22 ?. jul.

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

ANILLOS Y MODULOS DE COCIENTES.

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a :

JORGE ORTIZ ESPEJEL

México, D. F. 1981

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Indice:

Introducción

El proceso de localización en el Algebra conmutativa, es una herramienta de gran trascendencia surgida en la geometría algebraica y en la teoría de números. Su importancia radica en la interpretación algebrogeométrica que de ella podemos dar; esto es, el estudio de conjuntos abiertos o de vecindades de un punto, cuya importancia es indiscutible.

Recordemos que cuando A es un dominio entero conmutativo, el anillo de cocientes de A es, en este caso, su campo de fracciones Q, el cual esta caracterizado por las propiedades:

i) Para todo $q \in Q$, existe $s \in A$, $s \neq 0$ y tal que $sq \in A$.

ii) Q es máximo con la propiedad i).

Cuando A es un anillo conmutativo y S es un subconjunto multiplicativamente cerrado de A, el anillo de cocientes de A, denotado por $S^{-1}A$, se construye de una forma semejante al caso anterior: Primero consideramos la siguiente relación en $A \times S$, $(a,s) \sim (a',s')$ si y sólo si existe $s'' \in S$ tal que $s''s'a = s''sa'$; que esta relación es de equivalencia es trivial y a la clase de equivalencia de la pareja (a,s) se le denota por a/s. Entonces se define $S^{-1}A$ como el conjunto de clases de equivalencia bajo esta relación. Es fácil probar que $S^{-1}A$ cumple i) y ii).

En especial cuando $S = A - \{0\}$, $S^{-1}A$ es llamado el anillo clásico de cocientes de A.

Por otro lado, si $\mathfrak{F}$ es un filtro de ideales izquierdos de A, tal que

a) si $I \in \mathfrak{F}$ y $x \in A$, entonces $(I : x) \in \mathfrak{F}$

b) si $I \in \mathfrak{F}$ y J es un ideal izquierdo de A, tal que $(J : x) \in \mathfrak{F}$ para todo $x \in J$, entonces $J \in \mathfrak{F}$

se dice que $\mathfrak{F}$ es un filtro de Gabriel. Si consideramos el conjunto de morfismos $\varphi : I \to A$ para $I \in \mathfrak{F}$ e identificamos φ con $\psi : J \to A$, si $\varphi = \psi$ sobre $K \in \mathfrak{F}$ con $K \subseteq I \cap J$, se demuestra que este conjunto es precisamente el anillo de cocientes de A.

Ahora bien, dado un filtro de Gabriel $\mathfrak{F}$ y un módulo izquierdo M sobre A, definimos el módulo de cocientes de M sobre A, como el conjunto de morfismos $\varphi : I \to M$ con $I \in \mathfrak{F}$, en la misma forma que la del anillo de cocientes.

En el presente trabajo, tratamos este proceso de localización en forma más general, es decir, en Algebra no conmutativa y está basado en el artículo de Oscar Goldman: "Rings and Modules of Quotients".

Quiero agradecer al M. en C. José Ríos Montes no tan sólo su asesoramiento en

ESTE TRABAJO, SIN EL CUAL NO hubiese sido po_
sible, sino ADEMÁS, lA AYUDA QUE ME ha brin-
dado EN lA ORIENTACIÓN de mi CARRERA.

POR ÚLTIMO, AGRADEZCO A TODAS AQUELLAS PERSONAS QUE ME IMPULSARON A lo LARGO de lA MISMA.

§1. Preradicales

Sea A un anillo con 1; denotamos por A-mód a la categoria de todos los A-módulos izquierdos.

<u>Definición</u>: Un funtor σ de A-mód en si mismo es llamado un preradical, si tiene las propiedades siguientes:

1) $\sigma(M)$ es un submódulo de M, para todo A-módulo M.
2) Si $f: M' \to M$ es un morfismo de A-módulos, entonces $f\{\sigma(M')\} \subset \sigma(M)$ y $\sigma(f)$ es la restricción de f a $\sigma(M')$.

<u>1.1 Proposición</u>: Si σ es un prerradical, entonces σ es un funtor exacto izquierdo si y sólo si para todo $M \in A$-mód y M' submódulo de M, se tiene que $\sigma(M') = \sigma(M) \cap M'$.

<u>Demostración</u>; Sea σ un preradical, el cual es exacto izquierdo; sea $M \in A$-mód y M' submódulo de M. Como $M' \subset M \Rightarrow \sigma(M') \subset \sigma(M)$; además $\sigma(M') \subset M'$, entonces $\sigma(M') \subset \sigma(M) \cap M'$. Ahora consideremos la sucesión exacta de A-módulos

$$0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{P} M'' \to 0$$

Aplicando σ, obtenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{P} & M'' & \to & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \to & \sigma(M') & \to & \sigma(M) & \to & \sigma(M'') & & \end{array}$$

cuyos renglones son exactos. Sea $x \in \sigma(M) \cap M'$, Entonces $x \in \sigma(M) \subset M$, $x \in M'$. Como $\sigma(P) = P|_{\sigma(M)}$, se tiene que $\sigma(P)(x) = P(x) = 0$, ya que $\ker P = \operatorname{Im} i = M'$; es decir, $x \in \ker P = \operatorname{Im} \sigma(i) = \sigma(M')$.

Recíprocamente, si $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{P} M'' \to 0$ es una sucesión exacta de A-módulos, tenemos que:

$\sigma(P)\sigma(i) = \sigma(Pi) = Pi|_{\sigma(M')} = 0$ y $\sigma(i) = i|_{\sigma(M')}$, el cual es un monomorfismo. Entonces la sucesión $0 \to \sigma(M') \xrightarrow{\sigma(i)} \sigma(M) \xrightarrow{\sigma(P)} \sigma(M'')$ es exacta ∎

Denotamos por $\mathbb{K}(A)$, la totalidad de preradicales sobre A-mód.

La clase de objetos de A-mód no es un conjunto y a primera vista, podría pensarse que es el mismo caso para $\mathbb{K}(A)$. Como veremos más tarde, cada elemento de $\mathbb{K}(A)$ puede ser identificado con una familia de ideales de A de cierto tipo y de esta forma, $\mathbb{K}(A)$ será visto como un conjunto.

<u>Definición</u>: Si σ es un preradical exacto izquierdo, diremos que un A-módulo M es un módulo de σ-torsión, si $\sigma(M) = M$; y que es un módulo libre de σ-torsión, si $\sigma(M) = 0$.

<u>1.2</u> <u>Proposición</u>: Sea $\sigma \in \mathbb{K}(A)$ exacto izquierdo, entonces:

1) Si $0 \to M' \to M$ es exacta y M es de σ-torsión, entonces M' también lo es.
2) Si $M \to M'' \to 0$ es exacto y M es de σ-torsión, así también M'' lo es.
3) Si $0 \to M' \to M$ es exacta y M es libre de

σ-Torsion, así también M' lo es.

4) Para cualquier módulo M, $\sigma(M)$ es el mayor submódulo de σ-Torsión de M.

5) Producto directo de módulos libres de σ-Torsión es libre de σ-Torsión

6) Suma directa de módulos de σ-Torsión, es de σ-Torsión.

Demostración:

1) $M' \subset M \Rightarrow \sigma(M') = \sigma(M) \cap M' = M \cap M' = M'$.

2) Sea p el epimorfismo de M sobre M'', entonces $M'' = P(M) = P(\sigma(M)) \subset \sigma(M'')$

3) $M' \subset M \Rightarrow \sigma(M') = \sigma(M) \cap M' = 0 \cap M' = 0$

4) Como $\sigma(\sigma(M)) = \sigma(M) \cap \sigma(M) = \sigma(M)$, $\sigma(M)$ es de σ-Torsión. Supongamos que K es un submódulo de M tal que $\sigma(K) = K$, entonces $K = \sigma(K) = \sigma(M) \cap K$, es decir $K \subset \sigma(M)$.

5) Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia de A-módulos libres de σ-Torsion. Sea $x \in \sigma(\prod_J M_\alpha) \subset \prod_J M_\alpha$, basta ver que la α-ésima coordenada de x es cero, para toda $\alpha \in J$. Sea $p_\alpha : \prod_J M_\alpha \to M_\alpha$ la proyección canónica, entonces $x_\alpha = p_\alpha(x) = \sigma(p_\alpha)(x) \in \sigma(M_\alpha)$, pero $\sigma(M_\alpha) = 0$ para toda $\alpha \in J$, lo cual implica que $x_\alpha = 0$ para toda $\alpha \in J$, es decir $x = 0$.

6) Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia de A-módulos tales que $\sigma(M_\alpha) = M_\alpha$ para toda $\alpha \in J$; probaremos la siguiente igualdad: $\bigoplus_J \sigma(M_\alpha) = \sigma(\bigoplus_J M_\alpha)$

Obviamente $\sigma(\bigoplus_J M_\alpha) \subset \bigoplus_J M_\alpha = \bigoplus_J \sigma(M_\alpha)$

Sea $u_\alpha : \sigma(M_\alpha) \to \bigoplus_J \sigma(M_\alpha)$ la inclusion, para toda $\alpha \in J$ y $\sigma(u_\alpha): \sigma(M_\alpha) \to \sigma(\bigoplus_J M_\alpha)$ el morfismo inducido por u_α para toda $\alpha \in J$. Por la propiedad universal de la suma directa, existe un único morfismo $\varphi : \bigoplus_J \sigma(M_\alpha) \to \sigma(\bigoplus_J M_\alpha)$, tal que $\varphi u_\alpha = \sigma(u_\alpha)$ para toda $\alpha \in J$. La forma de definirlo es: $\varphi(\sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i}) = \sum_{i=1}^{n} \sigma(u_{\alpha_i})(x_{\alpha_i})$.
Es claro que φ es monomorfismo y por lo tanto $\bigoplus_J \sigma(M_\alpha) \subset \sigma(\bigoplus_J M_\alpha)$. Entonces

$$\sigma(\bigoplus_J M_\alpha) = \bigoplus_J \sigma(M_\alpha) = \bigoplus_J M_\alpha \quad \blacksquare$$

<u>Definición</u>: Un preradical exacto izquierdo σ, se dice que es un radical, si $\sigma(M/\sigma(M)) = 0$ para todo módulo M.

<u>Ejemplo</u> I: Sea $A = \mathbb{Z}$; para todo $M \in \mathbb{Z}$-mód, definimos $\sigma(M) = \{x \in M \mid \text{existe } n \neq 0 \ni nx = 0\}$. Entonces σ es un radical exacto izquierdo.
$\sigma(M)$ es submódulo de M ($M \in \mathbb{Z}$-mód), ya que:

a) $\sigma(M) \neq \phi$ pues $0 \in \sigma(M)$

b) Si $x, y \in \sigma(M) \Rightarrow$ existen $n \neq 0$, $m \neq 0 \ni nx = 0$, $my = 0$; entonces $nm \neq 0$ y $(nm)(x+y) = mnx + nmy = 0$, es decir $x+y \in \sigma(M)$

c) Sea $x \in \sigma(M)$, $r \in \mathbb{Z}$. $x \in \sigma(M) \Rightarrow$ existe $n \neq 0 \ni nx = 0$, pero $n(rx) = r(nx) = 0 \therefore rx \in \sigma(M)$.

Ahora bien, si $M, M' \in \mathbb{Z}$-mód y $f: M' \to M$ es un morfismo, $f(\sigma(M')) \subset \sigma(M)$, ya que:
$x \in f(\sigma(M')) \Rightarrow$ existe $y \in \sigma(M') \ni f(y) = x$; $y \in \sigma(M')$ implica que $y \in M'$ y que existe $m \neq 0 \ni my = 0$ entonces $mx = mf(y) = f(my) = f(0) = 0$; es de-

cir, $x \in \sigma(M)$ y por lo tanto $\sigma(f) = f|_{\sigma(M')}$. Entonces σ es preradical.

Queremos ver que σ es exacto izquierdo. Si $M \in \mathbb{Z}$-mód y M' es submódulo de M, $\sigma(M') \subset \sigma(M)$ puesto que $\sigma(M') = i(\sigma(M')) \subset \sigma(M)$, además $\sigma(M') \subset M'$ lo cual implica que $\sigma(M') \subset \sigma(M) \cap M'$.

Sea $x \in \sigma(M) \cap M'$, es decir $x \in M'$ y $x \in \sigma(M)$; entonces existe $n \neq 0 \ni nx = 0$, osea $x \in \sigma(M')$.

Vamos a mostrar que $\sigma(M/\sigma(M)) = 0$. Sea $\bar{x} \in \sigma(M/\sigma(M))$ esto implica que $\bar{x} \in M/\sigma(M)$ y que existe $n \neq 0 \ni$ $n\bar{x} = \bar{0} \Rightarrow nx \in \sigma(M) \Rightarrow nx \in M$ y existe $m \neq 0 \ni$ $m(nx) = 0$. Como $mn \neq 0 \Rightarrow x \in \sigma(M) \Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$, es decir $\sigma(M/\sigma(M)) = 0$. Entonces σ es radical ■

<u>Ejemplo II</u>: Sea $A = \mathbb{Z}$. Sea p un primo arbitrario y fijo. Para $M \in \mathbb{Z}$-mód, definimos

$$T_p(M) = \{x \in M \mid \text{existe } n \in \mathbb{N} \ni p^n x = 0\}$$

Entonces T_p es un radical exacto izquierdo.

$T_p(M)$ es submódulo de M ($M \in \mathbb{Z}$-mód), ya que:

a) $T_p(M) \neq \phi$ pues $0 \in T_p(M)$

b) Si $x, y \in T_p(M) \Rightarrow$ existen $n, m \in \mathbb{N} \ni p^n x = 0$, $p^m y = 0$. Como $n+m \in \mathbb{N}$ y $p^{n+m}(x+y) =$ $= p^m p^n x + p^n p^m y = 0$ entonces $x+y \in T_p(M)$

c) Sea $x \in T_p(M)$, $r \in \mathbb{Z}$. $x \in T_p(M) \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} \ni$ $p^n x = 0$. Entonces $p^n(rx) = r(p^n x) = 0$, es decir $rx \in T_p(M)$.

Ahora, si $M', M \in \mathbb{Z}$-mód y $f: M' \to M$ es un morfismo, $f(T_p(M')) \subset T_p(M)$, ya que si $x \in f(T_p(M'))$ implica que existe $y \in T_p(M') \ni f(y) = x$, pero

$y \in \tau_p(M') \Rightarrow$ EXISTE $m \in \mathbb{N} \ni p^m y = 0$. ENTONCES $p^m x = f(p^m y) = f(0) = 0$, ES DECIR $x \in \tau_p(M)$, CON lo cual $\tau_p(M) = f|_{\tau_p(M')}$.

τ_p ES EXACTO IZQUIERDO, YA QUE si $M \in \mathbb{Z}$-mód, y M' es submódulo de M: $\tau_p(M') \subset \tau_p(M)$ y $\tau_p(M') \subset M'$, POR lo TANTO $\tau_p(M') \subset \tau_p(M) \cap M'$. POR OTRA PARTE, si $x \in \tau_p(M) \cap M' \Rightarrow x \in M'$ y $x \in \tau_p(M) \Rightarrow x \in M'$ y EXISTE $n \in \mathbb{N} \ni p^n x = 0$ lo cual NOS dice QUE $x \in \tau_p(M')$

τ_p ES RADICAL, PUES si $\bar{x} \in \tau_p(M/\tau_p(M))$, ENTONCES $\bar{x} \in M/\tau_p(M)$ y EXISTE $n \in \mathbb{N} \ni p^n \bar{x} = \bar{0}$ lo QUE implica QUE $p^n x \in \tau_p(M) \Rightarrow p^n x \in \tau_p(M)$ y EXISTE $m \in \mathbb{N} \ni p^m(p^n x) = 0$; PERO $m+n \in \mathbb{N}$ y $p^{m+n} x = 0$, ES DECIR $x \in \tau_p(M) \Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$ y CONcluimos QUE τ_p ES RADICAL ■

<u>Ejemplo</u> III: SEA $A = \mathbb{Z}$. Si $M \in \mathbb{Z}$-mód, definimos

$$d(M) = \sum_{N \in \mathfrak{F}} N, \quad \text{donde } \mathfrak{F} = \{N \subset M \mid N \text{ es divisible}\}$$

ENTONCES d ES PRERADICAL, NO ES EXACTO IZQUIERDO, PERO $d(M/d(M)) = 0$.

