrow B$ sii $\forall_i \ \forall_j \ \vdash_E A_i \rightarrow B_j \rightleftarrows \forall_i \ \forall_j \ A_i \rightarrow B_i$ es explícitamente tautológico sii (Def. 8) $A \rightarrow B$ es una E-implicación tautológica.

La demostración de $(\leftarrow)$ se hace por contraposición y utilizando un modelo de tablas[1]. Esbozamos sólo la idea de la demostración:

i) Se dan unas tablas en este caso, de 8 valores ---- $(\pm 1\ \pm 2\ \pm 3\ \pm 4)$, para la $\sim$, &, v, $\rightarrow$, y se considera que los valores positivos son los valores "marcados".

ii) Se comprueba que los axiomas de E obtienen valores "marcados" y que las Reglas de Inferencia preservan los valores "marcados".

iii) Se supone que existen i y j tales que $A_i \rightarrow B_j$ no es un entailment explícitamente tautológico.

iv) Se da un método para hacer una asignación de valores a $A_i \rightarrow B_j$ de manera que resulte que $A_i \rightarrow B_j$ no tome el valor marcado y por tanto $\nvdash_E A_i \rightarrow B_j$.

$\square$

OBSERVACION.

Dichas tablas también sirven para probar:

TEOREMA 2.

Si $\vdash_E A \rightarrow B$ entonces A y B comparten al menos una variable.

DEMOSTRACION.

Supóngase que A y B no comparten ninguna variable.

(1) Para aclarar este tipo de demostraciones y tales tablas, ver el artículo "Tautological Entailments" en la Bibliografía.

Asígnese a todas las variables de A el Valor +1, por tanto A toma el valor ± 1

Asígnese a todas las variables de B el valor +2, por tanto B toma el valor ± 2.

Entonces $A \to B$ toma el valor -3 negativo y no "marcado"

Por tanto $\nvdash_{E} A \to B$

$\blacksquare$

Estamos ya en condiciones de exponer la semántica de Hanson.

D. LA SEMANTICA DE HANSON.

En esta sección se expone la idea central del capítulo II. Exponemos aquí, la manera en que William H. Hanson crea un concepto de información semántica y por tanto una teoría de información semántica. La idea que trata de preservar en su desarrollo, es la de ser congruente con el sistema E.

Es bueno aclarar que el concepto de Hanson, al igual que los teoremas de la sección anterior, es aplicable sólo a fórmulas de la forma $A \rightarrow B$ donde A y B son fórmulas del lenguaje CDN.

En síntesis, la idea de Hanson es utilizar la Lógica para crear, en base a ella, una teoría de la información semántica.

Brevemente esbozado, nuestro camino es el siguiente: Primero se define el concepto E-derivabilidad, equivalente al de E-implicación tautológica. Posteriormente se postula la existencia de un conjunto infinito de proposiciones y de funciones que van del conjunto de fbf en dicho conjunto de proposiciones. La información de las fórmulas se tomará como la imágen bajo cierto tipo de funciones.

Sea M un conjunto finito de fbf en el lenguaje CDN. Definimos X_M por recursión, de la siguiente manera:

1. Si $A \in M$ entonces $A \in X_M$
2. $A\&B \in X_M$ sii $A \in X_M$ y $B \in X_M$
3. Si $A \in X_M$ ó $B \in X_M$, entonces $AvB \in X_M$
4. Si $A \in X_M$ y B resulta de A, reemplazando alguna subfórmula de A, de la forma de alguna fórmula de la columna derecha (izquierda), por la correspondiente fórmula de la columna izquierda (derecha), entonces $B \in X_M$.

a)	C	$\sim\sim$C	Doble negación.
b)	C&D	D&C	Conmutatividad &,v
c)	CvD	DvC	
d)	(C&D)&E	C&(D&E)	Asociatividad &,v
e)	(CvD)vE	Cv(DvE)	
f)	$\sim$(CvD)	$\sim$C&$\sim$D	Leyes De Morgan
g)	$\sim$(C&D)	$\sim$Cv$\sim$D	
h)	C&(DvE)	(C&D)v(C&E)	Distributividades.
i)	Cv(D&E)	(CvD)&(CvE)	
j)	C	CvC	Idempotencia v

Obsérvese que a)-i) corresponden a 1)-5) de la sección anterior.

DEFINICION 8.

A es E-derivable a partir de un conjunto finito M de fbf sii $A \in X_M$.

DEFINICION 9.

Si $M = \{M_1, \dots M_k\}$ decimos que M E-implica A sii $\overset{k}{\underset{i=1}{\&}} M_i \rightarrow A$ es una E-implicación tautoló gica.

Con apoyo en las definiciones anteriores, Hanson prueba:

TEOREMA 3.

A es E-derivable a partir de M sii M E-implica A

Obsérvese, que con esto tenemos ya una reformulación sintáctica para el fragmento implicacional de primer orden de E, puesto que con ayuda de los teoremas 1 y 3 se puede ver que:

$\vdash_E \& M_i \rightarrow A$ sii A es E-derivable a partir de M (e.d. $A \in X_M$).

sin embargo, estamos interesados en demostrar la adecuación en términos de un concepto de información semántica y aún no lo hemos definido.

Convengamos en entender, "argumento no ampliativo", como un argumento en que la información llevada -

por la conclusión es también llevada por las premisas. - Utilizamos la E-implicación para definir un concepto de - información que refleje a los "argumentos no ampliativos".

POSTULADO A.

Existe un conjunto infinito de proposiciones $\mathcal{P}$ y existen funciones p, p: $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{P}$, donde $\mathcal{F}$ es el conjunto de fbf.

POSTULADO B.

Para cualquier A, B, C, D $\in \mathcal{F}$ y cualquier p, función de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{P}$, $p \in H_e$ sii se cumplen las condiciones siguientes:

1. Si A y B se E-implican mutuamente entonces p(A)=p(B)
2. Si p(A)=p(C) y p(B)=p(D) entonces
   p(A&B)=p(C&D) y p(AvB)=p(CvD)
3. Si p(C)=p(A&B) entonces existen E y F tales que
   p(E)=P(A) y p(F)=p(B) y C E-implica E&F.

Utilizando los postulados podemos ahora dar la siguiente definición.

DEFINICION 10.

Dado $M \subseteq \mathcal{F}$ y $p \in H_e$, $I_e^p(M)$ es el conjunto de proposiciones- de $\mathcal{P}$ que son las imágenes de la función p.

Decimos que "<u>las proposiciones expresadas por A bajo p son parte de la información E-proporcionada por M bajo p</u>" del siguiente modo:

DEFINICION 11.

$p(A) \in I_e^p(M)$ sii existe una fbf B tal que $p(B)=p(A)$ y M E-implica B.

Nótese que se está construyendo un concepto de información semántica cualitativa. En este caso la información se toma como un conjunto de proposiciones. Una diferencia con Carnap, es que este consideraba la información como un conjunto especial de proposiciones: las negaciones de state descriptions.

El siguiente teorema muestra algunas condiciones naturales del concepto I_e^p que nos aclaran la forma en que está construido.

TEOREMA 4.

Para cualquier fbf A, cualquier conjunto finito M de fbf y $p : \mathcal{F} \to \mathcal{P}$, $p \in H_e$ se tiene que

$p(A) \in I_e^p(M)$ sii se cumple alguna de las siguientes condiciones:

1) Existe una fbf B tal que $p(A)=p(B)$ y $B \in M$
2) Existe una fbf B tal que $p(A\&B) \in I_e^p(M)$ ó $p(B\&A) \in I_e^p(M)$
3) Existen fbfs C y D tales que
   $p(A)=p(C\&D)$ y $p(C) \in I_e^p(M)$ y $p(D) \in I_e^p(M)$
4) Existen fbfs C y D tales que
   $p(A)=p(CvD)$ y $p(C) \in I_e^p(M)$ ó $p(D) \in I_e^p(M)$

Se puede ahora probar que si la información cargada por un conjunto finito de fbf M se construye como

$I_e^p(M)$, entonces los "argumentos no ampliativos" coinciden con las E-implicaciones.

TEOREMA 5.

Si A es una fbf y M un conjunto finito de fbfs

M E-implica A sii para toda función $p \in H_e$, $I_e^p(A) \subseteq I_e^p(M)$

Este último Teorema es el que sienta las bases de la semántica, puesto que sabemos ya que un conjunto M E-implica a una fórmula A sii la conjunción de fórmulas - de M E-implica tautológicamente a A, y esto último si y - sólo si $\& M_i \rightarrow A$ es un teorema de E. Por tanto, hemos probado:

TEOREMA 6.

Si A es una fbf y M un conjunto finito de fbfs.

$\vdash_E \& M_i \rightarrow A$ sii para toda función $p \in H_e$, $I_e^p(A) \subseteq I_e^p(M)$

Este Teorema nos genera una semántica en términos de un concepto de información para el fragmento de - primer orden de E.

CAPITULO III

UN CONCEPTO DE CONTENIDO SEMANTICO DEFINIDO EN TERMINOS NATURALES

A. INTRODUCCION

B. EL CONCEPTO $Cont(A, U_M^E)$

C. LA SEMANTICA DE VOISHVILLO Y J. SANCHEZ

D. EL UNIVERSO $U_{M_2}^E$. PROPIEDADES DE $Cont(A, U_M^E)$.

A. INTRODUCCION.

El objetivo principal de este capítulo es mostrar como puede ser esclarecido el significado de la relación de consecuencia lógica, el significado del entailment, mediante la construcción de un concepto racional y natural de información semántica cualitativa que refleje dicho significado. Para lograr este objetivo, se define primero un concepto que intenta representar la información semántica cualitativa de una proposición, su contenido semántico. En seguida se define una relación de consecuencia lógica en términos de dicho concepto y se procede a probar, la adecuación del concepto construido al fragmento implicacional de primer orden del sistema E. Se termina el capítulo dando un ejemplo y analizando algunas de las propiedades del concepto construido.

Es conveniente recalcar: La construcción de lo que vamos a entender por "contenido o información semántica de una proposición" no involucra, como en los casos anteriores(1), el conocimiento de algún sistema lógico y sus teoremas. Por el contrario, el concepto que pre

(1) Los conceptos de información cualitativa hasta ahora construidos, requieren el conocimiento de sistemas lógicos y sus teoremas: los conceptos de Carnap y Bar-Hillel apelan al conocimiento de los teoremas de la lógica clásica y el concepto de Hanson requiere el conocimiento de los teoremas del fragmento implicativo de E.

sentamos, dado por Voishvillo y J. Sánchez, intenta servir de apoyo para esclarecer el significado del entailment. El concepto se define en términos de algo que se considera intuitivamente natural para ser tomado como información semántica, como contenido de una proposición. En el fondo, la idea es la misma que la de Carnap: la información cualitativa de una proposición en un universo dado, es aquello que la proposición puede implicar en dicho universo.

