20

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ECUACIONES DIFERO - DIFERENCIALES CON COEFICIENTES PERIODICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

RAFAEL ANTONIO OLMEDO PEREZ

MEXICO, D. F. 1981

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

INDICE

0. INTRODUCCION.

Las ecuaciones difero-diferenciales lineales con coeficientes periódicos tienen que estudiarse en forma independiente, casi sin basarse en la teoría de las ecuaciones con coeficientes constantes, debido a la dificultad en el problema de la reducción de las primeras ecuaciones a las segundas.

El presente trabajo pretende introducirnos al estudio de las ecuaciones con retardos y coeficientes periódicos, en el espíritu en el que lo hacen Bellman y Cooke en su monografía sobre ecuaciones difero diferenciales [2], aunque dicha monografía no trata el tema aquí estudiado. Por lo cual, primero se estudian las ecuaciones con retardos múltiples del período de los coeficientes de la ecuación. Tales ecuaciones resultan ser una buena ilustración de la teoría general de las ecuaciones con retardos arbitrarios y coeficientes periódicos. Además tienen un interes en si mismas como una de las pocas clases de ecuaciones con coeficientes variables para las que es posible construir soluciones explícitas.

Los resultados aquí expuestos supuestamente admiten generalización a los casos con retardos variables (periódicos) y a las ecuaciones escritas en términos de integrales de Stiltjes con núcleo periódico, cosa que no se pretende en este trabajo.

Una parte de los resultados ordenados en este trabajo estan basados en artículos de Zvierkin A. M. cuyas citas aparecen en la bibliografía del final del texto.

Las siguientes indicaciones serán útiles para una fácil lectura del presente trabajo:

- Las secciones estan numeradas con números romanos.
- Las fórmulas, con números arabigos entre paréntesis.
- Las referencias, en corchetes numerados y refiriéndose a la lista de REFERENCIAS del final del texto.
- Las citas a fórmulas de la misma sección se hace con la sola mención al número de fórmula.
- Las citas a fórmulas de otra sección se hace mencionando no sólo el número de fórmula, sino también la sección (en número romano).

Por último deseo expresar mis agradecimientos al maestro Guillermo Gómez Alcaraz por haberme sugerido el tema y por su valiosa ayuda en la elaboración de este trabajo.

También deseo expresar mi reconocimiento a los maestros Jesús López Estrada, José López Estrada, Humberto Santillana Leyo y Ernesto Olvera Sotres por haber revisado cuidadosamente el presente trabajo y por sus valiosas sugerencias y observaciones.

ECUACIONES DIFERO-DIFERENCIALES CON COEFICIENTES PERIODICOS.

I. UN PROBLEMA DE REDUCCION.

En casi todo este trabajo serán tratados sólo las ecuaciones difero-diferenciales con coeficientes periódicos.

Es sabido que para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes periódicos tipo:

$$\dot{x}(t) = A(t)x \tag{1}$$

siempre existe la transformación (llamada de Lyapunov)

$$x = L(t)y \tag{2}$$

donde $L(t)$ es una matriz no degenerada periódica que transforma al sistema (1) en un sistema de ecuaciones con coeficientes constantes [1] :

$$\dot{y} = By \tag{3}$$

Aunque sólo excepcionalmente puede determinarse explícitamente la matriz $L(t)$, la posibilidad en sí de transformar (1) en (3) a través de (2) permite con suficiente detalle estudiar la estructura de las soluciones, así como la estabilidad de las soluciones, etc.

Por otro lado, para las ecuaciones difero-diferenciales tal reducción en el caso general es imposible.

Tomemos la ecuación difero-diferencial escalar más simple:

$$\dot{u}(t) + a(t)u(t) + b(t)u(t-\omega) = 0 \quad , \tag{4}$$

donde los coeficientes $a(t)$ y $b(t)$ son T-periódicos.

Intentemos como en (2) obtener el tipo de transformación:

$$u(t) = \ell(t)\,x(t) \tag{5}$$

que mande la ecuación (4) en una ecuación con coeficientes constantes, esto es, veamos bajo qué condiciones esto es posible, para lo cual sustituimos (5) en (4), obteniendo:

$$\dot{\ell}(t)\,x(t)+\ell(t)\,\dot{x}(t)+a(t)\ell(t)x(t)+b(t)\ell(t-\omega)\,x(t-\omega)=0$$

o sea

$$\dot{x}(t)+x(t)\left[\frac{\dot{\ell}(t)}{\ell(t)}+a(t)\right]+b(t)\,\frac{\ell(t-\omega)}{\ell(t)}\,x(t-\omega)=0$$

suponiendo evidentemente que $\ell(t)\neq 0$. Finalmente para que esta última ecuación resulte con coeficientes constantes tenemos que imponer la condición de que efectivamente sus coeficientes sean constantes, es decir que

(6i) $$\frac{\dot{\ell}(t)}{\ell(t)}+a(t)=c_1$$

(6ii) $$\frac{\ell(t-\omega)}{\ell(t)}\,b(t)=c_2$$

donde c_1 y c_2 son constantes.

De (6i) podemos obtener $\ell(t)$ ya que

$$\frac{d}{dt}\left[\ln \ell(t)\right]+a(t)=c_1$$

y por lo tanto

$$\ell(t)=\hat{c}_1\,e^{c_1 t-\int_0^t a(s)\,ds}$$

que sustituida en (6ii) obtenemos:

$$\frac{\hat{c}_1\,e^{c_1(t-\omega)-\int_0^{t-\omega}a(s)\,ds}}{\hat{c}_1\,e^{c_1 t-\int_0^t a(s)\,ds}}\,b(t)=c_2\,,$$

$$b(t)\,\frac{e^{-c_1\omega}\,e^{-\int_0^{t-\omega}a(s)\,ds}}{e^{-\int_0^{t}a(s)\,ds}} = c_2 \quad ,$$

$$b(t)\,\frac{e^{-\int_0^{t-\omega}a(s)\,ds}}{e^{-\int_0^{t-\omega}a(s)ds-\int_{t-\omega}^{t}a(s)\,ds}} = \hat{c}_2 \quad ,$$

donde la constante $\hat{c}_2=c_2\,e^{c_1\omega}$,luego

$$(7) \qquad b(t)\,e^{\int_{t-\omega}^{t}a(s)\,ds} = \hat{c}_2$$

por lo tanto la ecuación difero-diferencial (4) es reducible a una ecuación con coeficientes constantes si y sólo si se cumple la condición (7).

Pero es evidente que la condición (7),en general,no se cumple,de modo que podemos concluir que inclusive las ecuaciones lineales difero-diferenciales tipo (4) con coeficientes periódicos tienen que investigarse en forma independiente,no basándose casi en nada en la teoría de las ecuaciones difero-diferenciales con coeficientes constantes.Para ecuaciones difero-diferenciales más complicadas y sistemas (por ejemplo,el sistema del ejercicio 12 del capítulo 6 de [2]) obtenemos condiciones más fuertemente restrictivas que (7).

Finalmente,veamos a manera de ejemplos,dos casos particulares,que pueden ser transformados a ecuaciones con coeficientes constantes:

Sea el sistema de ecuaciones con coeficientes periódicos y retardos proporcionales al período [4]:

(8) $\dot{x}(t)+b(t)\left[A_0x(t)+A_1x(t-T)+\cdots+A_mx(t-mT)\right]=0$,

donde $b(t)\geq 0$ es una función escalar T-periódica y las matrices A_i son constantes.

Este sistema puede ser transformado a uno con coeficientes constantes mediante un cambio de variable. En efecto si sustituimos a t por $t(\eta)$ donde

(9) $$\eta(t)\overset{\text{def}}{=}\int_0^t\frac{1}{b(\xi)}d\xi$$

de donde

$$\frac{dt}{d\eta}=b(t)$$

y (8) toma la forma

$$\dot{x}(t(\eta))\frac{dt}{d\eta}+b(t)\left[A_0x(t(\eta))+A_1x(t(\eta)-T)+\cdots+A_mx(t(\eta)-mT)\right]=0$$

o sea

(10) $\dot{x}(t(\eta))b(t)+b(t)\left[A_0x(t(\eta))+A_1x(t(\eta)-T)+\cdots+A_mx(t(\eta)-mT)\right]=0$

de modo que

$$\dot{x}(\eta)+A_0x(\eta)+A_1x(\eta-T)+\cdots+A_mx(\eta-mT)=0$$

Análogamente [5] podemos ver que la ecuación escalar:

(11) $\dot{y}(t)+a(t)y(t)+b(t)\left[c_1y(t-T)+\cdots+c_my(t-mT)\right]=0$

donde $b(t)\geq 0$ y $a(t)$ son funciones T-periódicas, con c_i constantes; puede ser transformada a una ecuación con coeficientes constantes, mediante el cambio de función incógnita, o sea introduciendo la nueva función incógnita $x(t)$ a través de : $y(t)=x(t)\varphi(t)$ con $\varphi(t)=e^{-\int_0^t a(\xi)d\xi}$ y haciendo, finalmente, el mismo cambio de variable que en el caso anterior llegamos en efecto a

$$\dot{x}(\eta) + c_1 x(\eta - T) + \cdots + c_m x(\eta - mT) = 0 \quad .$$

II. CONSTRUCCION FORMAL DE LAS SOLUCIONES DE LA ECUACION DIFERO-DIFERENCIAL ESCALAR CON RETARDO MULTIPLO DEL PERIODO DE LOS COEFICIENTES.

