23 Zapien.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

JUEGOS BORROSOS

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a :

LOURDES CLAUDIA PATIÑO ROMAN

México, D.F. 1 9 8 1

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

I N D I C E

INTRODUCCION

A partir de la segunda Guerra Mundial, se han encaminado muchos esfuerzos para resolver los problemas que atañen directamente a la industria militar de una nación.

Esta industria requiere de una gran planeación y coordinación de todas las personas incorporadas a ella, así como también de los sectores que puedan integrarse.

Es importante saber con cuanta gente se dispone para la producción de armamento, tomando en cuenta cuantos obreros de mano de obra calificada hay, cuantos hombres y mujeres de la población podrían en un momento dado dejar su actividad e incorporarse a esta industria sin que se descuidaran las necesidades básicas de la población, para poder producir los diferentes tipos de armamento ya sean balas, proyectiles, bombas, etc.

Los problemas a los que se enfrenta esta industria, es el responder a las siguientes preguntas:

¿Cuánto producir de cada tipo de armamento?

¿Qué tipo de armamento será construido?

¿Qué presupuesto se requiere para llevar a efecto la construcción del armamento necesario?

Este escrito está dirigido a dar algunos elementos que permitan un mejor análisis de la situación global en un conflicto, como por ejemplo la guerra, que ayude a responder "mejor" las preguntas mencionadas.

Para tomar la decisión de que armas se utilizarán y cuantas se van a requerir, se necesitan tomar en cuenta acuerdos o negociaciones tales como la "Convención de la Haya"; dichos acuerdos se llevarán a cabo entre las partes rivales, donde negociarán el armamento utilizable y no utilizable, el terreno, etc.

"La Convención de la Haya" (1907) es una reglamentación sobre las armas, donde prohibe el uso de armas inhumanas y brutales tales como las balas de explosión (dum-dum) y los proyectiles propagadores de gases asfixiantes y deletéreos. También habla sobre el terreno, donde se estipula que los prisioneros de guerra deben ser tratados humanamente; los beligerantes no tienen un derecho ilimitado en cuanto a los medios que adopten para perjudicar al enemigo; todos los medios que agraven innecesariamente el sufrimiento de los combatientes heridos son ilegales; no deben ser atacados ciudades, aldeas, casas, edificios públicos, construcciones religiosas, artísticas, académicas o de beneficiencia, construcciones históricas ni hospitales.

Actualmente se fabrican armas mucho más sofistica das que en 1907, como son las bombas fragmentarias (CBUs:Canister Bomb Units) bombas de fósforo, bombas napalm, armas nucleares, etc. y se utilizan las tácticas como la del bombardeo de saturación, el uso de productos químicos tóxicos y de bacterias, la destrucción de instalaciones de conservación del agua, etc. donde todo esto está prohibido al menos por el derecho internacional.

También por medio de espías u otros mecanismos las partes rivales obtienen la información de cuales y en que cantidad son las armas que posee el enemigo o está produciendo; esta información permite planear que armas defensivas u ofensivas se requieren más. Si el enemigo produce más de cierto tipo de armamento, es de suponer que su ataque estará constituído con dicho armamento. El contrincante al tener esta información adoptará las medidas necesarias, por ejemplo la obtención de armas más potentes o bien de aquellas que contrarresten el efecto de las primeras.

Otro aspecto que será tomado en consideración, es la conducta de los enemigos en tiempos pasados. Por ejemplo si los enemigos se caracterizan por atacar por sorpresa, entonces los otros tendrán que estar más alerta.

Así cada parte rival toma en consideración, los acuerdos, toda la información que posea del enemigo y la conducta pasada de éste para determinar que armamento va a producir y en que cantidad.

En un conflicto de guerra se ven involucradas muchas personas, donde todas éstas toman partido por alguna de las partes rivales. Así, se agrupan para luchar por un interés en común y poder enfrentarse a los enemigos. No todos los integrantes de las agrupaciones están en el campo de batalla, algunos participarán con su conocimiento, otros con dinero o bien con alimentos, medicinas, etc. De esta forma no todos los integrantes participan de la misma manera, sin embargo todos en conjunto representanun mismo interés que es derrotar al enemigo.

En la guerra las partes enemigas efectuan intercambios de información ya sea mediante diálogos cordiales o amenazantes, estas amenazas pueden ser expresadas verbalmente diciendo cuales serán las posibles acciones militares o bien mediante acciones tales como, rodear al país con fuerzas militares y armamento suficiente como para efectuar una masacre, con objeto de atemorizar a los contrarios.

En el intercambio de información se deja ver la fuerza con la que cuentan y el poder de ambas partes rivales, es una manera de medir fuerzas y llegar a un cierto acuerdo en la lucha ya que existe un cierto grado de cooperación donde a ninguna de las partes les interesa que desaparezcan las personas de la tierra debido a una guerra atómica.

Es natural en un conflicto de esta naturaleza introducir la herramienta de la Teoría de los Juegos, la cual tiene como objetivo guiar a los "jugadores", a las partes rivales, a analizar la situación del conflicto y elaborar recomendaciones sobre la forma razonable de actuar de cada una de las partes, es decir, analizar todas las posibles acciones (alternativas) de los "jugadores", las partes rivales, para encontrar la "mejor manera de actuar".

En el análisis se incorporará el factor subjetivo de los participantes, de los jugadores, o de las partes rivales, el cual será tomado en cuenta de manera decisiva cuando éstos determinen, que armas producir y, con que atacar.

Después de que los jugadores han intercambiado información y han llegado a un acuerdo, cada participante evaluará que tan posible es que sus contrincantes respeten los convenios, por ejemplo en tanto armamento utilizable. Esta evaluación se hace tomando en consideración toda la información recabada de los contrarios, donde se hará una apreciación de la conducta pasada de éstos. Así, si un contrario es muy fraudulento, chantajista, tramposo, etc. lo más probable es que no respete nada, de èsta manera cada jugador le asigna un valor a cada acción posible de los contrarios y restringe sus posibles acciònes en tanto que si piensa que el contrario respetará a la población civil y no la atacará, entonces él respetará tambien a la población civil del contrario.

Hay que hacer notar que un jugador determinará sus acciones en el conflicto dependiendo de la información que posea de los contrincantes, si cambia de información sus acciones también cambiarán.

La evaluación que efectúa cada jugador de los contrarios depende de su personalidad, del medio ambiente, de su experiencia obtenida, de lo que considera justo o injusto, moral o inmoral, honesto o fraudulento, etc. y de la información que reciba por otros medios, de este modo cada jugador se forma una imagen de los demás en el sentido de la manera como van a actuar o a respetar los acuerdos, así para unos el jugador A será mas confiable que para otros o bien será para otros terceros un hipócrita, en este aspecto la imagen de como es el jugador A es borrosa.

El que tan buena o mala es una gente, en que tan agradable o desagradable es una sensación, o un sabor, en que tan grave es una situación y que tan difícil superarla; en eso consiste la borrosidad misma que depende de la apreciación subjetiva de alguna persona específica, por ejemplo el k-ésimo jugador si nos referimos a un juego.

Si incorporamos en el análisis de una situación la apreciación subjetiva de los participantes, resulta natural utilizar la herramienta de los conjuntos borrosos.

En el Capítulo I se dará una introducción elemental y accesible de la teoría de los subconjuntos borrosos con los elementos necesarios para desarrollar el tema en cuestión y de ninguna manera una presentación exhaustiva.

En el Capítulo II se dará una descripción de un juego borroso para n personas.

En el Capítulo III se darán algunos conceptos de solución para un juego borroso de dos personas, los cuales se generalizaran para los juegos de n-personas, para esto se utilizarán extensiones y resultados de propiedades topológicas, tales como la noción de punto fijo de una relación borrosa, que nos permitirán bajo hipótesis adecuadas expresar puntos de equilibrio.

En el Capítulo IV se desarrollará el planteamiento de un problema de guerra utilizando los elementos de la Teoría de Juegos Borrosos, se expondrá la existencia de puntos fijos en una relación borrosa cerrada y finalmente se dará un ejemplo donde existirán puntos fijos.

CAPITULO I

LOS SUBCONJUNTOS BORROSOS

La teoría de los subconjuntos borrosos, de reciente desarrollo es una generalización de muchos conceptos conocidos de la teoria de conjuntos ordinarios, y que ha deseado abordar preguntas más difíciles de los dominios humanos, como es el caso de la apreciación subjetiva de un participante en la guerra con respecto a los cumplimientos de los acuerdos.

Esta teoría es, una teoría precisa de conceptos borrosos. Por ejemplo, cuando uno ve un color y lo califica de verde, para algunas personas será un verde con tonos de azúl y para otras tendrá algún otro tono. ¿Cuál es el color preciso? Si medimos las ondas podemos obtener el color preciso. Pero por nuestra sola percepción será un color impreciso. Entonces, la noción de color es una noción borrosa.

Así, la borrosidad vendrá a ser la apreciación subjetiva de un conjunto ordinario, en este ejemplo el conjunto ordinario está constituido por el objeto al cual se le calificó de verde.

<u>Definición:</u>

El <u>subconjunto borroso</u> del conjunto ordinario X, que denotaremos por $\underset{\sim}{A}$, está definido mediante una función $f_{\underset{\sim}{A}}$ definida en el conjunto X , con valores en el intervalo $[0,1]$

A la función:

$$f_{\underset{\sim}{A}}: X \longrightarrow [0,1]$$

le llamaremos la función de pertenencia del subconjunto borroso $\underset{\sim}{A}$

En otras palabras un subconjunto borroso es una clase de objetos a los que se les asigna un continuo de grados de pertenencia. Dicho subconjunto se caracteriza por su función de pertenencia, la cual asigna a cada objeto un grado entre cero y uno.

Ejemplo

Sea X= $\{$perro, Ana, lápiz, bacteria$\}$ un conjunto ordinario

Sea $\underset{\sim}{A}$ el subconjunto borroso cuyos elementos tengan la propiedad de ser animales.

los elementos de $\underset{\sim}{A}$ están expresados para su función de pertenencia.

$$\text{Sea } f_{\underset{\sim}{A}}: X \longrightarrow [0,1]$$

Tomemos el primer elemento de X, el perro, claramente y sin lugar a dudas posee la propiedad de ser animal, entonces,

$$f_{\underset{\sim}{A}} (\text{perro}) = 1$$

los dos siguientes elementos en X son Ana y lápiz

Claramente Ana es un animal, racional por supuesto, y $f_{\underset{\sim}{A}}$ (Ana) = 1. También es claro que lápiz no posee la propiedad de ser animal, con lo cual $f_{\underset{\sim}{A}}$ (lápiz) = o. Como último elemento de X tenemos a las bacterias, las cuales presentan algunas propiedades de ser animal pero tambien algunas propiedades de ser vegetal con lo cual no podemos decir con toda seguridad que son animales ni tampoco que no lo son. Es decir, la noción de bacteria es borrosa con respecto a la de ser de los animales. Entonces démosle un .5 de grado de pertenencia al conjunto $\underset{\sim}{A}$; $\therefore f_{\underset{\sim}{A}}(\text{bacteria})=.5$

En la teoría de los conjuntos ordinarios decimos que un conjunto está bien definido si dado cualquier objeto podemos decir si pertenece o no al conjunto.

Sea A un conjunto ordinario

Si $X \in A$ entonces $f_A(X)=1$

Si $X \notin A$ entonces $f_A(X)=0$

Con esto observamos que la noción de pertenencia ha sido extendida de los conjuntos ordinarios (donde los objetos bajo la función de pertenencia sólo toman los valores ó cero ó uno) al de los subconjuntos borrosos (donde los objetos bajo la función toman los valores en $[0,1]$).

