(21) Zajud.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

JUEGOS EN FORMA EXTENSIVA
CON INFORMACION CASI COMPLETA

T E S I S

Que para obtener el titulo de :

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a :

MARIA GUADALUPE OROZCO OROZCO

México, D.F. 1 9 8 1

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

I N D I C E

INTRODUCCION

El desarrollo de la teoria matemática de los -- juegos, según fue descrita por Von Neuman y Morgenstern, se da en dos pasos principales:

1. La presentación de toda una caracterización formal de un juego general de n personas. Llamada "forma extensiva".
2. La introducción del concepto de estrategia pura, que hace posible una simplificación radical de este esquema reemplazando un juego arbitrario por un determinado prototipo de juego. Esta forma es - llamada "forma normal".

La forma normal esta mejor diseñada para el desarrollo de teoremas generales (e.g. el teorema fundamental de los juegos bipersonales de suma cero), - mientras que la forma extensiva expone las diferencias carácteristicas entre los juegos y los elementos estructutales decisivos que determinan esas diferencias.

En vista de que es posible expresar todos los - juegos en forma extensiva, mientras que solo resulta practico normalizar unos cuantos, parece razonable - el estudio de la forma extensiva de los juegos.

El presente trabajo esta dedicado al estudio de una clase de juegos especiales, los juegos en forma extensiva con información casi completa.

En el Capítulo I se dará una descripción general de los juegos en forma extensiva, con la formalización introducida por H. W. Kuhn (3) con algunas ligeras modificaciones que no cambian radicalmente la formalización original.

El modelo es escencialmente geometrico y se hace referencia al concepto gráfico de árbol. Para no desviarnos del tema central del presente trabajo, no se hace un estudio exaustivo de los árboles, mensionandose unicamente su definición y una de sus propiedades.

En el Capítulo II se introducen los elementos de los juegos en forma extensiva con información casi completa, asi como los juegos estrictamente determinados y algunos otros conceptos relacionados con el tema.

El resultado principal de este capítulo debido a E. N. Vasilescu (8), es la demostración de que un juego finito de n personas con información casi completa, tiene un punto de equilibrio en términos de estrategias puras (juego estrictamente determinado). En la demostración del resultado mencionado se da un camino para encontrar el punto de equilibrio.

Este resultado es una extensión a juegos con información casi completa del dado por Otter R. y por J. Dunne (6) para juegos bipersonales, finitos de suma cero.

N. Dalkey (2) demostró, que [illegible] juego [illegible] información casi completa entonces [illegible] estrict[illegible]te determinado. El inverso de [illegible] con [illegible] pecto a un jugador aún no esta resuelto, sin embargo B. J. Birch (1) probó lo siguiente:

> " Sea K la estructura de un juego completamente inflado cuyos conjuntos de información satisfacen la condición:
>
> Si $U < V$ entonces $V \not< U$.
>
> Si todo juego con estructura K esta estrictamente determinado para el jugador i entonces se cumple la condición de información completa para el jugador i".

E. N. Vasilescu (8) generaliza un poco mas este resultado permitiendo cierto traslape, es decir la hipótesis " si $U < V$ entonces $V \not< U$ " es cambiada por una menos restrictiva:

> " Si $U < V$ y $V < U$ entonces toda jugada en U sigue o es seguida por una jugada en V y lo mismo para toda jugada en V."

En el Capítulo III se enuncia y demuestra el resultado de E. N. Vasilescu.

CAPITULO I

FORMA EXTENSIVA DE LOS JUEGOS

La definición que da la Teoría de Gráficas del concepto de árbol es la siguiente:

" Un árbol es una gráfica conexa sin ciclos".(1)

A partir de esta definición se dan varias propiedades de los árboles y algunas definiciones equivalentes.

Cuando hablemos del "árbol de un juego" asumiremos la definición de árbol dada y con ella todas sus propiedades, añadiendo algunas que nos caracterizarán precisamente el árbol de un juego.

El árbol de un juego denotado por T comienza en un punto llamado O que debe distinguirse del resto de los demas puntos.

Los puntos finales de T serán llamados partidas y en adelante los denotaremos con la letra w, al conjunto de partidas las denotaremos por X y el resto de los puntos serán las jugadas. Al referirnos tanto a las partidas como a las jugadas lo haremos con el nombre de posiciones.

Tratandose de un árbol, dos puntos estan unidos por un único camino. Suponiendo que el árbol T es finito entonces, al camino único que va del punto O a una partida w que también será llamado partida lo denotaremos por $\underline{W}$.

(1) Para mayor profundidad acerca de árboles consultar referencia

Los segmentos que unen una jugada x con posiciones que siguen inmediatamente a x son llamados elecciones. Al número de elecciones de la jugada x lo denotaremos por m(x) y hacemos una biyección entre las elecciones y los enteros positivos 1,2,3,...,m(x) suponiendo $m(x) \geq 1$.

Las posiciones forman un conjunto parcialmente ordenado, mediante el orden parcial denotado por "$<$" (llamado precedencia) definido por: $x < y$ (x precede a y) si existe un camino en T que va del punto O a la posición y el cual pasa por x siendo $x \neq y$.

Usamos la notación $(x,k) < y$ para dar a entender que $x < y$ y el camino del punto O a y que pasa por x se realiza mediante la elección de k en la jugada x. Si U y V son cualesquiera dos conjuntos de posiciones decimos que $U < V$ si existen $x \in U$ y $z \in V$ tales que $x < z$.

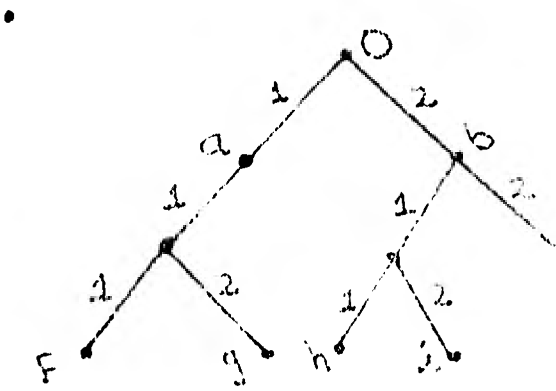
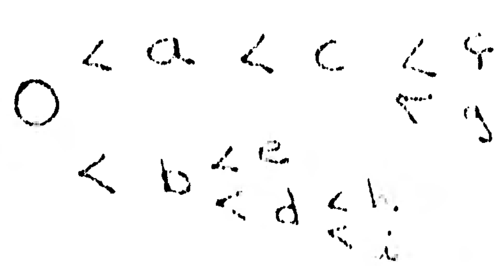


Fig. (1)



Orden Parcial entre Posiciones.

Si tomamos en cuenta los siguientes conjuntos de posiciones $U_1 = \{c, h\}$, $U_2 = \{d, g\}$, $U_3 = \{h, b\}$
Observamos que

1.- como $c < g$ entonces $U_1 < U_2$, ademas $d < h$ y $U_2 < U_1$ sin embargo $U_1 \neq U_2$

2.- Puesto que $b < h$ se tiene que $U_3 < U_3$ es decir un conjunto puede precederse a si mismo.

Teniendo el árbol de un juego T, se tiene un juego en la forma extensiva de n jugadores como sigue:

1) Se hace una partición de las jugadas de T en n+1 conjuntos $P_0, P_1, \ldots, P_n$ donde P_0 contiene todas las jugadas de azar, y P_i contiene las jugadas personales del jugador i, $i = 1, \ldots, n$.

2) Se hace una partición de cada P_i ($i = 1, \ldots, n$) en conjuntos U_1, U_2, ... que llamaremos conjuntos de información los cuales cumplen con:

   a) Todas las jugadas de U tienen el mismo número de elecciones y se denotará por m(U)

   b) U no se precede a si mismo, es decir no sucede que $U < U$

3) Para cada jugada x de P_0 hay una distribución de probabilidad $p(x,k)$ sobre las $m(x)$ elecciones asignandole una probabilidad positiva a cada elección.

4) Cada partida w de X tiene asignado un vector real de n coordenadas llamado función de pago para w denotado por:

$h(w) = (h^1(w), h^2(w), \ldots, h^n(w).)$.

dada una jugada x, se define el conjunto de des cendientes de x, denotandoce $D(x)$, como el conjunto de posiciones z tales que $x < z$. Se define $D(x,k)$ como el conjunto de las z, tales que $(x,k) < z$.

Para algún conjunto U (no necesariamente de información), definimos $D(U) = \bigcup_{x \in U} D(x)$, si U es un conjunto de información $D(U,k) = \bigcup_{x \in U} D(x,k)$.

A partir del árbol dado en la figura 1, se obtendrá un juego en forma extensiva de 2 personas.

$X = \{f,g,h,i,e\}$; $\{0,a,b,c,d\}$ conjunto de jugadas

1.- Partición del conjunto de jugadas

$P_0 = \{0\}$
$P_1 = \{a,b\}$
$P_2 = \{c,d\}$

2.- Partición de P_1 en conjuntos de información

$U_1 = \{a\}$ $U_2 = \{b\}$

Partición de P_2 en conjuntos de información

$V_1 = \{c,d\}$

3.- Distribución de probabilidad en jugadas de P_0 .

$P(0,1) = 1/2$ $P(0,2) = 1/2$

4.- Función de Pago

$h(f) = (h^1(f), h^2(f)) = (1,-1)$
$h(g) = (2,-2)$
$h(h) = (1,-1)$
$h(i) = (-2,2)$
$h(e) = (-1,1)$

Dadas dos posiciones x_1, x_2 definimos la mayor cota inferior $\inf(x_1, x_2)$ como la mayor jugada z tal que $z \leq x_1$, $z \leq x_2$.

Dado cualquier conjunto U definimos $\inf(U)$ como la mayor jugada z tal que $z \leq x \;\; \forall x \in U$.

Definición.-

Una estrategia pura S^i para el jugador i , es una función, que asigna a cada conjunto de información U de P_i un entero positivo denotado por $S^i(U)$ tal que $0 < S^i(U) \leq m(U)$

Para una n-ada $s = (s^1, s^2, \dots, s^n)$ de estratégias puras y dada una distribución de probabilidad $p(x,k)$ para cada x en P_0, denotamos por $p(w,s)$ la probabilidad con que ocurre cada partida w, y asi el pago esperado para el jugador i es:

$$H^i(s) = \sum_w p(w,s)\, h^i(w)$$

supondremos que $H^i(s)$ es la recompensa para el jugador i cuando se usa s.

Para calcular $p(w,s)$, es necesario asignar probabilidad a las elecciones de todas las jugadas y se hará de la siguiente manera:

Si k es una alternativa en una jugada personal del jugador i, la cual pertenece al conjunto de información U, entonces:

$$p_s(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } s^i(U)=k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

con s una n-ada de estrategias puras.

Si k es una alternativa en una jugada de azar entonces:

$$p_s(k) = p(x,k)$$

Por lo tanto se tiene:

$$p(w,s) = \prod_{k \in w} p_s(k)$$

Definición.-

Sea z una posición y s una n-ada de estrategias entonces:

i.- Se dice que z es posible cuando se juega s, si existe una partida w tal que $z \in w$ y $p(w,s) > 0$.

2.- z es posible cuando se juega s^i si existe una n- ada de estrategias, cuya i-ésima componente es s^i tal que z es posible cuando se juega s

3.- B, un conjunto de posiciones, es posible cuando se juega s, si alguna $x \in B$ es posible cuandose juega s, de otro modo B es imposible cuando se juega s.

4.- B, un conjunto de posiciones, es posible cuando se juega s^i, si existe s cuya i- ésima componente es s^i, tal que B es posible cuando se juega s.

Definición.-

Dos estrategias puras del jugador i, s^i, s'^i son equivalentes, si y solo si el conjunto de posiciones posibles cuando se juega s^i es igual al conjunto de posiciones posibles cuando se juega s'.

Dos estrategias equivalentes determinan la misma probabilidad sobre cualquier partida y no afectan el pago esperado. Usaremos el término estrategia pura, para referirnos a una clase de estrategias puras --- equivalentes.

Supongamos que en un juego G, U es conjunto de información del jugador i y $B \subset U$. Se dice que B esta aislado en U si para toda s^i tal que B es posible cuando se juega s^i se tiene que $U - B$ es imposible cuando se juega s^i. De la definición se sigue claramente que si B esta aislado en U entonces $U - B$ también esta aislado en U.

Definición.-

Una estrategia mixta para el jugador i, es una distribución de probabilidad sobre sus estrategias puras.

Si numeramos las estrategias puras del jugador i de 1 a b(i), entonces σ^i puede considerarse como un vector con b(i) componentes no-negativas σ^i_j tales que

$$\sum_{j=1}^{b(i)} \sigma^i_j = 1$$

Dada una n-ada σ de estrategias mixtas una para cada jugador, el pago esperado para el jugador i, esta dado por:

$$H^i(\sigma)=\sum_{j_1=1}^{b(1)}\sum_{j_2=1}^{b(2)}\cdots\sum_{j_n=1}^{b(n)} H^i(s^1_{j_1}, s^2_{j_2}, \dots, s^n_{j_n})\,\sigma^1_{j_1}\cdot\sigma^2_{j_2}\cdots\sigma^n_{j_n}$$

Dada una n-ada σ de estrategias mixtas y una estrategia mixta π^i, la notación σ/π^i, denota la n-ada de estrategias que coincide con σ para todos los jugadores diferentes de i y cuya i-ésima componente es π^i.

La siguiente definición fue dada por Nash.

Definición.-

Una n-ada σ de estrategias mixtas es un punto de equilibrio, si $H^i(\sigma) \geq H^i(\sigma/\pi^i)$ para toda σ^i y para cada jugador i.

El siguiente teorema fue demostrado por Nash.

TEOREMA:

Todo juego finito tiene un punto de equilibrio en términos de estrategias mixtas.

La demostración se encuentra en el apéndice.

Definición.-

Dos juegos G y G' son equivalentes si son idénticos excepto por la partición de los conjuntos de jugadas personales, que define los conjuntos de información, y si hay correspondencia entre las n-adas de estrategias puras s de G y las s' de G' de tal forma que $p(w,s)=p(w',s')$ donde s' corresponde a s.

La correspondencia mencionada en la definición debe ser uno a uno. Es fácil ver que la relación " equivalencia de juegos ", es una relación de equivalencia.

Si G y G' son juegos equivalentes, un punto de equilibrio de G corresponde a un punto de equilibrio de G', y si cualquier jugador tiene un punto de equilibrio en términos de estrategias puras en G entonces tiene un punto de equilibrio en términos de estrategias puras en G'.

Para finalizar el presente capitulo desarrollaremos los conceptos dados en el ejemplo que se encuentra en la pag. 7 (figura 1)

Estrategias puras del jugador 1.