Consideremos la ecuación

$$(1)\qquad \dot{u}(t)+b_0(t)u(t)+b_1(t)u(t-\lambda_1T)+b_2(t)u(t-\lambda_2T)=0$$

como es tratada en [2] para retardos constantes, aunque aquí estudiaremos el caso en que los retardos son múltiplos del período de los coeficientes, esto es $b_0(t), b_1(t)$ y $b_2(t)$ son funciones contínuas T-periódicas y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^+$.

Buscaremos las soluciones, siguiendo a Floquet, como

$$(2)\qquad u(t)=\varphi(t)e^{st}$$

donde $\varphi(t)$ deberá ser una función T-periódica.

Sustituyendo (2) en (1), tenemos:

$$\dot{\varphi}(t)e^{st}+s\varphi(t)e^{st}+b_0(t)\varphi(t)e^{st}+b_1(t)\varphi(t-\lambda_1T)e^{s(t-\lambda_1T)}+b_2(t)\varphi(t-\lambda_2T)e^{s(t-\lambda_2T)}=0,$$

y dado que φ es T-periódica obtenemos:

$$(2')\qquad \dot{\varphi}(t)e^{st}+\varphi(t)e^{st}\left[s+b_0(t)+b_1(t)e^{-s\lambda_1T}+b_2(t)e^{-s\lambda_2T}\right]=0$$

de donde simplificando en e^{st} e integrando la ecuación en variables separables llegamos a:

$$(3) \quad \varphi(t) \overset{Not}{=} \psi(t,s) = C\, e^{-st - \int_0^t [b_0(v) + b_1(v) e^{-s\lambda_1 T} + b_2(v) e^{-s\lambda_2 T}] dv}$$

y de nuevo por la condición de periodicidad de φ tendremos que s debe satisfacer:

$$C\, e^{st - \int_0^t [b_0(v) + b_1(v) e^{-s\lambda_1 T} + b_2(v) e^{-s\lambda_2 T}] dv} = C\, e^{s(t+T) - \int_0^{t+T} [b_0(v) + b_1(v) e^{-s\lambda_1 T} + b_2(v) e^{-s\lambda_2 T}] dv} ,$$

de donde

$$1 = e^{-sT - \int_t^{t+T} [b_0(v) + b_1(v) e^{-s\lambda_1 T} + b_2(v) e^{-s\lambda_2 T}] dv} ,$$

es decir, satisfará s:

$$sT + \int_0^T b_0(v)\, dv + e^{-s\lambda_1 T} \int_0^T b_1(v)\, dv + e^{-s\lambda_2 T} \int_0^T b_2(v)\, dv = 0 \qquad (*) ,$$

esto es

$$(4) \quad f(s) \overset{Not}{=} s + \bar{b}_0 + \bar{b}_1 e^{-s\lambda_1 T} + \bar{b}_2 e^{-s\lambda_2 T} = 0$$

donde

$$(5) \quad \bar{b}_i = \frac{1}{T} \int_0^T b_i(v)\, dv \qquad (i = 0, 1, 2)$$

(*) Aquí en rigor debería de aparecer en lugar de 0 el número $2m\pi i$ ($m \in \mathbb{Z}$) que llevaría al cambio de las raices de la ecuación característica (4) en la magnitud $2m\pi T^{-1} i$, sin embargo de la forma final que toma la solución (6) se ve que no imprimiría ningún cambio a dicha forma final.

Resumiendo tenemos que la solución (3)-(2) de la ecuación (1) tiene lugar para las raices S del cuasipolinomio (4). Y esta es una ecuación de las estudiadas en el capítulo 12 de [2]. Allí se muestra que una tal ecuación (4) admite un conjunto infinito de soluciones S_r, en $\mathbb{C}$.

a) Tomando cualquiera de las raices simples S_r determinamos la correspondiente solución φ_r a través de (3):

$$\varphi_r(t) = \Psi(t, S_r)$$

y finalmente, a través de (2), la solución de (1) nos queda:

$$(6) \qquad \mu(t) = \Psi(t,S_r)e^{S_r t} = Ce^{-\int_0^t [b_0(v) + b_1(v)e^{-S_r\lambda_1 T} + b_2(v)e^{-S_r\lambda_2 T}]\,dv}$$

El coeficiente C puede usarse para normalizar la solución. Por comodidad puede tomarse $C=1$, así lo haremos si necesitamos (6) en lo sucesivo.

b) Si S_r es una raiz de multiplicidad μ_r de (4), entonces de manera análoga al caso de polinomios característicos (para ecuaciones de orden n ordinarias sin retardos), puede directamente comprobarse que las expresiones

$$(7) \qquad \frac{\partial^i}{\partial S^i}\left[\Psi(t,S)e^{St}\right]\Big|_{S=S_r} \qquad (i=1,2,\ldots,\mu_r-1)$$

son también soluciones de la ecuación difero-diferencial (1).

Efectuando la derivada (7) mediante la fórmula de Leibnitz, obtenemos que la raiz S_r de multiplicidad μ_r le corresponden μ_r

soluciones linealmente independientes del tipo

$$(8)\quad u_{ri}(t)=\left\{\frac{t^{i-1}}{(i-1)!}\left[\psi(t,s)\right]\Big|_{s=s_r}+\frac{t^{i-2}}{(i-2)!}\cdot\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial}{\partial s}\psi(t,s)\right]\Big|_{s=s_r}+\cdots+\frac{1}{\mu_r!}\left[\frac{\partial^{\mu_r-1}}{\partial s^{\mu_r-1}}\psi(t,s)\right]\Big|_{s=s_r}\right\}e^{s_r t}$$

$$(i=1,2,\cdots,\mu_r)$$

es decir

$$u_{r1}(t)=\psi(t,s_r)e^{s_r t}$$

$$u_{r2}(t)=\left[t\,\psi(t,s_r)+\frac{1}{2!}\frac{\partial}{\partial s}\psi(t,s_r)\right]e^{s_r t}$$

$$u_{r3}(t)=\left[\frac{t^2}{2!}\psi(t,s_r)+\frac{t}{1!2!}\frac{\partial}{\partial s}\psi(t,s_r)+\frac{1}{3!}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\psi(t,s_r)\right]e^{s_r t}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{r\mu_r}(t)=\left[\frac{t^{\mu_r-1}}{(\mu_r-1)!}\psi(t,s_r)+\frac{t^{\mu_r-2}}{2!(\mu_r-2)!}\frac{\partial}{\partial s}\psi(t,s_r)+\cdots+\frac{1}{\mu_r!}\frac{\partial^{\mu_r-1}}{\partial s^{\mu_r-1}}\psi(t,s_r)\right]e^{s_r t}$$

o introduciendo las funciones periódicas $\varphi_{ri}(t)$ como

$$(9)\qquad \varphi_{ri}(t)=\frac{1}{i!}\frac{\partial^{i-1}}{\partial s^{i-1}}\psi(t,s_r)\qquad (i=1,2,\cdots,\mu_r)$$

tendremos las μ_r soluciones linealmente independientes:

$$u_{r1}(t)=\varphi_{r1}(t)e^{s_r t}$$

$$u_{r2}(t)=\left[t\,\varphi_{r1}(t)+\varphi_{r2}(t)\right]e^{s_r t}$$

$$(8')\quad u_{r3}(t)=\left[\frac{t^2}{2!}\varphi_{r1}(t)+\frac{t}{1!}\varphi_{r2}(t)+\varphi_{r3}(t)\right]e^{s_r t}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{r\mu_r}(t)=\left[\sum_{\lambda=1}^{\mu_r}\frac{t^{\mu_r-\lambda}}{(\mu_r-\lambda)!}\varphi_{r\lambda}(t)\right]e^{s_r t}$$

La independencia lineal de las soluciones (8') es evidente, dado que ellas contienen como factores polinomios de distintos grados con coeficientes periódicos ($\varphi_{r\lambda}$).

También puede comprobarse, fácilmente, la independencia lineal de las soluciones tipo (8') correspondientes a distintas raices de la ecuación característica (4).

Estos dos resultados son un análogo completo de lo que ocurre en el caso de una ecuación ordinaria de orden n, con la única diferencia de que el conjunto de raices de la ecuación característica es en general un conjunto infinito (véase [2] y [3]).

Debido a que (4) es una ecuación trascendente y en general tiene un conjunto numerable de raices $\{s_\nu\}$, resulta natural el plantearse el problema de la completez del conjunto numerable de soluciones particulares del tipo (8'), esto es, plantearse la posible representación de cualquier solución de la ecuación (1), mediante una serie, finita o infinita, a través de las soluciones particulares construidas tipo (8').

En este trabajo no estudiaremos completamente este problema, que en sí resulta ser un problema suficientemente complicado. Sin embargo podemos al menos dar ejemplos, que por un lado nos muestren la no vacuidad del problema, y por otro muestren que no todo sistema de soluciones tipo (8') es completo:

i) Si la ecuación (1) es susceptible de transformarse en una ecuación con coeficientes constantes mediante una cierta transformación lineal (similar a la obtenida para la ecuación I(4)).

Sea

$$(10) \quad L(x) \overset{def}{=} \dot{x}(t) + c_0 x(t) + c_1 x(t-\lambda_1 T) + c_2 x(t-\lambda_2 T) = 0$$

la ecuación transformada de (1), con C_i constantes.