PRIMERO PROBAREMOS QUE $d(M)$ ES EL MAYOR submódulo divisible de M.

Que es submódulo es obvio, POR SER SUMA de submódulos. Es divisible, YA QUE si $y \in d(M)$, ENTONCES $y = y_1 + \cdots + y_k$ CON k LA CARDINALIDAD de $\mathfrak{F}$, $y_i \in N_i \subset \mathfrak{F}$ $1 \le i \le k$ y $y_i = 0$ PARA CASI TODA i.

Si $n \in \mathbb{Z}$, como N_i es divisible PARA $1 \le i \le k$, EXISTE $x_i \in N_i \ni n x_i = y_i$, $1 \le i \le k$.

SEA $x = x_1 + \cdots + x_k$, ENTONCES $x \in d(M)$ y $nx = y$

para $n \in \mathbb{Z}$.

Es el mayor, ya que cualquier otro submódulo divisible debe estar en $d(M)$.

Si $M', M \in \mathbb{Z}$-mód y $f: M' \to M$ es un $\mathbb{Z}$-morfismo, que $f\{d(M')\} \subset d(M)$ es consecuencia de la afirmación anterior. Concluyendo que d es preradical.

No es exacto izquierdo, pues si $M = \mathbb{Q}$, $M' = \mathbb{Z}$ entonces $d(\mathbb{Z}) = 0$, $d(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ y obviamente $0 = d(\mathbb{Z}) \neq d(\mathbb{Q}) \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

Sin embargo, si $\bar{x} \in d(M/d(M))$, dado $n \in \mathbb{Z}$, existe $\bar{q} \in M/d(M)$ tal que $n\bar{q} = \bar{x}$. Entonces $(nq - x) \in d(M) \Rightarrow$ existe $q_0 \in M$ tal que $nq_0 = nq - x$, es decir, $n(q - q_0) = x \Rightarrow x \in d(M) \Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$ ∎

<u>Ejemplo IV</u>: Sea A un anillo y $M \in A$-mód. Definimos $S(M) = \sum_{N \in \mathfrak{F}} N$, donde $\mathfrak{F} = \{N \subset M \mid N \text{ es simple}\}$. A $S(M)$ se le llama el zoclo de M.

Afirmamos que S es un preradical exacto izquierdo y no es radical.

Obviamente $S(M)$ es submódulo de M; Ahora, si $M', M \in A$-mód y $f: M' \to M$ es un A-morfismo, mostraremos que $f\{S(M')\} \subset S(M)$. Pero notemos que si N es submódulo simple de M', entonces $f(N) = 0$ ó $f(N)$ es submódulo simple de M, ya que $(\operatorname{Ker} f) \cap N = \begin{cases} 0 \\ N \end{cases}$. Entonces $f(N) \subset S(M)$, es decir $f(S(M')) \subset S(M)$. Por lo tanto S es preradical.

Queremos ver que si M' es submódulo de M, Entonces $S(M') = S(M) \cap M'$. Pero la igualdad se sigue del hecho que si N es submódulo simple de M, entonces $N \cap M' = \begin{cases} 0 \\ N \end{cases}$.

S no es radical, pues si $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}_{p^2}$ con p primo, entonces $S(M) = p\mathbb{Z}_{p^2}$ y $M/S(M) = $
$= \mathbb{Z}_{p^2}/p\mathbb{Z}_{p^2} \simeq \mathbb{Z}_p$, el cual es simple. Entonces $S(M/S(M)) = \mathbb{Z}_p \neq 0$ ■

Nuestro primer paso en el estudio de los preradicales, será construir, para cualquier preradical exacto izquierdo, un radical, el es formado canonicamente del preradical dado.

<u>Definición</u>: Si σ es un preradical exacto izquierdo, definimos para todo $M \in A$-mód,
$\bar{\sigma}(M) = \bigcap_{N \in \mathfrak{F}} N$, donde $\mathfrak{F} = \{N \subset M \mid \sigma(M/N) = 0\}$.

Obviamente $\mathfrak{F} \neq \phi$, pues $M \in \mathfrak{F}$.

<u>1.3 Proposición</u>:

a) $\sigma(M) \subset \bar{\sigma}(M)$

b) Si $\sigma(M) = 0 \Rightarrow \bar{\sigma}(M) = 0$

c) $M/\bar{\sigma}(M)$ es libre de σ-torsión.

<u>Demostración</u>:

a) Sea $N \in \mathfrak{F}$. Consideremos la sucesión exacta
$$0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M/N \to 0$$
Como $p(\sigma(M)) \subset \sigma(M/N) = 0 \Rightarrow p(\sigma(M)) = 0$, es decir, $\sigma(M) \subset \ker p = \operatorname{Im} i = N$; pero esto para todo $N \in \mathfrak{F}$, entonces $\sigma(M) \subset \bigcap_{N \in \mathfrak{F}} N = \bar{\sigma}(M)$.

b) Si $\sigma(M) = 0 \Rightarrow \sigma(M/\sigma(M)) = \sigma(M) = 0$, entonces $0 = \sigma(M) \subset \bar{\sigma}(M) \Rightarrow \bar{\sigma}(M) = 0$.

c) Queremos ver que $\sigma(M/\bar{\sigma}(M)) = 0$; para ello, definamos $M' = M/\bar{\sigma}(M)$ y $\mathfrak{F}' = \{N' \subset M' \mid \sigma(M'/N') = 0\}$, entonces la correspondencia de $\mathfrak{F}'$ a $\mathfrak{F}$ tal que $(N/\bar{\sigma}(M)) \longrightarrow N$ es biyectiva y por lo tanto, $\bar{\sigma}(M')$ esta contenido en todos los elementos de $\mathfrak{F}'$, es decir $\bar{\sigma}(M/\bar{\sigma}(M)) = 0 \Rightarrow \sigma(M/\sigma(M)) = 0$ ■

1.4 Proposición:

a) Si $f: M' \rightarrow M$ es un morfismo de A-módulos, entonces $f\{\bar{\sigma}(M')\} \subset \bar{\sigma}(M)$

b) Si M' es submódulo de M, entonces $\bar{\sigma}(M') \subset M' \cap \bar{\sigma}(M)$.

Demostración:

a) Sea $\mathfrak{X} = f^{-1}\{\bar{\sigma}(M) \cap f(M')\}$; $\mathfrak{X}$ es submódulo de M. Entonces f induce un morfismo $g: M'/\mathfrak{X} \rightarrow M/\bar{\sigma}(M)$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{X} \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & M'/\mathfrak{X} \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bar{\sigma}(M) \arrow[r] & M \arrow[r] & M/\bar{\sigma}(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Esta g es monomorfismo, ya que si $\bar{x} \in \ker g$, sea x un representante de $\bar{x}$, entonces $\overline{f(x)} \in M/\bar{\sigma}(M)$. Como $\overline{f(x)} = g(\bar{x}) = \bar{0} \Rightarrow f(x) \in \bar{\sigma}(M) \Rightarrow x \in \mathfrak{X} \Rightarrow \bar{x} = 0$; por lo tanto $(M'/\mathfrak{X}) \subset M/\bar{\sigma}(M)$, además $\sigma(M/\bar{\sigma}(M)) = 0 \Rightarrow \sigma(M'/\mathfrak{X}) = 0 \Rightarrow \bar{\sigma}(M') \subset \mathfrak{X}$ y por lo tanto $f\{\bar{\sigma}(M')\} \subset \bar{\sigma}(M) \cap f(M') \subset \bar{\sigma}(M)$.

b) Como M' es submódulo de M, consideremos el morfismo inclución $i: M' \rightarrow M$; por a) $\bar{\sigma}(M') \subset \bar{\sigma}(M)$, además $\bar{\sigma}(M') \subset M'$, entonces $\bar{\sigma}(M') \subset M' \cap \bar{\sigma}(M)$ ■

1.5 Proposición: Si $M' \subset \bar{\sigma}(M) \subset M$, entonces $\bar{\sigma}(M/M') = \bar{\sigma}(M)/M'$.

Demostración: Por el Teorema del isomorfismo tenemos que $(M/M'/\bar{\sigma}(M)/M') \cong M/\bar{\sigma}(M)$, pero $\sigma(M/\bar{\sigma}(M)) = 0 \Rightarrow \sigma(M/M'/\bar{\sigma}(M)/M') = 0$, es decir

$(\bar{\sigma}(M)/M') \in \bar{\sigma}(M/M')$, que es el menor submódulo, entonces $\bar{\sigma}(M/M') \subset \bar{\sigma}(M)/M'$. Además, por 1.4, si $\pi: M \to M/M'$ es el epimorfismo canónico, tenemos que $\pi(\bar{\sigma}(M)) \subset \bar{\sigma}(M/M')$, pero $\pi(\bar{\sigma}(M)) = \bar{\sigma}(M)/M$, es decir $\bar{\sigma}(M)/M' \subset \bar{\sigma}(M/M')$ ∎

Definición: Se dice que un submódulo M es extensión esencial de un submódulo N, si $K \cap N \neq 0$ para todo submódulo $K \neq 0$ de M.

Si N es un submódulo arbitrario de M, existen submódulos N' de M tales que $N \cap N' = 0$, por ejemplo $N' = 0$. Por el Lema de Zorn, existe un N' tal que es máximo respecto a la propiedad $N \cap N' = 0$.

1.6 Proposición: Si N' es maximal respecto a la propiedad $N \cap N' = 0$, entonces M es extensión esencial de $N \oplus N'$.

Demostración: Supongamos que N' es maximal respecto a la propiedad $N \cap N' = 0$. Sea K submódulo de M, tal que $K \cap (N \oplus N') = 0 \Rightarrow K \cap N = 0 = K \cap N'$, lo que implica que $(K \oplus N') \cap N = 0$, ya que si $x \in (K \oplus N') \cap N$, entonces $x = k + n'$ y $x \in N$, con $k \in K$, $n' \in N'$, pero entonces $x - n' = k \in K$; además $x - n' \in N \oplus N' \Rightarrow k \in N \oplus N'$, pero $K \cap (N \oplus N') = 0$, entonces $k = 0 \Rightarrow x = n' \Rightarrow x = 0$. Ahora bien, si $K \neq 0$ tendríamos que $N' \subsetneq K \oplus N'$! entonces $K = 0$ ∎

1.7 Lema: Sea N un submódulo de M; sea N' maximal respecto a la propiedad $N \cap N' = 0$. Entonces M/N' es una extensión esencial de $(N \oplus N')/N' = N$.

Demostración: Sea K/N' submódulo de M/N' tal

que $(K/N') \cap (N \oplus N'/N') = 0 \Rightarrow K \cap (N \oplus N') = N'$
$\Rightarrow K \subset N'$, pero $N' \subset K \Rightarrow K = N' \Rightarrow K/N' = 0$ ■

1.8 Proposición: Si $N \subset \bar{\sigma}(L) \subset L$ y $\sigma(N) = 0$, entonces $N = 0$.

Demostración: Sea N' maximal respecto a $N \cap N' = 0$. Afirmamos que $\pi(N) \cong N$, donde π es el epimorfismo canónico $\pi : L \to L/N'$, esto es porque $N \cap N' = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} \pi/_N = 0$, como π es epimorfismo $\pi(N) \cong N$, pero $\sigma(N) = 0 \Rightarrow \sigma(\pi(N)) = 0$. Además $\pi(L) = L/N'$ y $\pi(N) = N$, por 1.7 tenemos que $\pi(L)$ es extensión esencial de $\pi(N)$. Pero $\sigma(\pi(N)) = \pi(N) \cap \sigma(\pi(L))$, ya que $\pi(N) \subset \pi(L)$, y $\sigma(\pi(N)) = 0 \Rightarrow \pi(N) \cap \sigma(\pi(L)) = 0$ y $\pi(N) \cong N \neq 0$ $\Rightarrow \sigma(\pi(L)) = 0$. Pero $\pi(L) = L/N'$, entonces $\sigma(L/N') = 0 \Rightarrow \bar{\sigma}(L) \subset N'$. Además $N \subset \bar{\sigma}(L)$ y $N' \cap N = 0$, por lo tanto $N = 0$ ■

1.9 Teorema: $\bar{\sigma}$ es un preradical exacto izquierdo.

Demostración: Que $\bar{\sigma}(M)$ es submódulo de M, por ser intersección de submódulos.
Si $f : M' \to M$ es un morfismo de A-módulos, por 1.4, a) $f\{\bar{\sigma}(M')\} \subset \bar{\sigma}(M)$.
Supongamos que M' es submódulo de M, queremos mostrar que $\bar{\sigma}(M') = M' \cap \bar{\sigma}(M)$.
Por 1.4, b) $\bar{\sigma}(M') \subset M' \cap \bar{\sigma}(M)$.
Sean $L = M/\bar{\sigma}(M')$, $N = M' \cap \bar{\sigma}(M)/\bar{\sigma}(M')$; vamos a ver que la proposición 1.8 es aplicable, para ello necesitamos ver que $N \subset \bar{\sigma}(L)$ y $\sigma(N) = 0$.
Como $M' \cap \bar{\sigma}(M) \subset M' \Rightarrow N = [M' \cap \bar{\sigma}(M)/\bar{\sigma}(M')] \subset M'/\bar{\sigma}(M')$

por 1.3 tenemos que $\sigma(M'/\sigma(M'))=0$
$\Rightarrow \sigma(N)=0$. Además, ya que $\bar{\sigma}(M')\subset\bar{\sigma}(M)$, por 1.5 tenemos que $\bar{\sigma}(L)=\bar{\sigma}(M/\bar{\sigma}(M'))=$
$=\bar{\sigma}(M)/\bar{\sigma}(M')$, pero $\bar{\sigma}(M')\subset\bar{\sigma}(M)\subset M$ y nuevamente por 1.5, tenemos que:
$\bar{\sigma}(L)=\bar{\sigma}(M/\bar{\sigma}(M'))=\bar{\sigma}(M)/\bar{\sigma}(M')\supset\bar{\sigma}(M)\cap M'/\bar{\sigma}(M')=N$, entonces la proposición 1.8 nos dice que $N=0$ lo cual implica que $(M'\cap\bar{\sigma}(M))\subset\bar{\sigma}(M')$. Por lo tanto $\bar{\sigma}$ es un preradical exacto izquierdo ∎

Observemos que por 1.3, $\sigma(M/\bar{\sigma}(M))=0$, lo que implica que $\bar{\sigma}(M/\bar{\sigma}(M))=0$, es decir, $\bar{\sigma}(M)$ es un radical.

<u>1.10 Proposición</u>: Si σ es un preradical exacto izquierdo, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) σ es un radical
2) Si $0\to M'\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}M''\to 0$ es exacta y M', M'' son módulos de σ-torsión, entonces M también es de σ-torsión.

<u>Demostración</u>:

1) $\Rightarrow$ 2) Como $\sigma(M')=M'$, entonces
$f(M')=f(\sigma(M'))\subset\sigma(M)$, por 1.5 tenemos que
$\sigma(M/f(M'))=\sigma(M)/f(M')$, pero
$\sigma(M)/M'=\sigma(M/M')=\sigma(M'')=M''=M/M'$, entonces $\sigma(M)=M$.