$s^1_m : \{ U_1 , U_2 \} \longrightarrow \{ 1,2 \}$

$0 < s^1_m (U_1) \leq 1$; $0 \leq s^1_m (U_2) \leq 2$

$s^1_1 (U_1) = 1$; $s^1_1 (U_2) = 1$

$s^1_2 (U_1) = 1$; $s^1_2 (U_2) = 2$

Estrategias puras del jugador 2.

$s^2_m : \{ V_1 \} \longrightarrow \{ 1,2 \}$

$0 \leq s^2_m (V_1) \leq 2$

$s^2_1 (V_1) = 1$

$s^2_2 (V_1) = 2$

ninguno de los jugadores tiene estrategias equivalentes.

Los pagos esperados cuando los jugadores usan sus distintas estrategias son:

$$H^1(s_1^1, s_1^2) = 1 \; ; \quad H^2(s_1^1, s_1^2) = -1$$
$$H^1(s_1^1, s_2^2) = 0 \; ; \quad H^2(s_1^1, s_2^2) = 0$$
$$H^1(s_2^1, s_1^2) = 0 \; ; \quad H^2(s_2^1, s_1^2) = 0$$
$$H^1(s_2^1, s_2^2) = 1/2 \; ; \quad H^2(s_2^1, s_2^2) = 1/2$$

Como ambos jugadores tiene dos estrategias puras distintas, sus estrategias mixtas son vectores de dos componentes.

Una estrategia mixta para el jugador 1 es

$$\sigma^1 = (\sigma_1^1, \sigma_2^1) = (1/3, 2/3)$$

donde 1/3 es la probabilidad con que el jugador 1 jugará la estrategia s_1^1 y 2/3 la probabilidad con que jugará s_2^1 .

Una estrategia mixta para el jugador 2 es:

$$\sigma^2 = (\sigma_1^2, \sigma_2^2) = (1/3, 2/3)$$

donde 1/3 es la probabilidad con que 2 jugará s_1^2 y 2/3 la probabilidad con que jugará s_2^2 .

Considerando $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$, y

$$H^i(\sigma) = \sum_{j_1=1}^{2} \sum_{j_2=1}^{2} H^i(s_{j_1}^1, s_{j_2}^2)\, \sigma_{j_1}^1 \sigma_{j_2}^2$$

se tiene $H^1(\sigma) = 1/3$ y $H^2(\sigma) = -1/3$

Veremos ahora que σ es un punto de equilibrio.

Pd. $H^i(\sigma) \geq H^i(\sigma/\pi^i)$ $\forall\, \pi^i$ estrategia mixta del jugador i y $\forall\, i$.

Pd. i) $H^1(\sigma) \geq H^1(\sigma/\pi^1)$ $\forall\, \pi^1$ estrategia del jugador 1

ii) $H^2(\sigma) \geq H^2(\sigma/\pi^2)$ $\forall\, \pi^2$ estrategia del jugador 2

i) $H^1(\sigma) = 1/3$

$(\sigma/\pi^1) = (\pi^1, \sigma^2)$

$\pi^1 = (\sigma_1^1, \sigma_2^1) = (x, 1-x) \quad 0 \leq x \leq 1$

$\sigma^2 = (\sigma_1^2, \sigma_2^2) = (1/3, 2/3)$

como $H^i(s_1^1, s_2^2) = H^i(s_2^1, s_1^2) = 0 \quad i = 1,2$ entonces

$H^1(\sigma/\pi^1) = 1/3(x) + 1/3(1-x) = 1/3$

$\therefore H^1(\sigma/\pi^1) = 1/3 = H^1(\sigma) \quad \forall \pi^1$

ii) $(\sigma/\pi^2) = (\sigma^1, \pi^2)$

$\sigma^1 = (1/3, 2/3)$

$\pi^2 = (x, 1-x) \quad 0 \leq x \leq 1$

$H^2(\sigma/\pi^2) = (-1/3)x - (1/3)(1-x) = -1/3$

$\therefore H^2(\sigma/\pi^2) = -1/3 = H^2(\sigma) \quad \forall \pi^2$

$\therefore \sigma$ es un punto de equilibrio.

En toda la descripción del ejemplo que nos ocupa, no mencionamos en que consiste el juego, es decir el análisis hecho es válido para cualquier juego cuya forma sea la que estudiamos. Variando la función de pago obtenemos mayor variedad de juegos, aunque el equilibrio no sea el mismo, sin embargo por el teorema de Nash el equilibrio existirá.

CAPITULO II

INFORMACION CASI COMPLETA E INFLACION

¿Qué se entenderá por un juego de información casi completa?

Para dar respuesta a esta pregunta, se necesitarán algunas definiciones que se darán a continuación.

Definición.-

Dados dos conjuntos de información U, V se dice que V traslapa a U si $U < V$ sin que $V \subseteq D(U,k)$ para alguna k.

Cuando se habla del concepto de traslapar se involucran únicamente conjuntos de información y como estos no se preceden a si mismos, entonces un conjunto de información no se traslapa consigo mismo.

En un juego, el jugador i tiene información completa sobre el jugador j, si ningún conjunto de información del jugador i traslapa algún conjunto de información del jugador j; y ningún conjunto de información del jugador j traslapa alguno del jugador i.

Definición.-

Un juego tiene información casi completa si todo jugador tiene información completa sobre sus oponentes.

El ejemplo dado en el capítulo I no es un juego de información casi completa pues V_1 traslapa a U_2.

A continuación daremos un ejemplo de un juego - con información casi completa.

En todos los ejemplos que se ilustran, las jugadas que pertenecen a un mismo conjunto de información estan encerradas por una curva punteada, y a un lado de la curva se escribe el número del jugador al cual pertenece el conjunto de información.

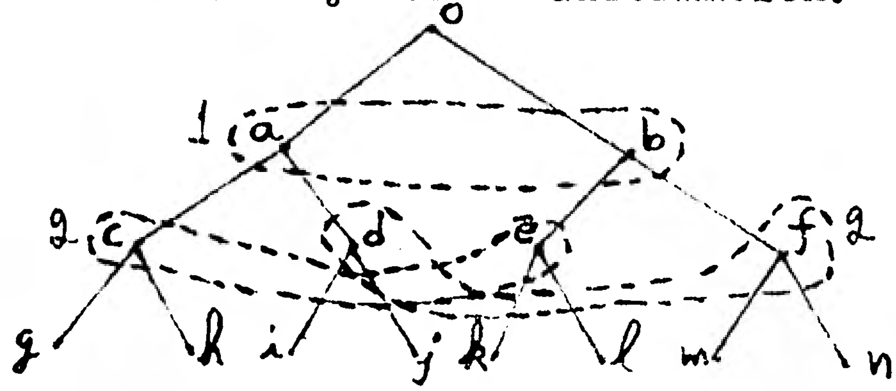


Fig. (2)

$X=\{g,h,i,j,k,l,m,n\}$

Conjunto de jugadas $\{a,b,c,d,e,f,o\}$

Partición del conjunto de jugadas.

$P_0=\{o\}$; $P_1=\{a,b\}$; $P_2=\{c,d,e,f\}$

Conjuntos de información del jugador 1

$U=\{a,b\}$

Conjuntos de información del jugador 2

$V_1=\{c,e\}$; $V_2=\{d,f\}$

Como $a<o$ entonces $U<V_1$ y como $D(U,1)=\{c,e\}$ se tiene que $V_1\subset D(U,1)$

$\therefore$ V_1 no traslapa a U.

De la misma forma se puede ver que V_2 no traslapa a U y siendo que V_1 y V_2 no preceden a U entonces U no traslapa a V_1 ni a V_2 de donde cada jugador tiene información completa sobre sus oponentes.

Por lo tanto este es un juego con información casi completa.

Un juego tiene información perfecta, si todo conjunto de información consta de una sola jugada (es decir, todos los jugadores tienen información completa sobre las jugadas pasadas de sus oponentes, memoria completa sobre sus jugadas pasadas y completo conocimiento sobre la naturaleza de las jugadas pasadas).

Definición.-

Sean G y G' dos juegos que difieren únicamente en que un conjunto de información U de G esta dividido en dos conjuntos de información V_1, V_2 para el mismo jugador en G' y tanto V_1 como V_2 estan aislados en U. Entonces G' es llamado una <u>inflación inmediata</u> de G.

Un juego que no tiene inflaciones inmediatas se dice que esta completamente inflado.

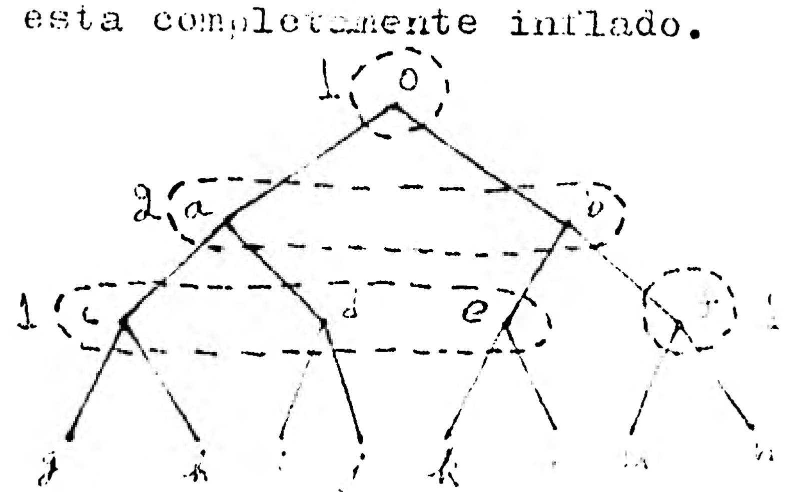


Fig. (3)

Conjuntos de información del jugador 1.

$U_1 = \{o\}$ $U_2 = \{c, d, e\}$ $U_3 = \{f\}$

Conjunto de información del jugador 2.

$V = \{a, b\}$

Nota.-

En este juego, al presentarsele al jugador 1 su segunda jugada olvida la elección que hizo en su primer jugada.

Estrategias puras del jugador 1.

$\{s^1_1(U_1)=1,\quad s^1_1(U_2)=1,\quad s^1_1(U_3)=1\}$

$\{s^1_2(U_1)=1,\quad s^1_2(U_2)=2,\quad s^1_2(U_3)=1\}$

$\{s^1_3(U_1)=2,\quad s^1_3(U_2)=1,\quad s^1_3(U_3)=1\}$

$\{s^1_4(U_1)=2,\quad s^1_4(U_2)=2,\quad s^1_4(U_3)=1\}$

$\{s^1_5(U_1)=1,\quad s^1_5(U_2)=1,\quad s^1_5(U_3)=2\}$

$\{s^1_6(U_1)=1,\quad s^1_6(U_2)=2,\quad s^1_6(U_3)=2\}$

$\{s^1_7(U_1)=2,\quad s^1_7(U_2)=1,\quad s^1_7(U_3)=2\}$

$\{s^1_8(U_1)=2,\quad s^1_8(U_2)=2,\quad s^1_8(U_3)=2\}$

Estrategias puras del jugador 2.

$s^2_1(V_1)=1 \qquad s^2_2(V_2)=2$

Sea $B=\{e\}\subset U_2$. Cuando se juega s^1_1 o s^1_5, B es imposible ya que las partidas w tales que $e\leq w$ son: k y l ; además se tiene que si $s_1=(s^1_1, s^2_1)$ o $s_1=(s^1_5, s^2_1)$ y $s_2=(s^1_1, s^2_2)$ o $s_2=(s^1_5, s^2_2)$ entonces $p(k,s_1)=0 \quad p(k,s_2)=0 \quad p(l,s_1)=0 \quad p(l,s_2)=0$ y e es la única jugada de B. Se obtiene lo mismo para s^1_2 o s^1_6.

Cuando se juega s^1_3 o s^1_7 con $s_1=(s^1_3, s^2_1)$ o $s_1(s^1_7, s^2_1)$; $p(k,s_1)=1$

$\therefore$ B es posible cuando se juega s^1_3 o s^1_7.

Cuando se juega s^1_4 o s^1_8 y $s=(s^1_4, s^2_1)$ o $s=(s^1_8, s^2_1)$ se tiene que $p(1,s)=1\geq 0$.

$\therefore$ B es posible cuando se juega s^1_4 o s^1_8.

$U_2-B=\{c,d\}$. Las partidas que preceden c son g, h y las que preceden d son i, j.

Considerando:

$s_1 = (s_3^1, s_1^2)$ o $s_1 = (s_7^1, s_1^2)$

$s_2 = (s_3^1, s_2^2)$ o $s_2 = (s_7^1, s_2^2)$

$s_3 = (s_4^1, s_1^2)$ o $s_3 = (s_8^1, s_1^2)$

$s_4 = (s_4^1, s_2^2)$ o $s_4 = (s_8^1, s_2^2)$

Cuando se juega s_3^1 o s_7^1

$p(g,s_1) = p(h,s_1) = p(i,s_1) = p(j,s_1) = 0$

$p(g,s_2) = p(h,s_2) = p(i,s_2) = p(j,s_2) = 0$

Cuando se juega s_4^1 o s_8^1

$p(g,s_3) = p(h,s_3) = p(i,s_3) = p(j,s_3) = 0$

$p(g,s_4) = p(h,s_4) = p(i,s_4) = p(j,s_4) = 0$

de aquí que $U_2 - B$ es imposible cuando se juegan -- s_3^1, s_7^1, s_4^1 y s_8^1.

$\therefore$ B esta aislado en U_2.

Observese que $U_2 - B$ también esta aislado en U_2.

El juego aquí descrito tiene varias estrategias equivalentes, concentremos nuestra atención en las - estrategias s_1^1 y s_5^1, las posiciones posibles cuando se juega s_1^1 son: $\{o, a, c, d, g, i\}$ y las posiciones posibles cuando se juega s_5^1 son: $\{o, a, c, d, g, i\}$.

$\therefore$ la estrategia s_1^1 es equivalente a la s_5^1.

De la misma manera podemos ver que s_2^1 es equivalente a s_5^1.

Haciendo un mayor análisis de las estrategias, se llega a la conclución de que escencialmente existen 6 estrategias puras, cuyos representantes son:

s_1^1, s_2^1, s_3^1, s_4^1, s_7^1 y s_8^1.

Como en el presente juego G, existe un conjunto - de información que contiene un subconjunto aislado, - el juego tiene una inflación [illegible]. A continuación describiremos el juego G' que es una inflación -

inmediata del juego anterior G.