Entonces el sistema de soluciones tipo (8') de la ecuación original (1) se transforma en un sistema de soluciones particulares de tipo clásico: $e^{st}, t e^{st}, t^2 e^{st}, \ldots$ correspondientes a la ecuación transformada (10).

En efecto,

$$L(e^{st}) = f(s)\, e^{st}$$

donde

$$f(s) = s + c_0 + c_1 e^{-\lambda_1 T s} + c_2 e^{-\lambda_2 T s}$$

además para cualquier $m \geq 1$ tenemos

$$L(t^m e^{st}) = (m t^{m-1} e^{st} + t^m s e^{st}) + c_0 t^m e^{st} + c_1 (t-\lambda_1 T)^m e^{s(t-\lambda_1 T)} + c_2 (t-\lambda_2 T)^m e^{s(t-\lambda_2 T)}$$

expandiendo $(t-\lambda_1 T)^m$, $(t-\lambda_2 T)^m$ y tomando en cuenta que

$$f^{(\nu)}(s) = (-1)^{\nu} c_1 (\lambda_1 T)^{\nu} e^{-\lambda_1 T s} + (-1)^{\nu} c_2 (\lambda_2 T)^{\nu} e^{-\lambda_2 T s} \qquad (\nu \geq 2)$$

obtenemos

$$L(t^m e^{st}) = e^{st} \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} f^{(\nu)}(s)\, t^{m-\nu}$$

de donde obtenemos que si $s = s_r$ es una raíz de multiplicidad μ_r de la ecuación característica, entonces

$$L(t^m e^{st}) \equiv 0 \qquad (0 \le m \le \mu_r - 1)$$

o sea que en efecto $e^{s_r t}, t\, e^{s_r t}, \ldots, t^{\mu_r - 1} e^{s_r t}$ son las μ_r soluciones particulares correspondientes a una raíz caracteristica s_r de multiplicidad μ_r.

Por otro lado, en el capítulo 4 de [2] se establece un resultado que afirma que cualquier solución de la ecuación con coeficientes constantes de tipo retardado como la que aquí analizamos se puede desarrollar en una serie respecto de las soluciones clásicas obtenidas $e^{st}, t\, e^{st}, t^2 e^{st}, \ldots$, es decir

$$\mu(t) = \sum_{r=1}^{\infty} e^{s_r t} p_r(t) \qquad t > \omega = \max\{\lambda_1 T, \lambda_2 T\}$$

y esta serie converge uniformemente para t en cualquier intervalo finito, siempre que las partes reales de las raices de la ecuación característica esten en el semiplano complejo $Re(s) \le c_1 < 0$ con c_1 una constante debidamente establecida en dicho resultado. Lo cual significa que este sistema es completo y por lo tanto el sistema original de funciones tipo (8') es completo.

Como $L(x)$ es un operador lineal y homogeneo, entonces $p(t) e^{st}$ es solución si y sólo si el grado del polinomio $p_r(t)$ no es mayor que $\mu_r - 1$ y también $\sum e^{s_r t} p_r(t)$ será solución, para cualquier sucesión de raices características $\{s_r\}$ de $L(x)$, si y sólo si el grado de los polinomios $p_r(t)$ no es mayor que la multiplicidad de s_r.

ii) Este segundo ejemplo nos dice cómo a ecuaciones del tipo (1) no siempre le corresponde un sistema completo de soluciones particulares, esto es, nos proponemos hallar un sistema tipo (8') no completo de soluciones particulares correspondiente a una ecuación especffica tipo (1). En efecto, consideremos [4] la ecuación

(11) $$\dot{u}(t) = b(t)\, u(t-T)$$

con $b(t)$ función alternante (cambia de signo) de período T y con condición inicial:

(12) $$u(t) = b(t) \quad , \quad \forall t \in [t_0-T, t_0]$$

Veamos el sistema de soluciones particulares (8') en este caso no es completo:

De la misma forma que en (2), obtenemos que

$$\varphi(t) = e^{\int_0^t b(\xi) e^{-s_1 T} d\xi - s_1 t}$$

y por tanto

$$u(t) = e^{\int_0^t b(\xi) e^{-s_1 T} d\xi}$$

como $b(t)$ es función alternante y periódica entonces existen t_1 y t_2 tales que $0 \le t_1 < t_2 \le T$ y $\int_{t_1}^{t_2} b(\xi) d\xi = 0$, y además $b(t)$ no idénticamente cero para $t \in [t_1, t_2]$, satisface: $u(t_1+\lambda) = u(t_2+\lambda)$, donde $\lambda \in \mathbb{Z}$. Esto último es claro ya que:

$$e^{\int_0^{t_1+\lambda} b(\xi) e^{-sT} d\xi} = e^{\int_0^{t_2+\lambda} b(\xi) e^{-sT} d\xi}$$

$$\Rightarrow \int_0^{t_1+\lambda} b(\xi) d\xi - \int_0^{t_2+\lambda} b(\xi) d\xi = 0$$

$$\therefore \int_{t_2+\lambda}^{t_1+\lambda} b(\xi) d\xi = 0 \quad .$$

Ahora, usando el hecho de que $u(t) = b(t) \quad \forall t \in [t_0-T, t_0]$, tenemos que

$$\dot{u}(t) = b(t)\, u(t-T) \,,\; t \in [t_0, t_0+T] \Rightarrow \dot{u}(t) = b^2(t) \Rightarrow$$

$$u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^{t} b^2(\xi) d\xi \Rightarrow u(t) = b(t_0) + \int_{t_0}^{t} b^2(\xi) d\xi \Rightarrow$$

$$u(t_1) < u(t_2) \quad , \quad t_1 < t_2 \quad , \quad t \in [t_0, t_0+T]$$

Por tanto para la función alternante $b(t)$ el sistema de soluciones tipo Floquet no es fundamental.

Finalmente combinando los resultados de I(8) y lo último que demostramos, es decir, de (11), obtenemos que una condición necesaria y suficiente [5] para la completez del sistema de soluciones del tipo Floquet de la ecuación

(13) $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y(t-T)$,

con coeficientes periódicos de período T, consiste en que la función $b(t)$ no cambie de signo.

En efecto, si $b(t)$ no es de signo constante, es decir $b(t)$ es alternante, entonces por el resultado anterior de (10) el sistema de soluciones no es completo. Y recíprocamente, si $b(t)$ es de signo constante, entonces la ecuación (13) puede reducirse como un caso particular de I(8) a una ecuación con coeficientes constantes, para la cual el sistema de soluciones es completo.

III. DESARROLLO ASINTOTICO EN SERIE DE LAS SOLUCIONES A TRAVES DE SOLUCIONES TIPO FLOQUET.

No obstante que las soluciones particulares tipo (8') de II no forman en general un sistema completo, es posible, sin embargo, desarrollar cualquier solución de la ecuación

$$(1) \qquad \dot{\mu}(t) + b_0(t)\mu(t) + b_1(t)\mu(t-\lambda_1 T) + b_2(t)\mu(t-\lambda_2 T) = 0$$

en una serie asintética a través de las soluciones tipo (8') de II. Es decir, de esta manera tendremos que cualquier solución la podremos representar "casi" como una combinación lineal de soluciones particulares, para tiempos muy grandes.

Supongamos que se busca la solución $\mu(t)$ de la ecuación (1) definida por la función inicial

$$(2) \qquad \mu(t) = g(t) \quad , \quad \forall t \in [-\omega, 0] \quad ; \quad \omega = \max\{\lambda_1 T, \lambda_2 T\}$$

Introduzcamos ahora la función generatriz para la solución $\mu(t)$:

$$(3) \qquad \mathcal{U}(\tau, P) \overset{df}{=} \sum_{\nu=0}^{\infty} \mu(\tau+\nu T) P^{\nu} \qquad (0 \le \tau \le T) \qquad (*)$$

Tenemos la siguiente

<u>Proposición</u> Las soluciones de (1) no crecen más rápido que cierta función exponencial. De (1) tenemos que

$$\mu(t) = \int_0^t [-b_0(t_1)\mu(t_1) - b_1(t_1)\mu(t_1-\lambda_1 T) - b_2(t_1)\mu(t_1-\lambda_2 T)]\,dt_1 + \mu(0)$$

sea $m = \max_{t \in [-\omega, 0]} |\mu(t)|$ y como las $b_i(t)$ $(i = 0, 1, 2)$ son continuas y periódicas, por lo tanto acotadas: $|b_i(t)| \le M_i$

$$|\mu(t)| \le M_0 \int_0^t |\mu(t_1)|\,dt_1 + M_1 \int_0^t |\mu(t_1-\lambda_1 T)|\,dt_1 + M_2 \int_0^t |\mu(t_1-\lambda_2 T)|\,dt_1 + m$$

$$|\mu(t)| \le M_0 \int_{-\omega}^{t} |\mu(t_1)|\,dt_1 + M_1 \int_{-\lambda_1 T}^{t-\lambda_1 T} |\mu(t_1)|\,dt_1 + M_2 \int_{-\lambda_2 T}^{t-\lambda_2 T} |\mu(t_1)|\,dt_1 \le (M_0+M_1+M_2) \int_{-\omega}^{t} |\mu(t_1)|\,dt_1 + m$$

(*) Para $P = z^{-1}$ nos queda definida la llamada transformación "z" y para $P = e^{-s}$ la transformación discreta de Laplace. Sin embargo para nuestros fines la transformación en la forma (3) es la más conveniente.

$$|\mu(t)| \leq m\, e^{\int_{-\omega}^{t}(M_0+M_1+M_2)\,dt_1} = m\, e^{(M_0+M_1+M_2)(t+\omega)}$$

Basado en esta proposición es que podemos asegurar que la serie (3) converge uniformemente e independientemente de τ en cierto círculo $|P| \leq R$ con $R \geq e^{-(M_0+M_1+M_2)T}$

Ya que

$$|\mu(\tau+\nu T)| \leq m\, e^{(M_0+M_1+M_2)(\tau+\nu T+\omega)}$$

aplicando el criterio de la raíz tenemos

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{e^{(M_0+M_1+M_2)(\tau+\nu T+\omega)}} = \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, e^{(M_0+M_1+M_2)(\frac{\tau}{\nu}+T+\frac{\omega}{\nu})} = e^{(M_0+M_1+M_2)T}$$

y del teorema de Cauchy-Hadamar

$$\frac{1}{R_1} = e^{(M_0+M_1+M_2)T}$$

es decir

$$R_1 = e^{-(M_0+M_1+M_2)T}$$

de modo que

$$R \geq e^{-(M_0+M_1+M_2)T}$$

Para valores grandes de $|P|$ la función generatriz $\mathcal{U}$ puede definirse por extención analítica. Hallemos su expresión explícita a través de los coeficientes de (1) y de la función inicial (2).