B. El CONCEPTO $Cont(A, U_M^E)$

Trabajamos en el lenguaje CDN. Utilizamos las convenciones de notación ya establecidas con anterioridad, con la salvedad de que ahora solo consideramos un conjunto finito de letras proposicionales.

Supóngase que se tiene un conjunto M de variables proposicionales

$$M = \{P_1, \ldots, P_n\}$$

Dado M, consideramos M^C de la siguiente manera:

$$M^C = \{P_1^V, P_2^V, \ldots, P_n^V, P_1^f, P_2^f \ldots P_n^f\}$$

Piensese P_i^V como "P_i es verdad" y P_i^f como "P_i es falso".

DEFINICION 1.

Dado M, el universo semántico U_M^E es el conjunto de todos los subconjuntos de M^C

$$U_M^E = \{\alpha / \alpha \subseteq M^C\}$$

Queremos ahora definir, de manera intuitivamente natural, la información cualitativa, de una proposición A del lenguaje CDN, como un cierto subconjunto de U_M^E. Haciendo analogía con Carnap y Bar-Hillel, podemos llamar "elementos de contenido" a los elementos de U_M^E.

DEFINICION 2.

Si A es una fbf del lenguaje CDN (constuida solo con letras proposicionales de M) definimos Cont (A, U_M^E), el con tenido semántico de A en el universo U_M^E, de la siguiente manera:

1) Para las variables proposicionales y sus negaciones

$$\mathrm{Cont}(p,\ U_M^E) \underset{\mathrm{Def.}}{=} \{\alpha \in U_M^E \ /\ p^v \in \alpha\}$$

$$\mathrm{Cont}(\sim p,\ U_M^E) \underset{\mathrm{Def.}}{=} \{\alpha \in U_M^E \ /\ p^f \in \alpha\}$$

2) Para la conjunción y su negación

$$\mathrm{Cont}(A\&B,\ U_M^E) \underset{\mathrm{Def.}}{=} \mathrm{Cont}(A, U_M^E) \cup \mathrm{Cont}(B, U_M^E)$$

$$\mathrm{Cont}(\sim(A\&B), U_M^E) \underset{\mathrm{Def.}}{=} \mathrm{Cont}(\sim A, U_M^E) \cap \mathrm{Cont}(\sim B, U_M^E)$$

3) Para la disyunción y su negación

$$\mathrm{Cont}(A\vee B, U_M^E) \underset{\mathrm{Def.}}{=} \mathrm{Cont}(A, U_M^E) \cap \mathrm{Cont}(B, U_M^E)$$

$$\mathrm{Cont}(\sim(A\vee B), U_M^E) \underset{\mathrm{Def.}}{=} \mathrm{Cont}(\sim A, U_M^E) \cup \mathrm{Cont}(\sim B, U_M^E)$$

4) Para la negación de la negación

$$\mathrm{Cont}(\sim\sim A, U_M^E) \underset{\mathrm{Def.}}{=} \mathrm{Cont}(A, U_M^E).$$

Se puede también definir el contenido de un conjunto finito de fbfs. $\Gamma = \{A_1 \ldots A_n\}$

DEFINICION 3.

$$\mathrm{Cont}(\Gamma, U_M^E) \underset{\mathrm{Def.}}{=} \mathrm{Cont}(A_1 \& \ldots \& A_n, U_M^E).$$

Nuestra siguiente tarea es reflejar y utilizar este concepto de información semántica en la Lógica. Primero definimos, en términos de él, una relación de consecuencia lógica y después veremos como el concepto se -- "adecua" al fragmento implicacional de primer orden del- sistema E.

C. SEMANTICA DE VOISHVILLO Y J. SANCHEZ.

En esta sección definimos, en términos de -- Cont(A,U_M^E), una relación de consecuencia lógica que genera una semántica para el fragmento implicacional de primer orden del sistema E.

La relación de consecuencia lógica puede, razonablemente pensarse como una relación determinada por la información o contenido semántico de las proposiciones - involucradas. Decimos que una fórmula B es consecuencia de un conjunto de fbfs Γ, siempre y cuanto el contenido de B sea parte del contenido o información proporcionada por las fórmulas de Γ, en símbolos:

DEFINICION 4.

Sea Γ un conjunto finito de fbfs y B una fórmula (en lenguaje CDN)

$\Gamma \models B$ sii Cont$(B,U_M^E) \subseteq$ Cont(Γ,U_M^E)

donde U_M^E se forma en base a un conjunto de M que contiene cuando menos a todas las variables proposicionales - que aparecen en Γ y en B.

Estamos ahora en condiciones de formular y demostrar un teorema que establece la adecuación (equiva-- lencia) entre el concepto $\models$ y el concepto $\vdash_{E}$ del fragmento implicacional de primer orden de E, es decir, damos una semántica para dicho fragmento. Empezamos demostrando un lema que se usará en la demostración del teorema de adecuación.

LEMA 1.

Si A es una fbf del lenguaje CDN y A^* una forma normal de A (conjuntiva o disyuntiva), entonces $Cont(A,U_M^E)=Cont(A^*,U_M^E)$.

DEMOSTRACION.

La demostración de este hecho es sencilla si se recuerda que para pasar de A a A^* sólo se utiliza:

1) Conmutatividad de &,v
2) Asociatividad de &,v
3) Distributividades
4) Doble negación
5) Leyes De Morgan

Veremos que $Cont(A,U_M^E)$ se preserva con la aplicación de 1)-5).

1) Conmutatividad de &,v

$$\begin{aligned} Cont(A\&B,U_M^E) &= Cont(A,U_M^E) \cup Cont(B,U_M^E) \\ &= Cont(B,U_M^E) \cup Cont(A,U_M^E) \\ &= Cont(B\&A,U_M^E) \end{aligned}$$

$Cont(AvB, U_M^E) = Cont(BvA, U_M^E)$ En analogía a & debido a la conmutatividad de la intersección.

2) Asociatividad de &,v

$Cont((A\&B)\&C, U_M^E) = Cont((A\&B), U_M^E) \cup Cont(C, U_M^E)$

$= (Cont(A, U_M^E) \cup Cont(B, U_M^E)) \cup Cont(C, U_M^E)$

$= Cont(A, U_M^E) \cup (Cont(B, U_M^E) \cup Cont(C, U_M^E))$

$= Cont(A, U_M^E) \cup (Cont(B\&C, U_M^E))$

$= Cont(A\&(B\&C), U_M^E)$

$Cont((AvB)vC, U_M^E) = Cont(Av(BvC), U_M^E)$ por la asociatividad de $\cap$

3) Distributividades

$Cont(A\&(BvC), U_M^E) = Cont(A, U_M^E) \cup Cont(BvC, U_M^E)$

$= Cont(A, U_M^E) \cup (Cont(B, U_M^E) \cap Cont(C, U_M^E))$

$= (Cont(A, U_M^E) \cup Cont(B, U_M^E)) \cap (Cont(A, U_M^E) \cup Cont(C, U_M^E))$

$= Cont(A\&B, U_M^E) \cap Cont(A\&C, U_M^E)$

$= Cont((A\&B)v(A\&C), U_M^E)$

Análogamente se tiene la otra distributividad.

4) Doble negación

$Cont(\sim\sim A, U_M^E) = Cont(A, U_M^E)$ por definición.

5) Leyes De Morgan

$Cont(\sim(AvB), U_M^E) = Cont(\sim A, U_M^E)$ $Cont(\sim B, U_M^E)$ por definición

$= Cont(\sim A \& \sim B, U_M^E)$ por definición

$Cont(\sim(A\&B), U_M^E) = Cont(\sim A, U_M^E)$ $Cont(\sim B, U_M^E)$

$= Cont(\sim A v \sim B, U_M^E)$

$\square$

En ocasiones también usamos leyes de idempotencia para pasar de A a A^* pero en este caso se tiene:

$Cont(AvA, U_M^E) = Cont(A, U_M^E)$ y $Cont(B\&B, U_M^E) = Cont(B, U_M^E)$.

TEOREMA 1.

Sea $\Gamma = \{A_1, \ldots A_n\}$ un conjunto de fbfs del lenguaje CDN y A una fbf del mismo lenguaje. Entonces

$$\Gamma \vdash_{E} A \text{ sii } \Gamma \models A$$

DEMOSTRACION.

$\Rightarrow$ Supóngase que $\Gamma \vdash_{E} A$

$A_1 \& \ldots \& A_n \rightarrow A$ es una E-implicación tautológica

Existe una forma normal $C_1 v,,, v C_K \rightarrow D_1 \& \ldots \& D_m$ de $A_1 \& \ldots \& A_n \rightarrow A$ tal que $C_i \rightarrow D_j$ es explícitamente tautológica para cada i y para cada j

supóngase que $C_i \rightarrow D_j$ es $P_{i_1} \& P_{i_2} \& \ldots \& P_{i_r} \rightarrow q_{j_1} v \ldots v\ q_{j_k}$

entonces para cada i y cada j existen átomos P_{i_h} y q_{j_k} tales que $P_{i_h} = q_{j_k}$ y por tanto

(1) $Cont(p_{i_h}, U_M^E) = Cont(q_{j_t}, U_M^E)$

ahora bien, de acuerdo a la definición se tiene

(2) $Cont(D, \& \ldots \& D_m, U_M^E) = \bigcup_{j=1}^{m} Cont(D_j, U_M^E) = \bigcup_{j=1}^{m} \left[\bigcap_{t=1}^{t_j} Cont(q_{j_t}, U_M^E) \right]$

(3) $Cont(C_1 v \ldots v C_k, U_M^E) = \bigcap_{i=1}^{k} Cont(C_i, U_M^E) = \bigcap_{i=1}^{k} \left[\bigcup_{h=1}^{h_i} Cont(p_{i_h}, U_M^E) \right]$

como dentro de cada i-miembro disyuntivo y cada j-miembro conjuntivo existe un átomo común $p_{i_h} = q_{j_t}$ se tiene, de acuerdo a (1), que para <u>cualquier</u> j-miembro de la unión de la parte derecha de (2) y para <u>cualquier</u> i-miembro de la intersección de la parte derecha de (3):

(4) $\bigcap_{t=1}^{t_j} Cont(q_{j_t}, U_M^E) \subseteq \bigcup_{h=1}^{h_i} Cont(p_{i_h}, U_M^E)$,

es decir, $Cont(D_j, U_M^E) \quad Cont(C_i, U_M^E)$

Como (4) vale para cada i y cada j se tiene

(5) $\bigcup_{j=1}^{m} \left(\bigcap_{t=1}^{t_j} Cont(q_{j_t}, U_M^E) \right) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} \left(\bigcup_{h=1}^{h_i} Cont(p_{i_h}, U_M^E) \right)$

y por tanto,

$Cont(D_1 \& \ldots \& D_m, U_M^E) \subseteq Cont(C_1 v \ldots v C_k, U_M^E)$

ahora bien, de acuerdo al lema se tiene que:

$Cont(A, U_M^E) = Cont(D_1 \& \ldots \& D_m, U_M^E)$ y que

$Cont(\Gamma, U_M^E) = Cont A_1 \& \ldots \& A_n, U_M^E) = Cont(C_1 v \ldots v C_k, U_M^E)$

Por tanto, en base a (5), tenemos finalmente

$Cont(A, U_M^E) \subseteq Cont(\Gamma, U_M^E)$, es decir, $\Gamma \models A$.