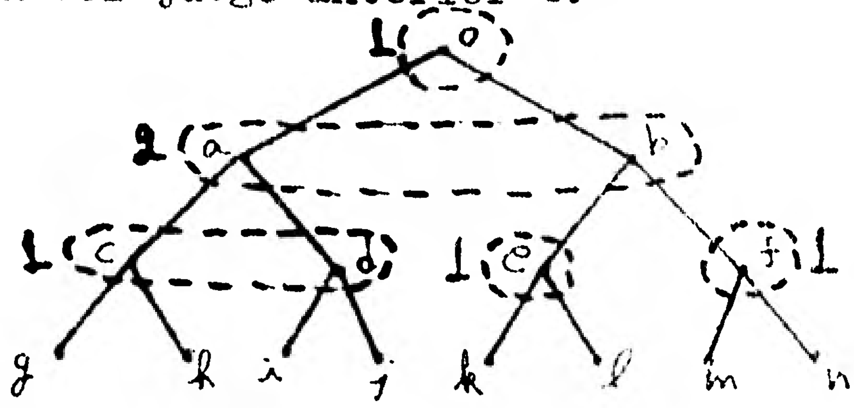


Fig. (4)

Conjuntos de información del jugador 1

$U_1' = \{o\}$ $U_2' = \{c, d\}$ $U_3' = \{e\}$ $U_4' = \{f\}$

Conjunto de información del jugador 2

$V_1' = \{a, b\}$

Obsérvese que $U_2 = U_2' \cup U_3'$ y tanto U_2' como U_3' ---- estan aislados en U_2.

$\therefore$ Este juego es una inflación inmediata del juego G, pues lo único que ha cambiado es la partición de los conjuntos de información.

Analizando el juego G' vemos que ya no tiene inflaciones inmediatas, ya que:

$B = \{a\} \subset V_1'$ no esta aislado en V_1' y $B_2 = \{c\}$ tampoco esta aislado en U'.

$\therefore$ G' es un juego completamente inflado.

A continuación mostraremos que los juegos G y G' son equivalentes.

Estrategias puras del jugador 1

Para abreviar notación representaremos cada estrategia como un vector de cuatro coordenadas donde, la primer coordenada representa la elección hecha en U_1', la segunda la hecha en U_2', la tercera en U_3' y la cuarta coordenada la hecha en U_4'. Siguiendo esta notación se tiene :

$R'_1=(1,1,1,1)$; $R'_2=(1,1,1,2)$; $R'_3=(1,1,2,1)$; $R'_4=(1,1,2,2)$
$R'_5=(1,2,1,1)$; $R'_6=(1,2,1,2)$; $R'_7=(1,2,2,1)$; $R'_8=(1,2,2,2)$
$R'_9=(2,1,1,1)$; $R'_{10}=(2,1,1,2)$; $R'_{11}=(2,1,2,1)$; $R'_{12}=(2,1,2,2)$
$R'_{13}=(2,2,1,1)$; $R'_{14}=(2,2,1,2)$; $R'_{15}=(2,2,2,1)$; $R'_{16}=(2,2,2,2)$

En este juego existen estrategias equivalentes, analizandolo se encuentra que:

$R'_1 \cong R'_2 \cong R'_3 \cong R'_4$; $R'_9 \cong R'_{13}$; $R'_{12} \cong R'_{16}$
$R'_5 \cong R'_6 \cong R'_7 \cong R'_8$; $R'_{10} \cong R'_{14}$; $R'_{11} \cong R'_{15}$

$\therefore$ Hay seis clases de equivalencia, es decir escencialmente son seis estrategias puras, y tomaremos como representantes las siguientes:

$R'_1=(1,1,1,1)$; $R'_5=(1,2,1,1)$; $R'_9=(2,1,1,1)$; $R'_{10}=(2,1,1,2)$
$R'_{11}=(2,1,2,1)$; $R'_{12}=(2,1,2,2)$

Estrategias puras del jugador 2

$R^2_1(V'_1)=1$; $R^2_2(V'_2)=2$

La correspondencia entre las parejas de estrategias puras del juego G y las del juego G' es:

$s_1=(s^1_1, s^2_1) \longrightarrow R_1=(R'_1, R^2_1)$
$s_2=(s^1_1, s^2_2) \longrightarrow R_2=(R'_1, R^2_2)$
$s_3=(s^1_2, s^2_1) \longrightarrow R_3=(R'_5, R^2_1)$
$s_4=(s^1_2, s^2_2) \longrightarrow R_4=(R'_5, R^2_2)$
$s_5=(s^1_3, s^2_1) \longrightarrow R_5=(R'_9, R^2_1)$
$s_6=(s^1_3, s^2_2) \longrightarrow R_6=(R'_9, R^2_2)$
$s_7=(s^1_4, s^2_1) \longrightarrow R_7=(R'_{11}, R^2_1)$
$s_8=(s^1_4, s^2_2) \longrightarrow R_8=(R'_{11}, R^2_2)$
$s_9=(s^1_5, s^2_1) \longrightarrow R_9=(R'_{10}, R^2_1)$
$s_{10}=(s^1_5, s^2_2) \longrightarrow R_{10}=(R'_{10}, R^2_2)$
$s_{11}=(s^1_6, s^2_1) \longrightarrow R_{11}=(R'_{12}, R^2_1)$
$s_{12}=(s^1_6, s^2_2) \longrightarrow R_{12}=(R'_{12}, R^2_2)$

Definición.-

La estructura de un juego estará <u>estrictamente-determinada para el jugador i,</u> si existe una n-ada - de estrategias en equilibrio en la que la estrate-gia utilizada por el jugador i es una estrategia pu-ra, en este caso se dice que el jugador i tiene un - punto de equilibrio en términos de estrategias puras sea cual fuere el pago.

Definición.-

La estructura de un juego estará <u>estrictamente-determinada</u>, si lo esta para cada jugador.

Observación:

La definición de punto de equilibrio se da pa-ra estrategias mixtas. Una estrategia pura s^i del ju gador i, puede verse como una estrategia mixta σ^i, - siendo 1 la probabilidad con que el jugador i juega su estrategia s^i y cero cuando se trata de otra es--trategia. De esta forma la estrategia mixta --- $\sigma^i=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ representa a una estrategia-pura.

Lema 2.1

Sea G un juego y U un conjunto de información - del jugador i. El conjunto $B\subset U$ esta aislado en U, - si y solo si $\forall$ $x\in B$ y $\forall$ $y\in U-B$ existe un conjunto - de información V del jugador i tal que $x \in D(V,k_1)$ & $y\in D(V,k_2)$ con $k_1\neq k_2$.

Demostración:

Suficiencia.

Supongamos que B no esta aislado en U, entonces existen s^i estrategia pura del jugador i y [illegible] -

x, y con $x \in B$, $y \in U-B$ tales que tanto x como y son posibles cuando se juega s^{i} esto implica que existen partidas w, w' y estrategias s, s' cuyas i-ésimas componentes son s^{i} tales que $x < w$, $y < w'$, $p(w,s) > 0$ y $p(w',s') > 0$.

Por hipótesis, existe V conjunto de información del jugador i tal que $x \in D(V,k_1)$ & $y \in D(V,k_2)$. Como $p(w,s) > 0$ entonces $s^{i}(V)=k_1$ ya que $x < w$, pero por otro lado $p(w',s') > 0$ pues $y < w'$ lo que implica que $s^{i}(V)=k_2$, como $k_1 \neq k_2$ se contradice la definición de estrategia.

$\Longrightarrow p(w,s)=0$ ó $p(w',s')=0$

$\therefore$ B esta aislado en U

Necesidad.

Si para alguna $x \in B$ y alguna $y \in U-B$ la condición no se cumple entonces, si x es posible cuando se juega s^{i} & y es posible jugando s'^{i}, definimos $s_1'^{i}$ como la estrategia identica a s^{i} sobre los conjuntos de información que preceden a x e igual a s'^{i} en otro caso. Ambos x, y son posibles cuando se juega $s_1'^{i}$.

TEOREMA 2.1

Un juego G tiene como inflación completa un juego de información perfecta si y solo si toda partición de cualquier conjunto de información de G nos lleva a conjuntos aislados.

Demostración:

Necesidad.

Sea U un conjunto de información del jugador i tal que existe $B \in U$ y B no esta aislado en U. Por el lema 2.1 se tiene que:

(1) Existen $x \in B$ & $y \in U-B$ tales que para todo -- conjunto de información V del jugador i, si $x \in D(V,k_1)$ & $y \in D(V,k_2)$ entonces $k_1=k_2$.

Por otra parte supongase que para una cierta sucesión de inflaciones de G, la cual nos lleva a la - inflación completa de G, existe una inflación G' de G y un conjunto de información U' del jugador i en-- G' tal que tanto x como y pertenecen a U' y existe - un conjunto aislado B' de U' tal que $x \in B'$ & --- $y \in U'-B'$. Por el lema 2.1 se tiene que:

(2) Existe un conjunto de información V' del jugador i en G' tal que $x \in D(V',k_1')$ & ---- $y \in D(V',k_2')$ con $k_1' \neq k_2'$.

Como G' es una inflación de G existe un conjunto de información V^* de G el cual contiene a V'. Ya que los descendientes de V' estan contenidos en los de V^*, entonces se cumple (2) con V^* reemplazando a V', es decir se cumple que existe un conjunto de información V^* del jugador i tal que $x \in D(V^*,k_1)$ & --- $y \in D(V^*,k_2)$ con $k_1 \neq k_2$. Lo cual contradice lo afirmado en (1).

Por lo tanto lo afirmado en (2) es falso, de -- aqui que no existe una inflación de G tal que x & y sean miembros de diferentes conjuntos de información. Esto quiere decir que la inflación completa de G tiene un conjunto de información con al menos dos elementos.

.˙. Este no es un juego de información perfecta.

Suficiencia.

Supongase que la inflación completa de G contie ne un conjunto de información U' con al menos dos miembros diferentes $x,y \in U'$ & $x \neq y$. Entonces existe un único U en G tal que $U' \subset U$.

Si U es un conjunto de información del jugador i, sea B cualquier subconjunto de U tal que $x \in B$ & $y \in U-B$. Por hipótesis B esta aislado, de aqui que por el lema 2.1, existe un conjunto de información V del jugador i, tal que $x \in D(V,k_1)$ & $y \in D(V,k_2)$ siendo $k_1 \neq k_2$.

Si mostramos que inf(x,y) es una jugada del jugador i entonces, por el lema 2.1 se tiene que:

Si $x \in B$ & $y \in U-B$ donde $\{x,y\} \subset U$, U conjunto de información en la inflación completa de G; entonces existe un conjunto de información U^* en la inflación completa de G (U^* es el conjunto de información al cual pertenece el inf(x,y)) tal que $x \in D(U^*,k_1)$ & $y \in D(U^*,k_2)$ con $k_1 \neq k_2$ lo cual implica que B esta aislado en U. De aqui que este juego se puede inflar lo cual es una contradicción, pues un juego completamente inflado ya no puede inflarse.

$\therefore$ La inflación completa de G es de información perfecta.

Lo que debemos probar es que el inf(x,y) es una jugada del jugador i, lo cual se hará a continuacion.

Si existe una jugada z en V tal que $(z,k_1) < x$ & $(z,k_2) < y$ entonces, $\inf(x,y) = z$ ya que siendo $k_1 \neq k_2$ no existe algun $z_0 > z$ tal que $z_0 < x$ & $z_0 < y$.

Si no existe la z en V, entonces deben existir $x_1, y_1 \in V$ $x_1 \neq y_1$ tales que $(x_1,k_1) < x$ & $(y_1,k_2) < y$, $k_1 \neq k_2$. Por hipótesis cualquier partición de V produce conjuntos aislados. Sea B' un subconjunto de V tal que $x_1 \in B'$ & $y_1 \in V-B'$; aplicando nuevamente el lema 2.1, se tiene que existe un conjunto de información V' del jugador i, tal que $x_1 \in D(V', k_1')$ & $y \in D(V', k_2')$ con $k_1' \neq k_2'$.

Si existe $z' \in V'$ tal que $(z', k_1') < x$ y $(z', k_2') < y_1$ entonces $z' = \inf(x,y)$, de otra forma existen x_2, y_2 en V' , $x_2 \neq y_2$ tales que $(x_2, k_1') < x_1$ & (y_2, k_2') y & se repite lo mismo para x_1, y_1 .

El proceso anterior, puede repetirse en cualquier estado a menos que $\inf(x,y)$ sea una jugada del jugador i. Sin embargo, ya que el árbol del juego tiene una altura finita, podemos aplicar el procedimiento solo un número finito de veces.

$\therefore$ $\inf(x,y)$ tiene que ser una jugada del jugador i. Esto completa la demostración.

Observación:

Si un juego G tiene información casi completa y no tiene jugadas de azar entonces la inflación completa de G es un juego de información perfecta.

Para el siguiente teorema, necesitaremos antes de algún material sobre descomposición de juegos.

Dado cualquier juego, consideremos un conjunto B de cualesquiera jugadas personales, el cual satisface las siguientes propiedades:

(1) Cualquier conjunto de información U tal que su intersección con $B \cup D(B)$ es distinta del vacío, debe estar completamente contenido en $B \cup D(B)$; es decir, si $U \cap (B \cup D(B)) \neq \emptyset$ entonces $U \subset B \cup D(B)$, $\forall$ U conjunto de información.

(2) Si V es un conjunto de información el cual precede a B, entonces $B \subset D(V,k)$ para alguna k.

Entonces se dice que el conjunto B forma la base de un subjuego G_B.

Ahora se puede definir el subjuego G_B.

Las jugadas y partidas de G_B, son las jugadas y partidas de $B \cup D(B)$, y posiblemente una jugada de azar O_B la cual precede a las demas jugadas. (La jugada O_B es necesaria si B no es una sola jugada). Las elecciones en O_B conducen a varias jugadas x en B con probabilidad $p(x,B)$:

$$p(x,B) = \frac{p(x,s)}{\sum_{x \in B} p(x,s)}$$

para cualquier estrategia s para la cual B es posible. La definición de $p(x,B)$ no depende de s.

Para cualquier n-ada de estrategias s de G para la cual B es posible se puede obtener una n-ada s_B de estrategias puras de G_B restringiendo s a las jugadas de $B \cup D(B)$ y para cualquier s_B podemos definir el pago esperado $H^i(s_B)$ para el juego G_B:

$$H^i(s_B) = \sum_{w \in \underline{W}(s_B)} p(w,B)\, h^i(w)$$

donde $\underline{W}(s_B) = \{ w \;/\; w \in D(B) \text{ y ademas si } y \in B \;\&\; (y,k) < w \text{ entonces } s_B(y) = k \}$

Una justificación para llamar a G_B un subjuego, es que B aisla una cierta porción de G, y ningún conjunto de información intersecta tanto a $B \cup D(B)$ y al resto del árbol.