2) $\Rightarrow$ 1) Consideremos la sucesión exacta

$$0\to\sigma(M)\to M\xrightarrow{\pi}M/\sigma(M)\to 0$$

Sea $N=\pi^{-1}\{\sigma(M/\sigma(M))\}$. Como $\pi(\sigma(M))=0$

Tenemos que $\sigma(M) \subset N$, entonces $N/\sigma(M) = \sigma(M/\sigma(M))$ lo que significa que $N/\sigma(M)$ es de σ-Torsión; entonces $0 \to \sigma(M) \to N \to N/\sigma(M) \to 0$ es exacta y $\sigma(M)$ y $N/\sigma(M)$ son de σ-Torsión, por hipotesis tenemos que $\sigma(N) = N$ y ya que $N \subset M$ $N = \sigma(N) = N \cap \sigma(M) \Rightarrow N \subset \sigma(M)$; entonces $N = \sigma(M)$, lo cual implica que $\sigma(M/\sigma(M)) = \pi(N) = \pi(\sigma(N)) = 0$. Es decir σ es un radical $\bullet$

§2. Filtros de Gabriel

Si σ es un preradical exacto izquierdo, denotamos por $\mathfrak{F}_\sigma$ al siguiente conjunto:

$$\mathfrak{F}_\sigma = \{ I \subset A \mid I \text{ es ideal izquierdo de } A \text{ y } \sigma(A/I) = A/I \}$$

<u>2.1 Teorema</u>: $\mathfrak{F}_\sigma$ tiene las siguientes propiedades:

1) Si $I \in \mathfrak{F}_\sigma$ y J es un ideal izquierdo tal que $I \subset J$, entonces $J \in \mathfrak{F}_\sigma$.

2) Si $I, J \in \mathfrak{F}_\sigma$, entonces $(I \cap J) \in \mathfrak{F}_\sigma$.

3) Si $I \in \mathfrak{F}_\sigma$ y $x \in A$, entonces hay un $J \in \mathfrak{F}_\sigma$ tal que $Jx \subset I$.

4) Si $M \in A$-mód, entonces $x \in \sigma(M)$ si y sólo si existe $I \in \mathfrak{F}_\sigma$ tal que $Ix = 0$.

<u>Demostración</u>:

1) Sea $I \in \mathfrak{F}_\sigma$, J ideal izquierdo tal que $I \subset J$. Consideremos el siguiente diagrama con renglones exactos:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"'] & A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "1"] & A/I \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & J \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] & A/J \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

entonces existe un epimorfismo $f: A/I \longrightarrow A/J$, definido de la siguiente manera: Si $\bar{x} \in A/I$, sea x un representante de $\bar{x}$; entonces $f(\bar{x}) = g(x)$. Es obvio que es un epimorfismo y por lo tal, $f(A/I) = A/J$; pero A/I es de σ-torsión, entonces por 1.2, 2) A/J es de σ-torsión, lo cual nos dice que $J \in \mathfrak{F}_\sigma$.

2) Sean $I, J \in \mathfrak{F}_\sigma$. Por la propiedad universal del producto directo, tenemos un monomorfismo

de $A/I\cap J$ en $A/I \oplus A/J$; es decir, $A/I\cap J$ es isomorfo a un submódulo M de $A/I \oplus A/J$. Como $I, J \in \mathfrak{F}_\sigma$, por 1.2, 6) y 1.2, 1) tenemos que M es de σ-torsión, lo cual implica que $A/I\cap J$ es de σ-torsión y por lo tanto $I \cap J \in \mathfrak{F}_\sigma$.

3) Sea $J = \{b \in A \mid bx \in I\} = (I:x)$. Sea $\bar{x}$ la imagen de x en A/I. Entonces

$an(\bar{x}) = \{b \in A \mid b\bar{x} = \bar{0}\} = \{b \in A \mid \overline{bx} = \bar{0}\} = \{b \in A \mid bx \in I\} = (I:x)$

De donde $A/(I:x) \cong \langle \bar{x} \rangle \subset A/I$. Como $I \in \mathfrak{F}_\sigma$, por 1.2, 1) tenemos que $\sigma(\langle \bar{x} \rangle) = \langle \bar{x} \rangle$, de donde $\sigma(A/(I:x)) = A/(I:x)$, es decir $(I:x) \in \mathfrak{F}_\sigma$. Es obvio que $(I:x)\, x \subset I$.

4) Sea $M \in A$-Mód. Sea $x \in M$, $I = an(x)$. Como $A/I \cong \langle x \rangle$, entonces $x \in \sigma(M)$ si y sólo si $\langle x \rangle \subset \sigma(M)$, esto si y sólo si $\langle x \rangle$ es de σ-torsión, lo cual es equivalente a que A/I es de σ-torsión y por definición $I \in \mathfrak{F}_\sigma$ ■

Un conjunto $\mathfrak{F}$ de ideales izquierdos de A, el cual tiene las propiedades 1), 2), 3) del Teorema anterior, define una topología en A, al tomar como vecindades del 0 los ideales que están en $\mathfrak{F}$. En general, si $a \in A$, una vecindad de a es $(a+I)$ con $I \in \mathfrak{F}$; entonces un subconjunto S de A es abierto si y sólo si para todo $x \in S$, existe $I \in \mathfrak{F}$ tal que $(x+I) \subset S$.

Las condiciones 1) y 2) combinadas con el hecho que cualquier $I \in \mathfrak{F}$ es un subgrupo del grupo aditivo de A, nos dicen que realmente tenemos definida una topología y de esta forma, que bajo la suma obtenemos un grupo abeliano topológico. Vamos a demostrar que las operaciones de grupo $+: G\times G \to G$ $\cdot\ni\cdot$ $(a,b)\rightsquigarrow a+b$ y $-: G\to G$ $\cdot\ni\cdot$ $a \rightsquigarrow -a$ son continuas. Para ello basta probarlo en vecindades.

Sea $(a,b)\in G\times G$. Si $I\in\mathfrak{F}$, entonces $(a+b)+I$ es vecindad de $a+b$ en A. Pero $(a+I)\times(b+I)$ es vecindad de (a,b) en $G\times G$ y $(a+x, b+y)$ tiene como imagen a $((a+b)+(x+y))\in(a+b)+I$ con $x, y\in I$. Entonces $+$ es continua.

Analogamente $-: G\to G$, ya que si $-a\in G$, entonces para $I\in\mathfrak{F}$, $-a+I$ es vecindad de $-a$, pero $a+I$ es vecindad de a y $a+x\rightsquigarrow(-a-x)\in -a+I$ con $x\in I$, entonces $-$ es continua.

Es más, la condición 3) junto con el hecho que $I\in\mathfrak{F}$ es un ideal izquierdo, también afirma que A es un anillo topológico. Sea $\cdot: A\times A\to A$ $\cdot\ni\cdot$ $(a,b)\rightsquigarrow ab$. Si $I\in\mathfrak{F}$, $ab+I$ es vecindad de ab. Queremos encontrar una vecindad en $A\times A$ que se mapée en $ab+I$. Propongamos $(a+J)\times(b+I)$. Entonces $(a+j, b+i)\rightsquigarrow ab+jb+ai+ji$ con $j\in J$, $i\in I$. Como I es ideal izquierdo, entonces $(ai+ji)\in I$. Necesitamos que $jb\in I$. Pero $jb\in I \Longleftrightarrow j\in(I:b)$. Sea $J=(I:b)$, que está en $\mathfrak{F}$; entonces $(a+J, b+I)\rightsquigarrow ab+I$. Es decir, A es un anillo topológico.

2.2 Proposición: El anillo topológico A, con la topología generada por $\mathfrak{F}_\sigma$ es T_1 si y solamente si es T_2.

Demostración: Sea $C(0)=\{x\in A \mid \forall\, I\in\mathfrak{F}_\sigma,\ 0\in x+I\}$. Vamos a demostrar que A es T_1 si y sólo si $C(0)=\{0\}$. $0\in x+I$ con $x\in C(0)$ si y sólo si $0=x+a$, $a\in I$, es decir $a=-x$ y esto si y sólo si $x\in I$. Pero entonces $C(0)=\bigcap_{I\in\mathfrak{F}_\sigma} I$, lo cual implica que $C(a)=\bigcap_{I\in\mathfrak{F}_\sigma}(a+I)$ para toda $a\in A$. Entonces tenemos que $\{0\}$ es cerrado si y sólo si $\{0\}=C(0)$ y esto si y sólo si A es T_1.

Ahora mostraremos que A es T_2 si y sólo si $C(0)=0$. Como todo T_2 es T_1, entonces obviamente si A es T_2 implica que $C(0)=0$. Recíprocamente, sean $a,b\in A$ con $a\neq b$, entonces $a-b\neq 0$, lo cual implica que existe $I\in\mathfrak{F}_\sigma$ tal que $a-b\notin I$. Entonces $(a+I)\cap(b+I)=\emptyset$, ya que si $x\in(a+I)\cap(b+I)$ tendríamos que $x=a+r=b+r'$ con $r,r'\in I$, lo cual nos dice que $(a-b)=(r'-r)\in I$ ▼. Entonces A es T_2. Es decir, A es T_1 si y sólo si A es T_2 ∎

2.3 Teorema: Sea $\mathfrak{F}\neq\emptyset$ un conjunto de ideales izquierdos de A que cumplen con las propiedades 1), 2) y 3) del Teorema 2.1; Si M es cualquier A-módulo, sea $\rho(M)=\{x\in M \mid Ix=0$ para algún $I\in\mathfrak{F}\}$. Entonces ρ es preradical exacto izquierdo y $\mathfrak{F}_\rho=\mathfrak{F}$.

Demostración: $\rho(M)\neq\emptyset$ ya que $0\in\rho(M)$. $\rho(M)$ es submódulo de M, ya que si $x,y\in\rho(M)$, existen $I, J \in \mathfrak{F}$ tales que $Ix=0$, $Jy=0$. Por 2.1, 2) $I \cap J \in \mathfrak{F}$. Además $(I\cap J)(x+y)=0$, es decir $x+y \in \rho(M)$. Ahora, si $\alpha \in A$, $x \in \rho(M)$, existe $I \in \mathfrak{F}$ $\cdot\ni\cdot$ $Ix=0$; por hipótesis $J=(I:\alpha)\in\mathfrak{F}$ y $J\alpha \subset I \Rightarrow J\alpha x \subset Ix = 0$, es decir $\alpha x \in \rho(M)$. Entonces $\rho(M)$ es submódulo de M.

Sea M' submódulo de M, $\rho(M') \subset M'$ por ser submódulo. Si $x \in \rho(M')$, por definición $x \in M' \subset M$ y existe $I \in \mathfrak{F}$ tal que $Ix=0$; es decir $x \in \rho(M)$. Entonces $\rho(M') \subset \rho(M) \cap M'$.

Analogamente, si $x \in M' \cap \rho(M)$, entonces $x \in M' \subset M$ y existe $I \in \mathfrak{F}$ $\cdot\ni\cdot$ $Ix=0$; es decir $x \in \rho(M')$. Por lo tanto $\rho(M') = M' \cap \rho(M)$ y entonces ρ es exacto izquierdo.

Si $f: M' \to M$ es un morfismo de A-módulos y $x \in \rho(M')$, entonces $x \in M'$ y existe $I \in \mathfrak{F}$ $\cdot\ni\cdot$ $Ix=0$; pero esto implica que $If(x)=0$, ya que si $y \in If(x)$, entonces $y = af(x)$ con $a \in I$, es decir $y = af(x) = f(ax) = f(0) = 0$.

Como $f(x) \in M$ y $If(x)=0$, tenemos que $f(\rho(M')) \subset \rho(M)$. Entonces ρ es un preradical exacto izquierdo.

Observemos que $\mathfrak{F}_\rho = \{I \subset A \,/\, I$ es ideal izquierdo de A y $\rho(A/I) = A/I\}$ y que para cualquier ideal izquierdo I de A, el módulo A/I es cíclico y esta generado por la imagen del 1. Sea $\bar{1}$ la imagen del 1 en A/I. Entonces $I \in \mathfrak{F}_\rho$ si y sólo si $\rho(A/I) = A/I$ si y sólo si $\forall\ \bar{x} \in A/I$, $an(\bar{x}) \in \mathfrak{F}$ lo cual es equivalente a que $an(I) \in \mathfrak{F}$ y esto si y sólo si $I \in \mathfrak{F}$. Es decir $\mathfrak{F}_{\rho} = \mathfrak{F}$ ∎

De esta forma, hemos establecido una correspondencia uno a uno entre las clases de preradicales exactos izquierdos de A y el conjunto de anillos topológicos de A de cierto tipo. En particular, tenemos que $\mathbb{K}(A)$ es un conjunto.

Debemos identificar a todo preradical exacto izquierdo con su topología asociada a A.

Cualquier anillo tiene dos topologías particulares del tipo que estamos considerando:
La primera hace a A discreto, con $\mathfrak{F}$ el conjunto de todos los ideales izquierdos. El preradical exacto izquierdo correspondiente a esta topología, lo denotaremos por ∞. Entonces $\infty(M) = M$ para todo $M \in$ A-Mód, ya que $\infty(M) \subset M$ por definición y por otra parte si $x \in M$, como $an(x)$ es ideal izquierdo de A, entonces $an(x) \in \mathfrak{F}$. Además $(an(x))x = 0$, es decir $x \in \infty(M)$.
La segunda es del todo opuesta: $\mathfrak{F}$ consiste solamente de A. Para ésta, el preradical exacto izquierdo asociado será denotado por 0 y tenemos que $0(M) = 0$, para todo $M \in$ A-Mód, ya que si $x \in 0(M)$, entonces $x \in M$ y $Ax = 0$; es decir $Ax = 0 \Rightarrow ax = 0$ para todo $a \in A$, entonces $x = 0$.

Dado σ un preradical exacto izquierdo, sea $\mathfrak{F}(M) = \{N \subset M / N$ es submódulo de M y $\sigma(M/N) = M/N\}$

<u>2.4 Proposición</u>: En $\mathfrak{F}(M)$ se cumplen las siguientes afirmaciones:

1) Si $N \in \mathfrak{F}(M)$ y $N \subset K$, entonces $K \in \mathfrak{F}(M)$
2) Si $N, K \in \mathfrak{F}(M)$, entonces $(N \cap K) \in \mathfrak{F}(M)$
3) Si $N \in \mathfrak{F}(M)$ y $x \in M$, entonces $(N:x) = \{a \in A \mid ax \in N\} \in \mathfrak{F}(M)$.

<u>Demostración</u>: Identica a la demostración del Teorema 2.1 ■

Entonces un preradical exacto izquierdo da lugar no solamente a una topologia en A, sino de hecho, define una topologia en todo A-módulo.

Si σ es un preradical exacto izquierdo, un módulo M adquiere una topologia al tomar como una base para las vecindades del 0, los submódulos N para los cuales M/N es un módulo de σ-torsión. En general, si $a \in M$, una vecindad de a es $(a+N)$ con $N \in \mathfrak{F}(M)$. Entonces un subconjunto S de M es abierto si y sólo si para todo $x \in S$, existe $N \in \mathfrak{F}(M)$ tal que $(x+N) \subset S$. Esto da a un módulo una topologia, bajo la cual, su grupo aditivo es un grupo abeliano topológico:

Sea $M \in A$-mód. Entonces M es un grupo abeliano. Queremos ver $+ : M \times M \to M$ $\cdot\ni\cdot$ $(a,b) \rightsquigarrow a+b$ y $- : M \to M$ $\cdot\ni\cdot$ $a \rightsquigarrow -a$ son continuas. Basta probarlo para vecindades:

Sea $(a,b) \in M \times M$. Si $N \in \mathfrak{F}(M)$, entonces $(a+b)+N$ es vecindad de $a+b$ en M. Como $(a+N) \times (b+N)$ es vecindad de (a,b) y $(a+x, b+y) \rightsquigarrow ((a+b)+(x+y)) \in (a+b)+N$ con $x,y \in N$, entonces $+$ es continua. Analogamente, si $-a \in G$, entonces para $N \in \mathfrak{F}(M)$, $-a+N$ es vecindad de $-a$, pero $a+N$ es vecindad de a y $a+x \rightsquigarrow (-a-x) \in -a+N$ con $x \in N$. Entonces $-$ es continua.