$\Leftarrow$ Supóngase ahora que $\Gamma \cdot \models A$, es decir

$$\mathrm{Cont}(A, U_M^E) \subseteq \mathrm{Cont}(A_1 \& \ldots \& A_n, U_M^E)$$

consideremos la forma normal $C_1 v \ldots v C_k \rightarrow D_1 \& \ldots \& D_m$ de la fórmula $A_1 \& \ldots \& A_n \rightarrow A$. De acuerdo al lema, nuestra suposición se transforma ahora en

$$\mathrm{Cont}(D_1 \& \ldots \& D_m, U_M^E) \subseteq \mathrm{Cont}(C_1 v \ldots v C_k, U_M^E)$$

$$\bigcup_{j=1}^{m} \mathrm{Cont}(D_j, U_M^E) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Cont}(C_i, U_M^E)$$

Esto último quiere decir que para cualquier i y cualquier j

(6) $\mathrm{Cont}(D_j, U_M^E) \subseteq \mathrm{Cont}(C_i, U_M^E)$

De (6) se deduce que para cualquier i y cualquier j existe un átomo común entre C_i y D_j ¿Por qué? Si esto no fuera así, supóngase que C_i es $P_{i_1} \& \ldots \& P_{i_r}$, D_j es $q_{j_1} v \ldots v q_{j_s}$ y que cada $P_{i_h} \neq q_{j_t}$

supóngase además

$$q'_{j_t} = \begin{cases} \check{q}_{j_t} & \text{si el átomo } q_{j_t} \text{ es una letra proposicional} \\ q^{!}_{j_t} & \text{si el átomo } q_{j_t} \text{ es la negación de una letra proposicional} \end{cases}$$

análogamente, considerese la definición de P'_{i_h}

Entonces suceden

(7) $\{q'_{j_1}, q'_{j_2}, \ldots, q'_{j_s}\} \in \mathrm{Cont}(q_{j_1} U_M^E) \cap \ldots \cap \mathrm{Cont}(q_{j_s}, U_M^E) = \mathrm{Cont}(D_j, U_M^E)$

(8) $\{q'_{j_1}, q'_{j_2}, \ldots, q'_{j_s}\} \notin \mathrm{Cont}(P_{i_1} U_M^E) \cup \ldots \cup \mathrm{Cont}(P_{i_r}, U_M^E) = \mathrm{Cont}(C_i, U_M^E)$

ya que cualquiera sea P_{i_h} se tiene que $P^{\bullet}_{i_h} \notin \{q^{\bullet}_{j_1},\ldots,q^{\bullet}_{j_s}\}$

pero (7) y (8) están en contradicción con (6)

Por tanto, existe un átomo común entre cada pareja C_i, D_j

Para cada i y cada j $C_i \rightarrow D_j$ es explícitamente tautológica

Por definición se tiene entonces que $C_1 v \ldots v C_k \rightarrow D_1 \& \ldots \& D_m$ es una E-implicación tautológica, es decir, $\Gamma \vdash_t A$

□

Finalizamos el capítulo analizando algunas propiedades del concepto $\mathrm{Cont}(A, U^E_M)$ que se ha construido.

D. PROPIEDADES DE Cont(A, U_M^E). EL UNIVERSO $U_{M_2}^E$

En esta sección nos proponemos analizar algunas de las propiedades del concepto Cont(A, U_M^E). Observemos antes una característica de U_M^E: si se tiene que

$$M = \{p_1, \ldots, p_n\}$$

entonces
$$M^c = \{p_1^v, \ldots, p_n^v, p_1^f, \ldots, p_n^f\},$$

y por tanto el universo el universo semántico U_M^E de elementos de contenido tiene 2^n elementos. Esto nos hace ver que U_M^E tiene "muchos" elementos si n es relativamente grande.

Tomemos el caso en que M está formado sólo por dos letras proposicionales,

$$M_2 = \{p_1, p_2\}$$

en este caso, $U_{M_2}^E$ es el conjunto formado por todos los posibles subconjuntos de

$$M_2^c = \{p_1^v, p_2^v, p_1^f, p_2^f\}$$

$U_{M_2}^E$ consta de los $2^{2(2)} = 16$ elementos siguientes:

1) $\emptyset$ 9) $\{p_2^v, p_1^f\}$

2) $\{p_1^v\}$ 10) $\{p_2^v, p_2^f\}$

3) $\{p_2^v\}$ 11) $\{p_1^f, p_2^f\}$

4) $\{p_1^f\}$ 12) $\{p_1^v, p_2^v, p_1^f\}$

5) $\{p_2^f\}$ 13) $\{p_1^v, p_2^v, p_2^f\}$

6) $\{p_1^v, p_2^v\}$ 14) $\{p_1^v, p_1^f, p_2^f\}$

7) $\{p_1^v, p_1^f\}$ 15) $\{p_2^v, p_1^f, p_2^f\}$

8) $\{p_1^v, p_2^f\}$ 16) $\{p_1^v, p_2^v, p_1^f, p_2^f\}$

Tomando como base la definición de $Cont(A, U_M^E)$, no es difícil comprobar las siguientes propiedades en $U_{M_2}^E$

a) $Cont(p_1 v \sim p_1, U_{M_2}^E) =$

$$\left\{\{p_1^v, p_1^f\}, \{p_1^v, p_2^v, p_1^f\}, \{p_1^v, p_1^f, p_2^f\}, \{p_1^v, p_2^v, p_1^f, p_2^f\}\right\}$$

b) $Cont(p_2 v \sim p_2, U_{M_2}^E) =$

$$\left\{\{p_2^v, p_2^f\}, \{p_1^v, p_2^v, p_2^f\}, \{p_2^v, p_1^f, p_2^f\}, \{p_1^v, p_2^v, p_1^f, p_2^f\}\right\}$$

c) $Cont(p_1 \& \sim p_1, U_{M_2}^E) = U_{M_2}^E - \left\{\emptyset, \{p_2^v\}, \{p_2^f\}, \{p_2^v, p_2^f\}\right\}$

d) $Cont(p_2 \& \sim p_2, U_{M_2}^E) = U_{M_2}^E - \left\{\emptyset, \{p_1^v\}, \{p_1^f\}, \{p_1^v, p_1^f\}\right\}$

e) $Cont((p_1 v \sim p_1) v (p_2 v \sim p_2), U_{M_2}^E) = \{p_1^v, p_2^v, p_1^f, p_2^f\} = \{M_2^c\}$

f) $Cont((p_1 \& \sim p_1) \& (p_2 \& \sim p_2), U_{M_2}^E) = U_{M_2}^E - \{\emptyset\}$

g) $Cont((p_1 v \sim p_1) \& (p_2 v \sim p_2), U^E_{M_2}) =$

$$\{\{p_1^v, p_1^f\}, \{p_2^v, p_2^f\}, \{p_1^v, p_2^v, p_1^f\}, \{p_1^v, p_2^v, p_2^f\}, \{p_1^v, p_1^f, p_2^f\}$$
$$\{p_2^v, p_1^f, p_2^f\}, \{p_1^v, p_2^v, p_1^f, p_2^f\}\}$$

h) $Cont((p_1 \& \sim p_1) v (p_2 \& \sim p_2), U^E_{M_2}) =$

$$U^E_{M_2} - \{\emptyset, \{p_1^v\}, \{p_1^f\}, \{p_2^v\}, \{p_2^f\}, \{p_1^v, p_1^f\}, \{p_2^v, p_2^f\}\}$$

OBSERVACIONES:

1) a) y b) nos inducen a pensar que en general, dos tautologías de la Lógica Clásica no informan lo mismo. Por otro lado, nos dicen que una Tautología sí informa algo. Esto está en abierta contradicción con los conceptos de Carnap y Bar-Hillel.

2) c) y d) nos inducen a pensar que: Dos contradicciones distintas no informan lo mismo y además, una contradicción no informa todo.

3) Parece ser que la proposición que menos información nos proporciona, en el sentido de contensión, es la disyunción de las leyes del tercero excluido de las letras proposicionales de conjunto M con el que estemos trabajando.

4) Tambien parece ser que la proposición que más información genera, es la conjunción de las contradicciones de las letras proposicionales del conjunto M bajo cuestión.

Tratemos ahora de generalizar algunas de las propiedades que se nos presentan intuitivas en el universo semántico $U^{E}_{M_2}$.

TEOREMA 2.