Ejemplo:

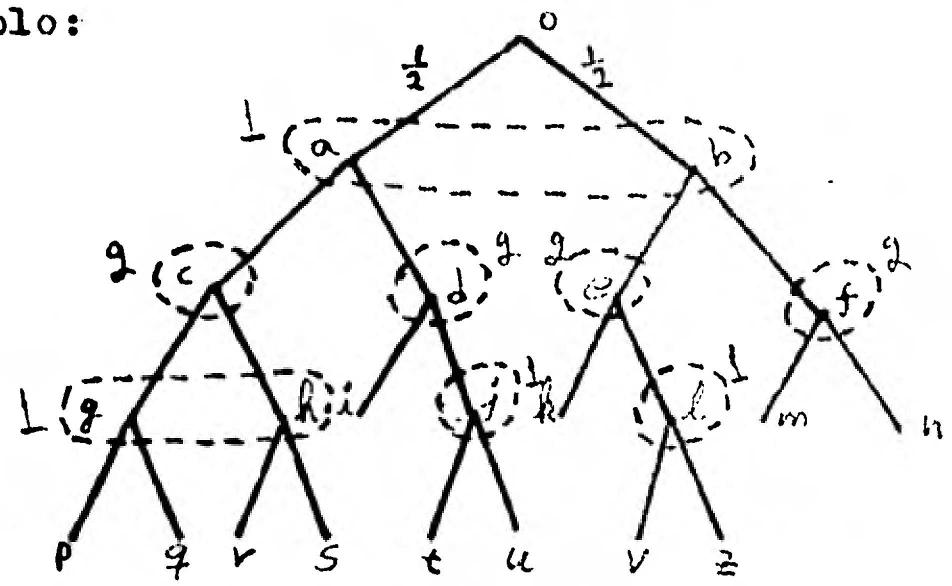


Fig. (5)

Conjuntos de información del jugador 1.

$U_1=\{a,b\}$, $U_2=\{g,h\}$, $U_3=\{j\}$, $U_4=\{l\}$

Conjuntos de información del jugador 2.

$V_1=\{c\}$, $V_2=\{d\}$, $V_3=\{e\}$, $V_4=\{f\}$

Consideremos el conjunto de jugadas $B=\{c,e\}$. Como se tiene que $B\cup D(B)=\{c,e,g,h,k,l,p,q,r,s,v,z\}$, claramente B forma la base de un subjuego.

Como B consta de dos puntos es necesaria la jugada de azar O_B y se tiene:

$$p(c,B)=\frac{1}{2} \qquad p(e,B)=\frac{1}{2}$$

Si **K** es la estructura del juego G, entonces G_B corresponde a una subestructura K_B y cualquier base en **K** definirá una subestructura K_B.

Dada una estructura K y una subestructura K_B, podemos obtener la estructura diferencia $K-K_B$ borrando todas las jugadas de $D(B)$ de K, y reemplazando las jugadas de B por partidas. Diremos que K está descompuesta en las componentes K_B y $K-K_B$.

Definición.-

Se dice que una estructura <u>K no puede descomponerse</u>, si no existe una subestructura K_B tal que tanto K_B como $K-K_B$ contengan por lo menos una jugada personal.

Definición.-

Dos conjuntos de información <u>U, V estan conectados</u> si existe una sucesión de conjuntos de información $W_0, W_1, \ldots, W_m$ tales que $U=W_0$ y $W_m=V$ y para cada i se tiene que $W_i \leq W_{i+1}$ & $W_{i+1} \notin D(W_i, k)$ para alguna k. o bien $W_{i+1} \leq W_i$ y $W_i \notin D(W_{i+1}, k)$ para alguna k.

Fácilmente puede verse que la relación "estar conectado" es una relación de equivalencia que induce una partición en clases de equivalencia, las cuales denotaremos por C.

Si C es una clase de equivalencia entonces, consideresen los conjuntos $\sum C = \{x \,/\, \exists\ U \in C \ \&\ x \in U\}$ y $B(C) = \{x \,/\, x \in \sum C \ \&$ no existe $y \in \sum C \ni y < x\}$, es decir $B(C)$ consiste de los puntos minimos de $\sum C$.

TEOREMA 2.2.

Si C es una clase de equivalencia entonces $B(C)$ es la base de un subjuego.

Demostración:

(1) Por demostrar que sí $U \cap (B(C) \cup D(B(C))) \neq \emptyset$ entonces $U \subset B(C) \cup D(B(C))$ para todo conjunto de información U.

Sea U cualquier conjunto de información personal tal que $U \geq B(C)$, entonces existe un camino $\underline{\partial}$ que intersecta tanto a U como a $B(C)$. Sea $\underline{\partial}$ que intersecta a $B(C)$ en V.

Si $U \not\subset D(V,k)$ para alguna k, entonces U esta conectado con V por lo que se tiene $U \in C$.

Todo camino $\underline{W}$ que intesecta a U intersecta a B(C).

Si $U < D(V,k)$ para alguna k entonces todo camino $\underline{W}$ que intersecta a U intersecta a $B(C)$.

$\therefore$ $U \subset B(C) \cup D(B(C))$, de donde (1) se cumple.

(2) Por demostrar que sí $B(C) > U$ entonces $B(C) \subset D(U,k)$ para alguna k y para todo conjunto de información.

Sea $U < B(C)$, como $B(C)$ consiste de los puntos mínimos, se tiene que $U \notin C$, entonces existe un camino $\underline{W}$ que intersecta a U y a $B(C)$ digase en el punto $x \in V \in C$, de aqui que $V \subset D(U,k)$ para alguna k, de otro modo $U \in C$. Sea V' cualquier otro conjunto de información en $B(C)$ entonces por hipótesis, V & V' estan conectados, es decir existen conjuntos de información $V_1, V_2, \ldots, V_m$ tales que $V_j \leq V_{j+1}$ y $V_{j+1} \not\subset D(V_j,k)$ para alguna k o que $V_{j+1} \leq V_j$ y $V_j \not\subset D(V_{j+1},k)$ para alguna k; con $V=V_1$ y $V'=V_m$ Se demostrará que si $V_j \subset D(U,k)$ para alguna k, entonces $V_{j+1} \subset D(U,k)$ para la misma k. De esta manera ya que $V=V_1 \subset D(U,k)$ entonces se llegará a que $V'=V_m \subset D(U,k)$.

Supongase que $V_j \subset D(U,k)$.

Por la propiedad de los V_i se tiene que existe $\underline{W}_0$ que intersecta a V_j y a V_{j+1}, siendo que $V_j \subset D(U,k)$ todo $\underline{W}$ que intersecta a V_j intersecta a U, en particular $\underline{W}_0$ de aqui que $\underline{W}_0$ intersecta tanto a V_{j+1} como a U. Como $U < B(C)$ entonces $U \not\subset D(V_{j+1},k')$ $\forall k'$, si $V_{j+1} \not\subset D(U,k')$ $\forall k'$, entonces $U \in C$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $V_{j+1} \subset D(U,k')$ y $k=k'$ ya que se supuso que W_0 sigue la k-ésima alternativa en U, de aqui que existe k tal que: $\forall\, V \subset C,\ V \subset D(U,k)$.

$\therefore\ B(C) \subset D(U,k)$

Esto completa la demostración.

LEMA 2.2

Si G es un juego con información casi completa y C es una clase de equivalencia, entonces C esta -- compuesta por conjuntos de información de un solo jugador, digamos i.

Demostración:

Sea $V \in C$, V conjunto de información del jugador i. Consideremos $U \in C$ otro conjunto de información -- $V \neq U$. Por hipótesis V y U estan conectados por una sucesión $W_0, \ldots, W_m$.

Sea U_i la familia de conjuntos de información - del jugador i.

Si $W_i \in U_i$ entonces $W_{i+1} \in U_i$ pues de lo contrario, ya que el juego es de información casi completa se - tendría que $W_i \subset D(W_{i+1},k)$ ó $W_{i+1} \subset D(W_i,k)$ y esto implica que $W_{i+1} \notin C$ lo cual no es posible.

Fue demostrado por Dalkey que la estructura de un juego no puede descomponerse, si y solo si todo - par de conjuntos de información estan conectados. Esta afirmación es una consecuencia del teorema 2.2

La estructura de un juego puede descomponerse - en componentes que ya no admiten descomposición, la descomposición es única y conduce a un árbol de subestructuras. Si una estructura tiene información casi completa, la misma verdad se tiene para sus subestructuras.

Sabemos que (*) para un juego finito bipersonal de suma cero con información perfecta, puede encontrarse una solución borrando las estrategias dominadas, y las posiblemente duplicadas. Se extenderá este resultado a juegos de n personas con información casi completa.

Antes del teorema que extenderá el resultado mencionado, se deben definir algunos conceptos los cuales serán utilizados para la demostración.

La definición del <u>rango</u> de una jugada x, (denotandose por r(x)) se hará en forma recursiva de la siguiente manera:

1.- $r(o) = 0$, donde o es el punto en el que empieza el árbol.

2.- $r(x) = \max(R_x) + 1$

donde $R_x = \{ y \,/\, y \text{ es una jugada } \& \ y < x \}$

Definición.-

La <u>altura</u> de un árbol el el máximo de los rangos de todas sus jugadas.

Sea G un juego en forma extensiva. Su forma normal $G^* = (S^1, S^2, \ldots, S^n; H)$ consiste de n conjuntos de estrategias puras S^i (S^i conjunto de estrategias puras del jugador i) y una función de pago esperado H definida sobre $S = S^1 \times S^2 \times \ldots \times S^n$.

(*) Consultar referencia (6).

Si $s = (s^1, s^2, \ldots, s^n)$ es una n-ada de estrategias puras con $s^i \in S^i$, $i = 1,2,\ldots,n$ y el pago esperado para el jugador i es:

$$H^i(s) = \sum_{w \in \underline{W}} p(w,s)h^i(w)$$

entonces la función de pago esperado H asigna el vector $H(s) = (H^1(s), H^2(s), \ldots, H^n(s))$ a toda $s \in S$.

Sea $G^* = (S^1, S^2, \ldots, S^n; H)$ un juego de n personas en forma normal.

Una estrategia s_1^i del jugador i se dice que esta <u>dominada</u> por la estrategia s_2^i si:

$$H^i(s/s_1^i) \leq H^i(s/s_2^i) \qquad \forall\ s \in S$$

TEOREMA 2.3

Si G es un juego finito con información casi completa y si $G^* = (S^1, S^2, \ldots, S^n; H)$ es su forma normal, entonces hay un punto de equilibrio en estrategias puras, el cual puede ser encontrado por la sucesiva supresión de estrategias subordinadas y las posiblemente repetidas.

Demostración:

Considerese la descomposición completa del juego G. Por el teorema 2.2 y el lema 2.2 se tiene que toda componente consta de conjuntos de información de un mismo jugador y de las jugadas de azar.

La prueba del teorema se hará por inducción sobre la altura del árbol de la descomposición completa.

Si la altura del árbol es uno, entonces el juego $G^*=(S^1,S^2,\ldots,S^n;H)$ es un juego de una persona, es decir todos los S^i contienen solo al conjunto vacio excepto posiblemente uno. Este es un juego de una persona (o se trata de un juego constante) y el jugador, si hay alguno con mas de una estrategia pura, puede descartar las estrategias dominadas una por una, hasta que obtenga la estrategia optima del juego unipersonal.

Se supondrá el teorema verdadero para todos los juegos cuya descomposición completa tenga una altura menor que n.

Sea G un juego cuya descomposición completa tiene altura n. Se tienen dos casos:

Caso 1. El conjunto que contiene al origen tiene al menos una jugada personal digamos del jugador i.

Sea A el conjunto de los subarboles que resultan al remover el origen del árbol de la descomposición completa. Todo subarbol corresponde a un subjuego de G cuya altura es menor que n, entonces por hipótesis de inducción tiene una solución en estrategias puras, que puede obtenerse borrando sucesivamente las estrategias dominadas y las posiblemente repetidas.

La forma normal de los subjuegos será denotada por:

$$G_a^*=(S_a^1,S_a^2,\ldots,S_a^n;H_a) \quad \text{con } a\in A,\ A=1,2,\ldots,r$$

Se denotará por $\hat{S}^i$ la restricción de S^i al conjunto que contiene al origen. Entonces:

$$S^j = S^j_1 \times S^j_2 \times \ldots \times S^j_r \qquad \text{para } j \neq i$$

y

$$S^i = \hat{S}^i \times S^i_1 \ldots S^i_r$$

Si $j \neq i$, una estrategia en S^j es el producto carteciano de r estrategias cada una elegida de un subjuego diferente. Una estrategia en S^i se escribe como una (r+1)-ada, siendo la primer coordenada una estrategia definida sobre el conjunto que contiene al origen y las demas coordenadas, estrategias elegidas de r diferentes subarboles.

Si s^i_α en S^i_α esta dominada en G^*_α entonces toda — $(\hat{s}^i, \ldots, s^i_\alpha, \ldots, s^i_r)$ esta dominada en G^* suponiendo -- que el camino generado por $\hat{s}^i$ intersecte a G_α. Borrar una estrategia s^i_α en G^*_α corresponde a borrar todas - las estrategias en G^* cuya a-ésima coordenada es s^i_α cuando $\hat{s}^i$ genera un camino que intersecta a G_a.

Si $s^j_\alpha \in S^j_\alpha$, $j \neq i$, esta subordinada en G^*_a entonces toda $s^j \in S^j$ cuya a-ésima componente es igual a s^j_α esta subordinada en G^* y borrar una estrategia en G^*_α - que contiene a s^j_α, $j \neq i$ corresponde a borrar todas -- las estrategias en G^* con a-ésima componente igual a s^j_α , $j \neq i$.

Cuando $\hat{s}^i$ no genera un sendero que intersecte a G_α, toda estrategia con primer coordenada $\hat{s}^i$ y la -- a-ésima reemplazada por una estrategia arbitraria de S^i_α representa una duplicación.

Por la hipótesis de inducción tenemos que se - pueden borrar varias estrategias reduciendo el juego original a un juego de una persona (el juego jugado sobre el conjunto que contiene al origen). Su pago - esta determinado por el pago de las estrategias puras las cuales dan las soluciones para cada uno de los subjuegos G_a con $a \in A$.

En este juego unipersonal ademas se pueden borrar las estrategias dominadas y las duplicadas, obteniendo de esta forma una buena estrategia pura para el jugador i (en esta última etapa los demas jugadores no afectan al jugador i).

Caso 2. La primer jugada es de azar.

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que cada alternativa se elige con igual probabilidad, ajustando la función de pago. Pudiendo hacerlo de tal forma que el pago esperado no resulte alterado.

Cada subarbol del árbol de descomposición completa obtenido borrando el origen, satisface la hipótesis de inducción y tiene un punto de equilibrio en estrategias puras, que puede obtenerse borrando las estrategias subordinadas y las posiblemente repetidas. De esta manera la solución requerida, es el producto cartesiano de las soluciones de los subjuegos.

Ejemplo

Como se vio, el ejemplo de la página 15 (figura (2)) ès un juego con información casi completa y, en virtud de este último teorema, tiene un punto de equilibrio en estrategias puras.

Estrategias puras del jugador 1.

$s_1^1(U)=1 \qquad s_2^1(U)=2$

Estrategias puras del jugador 2.