Sin embargo, M no tan solo es un grupo abeliano topológico, sino un A-módulo topológico, en el sentido de que el mapeo $\cdot : A \times M \to M$ $\cdot \ni \cdot$ $(a,m) \rightsquigarrow am$ es continuo, ya que si $am \in M$, con $a \in A$, $m \in M$ y $N \in \mathfrak{F}(M)$, entonces $am+N$ es vecindad de am. Queremos una vecindad de (a,m) que se mapée en $am+N$. Propongamos $(a+I) \times (m+N)$; entonces $(a+b, m+n) \rightsquigarrow am+bm+an+bn$, con $b \in I$, $n \in N$; necesitamos que $bm+an+bn \in N$. Como N es submódulo, $(an+bn) \in N$. Ahora bien, $bm \in N$ si y sólo si $b \in (N:m)$. Sea $I=(N:m)$ que esta en $\mathfrak{F}(M)$. Entonces $(a+I, m+N) \rightsquigarrow am+N$. Es decir, M es un A-módulo topológico.

Esta topologia sobre todo A-módulo, será llamada cuando sea conveniente, la σ-topologia.

Observemos que la σ-topologia de A, cuando consideramos a A como un módulo izquierdo sobre si mismo, coincide con la topologia $\mathfrak{F}_\sigma$.

<u>2.5 Proposición</u>: Sea M', $M \in A$-mód. En la σ-topologia todo morfismo $f: M' \to M$ es continuo.

<u>Demostración</u>: Sea $N \in \mathfrak{F}(M)$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & N & \to & M & \to & M/N & \to & 0 \\ & & \uparrow f_0 & & \uparrow f & & & & \\ 0 & \to & f^{-1}(N) & \to & M' & \to & M'/f^{-1}(N) & \to & 0 \end{array}$$

donde f_0 es la restricción de f a $f^{-1}(N)$.
La conmutatividad del primer cuadro induce un monomorfismo $\varphi: M'/f^{-1}(N) \to M/N$. Como M/N es de σ-torsión, entonces $M'/f^{-1}(N)$ es de σ-torsión. Es decir $f^{-1}(N) \in \mathfrak{F}(M')$ ∎

Sea σ un preradical exacto izquierdo fijo. Si N es un submódulo de M, entonces N tiene dos topologias. A saber, su propia σ-topologia y la topologia inducida por la σ-topologia de M.

En general, no hay razón para que estas topologias coincidan. De hecho, un submódulo K de N esta en la topologia inducida por la σ-topologia de M si y solo si existe $N' \in \mathfrak{F}(M)$ tal que $N' \cap N = K$. Además, para todo $K \in \mathfrak{F}(M)$, $K \cap N$ es abierto relativo en N y en este sentido, la topologia inducida por M en N es más débil que la topologia definida por $\mathfrak{F}(N)$.

Resumiendo, bajo la condición que M/N es un módulo de σ-torsión, la coincidencia de las dos topologias en N, es equivalente a lo siguiente: Si N' es un submódulo de N, entonces N' es abierto en N si y sólo si N' es abierto en M.

2.6 Proposición: Sea σ un preradical exacto izquierdo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) σ es un radical

2) Para cualquier módulo M, la topologia inducida por la σ-Topologia de M en cualquier submódulo N σ-abierto, coincide con la σ-Topologia de N.

Demostración:

1) $\Rightarrow$ 2). Si N' es abierto en M, entonces M/N' es un módulo de σ-torsión y como N/N' es submódulo de M/N', entonces N/N' es tambien un módulo de σ-torsión. Es decir, N' es abierto en M.

Ahora supongamos que N' es abierto en N y N es abierto en M. Esperamos inferir que N' es abierto en M. Sean $L' = N/N'$, $L = M/N'$ y $L'' = M/N$. Entonces tenemos la sucesión exacta $0 \to L' \to L \to L'' \to 0$. Por hipótesis y por la proposición 1.10, tenemos que L es de σ-torsión, es decir N' es abierto en M.

2) $\Rightarrow$ 1) Observemos antes que: Si $M \in A$-mód, entonces $\sigma(M) = M$ si y sólo si $\mathfrak{F}(M) = \{N \subset M \mid N$ es submódulo de $M\}$.

Supongamos que $K/\sigma(M) = \sigma(M/\sigma(M))$. Como $K/\sigma(M)$ es de σ-torsión, entonces $\sigma(M) \in \mathfrak{F}(K)$; por la observación tenemos que $\{0\} \in \mathfrak{F}(\sigma(M))$, entonces $\{0\} \in \mathfrak{F}(K)$, lo cual implica que $\sigma(K) = K$. Por otra parte, $\sigma(K) = K \cap \sigma(M)$. Entonces $K \subset \sigma(M) \Rightarrow K/\sigma(M) = 0$. Es decir,

σ es un radical $\bullet$

Sean ρ y σ preradicales exactos izquierdos de A. Entonces un A-módulo M tiene dos Topologias y podemos preguntarnos: ¿Cuando el morfismo identidad de M en sí mismo es continuo de la ρ-Topologia a la σ-Topologia? Esto es equivalente a la condición que, para cualquier submódulo N de M tal que $\sigma(M/N) = M/N$, implique que $\rho(M/N) = M/N$. En particular, para $M=A$ esta condición es expresada como $\mathfrak{F}_\sigma \subset \mathfrak{F}_\rho$. Esta observación sugiere la siguiente:

<u>Definición</u>: Si ρ y σ son preradicales exactos izquierdos, escribimos $\sigma < \rho$ cuando $\sigma(M) \subset \rho(M)$ para todo módulo M.

Esto es equivalente a $\mathfrak{F}_\sigma \subset \mathfrak{F}_\rho$, ya que $I \in \mathfrak{F}_\sigma$ si y sólo si $A/I = \sigma(A/I) \subset \rho(A/I) \subset A/I$, es decir $\rho(A/I) = A/I$ y esto pasa si y sólo si $I \in \mathfrak{F}_\rho$. Esto define un orden parcial sobre el conjunto de preradicales exactos izquierdos, el cual usaremos más tarde.

Finalmente regresamos al problema de la continuidad del morfismo identidad; la condición $\sigma < \rho$ es equivalente a la continuidad del morfismo identidad de un módulo M en sí mismo, de la ρ-Topologia a la σ-topologia.

Es obvio de la definición, que $0 < \sigma < \infty$ para todo σ preradical exacto izquierdo. Tambien por la proposición 1.3, a) tenemos que $\sigma < \bar{\sigma}$.

2.7 Teorema: $\bar{\sigma}$ es el menor radical exacto izquierdo, el cual es mayor que σ. A saber, si $\sigma < \rho$, entonces $\bar{\sigma} < \bar{\rho}$.

Demostración: Por 1.3, c) $\rho(M/\bar{\rho}(M)) = 0$ y como $\sigma < \rho$, tenemos que $\sigma(M/\bar{\rho}(M)) = 0$ y de esta forma $\bar{\sigma}(M) \subset \bar{\rho}(M)$ ∎

Las proposiciones 1.10 y 2.6 nos dan un criterio para determinar cuando un preradical exacto izquierdo es un radical. Como expresan la condición en terminos de todos los módulos, no son en general, de utilidad práctica. Por la importancia de los radicales en la definición de módulos de cocientes, necesitamos un criterio simple.

2.8 Teorema: Si σ es un preradical exacto izquierdo, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) σ es un radical
2) Si $J \subset I$ son ideales izquierdos de A tales que $I \in \mathfrak{F}_\sigma$ y I/J es un módulo de σ-torsión, entonces $J \in \mathfrak{F}_\sigma$.

Demostración:

1) $\Rightarrow$ 2) Como J es abierto en I e I es abierto en A, por 2.6, J es abierto en A; esto es $\sigma(A/J) = A/J$.

2) $\Rightarrow$ 1) Sea $M \in A$-mód y $\pi: M \to M/\sigma(M)$ el epimorfismo canónico. Sea $x \in M$ tal que $\pi(x) \in \sigma(M/\sigma(M))$. Sea I el anulador de $\pi(x)$

y J el anulador de x. Entonces $J \subset I$ y $I \in \mathcal{F}_\sigma$. Además $I/J \subset \sigma(M)$, ya que tenemos el siguiente diagrama con renglones exactos:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I/J \arrow[r] & A/JI \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[d, "f"] & A/I \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \sigma(M) \arrow[r] & M \arrow[r, "\pi"] & M/\sigma(M) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde $f(\bar{1}) = x$ y $g(\bar{1}) = \pi(x)$. El cuadrado es conmutativo, ya que $g\pi^*(\bar{1}) = g(\bar{1}) = \pi(x) = \pi f(\bar{1})$. Entonces existe $i: I/J \to \sigma(M)$ monomorfismo, tal que el cuadrado que se forma es conmutativo. Es decir $I/J \subset \sigma(M)$, pero $\sigma(M)$ es de σ-torsión, lo cual implica que $\sigma(I/J) = I/J$. Por hipótesis tenemos que $J \in \mathcal{F}_\sigma$ y por tanto $x \in \sigma(M)$. De esta forma $\pi(x) = 0$ y σ es un radical ∎

<u>2.9</u> <u>Corolario</u>: Si σ es un radical exacto izquierdo y J, I son ideales en $\mathcal{F}_\sigma$, entonces $IJ \in \mathcal{F}_\sigma$.

<u>Demostración</u>: Claramente $IJ \subset J$ y cualquier elemento de J/IJ es anulado por I. Entonces $\sigma(J/IJ) = J/IJ$ y por el teorema anterior $IJ \in \mathcal{F}_\sigma$ ∎

§ 3. El Módulo de Cocientes

Sea σ un preradical exacto izquierdo

<u>Definición</u>: Un A-módulo E es llamado $\mathfrak{F}_\sigma$-inyectivo, si cumple la siguiente propiedad: Si M es cualquier A-módulo y N es un submódulo de M tal que $N \in \mathfrak{F}(M)$, entonces todo morfismo de N a E, se extiende a un morfismo de M a E. El módulo E es llamado $\mathfrak{F}_\sigma$-cerrado, si con la misma notación, el morfismo de N a E, tiene una extension única a M.

<u>3.1</u> <u>Proposición</u>: Son equivalentes:

1) E es $\mathfrak{F}_\sigma$-cerrado

2) E es $\mathfrak{F}_\sigma$-inyectivo y $\sigma(E) = 0$

<u>Demostración</u>:

1) ⇒ 2) Claramente E es $\mathfrak{F}_\sigma$-inyectivo. Consideremos la sucesión exacta $0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \sigma(E)$ y el morfismo $0 \xrightarrow{0} E$. Entonces tenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & \sigma(E) \arrow[dl, dashed, "i"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Como E es $\mathfrak{F}_\sigma$-cerrado, existe una única $f : \sigma(E) \to E$ que extiende al morfismo 0 (en realidad $f = i$). Entonces $\sigma(E) = 0$.

2) ⇒ 1) Sea $M \in$ A-mód y $N \in \mathfrak{F}(M)$. Supongamos que dado el morfismo $f : N \to E$, existen morfismos $\alpha, \alpha' : M \to E$ que extienden a f. Enton-

ces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[r, "\pi"] \arrow[dl, dashed, shift right, "\alpha"'] \arrow[dl, dashed, shift left, "\alpha'"] & M/N \arrow[r] & 0 \\ & E & & & \end{tikzcd}$$

Consideremos $\alpha-\alpha' : M \to E$. Como $i(\alpha-\alpha') = f-f = 0$, existe un morfismo $g : M/N \to E$ tal que $\alpha-\alpha' = g\pi$, pero M/N es de σ-torsión y E es libre de σ-torsión, entonces $g=0$; es decir $\alpha-\alpha' = 0\pi = 0$, por lo tanto $\alpha = \alpha'$ ■

3.2 Proposición: Son equivalentes

1) E es $\mathfrak{F}_\sigma$-inyectivo

2) Si $I \in \mathfrak{F}_\sigma$ y $g : I \to E$ es un morfismo, entonces g se extiende a A.

Demostración:

1) ⇒ 2) Es consecuencia de la definición

2) ⇒ 1) Sea $M \in A$-mód, $N \in \mathfrak{F}(M)$, $f : N \to E$ un morfismo. Si N' es submódulo de M, tal que $N \subset N'$, entonces $N' \in \mathfrak{F}(M)$. Consideremos las parejas (N', f') con N' como antes y f' una extensión de f a N'. Con cierto orden obvio, el lema de Zorn es aplicable y por lo tanto, hay una extensión mayor de f. Digamos que son N y f mismos, para simplificar notación; debemos entonces mostrar que $N = M$. Si $x \in M$, como $N \in \mathfrak{F}(M)$ entonces $(N:x) \in \mathfrak{F}_\sigma$. Definamos $g : (N:x) \to E$ por $g(a) = f(ax)$. Claramente g es un morfismo, asi que por hipotesis, g se extiende a A. Es decir, existe $\eta \in E$ tal que $g(a) = a\eta$ para $a \in (N:x)$. Definamos

Ahora $f': N+Ax \to E$ por $f'(y+ax) = f(y) + ay$; ya que $a \in (N:x)$, $f(ax) = ay$; la función f' está bien definida, es un morfismo y coincide con f sobre N. Por la maximalidad de N, tenemos que $x \in N$, es decir que $N = M$ ∎

En el caso particular $\sigma = 0$, todo módulo es $\mathcal{F}_\sigma$-cerrado. Si $\sigma = \infty$, entonces el que un módulo sea $\mathcal{F}_\sigma$-inyectivo, es equivalente a que sea inyectivo; Además en este caso, el único módulo $\mathcal{F}_\sigma$-cerrado es el 0 (de hecho, el 0 es el único módulo libre de σ-torsión).

Antes de entrar a la cuestión de la existencia de módulos $\mathcal{F}_\sigma$-inyectivos, consideremos algunas propiedades simples de tales módulos.

<u>3.3</u> <u>Proposición</u>: Supongase que la siguiente sucesión $0 \to F \to E \to L \to 0$ es exacta y en la cual E es $\mathcal{F}_\sigma$-inyectivo y L es libre de σ-torsión. Entonces F es $\mathcal{F}_\sigma$-inyectivo.

<u>Demostración</u>: Sea I un ideal en $\mathcal{F}_\sigma$ y $f: I \to F$ un morfismo; ya que E es $\mathcal{F}_\sigma$-inyectivo, existe $x \in E$ tal que $f(a) = ax$ para todo $a \in I$. En particular $Ix = f(I) \subset F$ y por lo tal, la imagen de x en L pertenece a $\sigma(L)$. Pero $\sigma(L) = 0$ implica que $x \in F$, lo que nos dice que F es $\mathcal{F}_\sigma$-inyectivo ∎

<u>3.4</u> <u>Proposición</u>: Supongase que la sucesión $0 \to F \to E \to L \to 0$ es exacta y tal que F es $\mathcal{F}_\sigma$-inyectivo y L es un módulo de σ-tor

sión. Entonces la sucesión se escinde. Si además E es libre de σ-torsión, entonces $F=E$.

<u>Demostración</u>: Aplicando la definición a F, tenemos que el morfismo identidad de F en sí mismo, se extiende a un morfismo de E a F, lo que quiere decir que la sucesión se escinde y que $E \simeq F \oplus L$. Si $\sigma(E)=0$, entonces $\sigma(L)=0$, pero $\sigma(L)=L \Rightarrow L=0$; es decir $E=F$ ■

El test para la $\mathcal{F}_\sigma$-inyectividad de un módulo, se simplifica si podemos saber que el módulo es libre de σ-torsión. Tales situaciones son frecuentes.

<u>3.5 Lema</u>: Sea E un módulo libre de σ-torsión; sea $M \in A$-Mód y $N \in \mathcal{F}(M)$ y sea $f: N \to E$ un morfismo. Supongamos que $N' \in \mathcal{F}(N)$ y es tal que la restricción de f a N' se extiende a un morfismo de M a E. Entonces f se extiende a un morfismo de M a E.