Sea U^{E}_{M} un universo semántico, p, q $\in$ M. Entonces

i) $\quad Cont(pv{\sim}p, U^{E}_{M}) \neq Cont(qv{\sim}q, U^{E}_{M})$

ii) $\quad Cont(p\&{\sim}p, U^{E}_{M}) \neq Cont(q\&{\sim}q, U^{E}_{M})$

DEMOSTRACION

i) $\quad \{p^{v}, p^{f}\} \in Cont(pv{\sim}p, U^{E}_{M})$ y $\{p^{v}, p^{f}\} \notin Cont(qv{\sim}q, U^{E}_{M})$

Lo primero es obvio. Para ver lo segundo, supongase

$\{p^{v}, p^{f}\} \in Cont(qv{\sim}q, U^{E}_{M})$, por tanto

$\{p^{v}, p^{f}\} \in Cont(q, U^{E}_{M}) \quad Cont({\sim}q, U^{E}_{M})$

$\{p^{v}, p^{f}\} \in Cont(q, U^{E}_{M})$ y $\{p^{v}, p^{f}\} \in Cont({\sim}q, U^{E}_{M})$

$q^{v} \in \{p^{v}, p^{f}\}$ y $q^{f} \in \{p^{v}, p^{f}\}$ lo cual es una contradicción

ii) $\quad \{p^{v}, p^{f}\} \in Cont(p\&{\sim}p, U^{E}_{M})$ y $\{p^{v}, p^{f}\} \notin Cont(q\&{\sim}q, U^{E}_{M})$

El razonamiento es análogo al caso i).

Veamos ahora cual es el rango de variabilidad de -- $Cont(A, U^{E}_{M})$ en un universo U^{E}_{M}.

TEOREMA 3.

Si A es una fbf del lenguaje CDN y U^{E}_{M} un universo semántico Entonces

$$\{M^{c}\} \subseteq Cont(A, U^{E}_{M}) \subseteq U^{E}_{M} - \{\emptyset\}$$

DEMOSTRACION

Haremos inducción sobre el número n de conectivos que apa--

recen en A

n=0

A=p para alguna letra proposicional $p \in M$

$Cont(A, U_M^E) = \{\alpha \subseteq M^c / p^v \in \alpha\}$

$p^v \in M^c$ y $M^c \subseteq M^c$, por tanto $M^c \in Cont(A, U_M^E)$

de ahí que $\{M^c\} \subseteq Cont(A, U_M^E)$

Por otro lado, es claro que

$\{\alpha / \alpha \subseteq M^c$ y $p^v \in \alpha\} \subseteq U_M^E$ y cada α es no vacío pues $p^v \in \alpha$

por tanto $Cont(A, U_M^E) \subseteq U_M^E - \{\emptyset\}$

se tiene entonces que

$\{M^c\} \subseteq Cont(p, U_M^E) \subseteq U_M^E - \{\emptyset\}$

Supongase ahora por hipótesis de inducción que si A tiene menos de k conectivos:

$\{M^c\} \subseteq Cont(A, U_M^E) \subseteq U_M^E - \{\emptyset\}$

n=k

En éste caso $A = \begin{cases} \sim B \\ B v C \end{cases}$ (donde B y C tienen menos de k conectivos(1)).

<u>Primer caso</u> $A = \sim B$, donde B tiene a lo más k-1 conectivos

B a su vez, pude ser

$$B = \begin{cases} \sim B_1 \\ B_1 v B_2 \end{cases}$$

Si $B = \sim B_1$, donde B_1 tiene a lo más k-2 conectivos entonces

$A = \sim\sim B_1$

(1) Consideramos sólo el caso de $\sim$ y v pues es sabido que de acuerdo a nuestras definiciones, $Cont(B\&C, U_M^E) = Cont(\sim(\sim B v \sim C), U_M^E)$.

Sabemos por H.I. que $\{M^c\} \subsetneq Cont(B, U_M^E) \subsetneq U_M^E - \{\phi\}$

pero $Cont(B, U_M^E) = Cont(\sim\sim B_1, U_M^E) = Cont(A, U_M^E)$

por tanto se tiene lo que se quiere.

Si $B = B_1 v B_2$, donde los conectivos de B_1 y B_2 son menos de k-1, entonces $A = \sim(B_1 v B_2)$, por definición se tiene que

$Cont(A, U_M^E) = Cont(\sim B_1, U_M^E) \cup Cont(\sim B_2, U_M^E)$

donde $\sim B_1$ y $\sim B_2$ tienen a lo más k-1 conectivos; por H.I.,

$$\{M^c\} \subsetneq Cont(\sim B_1, U_M^E) \subsetneq U_M^E - \{\phi\}$$

$$\{M^c\} \subsetneq Cont(\sim B_2, U_M^E) \subsetneq U_M^E - \{\phi\}$$

es claro entonces que

$$\{M^c\} \subsetneq Cont(\sim B_1, U_M^E) \cup Cont(\sim B_2, U_M^E) \qquad (1)$$

$$Cont(\sim B_1, U_M^E) \cup Cont(\sim B_2, U_M^E) \subsetneq U_M^E - \{\phi\} \qquad (2)$$

(1) y (2) nos dicen que

$$\{M^c\} \subsetneq Cont(A, U_M^E) \subsetneq U_M^E - \{\phi\}$$

<u>Segundo caso</u> $A = BvC$

$Cont(A, U_M^E) = Cont(B, U_M^E) \cap Cont(C, U_M^E)$

Por H.I. se tiene que

$$\{M^c\} \subsetneq Cont(B, U_M^E) \subsetneq U_M^E - \{\phi\}$$

$$\{M^c\} \subsetneq Cont(C, U_M^E) \subsetneq U_M^E - \{\phi\}$$

de ahí que

$$\{M^c\} \subsetneq Cont(B, U_M^E) \cap Cont(C, U_M^E) \subsetneq U_M^E - \{\phi\}$$

y por tanto

$$\{M^c\} \subsetneq Cont(A, U_M^E) \subsetneq U_M^E - \{\phi\}$$

Siguiendo la linea del teorema, establecemos ahora qué formulas tienen el mínimo y el máximo contenido de información semántica.

TEOREMA 4.

Si U^E_M es un universo semántico con $M=\{p_1,\dots,p_n\}$ entonces

i) $\{M^c\}=\mathrm{Cont}\left(\bigvee_{i=1}^{m}(p_i \vee \sim p_i), U^E_M\right)$

ii) $U^E_M - \{\emptyset\} = \mathrm{Cont}\left(\mathop{\&}_{i=1}^{m}(p_i \,\&\ \ p_i), U^E_M\right)$

DEMOSTRACION

i) $\mathrm{Cont}\left(\bigvee_{i=1}^{m}(p_i \vee \ \ p_i), U^E_M\right) = \bigcap_{i=1}^{m}\mathrm{Cont}(p_i \vee \sim p_i, U^E_M)$

$= \bigcap_{i=1}^{m}\{\alpha \subseteq M^c / p_i^v \in \alpha \text{ y } p_i^f \in \alpha\} = \{M^c\}$

ii) $\mathrm{Cont}\left(\mathop{\&}_{i=1}^{m}(p_i \,\&\sim p_i), U^E_M\right) = \bigcup_{i=1}^{m}\mathrm{Cont}(p_i \,\&\sim p_i, U^E_M)$

$= \bigcup_{i=1}^{m}\{\alpha \subseteq M^c / p_i^v \in \alpha \text{ ó } p_i^f \in \alpha\} = U^E_M - \{\emptyset\}$

Los dos teoremas anteriores nos generan el siguiente

COROLARIO 1.

Para cualquier fbf A del lenguaje CDN

$\mathrm{Cont}\left(\bigvee_{i=1}^{m}(p_i \vee \sim p_i), U^E_M\right) \subseteq \mathrm{Cont}(A, U^E_M) \subseteq \mathrm{Cont}\left(\mathop{\&}_{i=1}^{m}(p_i \,\&\sim p_i), U^E_M\right)$

Obsérvese que los teoremas demostrados implican -- ciertas caracteristicas:

1) Dos leyes del tercero excluido $p \vee \sim p$ y $q \vee \sim q$, que son equivalentes en la Lógica Clásica, no proporcionan la misma información. Por otro lado, dos contradicciones

$p \& \sim p$ y $q \& \sim q$, equivalentes también en la Lógica Clásica, ni informan cualquier cosa, ni informan lo mismo. Sólo -- informan aquello que es relevante para ellas. Por ejemplo:

$\{q\} \notin \mathrm{Cont}(p \& \sim p, U_M^E)$.

2) En un lenguaje CDN, construido a partir de un conjunto finito de proposiciones M, la máxima información no se obtiene de una sola contradicción, sino de la conjun-- ción de todas las contradicciones de las letras propo- sicionales del conjunto M.

El Teorema 3 nos está diciendo que

$$\phi \neq \mathrm{Cont}(A, U_M^E) \subsetneq U_M^E$$

Esto nos dice que nuestro universo semántico U_M^E de elemen- tos de contenido, es "más grande" de lo que se pueda llegar a necesitar para obtener el contenido semántico de una for- mula del lenguaje CDN. Vemos pues que el verdadero rango de variabilidad del contenido semántico de una fórmula es el - conjunto $\bar{U}_M^E = U_M^E - \{\phi\}$

Debido al Teorema 1, de adecuación entre la semántica construida de Voishvillo y J. Sanchez y el fragmento impli cativo de primer orden del sistema E, podemos reformular - 1) y 2) en terminos de consecuencia lógica.

1') Ni dos leyes del tercero excluido ni dos contradiccio- nes son E-equivalentes. De una contradicción no se de- duce cualquier cosa, sino sólo aquello que es relevan- te para ella. Por ejemplo:

$\not\vdash_E (p \& \sim p) \rightarrow q$, donde $p, q \in M$.

2') La fórmula de la que más consecuencias lógicas se pueden obtener, no es una sóla contradicción, sino la conjunción

$(p_1 \& \sim p_1) \& \ldots \& (p_n \& \sim p_n)$

de todas las contradicciones de las letras proposicionales que aparecen en M.

Pareciera ser que lo asentado anteriormente rebate totalmente a los conceptos de Carnap y Bar-Hillel. Verémos que no es éste el caso completamente. A continuación, damos algunas propiedades de $Cont(A, U_M^E)$ que son similares a las de los conceptos introducidos en el capítulo I. Esto nos hará pensar que ----- $Cont(A, U_M^E)$ se parece a dichos conceptos "en medio" pero no en "las orillas".

TEOREMA 5.