Cambiando en (1) t por $\tau+\nu T$ multiplicando por P^ν y sumando respecto de ν desde 0, tendremos:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \dot{\mu}(\tau+\nu T)P^\nu + b_0(\tau)\sum_{\nu=0}^{\infty}\mu(\tau+\nu T)P^\nu + b_1(\tau)\sum_{\nu=0}^{\infty}\mu(\tau+(\nu-\lambda_1)T)P^\nu + b_2(\tau)\sum_{\nu=0}^{\infty}\mu(\tau+(\nu-\lambda_2)T)P^\nu = 0$$

pero esto no es otra cosa que (debido a la convergencia uniforme de (3)):

$$\frac{\partial \mathcal{U}(\tau,P)}{\partial \tau}+b_0(\tau)\mathcal{U}(\tau,P)+b_1(\tau)\Big[\sum_{\nu=0}^{\lambda_1-1}u(\tau+(\nu-\lambda_1 T))P^\nu+\sum_{\nu=\lambda_1}^{\infty}u(\tau+(\nu-\lambda_1)T)P^\nu\Big]+$$

$$+b_2(\tau)\Big[\sum_{\nu=0}^{\lambda_2-1}u(\tau+(\nu-\lambda_2 T))P^\nu+\sum_{\nu=\lambda_2}^{\infty}u(\tau+(\nu-\lambda_2)T)P^\nu\Big],$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}(\tau,P)}{\partial \tau}+b_0(\tau)\mathcal{U}(\tau,P)+b_1(\tau)\mathcal{U}(\tau,P)P^{\lambda_1}+b_2(\tau)\mathcal{U}(\tau,P)P^{\lambda_2}+b_1(\tau)\sum_{\nu=0}^{\lambda_1-1}g(\tau+(\nu-\lambda_1)T)P^\nu+$$

$$+b_2(\tau)\sum_{\nu=0}^{\lambda_2-1}g(\tau+(\nu-\lambda_2)T)P^\nu=0$$

Sea $$B(\tau,P)=b_0(\tau)+b_1(\tau)P^{\lambda_1}+b_2(\tau)P^{\lambda_2}$$

y $$G(\tau,P)=-b_1(\tau)\sum_{\nu=0}^{\lambda_1-1}g(\tau+(\nu-\lambda_1)T)P^\nu-b_2(\tau)\sum_{\nu=0}^{\lambda_2-1}g(\tau+(\nu-\lambda_2)T)P^\nu,$$

entonces llegamos a

(4) $$\frac{\partial \mathcal{U}(\tau,P)}{\partial \tau}+\mathcal{U}(\tau,P)B(\tau,P)=G(\tau,P)$$

Resolvamos esta ecuación bajo las condiciones a la frontera siguiente:

(5) $$\mathcal{U}(0,P)-P\,\mathcal{U}(T,P)=g(0)$$

De (4) obtenemos

(6) $$\mathcal{U}(\tau,P)=C\,e^{-\int_0^\tau B(t,P)\,dt}+\int_0^\tau G(\xi,P)\,e^{-\int_\xi^\tau B(\eta,P)\,d\eta}\,d\xi$$

y aplicando las condiciones a la frontera (5) con ayuda de (6) resulta que:

$$c=\frac{g(0)-P\int_0^T G(\xi,P)\,e^{-\int_\xi^T B(\eta,P)\,d\eta}\,d\xi}{1-P\,e^{-\int_0^T B(t,P)\,dt}}$$

y por lo tanto sustituyendo en (6):

$$\mathcal{U}(t,\rho)=\frac{g(0)e^{-\int_0^{\tau}B(t,\rho)dt}-\rho e^{-\int_0^{\tau}B(t,\rho)dt}\int_0^{T}G(\xi,\rho)e^{-\int_{\xi}^{T}B(\eta,\rho)d\eta}d\xi}{1-\rho e^{-\int_0^{T}B(t,\rho)dt}}+\int_0^{\tau}G(\xi,\rho)e^{-\int_{\xi}^{\tau}B(\eta,\rho)d\eta}d\xi . \tag{7}$$

Ahora estamos en posibilidades de estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación (1).

En efecto, de acuerdo a la definición de la función generatriz (3) los valores de la solución resultan ser los coeficientes del desarrollo en serie de Taylor de la función generatriz $\mathcal{U}(\tau,\rho)$, que es una función meromorfa. Por otro lado se sabe que el radio de convergencia de una tal serie es igual a la distancia del orígen de coordenadas, del plano complejo ρ, al punto singular más cercano de la función $\mathcal{U}$. Pero en la última expresión de $\mathcal{U}$, dada por (7), el segundo sumando es una función entera y el primero es una función meromorfa, es por esto que los puntos singulares de la función $\mathcal{U}$ resultan ser los ceros del denominador del primer sumando de (7), esto es de

$$F(\rho)=1-\rho\, e^{-\int_0^{T}B(\eta,\rho)\,d\eta} \tag{8}$$

Esta función a su vez es una función entera, por lo cual, el conjunto de sus ceros es a lo más numerable y no puede tener puntos de acumulación finitos.

Consideraremos tales ceros de (8) en orden creciente de sus módulos:

$$|\rho_1|\leq|\rho_2|\leq\ .\ .\ .\ \leq|\rho_m|\leq\cdot\cdot\cdot$$

y supondremos que algunos de tales ceros del denominador pueden representar singularidades removibles, debido a que en ellas los numeradores también se hacen cero. Por esto, sea ρ_j el cero del denominador (8) más cercano al centro del plano P, tal que no genera una singularidad removible de $\mathcal{U}(\tau,P)$, por lo tanto el radio de convergencia de la serie (3) es igual al módulo de ese P_j : $R=|P_j|$.

Por otro lado, el teorema de Cauchy Hadamar, sabemos que:

(10) $$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \sqrt[r]{|\mu(\tau+rT)|} \qquad (0 \leq \tau \leq T)$$

y podemos observar de la expresión de $\mathcal{U}$, dada por (7), el radio de convergencia R y por consiguiente el límite (10) no depende de τ, por lo que podemos escribir (10) en la forma:

(11) $$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[\left[\frac{t}{T}\right]]{|\mu(t)|}$$

de donde obtenemos por continuidad que

(12) $$-\ln R = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{\left[\frac{t}{T}\right]} \ln|\mu(t)| = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|\mu(t)|}{t} \frac{\frac{t}{T}}{\left[\frac{t}{T}\right]} T = T \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|\mu(t)|}{t} = T\lambda$$

o sea

(12') $$R = e^{-T\lambda}$$

donde

(13) $$\lambda = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|\mu(t)|}{t}$$

es el llamado exponente característico de Lyapunov para la solución $\mu(t)$. Este concepto puede compararse con el indicador de orden introducido, en nuestro texto básico [2], en el capítulo 9 problema .8.

Finalmente observamos que mediante el cambio

(14) $$\rho = e^{-Ts}$$

la función (8) se transforma en:

$$F(\rho) = 1 - \rho\, e^{-\int_0^T B(t,\rho)\,dt} = 1 - \rho\, e^{-\int_0^T [b_0(t) + b_1(t)\rho^{\lambda_1} + b_2(t)\rho^{\lambda_2}]\,dt}$$

$$= 1 - e^{-Ts} e^{-\int_0^T [b_0(t) + b_1(t) e^{-\lambda_1 Ts} + b_2(t) e^{-\lambda_2 Ts}]\,dt} = 1 - e^{-T\frac{1}{T}\int_0^T [s + b_0(t) + b_1(t) e^{-\lambda_1 Ts} + b_2(t) e^{-\lambda_2 Ts}]\,dt} = 1 - e^{-Tf(s)}$$

donde $f(s)$ es el cuasipolinomio (4) de II. Por consiguiente, los ceros ρ_j de la función denominador (8) están relacionados con las raices s_j del cuasipolinomio (4) de II mediante (14):

(14') $$\rho_j = e^{-Ts_j}$$

Con lo dicho anteriormente ya es fácil demostrar el siguiente

<u>**Teorema 1.**</u> El conjunto de exponentes característicos de Lyapunov de las soluciones de la ecuación

(1) $$\dot{u}(t) + b_0(t)u(t) + b_1(t)u(t-\lambda_1 T) + b_2(t)u(t-\lambda_2 T) = 0 \quad ,$$

donde $b_0(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$ son funciones T-periódicas y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{N}$, está formado por las partes reales de las raices del cuasipolinomio de (1):

(15) $$f(s) \overset{def}{=} s + \bar{b}_0 + \bar{b}_1 e^{-\lambda_1 Ts} + \bar{b}_2 e^{-\lambda_2 Ts} = 0$$

donde los $\bar{b}_i = \frac{1}{T}\int_0^T b_i(t)\,dt \quad (i = 0, 1, 2)$

Demostración.