<u>Demostración</u>: Denotemos por f' a la restricción de f a N' y por g su extensión a M. Entonces f y $g|_N$ son morfismos de N a E que coinciden en N'. Consideremos $f-g|_N$; este morfismo nos induce otro de N/N' a E. Pero $\sigma(N/N')=N/N'$ y $\sigma(E)=0$, entonces $f=g|_N$ y por lo tal g es extensión de f ■

Aplicaremos el lema anterior para obtener un resultado muy usual (cabe mencionar que no hay analogías con la teoría ordinaria de módulos inyectivos).

3.6 Proposición: Sea σ un radical exacto izquierdo; E un módulo libre de σ-torsión y $M \in \mathfrak{F}(E)$. Supongamos que para todo ideal $I \in \mathfrak{F}_\sigma$, cualquier morfismo de I a M se extiende a un morfismo de A en E. Entonces E es $\mathfrak{F}_\sigma$-inyectivo.

Demostración: Sea I un ideal en $\mathfrak{F}_\sigma$ y $f: I \to E$ un morfismo. Sea $J = \{b \in I \mid f(b) \in M\}$; entonces $J = f^{-1}(f(I) \cap M) \subset I$. Como I/J es isomorfo a un submódulo de E/M, entonces $\sigma(I/J) = I/J$. Como σ es un radical exacto izquierdo, entonces por hipotesis, esta restricción se extiende a un morfismo de A en E. Es decir, E es $\mathfrak{F}_\sigma$-inyectivo ■

Desde ahora nos centraremos principalmente en los radicales exactos izquierdos.

Si σ es un radical exacto izquierdo y M es cualquier A-módulo, deseamos asignar a M un módulo $\mathfrak{F}_\sigma$-cerrado, el cual es mínimo en cierto sentido. Para ello tenemos la siguiente proposición.

3.7 Teorema: Sea σ un radical exacto izquierdo. Si $M \in A$-mód y $\sigma(M) = 0$, entonces hay un módulo E, $\mathfrak{F}_\sigma$-cerrado, que contiene esencialmente a M y tal que $M \in \mathfrak{F}(E)$.

Demostración: Sea $M \in A$-mód. libre de σ-torsión. Sea $E(M)$ su cápsula inyectiva (esta existe, pues los anillos con los que trabajamos son con 1). Entonces $E(M)$ contiene esencialmente a M y obviamente $E(M)$ es $\mathfrak{F}_\sigma$-inyectivo. Como $0=\sigma(M)=M\cap\sigma(E(M))$ y $E(M)$ es extensión esencial de M, entonces $\sigma(E(M))=0$. Por 3.1, tenemos que $E(M)$ es $\mathfrak{F}_\sigma$-cerrado. Ahora, sea E el submódulo de $E(M)$ que contiene a M y que bajo el epimorfismo canónico $E(M)\longrightarrow E(M)/M$ se mapea sobre $\sigma(E(M)/M)$; es decir $E/M \simeq \sigma(E(M)/M)$; entonces $E(M)/E \simeq E(M)/M/E/M$ que es igual a $E(M)/M/\sigma(E(M)/M)$. Como σ es radical exacto izquierdo, tenemos que $\sigma(E(M)/M/\sigma(E(M)/M))=0$, es decir $\sigma(E(M)/E)=0$, pero por 3.3 tenemos entonces que E es $\mathfrak{F}_\sigma$-inyectivo; como $E\subset E(M)$ y $\sigma(E(M))=0$, entonces $\sigma(E)=0$ y por 3.1, E es $\mathfrak{F}_\sigma$-cerrado. Que E contiene esencialmente a M, por ser E submódulo de $E(M)$ y este es extensión esencial de M y por último, como $E/M \simeq \sigma(E(M)/M)$ entonces E/M es de σ-torsión ∎

<u>3.8 Lema</u>: Sea σ un preradical exacto izquierdo; M un módulo libre de σ-torsión y $N\in\mathfrak{F}(M)$. Entonces M es una extensión esencial de N.

<u>Demostración</u>: Si $x\in M$, como $\sigma(M/N)=M/N$, entonces $(N:x)=\{a\in A \mid ax\in M\}\in\mathfrak{F}_\sigma$ y $(N:x)x\subset N$. Ya que $\sigma(M)=0$, $(N:x)x=0$ sólo cuando $x=0$. Por lo tanto, si $x\neq 0$ entonces $(N:x)x\subset N\cap Ax$ y $(N:x)x\neq 0$ ∎

Regresamos a la discusión del Teorema 3.7. El

Módulo E, cuya existencia la afirma este Teorema, es único en un sentido fuerte. A saber:

<u>3.9 Proposición</u>: Si E' es otro módulo con las mismas propiedades enunciadas en el Teorema 3.7, entonces hay un único isomorfismo de E a E'.

<u>Demostración</u>: Consideremos el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[dl, dashed, "\alpha"] \\ & E' & \end{tikzcd}$$

Como E' es $\mathcal{F}_\sigma$-cerrado, existe un único morfismo $\alpha : E \to E'$. Sea $x \in \operatorname{Ker} \alpha$; entonces $\alpha(x) = 0$. Si $x \neq 0 \Rightarrow M \cap Ax \neq 0 \Rightarrow 0 = f(M \cap Ax) \neq 0$ $\blacktriangledown$ Entonces $\operatorname{Ker} \alpha = 0$, lo cual implica que la sucesión $0 \to E \to E'$ se escinde. Entonces $E \in \mathcal{F}(E')$ $\Rightarrow E' = E \oplus E'/E$. Como $M \subset E'$ y $M \subset E \Rightarrow M \cap E'/E = 0$. Como M es esencial en E y E' $\Rightarrow E'/E = 0$ $\Rightarrow E = E'$ ∎

Para las aplicaciones, deseamos ver a E como asociado "funtorialmente" a M. La unicidad de E, como la describimos anteriormente, hace esto posible. Además, para describir la estrecha similitud entre la presente estructura abstracta y la situación familiar en anillos conmutativos y conjuntos multiplicativos, debemos dar una construcción explícita de un módulo $\mathcal{F}_\sigma$-inyectivo del tipo de E.

Sea σ un radical exacto izquierdo. Sea M un módulo libre de σ-torsión. Denotemos por $\Omega = \{(I,f) \,/\, I \in \mathcal{F}_\sigma$ y $f: I \to M$ es morfismo$\}$. Decimos que dos pares (I,f), (I',f') de Ω son equivalentes, $(I,f) \sim (I',f')$, si existe un ideal $J \in \mathcal{F}_\sigma$ con $J \subset I \cap I'$ y tal que f y f' coinciden sobre J.

La anterior es una relación de equivalencia:
$(I,f) \sim (I,f)$, obviamente para todo $(I,f) \in \Omega$
Si $(I,f) \sim (I',f') \Rightarrow$ existe $J \in \mathcal{F}_\sigma \ni J \subset I \cap I'$ y $f|_J = f'|_J$; pero $I \cap I' = I' \cap I \supset J$, entonces $(I',f') \sim (I,f)$.
Si $(I,f) \sim (I',f')$ y $(I',f') \sim (I'',f'') \Rightarrow$ existen $J, J' \in \mathcal{F}_\sigma \ni J \subset I \cap I'$, $J' \subset I' \cap I''$ y $f|_J = f'|_J$, $f'|_{J'} = f''|_{J'}$; pero $J \cap J' \in \mathcal{F}_\sigma$ y $J \cap J' \subset (I \cap I') \cap (I' \cap I'') \subset I \cap I''$; y ya que $J \cap J' \subset J$ y $J \cap J' \subset J' \Rightarrow f|_{J \cap J'} = f''|_{J \cap J'}$.

Denotemos por $[I,f]$ la clase de equivalencia de (I,f) y por $Q_\sigma(M)$ el conjunto de clases de equivalencia.

Si (I,f) y (J,g) estan en Ω, sea $K = I \cap J$ y sean $f' = f|_K$, $g' = g|_K$, entonces $(I,f) \sim (K,f')$ y $(J,g) \sim (K,g')$.

<u>3.10</u> <u>Proposición</u>: La clase $[K, f'+g']$ depende solamente de $[I,f]$ y $[J,g]$ y no de la elección particular de los representantes I, J, f, g.

<u>Demostración</u>: Si (I',α), $(J',\beta) \in \Omega$ y son tales que $(I,f) \sim (I',\alpha)$ y $(J,g) \sim (J',\beta)$, sea $K' = I' \cap J'$, $\alpha' = \alpha|_{K'}$, $\beta' = \beta|_{K'}$; entonces $(I',\alpha) \sim (K',\alpha')$

y $(J', \beta) \sim (K', \beta')$, pero $(K, f') \sim (K', \alpha')$ y $(K, g') \sim (K', \beta') \Rightarrow (K, f'+g') \sim (K', \alpha'+\beta')$. Es decir $[K, f'+g'] = [K', \alpha'+\beta']$ ∎

3.11 Proposición: $Q_\sigma(M)$ con esta operación, es un grupo abeliano.

Demostración: Sean $[I,f]$, $[J,g]$, $[H,\alpha]$ en $Q_\sigma(M)$; $([I,f]+[J,g])+[H,\alpha] = [K, f'+g'] + [H,\alpha] = [K', (f'+g')'+\alpha']$, donde $K = I \cap J$, $K' = K \cap H$, $f' = f|_K$, $g' = g|_K$, $\alpha' = \alpha|_{K'}$, $(f'+g')' = (f'+g')|_{K'}$. Por otro lado $[I,f]+([J,g]+[H,\alpha]) = [I,f]+[R, g'+\alpha'] = [R', f'+(g'+\alpha')']$, donde $R = J \cap H$, $R' = R \cap I$, $g' = g|_R$, $\alpha' = \alpha|_R$, $f' = f|_{R'}$, $(g'+\alpha')' = (g'+\alpha')|_{R'}$.
Pero $I \cap (J \cap H) = (I \cap J) \cap H$, de donde $K' = R'$ y como la suma de morfismos es asociativa, la suma de las restricciones tambien lo es, entonces $([I,f]+[J,g]) + [H,\alpha] = [I,f] + ([J,g]+[H,\alpha])$.

El elemento neutro es $[A,0]$, puesto que
$[I,f]+[A,0] = [I \cap A, f'+0] = [I,f]$
$[A,0]+[I,f] = [A \cap I, 0+f'] = [I,f]$

El elemento inverso para cada $[I,f] \in Q_\sigma(M)$ es $[I,-f]$: $[I,f]+[I,-f] = [I,0] = [I,-f]+[I,f]$

Es abeliano pues si $[I,f], [J,g] \in Q_\sigma(M)$, $[I,f]+[J,g] = [K, f'+g'] = [J,g]+[I,f]$ ∎

Sea $(I,f) \in \Omega$ y $x \in A$. Entonces $(I:x) \in \mathcal{F}_\sigma$ y $(I:x)x \subset I$. Definimos $g: (I:x) \to M$ por $g(b) = f(bx)$. Entonces $((I:x), g) \in \Omega$ y obviamente $[(I:x), g]$ esta determinada solamente por $[I,f]$ y por x. Denotemos a $[(I:x),g]$ por $x[I,f]$ (¡es importante el orden!). Entonces hemos definido una operación de $A \times Q_\sigma(M) \to Q_\sigma(M)$, la cual por lo anteriormente dicho está bien definida.

3.12 Proposición: Con la operación anterior, $Q_\sigma(M)$ tiene la estructura de A-módulo.

Demostración: Sean $[I,f],[J,g] \in Q_\sigma(M)$, $x \in A$;
$x([I,f]+[J,g]) = x([K,f'+g']) = [(K:x),\alpha]$, donde
$K = I \cap J$, $f' = f|_K$, $g' = g|_K$, $\alpha : (K:x) \to M$ es $\ni$
$\alpha(a) = f'(ax) + g'(ax)$; por otro lado
$x[I,f] + x[J,g] = [(I:x),\beta] + [(J:x),\gamma] = [(I:x)\cap(J:x), \beta'+\gamma']$
con $\beta : (I:x) \to M \ni \beta(a) = f(ax)$; $\gamma : (J:x) \to M \ni$
$\gamma(a) = g(ax)$, $\beta' = \beta|_{(I:x)\cap(J:x)}$, $\gamma' = \gamma|_{(I:x)\cap(J:x)}$
pero $(K:x) = (I\cap J:x) = (I:x)\cap(J:x)$
y $\alpha : (K:x) \to M \ni \alpha(a) = f'(ax) + g'(ax)$
$\beta'+\gamma' : (K:x) \to M \ni (\beta'+\gamma')(a) = \beta|_K(a) + \gamma|_K(a) =$
$= f|_K(ax) + g|_K(ax) = f'(ax) + g'(ax) = \alpha(a)$
entonces $x([I,f]+[J,g]) = x([K,f'+g'])$

Ahora, si $x, x' \in A$, $[I,f] \in Q_\sigma(M)$, entonces
$(x+x')[I,f] = [(I:x+x'),\alpha]$ donde
$\alpha : (I:x+x') \to M \ni \alpha(a) = f(a(x+x')) = f(ax) + f(ax')$
$x[I,f] + x'[I,f] = [(I:x),\beta] + [(I:x'),\gamma] =$
$= [(I:x)\cap(I:x'), \beta'+\gamma']$, donde
$\beta : (I:x) \to M \ni \beta(a) = f(ax)$; $\gamma : (I:x') \to M \ni \gamma(a) = f(ax')$
$\beta' = \beta|_{(I:x)\cap(I:x')}$, $\gamma' = \gamma|_{(I:x)\cap(I:x')}$,
pero $K = (I:x)\cap(I:x') \subset (I:x)\cap(I:x')\cap(I:x+x')$, ya que si
$a \in K \Rightarrow ax \in I$, $ax' \in I$ y como I es subgrupo aditivo

$ax + ax' = a(x+x') \in I$, ENTONCES $a \in (I : x+x') \cap K$. ADEMÁS $K = (I:x) \cap (I:x') \in \mathcal{F}_\sigma$ y $\alpha|_K(a) = f(a(x+x')) = f(ax) + f(ax')$
$(\beta' + \gamma')|_K(a) = \beta'(a) + \gamma'(a) = \beta(a) + \gamma(a) = f(ax) + f(ax')$
ES DECIR $((I:x+x'), \alpha) \sim ((I:x) \cap (I:x'), \beta' + \gamma')$. POR lo TANTO $(x+x')[I,f] = x[I,f] + x'[I,f]$

Si $x, x' \in A$, $[I,f] \in Q_\sigma(M)$, ENTONCES
$x(x'[I,f]) = x[(I:x'), g] = [((I:x'):x), g'] = [(I:xx'), g']$
CON $g : (I:x') \to M \ni g(a) = f(ax')$
$g' : ((I:x'):x) \to M \ni g'(a) = g(ax) = f(axx')$. ADEMÁS $(xx')[I,f] = [(I:xx'), \alpha]$ CON
$\alpha : (I:xx') \to M \ni \alpha(a) = f(axx')$. COMO $\alpha = g'$ ENTONCES $x(x'[I,f]) = (xx')[I,f]$

POR ÚLTIMO, SEA $1 \in A$ EL ELEMENTO UNITARIO DE A y $[J,f] \in Q_\sigma(M)$. ENTONCES
$1[J,f] = [(J:1), g] = [J,f]$ CON $g : (J:1) \to M \ni$
$g(a) = f(a \cdot 1) = f(a)$.

RESUMIENDO, $Q_\sigma(M)$ ES UN A-MÓDULO IZQUIERDO ■

AHORA BIEN, SI $x \in M$, DEFINAMOS $j(x) : A \to M$ POR $j(x)(a) = ax$. ENTONCES $(A, j(x)) \in \Omega$. DEFINAMOS $i : M \to Q_\sigma(M)$ POR $i(x) = [A, j(x)]$. QUE i ES MORFISMO ES TRIVIAL.