Si A,B son fbf del lenguaje CDN y U_M^E un universo semántico, entonces

a) $\vdash_E A \rightarrow B$ sii $Cont(B, U_M^E) \subseteq Cont(A, U_M^E)$

b) $\vdash_E A \leftrightarrow B$ sii $Cont(A, U_M^E) = Cont(B, U_M^E)$

c) $Cont(A \vee B, U_M^E) \subseteq Cont(A, U_M^E) \subseteq Cont(A \& B, U_M^E)$

DEMOSTRACION

a) $\vdash_E A \rightarrow B$ sii $A \rightarrow B$ es una E-implicación tautológica

sii $A \vdash_E B$ (éstos últimos dos pasos de acuerdo a los teoremas del capítulo II)

sii $A \models B$ por el Teorema 1

sii $Cont(B, U_M^E) \subseteq Cont(A, U_M^E)$ por definición.

b) Es inmediato de a) recordando que $\vdash_{\epsilon} A \leftrightarrow B$ significa $\vdash_{\epsilon} A \rightarrow B$ y $\vdash_{\epsilon} B \rightarrow A$

c) Es inmediato de observar que

$$\mathrm{Cont}(A, U_M^E) \cap \mathrm{Cont}(B, U_M^E) \subseteq \mathrm{Cont}(A, U_M^E) \subseteq \mathrm{Cont}(A, U_M^E) \cup \mathrm{Cont}(B, U_M^E)$$

$\square$

Hemos visto que $M^C \in \mathrm{Cont}(A, U_M^E)$ para cualquier fórmula A del lenguaje CDN. ¿Será posible encontrar algún tipo de expresión tal que $M^C \notin \mathrm{Cont}(A, U_M^E)$?. Veamos como podemos hacer una analogía mas con Carnap y Bar-Hillel al definir $\mathrm{Cont}(B/A, U_M^E)$, "el contenido de B dado A". Interprétese -- tambien como "el exceso de información de B dado que se - conoce A".

DEFINICION 5.

Para A,B en el lenguaje CDN y U_M^E un universo semántico, - definimos

$$\mathrm{Cont}(B/A, U_M^E) =_{\mathrm{Def.}} \mathrm{Cont}(A\&B, U_M^E) - \mathrm{Cont}(A, U_M^E)$$ (1)

TEOREMA 6.

Bajo las condiciones de la definición anterior:

a) $\mathrm{Cont}(B/A, U_M^E) = \mathrm{Cont}(B, U_M^E) - \mathrm{Cont}(A \vee B, U_M^E)$

b) $\mathrm{Cont}(B/A, U_M^E) \subseteq \mathrm{Cont}(B, U_M^E)$

DEMOSTRACION

a) $\mathrm{Cont}(B/A, U_M^E) = \mathrm{Cont}(A\&B, U_M^E) - \mathrm{Cont}(A, U_M^E)$, por definición

$$= \mathrm{Cont}(A\&B, U_M^E) \cap (\mathrm{Cont}(A, U_M^E))^C$$

(1) La diferencia "-" que aparece aquí, debe considerarse como diferencia entre conjuntos.

$$=\left(Cont(A,U_M^E)\cup Cont(B,U_M^E)\right)\cap (Cont(A,U_M^E))^c$$

$$=Cont(B,U_M^E)\cap (Cont(A,U_M^E))^c$$

$$=Cont(B,U_M^E) - Cont(A,U_M^E)$$

$$Cont(B,U_M^E) - Cont(AvB,U_M^E)=Cont(B,U_M^E)-(Cont(A,U_M^E)\cap Cont(B,U_M^E))$$

$$=Cont(B,U_M^E)\cap (Cont(A,U_M^E)\cap Cont(B,U_M^E))^c$$

$$=Cont(B,U_M^E)\cap \left((Cont(A,U_M^E))^c\cup (Cont(B,U_M^E))^c\right)$$

$$=Cont(B,U_M^E)\cap (Cont(A,U_M^E))^c$$

$$=Cont(B,U_M^E) - Cont(A,U_M^E)$$

Por transitividad se obtiene lo que queríamos.

b) $Cont(B/A,U_M^E)=Cont(B,U_M^E)\cap (Cont(A,U_M^E))^c\subseteq Cont(B,U_M^E)$

La igualdad de la izquierda es consecuencia de a).

$\square$

LEMA 2.

Sea A una fbf del lenguaje CDN, $A_1,A_2\in U_M^E$

Si $A_1\in Cont(A,U_M^E)$ y $A_1\subseteq A_2$ entonces $A_2\in Cont(A,U_M^E)$.

DEMOSTRACION.

Inducción sobre el número n de conectivos de A.

$n=0$

$A=p$ donde $p\in M$

Sea $A_1\in Cont(A,U_M^E)$ y $A_1\subseteq A_2$

es claro que $p^V\in A_1$ y por tanto $p^V\in A_2$

Por tanto $A_2\in Cont(A,U_M^E)$.

Supongamos por H.I. que la afirmación vale para $n<k$.

$n=k$

Sea A con k conectivos

$$A=\begin{cases}\sim B\\ BvC\end{cases}$$ (donde B y C tienen menos de k conectivos)

<u>Si $A=\sim B$</u>, B puede ser $\sim B_1$ ó B_1vB_2

Si $B=\sim B_1$, $A=\sim\sim B_1$

como la afirmación vale para B_1 por H.I. y como

$Cont(A,U_M^E)=Cont(B_1,U_M^E)$

se tiene que la afirmación vale para éste caso.

Si $B=B_1vB_2$, $A=\sim(B_1vB_2)$

$Cont(A,U_M^E)=Cont(\sim B_1,U_M^E)\cup Cont(\sim B_2,U_M^E)$

sea $A_1\in Cont(A,U_M^E)$ y $A_1\subseteq A_2$ (queremos $A_2\in Cont(A,U_M^E)$)

sin perdida de generalidad supongamos que

$A_1\in Cont(\sim B_1,U_M^E)$, entonces por H.I.:

$A_2\in Cont(\sim B_1,U_M^E)$; entonces

$A_2\in Cont(\sim B_1,U_M^E)\cup Cont(\sim B_2,U_M^E)$

por tanto $A_2\in Cont(A,U_M^E)$ como queriamos probar.

<u>Si A=BvC</u>

supongase que $A_1\in Cont(A,U_M^E)$ y $A_1\subseteq A_2$

$Cont(A,U_M^E)=Cont(B,U_M^E)\cap Cont(C,U_M^E)$

entonces $A_1\in Cont(B,U_M^E)$ y $A_1\in Cont(C,U_M^E)$

entonces por H.I. a B y a C se tiene

$A_2\in Cont(B,U_M^E)$ y $A_2\in Cont(C,U_M^E)$

entonces $A_2\in Cont(B,U_M^E)\cap Cont(C,U_M^E)$

entonces $A_2\in Cont(BvC,U_M^E)$

es decir,

$A_2\in Cont(A,U_M^E)$

Lo cual concluye la demostración.

$\square$

El lema anterior nos permite probar el siguiente --- teorema que nos da una interesante propiedad de $Cont(A,U_M^E)$.

TEOREMA 7.

Si A es una fórmula del lenguaje CDN y

$A_1=\{q_1^{\prime},\dots,q_r^{\prime}\}\in Cont(A,U_M^E)$,

Entonces $\vdash_E A\rightarrow p_1 v\dots vp_r$, donde $p_i=\begin{cases} q_i & \text{si } q_i^{\prime}=q_i^{v} \\ \sim q_i & \text{si } q_i^{\prime}=q_i^{f} \end{cases}$

DEMOSTRACION.

Queremos probar $\vdash_E A\rightarrow p_1 v\dots vp_r$

pero ésto es lo mismo que demostrar que

$Cont(p_1 v\dots vp_r,U_M^E)\subseteq Cont(A,U_M^E)$

sea pues $X\in Cont(p_1 v\dots vp_r,U_M^E)$ (queremos $X\in Cont(A,U_M^E)$)

entonces $X\in\bigcap_{i=1}^{r} Cont(p_i,U_M^E)$

entonces $X=A_1$ ó $X=A_2$ con $A_1\subsetneq A_2$,

Si $X=A_1$, tenemos por hipótesis que $X\in Cont(A,U_M^E)$

Si $X=A_2$ y $A_1\subsetneq A_2$, tenemos por el lema anterior y la hipótesis de que $A_1\in Cont(A,U_M^E)$, que $X=A_2\in Cont(A,U_M^E)$.

$\square$

Sea A una fórmula del lenguaje CDN y supongase que

$Cont(A,U_M^E)=\{A_1,\dots,A_n\}$

De acuerdo con el teorema anterior, podemos decir que

$\vdash_E A\rightarrow A_i^D$ para $1\leq i\leq n$

donde $A_i^D = p_{i_1} v\dots vp_{i_r}$ y cada $p_{i_j}=\begin{cases} q_{i_j} & \text{si } q_{i_j}^{v}\in A_i \\ \sim q_{i_j} & \text{si } q_{i_j}^{f}\in A_i \end{cases}$

Utilizando los axiomas del sistema E, se puede ver fácilmente que entonces

$\vdash_{E} A \rightarrow (A_1^D \& \ldots \& A_n^D)$

Hemos probado pues el siguiente

COROLARIO 2.

Si A es una fórmula del lenguaje CDN y

$Cont(A, U_M^E) = \{A_1, \ldots, A_n\}$, entonces

$\vdash_{E} A \rightarrow A_1^D \& \ldots \& A_n^D$

$\square$

Es sabido, de la lógica clásica, que las formas normales de una fórmula son equivalentes a dicha fórmula. Por otro lado, también es conocido (por el Lema 1 y el Teorema 1 de adecuación), que las equivalencias que se usen para pasar cualquier fórmula A del lenguaje CDN a su forma normal, tienen lugar en la lógica relevante.

Dada A en el lenguaje CDN, es posible llevarla a una forma normal conjuntiva (FNC) o a una forma normal disyuntiva (FND). Debemos notar que en la lógica relevante, no es permisible la "eliminación" de miembros conjuntivos de la forma $B v \sim B$ ni de miembros disyuntivos de la forma $B \& \sim B$, debido a que

① $\not\vdash_{E} A \& (B v \sim B) \leftrightarrow A$

② $\not\vdash_{E} A v (B \& \sim B) \leftrightarrow A$

(En ① no tiene lugar $\leftarrow$ y en ② no tiene lugar $\rightarrow$ debido a que en general, no son E-implitaciones tautológicas).

El hecho de que las formas normales no sean únicas se debe a que tienen lugar

(5) $\vdash_R A\&(A\vee B)\leftrightarrow A$

(6) $\vdash_R A\vee(A\&B)\leftrightarrow A$

(Debido al Teorema 1 de adecuación, la demostración de (5) y (6) resulta sencilla. Para (5) basta ver que $Cont(A,U_M^E)\subseteq Cont(A\&(A\vee B),U_M^E)$ y que $Cont(A\&(A\vee B),U_M^E)\subseteq Cont(A,U_M^E)$, lo cual es inmediato. Análogamente se resuelve (6)).