De igual forma son extendidas las nociones de unión, intersección, contención, relación, función y composición de funciones.

Decimos que el subconjunto $\underset{\sim}{A}$ está contenido en el subconjunto borroso $\underset{\sim}{B}$, ambos de referencial X, y lo denotaremos por $\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B}$ si se cumple $f_{\underset{\sim}{A}}(x) \leq f_{\underset{\sim}{B}}(x)$, para toda $x \in X$.

Sean $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$, $\underset{\sim}{C}$, subconjuntos borrosos del referencial X.

Decimos que el subconjunto borroso $\underset{\sim}{C}$ es la unión de $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ si $f_{\underset{\sim}{C}}(x) = \max(f_{\underset{\sim}{A}}(x), f_{\underset{\sim}{B}}(x))$ y decimos que $\underset{\sim}{C}$ es la intersección de $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ si sucede $f_{\underset{\sim}{C}}(x) = \min(f_{\underset{\sim}{A}}(x), f_{\underset{\sim}{B}}(x))$. para toda $x \in X$.

Un subconjunto borroso A de referencial X, será vacío si cumple con $f_A(X)=0$ para toda $x \in X$.

Sean $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ dos subconjuntos borrosos con referencial X.

Decimos que A=B si sucede que $f_{\underset{\sim}{A}}(x)=f_{\underset{\sim}{B}}(x)\ \forall x \in X$

Ejemplo:

Sea $X= \{a,b,c,d,e\}$

$f_{\underset{\sim}{A}}: X \longrightarrow [0,1]$, $f_{\underset{\sim}{B}}: X \longrightarrow [0,1]$

Notación $f_{\underset{\sim}{A}}(x)= t$ con $x \in X$ y $t \in [0,1]$

Se escribirá como (x/t)

Sea $\underset{\sim}{A}= \{(a/.5),\ (b/.3),\ (c/.7),\ (d/0),\ (e/0)\}$

$\underset{\sim}{B}= \{(a/0),\ (b/0),\ (c/1),\ (d/.2),\ (e/.9)\}$

$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}= \{(a/.5),(b/.3),(c/1),\ (d/.2),\ (e/.9)\}$

$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}= \{(a/0),\ (b/0),\ (c/.7),\ (d/0),\ (e/0)\}$

$A \not\subset B$ ya que $f_{\underset{\sim}{A}}(a) > f_{\underset{\sim}{B}}(a)$

$A \not\supset B$ ya que $f_{\underset{\sim}{B}}(c) > f_{\underset{\sim}{A}}(c)$

Denotaremos por L(X) a la clase de todos los subconjuntos borrosos de X.

Sean X e Y dos conjuntos ordinarios.

¿Qué entenderemos por una relación borrosa entre X e Y?

La relación borrosa $\underset{\sim}{R}$ estará definida por una función $f_{\underset{\sim}{R}} : X \times Y \longrightarrow [0,1]$

Ejemplo

Sean $X = \{a,b\}$, $Y = \{c,d\}$

$\underset{\sim}{R}= \{((a,c)\ /.2),\ ((a,d)/.3),\ ((b,c)/.8),((b,d)/1)\}$,

si $\underset{\sim}{R}$ una relación borrosa entre A y B; y si $\underset{\sim}{S}$ una relación borrosa entre B y C, entonces podemos definir una relación borrosa entre A y C, que llamaremos la conjunción de $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{S}$, y denotaremos por $\underset{\sim}{S}\circ\underset{\sim}{R}$. Su función de pertenencia es

$$(\underset{\sim}{S}\circ\underset{\sim}{R})(z)=\begin{cases}\sup\limits_{y} \{\underset{\sim}{R}(x,y)\ \underset{\sim}{S}(y,t)\ ;\ y\in B\} & \text{si } z=(x,t)\\ 0 & \text{otro caso.}\end{cases}$$

Ejemplo Sean $A=\{x_1,x_2\}$, $B=\{y_1,y_2\}$, $C=\{z_1,z_2,z_3\}$, $\underset{\sim}{R}$ la relación borrosa entre A y B, dada por

$\underset{\sim}{R}$	y_1	y_2
x_1	.2	1
x_2	.8	0

y $\underset{\sim}{S}$ la relación borrosa entre B y C dada por

$\underset{\sim}{S}$	z_1	z_2	z_3
y_1	.7	.2	0
y_2	1	.5	.3

Entonces podemos calcular $\underset{\sim}{S}\circ\underset{\sim}{R}$:

$$\underset{\sim}{S}\circ\underset{\sim}{R}(x_1,z_1)=\sup\{\underset{\sim}{R}(x_1,y_1)\underset{\sim}{S}(y_1,z_1),\underset{\sim}{R}(x_1,y_2)\underset{\sim}{S}(y_2,z_1)\}$$
$$=\sup\{.2\times.7,1\times1\}=1$$
$$\underset{\sim}{S}\circ\underset{\sim}{R}(x_1,z_2)=\sup\{\underset{\sim}{R}(x_1,y_1)\underset{\sim}{S}(y_1,z_2),\underset{\sim}{R}(x_1,y_2)\underset{\sim}{S}(y_2,z_2)\}$$
$$\underset{\sim}{S}\circ\underset{\sim}{R}(x_1,z_2)=\sup\{.2\times.2,1\times.5\}=.5$$
$$\underset{\sim}{S}\circ\underset{\sim}{R}(x_1,z_3)=\sup\{.2\times0\ ,1\times.3\}=.3$$
$$\underset{\sim}{S}\circ\underset{\sim}{R}(x_2,z_1)=\sup\{.8\times.7,0\times1\}=.56$$
$$\underset{\sim}{S}\circ\underset{\sim}{R}(x_2,z_2)=\sup\{.8\times.2,0\times.5\}=.16$$
$$\underset{\sim}{S}\circ\underset{\sim}{R}(x_2,z_3)=\sup\{.8\times0\ ,0\times.3\}=0$$

La función de pertenencia de $\underset{\sim}{S}\circ\underset{\sim}{R}$ será:

$\underset{\sim}{S}\circ\underset{\sim}{R}$	z_1	z_2	z_3
x_1	1	.5	.3
x_2	.56	.16	0

CAPITULO II

DESCRIPCION DEL JUEGO BORROSO

La teoría de juegos fué creada originalmente para proporcionar un nuevo acceso a los problemas económicos.

Los fundamentos de la teoría de juegos fueron expuestos por John Von Neumann, quien en 1928 demostró el teorema básico del minimax, y la primera publicación donde queda establecido el tema es el libro "Teoría de Juegos y Comportamiento Económico", de Von Neumann y Morgenstern.

La teoría de juegos se ocupa de analizar situaciones de conflicto donde en general se encuentran varias personas involucradas y que además disponen de ciertas acciones o alternativas, las cuales serán elegidas en los momentos de decisión.

A la totalidad de reglas que describen el conflicto, le llamaremos "juego".

Según la concepción general de un juego de Von Neumann y Morgenstern, un juego consta de:

a) Número de jugadores.

b) Cada jugador tiene su dominio individual de alternativas o más particularmente sus "estrategias puras".

c) Cada jugador dispone de un método para decidir si un cambio de información es preferible a otro; esto consiste en un criterio individual de escoger la mejor de dos posibles alternativas desde el punto de vista del jugador individual.

Dado un juego, la teoría de los juegos analiza todas las posibles acciones (alternativas) de los jugadores para encontrar la "mejor manera" de actuar, así la teoría de los juegos sirve de guía para los jugadores.

En el análisis de la teoría clásica de los juegos, después de describir todas las posibles alternativas de los jugadores, se procede a examinar las consecuencias de las decisiones que pudieran tomarse.

En base a estas consecuencias se elaboran las recomendaciones sobre la forma razonable de actuar de los contrincantes. Hay que hacer hincapié que, en este análisis, no se toman en cuenta factores como el estado anímico de los jugadores, la manera de actuar de éstos en juegos anteriores o su ideología, etc. Desde este punto de vista, todas las alternativas son igualmente posibles.

Ahora bien surge la pregunta ¿Qué es un juego borroso?

Es un juego que cumple con el concepto general de un juego pero que además incorpora la apreciación subjetiva de los jugadores con respecto a sus contrincantes, tomando en consideración aspectos psicológicos, morales, estéticos, el comportamiento seguido hasta el momento de los contrincantes, etc.

Los jugadores estimarán mediante la herramienta de los subconjuntos borrosos y según la información que posean de sus rivales cuales son las estrategias posibles de ellos, para tener más elementos que permitan eliminar algunas de sus alternativas, es decir determinar cuales son sus estrategias posibles.

Antes de dar los elementos que definen un juego borroso recordaremos que si $X \neq \emptyset$ es un conjunto ordinario, un subconjunto borroso estará definido por su función de pertenencia $f : X \rightarrow [0,1]$

La clase de todos los subconjuntos borrosos de X será denotada por $L(X)$.

Una relación borrosa R entre los conjuntos X e Y es una función g tal que $g: X \times Y \rightarrow [0,1]$

$L(X \times Y)$ denotará la clase de todas las relaciones borrosas entre los conjuntos X e Y.

Consideremos dos jugadores.

Sea $N = \{1,2\}$ el conjunto de jugadores, los cuales serán inversionistas.

Sean $T_1^{(k)}, \ldots, T_{n(k)}^{(k)}$ con $k \in N$ y $n(k) \in \mathbb{N}$ los objetivos políticos, económicos, sociales e industriales en los cuales k está dispuesto a invertir la suma $w_i^{(k)}$ para lograr que su objetivo $T_i^{(k)}$ pueda realizarse legalmente. De igual forma el otro jugador $p \in N$ con $p \neq k$ desea invertir su dinero en $T_1^{(p)}, \ldots, T_{n(p)}^{(p)}$ con $n(p) \in \mathbb{N}$ en objetivos políticos, sociales,..., etc. Estos objetivos sociales de inversión pueden ser tales como la construcción de escuelas, deportivos, aportar dinero a la investigación, a la industria militar, etc.

Llamaremos $w_i^{(k)}$ a la cantidad de dinero invertido en el objetivo $T_i^{(k)}$, una <u>composición estratégica</u> de k será el vector $w^{(k)}=(w_1^{(k)}, \ldots, w_n^{(k)})$. Podemos considerar una composición estratégica, como un vector de financiamiento de objetivos sociales. Denotemos por Y_k el conjunto de todas las composiciones estratégicas factibles y legales de k, el conjunto Y_k está contenido en $\mathbb{R}^{n(k)}$.

El problema de cada jugador k es elegir del $Y^k \subset \mathbb{R}^{n(k)}$ correspondiente, la "mejor" composición estratégica w^k. En éste juego la elección de la mejor composición estratégica o financiamiento está determinada por él comportamiento humano.

¿Qué quiere decir ésto? Pues que al escoger k su composición estratégica $w^{(k)}$, él tomará encuenta aspectos psicológicos, morales, etc.

Por ejemplo si K es un pacifista, él preferirá no invertir en la industria de guerra aunque ésta produzca mayores ganancias. Así, para k cualquier otra inversión será mejor que la destinada a la guerra. De igual forma si k es muy puritano, él no invertirá en salones de juego o casinos.

Consideremos que el jugador k supone que el jugador p escogerá la composición estratégica w^p, entonces el jugador puede estimar la ganancia $F_k(w^{(k)},w^{(p)})$, la cual será obtenida si él escoge la composición estratégica w^k.

Consideramos dos jugadores k y p; llamemos Z al producto cartesiano de los conjuntos Y_k y Y_p, los conjuntos de composiciones estratégicas de k y p respectivamente.