<u>3.13 PROPOSICIÓN</u>: i ES MONOMORFISMO

<u>DEMOSTRACIÓN</u>: SEA $x \in \operatorname{Ker} i$; ENT. $i(x) = [A, 0]$, PERO $i(x) = [A, j(x)] \Rightarrow (A, 0) \sim (A, j(x))$; POR DEFINICIÓN EXISTE $I \in \mathcal{F}_\sigma \ni j(x)|_I = 0$. ES DECIR $Ix = 0$ y POR 2.1 TENEMOS QUE $x \in \sigma(M)$. PERO POR HIPOTESIS, $\sigma(M) = 0 \Rightarrow x = 0$ ■

3.14 Proposición:

a) $Q_\sigma(M)/i(M)$ es un módulo de σ-Torsión

b) $Q_\sigma(M)$ es extensión esencial de M

c) $Q_\sigma(M)$ es $\mathcal{F}_\sigma$- cerrado

Demostración:

a) Sea $\xi \in Q_\sigma(M)$ y sea (I, f) un representante de ξ en Ω. Si $x \in I$, entonces $x\xi = x[I, f] = [(I:x), g] = [A, g] = [A, jf(x)]$ y por lo tanto $I\xi \subset i(M)$. Entonces $Q_\sigma(M)/i(M)$ es de σ-torsión.

b) Si $x\xi = 0 \Rightarrow f(x) = 0$, por tanto, si $I\xi = 0$ entonces $f \equiv 0$ y $\xi = 0$. De esta forma, para $\xi \neq 0$, $I\xi \subset i(M) \cap A\xi$ y $I\xi \neq 0$, lo cual nos dice que $Q_\sigma(M)$ es extensión esencial de M.

c) Ya que $\sigma(M) = 0$ y $M \cong i(M)$, entonces $0 = \sigma(M) = M \cap \sigma(Q_\sigma(M))$, pero M es esencial en $Q_\sigma(M)$, entonces $\sigma(Q_\sigma(M)) = 0$, es decir, $Q_\sigma(M)$ es libre de σ-torsión.

Ahora, si $I \in \mathcal{F}_\sigma$ y $f: I \to M$ es un morfismo, consideremos $\xi = [I, f] \in Q_\sigma(M)$; si $x \in I$, entonces $x\xi = [A, jf(x)]$, es decir, $x\xi = if(x)$; lo cual demuestra que f se extiende a un morfismo de A en $Q_\sigma(M)$; por proposición 3.6, $Q_\sigma(M)$ es $\mathcal{F}_\sigma$-inyectivo. Por 3.1, $Q_\sigma(M)$ es $\mathcal{F}_\sigma$-cerrado ■

De esta forma, hemos verificado que $Q_\sigma(M)$ es un módulo $\mathcal{F}_\sigma$-cerrado, el cual, como extensión de $i(M)$, tiene las características del módulo E, descrito en 3.7 .

Sigamos suponiendo que σ es un radical exacto izquierdo. Sea $M \in A$-mód. cualquiera. Entonces el módulo de cocientes de M con respecto a σ está definido como $Q_\sigma(M/\sigma(M))$, junto con el mapeo de M a $Q_\sigma(M/\sigma(M))$, obtenido mediante la composición de los morfismos: $M \xrightarrow{\pi} M/\sigma(M)$ con el monomorfismo $M/\sigma(M) \xrightarrow{i} Q_\sigma(M/\sigma(M))$. Denotaremos este morfismo $M \longrightarrow Q_\sigma(M/\sigma(M))$ por i_σ. Además usaremos la notación $Q_\sigma(M)$ en lugar de $Q_\sigma(M/\sigma(M))$.

Sean $M, M' \in A$-Mod y $f: M' \to M$ un morfismo; tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \sigma(M') \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M'/\sigma(M') \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \sigma(M) \arrow[r] & M \arrow[r] & M/\sigma(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Esta f induce un morfismo $f': M'/\sigma(M') \longrightarrow M/\sigma(M)$, tal que el cuadrado correspondiente conmuta. Ahora bien, con esta f' formamos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M'/\sigma(M') \arrow[r, "i"] \arrow[d, "if"'] & Q_\sigma(M') \arrow[dl, dashed, "\exists!\, f_\sigma"] \\
& Q_\sigma(M) &
\end{tikzcd}$$

Como $Q_\sigma(M)$ es $\mathcal{F}_\sigma$-cerrado, existe un único morfismo $f_\sigma: Q_\sigma(M') \longrightarrow Q_\sigma(M)$, tal que el diagrama anterior conmuta. Que este diagrama conmute es equivalente a que el diagrama siguiente conmute:

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_\sigma"'] & M \arrow[d, "i_\sigma"] \\ Q_\sigma(M') \arrow[r, "f_\sigma"'] & Q_\sigma(M) \end{tikzcd}$$

La pareja $M \rightsquigarrow Q_\sigma(M)$ y $f \rightsquigarrow f_\sigma$ forman un funtor covariante, ya que si $g: M \longrightarrow M''$ con $M'' \in A$-Mód., consideramos la $g_\sigma : Q_\sigma(M) \longrightarrow Q_\sigma(M'')$. Entonces tenemos que el diagrama siguiente es conmutativo en todos los cuadrados:

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d] & M'' \arrow[d] \\ M'/\sigma(M') \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "i"'] & M/\sigma(M) \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & M''/\sigma(M'') \arrow[d] \\ Q_\sigma(M') \arrow[r, "f_\sigma"'] & Q_\sigma(M) \arrow[r, "g_\sigma"'] & Q_\sigma(M'') \end{tikzcd}$$

y tenemos que

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M'/\sigma(M') \arrow[r, "i"] \arrow[d, "ig'f'"'] & Q_\sigma(M') \arrow[dl, dashed, "(gf)_\sigma"] \\ & Q_\sigma(M'') & \end{tikzcd}$$

pero $g_\sigma f_\sigma : Q_\sigma(M') \longrightarrow Q_\sigma(M'')$ y $Q_\sigma(M'')$ es $\mathcal{F}_\sigma$-cerrado, entonces $g_\sigma f_\sigma = (gf)_\sigma$. Además es obvio que $1_\sigma = 1_{Q_\sigma(M)}$.

Entonces este funtor covariante junto con $i_\sigma : M \longrightarrow Q_\sigma(M)$ constituyen la formación del módulo de cocientes con respecto a σ. Hacemos énfasis que el módulo de cocientes aquí definido es solamente para radicales exactos izquierdos.

Describiremos brevemente la conexión

ENTRE LA CONSTRUCCIÓN AQUÍ DADA Y LA SITUACIÓN FAMILIAR EN ANILLOS CONMUTATIVOS.

SEA A UN ANILLO CONMUTATIVO Y S UN SUBCONJUNTO MULTIPLICATIVAMENTE CERRADO. DEFINIMOS

$\mathfrak{F} = \{ I \subset A \,/\, I \text{ es ideal}, I \cap S \neq \emptyset \}$.

<u>3.15 PROPOSICIÓN</u>:

a) SI $I \in \mathfrak{F}$ Y $x \in A$ ENTONCES $(I:x) \in \mathfrak{F}$

b) SI I ES IDEAL DE A Y $J \in \mathfrak{F}$ SON TALES QUE $(I:x) \in \mathfrak{F}$ PARA TODO $x \in J$, ENTONCES $I \in \mathfrak{F}$.

ES DECIR, $\mathfrak{F}$ ES UNA TOPOLOGÍA EN A.

<u>DEMOSTRACIÓN</u>:

a) $I \in \mathfrak{F} \Rightarrow$ EXISTE $b \in A \ni b \in I \cap S$. SEA $x \in A$, ENTONCES $bx = xb \in I$, ES DECIR $b \in (I:x)$

b) $J \in \mathfrak{F} \Rightarrow$ EXISTE $b \in A \ni b \in J \cap S$; COMO $(I:x) \in \mathfrak{F}$ PARA TODO $x \in J$, EN ESPECIAL $(I:b) \in \mathfrak{F} \Rightarrow$ EXISTE $r \in A \ni r \in (I:b) \cap S$. PERO ENTONCES $rb \in I$ Y COMO S ES MULTIPLICATIVAMENTE CERRADO $rb \in S$ ∎

ENTONCES $\mathfrak{F}$ ES UNA TOPOLOGÍA EN A Y POR LO TANTO DEFINE UN PRERADICAL EXACTO IZQUIERDO σ. SI $M \in A$-MÓD, ENTONCES $\sigma(M) = \{ x \in M \,/\, Ix = 0 \text{ para algún } I \in \mathfrak{F} \}$, QUE ES EQUIVALENTE A $\sigma(M) = \{ x \in M \,/\, sx = 0 \text{ para algún } s \in S \}$.

<u>3.16 PROPOSICIÓN</u>: σ ES UN RADICAL EXACTO IZQUIERDO.

<u>DEMOSTRACIÓN</u>: QUE σ ES UN PRERADICAL EXACTO IZQUIERDO ES CONSECUENCIA DE 2.3.

SEA $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M'' \to 0$ UNA SUCESIÓN EXACTA DE A-MÓDULOS, TALES QUE $\sigma(M') = M'$, $\sigma(M'') = M''$.

Sea $x \in M$; entonces $\pi(x) \in M'' = \sigma(M'') \Rightarrow$ existe $s \in S$ $\cdot\ni\cdot$ $s\pi(x)=0$, pero $s\pi(x) = \pi(sx)$, entonces $sx \in \ker \pi = \operatorname{Im} i \Rightarrow$ existe $r \in M'$ $\cdot\ni\cdot$ $i(r) = sx$, pero $M' = \sigma(M') \Rightarrow$ existe $s' \in S$ $\cdot\ni\cdot$ $s'r = 0$. Como S es multiplicativamente cerrado $s's \in S$. Además $s'sx = s'i(r) = i(s'r) = 0$, es decir $x \in \sigma(M)$. Entonces $M = \sigma(M)$ y por 1.10, σ es un radical exacto izquierdo ●

Observemos que $\sigma = 0$ cuando S es un conjunto de unidades de A y $\sigma = \infty$ cuando S contiene al cero de A.

Sea $M \in A$-mód. tal que $\sigma(M) = 0$. Si $(I, f) \in \Omega$, entonces $Ax \subset I$ con $x \in S$ y $(I, f) \sim (Ax, f')$ donde $f' = f|_{Ax}$. Obviamente el elemento $[I, f]$ es el mismo que $[Ax, f']$ en $Q_\sigma(M)$. Si x es cualquier elemento de S, entonces $\operatorname{Hom}(Ax, M) \overset{\psi}{\cong} M$, mediante el isomorfismo $\psi(f)(x) = f(x) \in M$. Que esta identificación es posible, se debe al hecho que $\sigma(M) = 0$. Ahora, $Q_\sigma(M)$ es identificado con el módulo de cocientes usual M_S, al identificar $[Ax, f]$ con $f(x)/x$ en M_S $(x \in S)$; que este es un isomorfismo es trivial.

Regresemos al caso general.

Sea σ un radical exacto izquierdo de A. Si M es un módulo libre de σ-torsión, entonces $i_\sigma : M \to Q_\sigma(M)$ es un monomorfismo, ya que si $x \in \operatorname{Ker} i_\sigma$, entonces $0 = i_\sigma(x) = i\pi(x)$, pero por 3.12, i es monomorfismo, es decir $\pi(x) = 0$

lo que es equivalente a $x \in \sigma(M) = 0$.

Para ahorrar símbolos, consideraremos a i_σ como una identificación y desde ahora consideraremos a M como un submódulo de $Q_\sigma(M)$.

Si $f: M' \to M$ es monomorfismo, entonces $f': M'/\sigma(M') \longrightarrow M/\sigma(M)$ también lo es, pues si $\bar{x} \in \operatorname{Ker} f'$, sea $x \in M'$ representante de $\bar{x}$; entonces $x \in M$ (pues $M' \subset M$), pero $0 = f'(\bar{x}) = \pi(x)$, es decir, $x \in \sigma(M)$; entonces $x \in M' \cap \sigma(M) = \sigma(M')$, es decir $\bar{x} = 0$ en $M'/\sigma(M')$. Además, como $Q_\sigma(M')$ es extensión esencial de $M'/\sigma(M')$, el morfismo inducido $f_\sigma: Q_\sigma(M') \to Q_\sigma(M)$ también es monomorfismo, pues si $x \in \operatorname{Ker} f_\sigma$ y $x \neq 0$, entonces $0 \neq Ax \subset Q_\sigma(M') \Rightarrow 0 \neq Ax \cap M'/\sigma(M')$, es decir, existe $a \in A$ $\cdot\ni\cdot$ $0 \neq ax \in M'/\sigma(M')$; entonces $i_\sigma f'(ax) = f_\sigma i_\sigma(ax) = f_\sigma(ax) = a f_\sigma(x) = 0$; pero $i_\sigma f'$ es monomorfismo, entonces $ax = 0$ $\blacktriangledown$; entonces $x = 0$.

Supongamos ahora que M es libre de σ-torsión y la sucesión $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ es exacta. Sabemos entonces que f_σ es monomorfismo y además $g_\sigma f_\sigma = (gf)_\sigma = 0$. Supongamos ahora que $\xi \in \operatorname{Ker} g_\sigma$; ya que $Q_\sigma(M)/M$ es de σ-torsión, hay un ideal $I \in \mathfrak{F}_\sigma$ $\cdot\ni\cdot$ $I\xi = 0$; es decir, $I\xi \subset M$. Además, $g_\sigma(\xi) = 0 \Rightarrow I\xi \subset \operatorname{Ker} g$, puesto que $g(a\xi) = a g_\sigma(\xi) = 0$ con $a \in I$. Entonces $I\xi \subset \operatorname{Im} f \Rightarrow f_\sigma(Q_\sigma(M')) \subset \operatorname{Ker} g_\sigma$ y

$\mathrm{Ker}\, g_\sigma / f_\sigma(Q_\sigma(M'))$ es de σ-Torsión. Consideremos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to \mathrm{Im}\, f_\sigma \to \mathrm{Ker}\, g_\sigma \to \mathrm{Ker}\, g_\sigma / \mathrm{Im}\, f_\sigma \to 0,$$

por 3.4, $f_\sigma(Q_\sigma(M')) = \mathrm{Ker}\, g_\sigma$; es decir, hemos visto que $0 \to Q_\sigma(M') \to Q_\sigma(M) \to Q_\sigma(M'')$ es exacta. Esto fue verificado bajo la hipótesis $\sigma(M) = 0$.

Para considerar la exactitud en el caso general, haremos unas observaciones preliminares.

Sea $M \in A$-mód $\ni$ $\sigma(M) = 0$ y sea $M' \in \mathcal{F}(M)$. Tenemos entonces que $Q_\sigma(M') \subset Q_\sigma(M)$. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \to M/M' \to Q_\sigma(M)/M' \to Q_\sigma(M)/M \to 0$$

por 1.10 $Q_\sigma(M)/M'$ es de σ-Torsión. Además $Q_\sigma(M)/M' / Q_\sigma(M')/M' \simeq Q_\sigma(M)/Q_\sigma(M')$, por lo tanto $Q_\sigma(M)/Q_\sigma(M')$ es de σ-Torsión. Ahora consideramos la sucesión exacta

$$0 \to Q_\sigma(M') \to Q_\sigma(M) \to Q_\sigma(M)/Q_\sigma(M') \to 0$$

por 3.4 $Q_\sigma(M) = Q_\sigma(M')$.

<u>3.17</u> <u>Teorema</u>: Si σ es un radical exacto izquierdo, entonces Q_σ es exacto izquierdo.