En la lógica relevante, dada A, podemos definir un cierto tipo de formas normales equivalentes a A que tienen la propiedad de ser únicas y nos permiten representar todas las posibles premisas y conclusiones, no equivalentes entre sí, de la fórmula A.

Sea A una fórmula del lenguaje CDN construida en base a un conjunto finito M de letras proposicionales.

DEFINICION 6.

La FNCR (Forma Normal Conjuntiva Relevante) de A es la fórmula obtenida como resultado del siguiente algoritmo:

1) Se construye el conjunto M_c de todos los átomos posibles:

$$M_c=\{p_1,p_2,\ldots,p_n,\sim p_1,\ldots,\sim p_n\}$$

2) Se lleva la fórmula A a alguna de sus FNC

$D_1\&\ldots\&D_n$

(donde dentro de cada disyunción D_i, no hay átomos repetidos)

3) Para cada D_i formamos la conjunción de todas las posibles extensiones de D_i

$D_{i_1} \& D_{i_2} \ldots \& D_{i_k}$

donde $D_{i_1} = D_i$ y las demás D_{i_j} se obtienen aumentando disyuntivamente a D_i la disyunción de uno o varios átomos que no aparecen en D_i.

4) Se unen conjuntivamente todas las conjunciones obtenidas en 3).

5) Se suprimen los miembros conjuntivos repetidos (esto en base a la conmutatividad e idempotencia de &).

TEOREMA 8.

La fórmula A y la FNCR de A son equivalentes.

DEMOSTRACION.

Sabemos ya que A y la FNC de A que se construye en el paso 2) son equivalentes.

Por otro lado

1) $\vdash_a D_i \leftrightarrow D_{i_1}$

2) $\vdash_a D_i \leftrightarrow D_i \& D_{i_2}$

3) $\vdash_a D_i \leftrightarrow D_i \& D_{i_3}$

$\vdots$

k) $\vdash_a D_i \leftrightarrow D_i \& D_{i_k}$

Esto debido al hecho de que $D_{i_j} = D_i vB$ y al hecho de que por (5) $\vdash_a D_i \leftrightarrow D_i \& (D_i vB)$

Como D_i es igual a D_{i_1}. y vale la substitución, tenemos.

$\vdash_R D_i \leftrightarrow D_{i_1} \& D_{i_2}$ 2')

que se obtiene a partir de 1) y 2).

$\vdash_R D_i \leftrightarrow D_{i_1} \& D_{i_2} \& D_{i_3}$ 3')

que se obtiene a partir de 2') y 3)

continuando el proceso se puede obtener

$\vdash_R D_i \leftrightarrow D_{i_1} \& D_{i_2} \& \ldots \& D_{i_k}$

Como esto vale para cada i, resulta entonces que la FNC de A $D_1 \& \ldots \& D_n$ es equivalente a la FNCR de A.

$\square$

DEFINICION 7.

La <u>FNDR (Forma Normal Disyuntiva Relevante) de A</u> es la fórmula obtenida como resultado del siguiente algoritmo:

1) Se forma el conjunto de todos los átomos posibles

$M_c = \{p_1, \ldots p_n, \sim p_1, \ldots, \sim p_n\}$

2) Se lleva la fórmula A a alguna de sus FND

$C_1 v \ldots v C_n$

(donde dentro de cada C_i no hay átomos repetidos).

3) Para cada C_i, formamos la disyunción de <u>todas</u> las posibles extensiones de C_i

$C_{i_1} v \ldots v C_{i_k}$

donde C_{i_1} es igual a C_i y las demás C_{i_j} se obtienen aumentando conjuntivamente a C_i la conjunción de uno o varios átomos que no aparecen en C_i.

4) Se unen disyuntivamente todas las disyunciones obtenidas en 3).

5) Se suprimen todos los miembros disyuntivos repetidos (ésto en base a la conmutatividad e idempotencia de v).

TEOREMA 9.

La fórmula A y la FNDR de A son equivalentes.

DEMOSTRACION.

Como en el caso anterior, sabemos que A y la FND de A que se construye en el paso 2 son equivalentes.

Por otro lado se tiene

1) $\vdash C_i \leftrightarrow C_{i_1}$

2) $\vdash C_i \leftrightarrow C_i v C_{i_2}$

3) $\vdash C_i \leftrightarrow C_i v C_{i_3}$

...

k) $\vdash C_i \leftrightarrow C_i v C_{i_k}$

Esto debido a que $C_{i_j} = C_i \& B$ y al hecho de que por (6)

$\vdash C_i \leftrightarrow C_i v (C_i \& B)$

de 1) y 2) se tiene $\vdash C_i \leftrightarrow C_{i_1} v C_{i_2}$

y de esto último y 3) se tiene $\vdash C_i \leftrightarrow C_{i_1} v C_{i_2} v C_{i_3}$

continuando se puede obtener $\vdash C_i \leftrightarrow C_{i_1} v \ldots v C_{i_k}$

como esto vale para cada i, resulta que FND de A y FNDR de A son equivalentes.

$\square$

EJEMPLO 1.

Sea $M= p,q$ $A= p\&(pvq)$

Construcción de la FNCR de A:

1) $M_c=\{p,q,\sim p,\sim q\}$

2) $\sim p\&(pvq)$ es una FNC de A

3) $\sim p\&(\sim pvp)\&(\sim pvq)\&(\sim pv\sim q)\&(\sim pvpvq)\&(\sim pvpv\sim q)$

$\&(\sim pvqv\sim q)\&(\sim pvpvqv\sim q).$

$(pvq)\&(pvqv\sim p)\&(pvqv\sim q)\&(pvqv\sim pv\sim q).$

4) Se forma la conjunción de las conjunciones anteriores.

5) $\sim p\&(\sim pvp)\&(\sim pvq)\&(\sim pv\sim q)\&(pvq)\&(\sim pvpvq)\&(\sim pvpv\sim q)$

$\&(\sim pvqv\sim q)\&(pvqv\sim q)\&(pvqv\sim pv\sim q).$

Construcción de la FNDR de A:

1) $M_c=\{p,q,\sim p,\sim q\}$

2) $(\sim p\&p)v(\sim p\&q)$ es una FND de A

3) $(\sim p\&p)v(\sim p\&p\&q)v(\sim p\&p\&\sim q)v(\sim p\&p\&q\&\sim q).$

$(\sim p\&q)v(\sim p\&q\&p)v(\sim p\&q\&\sim q)v(\sim p\&q\&p\&\sim q).$

4) Se forma la disyunción de las disyunciones anteriores.

5) $(\sim p\&p)v(\sim p\&q)v(\sim p\&p\&q)v(\sim p\&p\&\sim q)v(\sim p\&q\&\sim q)$

$v(\sim p\&p\&q\&\sim q).$

El 5) es en ambos casos, la FNCR de A y la FNDR de A -- respectivamente.

Obsérvese que:

$\vdash_E A\leftrightarrow FNDR(A)$ y que $\vdash_E A\leftrightarrow FNCR(A)$.

Además, $Cont(A,U_M^E)$ es la FNCR(A) haciendo la interpretación inversa a como se hace en el Corolario 2.

A continuación mencionamos ciertos hechos que también tienen lugar, sin embargo, no es el interés principal del trabajo, el demostrarlos.

1) Dada A, $A_1^D \& \ldots \& A_n^D$ del corolario 2 es lo mismo que la FNCR de A.

2) La FNCR de A y la FNDR de A son únicas si no se toma en consideración el orden de los miembros disyuntivos o conjuntivos (esto se deriva de la unicidad de Cont(A, U_M^E)).

3) La FNCR de A nos da un panorama completo de las consecuencias lógicas de A no equivalentes entre sí relevantemente.

4) La FNDR de A nos da un panorama completo de las premisas(1) de A no equivalentes entre sí relaventemente.

5) En base a la FNDR y a la FNCR es posible formular un método de decisión sencillo para el fragmento implicacional de primer orden del sistema E.

¿Cuántas fórmulas no equivalentes entre sí se pueden formar a partir de un conjunto de n letras proposicionales?

En lógica clásica, la respuesta a esta pregunta es sencilla. Como cada fórmula se puede pensar como una función de verdad, la pregunta es equivalente a ¿Cuántas funciones de verdad distintas se pueden formar a partir de n letras proposicionales?, es decir, ¿Cuántas tablas de verdad se pueden formar a partir

(1) Las fórmulas de las que A se puede E-implicar.

de n letras proposicionales)? La respuesta es 2^{2^n}, o sea, el número de funciones de verdad de V^n en V ($V=\{V,F\}$).

Hasta donde nosotros sabemos, en la lógica relevante aún no se tiene la respuesta a la pregunta planteada. En base al Teorema 1 de adecuación, la pregunta puede ser reformulada de la siguiente manera:

Sea $M=\{p_1,\ldots,p_n\}$ un conjunto finito de variables proposicionales

Consideremos $M_c=\{p_1,\ldots,p_n,\sim p_1,\ldots,\sim p_n\}$

considérese $U_M^{E+}=\{\alpha\subseteq M_c/\alpha\neq\phi\}$

defínase $RU_M^{E+}=\{X\subseteq U_M^{E+}/X\neq\phi \text{ y } \forall_{\alpha\in U_M^{E+}}\alpha\ \forall_{\beta\in U_M^{E+}}\beta\ (\text{si } \alpha\in X \text{ y } \alpha\subseteq\beta \Rightarrow \beta\in X)\}$

la pregunta se reformula así:

¿Cuál es la cardinalidad de RU_M^{E+}?

CAPITULO IV

UN CONCEPTO DE INFORMACION SEMANTICA CUANTITATIVA

A. INTRODUCCION.

B. UN CONCEPTO CUANTITATIVO SUGERIDO POR Cont (A, U_M^E)

C. HACIA UNA MEDIDA GENERAL DE CANTIDAD DE INFORMACION.

A) INTRODUCCION.

Para finalizar el trabajo, presentamos en este capítulo un intento de generar un concepto cont(A,U_M^E) como una medida de información semántica cuantitativa para las fórmulas del lenguaje CDN. Dicho concepto resultaría ser el análogo numérico de Cont(A,U_M^E).

Enumeramos algunas dificultades que encontramos al tratar de dar una medida de información para una fórmula cualquiera. Nos concretamos a definir una medida cuantitativa en la que utilizamos la construcción de Cont(A,U_M^E).