El jugador k elige un conjunto borroso $E_k \in L(Z)$ para representar el grado de posibilidad de que se realicen las parejas (w^k,w^p) de composiciones estratégicas, desde su punto de vista según k considera la situación, el grado de posibilidad de que se realice la partida (w^k,w^p), o de que k otorgue el financiamiento w^k y p el w^p, es $E_k(w^k,w^p)$.

Insistencia: E_k representa el punto de vista de k.

Si k supiera que p jugaría w^p, entonces $E_k(w^k,w^p)$ es la posibilidad considerada por él de responder con w^k y se dé la partida (w^k,w^p).

De igual forma el jugador p define su conjunto borroso $E_p \in L(Z)$ con $Z=Y_k \times Y_p$.

Como ambos contrincantes no saben en general que escogerá el otro, entonces ambos definen otro conjunto borroso que les permita predecir o estimar el comportamiento del otro en la siguiente elección, para poder posteriormente estimar sus posibles respuestas.

El jugador k define A_p donde $A_p(w^p)$ será el grado de posibilidad de la siguiente afirmación:

"w^p será la siguiente elección del jugador p en el juego".

De la misma forma el jugador p define A_k.

Una vez que ambos han determinado el conjunto A_p ó A_k respectivamente, prosiguen a ponderar sus estrategias posibles como posibles respuestas a la elección del contrincante mediante la siguiente fórmula:
$\bigvee E_k(w^k,w^p) \cdot A_p(w^p) = E_k[A_p](w^k)$, para el jugador k, $E_k(w^k,w^p) \cdot A_p(w^p)$ es el grado de posibilidad de que w^k sea la respuesta a la estrategia w^p, en caso de que p juegue w^p, por el grado de posibilidad $A_p(w^p)$ de que elija w^p el jugador p desde el punto de vista de k. Este producto lo efectua para todas las w^p y toma el máximo, obteniendo así el grado de pertenencia de w^k al conjunto Y_k de posibles elecciones de k, cuando el jugador k estima el comportamiento futuro de p mediante A_p.

Un juego borroso para dos personas será aquel donde para cualquier estrategia o alternativa de uno de ellos exista solamente un conjunto borroso de estrategias alternativas, las cuales son posibles desde el punto de vista del otro jugador.

Cada vez que se dé una partida (w^k, w^p) ambos jugadores obtendrán una ganancia $F_k(w^k, w^p)$ y $F_p(w^k, w^p)$ respectivamente.

En el análisis de un juego clásico, la mejor estrategia estará dada por la función de pagos. Si los jugadores al hacer el análisis de todas las estrategias juegan la máxima cantidad asegurable, entonces obtenemos un juego clásico de dos personas; desde este punto de vista, todas las estrategias son igualmente factibles.

En la teoría de los Juegos Borrosos, cada jugador restringe sus estrategias debido a cuestiones subjetivas, tales como la ideología, lo que considera justo, moral, etc. Desde este punto de vista no todas las estrategias son igualmente factibles. En otras palabras, los jugadores no sólo se rigen por la máxima ganancia.

¿En este juego qué será una partida?

Una partida será el conjunto de concepciones estratégicas individuales puestas simultaneamente.

En este caso será el vector (s_k, s_p) donde

$s_k \in W_k = L(Y_p) \times Y_k$; $s_k = (A_p, w^k)$ y

$s_p \in W_p = L(Y_k) \times Y_p$; $s_p = (A_k, w^p)$

Antes de pasar a dar algunas de las soluciones posibles a un juego borroso para dos personas daremos algunas definiciones.

Sea $\underset{\sim}{R}$ una relación borrosa entre los conjuntos X e Y;

$\underset{\sim}{R}: X \times Y \longrightarrow [0,1]$

$L(X \times Y)$ es el conjunto de todas las relaciones borrosas ente X e Y.

Sea $A \in L(X)$

Llamaremos imagen de A bajo $\underset{\sim}{R}$ al conjunto borroso denotado por $\underset{\sim}{R}[A] \subset L(Y)$ y definido por:

$\underset{\sim}{R}[A](y) = \sup_{x \in X} \{\underset{\sim}{R}(x,y) \cdot A(x)\}, y \in Y$

Sea $B \in L(Y)$

Llamaremos contra-imagen de B bajo $\underset{\sim}{R}^{-1}$ al conjunto borroso denotado por $\underset{\sim}{R}^{-1}[B] \subset L(X)$. y definidas por:

$\underset{\sim}{R}[B](x) = \sup_{y \in Y} \{\underset{\sim}{R}(x,y) \cdot B(y)\}, x \in X$

Interpretación.

Sean dos jugadores I, II.

Sea X el conjunto de estrategias de I

Sea Y el conjunto de estrategias de II

$\underset{\sim}{R}[A](y)$ será el mayor grado de posibilidad con que II jugaría $y \in Y$, dada la información que posee de I, donde $\underset{\sim}{R}(x,y) \cdot A(y)$ será el grado de responder y a la elección x de I por el grado de posibilidad de que el jugador I elija x.

De manera análoga el jugador I obtendrá mediante $\underset{\sim}{R}^{-1}[B](x)$ el mayor grado de posibilidad de jugar $x \in X$.

Mediante este procedimiento ambos jugadores estiman a sus estrategias como posibles respuestas.

De alguna manera este procedimiento se asemeja a la forma normal de un juego.

Sea

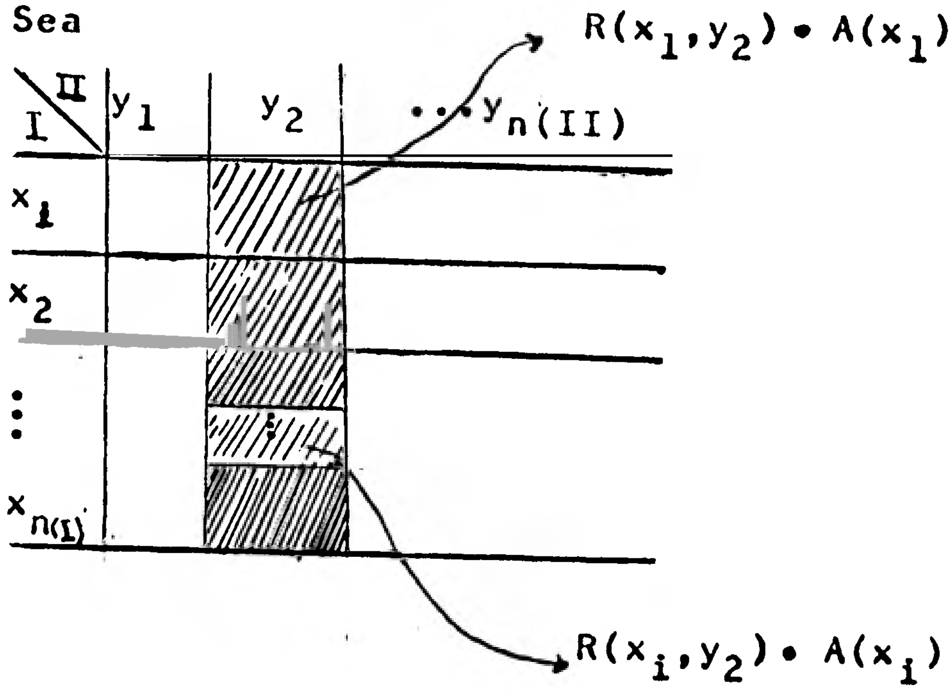


Fig.(1)

El jugador II se fija en una columna y_2, y de acuerdo a la información que tiene II de I, recorre todos los valores sobre las x obteniendo $\underset{\sim}{R}[A](y_2)$.

Llamaremos (x_i, y_j) una posible solución del juego si $\underset{\sim}{R}[A](y_j) \geq \underset{\sim}{R}[A](y) \ \forall\, y \in Y$

$\underset{\sim}{R}[B](x_i) \geq \underset{\sim}{R}[B](x) \ \forall\, x \in X$

Observamos que esta solución se semeja a la del punto silla en un juego clásico.

Demos ahora la descripción formal de un juego borroso no cooperativo para n-personas:

Un juego $\underset{\sim}{G}$ consta de los siguientes conjuntos

$\underset{\sim}{G} = (\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots \Sigma_n ; Y_1, \ldots, Y_n ; E_1, \ldots, E_n)$ donde $N = 1, 2, \ldots, n$ es el conjunto de jugadores de $\underset{\sim}{G}$ y además para cualquier $k \in N$ se tiene

(a) $T_i(k)$ es el objetivo social o económico del jugador k, al conjunto $T_i^{(k)}$ con $i=1,\ldots,n(k)$ lo designaremos por Σ_k, $\Sigma_k=\left\{T_1^{(k)},\ldots,T_{n(k)}^{(k)}\right\}$ y será el conjunto de estrategias puras del jugador k en $\mathcal{G}$.

(b) w_i^k será llamada la inversión de k en su estrategia pura $T_i^{(k)}$, al vector $w^k=(w_1^{(k)},\ldots,w_{n(k)}^k)$ se le llamará <u>la composición estratégica</u> de k. Y_k es el conjunto de todas las composiciones estratégicas de k. Sea Z el producto cartesiano de Y_k, y $w=(w^1,\ldots,w^n)$ con $w\in Z=\prod_{i\in N}Y_i$. Llamaremos a w una elección estratégica en $\mathcal{G}$.

(c) $E_k(w)$ será el grado de posibilidad de la elección estratégica w, desde el punto de vista de k. $L(Z)$ es la clase de todos los conjuntos borrosos que tienen como referencial a Z, entonces $E_k\in L(Z)$ para cualquier $w\in Z=\prod_{i\in N}Y_i$.

(d) Sea Z_k el producto caretesiano de las Y_i donde $i\in N-\{k\}$, $Z_k=\prod_{i\in N-\{k\}}Y_i$. $L(Z_k)$ es la clase de todos los conjuntos borrosos cuyo referencial es Z_k. Sea $W_k=L(Z)\times Y_k$, $s_k\in W_k$ nos dice que s_k es de la forma $s_k=(A_k,w^k)$; a los pares s_k les llamaremos <u>las concepciones estratégicas</u> del jugador k en $\mathcal{G}$.

(e) Una función de pagos $F_k:W_k\rightarrow\mathbb{R}$;

CAPITULO III

CONCEPTO DE SOLUCION

¿Qué significa solución?

Mediante el conjunto borroso A_2, el jugador 1 expresa lo que cree que va a jugar 2 en la siguiente elección. Así, 1 al estimar $[A_2]$ $(w^2)=.8$, está tomando en cuenta la información que posee de 2 y su comportamiento pasado, con lo que concluye que es muy posible que en la siguiente elección 2 tire w^2.

De igual forma 1 estima todas las alternativas $w^2 \in Y_2$. Una vez que les ha asignado un valor entre 0 y 1 a las elecciones de 2, el jugador 1 estima sus respuestas como posibles elecciones en la siguiente jugada; si sucede que $\bar{w}^1$ será la mejor elección de 1 en la siguiente jugada tomando en cuenta todas las estrategias de 2 y todas las demás de 1, entonces se tiene que

$$E_1\ [A_2]\ (\bar{w}^1) \geq E_1\ [A_2]\ (w^1)\ \forall\ w^1 \in Y_1 ....(1)$$

y si ahora el jugador 2 al hacer un análisis análogo al de 1 llega también a la conclusión que tire lo que tire 1 su mejor jugada es $\bar{w}^2$, entonces se tendrá

$$E_2\ [A_1]\ (\bar{w}^2) \geq E_2\ [A_2]\ (w^2) \forall w^2 \in Y_2 ....(2)$$

Cuando sucede simultaneamente (1) y (2) la jugada está casi determinada, lo más probable es que 1 tirará $\bar{w}^1$ y 2 tirará $\bar{w}^2$, por lo que $(\bar{w}^1,\bar{w}^2)$ será una solución posible, la cual se escribe $(A_2,\bar{w}^1;\ A_1,\bar{w}^2)$.