<u>Demostración</u>: Consideremos la sucesión exacta $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$. Sean $L' = M'/\sigma(M')$, $L = M/\sigma(M)$, $L'' = M''/\sigma(M'')$, $N = g^{-1}(\sigma(M''))$; así que $\sigma(M) \subset N$ y finalmente sea $Z = N/\sigma(M)$. Entonces la sucesión $0 \to Z \to L \to L'' \to 0$ es exacta y $\sigma(L) = 0$. Entonces la sucesión

$0 \to Q_\sigma(\bar{X}) \to Q_\sigma(L) \to Q_\sigma(L'')$ es exacta; en realidad $Q_\sigma(L) = Q_\sigma(M/\sigma(M)) = Q_\sigma(M)$, $Q_\sigma(L'') = Q_\sigma(M''/\sigma(M''))$ $= Q_\sigma(M'')$. Como $f(M') \subset N$, entonces $\sigma(M'') = N/f(M')$. Por lo tanto $\bar{X} = N/\sigma(M) \supset (f(M') + \sigma(M))/\sigma(M) \simeq f(M')/\sigma(M)$, lo cual implica que $\bar{X}/(f(M')+\sigma(M))/\sigma(M)$ es de σ-torsión puesto que $\bar{X}/(f(M')+\sigma(M))/\sigma(M) \simeq N/f(M') = \sigma(M'')$. Pero entonces

$$Q_\sigma(\bar{X}) \simeq Q_\sigma((f(M')+\sigma(M))/\sigma(M)) \simeq Q_\sigma(f(M')/\sigma(M')) \simeq Q_\sigma(M').$$

Es decir, $0 \to Q_\sigma(M') \to Q_\sigma(M) \to Q_\sigma(M'')$ es exacta ∎

§4. El anillo de Cocientes

Sea σ un preradical exacto izquierdo. Ya que para cualquier módulo M, el submódulo $\sigma(M)$ está descrito en términos de anuladores, $\sigma(M)$ es estable bajo todos los A-endomorfismos de M. En particular, $\sigma(A)$ es un ideal bilateral de A.

Si M es cualquier módulo y $x \in M$, entonces $\sigma(A)x$ es imagen homomorfa de $\sigma(A)$, asi que $\sigma(A)x$ es de σ-torsión, por lo tanto $\sigma(A)M \subset \sigma(M)$; en consecuencia, si M es libre de σ-torsión, tenemos que $\sigma(A)M = 0$ y por lo cual, M es un $A/\sigma(A)$-módulo.

Supongamos que σ es un radical exacto izquierdo. Consideremos $Q_\sigma(A)$, el cual contiene a $A/\sigma(A)$ y es un $A/\sigma(A)$-módulo. En realidad, $Q_\sigma(A)$ es un anillo.

<u>4.1 Teorema</u>: $Q_\sigma(A)$ es un anillo, de tal forma que $A/\sigma(A)$ es un subanillo y tal que la estructura de $Q_\sigma(A)$ como A-módulo izquierdo esta inducida por la estructura de anillo. Además, esta estructura de anillo es única.

<u>Demostración</u>: Sea $A_0 = A/\sigma(A)$. Si $\eta \in Q_\sigma(A)$, entonces definimos el A-morfismo $f_\eta : A_0 \to Q_\sigma(A)$ como $f_\eta(x) = x\eta$, si $x \in A_0$. Ya que $Q_\sigma(A)$ es $\mathcal{F}_\sigma$-cerrado, existe un único morfismo $\bar{f}_\eta : Q_\sigma(A) \to Q_\sigma(A)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_\eta"'] & Q_\sigma(A) \arrow[dl, dashed, "\bar{f}_\eta"] \\ & Q_\sigma(A) & \end{tikzcd}$$

Ahora bien, si $\eta, \xi \in Q_\sigma(A)$, definimos $\eta\xi = \bar{f}_\eta(\xi) \in Q_\sigma(A)$.

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in Q_\sigma(A)$; como $\beta\gamma, \beta, \gamma \in Q_\sigma(A)$, podemos considerar los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_{\beta\gamma}"'] & Q_\sigma(A) \arrow[dl, "\bar{f}_{\beta\gamma}"] \\ & Q_\sigma(A) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_\beta"'] & Q_\sigma(A) \arrow[dl, "\bar{f}_\beta"] \\ & Q_\sigma(A) & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_\gamma"'] & Q_\sigma(A) \arrow[dl, "\bar{f}_\gamma"] \\ & Q_\sigma(A) & \end{tikzcd}$$

Por definición, $\alpha(\beta\gamma) = \bar{f}_{\beta\gamma}(\alpha)$ y $(\bar{f}_\gamma \circ \bar{f}_\beta)(\alpha) = \bar{f}_\gamma(\alpha\beta) = (\alpha\beta)\gamma$. Además, si $r \in A_0$ $(\bar{f}_\gamma \circ \bar{f}_\beta)(r) = (f_\gamma \circ f_\beta)(r) = f_\gamma(r\beta) = r f_\gamma(\beta) = r(\beta\gamma) = \bar{f}_{\beta\gamma}(r)$.

Ahora, si consideramos el morfismo $\bar{f}_{\beta\gamma} - \bar{f}_\gamma \circ \bar{f}_\beta : Q_\sigma(A) \longrightarrow Q_\sigma(A)$, existe un único morfismo de $Q_\sigma(A)/A_0$ en $Q_\sigma(A)$. Pero $Q_\sigma(A)/A_0$ es de σ-torsión y $Q_\sigma(A)$ es libre de σ-torsión, entonces el único morfismo posible entre ellos es el cero, lo cual implica que:

$\bar{f}_{\beta\gamma} - \bar{f}_\gamma \circ \bar{f}_\beta = 0$, es decir, $\bar{f}_{\beta\gamma} = \bar{f}_\gamma \circ \bar{f}_\beta$.

Nuevamente, si $\alpha, \beta, \gamma \in Q_\sigma(A)$:

$\alpha(\beta+\gamma) = \bar{f}_{\beta+\gamma}(\alpha) = \bar{f}_\beta(\alpha) + \bar{f}_\gamma(\alpha) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

$(\alpha+\beta)\gamma = \bar{f}_\gamma(\alpha+\beta) = \bar{f}_\gamma(\alpha) + \bar{f}_\gamma(\beta) = \alpha\gamma + \beta\gamma$

Si 1 es el elemento unitario de A y $\alpha \in Q_\sigma(A)$, tenemos que:

$\bar{f}_1(\alpha) = \alpha \cdot 1 = \alpha$

$\bar{f}_\alpha(1) = 1 \cdot \alpha = \alpha$

Obviamente $A/\sigma(A)$ es subanillo de $Q_\sigma(A)$ ■

Si E es un módulo $\mathcal{F}_\sigma$-cerrado, entonces $\sigma(E)=0$, así que E es un módulo sobre $A/\sigma(A)$. Por el mismo argumento anterior, tenemos:

<u>4.2 Corolario</u>: Si E es un módulo $\mathcal{F}_\sigma$-cerrado, entonces su estructura de A-módulo se extiende de manera única a estructura de $Q_\sigma(A)$-módulo izquierdo.

<u>Demostración</u>: Sea $\eta \in E$. Definimos el A-morfismo $f_\eta : A/\sigma(A) \longrightarrow E$ como $f_\eta(x) = x\eta$. Ya que E es $\mathcal{F}_\sigma$-cerrado, existe un único morfismo $\bar{f}_\eta : Q_\sigma(A) \longrightarrow E$ tal que $\bar{f}_\eta(y) = y\eta$, si $y \in Q_\sigma(A)$.

Sean $y, y' \in Q_\sigma(A)$; $\alpha, \beta \in E$.

$y(\alpha+\beta) = \bar{f}_{\alpha+\beta}(y) = \bar{f}_\alpha(y) + \bar{f}_\beta(y) = y\alpha + y\beta$

$(y+y')\alpha = \bar{f}_\alpha(y+y') = \bar{f}_\alpha(y) + \bar{f}_\alpha(y') = y\alpha + y'\alpha$

$(yy')\alpha = \bar{f}_\alpha(yy') = y\,\bar{f}_\alpha(y') = y(y'\alpha)$

$1\alpha = \bar{f}_\alpha(1) = \alpha$, donde 1 es el elemento unitario de A. Entonces A es un $Q_\sigma(A)$-módulo izquierdo ■

El anillo $Q_\sigma(A)$ es llamado el anillo de cocientes de A con respecto a σ. Obviamente el morfismo $i: A \to Q_\sigma(A)$ es un morfismo de anillos.

En la situacion clásica de anillos conmutativos y conjuntos multiplicativamente cerrados, existen dos propiedades en el anillo de cocientes. La primera afirma que, la imagen de cualquier elemento del conjunto multiplicativo en el anillo de cocientes, es una unidad en este anillo. La segunda dice que, con nuestra notación, $Q_\sigma(M) = Q_\sigma(A) \underset{A}{\otimes} M$. Como luego demostraremos, estas propiedades no son universalmente válidas. Nuestro presente propósito es investigar, en el caso general, la relación entre estas y varias propiedades más, de anillos y módulos de cocientes.

4.3 TEOREMA: Sea σ un radical exacto izquierdo de A; entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) Todo $Q_\sigma(A)$-módulo es libre de σ-torsión
2) $Q_\sigma(A)\, i(I) = Q_\sigma(A)$ para todo $I \in \mathcal{F}_\sigma$
3) Todo $Q_\sigma(A)$-módulo es $\mathcal{F}_\sigma$-cerrado
4) $Q_\sigma(A) \otimes M$ es isomorfo a $Q_\sigma(M)$
5) El funtor Q_σ es exacto derecho y conmuta con sumas directas.

DEMOSTRACIÓN:

1) ⇒ 2) Tenemos que $i(I) \subset i(A) \subset Q_\sigma(A)$ con

$Q_\sigma(A)/i(A)$ de σ-torsión y $i(A)/i(I) \simeq A/I + \sigma(A)$ también de σ-torsión. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \to i(A)/i(I) \to Q_\sigma(A)/i(I) \to Q_\sigma(A)/i(A) \to 0,$$

por 1.10, $Q_\sigma(A)/i(I)$ es de σ-torsión. Ya que $i(I) \subset Q_\sigma(A)\, i(I)$ se sigue que $Q_\sigma(A)/Q_\sigma(A)\, i(I)$ es de σ-torsión. Pero por hipótesis, $Q_\sigma(A)/Q_\sigma(A)\, i(I)$ es libre de σ-torsión, ya que es un $Q_\sigma(A)$-módulo. Entonces $Q_\sigma(A)/Q_\sigma(A)\, i(I) = 0$, es decir, $Q_\sigma(A) = Q_\sigma(A)\, i(A)$.

2) $\Rightarrow$ 3) Sea E un $Q_\sigma(A)$-módulo. Entonces, para toda $x \in E$, $I \in \mathfrak{F}_\sigma$, tenemos que $Ix = i(I)x$. Si $Ix = 0$, entonces $x = 0$, ya que $Ix = 0 \Rightarrow i(I)x = 0$, por lo cual $0 = Q_\sigma(A)\, i(I)x = Q_\sigma(A)x$, pero $1x = 0 \Rightarrow x = 0$. Es decir, $\sigma(E) = 0$ (así que 2) $\Rightarrow$ 1)).
Supongamos ahora que $f : I \to E$ es un A-morfismo. Como $f(\sigma(I)) \subset \sigma(E) = 0$, f es idénticamente nula sobre $\sigma(I) = I \cap \sigma(A)$, de tal forma que f puede ser identificada con un morfismo de $i(I)$ en E. Por 2) tenemos que $1 = \sum q_j\, i(a_j)$, con $q_j \in Q_\sigma(A)$ y $a_j \in I$; pero $Q_\sigma(A)/i(A)$ es de σ-torsión, así que hay un ideal $B \in \mathfrak{F}_\sigma$, tal que $Bq_j \subset i(A)$. Sea $K = I \cap B$, entonces $K \in \mathfrak{F}_\sigma$. Sea $\xi = \sum q_j f(a_j) \in E$, sea $c \in K$. Como $cq_j \in i(A)$, tenemos que $c\xi = \sum cq_j f(a_j) = \sum f(cq_j a_j)$. Además $i(c) = \sum i(c) q_j\, i(a_j) = \sum c q_j\, i(a_j)$ y entonces $f(c) = \sum f(cq_j a_j) = c\xi$. Es decir, la restricción de f a K, puede extenderse a un morfismo de A en E. Por lema 3.5, se sigue

que E es $\mathcal{F}_\sigma$-cerrado.

3) ⇒ 4) $Q_\sigma(A) \otimes M$ es considerado en la forma usual, como un $Q_\sigma(A)$-módulo izquierdo, por la acción de este anillo sobre el primer factor en el producto tensorial. Por hipotesis $Q_\sigma(A) \otimes M$ es un módulo $\mathcal{F}_\sigma$-cerrado; sea $j : M \longrightarrow Q_\sigma(A) \otimes M$ tal que $j(x) = 1 \otimes x$. Como $Q_\sigma(A) \otimes M$ es libre de σ-torsion, tenemos que $\sigma(M) \subset \operatorname{Ker} j$. Ahora bien, $Q_\sigma(M)$ es un $Q_\sigma(A)$-módulo (por ser $\mathcal{F}_\sigma$-cerrado) y por lo tanto hay un morfismo $k : Q_\sigma(M) \otimes M \longrightarrow Q_\sigma(M)$ tal que $k(r \otimes x) = rx = r\,i(x)$ y tal que $kj = i_\sigma$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i_\sigma"'] & Q_\sigma(A) \otimes M \arrow[dl, dashed, "k"] \\
& Q_\sigma(M) &
\end{tikzcd}$$

Entonces, si $x \in \operatorname{Ker} j$, $0 = kj(x) = i_\sigma(x) \Leftrightarrow x \in \sigma(M)$, es decir $\operatorname{Ker} j \subset \sigma(M)$ y obviamente $\sigma(M) \subset \operatorname{Ker} j$, de lo cual deducimos $\operatorname{Ker} j = \sigma(M)$. Sea $\bar{j} : M/\sigma(M) \longrightarrow Q_\sigma(A) \otimes M$; este es un monomorfismo y por lo tanto $Q_\sigma(A) \otimes M / j(M)$ es un módulo de σ-torsión. Como $Q_\sigma(M)$ es único excepto isomorfismos, se sigue que k es un isomorfismo.

4) ⇒ 5) Sea $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ sucesión exacta de A-módulos. Como el funtor producto tensorial es exacto derecho, tenemos que $Q_\sigma(A) \otimes M' \to Q_\sigma(A) \otimes M \to Q_\sigma(A) \otimes M'' \to 0$ es exacta. Entonces por hipótesis, la sucesión

$Q_\sigma(M') \to Q_\sigma(M) \to Q_\sigma(M'') \to 0$ es exacta, es decir, Q_σ es un funtor exacto derecho.

Sea $\{M_r\}_{r\in R}$ una familia de A-módulos izquierdos, entonces $\bigoplus_r Q_\sigma(M_r) \cong \bigoplus_r (Q_\sigma(A) \otimes M_r)$

$$\cong Q_\sigma(A) \otimes (\bigoplus_r M_r)$$
$$\cong Q_\sigma(\bigoplus_r M_r) .$$

5) ⇒ 2) Sea $I \in \mathcal{F}_\sigma$; entonces $Q_\sigma(A)i(I)$ es un $Q_\sigma(A)$-módulo. Sea F un $Q_\sigma(A)$-módulo libre tal que la sucesión $F \xrightarrow{\pi} Q_\sigma(A)i(I) \to 0$ es exacta. Como F es libre, $F \cong \bigoplus_{r\in R} (Q_\sigma(A))_r \cong Q_\sigma(\bigoplus_r A_r)$, para algún conjunto R y $A_r \cong A$ para toda $r\in R$. Sea $F_0 = \bigoplus_{r\in R} A_r$, entonces $F \cong Q_\sigma(F_0)$, es decir, F es $\mathcal{F}_\sigma$-cerrado y por lo tanto $Q_\sigma(F) = F$. Como Q_σ es exacto derecho, la sucesión

$Q_\sigma(F) \xrightarrow{\pi_\sigma} Q_\sigma(Q_\sigma(A)i(I)) \to 0$ es exacta. Ya que $Q_\sigma(A)i(I) \subset Q_\sigma(A)$, entonces $Q_\sigma(A)i(I)$ es libre de σ-torsión que junto con el hecho $Q_\sigma(F) = F$, implican $Q_\sigma(Q_\sigma(A)i(I)) \cong Q_\sigma(A)i(I)$; pero entonces $Q_\sigma(A)i(I)$ es $\mathcal{F}_\sigma$-inyectivo. Además, como vimos en la prueba de 1) ⇒ 2), $Q_\sigma(A)/Q_\sigma(A)i(I)$ es de σ-torsión y consideremos la sucesión exacta $0 \to Q_\sigma(A)i(I) \to Q_\sigma(A) \to Q_\sigma(A)/Q_\sigma(A)i(I) \to 0$, por 3.4, $Q_\sigma(A) = Q_\sigma(A)i(I)$.