Así como con las medidas de probabilidad, utilizamos el intervalo $[0,1]$ como rango de variabilidad de nuestra medida y vemos algunas características que distinguen a cont(A,U_M^E) de los correspondientes conceptos de información cuantitativa de Carnap y Bar-Hillel.

B. UN CONCEPTO CUANTITATIVO SUGERIDO POR Cont(A,U_M^E).

En esta parte nos ocupamos de constuir una medida de información cuantitativa para una proposición A del lenguaje CDN, suponiendo que conocemos Cont(A,U_M^E).

La medida que proponemos es una medida "probabilística" en el sentido de que su rango de variabilidad está entre cero y uno. Utilizando logaritmos, como Carnap y Bar-Hillel, se pueden dar medidas análogas de información cuyo rango de variabilidad sea mayor. Sin embargo, personalmente creemos que es más conveniente darlo en la forma presentada ya que ésta es fácil de calcular y permite una interpretación intuitivamente más clara.

DEFINICION 1.

Sea A una fórmula del lenguaje CDN y supóngase que

$\text{Cont}(A,U_M^E)=\{A_1,\ldots,A_n\}$

definimos entonces

$$\text{cont}_1(A,U_M^E)=\frac{\sum \text{card}(A_i)}{T}\ (1)$$

donde $T=\sum_{\alpha\subseteq M^c}\text{card}(\alpha)$

No es difícil calcular T si se observa que hay exactamente $\binom{2n}{k}$ subconjuntos de M^c con k elementos (2). Por tanto el número de elementos de todos los subconjuntos de M^c con cardinalidad k será: $k\binom{2n}{k}$

(1) También se puede definir $\text{cont}_1(A,U_M^E)$ como $\dfrac{\text{card}(\text{Cont}(A,U_M^E))}{\sum_{i=1}^{2n}\binom{2n}{i}}$

(2) El símbolo $\binom{2n}{k}$ representa al número $\dfrac{2n!}{(2n-k)!k!}$

Sumando sobre todo las posibles cardinalidades de subconjuntos de M^c se obtiene finalmente que

$$T=\sum_{i=0}^{2n} i\binom{2n}{i}$$

En el caso de n=2, tenemos a nuestro conocido

$$M_2^c=\left\{p_1^v, p_2^v, p_1^f, p_2^f\right\}$$

T se forma en este caso contando todos los elementos de cada posible subconjunto de M_2^c. El resultado de este conteo es

$$T=\sum_{i=0}^{4} i\binom{4}{i}=32$$

En seguida calculamos la información cuantitativa de algunas fórmulas formadas a partir de M_2.

a) $cont_1(p_1 \vee \sim p_1, U_M^E)=cont_1(p_1 \vee \sim p_2, U_M^E)=\frac{12}{32}\doteq .37$

b) $cont_1(p_1 \& \sim p_1, U_M^E)=cont_1(p_1 \& \sim p_2, U_M^E)=\frac{28}{32}\doteq .87$

c) $cont_1((p_1 \& \sim p_1) \& (p_2 \& \sim p_2), U_M^E)=\frac{32}{32}=1$

d) $cont_1((p_1 \vee \sim p_1) \vee (p_2 \vee \sim p_2), U_M^E)=\frac{4}{32}\doteq .12$

e) $cont_1(p_1, U_M^E)=cont_1(p_2, U_M^E)=cont_1(\sim p_1, U_M^E)=\frac{20}{32}\doteq .62$

f) $cont_1((p_1 \& \sim p_1) \vee (p_2 \& \sim p_2), U_M^E)=\frac{24}{32}=.75$

g) $cont_1((p_1 \vee \sim p_1) \& (p_2 \vee \sim p_2), U_M^E)=\frac{20}{32}\doteq .62$

h) $cont_1((p_1 \& \sim p_1) \& (p_2 \vee \sim p_2), U_M^E)=\frac{30}{32}\doteq .93$

i) $cont_1((p_1 \vee \sim p_1) \vee (p_2 \& \sim p_2), U_M^E)=\frac{10}{32}\doteq .31$

j) $cont_1((p_1 \& \sim p_1) \& p_2, U_M^E)=\frac{31}{32}\doteq .96$

Obsérvese que la medida de cantidad de información no distingue el contenido semántico de las proposiciones. Dos o más proposiciones pueden tener la misma cantidad de información y ser semánticamente diferentes. El hecho de que

$$\mathrm{cont}_1(p_1, U_M^E) = \mathrm{cont}_1(p_2, U_M^E) = \mathrm{cont}_1(\sim p_1, U_M^E)$$

$$\mathrm{cont}_1(p_1 \& \sim p_1, U_M^E) = \mathrm{cont}_1(p_1 \& p_2, U_M^E)$$

se debe a que los átomos en cuestión juegan el mismo papel sintácticamente.

El hecho que resulta un poco raro es el siguiente:

$$\mathrm{cont}_1(p_1, U_M^E) = \mathrm{cont}_1((p_1 \vee \sim p_1) \& (p_2 \vee \sim p_2), U_M^E) = \frac{20}{32}$$

TEOREMA 1.

Para A,B fórmulas de un lenguaje CDN se tiene que si

$$\mathrm{Cont}(B, U_M^E) \subseteq \mathrm{Cont}(A, U_M^E)$$

entonces

$$\mathrm{cont}_1(B, U_M^E) \leq \mathrm{cont}_1(A, U_M^E)$$

DEMOSTRACION

La demostración es obvia de acuerdo a la construcción de --- $\mathrm{cont}_1(A, U_M^E)$. Para calcular $\mathrm{cont}_1(A, U_M^E)$ tenemos que contar todos los elementos de los elementos de $\mathrm{Cont}(B, U_M^E)$ (con los cuales tendríamos $\mathrm{cont}_1(B, U_M^E)$ y posiblemente algunos más debido a la hipótesis.

$\square$

El recíproco del Teorema no es cierto. Se cumple:

$$\frac{12}{32} = \mathrm{cont}_1(p_1 \vee \ p_1, U_M^E) \leq \mathrm{cont}_1(p_2, U_M^E) = \frac{20}{32}$$

Sin embargo, no se da el caso que:

$$\mathrm{Cont}(p_1 \vee \sim p_2, U_M^E) \subseteq \mathrm{Cont}(p_2, U_M^E)$$

pues sabemos $\vdash p_2 \rightarrow p_1 \vee \sim p_1$

Usando el Teorema 1, podemos derivar fácilmente el siguiente:

COROLARIO 1.

Si $\mathrm{Cont}(B, U_M^E) = \mathrm{Cont}(A, U_M^E)$ entonces $\mathrm{cont}_1(B, U_M^E) = \mathrm{cont}_1(A, U_M^E)$

Veamos ahora algunas características de $\mathrm{cont}_1(A, U_M^E)$ que lo distinguen y lo asemejan a los conceptos correspondientes de Carnap y Bar-Hillel.

TEOREMA 2.

Si A,B son fórmulas del lenguaje CDN formadas a partir de un conjunto finito M de letras proposicionales.

a) $\frac{2n}{T} \leq \mathrm{cont}_1(A, U_M^E) \leq 1$

b) $\mathrm{cont}_1(A \vee B, U_M^E) \leq \mathrm{cont}_1(A, U_M^E) \leq \mathrm{cont}_1(A \& B, U_M^E)$

c) $\mathrm{cont}_1(A \& B, U_M^E) = \mathrm{cont}_1(A, U_M^E) + \mathrm{cont}_1(B_1 U_M^E) - \mathrm{cont}_1(A \vee B, U_M^E)$

DEMOSTRACION.

a) En el capítulo anterior demostramos que:

$$\{M^c\} \subseteq \mathrm{Cont}(A, U_M^E) \subseteq U_M^E - \{\phi\}$$

$$\mathrm{Cont}\left(\bigvee_{i=1}^{n} (p_i \vee \sim p_i), U_M^E\right) = \{M^c\}$$

$$\mathrm{Cont}\left(\bigwedge_{i=1}^{n} (p_i \& \sim p_i), U_M^E\right) = U_M^E - \{\phi\}$$

por tanto, con el teorema 1 obtenemos

$$\mathrm{cont}_1\left(\bigvee_{i=1}^{n} (p_i \vee \sim p_i), U_M^E\right) \leq \mathrm{cont}_1(A, U_M^E) \leq \mathrm{cont}_1\left(\bigwedge_{i=1}^{n} (p_i \& \sim p_i), U_M^E\right)$$

obsérvese finalmente que:

$$cont_1(\tilde{\bigvee}(p_i \vee \sim p_i), U_M^E) = \frac{2n}{T} \quad \text{(pues } card(M^c) = 2n)$$

$$cont_1(\tilde{\bigwedge}(p_i \& \sim p_i), U_M^E) = 1$$

con lo cual queda demostrado a).

b) En el capítulo anterior habíamos probado que

$$Cont(AvB, U_M^E) \subseteq Cont(A, U_M^E) \subseteq Cont(A\&B, U_M^E)$$

una aplicación del Teorema 1 a este hecho nos da el resultado que queremos.

c) $cont_1(A\&B, U_M^E) = \frac{\sum card(X_i)}{T}$ donde $X_i \in Cont(A\&B, U_M^E)$

ahora observémos

$$\sum_{X_i \in Cont(A\&B, U_M^E)} card(X_i) = \sum_{X_i \in Cont(A, U_M^E) \cup Cont(B, U_M^E)} card(X_i)$$

$$= \sum_{X_i \in Cont(A, U_M^E)} card(X_i) + \sum_{X_i \in Cont(B, U_M^E)} card(X_i) - \sum_{X_i \in Cont(A, U_M^E) \cap Cont(B, U_M^E)} card(X_i)$$

$$= \sum_{X_i \in Cont(A, U_M^E)} card(X_i) + \sum_{X_i \in Cont(B, U_M^E)} card(X_i) - \sum_{X_i \in Cont(AvB, U_M^E)} card(X_i)$$

Dividiendo por T ambos miembros de la igualdad, obtenemos:

$$cont_1(A\&B, U_M^E) = cont_1(A, U_M^E) + cont_1(B, U_M^E) - cont_1(AvB, U_M^E)$$

que es lo que queríamos probar.

$\square$

Si D_K es una disyunción de K átomos distintos, no-es difícil encontrar $cont_1(D_k,U_M^E)$. De la misma manera, no es difícil encontrar $cont_1(C_K,U_M^E)$ donde C_K es una conjun-ción de K átomos distintos. Utilizando estos hechos nos - vemos motivados a definir la medida de información de una-forma normal. Haremos esto posteriormente. Primero planteamos algunos problemas que se presentan al tratar de dar una medida cuantitativa genral de información para cualquier fórmula de lenguaje CDN.