Definición. Sean $s_k=(A_p,w^k)$, $\bar{s}_k=(A_p,\bar{w}^k)$ dos concepciones estratégicas del jugador k en el juego G. Diremos que s_k es mejor que $\bar{s}_k$ y lo denotaremos por $s_k \succ \bar{s}_k$ sí y solo sí $E_k[A_p](w^k) \geq E_k[A_p](\bar{w}^k)$.

La concepción estratégica s_k es mejor que la concepción estratégica $\bar{s}_k$ sí y solo sí el jugador k considera a la composición estratégica w^k más posible que la $\bar{w}^k$, dada su estimación A_p sobre el jugador p, $p \neq k$.

Definición. Sea $s=(s_1,s_2)$ y $\bar{s}=(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$ dos partidas en el juego G, donde $s_1=(A_2,w^1)$, $s_2=(A_1,w^2)$ y $\bar{s}_1=(A_2,\bar{w}^1)$, $\bar{s}_2=(A_1,\bar{w}^2)$. Diremos que una partida s es preferible a una $\bar{s}$ sí y solo sí $s_1 \succ \bar{s}_1$ y $s_2 \succ \bar{s}_2$.

Definición. Una solución posible del juego G es una partida $\bar{s}=(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$ con $\bar{s}_1=(A_2,\bar{w}^1)$, $\bar{s}_2=(A_1,\bar{w}^2)$ tal que para cualquier partida $s=(s_1,s_2)$ con $s_1=(A_2,w^1)$ y $s_2=(A_1,w^2)$, la partida s no es preferible a $\bar{s}$. Es decir, si

$$E_1[A_2](\bar{w}^1) \geq E_1[A_2](w^1) \quad w^1 \in \mathbb{R}^{n(1)}$$

$$\text{y} \quad E_2[A_1](\bar{w}^2) \geq E_2[A_1](w^2) \quad w^2 \in \mathbb{R}^{n(2)}$$

la diferencia entre un juego clásico y uno borroso, estriba en que dependiendo de cómo el jugador k contruyó A_p será como tomará la decisión de responder con w^k, y no solamente guiándose por la máxima ganancia $F_k(s_1,s_2)$, la medida con la que responderá k será con $E_k[A_p](w^k)$.

Entonces una solución posible es una pareja de concepciones estratégicas las cuales contienen las alternativas más posible que corresponden a la información.

<u>Definición</u>. Sea $\underset{\sim}{R}$ una relación borrosa de $L(X\times X)$ donde X es un conjunto. Sea $x_0 \in X$ diremos que x_0 es un punto fijo de $\underset{\sim}{R}$ sí y solo sí

$$\underset{\sim}{R}(x_0,x_0) \geq \underset{\sim}{R}(x_0,x)\ \forall x \in X.$$

Ejemplos: Sea $X=\{x_1,x_2,x_3\}$

Sea $\underset{\sim}{R}$ $L(X\times X)$ dada por

$\underset{\sim}{R}$	x_1	x_2	x_3
x_1	1	.3	.7
x_2	.4	.2	.9
x_3	.7	0	.1

donde $1=\underset{\sim}{R}(x_1,x_1)\geq\underset{\sim}{R}(x_1,x_j)$ $j=2,3$. Es decir, X_1 es un punto fijo de $\underset{\sim}{R}$.

Cabe observar que dada una relación borrosa $\underset{\sim}{R}$ puede haber varios puntos fijos

Ejemplo: Sea $X=\{x_1,x_2,x_3\}$

Sea $\underset{\sim}{R}\in L(X\times X)$ definido por

$\underset{\sim}{R}$	x_1	x_2	x_3
x_1	.7	.6	.3
x_2	.2	0	.2
x_3	.4	.2	.5

$\underset{\sim}{R}(x_1,x_1)\geq\underset{\sim}{R}(x_1,x_j)$ $j=2,3$

$\underset{\sim}{R}(x_3,x_3)\geq\underset{\sim}{R}(x_3,x_k)$ $k=1,2$

por lo tanto x_1 y x_3 son puntos fijos de la relación $\underset{\sim}{R}$.

La noción de puntos fijos de una relación borrosa es una extención de lo que comunmente conocemos como punto fijo de una función.

Sea $f: X\longrightarrow X$

Sea R_f la función característica de la gráfica de f denotada por G_f.

$$G_f=\{(x,y)\in X\times X/y=f(x)\}$$

$$R_f: X\times X\longrightarrow\{0,1\}$$

$$R_f=\begin{cases}0 & \text{Si } (x,y)\notin G_f\\ 1 & \text{Si } (x,y)\in G_f\end{cases}$$

x_0 es punto fijo para f sí y solo sí $f(x_0)=x_0$

por lo tanto $R_f(x_0,x_0)=1\geq R_f(x_0,x)=0\ \forall\ x\in X$

Ya que $f(x_0)=x_0$ y para que f sea función, sólo hay un valor $f(x_0)$ para x_0.

En un juego borroso se postulan los siguientes axiomas:

(A1) Si $A_2 \in L(Y_2)$ y $A_2 \neq \emptyset$ entonces
$E_1 [A_2] \neq \emptyset$.

(A2) Si $A_1 \in L(Y_1)$ y $A_1 \neq \emptyset$ entonces
$E_2 [A_1] \neq \emptyset$.

Interpretación de (A1).

El jugador 1 construye $A_2 \neq \emptyset$ que es el conjunto estimado de las posibles elecciones del jugador 2, si éste es diferente del vacío entonces el conjunto borroso $E_1 [A_2]$ mediante el cual mide sus posibles respuestas dado el conjunto A_2, tambien es diferente del vacío.

El axioma (A2) nos dice lo mismo que (A1) sólo que ahora el jugador 2 hace las veces del jugador 1, A_1 de A_2 y E_2 de E_1

<u>Teorema</u> Sea G un juego borroso para dos personas no-cooperativo.

Sea $\hat{s} = (\hat{s}_1, \hat{s}_2)$ un elemento de $W_1 \times W_2$ Si $\hat{s}_k = (A_{\hat{p}}, \hat{w}^k)$ y $A_{\hat{p}} \neq \emptyset$ para p, $k \in N = \{1,2\}$, $p \neq k$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

1o. $\hat{s}$ es una solución posible del Juego G

2o. $\hat{s}$ es un punto fijo de la relación borrosa $\underset{\sim}{R}$ entre $W_1 \times W_2$ y $W_1 \times W_2$ donde $\underset{\sim}{R}$ está definido por

$$\underset{\sim}{R}(s,\hat{s}) = \left\{E_1[A_2] (\tilde{w}^1) \vee E_1 [\tilde{A}_2] (\tilde{w}^1) \cdot E_1 [A_2] (w^1)\right\} \cdot \left\{E_2 [A_1] (\tilde{w}^2) \vee E_2 [A_1] (w^2) \cdot E_2 [\tilde{A}_1] (\tilde{w}^2)\right\}$$

donde $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$ con $\tilde{s}_k = (A_{\tilde{p}}, \tilde{w}^k)$ $(p, k \in N, p \neq k)$

y $a \vee b$ significa max (a, b).

Dem $\Rightarrow$) Sea $\hat{s} = (A_{\hat{2}}, w^1; A_{\hat{1}}, w^{\hat{2}})$; $s = (A_2, w^1; A_1, w^2)$

y $\hat{s}$ una solución posible (ie)

$$(1)\begin{cases} E_1 \left[A_{\hat{2}}\right] (w^1_\wedge) \geq E_1 \left[A_{\hat{2}}\right] (y^1) \text{ con } y^1 \in \mathbb{R}^{n(1)} \\ E_2 \left[A_{\hat{1}}\right] (w^2_\wedge) \geq E_2 \left[A_{\hat{1}}\right] (y^2) \text{ con } y^2 \in \mathbb{R}^{n(2)} \end{cases}$$

P.d. $R(\hat{s}, \hat{s}) \geq R(\hat{s}, s)$

$$R(\hat{s}, \hat{s}) = \left\{E_1 \left[A_{\hat{2}}\right] (w^1_\wedge) \cdot E_2 \left[A_{\hat{1}}\right] (w^2_\wedge)\right\} =$$

$$= \left\{E_1 \left[A_{\hat{2}}\right](w^1_\wedge) \vee E_1\left[A_2\right] (w^1) \cdot E_1\left[A_{\hat{2}}\right] (w^1_\wedge)\right\} \cdot$$
$$\left\{E_2\left[A_{\hat{1}}\right](w^2_\wedge) \vee E_2\left[A_1\right] (w^2) \cdot E_2\left[A_{\hat{1}}\right] (w^2_\wedge)\right\}$$

$$\geq \left\{E_1 \left[A_{\hat{2}}\right] (w^1) \vee E_1\left[A_2\right] (w^1) \cdot E_1\left[A_{\hat{2}}\right] (w^1_\wedge)\right\} \cdot$$
$$\left\{E_2 \left[A_{\hat{1}}\right](w^2) \vee E_2 \left[A_1\right] (w^2)\ E_2\left[A_{\hat{1}}\right] (w^2_\wedge)\right\} = R(\hat{s}, s)$$

$$\therefore R(\hat{s}, \hat{s}) \geq R(\hat{s}, s)$$

$\Leftarrow$) Por demostrar que $\hat{s}$ es una solución posible (1)

Sea $\hat{s}$ un punto fijo de R

$R(\hat{s}, \hat{s}) \geq R(\hat{s}, s^*)$ para cualquier $s^* \in W_1 \times W_2$

en particular para $s^* = (A_{\hat{2}}, w^1; A_1, w^2_\wedge)$

$$R(\hat{s}, \hat{s}) = \left\{E_1 \left[A_{\hat{2}}\right] (w^1_\wedge) \cdot E_2\left[A_{\hat{1}}\right] (w^2_\wedge)\right\} \geq$$

$$R(\hat{s}, s^*) = \left\{E_1 \left[A_{\hat{2}}\right] (w^1) \vee E_1\left[A_{\hat{2}}\right] (w^1) \cdot E_1\left[A_{\hat{2}}\right] (w^1_\wedge)\right\} \cdot$$
$$\left\{E_2 \left[A_{\hat{1}}\right] (w^2_\wedge) \vee E_2\left[A_1\right] (w^2_\wedge) \cdot E_2\left[A_{\hat{1}}\right] (w^2_\wedge)\right\} =$$
$$= \left\{E_1\left[A_{\hat{2}}\right] (w^1) \cdot E_2\left[A_{\hat{1}}\right] (w^2_\wedge)\right\}$$

$$\therefore E_1\left[A_{\hat{2}}\right] (w^1_\wedge) \cdot E_2\left[A_{\hat{1}}\right] (w^2_\wedge) \geq E_1 \left[A_{\hat{2}}\right] (w^1) \cdot E_2\left[A_{\hat{1}}\right](w^2_\wedge)$$

Si $E_2 \left[A_{\hat{1}}\right] (w^2_\wedge) \neq 0$ entonces obtenemos la primera condición de (1)

Sólo resta demostrar que $E_2 \left[A_{\hat{1}}\right] (w^2_\wedge)$ no puede ser igual a cero.