$\{s_1^2(V_1)=1,\ s_1^2(V_2)=1\} \qquad \{s_3^2(V_1)=2,\ s_3^2(V_1)=1\}$

$\{s_2^2(V_1)=1,\ s_2^2(V_2)=2\} \qquad \{s_4^2(V_1)=2,\ s_4^2(V_2)=2\}$

Asignaremos la probabilidad a las elecciones de las jugadas de P_0 y un vector de dos coordenadas a cada partida asignado este último por la función de pago.

$P_0 = \{o\}$ entonces $p(o,1)=1/2$ & $p(o,2)=1/2$

$X= \{g,h,i,j,k,l,m,n\}$

$h(g)=(1,-1)$	$h(j)=(0,0)$	$h(m)=(2,-2)$
$h(h)=(-2,2)$	$h(k)=(-1,1)$	$h(n)=(-1,1)$
$h(i)=(-1,1)$	$h(l)=(0,0)$	

Se tienen dos subjuegos de altura uno, ambos unipersonales del jugador 2. Denotandose por G_1^* y G_2^* sus bases son:

$B_1=\{c,e\}$ $\quad$ $B_2=\{d,f\}$

En G_1^* se tiene:

$$B_1 \cup D(B_1)=\{c,e,g,h,k,l\}$$

las partidas de G_1^* son: $\{g,h,k,l\}$

Como B_1 consta de dos jugadas es necesaria la jugada de azar O_{B_1} y $p(c,B_1)=1/2$, $p(e,B_1)=1/2$.

Las parejas de estrategias para las cuales B_1 es posible son:

(s_1^1,s_1^2), (s_1^1,s_2^2), (s_1^1,s_3^2) & (s_1^1,s_4^2)

restringiendo estas estrategias a las jugadas de $B_1 \cup D(B_1)$ se tiene un juego unipersonal del jugador 2 con dos estrategias puras.

$s_{B_1}^1(V_1)=1$ y $s_{B_1}^2(V_1)=2$

El pago esperado para cada estrategia es:

$H^2(s_{B_1}^1)= -(1/2) + 1/2 = 0 \qquad H^2(s_{B_1}^2)= 1 + 0 = 1$

$\therefore$ La estrategia optima en G_1^* es $s_{B_1}^2$.

Haciendo un análisis similar para B_2 se llega a un juego unipersonal del jugador 2 con dos estrategias puras.

$s^1_{B_2}(V_2)=1$ y $s^2_{B_2}(V_2)=2$

El pago esperado para cada estrategia es:

$H^2(s^1_{B_2})= 1/2 + (-1) = -(1/2)$ $H^2(s^2_{B_2})= 0 + 1/2 = 1/2$

$\therefore$ la estratégia optima en G^*_2 es $s^2_{B_2}$.

Se tiene un subjuego G^*_3 de altura 2 con base -- $B_3=\{a,b\}$. Jugada de azar O_{B_3} con distribución de probabilidad $p(a,B_3)=1/2$ y $p(b,B_3)=1/2$.

El subjuego G^*_3 tiene como subjuegos los ya vistos G^*_1 y G^*_2.

El conjunto que contiene al origen tiene una jugada del jugador 1. Las estrategias sobre el conjunto son:

$\hat{s}^1_1(U)=1$ $\hat{s}^1_2(U)=2$

Estrategias del jugador 1.

$s^1_1=\hat{s}^1_1$ $s^1_2=\hat{s}^1_2$

Estrategias del jugador 2.

$s^2_1=(s^1_{B_1},s^1_{B_2})$, $s^2_2=(s^1_{B_1},s^2_{B_2})$, $s^2_3=(s^2_{B_1},s^1_{B_2})$, $s^2_4=(s^2_{B_1},s^2_{B_2})$

Como $s^1_{B_1}$ & $s^1_{B_2}$ estan subordinadas respectivamente en G^*_1 y G^*_2, entonces s^2_1, s^2_2 & s^2_3 estan subordinadas - en G^*_3 de aqui que las únicas estrategias utilizables son:

$s_1=(s^1_1, s^2_4)$ & $s_2=(s^1_2, s^2_4)$

y el juego se convierte en unipersonal del jugador 1

El pago esperado para las distintas estrategias es:

$H^1(s_1) = (-1) + 0 = -1$ $H^1(s_2)= 0 - (1/2)=-(1/2)$

$\therefore$ La estrategia óptima en G^*_3 es $s_2=(s^1_2,s^2_4)$.

En el juego original la primer jugada es de --- azar, y la distribución sobre las elecciones es la misma, de esta forma la estrategia óptima del jue--

go es el producto cartesiano de las estrategias ópti mas en cada uno de sus subjuegos, que en este caso - solo hay uno.

∴ La estrategia óptima del juego es $s = (s_1^1, s_4^2)$
(La notación es de las estrategias originales)

CAPITULO III

DETERMINACION ESTRICTA EN JUEGOS COMPLETAMENTE INFLADOS

Dada la estructura K de cualquier juego y algún jugador i el cual en la inflación completa K' de K - no tenga información completa, se mostrará como construir bajo ciertas restricciones, una estructura simple Ks, con la siguiente forma:

1.- Todo jugador en Ks juega una sola vez.

2.- Cada jugador tiene únicamente dos elecciones disponibles.

La estructura Ks, tendrá la propiedad que cualquier juego con dicha estructura el cual no este estrictamente determinado para el jugador i, conduce a un juego con estructura K' que no este estrictamente determinado para el jugador i. Se asignarán pagos a Ks con el fin de obtener un juego Gs que no este estrictamente determinado para el jugador i, a este juego Gs le corresponderá un G con estructura K' el cual no estará estrictamente determinado para el jugador i.

En la demostración del teorema 3.1 se mostrará - como construir la estructura Ks y para ver que cumple con las condiciones requeridas se necesitarán de dos definiciones y de ocho ejemplos.

Definición:

Una estrategia del jugador i, es completamente - mixta si asigna probabilidad positiva a toda estrategia pura disponible del jugador i.

Definición:

Un juego es completamente mixto si todos los jugadores usan estrategias mixtas para llegar a el punto (o los puntos) de equilibrio.

Los ejemplos se ilustrarán en figuras, encerrando en curvas punteadas las jugadas que pertenescan a un mismo conjunto de información, a un lado de las curvas se pondrá el número del jugador al cual pertenesca el conjunto de información y al final de cada partida se escribirá el vector de pago para esa partida. En las jugadas de azar la probabilidad de la alternativa se pondrá a un lado. En las jugadas personales se pondrá el número de la alternativa.

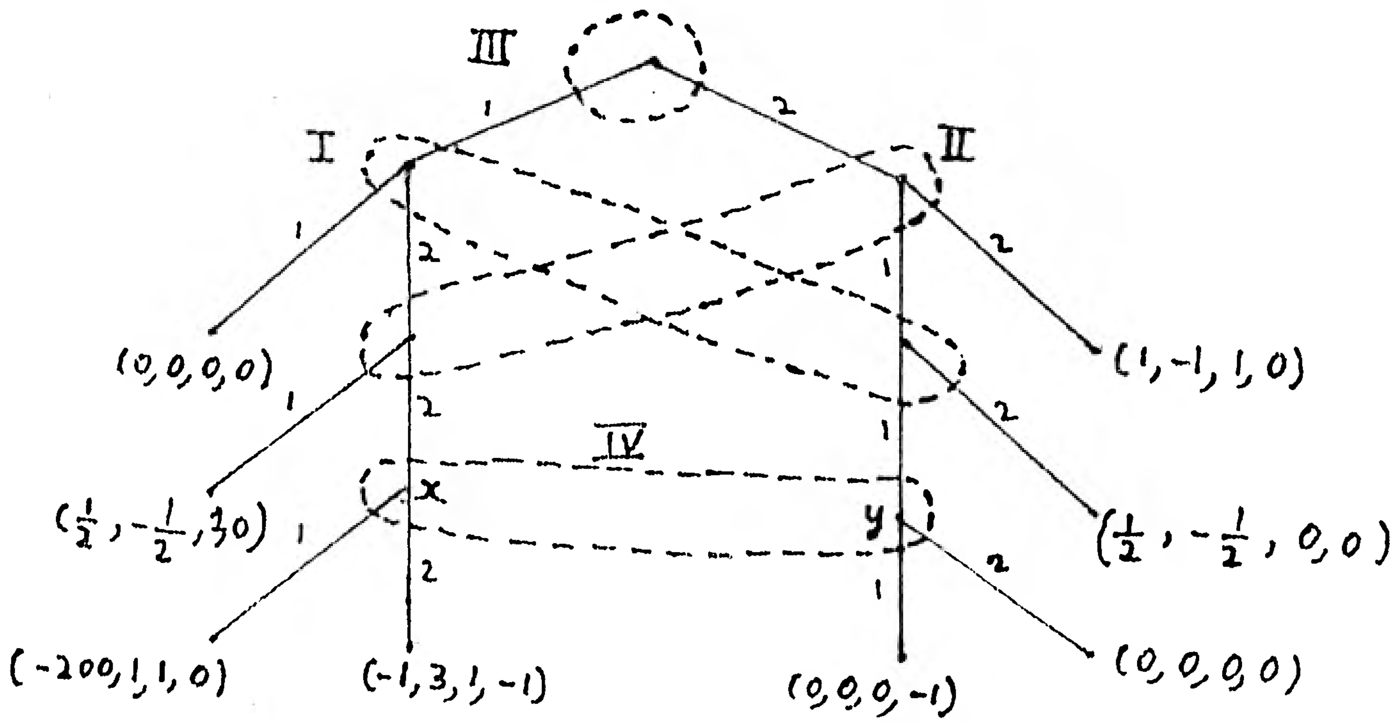


Fig. (3.1)

Se describirá como es jugado el juego de la fig., (3.1). Primero el jugador III escoge 1 ó 2.

Si III elige 1, corresponde al jugador I elegir entre 1 ó 2, si aqui el jugador I escoge 1, el juego termina con el pago indicado que es (0,0,0,0). Si por el contrario I elige 2, le corresponderá el turno al jugador II de hacer su jugada, eligiendo 1 el juego termina, eligiendo 2, le toca jugar al jugador IV.

Si III elige 2, la siguiente elección la hará el jugador II, que eligiendo 2 el juego termina, eligiendo 1, le tocará al jugador I si elige 2 el juego concluye si escoge 1, correspondiera al jugador IV, elegir entre 1 ó 2.

Cuando el jugador I esta en posición de elegir, no esta enterado si el jugador II ya ha jugado o no. Lo mismo pasa cuando corresponde al jugador II elegir no sabe si el jugador I ya ha jugado o jugará después de él.

LEMA 3.1

El juego ilustrado en la figura (3.1) es un juego completamente mixto.

Demostración;

Supongase que el jugador IV elige 1 con una probabilidad arbitraria d, $0 \leq d \leq 1$. Primero se verá que el jugador III debe usar una estrategia mixta.

Supongase que el jugador III tiene un punto de equilibrio eligiendo 1.

Si I escoge 2 y II también, entonces I puede mejorar usando 1 (pues obtiene 0 en lugar de -1).

Por lo tanto la estrategia (2,2,1,d) no es un punto de equilibrio.

(Al decir que (2,2,1,d) es una estrategia se quiere dar a entender que, la primer cordenada es la elecc_ion de I, la segunda de II, la tercera de III y la cuarta de IV. Si en lugar de aparecer el número 1 o el 2 aparece una letra como en el caso de la cuarta coordenada, se entenderá que esa letra representa la probabilidad con que el jugador correspondiente elegirá 1, entendiendose que su complemento a 1 será la probabilidad de elegir 2. De esta forma (2,2,1,d) significa que I elige 2, II elige 2, III escoge 1 y IV escoge 1 con probabilidad d y 2 con probabilidad 1-d).

Si I elige 1 y II, 2; entonces III escogiendo 2 incrementa su pago de 0 a 1. De aqui que (1,2,1,d) no es un punto de equilibrio.

Si I elige 2 y II, 1 el jugador II mejora su pago escogiendo 2 en lugar de 1 (obtiene algo mayor que 1 en vez de $-\frac{1}{2}$). Por lo que (2,1,1,d) no es punto de equilibrio.

Si I escoge 1 y II, 1; al elegir I, 2 mejora obteniêndo algo mayor que 1 en lugar de $-\frac{1}{2}$ y así (1,1,1,d) no es equilibrio.

Si el jugador I escoge 1, y el jugador II escoge 1 con probabilidad b, $0 \leq b \leq 1$, entonces III mejora su pago eligiendo 2 pues obtiene 1-b en lugar de 0. Con esto se tiene que (1,b,1,d) no es punto de equilibrio.

Escogiendo I, 2 y II su elección 1 con probabilidad b, $0 \leq b \leq 1$ entonces al elegir II, 2 obtiene algo mayor que 1 en lugar de algo menor, de esta forma (2,b,1,d) no es equilibrio.

Si el jugador I escoge su elección 1 con probabilidad a, $0 < a < 1$ y escogiendo II su elección 1 con probabilidad b, $0 \leq b \leq 1$, entonces II mejora eligiendo 2 (gana(1-a) en lugar de algo menor). De esta manera (a,b,1,d) no es un punto de equilibrio cuando $0 < a < 1$, y $0 \leq b \leq 1$.

Si II elige 2 lo mejor que puede hacer I es escoger 1 (obtiene 0 en vez de algo menor) así (a,2,1,d) $0 \leq a \leq 1$ no es punto de equilibrio.

$\therefore$ No hay un punto de equilibrio para III si elige 1.

Supongase que el jugador III tiene un punto de equilibrio eligiendo 2.

Si III escoge 2 entonces II nunca escogerá 2, pues mejora eligiendo 1 (obtiene al menos $-\frac{1}{2}$ en lugar de -1) así que (a,2,2,d) no es un punto de equilibrio siendo $0 \leq a \leq 1$.

Si I elige 1 y II elige 1, el jugador I mejora eligiendo 2 (obtiene $\frac{1}{2}$ en lugar de 0) y (1,1,2,d) no es de equilibrio.

Si I escoge 2, entonces cuando II no elige 2, III mejora eligiendo 1 pues obtiene 1 en lugar de algo menor, se tiene que (2,b,2,d) no es punto de equilibrio cuando $0 < b \leq 1$. Si por el contrario I escoge 1 con probabilidad a, $0 < a < 1$, entonces mejora eligiendo 2 obtiene $\frac{1}{2}b$ en lugar de algo menor, de esta forma (a,b,2,d) tampoco es punto de equilibrio cuando II elige 1 con probabilidad b, $0 < b \leq 1$. De todo esto se tiene que, no hay punto de equilibrio cuando III elige 2.

$\therefore$ El jugador III necesariamente debe jugar una estrategia mixta.

Ahora se mostrará que los jugadores I y II tienen que usar estrategias mixtas.

Obsevese que si el jugador II toma una estrategia diferente de la elegida por el jugador I, entonces el jugador III estará en mejor posición con una estrategia pura. Si por ejemplo el jugador II elige 1 con probabilidad b , $0 \leq b \leq 1$ y I escoge 1 con probabilidad a, $0 \leq a \leq 1$ y $a < b$ entonces el jugador III recibe $1-a$ eligiendo 1 y algo menor escogiendo cúalquier otra estrategia. Esto es I y II tienen que usar la misma estrategia.