C. HACIA UNA MEDIDA DE CANTIDAD DE INFORMACION.

Sea μ una medida de cantidad de información para - una proposición y sean p, q, r, s átomos distintos. De - acuerdo a los conceptos de Carnap y Bar-Hillel (cont e inf) y al concepto $cont_1$ construido en la sección anterior, se - cumple entonces

$$\mu(pv\sim p)=\mu(qv\sim q)$$ (1)

Sin embargo, no todas las tautologías tienen la - misma cantidad de información: $pv\sim p$ y $pv\sim pvq$ son tautologías pero siempre se tiene

$$\mu(pv\sim pvq)< \mu(pv\sim p)$$

esto debido a que queremos que se mantengan siempre las dos condiciones siguientes:

(1) Más aún, $\mu(pvq)=\mu(rvs)=\mu(\sim rv\sim s)=\mu(\sim pvs)=...$

I) $\mu(A) > 0$

II) $\mu(AvB) < \mu(A) \quad (A \neq B)$

¿Sería deseable obtener que $\mu(Av \sim A) = \mu(Bv \sim B)$?

Aparentemente, el contar con una medida de información que cumpliera con tal propiedad sería bueno porque permitiría asignar la misma cantidad de informacion a fórmulas distintas que representan a la misma ley lógica. Veamos las consecuencias que acarrearía ésto. Tomemos el caso de $cont_1$ de la sección anterior.

$$cont_1(p_1 v \sim p_1, U_M^E) = \frac{12}{32}$$

$$cont_1((p_1vp_2)v \sim (p_1vp_2), U_M^E)$$

$$= cont_1(p_1vp_2v \sim p_1) \& (p_1vp_2v \sim p_1), U_M^E)$$

$$= \frac{10}{32}$$

En general:

$$\mu((pvq)v \sim (pvq)) < \mu(pvq) = \mu(pv \sim p)$$

si se aceptan las condiciones I y II.

Vemos pues, que si aceptamos I y II para una medida de cantidad de información, entonces no debemos esperar que cumpla con $\mu(Av \sim A) = \mu(Bv \sim B)$.

Pensamos que cualquier concepto de cantidad de información que se quiera dar para las fórmulas del lenguaje CDN, debe portarse en forma muy similar o igual al $cont_1$ - de la sección anterior.

Podríamos intentar dar una definición para una medida de cantidad de información, haciendo a un lado el problema de la negación, a la manera de la definición de ---- $Cont(A, U_M^E)$

$$\mu(p) = cte \quad \text{para p átomo}^{(1)}$$
$$\mu(AvB) = \mu(A) \bullet \mu(B)$$
$$\mu(\sim(AvB)) = \mu(\sim A) \odot \mu(\sim B)$$
$$\mu(A\&B) = \mu(A) \odot \mu(B)$$
$$\mu(\sim(A\&B)) = \mu(\sim A) \bullet \mu(\sim B)$$
$$\mu(\sim\sim A) = \mu(A)$$

donde $\bullet$ y $\odot$ serían dos operaciones con valores numéricos y que cumplieran con las propiedades de la intersección y la unión:

1) Conmutatividad $\bullet$, $\odot$

2) Asociatividad $\bullet$, $\odot$

3) Distributividades

4) Idempotencia $\bullet$, $\odot$

Un camino alternativo para encontrar $\bullet$ y $\odot$ sería a través del planteamiento y resolución de ciertas ecuaciones: como deseamos obtener: $\mu(A\&B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \vee B)$

(1) Podría pensarse que la constante fuera $\frac{1}{2n}$, pero esto daría medidas muy pequeñas para disyunciones (por la condición II). La constante que podríamos escoger tendría que ser parecida a la de $cont_1$.

entonces la igualdad se transforma en la siguiente ecuación

$$\mu(A) \odot \mu(B) = \mu(A) + \mu(B) - \left(\mu(A) \oplus \mu(B)\right)$$

donde $\mu(A) \odot \mu(B)$ y $\mu(A) \oplus \mu(B)$ son las incógnitas.

El camino sería plantear otra ecuación donde aparecieran $\mu(A) \oplus \mu(B)$ y $\mu(A) \odot \mu(B)$ e intentar resolverlas.

Ante la imposibilidad que tenemos por el momento para encontrar las operaciones $\oplus$ y $\odot$, nos concretamos a hacer la generalización de $cont_1$ para formas normales conjuntivas. De manera que dada una fórmula A en el lenguaje CDN, encontramos una FNC A^* de A y definimos $\mu(A)$ como $\mu(A^*)$.

Para llegar a definir una para las FNC, pedimos la siguiente condición: Para fórmulas A,B del lenguaje CDN, se tiene:

III) $$\mu(A \& B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \vee B)$$

Si D_1 y D_2 son disyunciones de átomos tales que en cada una no hay átomos repetidos se tiene que:

$$\mu(D_1 \& D_2) = \mu(D_1) + \mu(D_2) - \mu(D_1 \vee D_2)$$

Veamos quién es $\mu(D_1 \& D_2 \& D_3)$ [1]

$$\begin{aligned}\mu(D_1 \& D_2 \& D_3) &= \mu((D_1 \& D_2) \& D_3)\\ &= \mu(D_1 \& D_2) + \mu(D_3) - \mu((D_1 \& D_2) \vee D_3)\end{aligned}$$

(1) Obsérvese aquí que lo que le ocurre a primera vista es que $\mu(D_1 \& D_2 \& D_3) = \mu(D_1) + \mu(D_2) + \mu(D_3) - \mu(D_1 \vee D_2 \vee D_3)$
Sin embargo, ésto no es cierto.

$$= \mu(D_1) + \mu(D_2) + \mu(D_3) - \mu(D_1 \vee D_2) - \mu((D_1 \vee D_3) \,\&\, (D_2 \vee D_3))$$

$$= \mu(D_1) + \mu(D_2) + \mu(D_3) - \mu(D_1 \vee D_2) - \mu(D_1 \vee D_3) - \mu(D_2 \vee D_3) + \mu(D_1 \vee D_2 \vee D_3)$$

Supóngase que si $D_1, \ldots D_n$ son disyunciones en las que no hay átomos repetidos:

$$\mu(D_1 \,\&\, D_2 \,\&\, \cdots \,\&\, D_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(D_i) - \sum_{i \neq j} \mu(D_i \vee D_j) + \sum_{i \neq j \neq k} \mu(D_i \vee D_j \vee D_k) - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n+1} \mu(D_1 \vee \cdots \vee D_n) \qquad (*)$$

Veamos el ahora el caso $\mu(D_1 \,\&\, \cdots \,\&\, D_n \,\&\, D_{n+1})$

$$\mu(D_1 \,\&\, \cdots \,\&\, D_n \,\&\, D_{n+1}) = \mu((D_1 \,\&\, \cdots \,\&\, D_n) \,\&\, D_{n+1})$$

$$= \mu(D_1 \,\&\, \cdots \,\&\, D_n) + \mu(D_{n+1}) - \mu((D_1 \,\&\, \cdots \,\&\, D_n) \vee D_{n+1})$$

$$= \mu(D_1 \,\&\, \cdots \,\&\, D_n) + \mu(D_{n+1}) - \underbrace{\mu[(D_1 \vee D_{n+1}) \,\&\, \ldots \,\&\, (D_n \vee D_{n+1})]}_{(**)}$$

Es claro que entonces, de acuerdo a la suposición (*), que en (**) van a aparecer todas las combinaciones de disyunciones en las que aparece D_{n+1}. Con lo cual concluimos la validez de (*) para cualquier n.

DEFINICION 2.

Si A es una fórmula del lenguaje CDN, definimos $\mu(A)$ como $\mu(A^*)$ donde A^* es una FNC de A y $\mu(A^*)$ se obtiene de acuerdo a lo siguiente:

a) Si p es un átomo

$$\mu(p) = \frac{T - \sum_{i=0}^{2n-1} i \binom{2n-1}{i}}{T}$$

b) Si D_K es una disyunción de K átomos distintos

$$\mu(D_k) = \frac{\sum_{i=0}^{2n-k} (k+i) \binom{2n-k}{i}}{T}$$

c) $\mu(D_1 \& \ldots \& D_n)$ se obtiene como en (*)

Obsérvese que esta definición es simplemente la versión numérica de $Cont(A,U^E_M)$.

B I B L I O G R A F I A .

ACKERMANN W. — Fundamentacion de una implicación fuerte
Comunicacion Interna No. 6, 1980
Depto. de Matematicas, Fac. de Ciencias UNAM

ANDERSON A. R. Y BELNAP N. — Tautological Entailments
Philosophical Studies, Vol. 13 pp9-24, 1962

ANDERSON A. R. Y BELNAP N. — The pure calculus of entailment
J.S.L. Vol.27 No.1 pp19-53, 1962

BAR-HILLEL Y. — Language and Information
Palo Alto Mass. and London, 1962

CARNAP R. AND BAR HILLEL — An Outline of Theory of Semantic Information
MIT. No.247, 1952

CARNAP RUDOLF — Logical Foundations of Probability
University of Chicago Press, 1962

FERNANDEZ GARCIA JAVIER — Acerca de la Teoría de la Información y algunas de sus aplicaciones.
Comunicación Interna No.23, 1978
Dpto. de Matematicas Fac. Ciencias UNAM

GUIRAUD PIERRE — La Semiología
Siglo XXI, 8a. edición, 1979

HANSON W.H. — First Degree Entailment and Information
Univ. of Minesóta

HILBERT D. Y ACKERMANN W. — Elementos de Logica Teorica
Editorial Tecnos, 1962

KHINCHIN A. I. — Mathematical Foundations of Information Theory
Dover Publications, 1957

KLEENE, STEPHEN COLE — Mathematical Logic
John Wiley & Sons, Inc. New York, 1967

SANCHEZ POZOS JAVIER — Deducción Logica, Contenido Semántico y Formas Normales Relevantes
Comunicación Interna No. 60, 1978
Dpto. de Matematicas, Fac. de Ciencias UNAM

SANCHEZ POZOS JAVIER — Semanticas Intuitivas
Reporte de Investigación 18
Univ. Aut. Metropolitana, Iztapalapa, 1980

TARSKI A — The Semantical Conception of Truth
Siglo XXl, Colección de Tomás M. Simpson.