Supongamos que $E_2[A_1^{\wedge}](w_{\wedge}^2) = 0$ entonces

para $s = (A_2, w^1, A_1, w^2)$

$R(\hat{s}, s) = \{E_1[A_2^{\wedge}](w^1) \vee E_1[A_2](w^1) \cdot E_1[A_2^{\wedge}](w_{\wedge}^1)\} \cdot$
$E_2[A_1^{\wedge}](w^2)$

y $R(\hat{s}, \hat{s}) = E_1[A_2^{\wedge}](w_{\wedge}^1) \cdot E_2[A_1^{\wedge}](w_{\wedge}^2) = 0$

por hipótesis $R(\hat{s}, \hat{s}) \geq R(\hat{s}, s)$

$\therefore 0 = \{E_1[A_2^{\wedge}](w^1) \vee E_1[A_2^{\wedge}](w_{\wedge}^1) \cdot E_1[A_2^{\wedge}](w^1) \cdot E_2[A_1^{\wedge}](w^2)$

la igualdad anterior implica que pueden suceder dos casos:

$E_2[A_1^{\wedge}](w^2) = 0$

ó $\{E_1[A_2^{\wedge}](w^1) \vee E_1[A_2](w^1) \quad E_1[A_2^{\wedge}](w_{\wedge}^1)\} = 0$

de acuerdo al axioma (A2) existe w_0^2 tal que

$E_2[A_1^{\wedge}](w_0^2) \neq 0$

$\therefore \{E_1[A_2^{\wedge}](w^1) \vee E_1[A_2](w^1) \cdot E_1[A_2^{\wedge}](w_{\wedge}^1) = 0$ para cualquier $w^1 \in \mathbb{R}^{n(1)}$

$\Rightarrow E_1[A_2^{\wedge}](w^1) = 0$ y $E_1[A_2](w^1) \cdot E_1[A_2^{\wedge}](w_{\wedge}^1) = 0$

$\therefore E_1[A_2^{\wedge}] = \emptyset$ $\forall$ ya que $A_2^{\wedge} \neq \emptyset$ por axioma (A1)

$\therefore E_2[A_1^{\wedge}](w_{\wedge}^2)$ no puede ser igual a cero.

Análogamente se obtiene la segunda condición de (1)

por hipótesis $R(\hat{s}, \hat{s}) \geq R(\hat{s}, s) \ \forall \ s \in W_1 \times W_2$

en particular para $s'' = (A_2, w_{\wedge}^1, A_1^{\wedge}, w^2)$

$R(\hat{s}, \hat{s}) \geq$

$R(\hat{s}, s'') = \{E_1[A_2^{\wedge}](w_{\wedge}^1) \vee E_1[A_2](w_{\wedge}^1) \cdot E_1[A_2^{\wedge}](w_{\wedge}^1)\} \cdot$
$\{E_2[A_1^{\wedge}](w^2) \vee E_2[A_1^{\wedge}](w^2) \cdot E_2[A_1^{\wedge}](w^2)\}$

$\therefore E_1[A_2^{\wedge}](w_{\wedge}^1) \cdot E_2[A_1^{\wedge}](w_{\wedge}^2) \geq E_1[A_2^{\wedge}](w_{\wedge}^1) \cdot E_2 A_1^{\wedge}(w2)$

Si $E_1[A_2^{\wedge}](w_{\wedge}^1) \neq 0$ se tiene la segunda condición de (1)

Supongamos que $E_1[A_2^{\wedge}](w_{\wedge}^1) = 0$

entonces

$R(\hat{s},\hat{s}) = 0 \geqslant R(\hat{s},s) = E_1[A_2^{\wedge}](w^1)\cdot$

$$\{E_2[A_1^{\wedge}](w^2) \vee E_2[A_1](w^2)\cdot E_2 A_1^{\wedge}(w_{\wedge}^2)\}$$

$\therefore E_1[A_2^{\wedge}](w^1) = 0$

ó $\{E_2[A_1^{\wedge}](w^2) \vee E_2[A_1](w^2)\cdot E_2[A_1^{\wedge}](w_{\wedge}^2)\} = 0$

por el axioma de (A1) existe w_o^1 tal que $E_1[A_2^{\wedge}](w_o^1) \neq 0$

$\therefore \{E_2[A_1^{\wedge}](w^2) \vee E_2[A_1](w^2)\cdot E_2[A_1^{\wedge}](w_{\wedge}^2)\} = 0$

$\Rightarrow E_2[A_1^{\wedge}](w^2) = 0$ y $E_2[A_1](w^2)\cdot E_2[A_1^{\wedge}](w_{\wedge}^2) = 0$

$\Downarrow$

$A_1 = \emptyset$ $\not\!\!\circ$

$\therefore E_1[A_2^{\wedge}](w_{\wedge}^1) \neq 0$

$\therefore$ se obtiene la segunda condición de (1)

Butnariu [4] se refiere a un juego cooperativo para dos personas cuando los jugadores saben que va a tirar el contrincante, mediante un diálogo o intercambio de información y se refiere al juego borroso para n-personas con colaboración entre los jugadores, donde entenderemos por colaboración una manera especial de intercambiar información, éste intercambio se dá de tal manera que los jugadores saben con certeza cuales son las estrategias posibles que eligirán sus contrincantes en la siguiente jugada.

En éste contexto debe observarse que la palabra colaboración no debe entenderse como cooperación entre los jugadores, ya que no se establecen coaliciones.

En el caso cooperativo, el siguiente teorema nos dará una caracterización de la solución posible.

No daremos la demostración debido a que es idéntica a la del teorema anterior, solo que ahora $\{w^1\}$ hará el papel de A_1 y $\{w^2\}$ hará el papel de A_2.

Teorema. Sea G un juego borroso cooperativo para dos personas. Si $\hat{s}=(\hat{s}_1, \hat{s}_2)$ es un elemento de $W_1 \times W_2$ y $\hat{s}_k = (w_\wedge^k, A_{\hat{p}})$ donde $A_{\hat{p}}$ es la función de pertenencia del conjunto $\{w_\wedge^p\}$ para cualquier $p \in N = \{1,2\}$, entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:

1º $\hat{s}$ es una solución posible cooperativa de G.

2º la pareja $(w_\wedge^1, w_\wedge^2)$ es un punto fijo de la relación borrosa $R_{\hat{G}} \in L(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ donde $n = n(1) + n(2)$

$$R_{\hat{G}}(w,\bar{w}) = \{E_1(w^2, \bar{w}^1) \vee E_1(w^2, w^1) \cdot E_1(\bar{w}^2, \bar{w}^1)\} \cdot \{E_2(w^1, \bar{w}^2) \vee E_2(w^1, w^2) \cdot E_2(\bar{w}^1, \bar{w}^2)\}$$

donde $w, \bar{w} \in \mathbb{R}^{n(1)} \times \mathbb{R}^{n(2)}$

Una solución posible para un juego de n-personas no cooperativo se extiende de la siguiente forma:

Sea $s_k = (A_k, w^k)$ y $s_k' = (A_k, w'^k)$ dos concepciones estratégicas del jugador k en G. Diremos que s_k es mejor que s_k' y lo denotaremos por $s_k \succ s_k'$ sí y solo sí $E_k[A_k](w^k) \geq E_k[A_k](w'^k)$. (con $A_k \in L(Z_k)$, $Z_k = \prod_{i \in N - \{k\}} Y_i$)

Definición. Sean $s=(s_1, \ldots, s_n)$ y $s'=(s_1', \ldots, s_n')$ dos partidas en G donde $s_i=(A_i, w^i)$ y $s_i'=(A_i, w'^i)$ para cualquier $i \in N$ diremos que s <u>es preferible</u> a s' sí y solo sí $s_k \succ s'_k$ para cualquier $k \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$

<u>Definición</u>. Una <u>solución posible</u> de G es una partida $s^{\#} = (s_1^{\#}, \ldots, s_n^{\#})$ con $s_k^{\#} = (A_k^{\#}, w_{\#}^k)$, $k \in N$, tal que para cualquier otra partida $s = (s_1, \ldots, s_n)$ con $s_k = (A_k^{\#}, w^k)$ $k \in N$, s no es preferible a $s^{\#}$, es decir

$$E_k[A_k^{\#}](w_{\#}^k) \geq E_k[A_k^{\#}](w^k) \; \forall w^k \in Y_k, \forall k \in N$$

En un juego borroso de n-personas también se postulan los siguientes k-axiomas, con $k \in N = \{1, \ldots, n\}$

<u>Axioma</u> (Ak): Si $A_k \in L(Z_k)$ y $A_k \neq \emptyset$, entonces $E_k[A_k] \neq \emptyset$. Es decir, existe $s_k = (A_k, w^k) \in W_k$ tal que $E_k[A_k] \neq \emptyset$

A continuación expondremos dos teoremas que indican la existencia de posibles soluciones a un juego borroso para n-personas no cooperativo y con colaboración respectivamente.

<u>Teorema</u>: Sea $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ una partida de G con $s_i^* = (A_i^*, w^i)$, $i \in N$. Si $A_i^* \neq \emptyset$ para cualquier $i \in N$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1º s^* es una solución posible para G.

2º s^* es un punto fijo de la relación borrosa R donde R es la relación borrosa de preferencia en G.

<u>Definición</u>. La <u>preferencia borrosa individual</u> del jugador k en G está dada por la relación borrosa $E_k \in L(W \times W)$; $(W = (W_1 \times W_2 \times \ldots \times W_n))$

definida por:

$$E_k^*(s,\bar{s})=E_k[\Lambda_k](\bar{w}^k)\vee E_k[\Lambda_k](w^k)\cdot\prod_{i\in N}E_i[\bar{\Lambda}_i](\bar{w}^i) \qquad (\$)$$

para cualesquiera dos partidas $s=(s_1, \ldots, s_n)$, $\bar{s}=(\bar{s}_1,\ldots,\bar{s}_n)$ con $s_j=(\Lambda_j, w^j)$, $\bar{s}_j=(\bar{\Lambda}_j, \bar{w}^j)$ con $j\in N$. La relación borrosa E_k^* mide la preferencia del jugador k por la partida s en comparación con la partida $\bar{s}$.

<u>Definición</u>. Llamaremos a $R\in L(W\times W)$ una <u>relación borrosa de preferencia</u> en G, a la definida por

$R(s,\bar{s})=\prod_{i\in N}E_i^*(s,\bar{s})\ \forall s,\bar{s}\in W$; ($E_i^*$ definida en (\$))

$R(s,\bar{s})$ es el producto de las preferencias borrosas individuales, es el grado con el cual todos los jugadores prefieren la partida s a la $\bar{s}$.

<u>Demostración</u>. ⇒) Sean $s^*=(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ con $s_k^*=(\Lambda_k^*,w_*^k)$ y
$s=(s_1, \ldots, s_n)$ con $s_k=(\Lambda_k,w^k)$,
y s^* una solución posible (ie)

(2) $E_k[\Lambda_k^*](w_*^k)\geq E_k[\Lambda_k^*](w^k)\ \forall w^k\in Y_k\ \forall k\in N$.

p.d. $R(s^*,s^*)\geq R(s^*,s)$

$$E_i^*(s^*,s^*)=E_i[\Lambda_i^*](w_*^i)=E_i[\Lambda_i^*](w_*^i)\vee E_i[\Lambda_i^*](w_*^i)\prod_{j\in N}E_j[\Lambda_j](w^j)$$
$$\geq E_i[\Lambda_i^*](w^i)\vee E_i[\Lambda_i^*](w_*^i)\prod_{j\in N}E_j[\Lambda_j](w^j)=E_i^*(s^*,s)$$

por (2)

$\therefore E_i^*(s^*,s^*)\geq E_i^*(s^*,s)$ para cualquier $s\in W$, $i\in N$.