De (12') y (14') obtenemos que cada exponente característico de Lyapunov de cierta solución de la ecuación (1) coincide con la parte real de una de las raices del cuasipolinomio (15). En efecto $R = e^{-\lambda T}$ y por otro lado $R = |\rho_j| = |e^{-s_j T}| = e^{-Re(s_j)T}$. Y recíprocamente para cada raiz del cuasipolinomio s_r pueden construirse las soluciones tipo (8') de II, las cuales evidentemente tienen por exponente característico a $Re(S_r)$.

Nota. Es posible que adicionalmente el elemento $-\infty$ aparezca como exponente característico si todos los puntos singulares de $\mathcal{U}$ son removibles y el radio de convergencia de la serie (3) es infinito.

Teorema 2. Para toda solución $\mu(t)$ de la ecuación (1), y para cualquier número α podemos construir la suma finita de soluciones de Floquet II(8'):

$$\hat{\lambda}(t) = \sum_{Re(S_r) \geq -\alpha} \sum_{i=1}^{\mu_r} C_{ri}\, \mu_{ri}(t)$$

que satisface la condición

$$\mu(t) - \hat{\lambda}(t) = O(e^{-\alpha t})$$

cuando $t \to \infty$.

Es decir cada solución de (1) puede representarse como una serie asintótica de soluciones tipo Floquet cuando $t \to \infty$.

Demostración.

Como la función generatriz $\mathcal{U}(\tau,P)$ está dada mediante una serie de potencias

$$\mathcal{U}(\tau,P) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \mu(\tau+\gamma T)P^{\gamma} \quad ,$$

entonces por la fórmula de Cauchy [6] podemos obtener el valor de la solución

$$\mu(t) = \mu(\tau+\lambda T) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\mathcal{U}(\tau,P)}{P^{\lambda+1}}\,dP \qquad (0 \leq \tau \leq T)$$

con C una circunferencia con centro en el origen que no contiene puntos críticos de $\mathcal{U}$ en su interior.

Ahora tomemos la circunferencia C_R de radio arbitrario R, sobre la cual no hay puntos críticos de $\mathcal{U}$, entonces

$$(16)\qquad u(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{\mathcal{U}(\tau,p)}{p^{\lambda+1}}\,dp-\sum_{|p_r|<R}\underset{p_r}{\mathrm{res}}\,\frac{\mathcal{U}(\tau,p)}{p^{\lambda+1}}$$

Para calcular el residuo en el polo p_r; recordemos que en (7) $\mathcal{U}(\tau,p)$ se expresa como la suma de una función entera y otra meromorfa. Evidentemente es suficiente considerar sólo el primer sumando de (7) en el valor $\tau=t-\lambda T$ (ya que $t=\tau+\lambda T$).

Haciendo en (7)

$$H(p)=g(0)-p\int_0^T G(\xi,p)\,e^{-\int_\xi^T B(\eta,p)\,d\eta}\,d\xi$$

y

$$F(p)=1-p\,e^{-\int_0^T B(\eta,p)\,d\eta}$$

entonces dicho primer sumando de (7) toma la forma

$$(17)\qquad \frac{H(p)}{F(p)p^{\lambda+1}}\,e^{-\int_0^{t-\lambda T}B(\eta,p)d\eta}=\frac{H(p)\,e^{-\int_0^t B(\eta,p)d\eta}}{F(p)\,p\left[p\,e^{-\int_0^T B(\eta,p)d\eta}\right]^{\lambda}}=\frac{H(p)\,e^{-\int_0^t B(\eta,p)d\eta}}{F(p)\,p\,[1-F(p)]^{\lambda}}=$$

$$\frac{H(p)}{F(p)\,p}\left[1+\lambda F(p)+\cdots\right]e^{-\int_0^t B(\eta,p)d\eta}=\frac{H(p)}{F(p)\,p}\,e^{-\int_0^t B(\eta,p)d\eta}+\Phi(t,\lambda,p)$$

esta transformación es admisible en una vecindad pequeña de cualquier cero de la función $F(p)$.

La función Φ es analítica en una vecindad pequeña de los polos de $\mathcal{U}$. Por lo tanto el residuo

$$\underset{p_r}{\mathrm{res}}\,\frac{\mathcal{U}(t,p)}{p^{\lambda+1}}$$

es igual a la combinación lineal de las derivadas hasta de orden μ_r-1 de $e^{-\int_0^t B(\eta,p)\,d\eta}$, en el polo p_r de multiplicidad μ_r.

En efecto; haciendo $p=e^{-sT}$ tenemos

$$e^{-\int_0^t B(\eta,p)d\eta}=\psi(t,s)\,e^{st}\qquad\text{(véase (6) de II).}$$

Ahora expresando las derivadas respecto de p como derivadas respecto de s y usando el que $p_j=e^{-s_jT}$ obtenemos que, en efecto el residuo buscado es igual a la combinación lineal de las soluciones tipo Floquet (8') de II. Es decir

$$\underset{P_r}{\mathrm{Res}}\ \frac{H(P)\, e^{-\int_0^t B(\eta,P)d\eta}}{F(P)\,P} = \left[\frac{\mu_r!}{\frac{d^{\mu_r}}{dP^{\mu_r}}[F(P)P]}\right]^{\mu_r} \det A$$

donde (ver [13])

$$A = \begin{bmatrix} \frac{d^{\mu_r}}{dP^{\mu_r}}\frac{[F(P_r)P_r]}{\mu_r!} & 0 & \cdots & 0 & H(P)\,e^{-\int_0^t B(\eta,P_r)d\eta} \\ \frac{d^{\mu_r+1}}{dP^{\mu_r+1}}\frac{[F(P_r)P_r]}{(\mu_r+1)!} & \frac{d^{\mu_r}}{dP^{\mu_r}}\frac{[F(P_r)P_r]}{\mu_r!} & \cdots & 0 & \frac{d}{dP}H(P)\,e^{-\int_0^t B(\eta,P_r)d\eta} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{d^{2\mu_r-1}}{dP^{2\mu_r-1}}\frac{[F(P_r)P_r]}{(2\mu_r-1)!} & \frac{d^{2\mu_r-2}}{dP^{2\mu_r-2}}\frac{[F(P_r)P_r]}{(2\mu_r-2)!} & \cdots & \frac{d^{\mu_r+1}}{dP^{\mu_r+1}}\frac{[F(P_r)P_r]}{(\mu_r+1)!} & \frac{d^{\mu_r-1}}{dP^{\mu_r-1}}H(P_r)\,e^{-\int_0^t B(\eta,P_r)d\eta} \end{bmatrix}$$

Estimemos ahora el término integral en (16).

La función $u(t,P)$ para $0\le t\le T$ y $P\in C_R$, es acotada y por definición $k=[\frac{t}{T}]$, luego

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{u_k(t,P)}{P^{k+1}}dP = O(R^{-\frac{t}{T}}) = O(e^{-\frac{\ln R}{T}t})$$

Finalmente observemos que la condición $|P_r|<R$ corresponde a la condición $\mathrm{Re}(s_r)>-\frac{\ln R}{T}$ y la demostración de este teorema queda completa si tomamos en (16) la circunferencia C_R de radio $R\le e^{\alpha t}$, donde α es el número del que se habla en el enunciado del teorema, para que así se cumpla que $\mathrm{Re}(s_r)>-\frac{\ln R}{T}\geq-\alpha$

Los coeficientes de la serie asintótica $\sum_{s_r}\sum_{i=1}^{\mu_r} c_{ri}\,u_{ri}(t)$ pueden obtenerse por residuos.

La convergencia de esta serie no la asegura el teorema 2, y puede ser divergente.

Sí dicha serie converge y admite ser derivable, entonces su suma puede ser solución de la ecuación con retardo considerada, pero no tiene porque coincidir con la solución que se ha estado tratando a saber $u(t)$.

Esto se debe a que el sistema de soluciones particulares $\varphi_r(t) = \Psi(t, S_r)$ no siempre es completo.

Por otro lado veamos un ejemplo en el que si se pasa al límite cuando $k \to \infty$ en (16) obtenemos que la diferencia entre la solución y la suma de la serie asintótica (si es convergente) es una solución que tiende a cero más rápidamente que cualquier función exponencial.

Sea el problema de Cauchy

$$\dot{u}(t) - \cos(2\pi t)\, u(t-1) = 0$$

$$u(t) = 1 \qquad\qquad (0 \leq t \leq 1)$$

el cual tiene por solución, obtenida por pasos a:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{[t]} \frac{1}{k!} \left(\frac{\operatorname{sen} 2\pi t}{2\pi} \right)^k \quad , \qquad t \geq 0$$

haciendo el cambio $u(t) = \varphi(t) e^{st}$ obtenemos que

$$\varphi(t) = e^{\int_0^t [\cos 2\pi t_1\, e^{-s} - s]\, dt_1}$$

y por tanto el cuasipolinomio característico es $f(s) = s$ de modo que tiene sólo una raíz simple a la cual le corresponde la solución tipo Floquet

$$u_1(t) = e^{\frac{\operatorname{sen} 2\pi t}{2\pi}}$$

y la serie asintótica de la solución está formada de sólo esta solución.