Si los jugadore I y II eligen 1 entonces I puede mejorar usando 2 pues obtiene 1/2 y de otra forma obtiene algo menor. Si I y II eligen 2, nuevamente I aumenta su pago cuando cambia a 1 obteniendo $1-c$ en vez de algo menor. De esta forma si $0 < c < 1$, entonces ni $(1,1,c,d)$ ni tampoco $(2,2,c,d)$ son puntos de equilibrio.

∴ Los jugadores I y II juegan la misma estrategia mixta.

El siguiente paso es mostrar que IV no tiene puntos de equilibrio cuando usa estrategias mixtas.

Supongase que $(a,a,c,1)$ es un punto de equilibrio Entonces la probabilidad para alcanzar a x es mayor que probabilidad para alcanzar a y (x & y son jugadas en el conjunto de información del jugador IV). Esto es

$$c(1-a)^2 \geq (1-c)a^2 \quad \text{-------} \quad (1)$$

El pago esperado para el jugador I es:

$$\frac{1}{2}a(1-a)c+(1-c)(1-a)+\frac{1}{2}(1-c)a(1-a)-200c(1-a)^2 \quad \text{-----} \quad (2)$$

el cual se reduce a:

$$\frac{1}{2}a(1-a)+(1-c)(1-a)-200c(1-a^2) \quad \text{------} \quad (3)$$

El pago esperado para el jugador II es :

$$-\frac{1}{2}ac(1-a)+c(1-a)^2-(1-c)(1-a)-\frac{1}{2}\,a(1-a)(1-c) \quad \text{---} \quad (4)$$

que se reduce a:

$$-\frac{1}{2}a(1-a)-(1-c)(1-a)+c(1-a^2) \quad \text{------}(5)$$

Para cualquier otra estrategia a' del jugador I,- (3) debe se mayor, esto es:

$$(1/2)a(1-a) + (1-c)(1-a) - 200c(1-a^2) \geq$$
$$\geq (1/2)a(1-a')+(1-c)(1-a) -200c(1-a)(1-a')$$

$$\frac{1}{2}a(1-a)-200c(1-a)^2 \geq \frac{1}{2}a(1-a')-200c(1-a)(1-a')$$

$$(1-a)\left[\frac{1}{2}a-200c(1-a)\right] \geq (1-a')\left[\frac{1}{2}a -200c(1-a)\right]$$

Como únicamente se sabe que $a \neq a'$ sin ninguna relación de orden entre ellos, entonces la última desigualdad es cierta si y solo si:

$$(1/2)a-200c(1-a)=0 \quad \text{----------} \quad (6)$$

Cuando el jugador II usa cualquier otra estrategia a' se tiene que el pago esperado representado en (5) debe ser mayor que el pago esperado jugando a', es decir:

$$-\frac{1}{2}a(1-a)-(1-c)(1-a)+c(1-a)^2 \geq$$

$$\geq -\frac{1}{2}a'(1-a)-(1-c)(1-a')+c(1-a)(1-a')$$

$$\Rightarrow \quad -a\left[\frac{1}{2}(1-a)\right]+(1-a)\left[-(1-c)+c(1-a)\right] \geq$$

$$\geq -a'\left[\frac{1}{2}(1-a)\right]+(1-a')\left[-(1-c)+c(1-a)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(1-a)(a'-a)+\left[-(1-c)+c(1-a)\right](1-a-1+a') \geq 0$$

$$\therefore \; (a'-a) \left[\frac{1}{2} (1-a) -(1-c) +c(1-a) \right] \geq 0$$

Siendo que la única condición impuesta a' es ser diferente de a entonces (a'-a) puede ser mayor o menor que cero por lo que para que la última desigualdad - siempre se cumpla es necesario que:

$$\frac{1}{2}(1-a) -(1-c)+c(1-a)=0 \qquad \text{--------}(7)$$

A partir de (6) se obtiene que $a=400c(1-a)$, substituyendo en (1), se llega a:

$$c(1-a)^2 \geq (1-c)\; 400^2 \; c^2 \; (1-a)^2$$

$$1 \geq (1-c) 400^2 \; c$$

esta desigualdad se satisface siempre que $c > c_o$ y $c > c_1$ donde:

$$c_o = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{(402)(398)}}{800} \qquad y \qquad c_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{(402)\;(398)}}{800}$$

Substituyendo (6) en (7) en términos de c se tiene:

$$800\; c^2 \; -796c-1=0 \qquad \text{-----------}(8)$$

Las raices de (8) son:

$$c_{2,3} \; = (796 \pm ((796)^2 +4(800))^{1/2} \;) /1600$$

como C_3 es negativo, entonces el único candidato es c_2. Sin embargo se pueden probar las siguientes desigualdades.

$$c_1 < c_2 < \frac{399}{400} < c_o$$

$\therefore$ (a,a,c,1) no es un punto de equilibrio.

Ahora supongase que (a,a,c,2) es un punto de equilibrio, entonces la probabilidad para alcanzar a x, no puede ser mayor que la probabilidad para alcanzar a y por lo tanto se tiene que:

$$c(1-a)^2 \leq (1-c)\ a^2 \quad \text{------}(9)$$

El pago esperado para el jugador I es:

$$\frac{1}{2}a(1-a)\,c+(1-c)(1-a) + \frac{1}{2}\quad a(1-a)(1-c)-c(1-a)^2 \quad \text{--}\ (10)$$

que mediante transformaciones se convierte en:

$$\frac{1}{2}a(1-a)+(1-c)(1-a)-c(1-a)^2 \quad \text{-----}\ (11)$$

El pago esperado para el jugador II es:

$$-\frac{1}{2}a(1-a)c+3c(1-a)^2-(1-a)(1-c)-\frac{1}{2}(1-a)a(1-c) \quad \text{---}\ (12)$$

el cual puede transformarse en:

$$-\frac{1}{2}a(1-a)-(1-c)(1-a)+3c(1-a)^2 \quad \text{------}\ (13)$$

Para cualquier otra estrategia a' del jugador I, -el pago representado en (11) debe ser mayor que el pago esperado jugando a' en lugar de a, por lo que se tiene:

$$\frac{1}{2}a(1-a)+(1-c)(1-a)-c(1-a)^2 \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}a(1-a')+(1-c)(1-a)-c(1-a)(1-a')$$

Lo que implica que:

$$\frac{1}{2}a-c(1-a)=0 \quad \text{------}\ (14)$$

esto es:

$$a=2c(1-a) \quad \text{------}\ (15)$$

Si el jugador II usa cualquier otra estrategia a', entonces su pago esperado debe ser menor que el esperado jugando a. De aqui se tiene la siguiente desigualdad:

$$-\frac{1}{2}a(1-a) - (1-c)(1-a) + 3c(1-a)^2 \geq$$

$$\geq -\frac{1}{2}a'(1-a) - (1-c)(1-a') + 3c(1-a)(1-a')$$

lo que implica que:

$$\frac{1}{2}(1-a) - (1-c) + 3c(1-a) = 0 \quad \text{-----} \quad (16)$$

substituyendo (15) en (9) se obtiene:

$$c(1-a)^2 \leq 4c^2(1-a)^2(1-c)$$

de aqui que

$$\frac{1}{4} \leq (1-c)c \quad \text{----------} \quad (17)$$

esta última desigualdad se satisface si y solo si

$$c = \frac{1}{2}$$

Substituyendo $c= \frac{1}{2}$ en (15) se obtiene $a= \frac{1}{2}$.

Reemplazando a y c por sus valores en (16) se -- tiene:

$$\frac{1}{2}(1- \frac{1}{2}) - (1- \frac{1}{2}) + 3(\frac{1}{2})(1- \frac{1}{2}) = 0$$

lo cual implica que $\frac{1}{2} = 0$ ¡Contradicción!

.˙. (a,a,c,2) no es un punto de equilibrio.

Con esto la prueba del lema se completa.

De una manera similar a la forma en que se probó el lema 3.1 se puede probar que los juegos cuyos - árboles se ilustran en las figuras (3.2), (3.3), (3.4) y (3.5) son completamente mixtos. De hecho en los juegos de las figuras (3.3), (3.4) y (3.5), la estrategia óptima que lleva al punto de equilibrio es, usando los jugadores todas sus estrategias puras disponibles con la misma probabilidad.

EJEMPLOS:

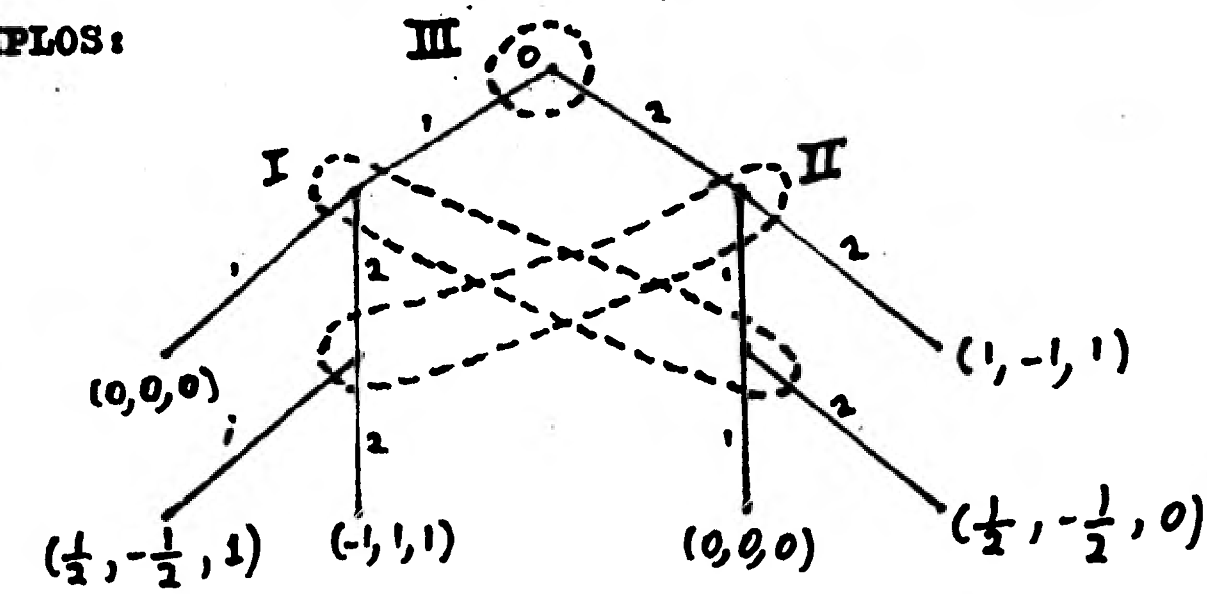


figura (3.2)

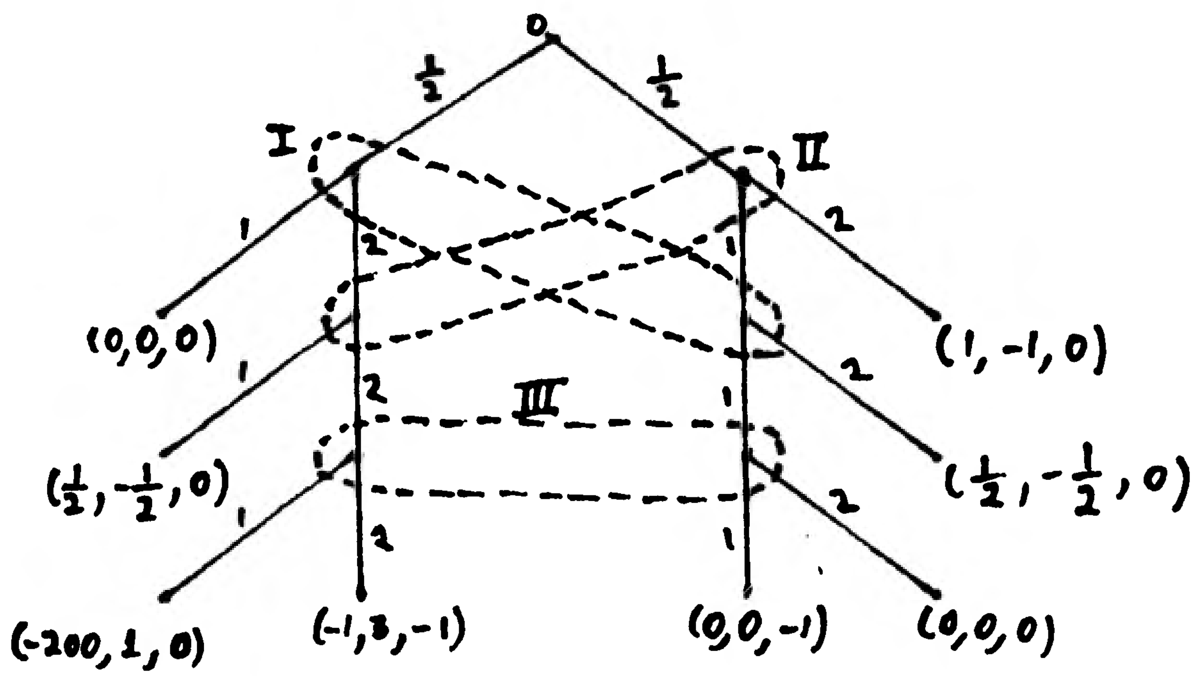


figura (3.3)

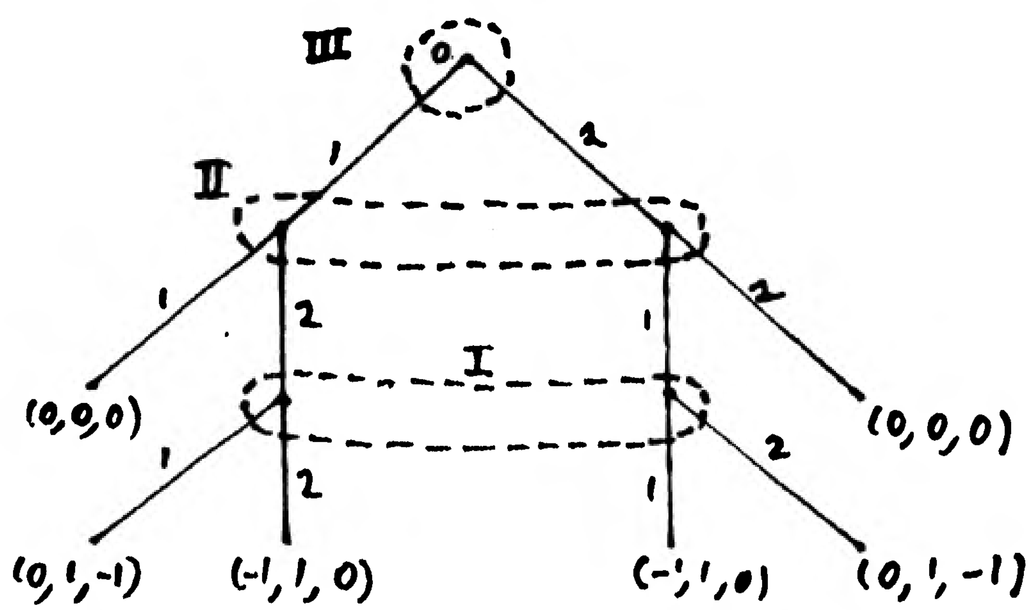


figura (3.4)