$\therefore R(s^*,s^*)=\prod_{i\in N}E_i^*(s^*,s^*)\geq\prod_{i\in N}E_i^*(s^*,s)=R(s^*,s)\ \forall s\in W$.

$\therefore s^*$ es un punto fijo para R.

$\Leftarrow$) <u>Por demostrar</u> que s^* es una solución posible.

Sea s^* un punto fijo de R

$R(s^*,s^*) \geqslant R(s^*,s)$ para cualquier $s \in W_1 \times \ldots \times W_n$

en particular para $s=s^{(i)} = (s_1^{(i)}, \ldots, s_n^{(i)})$,

con $s_j^{(i)} = (A_j^{(i)}, w_{(i)}^j)$

$$A_j^{(i)} = A_j \quad \text{Si } j \neq i$$
$$= A_j^* \quad \text{Si } j = i$$
$$w_{(i)}^j = w_*^j \quad \text{Si } j \neq i$$
$$= w^j \quad \text{Si } j = i$$

$$E_i^*(s^*,s^{(i)}) = E_i[A^*_i](w^i) \vee E_i[A_i^*](w_*^i) \cdot E_i[A_i^*](w^i) \prod_{j \neq i} E_j[A_j](w_*^j)$$
$$E_i^*(s^*,s^{(i)}) = E_i[A_i^*](w^i)$$

Para cualquier $k \neq i$ se tiene

$$E_k^*(s^*,s^{(i)}) = E_k[A_k^*](w_*^k) \vee E_k[A_k^*](w_*^k) \cdot \prod_{j \in N} E_j[A_j^{(i)}] \; (w_{(i)}^j)$$
$$E_k^*(s^*,s^{(i)}) = E_k[A_k^*](w_*^k)$$
$$R(s^*,s^*) = \prod_{k \in N} E_k^*(s^*,s^*) \geqslant R(s^*,s^{(i)}) = \Big(\prod_{k \neq i} E_k^*(s^*,s^{(i)})\Big)\big(E_i^*(s^* s^{(i)})\big)$$
$$\prod_{k \in N} E_k[A_k^*] \, (w_*^k) \geqslant \Big(\prod_{k \neq i} E_k \, [A_k^*] \, (w_*^k)\Big)\big(E_i \, [A_i^*] \, (w^i)\big)$$
$$E_i \, [A_i^*] \, (w_*^i) \cdot \prod_{k \in N-\{i\}} E_k[A_k] \, (w_*^k) \geqslant \prod_{k \in N-\{i\}} E_k \, [A_k^*](w_*^k) \cdot E_i \, [A_i^*](w^i)$$

Para cualquier w^i en Y_i, $i \in N$.

Si $E_k [A_k^*](w_*^k)$ es diferente de cero para todo $k \in N-\{i\}$

Se tiene que s^* es un punto fijo de R.

Sólo <u>resta demostrar</u> que no puede suceder que

$E_k [A_k^*](w_*^k) = 0$ para algún $k \in N-\{i\}$

<u>Demostración.</u> Supongamos que $E_k [A_k^*](w_*^k) = 0$ para algún $k \in N-\{i\}$

$$R(s^*,s) = \prod_{i \in N} E_i^*(s^*,s) = \prod_{i \in N}\Big(E_i \, [A_i^*] \, (w^i) \vee E_i \, [A_i^*] \, (w^i) \cdot$$
$$\prod_{j \in N} E_j \, [A_j] \, (w^j)\Big)$$

Para $s^*=(s_1^*,\dots,s_n^*)$, $s_i^*=(A_i^*,w_*^i)$ y $s=(s_1,\dots,s_n)$ con $s_i=(A_k,\ w^k)$.

$R(s^*,s)=E_k[A_k^*]\ (w^k)\prod_{j\in N-\{k\}} E_j^*(s^*,s)$

$R(s^*,s^*)=\prod_{i\in N} E_i\,[A_i^*]\ \ (w_*^i)\ =\ 0$ ya que para $i\ =\ k$

Se tiene $E_k[A_k^*](w_*^k)=0$

Por hipótesis $R(s^*,s^*)\geq R(s^*,s)$

$\therefore R(s^*,s)=E_k[A_k^*]\ (w^k)\prod_{j\in N-\{k\}} E_j^*(s^*,s)=0\ \forall\, s\in W_1\times W_2\times\dots\times W_n \quad \dots(1)$

A continuación se demostrará que $\prod_{j\in N-\{k\}} E_j^*\ (s^*,s)>0$

Para $s\ =\ \bar{s}$ construida de la siguiente forma:

Sea $\bar{s}=(\bar{s}_1,\dots,\bar{s}_n)$ Si $i=k$ entonces $\bar{s}_i=(A_i^*,w^k)$ con $w^k\in s$. Si $i\neq k$ entonces $\bar{s}_i=\ (A_i^*,\ \bar{w}^i)$ donde $\bar{w}^i$ tiene la propiedad $E_i[A_i^*]\ \ (\bar{w}^i)\ \neq\ 0$.

Sea $s_h\ =\ (A_h^*,w^h)$ si $h=k$

$s_h\ =\ (A_h^*,\bar{w}^h)$ si $h\neq k$

Por (1)

$R(s^*,\bar{s})\ =\ 0\ =\ E_k[A_k^*]\ \ (w^k)\prod_{h\in N-\{k\}} E_h^*\ \ \ (s^*,\bar{s})$

$E_h^*(s^*,\bar{s})=E_h[A_h^*]\ (\bar{w}^h)\vee\ E_h\,[A_h^*]\ (w_*^h)\cdot\prod_{j\in N} E_j\,[A_j^*](\bar{w}^j)\ \forall h\in N-\{k\}$

$E_h^*(s^*,\bar{s})=E_h[A_h^*]\ \ (w^h)>0\ \forall h\ \ N-\{k\}$

$\therefore \prod_{h\in N-\{k\}} E_h^*(s^*,\bar{s})>0$

y como $R(s^*,\bar{s})=E_k\,[A_k^*]\ \ (w^k)\prod_{h\in N-\{k\}} E_h^*\ \ (s^*,\bar{s})\ =\ 0$

entonces $E_h[A_k^*](w^k)\ =\ 0\ \forall\ w^k\in Y_k$ ∇

por el axioma (Ak) de la página 33.

$\therefore$ no puede suceder que $E_k[A_k^*](w_*^k)\ =\ 0$ para algún $k\in N-\{i\}$.

A continuación introduciremos lo que será una solución posible para un juego borroso de n personas con colaboración, aquí las reglas del juego permitirán a los jugadores colaborar unos con otros sin formar coaliciones, la colaboración entre jugadores no debe ser pensada como una cooperación, sino como una manera especial de intercambiar información con una máxima de admisibilidad, en otras palabras, es una información donde no hay duda sobre ella. Es intuitivamente claro que en esta manera de intercambiar información no hay nadie que represente a varios y decida que intercambiar, lo cual sí sucede en las coaliciones.

Matemáticamente, la colaboración de los jugadores en un juego borroso para n-personas, consiste en jugar solo partidas de la forma $s^*=(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ donde

$S_k^* = (A_k^*, w_*^k)$ $k \in N$ y

$$A_k^* (w^1, \ldots, w^{k-1}, w^{k+1}, \ldots, w^n)=1 \text{ si } w^i=w_*^i,\ i\in N-\{k\}$$
$$=0 \text{ en otro caso.}$$

<u>Definición</u>. Un <u>punto de equilibrio</u> de G es una solución posible $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ donde $s_k^*=(A_k^*,w_*^k), k\in N$

Si

$$A_k^* (w^1,\ldots,w^{k-1}, w^{k+1},\ldots, w^n)=1 \text{ si } w^i=w_*^i,\ i\in N-\{k\}$$
$$=0 \text{ en otro caso.}$$

Si G es un juego borroso para n-personas donde hay colaboración entre los jugadores, es decir, la información es perfecta, entonces ¿Qué será una solución posible para G?

<u>Definición:</u> Llamaremos <u>preferencia limitada</u> en G a la relación borrosa $R^* \in L(Z\times Z)$ donde $Z=Y_1\times Y_2\times\ldots\times Y_n$ y $R^*(w,\tilde{w}) = R(s,\tilde{s})$ donde s, $\tilde{s}$ son partidas de informa-

ción perfecta, determinadas por w y $\bar{w}$ respectivamente.
Es decir:

$s=(s_1,\ldots,s_n)$, $s_k=((w^1,\ldots,w^{k-1},w^{k+1},\ldots,w^n),\ w^k)$

$$s_k = w = (w^1,\ldots,w^k,\ldots,w^n)$$

$\bar{s}=(\bar{s}_1,\ldots,\bar{s}_n)$, $\bar{s}_k=((\bar{w}^{(1)},\ldots,\bar{w}^{(k-1)},\bar{w}^{(k+1)},\ldots,\bar{w}^{(n)}),\ \bar{w}^{(k)})$

$$\bar{s}_k = \bar{w} = (\bar{w}^{(1)},\ldots,\bar{w}^{(k)},\ldots,\bar{w}^{(n)})$$

<u>Teorema:</u> Sea $w^*=(w^1_*,\ldots,w^n_*)\in Z$ y sea s^* la partida con información perfecta determinada por w^*. Entonces las siguientes dos afirmaciones son equivalentes.

i) s^* es un punto de equilibrio en G.

ii) w^* es un punto fijo de la relación borrosa limitada R^* en el juego G.

<u>Demostración i⇒ii).</u>

Sea $s^*=(s^*_1,\ldots,s^*_n)$; $s^*_k=(A^*_k,\ w^k_*)$ un punto de equilibrio, es decir: $A^*_k(w^1,\ldots,w^{k-1},w^{k+1},\ldots,w^n)=1$ si $w^i=w^i_*$ $i\in N-\{k\}$

$$=0 \text{ en otro caso.}$$

Por demostrar $R^*(w^*,w^*)\geq R^*(s^*,w)\ \forall\ w\in Y_1\times\ldots\times Y_n$

donde $R^*(w^*,w^*)=R(s^*,s^*)$ con $s^*=w^*$

$R^*(w^*,w)=R(s^*,s)$ con $s^*=w^*$ y $s=w$

$R(s^*,\bar{s})$, está definida en la página 34.

$$R(s^*,s^*)=\prod_{k\in N}E^*_k(s^*,s^*)=\prod_{k\in N}(E_k[A^*_k](w^k_*)\vee E_k[A^*_k](w^k_*)\cdot \prod_{j\in N}E_j[A^*_j](w^j_*))$$

$$R(s^*,s^*)=\prod_{k\in N}E_k(A^*_k(w^1_*,\ldots,w^{k-1}_*,\ w^{k+1}_*,\ldots,w^n_*),\ w^k_*)=1$$

$\therefore 1=R(s^*,s^*)=R^*(w^*,w^*)\geq R^*(w^*,w)=R(s^*,s)\ \forall s\in Y_1\times\ldots\times Y_n$

$\therefore R(s^*,s^*)\geq R(s^*,s)$ y $s\in Y_1\times\ldots\times Y_n$

es decir s^* es un punto fijo de R.

No se hará la demostración de que si w* es un punto fijo de la relación borrosa limitada R* en el juego G, entonces s* es un punto de equilibrio en G, ya que esta es idéntica a la del teorema anterior. Solo que ahora s* es una partida con información perfecta y determinada por w* por lo que sucede

$$A_k^*(w^1,\ldots,w^{k-1},w^{k+1},\ldots,w^n)=1 \text{ si } w^i=w_*^i \; i\in N-\{k\}$$
$$=0 \text{ en otro caso.}$$

Este teorema reduce el problema de encontrar puntos de equilibrio, al de encontrar los puntos fijos de la relación limitada de preferencias borrosas R*.