Hemos visto en la prueba de 2) ⇒ 3) que 2) ⇒ 1), por lo tanto el Teorema está demostrado ■

<u>Definición</u>: Un radical exacto izquierdo, que satisfaga cualquiera de las propiedades des-

critas en el Teorema anterior, se dirá que tiene la propiedad (T) (por producto tensorial).

Las dos propiedades combinadas en 5) pueden ser separadas. Primero consideraremos la conmutatividad con sumas directas.

<u>Definición</u>: Diremos que un preradical exacto izquierdo σ es noetheriano, si su topologia asociada $\mathfrak{F}_\sigma$ tiene la siguiente propiedad:

Si $I_1 \subset I_2 \subset \cdots$ es una cadena de ideales izquierdos, cuya union esta en $\mathfrak{F}_\sigma$, entonces $I_n \in \mathfrak{F}_\sigma$ para algun n.

<u>4.4</u> <u>Teorema</u>: Se σ un radical exacto izquierdo. Entonces son equivalentes:

1) Suma directa de módulos $\mathfrak{F}_\sigma$- cerrados es $\mathfrak{F}_\sigma$- cerrado.

2) Q_σ conmuta con sumas directas.

3) σ es noetheriano.

<u>Demostración</u>:

1) $\Rightarrow$ 2) Sea $\{M_\alpha\}$ una familia de módulos libres de σ-torsión. Por hipótesis, $\bigoplus_\alpha Q_\sigma(M_\alpha)$ es $\mathfrak{F}_\sigma$- cerrado. Además, existe una inclución obvia de $\bigoplus_\alpha M_\alpha$ dentro de $\bigoplus_\alpha Q_\sigma(M_\alpha)$, la cual debemos verla como una identificación. Ya que para cualquier α, el módulo $Q_\sigma(M_\alpha)/M_\alpha$ es de σ-torsión y $\bigoplus_\alpha Q_\sigma(M_\alpha)/\bigoplus_\alpha M_\alpha \cong \bigoplus_\alpha (Q_\sigma(M_\alpha)/M_\alpha)$, tenemos que $\bigoplus_\alpha Q_\sigma(M_\alpha)/\bigoplus_\alpha M_\alpha$ es de σ-torsión. Por la unicidad del módulo de cocientes tenemos que $\bigoplus_\alpha Q_\sigma(M_\alpha) = Q_\sigma(\bigoplus_\alpha M_\alpha)$.

2) $\Rightarrow$ 3) Sea $I_1 \subset I_2 \subset \cdots$ una cadena de ideales izquierdos tales que $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \in \mathfrak{F}_\sigma$. Como cualquier elemento de I está en todo I_n, desde algún índice, hay un morfismo $f : I \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A/I_n$. Además, $I \in \mathfrak{F}_\sigma$ implica que este morfismo se extiende a un morfismo $f' : A \longrightarrow Q_\sigma(\bigoplus_n A/I_n)$, es decir, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[ddl, dashed, "f'"] \\
 & \bigoplus_n A/I_n \arrow[d, "i_\sigma"'] & \\
 & Q_\sigma(\bigoplus_n A/I_n) &
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis $Q_\sigma(\bigoplus_n A/I_n) = \bigoplus_n Q_\sigma(A/I_n)$.
Sea $\xi \in \bigoplus_n Q_\sigma(A/I_n)$ tal que $f'(1) = \xi$; entonces, para toda $x \in I$, $f'(x) = x\xi$. Hay un entero h tal que $\xi_n = 0$ para $n \geq h$ (donde ξ_n es la n-ésima componente de ξ en $Q_\sigma(A/I_n)$), y por lo tanto, para todo $x \in I$, la imagen de x en A/I_h pertenece al kernel del morfismo $A/I_n \longrightarrow Q_\sigma(A/I_n)$; de esta forma $I/I_n \subset \sigma(A/I_n)$ y por Teorema 2.8, $I_n \in \mathfrak{F}_\sigma$.

3) $\Rightarrow$ 1) Sea $\{E_\alpha\}$ una familia de módulos $\mathfrak{F}_\sigma$-cerrados. Es claro que $\bigoplus_\alpha E_\alpha$ es libre de σ-torsión, así que sólo verificaremos que es $\mathfrak{F}_\sigma$-inyectivo.

Sea $I \in \mathfrak{F}_\sigma$ y $f : I \dashrightarrow \bigoplus_\alpha E_\alpha$ un morfismo.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dashed] & I \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[ddl, dashed, "\bar{f}"] \\
& \bigoplus\limits_{\alpha} E_\alpha \arrow[d, hook] & \\
& \prod\limits_{\alpha} E_\alpha &
\end{tikzcd}$$

Como $\prod\limits_{\alpha} E_\alpha$ es libre de σ-torsión, f se extiende a A mediante el morfismo $\bar{f} : A \to \prod\limits_{\alpha} E_\alpha$; entonces existe $\xi \in \prod\limits_{\alpha} E_\alpha$ tal que para todo $a \in I$, $\bar{f}(a) = a\xi$. Sea $\mathfrak{X} = \{\alpha \mid \xi_\alpha \neq 0\}$; entonces $I\xi = f(I) \subset \bigoplus\limits_{\alpha} E_\alpha$, es decir, para todo $a \in I$, $a\xi_\alpha = 0$ para casi toda α. Sea C cualquier subconjunto numerable de $\mathfrak{X}$, $C = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots\}$. Sea $I_n = \{a \in I / a\xi_{\alpha_i} = 0$ para $i \geq n\}$. Entonces $I_1 \subset I_2 \subset \cdots$ y $I = \bigcup\limits_n I_n$. Por hipótesis, $I_k \in \mathfrak{F}_\sigma$ para alguna k (lo cual implica que $I_K \in \mathfrak{F}_\sigma$ para toda $K \geq k$). Por otro lado, $I_k \xi_{\alpha_n} = 0$ para toda $n \geq k$; ya que E_α es libre de σ-torsión para toda α, tenemos que $\xi_{\alpha_n} = 0$ para toda $n \geq k$, entonces C es finito. Pero si un conjunto $\mathfrak{X}$ tiene la propiedad que todo subconjunto numerable es finito, entonces el conjunto $\mathfrak{X}$ debe ser finito ■

Notemos que una condición suficiente para asegurar que σ es noetheriano, es que todo ideal en $\mathfrak{F}_\sigma$ contenga un ideal finitamente generado también en $\mathfrak{F}_\sigma$. Esto es a veces usado en las aplicaciones. No es claro que esta condición sea equivalente a que σ sea noetheriano. Además, se puede demostrar facilmente que si σ tiene la propiedad (T), entonces esta propiedad de finitud es válida para los ideales en $\mathfrak{F}_\sigma$; para este propósito se usa 2) del Teorema 4.3

Para considerar la exactitud derecha de Q_σ, introducimos otra definición.

<u>Definición</u>: Sea σ un preradical exacto izquierdo y $P \in A$-mód. Decimos que P es σ-proyectivo, si dada la sucesión exacta $M \to M'' \to 0$, con M y M'' módulos libres de σ-torsión y dado un morfismo $P \to M''$, hay un submódulo $P' \in \mathfrak{F}(P)$ y un morfismo $P' \to M$, tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P' \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[d] & \\ & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Notemos que si P es proyectivo en el sentido usual, entonces P es σ-proyectivo, ya que si P es proyectivo, el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d, dashed] & P \arrow[d] & \\ & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

conmuta.

4.5 TEOREMA: Sea σ un radical exacto izquierdo. Entonces son equivalentes:

1) Todo ideal $I \in \mathfrak{F}_\sigma$ es σ-proyectivo

2) Si E es $\mathfrak{F}_\sigma$-cerrado, E' es submódulo de E tal que E/E' es libre de σ-torsión, entonces E/E' es $\mathfrak{F}_\sigma$-inyectivo.

3) Q_σ es exacto derecho.

DEMOSTRACIÓN:

1) $\Rightarrow$ 2) Sea $I \in \mathfrak{F}_\sigma$ y $f: I \to E/E'$ un morfismo. Sea π el epimorfismo canónico $\pi: E \to E/E'$. Por hipótesis, existe un ideal $J < I$ tal que $\sigma(I/J) = I/J$ y un morfismo $f': J \to E$, tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to & J & \to & I & \\ & {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & \\ & E & \xrightarrow{\pi} & E/E' & \to 0 \end{array}$$

conmuta; es decir $f|_J = \pi f'$. Como σ es un radical exacto izquierdo, por 2.8 tenemos que $J \in \mathfrak{F}_\sigma$. Como E es $\mathfrak{F}_\sigma$-inyectivo, f' se extiende a A, es decir, hay un elemento $y \in E$ tal que $f'(x) = xy$ para todo $x \in J$. Sea $\eta = \pi(y)$, entonces $f(x) = \pi(f'(x)) = \pi(xy) = x\pi(y) = x\eta$, para todo $x \in J$. Afirmamos que para toda $a \in I$, $f(a) = ay$. Sea $g: I \to E/E'$ tal que $g(a) = ay$. Como E/E' es libre de σ-torsión y $J \in \mathfrak{F}(I)$, entonces $f = g \Leftrightarrow f|_J = g|_J$. Sea $a \in J$,
$f|_J(a) = \pi f'(a) = ay = g(a)$. Entonces existe un morfismo $\bar{f}: A \to E/E'$, definido por $\bar{f}(x) = xy$,

El cual extiende a f; es decir, E/E' es $\mathcal{F}_\sigma$-inyectivo.

2) $\Rightarrow$ 3) Supongamos que la sucesión $M \xrightarrow{\pi} M'' \to 0$ es exacta, con M y M'' módulos libres de σ-torsión. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "i"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \\ Q_\sigma(M) \arrow[r, "\pi_\sigma"] & Q_\sigma(M'') & \end{tikzcd}$$

Sea $X = \pi_\sigma(Q_\sigma(M))$. Por hipotesis, X es $\mathcal{F}_\sigma$-inyectivo; además, $M'' < X$, entonces por la unicidad de $Q_\sigma(M'')$, tenemos que $X = Q_\sigma(M'')$.

3) $\Rightarrow$ 1) Dado el diagrama

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "\pi"] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

con $I \in \mathcal{F}_\sigma$, f un morfismo y M y M'' módulos libres de σ-torsión, por hipótesis obtenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "i"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \\ Q_\sigma(M) \arrow[r, "\pi_\sigma"] & Q_\sigma(M'') \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Ya que $I \in \mathcal{F}_\sigma$ y $Q_\sigma(M'')$ es $\mathcal{F}_\sigma$-inyectivo, el morfismo $if: I \to Q_\sigma(M'')$ se extiende a A, por lo que existe $\eta \in Q_\sigma(M'')$ tal que $if(a) = a\eta$ para todo $a \in I$. Como π_σ es epimorfismo, sea $x \in Q_\sigma(M)$ tal que

$\pi_\sigma(x)=\eta$; usando el hecho que $Q_\sigma(M)/M$ es de σ-torsión, existe un ideal $J\subset I$, con $J\in F_\sigma$ y tal que $Jx\subset M\cap Ix$. Sea $f: J\to M$ tal que $f'(b)=bx$. Es claro que el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & J \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & I \arrow[d, "f"] & \\ & M \arrow[r, "\pi"] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es conmutativo y I/J es de σ-torsión. Es decir, I es σ-proyectivo ■

<u>Definición</u>: Se dice que un anillo A es hereditario (izquierdo), si todo ideal izquierdo es proyectivo.

En vista de los dos últimos teoremas, vemos que para cualquier anillo hereditario noetheriano (izquierdo), todo radical exacto izquierdo tiene la propiedad (T).

4.6 <u>Proposición</u>: Si σ es un radical exacto izquierdo, el cual tiene la propiedad (T), entonces todo ideal izquierdo en $Q_\sigma(A)$ es generado por un ideal izquierdo de $A/\sigma(A)$. En especial, si A es noetheriano (izquierdo), entonces $Q_\sigma(A)$ también lo es.

<u>Demostración</u>: Sea I un ideal izquierdo de $Q_\sigma(A)$ y $J=I\cap i(A)$. Entonces I/J es de σ-torsión; por lo tanto $I/Q_\sigma(A)J$ tambien es de σ-torsión, pero por hipotesis σ tiene la propiedad (T), entonces el $Q_\sigma(A)$-módulo $I/Q_\sigma(A)J$ es libre de σ-torsión.

Consecuentemente $I = Q_\sigma(A)J$ ■

La localización en anillos conmutativos es una técnica muy usada para el estudio de módulos proyectivos, ya que el funtor correspondiente a un conjunto multiplicativo tiene la propiedad (T).

En nuestro caso general, este procedimiento no sirve para un radical exacto izquierdo arbitrario. De cualquier modo, ninguna dificultad se presenta si estudiamos solamente módulos finitamente generados.

4.7 <u>Teorema</u>: Sea σ un radical exacto izquierdo. Si F es un A-módulo libre finitamente generado, entonces $Q_\sigma(F) = Q_\sigma(A) \otimes F$. Si P es un A-módulo proyectivo finitamente generado, entonces $Q_\sigma(P) = Q_\sigma(A) \otimes P$ y por lo tanto, $Q_\sigma(P)$ es un $Q_\sigma(A)$-módulo proyectivo finitamente generado.

<u>Demostración</u>: Por hipotesis, $F \simeq A^n$ para algún entero positivo n. Como Q_σ es un funtor aditivo, conmuta con sumas directas, es decir $Q_\sigma(F) = (Q_\sigma(A))^n$. Entonces

$$Q_\sigma(A) \otimes F \simeq Q_\sigma(A) \otimes A^n \simeq (Q_\sigma(A))^n = Q_\sigma(F)$$

Si P es un A-módulo proyectivo finitamente generado, entonces $P \oplus P' = F$ para algún módulo P' y F un A-módulo libre finitamente generado. Nuevamente,

$Q_\sigma(F) = Q_\sigma(P) \oplus Q_\sigma(P')$ y

$Q_\sigma(F) = Q_\sigma(A) \otimes P \oplus Q_\sigma(A) \otimes P'$; es claro que $Q_\sigma(P) = Q_\sigma(A) \otimes P$ ∎

En vista del último resultado, se tiene para todo radical exacto izquierdo σ, una correspondencia de la clase de A-módulos proyectivos en la clase de $Q_\sigma(A)$-módulos proyectivos.

Bibliografía:

[1]. Goldman, Oscar: Rings and Modules of Quotients. Journal of Algebra 13, 10 - 47, 1969.

[2]. Anderson, F. W. y Fuller, K. R.: Rings and categories of modules. Graduate texts in mathematics # 13. Springer-Verlag, Berlín, Heidelberg, New York, 1974.

[3]. Stenström, B.: Rings of Quotients. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen # 217. Springer-Verlag. Berlín, Heidelberg, New York, 1975.

[4] Atiyah, M.F. y Macdonald, I. G.: Introducción al algebra conmutativa; Editorial Reverté, S.A.; Barcelona 1978.