Desarrollando la función exponencial por la fórmula de Taylor con residuo en la forma de Lagrange es fácil estimar la diferencia entre la solución y la serie asintótica

$$u(t)-u_1(t) = -\frac{1}{[t+1]!}\left(\frac{\sin 2\pi t}{2\pi}\right)^{[t+1]} e^{\theta\frac{\sin 2\pi t}{2\pi}} = O\left(\frac{1}{(2\pi)^t\,\Gamma(t)}\right) \quad (0<\theta<1)$$

La diferencia $u(t)-u_1(t)$ resulta ser una solución ne cero que converge a cero más rápido que cualquier función expenencial, cuande $t\rightarrow\infty$.

IV. ESTABILIDAD.

De los teoremas 1 y 2 anteriormente demostrados se sigue el siguiente resultado sobre la estabilidad de las soluciones de la ecuación

(1) $\dot{u}(t)+b_0(t)u(t)+b_1(t)u(t-\lambda_1 T)+b_2(t)u(t-\lambda_2 T)=0$

<u>Teorema 3</u>. La solución $u(t)=0$ de (1) es asintóticamente estable si y sólo si son negativas las partes reales de todas las raíces del cuasipolinomio característico

(2) $f(s)=s+\bar{b}_0+\bar{b}_1 e^{-\lambda_1 Ts}+\bar{b}_2 e^{-\lambda_2 Ts}$

En efecto para toda solución $u(t)$ y cualquier α podemos construir

$$\bar{u}(t)=\sum_{Re(s_r)\geq-\alpha}\sum_{i=1}^{M_r} c_{ri}u_{ri}(t)$$

(finita), que satisface

$$u(t)-\bar{u}(t)=o(e^{-\alpha t})$$

cuando $t\to\infty$.

Por otro lado del hecho de que la función $U(\tau,P)$ para $0\leq\tau\leq T$ y $P\in C_R$ es acotada (ver III) tenemos que

$$\int_{C_R}\frac{U(t,P)}{P^{\lambda+1}}\,dP=O(e^{-\alpha t})$$

esto significa que

$$\left|\int_{C_R}\frac{U(t,P)}{P^{\lambda+1}}\,dP\right|\leq Me^{-\alpha t}$$

con M cota de $U(\tau,P)$ sobre C_R. Ahora de la ecuación III(7), claramente vemos que esta cota M en realidad tiene la forma $M_1 m$ con $M_1\in\mathbb{R}$ y m tal que $|g(t)|\leq m$ con $t\in[-\omega,0]$.

Análogamente de la ecuación II(6) vemos que cualquier solución tipo Floquet $u_{ri}(t)$ esta multiplicada por una constante que depende de las condiciones iniciales de la ecuación II(2') que a su vez dependen de la condición $u(t)=g(t)$ para $t\in[-\omega,0]$

de modo que

$$|u_{ri}(t)| \leq m\left[\left|\frac{t^{i}}{i!}\right||\varphi_{r1}(t)|+\cdots+|\varphi_{ri}(t)|\right]e^{s_r t} \qquad (i=1,\ldots,\mu_r)$$

por tanto tenemos que

$$|u(t)| \leq M_1 m e^{\alpha t} + m \sum_{R(s_r)\geq -\alpha} \sum_{i=1}^{\mu_r} |C_{ri}|\left[\left|\frac{t^{i}}{i!}\right||\varphi_{r1}(t)|+\cdots+|\varphi_{ri}(t)|\right]|e^{s_r t}|$$

sea

$$\Phi_{ri} = \max|\varphi_{ri}(t)| \qquad i=1,\ldots,\mu_r \quad , \quad R(s_r) \geq -\alpha$$

esto es posible ya que las $\varphi_{ri}(t)$ son periódicas y contínuas

y sea $\Phi = \max\{\Phi_{ri}\}$

sea $\rho \in R$ tal que $0 > \rho \geq \max\{R(s_r) \mid R(s_r) \geq -\alpha\}$; $\mu = \max\{\mu_r\}$

entonces $|t^{\mu}e^{s_r t}| = |t^{\mu}|e^{R(s_r)t} < e^{\rho t}$ a partir de cierta t

entonces

$$|u(t)| \leq M_1 m e^{\beta t} + m\Phi e^{\beta t} \sum_{R(s_r)\geq -\alpha} \sum_{i=1}^{\mu_r} |C_{ri}| \; ; \; \beta = \max\{\rho, -\alpha\}$$

puesto que $\beta < 0$ tenemos

$$|u(t)| \leq M_1 m + m\Phi \sum_{R(s_r)\geq -\alpha} \sum_{i=1}^{\mu_r} |C_{ri}| < \varepsilon$$

siempre que

$$\delta = \frac{\varepsilon}{M_1 + \Phi \sum\sum |C_{ri}|} \quad ; \quad m \leq \delta$$

∴ la solución $u(t) = 0$ de la ecuación (1) es estable.

De III(13) y del teorema 1 deducimos que

(3) $$e^{R(s_r)t-\varepsilon t} \leq |u(t)| \leq e^{R(s_r)+\varepsilon t}$$

lo cual implica que $\lim_{t\to\infty}|u(t)| = 0$.

Por lo tanto la solución $u(t)=0$ de la ecuación (1) es asintóticamente estable.

Y recíprocamente, supongamos que $R(s_r) \geq 0$ entonces de (3)

$$\lim_{t\to\infty}|u(t)| \neq 0$$

lo que significa que la solución $u(t)=0$ de (1) no es asintóticamente estable.

Los teoremas 1,2,3 permiten obtener otros resultados relacionados con el comportamiento asintótico y estabilidad de las soluciones de ecuaciones que difieren "poco" de la ecuación fundamental hasta ahora analizada, es decir, de (1).

En particular, puede considerarse la ecuación con retardos "casi" múltiplos del período de los coeficientes, esto es

$$(4) \qquad \dot{u}(t) + b_0(t)\,u(t) + b_1(t)\,u(t-\omega_1) + b_2(t)\,u(t-\omega_2) \equiv 0$$

donde

$$(5) \qquad |\omega_1 - \lambda_1 T| < \Delta \quad , \quad |\omega_2 - \lambda_2 T| < \Delta$$

Utilizando el teorema de Krasovskii sobre estabilidad bajo perturbaciones constantes (para el enunciado y demostración de este teorema véase [7]). Podemos demostrar el siguiente

Teorema 4. Si las raices del cuasipolinomio característico (2) correspondiente a la ecuación (1), tienen parte real negativa entonces existe un $\Delta>0$ tal que si se cumplen las condiciones de (5), las soluciones de la ecuación (4) son asintóticamente estables.

Antes de hacer la demostración de este teorema veamos la siguiente

Definición. La solución $u=0$ de la ecuación (1) es estable bajo perturbaciones constantes si para cualquier $\varepsilon>0$ existen números δ_0 y Δ tales que la solución $\bar{u}$ de la ecuación (4) satisface la desigualdad $\|\bar{u}(t)\| < \varepsilon$ para toda $t \geq t_0 \geq 0$, siempre que la curva inicial $u(t)=q(t)$ $t\in[0,\omega]$, $\omega = \max\{\omega_1,\omega_2\}$ satisfaga $\|q(t)\| \leq \delta_0$ y los retardos ω_1, ω_2 : $|\omega_1-\lambda_1 T| < \Delta$, $|\omega_2-\lambda_2 T| < \Delta$

Teorema (Krasovskii). Supongamos que la solución $u=0$ de la ecuación (1) es asintóticamente estable, entonces la solución $u=0$ es estable bajo perturbaciones constantes.

Ahora sí, veamos la demostración del teorema 4:

Por el teorema de Krasovskii la sol $\bar{u}=0$ de (4) es estable.

Ahora demostremos que es asintóticamente estable.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\lambda_1 T < \omega_1$ y $\lambda_2 T \leq \omega_2$, entonces por continuidad de las soluciones (ver apéndice), tenemos que existe $\xi_1 \in [t-\lambda_1 T, t-\omega_1]$ tal que

$$\frac{u(t-\lambda_1 T)-u(t-\omega_1)}{h_1} = u'(\xi_1)$$

con $u(t)$ solución de (1) y $h_1=\omega_1-\lambda_1 T$ de modo que

(6) $$u(t-\lambda_1 T) = u'(\xi_1)h_1 + u(t-\omega_1)$$

análogamente existe $\xi_2 \in [t-\lambda_2 T, t-\omega_2]$ tal que

(7) $$u(t-\lambda_2 T) = u'(\xi_2)h_2 + u(t-\omega_2)$$

y $h_2=\omega_2-\lambda_2 T$.

Substituyendo (6) y (7) en (1) tendremos

$$\dot{u}(t)+b_0(t)u(t)+b_1(t)u(t-\omega_1)+b_2(t)u(t-\omega_2) = -b_1(t)u'(\xi_1)h_1-b_2(t)u'(\xi_2)h_2$$

puesto que las raices de (2) tienen parte real negativa, entonces el término de la derecha tiende a cero cuando $t\to\infty$, puesto que $u(t)$ es solución de (1). Esto significa que para tiempos grandes cualquier solución de (1) tiende a parecerse cada vez más a las soluciones de (4).