Butnariu en [3] [4], estudia criterios de existencia para puntos fijos, los cuales serán un tema de estudio posterior.

CAPITULO IV

MODELANDO CONFLICTOS MEDIANTE JUEGOS BORROSOS

A continuación se desarrollará el planteamiento de un problema de guerra (mencionado en un principio), utilizando la herramienta de teoría de juegos borrosos para n-personas (no-cooperativos).

Considérense dos "jugadores" denominados 1 y 2 respectivamente. Ambos invertirán su dinero en la construcción de armamento necesario para defender su territorio y, atacar al contrario para manifestar su poder, con objeto de llegar a determinar el estado conflictivo entre ellos dos.

Se parte del supuesto que ambos van a negociar la reducción de la inversión en objetivos militares simultáneamente, en esta negociación ambos intercambiarán información sobre el dinero destinado a la construcción de los diferentes tipos de armamento.

Como los dos jugadores quieren reducir su inversión en los objetos militares, los dos tratan de obtener garantías de que se lleven a cabo los puntos tratados en la negociación.

Sean $T_1^{(k)}$, $T_2^{(k)}$, ..., $T_{n(k)}^{(k)}$ objetivos militares del jugador k con $k \in \{1,2\}$, donde $T_i^{(k)}$ designará el armamento i del jugaror k.

Cada arma de la que dispondrá el jugador k, digamos la bomba atómica, los proyectiles, etc., tendrán asociados un índice el cual varía entre $1, \ldots, n(k)$ donde $n(k) \in \mathbb{N}$.

Analizado el poder militar del jugador k y sus recursos tanto económicos como humanos, éste puede determinar su conjunto $Y_k \subset R^{(n(k))}$ de todos los posibles financiamientos para la construcción de los objetivos militares, $T_1^{(k)}, \ldots, T_{n(k)}^{(k)}$

Sea $w^k=(w_{(1)}^k, \ldots, w_{n(k)}^k)$ un vector en Y_k donde $w_{(i)}^{(k)}$ será el dinero designado a la construcción de $T_{(i)}^{(k)}$. Es claro que una inversión negativa w_j^k, significará que k utilizará menos el arma $T_j^{(k)}$ en el conflicto.

También de igual forma, si k aumenta su presupuesto en un arma muy destructiva $T_t^{(k)}$, entonces para el jugador $p \neq k$ constituirá una amenaza mayor en la dirección t con lo que él tendrá que aumentar su presupuesto en el arma defensiva, que contrarreste a $T_t^{(k)}$.

En éste "juego", ambos participantes están interesados en reducir su inversión en los objetivos militares, pero esta reducción debe ser hecha de tal manera que no altere la eficiencia de su poder militar, es por esta razón que ambos tratan de obtener las mayores garantías en tanto cuánto destinen su inversión a cada objetivo militar $T_i^{(k)}$, ahora en la medida en que éstas garantías sean admisibles, los jugadores decidirán cuánto invertir en cada arma, las cuales estarán destinadas a alguna dirección, y con ésto determinarán cuales inversiones serán realizables o no realizables.

El intercambio de garantías, y las inversiones destinadas a los diferentes tipos de armamento dependen de leyes objetivas o bien de las reglas del juego.

Las garantías obtenidas por los jugadores junto con el intercambio de información, el cual está gobernado por ciertas leyes, define un juego borroso para dos personas cuyas estrategias puras son $T_i^{(k)}$ y cuyas composiciones estratégicas regulares están en Y_k.

En la medida en que las garantías sobre el cumplimiento de lo estipulado en la negociación sean admisibles, ellos podrán formar su conjunto borroso A_p, el cual es un elemento de $L(Y_k)$ con $K \neq p$.

De esta forma es natural considerar que el intercambio de información entre los dos jugadores, esté representado por la pareja (s_1, s_2), donde
$s_k = (A_p, w^k)$, donde A_p representa la garantía de que el jugador p respete la negociación, y w^k será el financiamiento otorgado por k, basado en la garantía.

Estas garantías las mide de manera subjetiva el jugador k dependiendo de como se llevó a cabo la negociación, la agresión utilizada, el tono de la declaración política, el comportamiento anterior del contrincante, etc.

Para cada uno de los jugadores existe una combinación de factores y circunstancias para tomar la decisión de cuánto invertir en cada armamento, es decir esta decisión es hecha después de hacer el siguiente análisis: para cada composición estratégica w^p elemento de Y_p, k determinará un conjunto borroso $E_k(w^p,w^k) = E_{k,w}(w^k)$ el cual está contenido en $L(Y_k)$, donde $E_{k,w^p}(w^k)$ es el grado de pertenencia de la composición estratégica $w = w^k$ al conjunto de respuestas a la elección w^p de p. Esto significa que para cualquier $w^p \in Y_p$ no todas las composiciones estratégicas en Y_k son igualmente factibles. Así, si w^p es de tal manera que dá un aumento considerable de inversión a la preparación de bombas atómicas, entonces las composiciones estratégicas w^k de k que no contemplan el poder militar atómico serán menos posibles.

Ahora, si consideramos al conjunto de estrategias puras de 1 como $\Sigma_1 = \left\{T^{(1)}_1, \ldots, T^{(1)}_{n(k)}\right\}$ y al del jugador 2 como $\Sigma 2 = \left\{T^{(2)}_1, \ldots, T^{(2)}_{n(k)}\right\}$, a Y_1 como el conjunto de todas las composiciones estratégicas w^1 y a Y_2 como el conjunto de todas las composiciones estratégicas de w^2 y $E_k(w^p,w^k) = E_{k,w^p}(w^p)$ como el conjunto borroso de k que mide el grado de posibilidad de las composiciones estratégicas de k como posibles respuestas a la composición estratégica w^p del jugador p, con $k \neq p$, obtenemos un juego borroso para dos personas, el cual está definido en el capítulo II.

En éste juego los jugadores buscan obtener las garantías lo más seguras posibles, de acuerdo al futuro comportamiento del otro jugador.

Los jugadores de éste juego harán concesiones y ofrecerán garantías tales como no poner en práctica inversiones amenazantes.

Por lo tanto, es natural decir que los jugadores preferirán realizar partidas las cuales sean soluciones posibles y que tengan como resultado final puntos de equilibrio en G. En éste juego, puntos de equilibrio significará la supervisión recíproca de la inversión en el poder militar, como en un punto de equilibrio ambos jugadores saben lo que invertirá el otro, puede haber muchos puntos de equilibrio, y así el Pareto - mínimo será el conjunto de seguridad ideal con el mínimo esfuerzo económico.

Hasta ahora hemos visto teoremas que relacionan puntos fijos con posibles soluciones de un juego borroso para dos y para n personas.

En esta sección se utilizarán algunas propiedades y resultados topológicos tales como el teorema de punto fijo, que nos permitirá, bajo hipótesis adecuadas, garantizar la existencia de puntos de equilibrio.

<u>Definición</u>. Sea R una relación borrosa

$L(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ $(n \geq 1)$

R es una <u>relación cerrada</u> $\Leftrightarrow$ para cualquier esfera cerrada $B \in \mathbb{R}^n$, el conjunto

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / \underset{\sim}{R}^{-1}[B](x) \geq \underset{\sim}{R}^{-1}[\mathbb{R}^n](x) \right\}$$

es diferente del vacío y cerrado en $\mathbb{R}^n$, donde

$$\underset{\sim}{R}^{-1}[B](x) = \sup_y \left\{ \underset{\sim}{R}(x,y) B(y) \right\} \geq \sup_y \left\{ \underset{\sim}{R}(x,y) \mathbb{R}^n(y) \right\} = \underset{\sim}{R}^{-1}[\mathbb{R}^n](x).$$

C es el conjunto de x tales que existe $y_0 \in B$ tal que

$\underset{\sim}{R}(x,y_0) = \sup_Y \underset{\sim}{R}(x,y) \; \forall \; y \in Y$.

Ejemplo de una relación borrosa cerrada $\underset{\sim}{R}$.

$$\underset{\sim}{R}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=y \text{ con } x,y \in \mathbb{R}^n \\ 1/2 & \text{si } x \neq y \text{ con } x,y \in U_{1/2}(x) \\ 0 & \text{otro} \end{cases}$$

donde $U_{1/2}(x)$ es la vecindad con centro en x y radio $1/2$.

Sea H el conjunto de puntos que cumplen con

$\underset{\sim}{R}^{-1}[B](x) \geq \underset{\sim}{R}^{-1}[\mathbb{R}^n](x)$, donde $\underset{\sim}{R}^{-1}[B](x) = \sup_y \left\{ \underset{\sim}{R}(x,y) B(y) \right\}$.

Por ejemplo (ver figura en la siguiente página)

Sea B una esfera cerrada con centro en x y radio $1/2$,

entonces para las x^* lejanas a $B_{1/2}(x)$ donde $x^* \cap B_{1/2}(x) = \phi$

se tiene $\underset{\sim}{R}(x,x^*) = o$.

Tomemos otra vecindad $U_{1/2}(x^*)$, entonces $\underset{\sim}{R}(x^*,y) = 1/2$ donde

y está en lo sombreado.

Nos interesa saber cuales son los elementos de H,

desde luego x^* no es elemento de H porque $x^* \notin B$, es

decir $B(x^*) = 0$.

$\therefore$ $\underset{\sim}{R}^{-1}[\mathbb{R}^n](x^*) \geq R^{-1}[B](x^*) = 0$, , por lo tanto $x^* \notin H$, al

igual que x^* les sucede lo mismo a los elementos que

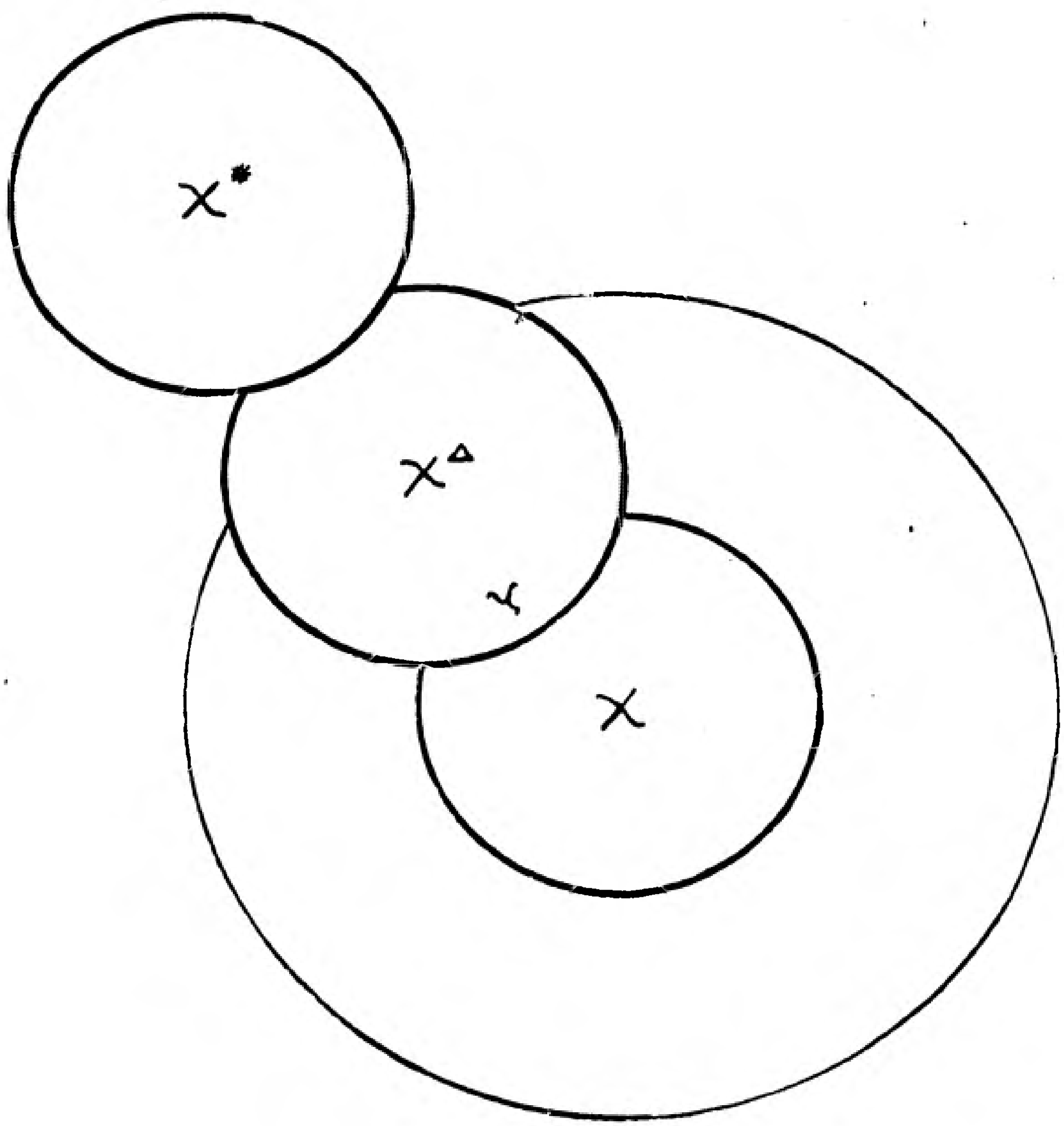
no están en B. Ahora, para las x dentro de B, se tie-