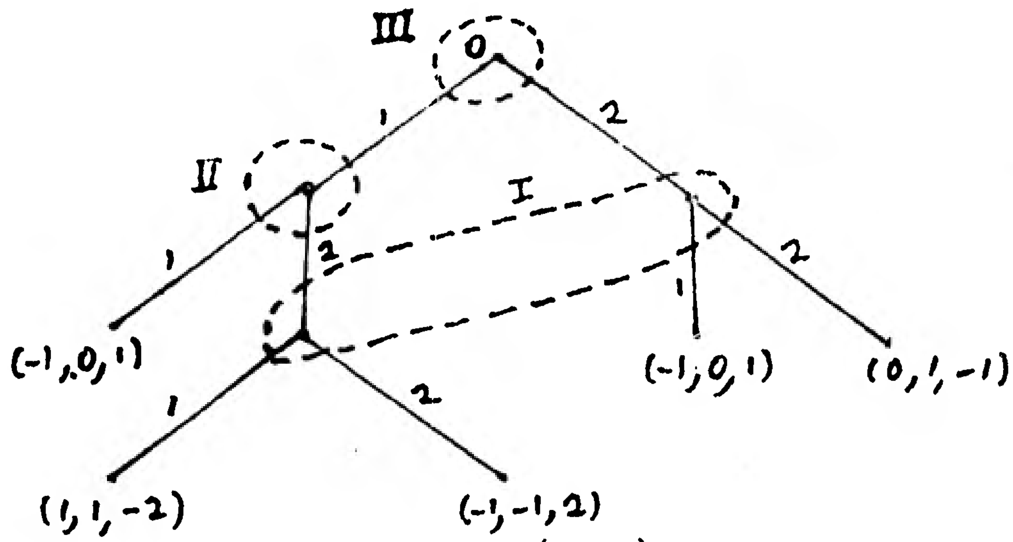


figura (3.5)

Calculando la forma normal de los juegos cuyos -árboles se ilustran en las figuras (3.6), (3.7) y --- (3.8) se puede checar que son completamente mixtos.

EJEMPLOS:

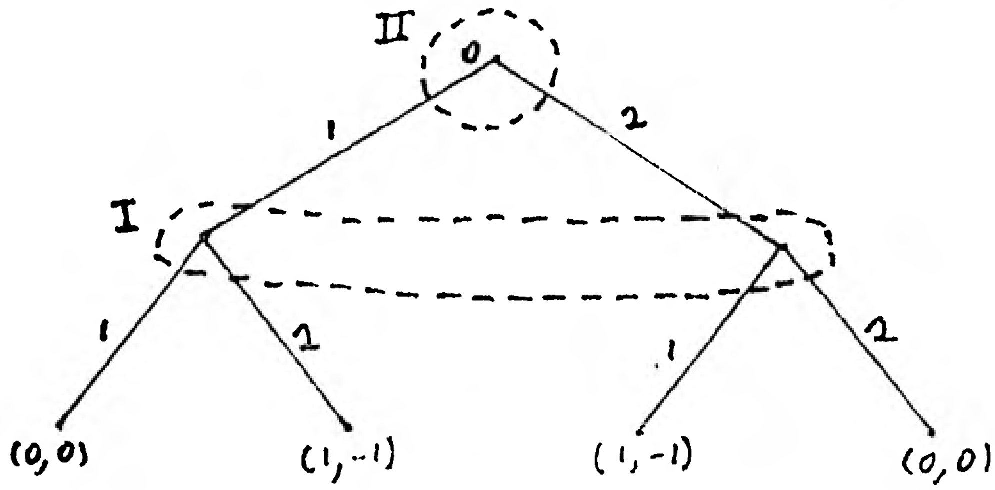


figura (3.6)

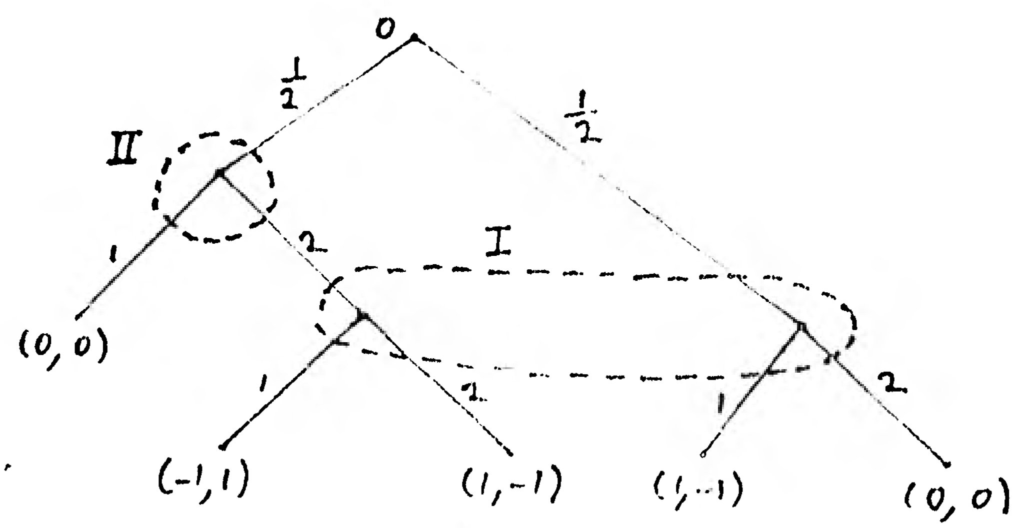


figura (3.7)

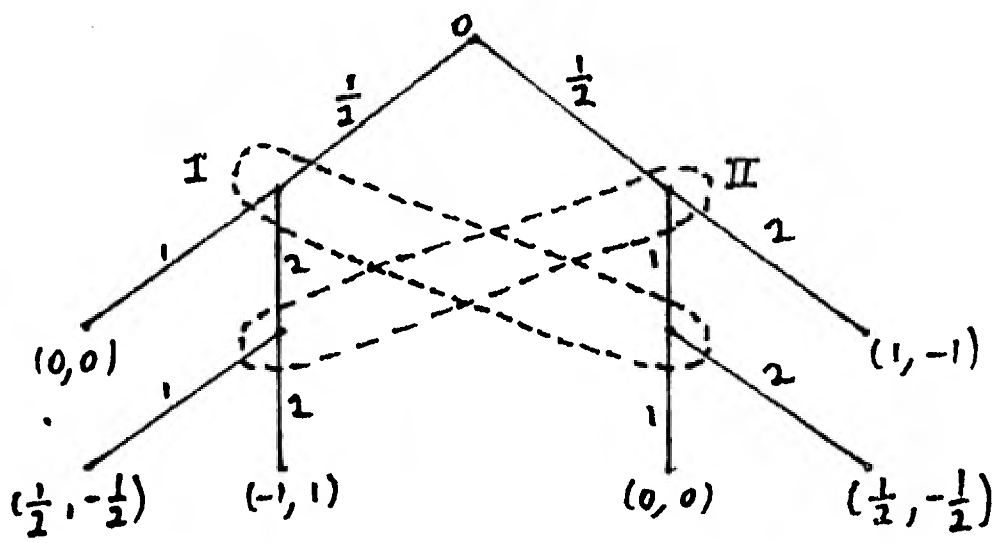


Figura (3.8)

Haciendo uso de los 8 juegos ilustrados se demostrará el siguiente teorema.

TEOREMA 3.1

Sea K la estructura de un juego estrictamente determinado para el jugador i, y satisface la siguiente condición: Si $U \prec V$ y $V \prec U$ entonces, toda jugada en U sigue o es seguida inmediatamente, por una jugada en V.

Entonces:

La condición de información completa, debe satisfacerse para el jugador i.

Demostración:

Por demostrar que ningún conjunto de información del jugador i tralapa a alguno del jugador j, y que ninguno del jugador j traslapa alguno del jugador i.

Sea K la estructura de un juego completamente inflado y sean U conjunto de información del jugador I, y V conjunto de información del jugador II. Supongase que U traslapa a V, esto es la condición de información completa no se satisface para ninguno de los dos jugadores. Entonces existen jugadas $x_1, x_2 \in U$ tales que

$(V,k) < x_1$ pero $x_2 \notin D(V,k)$.

Sean $U_1 = \{x \,/\, x \in D(V,k)\}$ y $U_2 = U - U_1$. Si para toda $x_1^* \in U_1$ y para toda $x_2^* \in U_2$ existe un conjunto de información W del jugador I tal que $(W,k_1) < x_1^*$ y $(W,k_2) < x_2^*$ con $k_1 \neq k_2$ entonces; de acuerdo al lema 2.1 el conjunto U_1 esta aislado en U, lo que contradice la hipótesis de que K es completamente inflado.

Por lo tanto x_1 y x_2 pueden escogerse de tal manera que no exista un conjunto de información W del jugador I tal que $(W,k_1) < x_1$ y $(W,k_2) < x_2$ con $k_1 \neq k_2$.

Considerese al conjunto:

$R = \{ y \,/\, 0 \leq y \leq x_1 \text{ ó } 0 \leq y \leq x_2 \}$.

Si $t \notin R$ entonces haciendo los pagos $h(w)$ iguales para todas las jugadas en $D(t)$ se convierte t en inefectiva y de esta manera puede formarse una estructura K_2 borrando todas las jugadas t tales que $t \notin R$ y reemplazando aquellas que siguen inmediatamente a jugadas en R por partidas. Si la estructura K esta estrictamente determinada para cualquier jugador dado, se tiene lo mismo con respecto a la estructura K_2.

En K_2, sea t cualquier jugada tal que $0 \leq t \leq z$ donde $z = \inf(x_1, x_2)$. Supongase que $z \in D(t,k)$, si t es una jugada personal del jugador i, arreglando la función de pago se puede hacer improductivo para i cualquier elección diferente de k. Si t es de azar entonces se hace $h^i(w) = 0 \;\forall w \in D(t,k') \;\forall k'$ con $k' \neq k$. Por lo tanto podemos borrar todas las jugadas t de K y obtener una estructura K_3; si todos los juegos con estructura K_2 estan estrictamente determinados entonces, también lo estan los juegos con estructura K_3.

Si t es una jugada en K_3 entonces se cumple una de dos condiciones, $z \leq t \leq x_1$ o bien $z \leq t \leq x_2$.

Se reemplazará a K_3 por su inflación completa K_4. Por la eleción de x_1 y x_2 no existe ningún conjunto de información del jugador I tal que $(W,k_1) < x_1$, $(W,k_2) < x_2$ con $k_1 \neq k_2$, de aqui que x_1, x_2 aún pertenecen a un mismo conjunto de información U de K_4.

En cualquier conjunto de información de K_4, cualquier elección que no condusca a x_1 ó x_2 puede hacerse improductiva. De esta forma se eliminan todos los conjuntos de información de K_4 excepto:

1. La jugada z, el conjunto de información V, o lo que queda de el después de la inflación.
2. Todo conjunto de información que precede a x_1 y a x_2 por diferentes elecciones.

Ademas es posible librarse de todas las jugadas de azar, excepto posiblemente z y, de todas menos dos de las elecciones posibles del jugador I en U. No obstante, si inflando K_3 el conjunto de información V se divide, tendremos un conjunto de información con un sólo vértice perteneciente al jugador II.

Notese que no existen W_1 y W_2 conjuntos del mismo jugador tales que $W_1 < W_2$ y $W_2 \nless W_1$ ya que K_4 esta completamente inflado. Pero se puede tener $W_1 < W_2$ y $W_2 < W_1$ con W_1, W_2 perteneciendo al mismo jugador o no.

Si W_1 y W_2 pertenecen al mismo jugador i entonces los conjuntos serán como en la figura (3.9). Entonces el juego no resulta afectado si modificamos los conjuntos de información del jugador i como en la figura (3.10), previendo que $h^i(w_5) = h^i(w_6)$, donde ---

$h^i(w_1), \ldots, h^i(w_6)$ es el pago que sigue a jugadas de W_1 y W_2. Es decir si y_1 es alcanzada, la modificación de los conjuntos de información no afectan a los descendientes de y_1; si por el contrario quien es alcanzado es y_2, la restricción sobre la función de pago hace irrelevante para el jugador i la elección de la alternativa 2 ya sea en y_4 o en y_2.

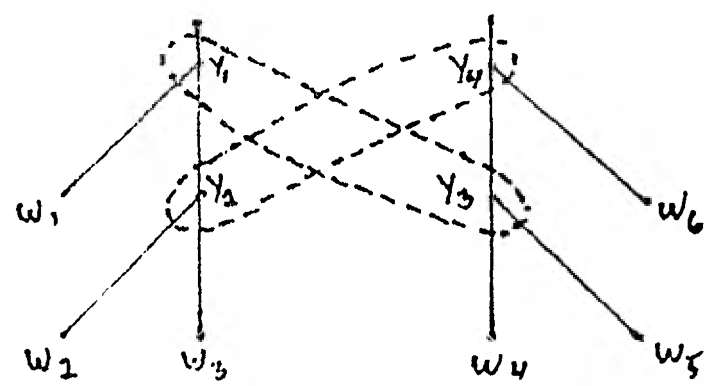


Figura (3.9)

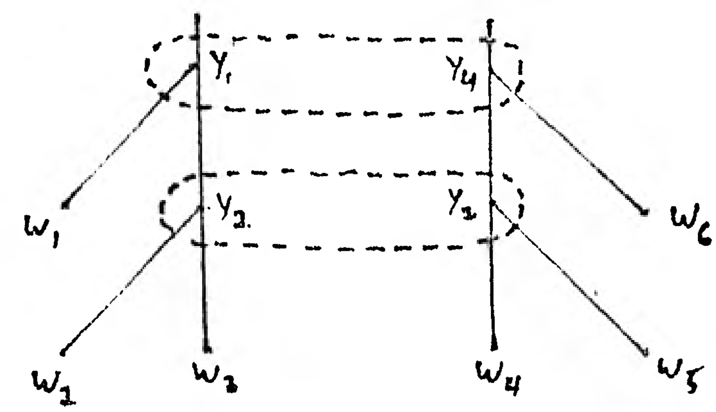


Figura (3.10)

Ahora si K_4 tiene algunos conjuntos de información pertenecientes al mismo jugador, y traslapandose unos con otros; repitiendo el procedimiento indicado puede irse modificando hasta que ningún par de conjuntos de información pertenecientes al mismo jugador se traslapen mutuamente, imponiendo las correspondientes restricciones sobre los pagos. La nueva estructura se denotará por K_5 y si K_4 esta estrictamente determinada para algún jugador dado, se tiene lo mismo para K_5.