De forma similar puede demostrarse que cualquier solución de (4) tiende a las soluciones de (1) cuando $t\to\infty$.

Por tanto $\lim_{t\to\infty}|\bar{u}(t)|=0$ y hemos demostrado completamente nuestro teorema.

Casi todos los resultados de los capítulos 9,10, y 11 de [2] donde la parte lineal de las ecuaciones son con coeficientes constantes, pueden ser obtenidos para el caso cuando los coeficientes son periódicos y con retardos múltiples del período de los coeficientes.

Para hacerlo basta analizar las propiedades del núcleo $v(s,t)$. Este núcleo juega un papel similar al jugado por la función de Green en ecuaciones diferenciales ordinarias (ver [14]).

El núcleo $v(s,t)$ se define como la solución de la ecuación conjugada, sin embargo, puede demostrarse que también puede vérsele como solución de la ecuación original.

Veamos cómo se define tal núcleo:

<u>Definición</u>. El núcleo $v(s,t)$ se define como la única función (ver apéndice) con dominio $t>t_0$, $t-\omega \leq s \leq t$ $(\omega = \max\{\lambda_1 T, \lambda_2 T\})$ contínua en $t_0 \leq s \leq t$ y que satisface las condiciones iniciales

$$v(s,t) = \begin{cases} 0 & t-\omega \leq s < t \\ 1 & t = s \end{cases}$$

y la ecuación adjunta

$$-\frac{\partial}{\partial s} v(s,t) + \sum_{i=0}^{2} v(s+\lambda_i T, t)\, b_i(s) = 0 \qquad (\lambda_0 = 0)$$

veamos que la única solución contínua de

(8) $$\dot{u}(t) + \sum_{i=0}^{2} b_i(t)\, u(t-\lambda_i T) = w(t)$$

es

(9) $$u(t) = \int_{t_0}^{t} v(s,t)\, w(s)\, ds$$

con la condición inicial $u(s) \equiv 0$, $t_0 - \omega \leq s \leq t_0$

Multipliquemos la ecuación (1) por $v(s,t)$ e integremos de t_0 a t para obtener

(10) $$\int_{t_0}^{t} v(s,t)\, \dot{u}(s)\, ds + \sum_{i=0}^{2} \int_{t_0}^{t} v(s,t)\, b_i(s)\, u(s-\lambda_i T)\, ds = \int_{t_0}^{t} v(s,t)\, w(s)\, ds$$

del hecho de que $u(s)=0$ para $t_0-\omega \leq s \leq t_0$ y que $v(s,t)=0$ para $t-\omega \leq s < t$ tenemos que

$$\int_{t_0}^{t} v(s,t)\, b_i(s)\, \mu(s-\lambda_i T)\, ds = \int_{t_0}^{t} v(s+\lambda_i T, t)\, b_i(s)\, \mu(s)\, ds$$

por tanto después de una integración por partes del primer sumando de (10) tenemos

$$\mu(t)\, v(t,t) + \int_{t_0}^{t} \Big[-\frac{\partial}{\partial s} v(s,t) + \sum_{i=0}^{2} v(s+\lambda_i T, t)\, b_i(s) \Big] \mu(s) ds = \int_{t_0}^{t} v(s,t) w(s) ds$$

y por la definición tenemos justamente que la única solución de (8) es (9).

En base a esto demostremos el siguiente

Lema. El núcleo $v(s,t)$ como función de t para una s fija satisface la ecuación

$$(11) \qquad \frac{\partial}{\partial t} v(s,t) + \sum_{i=0}^{2} b_i(t)\, v(s, t-\lambda_i T) = 0$$

con las condiciones iniciales

$$v(s,t) = \begin{cases} 0 & s < t \leq s+\omega \\ 1 & s = t \end{cases}$$

Para la demostración de este lema sustituyamos la expresión (9) y su derivada es decir

$$\dot{\mu}(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} v(s,t)\, w(s) ds - v(t,t)\, w(t)$$

en (8) para obtener

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} v(s,t)\, w(s) ds - v(t,t)\, w(t) + \sum_{i=0}^{2} b_i(t) \int_{t_0}^{t} v(s, t-\lambda_i T)\, w(s) ds = w(s)$$

y como $v(t,t) = 1$,entonces

$$\int_{t_0}^{t} \Big[\frac{\partial}{\partial t} v(s,t) + \sum_{i=0}^{2} b_i(t)\, v(s, t-\lambda_i T) \Big] w(s) ds = 0$$

y puesto que $w(s)$ es una función arbitraria podemos concluir que el corchete del integrando es cero y por lo tanto $v(s,t)$ satisface la ecuación mencionada por el lema. La condición inicial del lema se sigue de la condición inicial de la definición.

Si ahora analizamos la ecuación (11), veamos que mediante la transformación

$$t = t_1 + T$$

$$s = s_1 + T$$

no cambiamos los coeficientes de la ecuación ni la forma de las condiciones iniciales. Por lo tanto para ecuaciones con coeficientes T-periódicos se tiene

(12). $$v(s+T,\, t+T) = v(s,t)$$

Para estimar el valor $v(s,t)$ utilizaremos el método de las funciones generatrices $u(\tau,p,s)$. La función generatriz $u(\tau,p,s)$ de $v(s,t)$ es una función contínua del parámetro s.

Supongamos que todas las raices del cuasipolinomio característico (2) satisface la desigualdad $Re(s_1) < \alpha$, entonces similarmente a lo hecho en III, obtenemos

$$|v(s,t)| = |v(s,\tau+\lambda T)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{u(\tau,p,s)}{p^{\lambda+1}}\, dp \right| \le a(s)\, e^{\alpha t}; \quad (0 \le \tau \le T)$$

donde $a(s)$ es una función contínua de s, haciendo $a_1 = \max\limits_{0 \le s \le t} a(s)\, e^{\alpha s}$ y utilizando (12) tendremos

(13) $$|v(s,t)| \le a_1\, e^{\alpha(t-s)} \qquad (0 \le s,\, t\, T)$$

Supongamos que la raíz característica s_1 es real y simple y el resto de las raices satisfacen la desigualdad

$$Re(s_r) < s_1 \qquad (r > 1)$$

entonces por el teorema 2:

(14) $$v(s,t) = c(s)\varphi(t)\, e^{s_1 t} + v_1(s,t)$$

donde $v_1(s,t) = O(e^{s_1 t})$. Por otro lado de la unicidad del desarrollo asintótico (ver [15] y [16]), y de (12) se sigue que

$$c(s)\varphi(t) e^{s_1 t} + v_1(s,t) = c(s+T)\varphi(t)\, e^{s_1(t+T)} + v_1(s+T,\, t+T)$$

$$c(s)\, e^{-s_1 t} = c(s+T)$$

Luego la función

$$\psi(s) = c(s)\, e^{s_1 s}$$

es periódica.

El término $v_1(s,t)$ en (14) puede estimarse en forma análoga a la estimación hecha en (7) y de ese modo obtener de (14):

$$v(s,t) = \Psi(s)\varphi(t)\, e^{s_1(t-s)} + v_1(s,t)$$

con

$$|v_1(s,t)| \leq a_2\, e^{\alpha(t-s)} \qquad (\alpha < s_1) \, .$$

La fórmula de la estimación (13) muestra que una condición para el acotamiento del núcleo $v(s,t)$ consiste en que todas las raices características tengan parte real negativa.

Similarmente puede mostrarse que una condición suficiente para el acotamiento de $v(s,t)$ consiste en la no positividad de las partes reales de las raices complejas y en que las raices imaginarias sean simples.

Usando este resultado obtenemos el siguiente

__Teorema 5__. Supongamos que las funciones $b_i(t)$ y $d_i(t)$ $(i=0,1,2)$ son contínuas y las $b_i(t)$ son T-periódicas. Entonces una condición suficiente para el acotamiento, cuando $t \to \infty$, de todas las soluciones contínuas de la ecuación

$$(15) \qquad \dot{u}(t) + \sum_{i=0}^{2} [b_i(t) + d_i(t)]\, u(t-\lambda_i T) = 0 \qquad (\lambda_0 = 0)$$

consiste en:

i) Todas las raices características de (2) tienen parte real negativa.

ii) $\int^{\infty} |d_i(t)|\, dt < \infty \qquad (i=0,1,2)$

Demostración

Escribamos nuestra ecuación en la forma

$$\dot{u}(t) + \sum_{i=0}^{2} b_i(t)\, u(t-\lambda_i T) = -\sum_{i=0}^{2} d_i(t)\, u(t-\lambda_i T)$$

y en (8) sea

$$w(t) = -\sum_{i=0}^{2} d_i(t)\,\mu(t-\lambda_i T)$$

de modo que

$$\mu(t) = -\int_{t_0}^{t} v(s,t) \sum_{i=0}^{2} d_i(s)\,\mu(s-\lambda_i T)\,ds$$

$$|\mu(t)| \leq \sum_{i=0}^{2} \int_{t_0}^{t} |v(s,t)|\,|d_i(s)|\,|\mu(s-\lambda_i T)|\,ds \leq 1 + c \sum_{i=0}^{2} \int_{t_0-\lambda_i T}^{t-\lambda_i T} |d_i(s+\lambda_i T)|\,|\mu(s)|\,ds$$

entonces por el lema de Gronwall (véase [2]):

$$|\mu(t)| \leq \exp \int_{t_0-\lambda_i T}^{t-\lambda_i T} \sum_{i=0}^{2} |d_i(s+\lambda_i T)|\,ds = \exp \int_{t_0}^{t} \sum_{i=0}^{2} |d_i(s)|\,ds$$

y cuando $t \to \infty$ por la condición ii) tendremos que $|\mu(t)|$ es acotada.