ne que $\underset{\sim}{R}^{-1}[B](x) = 1$ y por lo tanto $R^{-1}[B] = B$.

$\therefore H = B$

$\therefore H$ es $\neq \phi$ y cerrado

$\therefore R$ es una relación borrosa y cerrada.



<u>Teorema</u>. Sea X el conjunto compacto contenido en $\mathbb{R}^n$ y sea $\underset{\sim}{R}$ una relación borrosa de $L(X \times X)$. Si $\underset{\sim}{R}$ es una relación cerrada tal que para cualquier $x \in X$, $\underset{\sim}{R}_x : y \to \underset{\sim}{R}(x,y)$ es una función semicontínua superiormente y para cualquier entero positivo m existe una y_m en X, tal que

$\underset{\sim}{R}^{-1}[S_m(x)]\ (y_m) = \underset{\sim}{R}^{-1}[X]\ (y_m)\ \forall\, x \in X$ con (1)

$S_m = X \cap U_m(x)$, entonces $\underset{\sim}{R}$ tiene un punto fijo.

$U_m(x)$, es una esfera cerrada con centro en x y radio 1/m.

<u>Interpretación</u>.

X representa el conjunto de estrategias de los jugadores 1y2, $\underset{\sim}{R}(x,y)$ representa la posibilidad de que se juegue la partida x, y.

A $\underset{\sim}{R}$ se le pide que sea una función semicontínua superiormente en un compacto para que alcance su máximo, y además se tome en cuenta que si 1 juega w^1 y 2 w^2 pero el jugador 2 decide cambiar a w^2 por $\bar{w}^2$ donde $\bar{w}^2$ se parece mucho a w^2 entonces $\underset{\sim}{R}(w^1, \bar{w}^2)$ se parece mucho a $\underset{\sim}{R}(w^1, w^2)$

La demostración y estudio de éste teorema requiere de herramienta mucho más sofisticada, como son los espacios topológicos borrosos, los cuales serán objeto de un estudio posterior.

Teorema. Sea G un juego borroso para dos personas. Si Y_1 y Y_2 son subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^{n(1)}$ y $\mathbb{R}^{n(2)}$ respectivamente y E_1 y E_2 son funciones reales continuas, y para cualquier entero m, la relación borrosa $R_{\hat{G}}$ cumple con $R^{-1}_{\hat{G}}\left[S_m(x)\right](y_m) = R^{-1}_{\hat{G}}\left[X\right](y_m)$ para cualquier $x \in Y_1 \times Y_2$, con $S_m = Y_1 \times Y_2 \cap U_m(x)$ donde $U_m(x)$ es la esfera cerrada con centro x y radio $1/m$.

donde $R_{\hat{G}}(w,\bar{w}) =$

$$\{E_1(w^2,\bar{w}^1) \vee E_1(w^2,w^1) \cdot E_1(\bar{w}^2,\bar{w}^1)\} \cdot$$

$$\{E_2(w^1,\bar{w}^2) \vee E_2(w^1,w^2)\ E_2(\bar{w}1,\bar{w}^2)\} \quad w, \bar{w} \in R^{n(1)} \times R^{n(2)}$$

tiene una solución posible cooperativa.

Demostración.

Es claro que las hipótesis del teorema implican las del teorema anterior y por lo tanto $R_{\hat{G}}$ es una relación borrosa así como R lo es en el teorema anterior. $\therefore R_{\hat{G}}$ tiene un punto fijo y por el teorema de la página 28 G tiene una solución posible cooperativa.

Es natural preguntarse si existe algún juego borroso para dos personas como lo enuncia el teorema anterior. La respuesta es afirmativa por el siguiente ejemplo.

Sean dos jugadores 1, 2, cuyo conjunto de estrategias está formado por $Y_1 = Y_2 = [0,\pi]$ y sean E_1, E_2 las funciones continuas definidas por

$$E_1(y,x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \dfrac{x-y+\pi}{2} & \text{si } x,\ y \in [0,\pi] \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

$$E_2(x,y) = \begin{cases} \cos(x-y) & \text{si } x,\ y \in [0,\pi] \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

donde $R_{\hat{G}}$ está definida en el teorema anterior.

Así por ejemplo

sea $w = (0, \pi/2)$; $\bar{w} = (\pi/2, \pi)$

$$R_{\hat{G}}\left[(0,\pi/2), (\pi/2,\pi)\right] = \left\{E_1(\pi/2,\pi/2) \vee E_1(\pi/2,0) \cdot E_1(\pi, \pi/2)\right\}$$
$$\left\{E_2(0,\pi) \vee E_2(0,\pi/2) \, E_2(\pi/2,\pi)\right\}$$
$$= \{1\} \cdot \{-1 \vee 0\} = 0$$

Notemos que cuando $x = y$ $R_{\hat{G}}(w,\bar{w}) = 1$

Como las condiciones de este ejemplo cumplen con las del teorema anterior existe algún punto fijo y por lo tanto, el juego tiene una solución posible cooperativa.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos analizado el concepto de juego borroso no cooperativo que propone D. Butnariu en [4] [7], describiendo tanto el caso bipersonal como en n personal.

Nos damos cuenta que la diferencia con el planteamiento clásico estriba en que éste sólo busca maximizar una ganancia segura, considerando sus alternativas como igualmente factibles; mientras que el planteamiento borroso incorpora al análisis aspectos subjetivos en las apreciaciones de los jugadores: la ideología, la moral, la estética; todos estos son factores que influyen en la elección de una alternativa. Hay alternativas que podrían considerarse "poco atractivas" o "menos posibles". He aquí la primera parte del planteamiento borroso: No todas las alternativas son igualmente factibles. La segunda parte donde se considera en el análisis la apreciación subjetiva de los jugadores es al considerar la jugada siguiente de un determinado jugador, consideración o estimación realizada por otro: ¿Qué va a jugar p?

Estas dos consideraciones subjetivas nos permiten construír el concepto correspondiente al de estrategia en el análisis clásico: la concepción estratégica de un jugador. Este concepto expresa simultaneamente nuestra apreciación acerca de la conducta futura de un jugador y las maneras <u>más posibles</u> de contestar le.

Parafraseando al análisis clásico de los juegos bipersonales con suma distinta de cero, extendemos el concepto de dominancia entre dos estrategias, al de <u>concepción estratégica mejor que otra</u>, y al de una <u>partida preferibe a otra</u>.

Finalmente, si consideramos que hay <u>colaboración</u> entre los participantes, entendida como intercambio satisfactorio de información sujeta a comprobación, puede llegarse al concepto de <u>solución posible</u> y de <u>punto de equilibrio</u>.

Ahora bién, la demostración de que bajo hipótesis adecuadas existen puntos de equilibrio equivale a demostrar que cierto tipo de <u>relaciones borrosas</u> tienen algún <u>punto fijo</u>. Si bien mencionamos lo que significa un punto fijo de una relación borrosa y demostramos la equivalencia con el concepto de punto de equilibrio, no atacamos el problema de la existencia de dichos puntos debido a que para ello habría primero que desarrollar el tema de Topologías Borrosas, que de por sí daría para una tesis. Queda pues este tema para estudios posteriores o como invitación para realizar el trabajo.

También serán motivo de estudios posteriores los juegos borrosos cooperativos en donde el grado de pertenencia a una coalición puede variar entre cero y uno, y no necesariamente pertenecer o no pertenecer a una coalición. Una coalición borrosa quedará definida mediante un estatuto al cual se adherirán en cierta medida los participantes. Será esta medida su grado de pertenencia a la coalición.

¿Qué decir como un gran resumen acerca del concepto de Juego Borroso? Pues se trata de incorporar al análisis de la situación clásica de juego los aspectos subjetivos representados por las distintas apreciaciones de los participantes acerca del comportamiento de los otros y de sus propias reacciones en la situación en la que están involucrados.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Abdel-Malek.
Sociología del Imperialismo.
Instituto de Investigaciones Sociales.
U.N.A.M. (México 1977).

[2] J. Bousitat.
Presentación de la Teoría de Juegos.
Comunicaciones Internas.
No. 10, 1979.

[3] D. Butnariu.
A Fixed Point Theorem and its Application to
Fuzzy Games.
Revue Roumanie de Math. Pures et Appliquées.

[4] D. Butnariu.
An Existence Theorem for Possible Solutions of a
Two Person Fuzzy Game.
Bull. Math. de la Soc. Sci. Math de la R. S. de
Rumanie.
Tome 23 (71), nr. 1, 1979.

[5] D. Butnariu.
Fuzzy Games. A Description of The Concept.
Fuzzy Sets and Systems 1 (1978) 181-192. p.p.
North Holland Publishing Company.

[6] D. Butnariu.
L. Fuzzy Topologies.
Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R. S.
Roumanie.
Tome 19 (67), nr. 3-4, 1975.

[7] D. Butnariu.
Solution Concepts for n persons Fuzzy Games
Advances in Fuzzy Set Theory and Applications
M.N. Gupta, R. K. Ragade, F. R. Yager. (editors)
North Holland Publishing Company, 1979.

[8] P.M., Cohn.
Universal Algebra.
Harper Row, New York, 1965.

[9] M. Davis.
Teoría de Juegos.
Alianza Universidad, 1977.

[10] J.A., Goguen.
L. Fuzzy Sets.
J. Math. Anal. Appl. 18 (1967) 145-174.

[11] A. Kaufmann.
Introduction a la Theorie des Ensembles Flous.
Vol. 1 (Masson and Co., Paris, 1973).

[12] V. Neumann and O. Morgenstern.
Theory of Games and Economic Behaviour.
Princeton University Press, 1970.

[13] G. Owen.
Game Theory.
Saunders Co., Philadelphia, 1968.

[14] W. Tucher and H. Kuhn.
Shapley, L. S. a Value for n Persons Games
Vol. 2 (Princeton).

[15] L.A. Zadeh.
Fuzzy Sets.
Information and Control 8 (1965) 338-352.