Llamandole K_6 a la inflación completa de K_5, se tiene que en K_6 puede hacerse improductiva y por lo tanto - eliminar cualquier elección que no conduzca directamente a x_1 o a x_2, la restricción sobre el pago no afecta la eliminación. Se tiene al menos un conjunto de información del jugador II con un solo vertice.

De esta forma se obtiene una estructura K_s con las siguientes jugadas:

1. La jugada z la cual precede todas las demas jugadas en K_s.
2. Las jugadas x_1, x_2 pertenecientes al mismo conjunto de información del jugador I.
3. Una jugada y_1 del jugador II tal que $x_1 \in D(y_1, k_1)$; y posiblemente una jugada y_2 tal que $x_2 \in D(y_2, k_2)$ estando y_1 & y_2 en el mismo conjunto de información V' y $k_1 \neq k_2$.
4. Conjuntos de información W_j, cada uno con dos jugadas t_1^j, t_2^j. En cada caso $x_1 \in D(t_1^j, k_1^j)$, $x_2 \in D(t_2^j, k_2^j)$ con $k_1^j \neq k_2^j$. Ninguna pareja de estos conjuntos de información pertenecen al mismo jugador y ninguno de ellos pertenece al jugador I ó al jugador II (pues K_6 esta completamente inflado).

En ninguna jugada de K_s hay mas de dos elecciones. Si z es una jugada de azar puede suponerse que las dos elecciones m_1 y m_2 ocurren con la misma probabilidad. Pues si las probabilidades son a y (1-a), $0 < a < 1$, puede multiplicarse el pago para $D(z, m_1)$ y -

para $D(z,m_2)$ por 2a y 2(1-a) respectivamente y reem-- plazar las probabilidades por 1/2, 1/2; resultando el pago esperado sin alteraciones.

Dependiendo del conjunto de información V', se - tienen dos casos:

CASO 1: El conjunto V' consiste de dos jugadas, - una sobre la rama que va de z a x_1, y --- otra sobre la que va de z a x_2.

En este caso no se distingue entre los conjuntos W_j y V'. Se reenumeran los conjuntos, U,V' y los W_j - de tal forma que $W_m < W_{m-1} < \ldots < W_2 < W_1 = U$ y se renombran - las jugadas de manera que $t_1^1 = x_1$, $t_2^1 = x_2$, etc. (La jugada en W_j sobre la rama que conduce a x_1 será llamada t_1^j, y la que conduce a x_2, t_2^j), t_1^i, t_2^i serán jugadas de - W_i, t_r^{i-1} seguirá o será seguida por t_r^i por la elección k_r^i donde r=1,2. Se renombrarán los jugadores para que W_i pertenesca al jugador i.

De acuerdo a todo lo anterior se observa que --- $m \geq 2$. Para todo W_i, $i \neq 1$ se tiene que $W_i < W_1$ y $W_i \not> W_1$, no obstante se puede tener $W_i < W_j$ y $W_i > W_j$ para $i \neq j$ - ambos diferentes de 1.

Primero se considerará cuando $m > 4$.

Supongase que z es una jugada de azar. Si las -- dos jugadas que siguen inmediatamente a z pertenecen a dos jugadores diferentes i, j; jugadas que pertenecen a los conjuntos W_j, W_i respectivamente, entonces necesariamente se tiene que $W_j < W_i$ y $W_i < W_j$. Considerense las jugadas t_1^i, t_2^i de W_i y las t_1^j, t_2^j de W_j como un juego de dos personas; si se asigna el pago como en la figura (3.8) entonces como los jugadores i y j estan comprometidos, hay un punto de equilibrio en el cual ambos jugadores juegan sus dos estrategias posibles con igual frecuencia. Para tener este punto de equilibrio intacto, independientemente de los demas - jugadores se define el pago para los jugadores i y j como el dado en la figura (3.8) para toda partida w - en $D(t_1^j, k_1^j)$ o en $D(t_2^i, k_2^i)$, por lo tanto pueden reemplazarse las jugadas t_1^i, t_2^i, t_1^j, t_2^j por una sola jugada de azar.

Si las jugadas que siguen inmediatamente a z pertenecen al mismo jugador m, entonces se define ------ $h^i(w) = 0$ para todo i y para toda partida $w \in D(t_1^m, k_1)$ y $\forall\ w \in D(t_2^m, k_2)$. Entonces el juego no se afecta si se anula la jugada z, haciendo coincidir t_1^m y t_2^m en una sola jugada t^m y dando la mitad de los pagos en ----- $D(t_1^m, k_2)$ y en $D(t_2^m, k_1)$. Esto nos lleva a considerar - el caso cuando la primer jugada z es personal.

Supongase que z es una jugada personal. Si las - jugadas que siguen inmediatamente, pertenecen al mismo jugador, asignando el pago de la figura (3.6) se - pueden borrar las jugadas t^m, t_1^{m-1}, t_2^{m-2} reemplazandolas por una jugada de azar.

Si las jugadas que siguen inmediatamente pertenecen a diferentes jugadores, se asignan los pagos de - la figura (3.2). Entonces pueden borrarse los conjuntos de información W_m, W_{m-1} y W_{m-2} reemplazandolos con una jugada de azar.

En cualquier paso se remueven 2 ó 3 conjuntos --

de información mediante la técnica mencionada, hasta que $m \leq 4$.

Si $m=2$ se tiene lo ilustrado en la figura (3.6).

Si $m=3$ se obtiene una de dos, o bien lo ilustrado en la figura (3.4) o lo ilustrado en la (3.3).

Si $m=4$ se tendrá lo de la figura (3.1) o se aplicará dos veces la figura (3.6).

CASO 2: El conjunto V', consta de una sola jugada y, tal que $z < y < x$.

Si no hay conjuntos de información W_j entonces se tendrá el juego ilustrado en la figura (3.7) o el ilustrado en la figura (3.5) dependiendo de si z es una jugada de azar o si es personal. Entonces todo jugador involucrado tiene que usar estrategias mixtas.

Si hay algún conjunto de información W_j, pueden asignarse pagos de tal forma que los jugadores diferentes del II tengan que usar estrategias mixtas en un único punto de equilibrio. Se hace improductiva la elección k_1 del jugador II, borrandose la jugada y, y tratandose el resto como en el caso 1.

Ahora se mostrará que existen pagos para los cuales el jugador II tiene que usar estrategias mixtas en todo punto de equilibrio.

En el proceso anterior se habrán quitado todos los W_j tales que $z < W_j < y$, por lo que se puede suponer que z es la única jugada que precede a y. Debe existir un conjunto W tal que $y < W \leq U$, sea W_0 el primero de tales conjuntos, asignando pagos para hacer irrelevantes las elecciones de todas las jugadas en

D(W.), pueden anularse. Lo que queda es o bien lo ---
ilustrado en la figura (3.7) o lo ilustrado en la figura (3.5).

Esto completa la prueba del teorema.

APENDICE

Comensaremos definiendo el concepto de dominancia y lo que es un punto de equilibrio.

Definición:

Una n-ada de estrategias γ domina a otra n-ada ζ si $H^i(\zeta^1,\ldots,\zeta^{i-1},\gamma^i,\ldots,\zeta^n)\geq H^i(\zeta^1,\ldots,\zeta^{i-1},P^i,\ldots,\zeta^n)$ para toda estrategia P^i del jugador i, y para todo jugador i.

Definición:

Una n-ada de estrategia σ define un punto de equilibrio si y solo si σ domina a σ.

Ahora estamos en posición de demostrar el teorema de Nash.

TEOREMA:

Todo juego finito tiene un punto de equilibrio en términos de estrategias mixtas.

Demostración:

La correspondeucia de cada n-ada con las n-adas que lo dominan nos da un mapeo de una n-ada a muchas.

Demostremos en primer término que la imagen de cada punto es convexa.

Sean σ y ζ n-adas de estrategias que dominan a una n-ada γ.

P.d. $\lambda(\sigma)+(1-\lambda)(\zeta)$ es una n-ada de estrategias, siendo $0\leq\lambda\leq 1$.

i) $\sum_{k=1}^{b(i)}(\lambda\sigma_i^k+(1-\lambda)\zeta_i^k)=\lambda\sum_{k=1}^{b(i)}\sigma_i^k+(1-\lambda)\sum_{k=1}^{b(i)}\zeta_i^k=$

$=\lambda+(1-\lambda)=1.$

ii) $0 \leq \lambda\sigma_i^k + (1-\lambda)\zeta_i^k$

ya que $0 \leq \lambda \leq 1$ y $0 \leq \sigma_i^k$, $0 \leq \zeta_i^k$

$\therefore$ $\lambda(\sigma) + (1-\lambda)\zeta$ es una n-ada de estrategias mixtas.

P.d. $\lambda(\sigma) + (1-\lambda)(\zeta)$ domina a γ.

Para esto primero veremos que la función de pago es polylineal.

$$H^i(\gamma^1, \ldots, \gamma^{i-1}, \lambda\sigma^i + (1-\lambda)\zeta^i, \gamma^{i+1}, \ldots, \gamma^n) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{b(1)} \cdots \sum_{j_n=1}^{b(n)} H^i(s^1_{j_1}, \ldots, s^n_{j_n})\gamma^1_{j_1} \cdots (\lambda\sigma^i_{j_i} + (1-\lambda)\zeta^i_{j_i}) \cdots \gamma^n_{j_n} =$$

$$= \lambda \sum_{j_1=1}^{b(1)} \cdots \sum_{j_n=1}^{b(n)} (H^i(s^1_{j_1}, \ldots, s^n_{j_n})\gamma^1_{j_1} \cdots \gamma^i_{j_i} \cdots \gamma^n_{j_n}) +$$

$$+ (1-\lambda) \sum_{j_1=1}^{b(1)} \cdots \sum_{j_n=1}^{b(n)} (H^i(s^1_{j_1} \ldots s^n_{j_n})\gamma^1_{j_1} \cdots \zeta^i_{j_i} \cdots \gamma^n_{j_n} =$$

$$= \lambda H^i(\gamma^1, \ldots, \sigma^i, \ldots, \gamma^n) + (1-\lambda)\, H^i(\gamma^1, \ldots, \zeta^i, \ldots, \gamma^n)$$

para todo jugador i.

$\therefore$ La función de pago es polylineal.

$$H^i(\gamma^1, \ldots, \lambda\sigma^i + (1-\lambda)\zeta^i, \ldots, \gamma^n) = \lambda H^i(\gamma^1, \ldots, \sigma^i, \ldots, \gamma^n) +$$

$$+ (1-\lambda)(\gamma^1, \ldots, \zeta^i, \ldots, \gamma^n) \geq$$

$$\geq \lambda(H^i(\gamma^1, \ldots, P^i, \ldots, \gamma^n)) + (1-\lambda)\, H^i(\gamma^1, \ldots, P^i, \ldots, \gamma^n)$$

para toda P^i estrategia mixta del jugador i, ya que σ y ζ domina a γ.

$$\lambda(H^i(\gamma^1, \ldots P^i, \ldots, \gamma^n)) + (1-\lambda)\, H^i(\gamma^1, \ldots, P^i, \ldots, \gamma^n) =$$

$$= H^i(\gamma^1, \ldots, P^i, \ldots, \gamma^n)(\lambda + (1-\lambda)) = H^i(\gamma^1, \ldots, P^i, \ldots, \gamma^n)$$

Para toda P^i estrategia mixta del jugador i.

de aqui que :

$$H^i(\gamma',\ldots,\lambda\sigma^i+(1-\lambda)\tau^i,\ldots,\gamma^n) \geq H^i(\gamma',\ldots,P^i,\ldots,\gamma^n)$$

para toda P^i estrategia mixta del jugador i.

$\therefore \lambda\sigma+(1-\lambda)\tau$ domina a γ.

De aqui se concluye que la imagen de un punto es convexa.

Ahora se demostrará que la gráfica del mapeo es cerrada.

Que la gráfica sea cerrada es equivalente a:

Si $P_1, P_2, \ldots$ y $Q_1, Q_2 \ldots$ son dos sucesiones en el espacio producto de las estrategias y $P_n \longrightarrow P$, $Q_n \longrightarrow Q$ y ademas se tiene que Q_n domina a P_n entonces Q domina a P.

Con sideremos las sucesiones P_n y Q_n con $P_n \longrightarrow P$ y $Q_n \longrightarrow Q$; como la función de pago es continua entonces:

$$H^i(P_n) \longrightarrow H^i(P) \quad y \quad H^i(Q_n) \longrightarrow H^i(Q)$$

para toda i.

Como Q_n domina a P_n entonces:

$$H^j(p_1^n, p_2^n, \ldots, p_m^n) \leq H^j(p_1^n, \ldots, p_{j-1}^n, q_j^n, p_{j+1}^n, \ldots, p_m^n)$$

para toda estrategia q_j del jugador j, y para todo jugador j.

$$H^j(p_1^n, p_2^n, \ldots, p_m^n) \longrightarrow H^j(p_1, \ldots, p_m)$$

$$H^j(p_1^n, p_2^n, \ldots, q_j^n, \ldots, p_m^n) \longrightarrow H^j(p_1, \ldots, q_j, \ldots, p_m)$$

$$\therefore \quad H^j(p_1, \ldots, p_m) \leq H^j(p_1, p_2, \ldots, q_j, \ldots, p_m)$$

Ahora aplicando el teorema de Kakutani se tiene que existe un punto fijo, es decir un punto contenido en su imagen. De aqui que hay un punto de equilibrio.

B I B L I O G R A F I A

(1). Birch B. J.
On Games Whith Almost Complete Information.
J. Camb Philos. Soc. 51 (2), 1955. 275-287.

(2). Dalkey Norman.
Equivalence of Information Patters and Essentially Determined Games.
Contributions of de Theory of Games, Vol. 2
Ann. Math. Stud. 20, Princeton 1953. 217-245

(3). Kuhn H. W.
Extensive Games.
Proc. N.A.S. Vol. 36, 1950. pp. 570-576

(4). Nash J.
Equilibrium Points in N-Person Games.
Proc. N.A.S. Vol. 36, 1950. pp 48-49

(5). V. Neumann and O. Morgenstern.
Theory of Games and Economic Behavior.
Princeton University Press, 1970.

(6). Otter R. and Dunne J.
Games Whith Equilibrium Points.
Proc. N.A.S. Vol. 39, 1953. pp 310-314.

(7). Owen G.
Game Theory.
Saunders Co., Philadelphia, 1968.

(8). Vasilescu E. N.
On Extensive Games and
Almost Complete Information.
Int. Journal of Game Theory. Vol. 7, 1975
pp. 163-182.