Enunciaremos algunos teoremas del capítulo 11 de [2] para nuestro caso, en los cuales, sólo se da un esbozo de la demostración; para más detalles ver [2].

<u>Teorema 6</u>. Supongamos que:

a) $b_i(t)$ $(i=0,1,2)$ periódicas y continuas, y las raices del cuasipolinomio característico tienen parte real negativa.

b) $f(t,\mu,v,w)$ continua en una región N : $t \geq \omega$ $(\omega = \max\{\lambda_1 T, \lambda_2 T\})$

$|\mu| + |v| + |w| \leq c_1$

c) En la región N, la función f satisface $|f(t,\mu,v,w)| \leq \varphi(t)(|\mu|+|v|+|w|)$ donde $\varphi(t)$ es continua satisfaciendo $\int_{\omega}^{\infty} \varphi(t)\,dt < \infty$

d) $v(s,t) < c_2$, $t \geq \omega$, $\omega \leq s \leq t$, donde $v(s,t)$ es el núcleo.

Entonces si $m = \max_{0 \leq t \leq \omega} |g(t)|$ es suficientemente pequeño, cualquier solución $\mu(t)$ de

(16) $\quad \dot{\mu}(t) + b_0(t)\mu(t) + b_1(t)\mu(t-\lambda_1 T) + b_2(t)\mu(t-\lambda_2 T) = f(t, \mu(t), \mu(t-\lambda_1 T), \mu(t-\lambda_2 T))$, $t > \omega$

y la condición inicial

(17) $\quad \mu(t) = g(t)$, $0 \leq t \leq \omega$

puede ser continuada sobre el intervalo $\omega \leq t < \infty$ y es acotada en este intervalo.

De hecho hay constantes c_3 y c_4 tales que para toda solución $u(t)$ para las cuales $m \leq c_3$ satisfacerá $|u(t)| \leq c_4 m$.

Demostración.

Una solución $u(t)$ de (16) y (17) satisface

$$(18) \quad u(t) = u_0(t) + \int_{\omega}^{t} v(s,t) f(s, u(s), u(s-\lambda_1 T), u(s-\lambda_2 T))\, ds$$

en cualquier subintervalo de (ω, ∞) en el cual $u(t)$ existe y la integral está definida. $u_0(t)$ es la única solución de (1) y (17); después de multiplicar (1) por $v(s,t)$, de integrar desde ω a t, y usando las propiedades de $v(s,t)$ encontramos que

$$(19) \quad u(t) = g(\omega) v(\omega,t) + \int_{\omega-\lambda_1 T}^{\omega} v(s+\lambda_1 T, t)\, b(s+\lambda_1 T)\, g(s)\, ds + \int_{\omega-\lambda_2 T}^{\omega} v(s+\lambda_2 T, t)\, b(s+\lambda_2 T)\, g(s)\, ds$$

como $v(s,t)$ es acotada hay una constante c_5 independiente de $g(t)$ tal que toda solución de (1) satisface $|u_0(t)| \leq c_5 m$, $t \geq 0$.

Ahora sea c_4 tal que $c_4 > 3c_5 \exp\left[3c_2 \int_{\omega}^{\infty} \varphi(s)\, ds\right]$ y $c_3 = \frac{c_1}{4c_4}$

Veamos que toda solución de (16) y (17) satisface $|u(t)| \leq c_4 m$ con $m \leq c_3$ y que puede ser extendida a ∞.

Es claro que $|u(t)| < c_4 m$ para $0 \leq t \leq \omega$ ya que $c_4 > c_5 \geq 1$ si $|u(t)| \leq c_4 m$ para $0 \leq t \leq t_1 + \omega$ entonces $\|u(t)\| = |u(t)| + 2|u(t-\omega)| < 3c_4 m$ para $\omega \leq t \leq t_1 + \omega$ y como $3c_4 m \leq 3c_3 c_4 = \frac{3}{4} c_1$ entonces

$$(t, u(t), u(t-\lambda_1 T), u(t-\lambda_2 T)) \in N \quad , \omega \leq t \leq \omega + t_1 \quad , \max_{t_1 \leq t \leq t_1+\omega} |u(t)| < \frac{3}{4} c_1$$

Entonces por el teorema de existencia de Cauchy-Peano (ver [2]) se sigue que la solución puede ser extendida más allá del punto $t_1 + \omega$.

Ahora, si demostramos que $|u(t)| < c_4 m$ para $t \geq 0$ entonces $u(t)$ puede ser extendida a ∞, Supongamos que no se satisface $|u(t)| < c_4 m$ entonces existe $t_2 > \omega$ tal que

$$|u(t_2)| = c_4 m$$

$$|u(t)| < c_4 m \qquad 0 \leq t < t_2$$

por continuidad de $u(t)$. Como $\|u(t)\| < 3c_4 m$ $0 \le t \le t_2$ entonces

$(t, u(t), u(t-\lambda_1 T), u(t-\lambda_2 T)) \in N$ para $0 \le t \le t_2$

entonces $u(t)$ satisface

$$u(t) = u_0(t) + \int_\omega^t v(s,t) f(u(s), u(s-\lambda_1 T), u(s-\lambda_2 T))\, ds, \quad \omega \le t \le t_2$$

por c) y d):

$$|u(t)| \le c_5 m + c_2 \int_\omega^t \varphi(s) \|u(s)\|\, ds \qquad \omega \le t \le t_2$$

$$\|u(t)\| \le 3c_5 m + 3c_2 \int_\omega^t \varphi(s) \|u(s)\|\, ds \qquad \omega \le t \le t_2$$

$$\|u(t)\| \le 3c_5 m \exp\left[3c_2 \int_\omega^\infty \varphi(s)\, ds\right] < c_4 m$$

$$\Rightarrow \quad |u(t_2)| < c_4 m \quad !$$

Esta contradicción muestra que $u(t)$ puede ser extendida sobre $0 \le t < \infty$ y es acotada $|u(t)| < c_4 m$.

Teorema 7. Supongamos que

a) $b_i(t)$ contínuas y periódicas, $(i = 0, 1, 2)$.

b) $f(u, v, w)$ contínua en $N: |u| + |v| + |w| \le c_1$ y $f(0,0,0) = 0$

c) Para cualquier $c_3 \le c_1$ hay una constante c_2 tal que

(20) $|f(u_1, v_1, w_1) - f(u_2, v_2, w_2)| < c_2 (|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2| + |w_1 - w_2|)$

siempre que $(u, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2) \in N$; $|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2| + |w_1 - w_2| \le c_3$

además $c_2 \to 0$ como $c_3 \to 0$

d) Las raices del cuasipolinomio caracterfstico satisfacen la desigualdad $R_e(s_r) < -\lambda_1$ (esto implica que $|v(s,t)| \le c_4 \exp[-\lambda_1 (t-s)]$, $0 \le s \le t$).

Entonces si $\max_{0 \le t \le \omega} |q(t)|$ es suficientemente pequeño existe única solución contínua $u(t)$ de

(21) $\dot{u}(t) + b_0(t) u(t) + b_1(t) u(t-\lambda_1 T) + b_2(t) u(t-\lambda_2 T) = f(u(t), u(t-\lambda_1 T), u(t-\lambda_2 T))$, $t > \omega$

y (17). Esta solución puede ser continuada sobre el intervalo $0 \le t < \infty$ y se aproxima a cero cuando $t \to \infty$, de hecho, hay un c_5 tal que, dado cualquier λ_2, $-\lambda_1 < -\lambda_2 < 0$, m puede ser elegido lo suficientemente pequeno para que $|u(t)| \le 2 c_5 m e^{-\lambda_2 t}$, $t \ge 0$.

Demostración.

Una solución $u(t)$ de la ecuación (21) con valores iniciales (17) satisface la ecuación

(22) $$u(t) = u_0(t) + \int_{\omega}^{t} v(s,t) f(u(s), u(s-\lambda_1 T), u(s-\lambda_2 T))\, ds$$

con $u_0(t)$ solución de (1) con los mismos valores iniciales.

De d) y (19) existe $c_5 > 0$ tal que $|u_0(t)| \leq c_5 m e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$.

Sea $\{u_m(t)\}$ tal que

$$u_{m+1}(t) = u_0(t) + \int_{\omega}^{t} v(s,t) f(u_m(s), u_m(s-\lambda_1 T), u_m(s-\lambda_2 T))\, ds, \quad t > \omega$$

$$u_{m+1}(t) = g(t), \quad t \in [0, \omega]$$

Veamos que $\{u_m(t)\}$ esta bien definida $\forall t > \omega$, es claro para u_0 y $\forall m$ con $t \in [0, \omega]$

Supongamos que $|u_m(t)| \leq 2 c_5 m$, $t \geq 0$, está bien definida. Sea $c_3 = 12 c_5 m$ y m tan pequeña tal que $c_3 \leq c_1$ entonces

$$|u_m(t_1)| + |u_m(t_1 - \lambda_1 T)| + |u_m(t_1 - \lambda_2 T)| \leq 6 c_5 m \leq \frac{c_3}{2}, \quad t_1 > \omega$$

por c)

$$|f(u_m(t_1), u_m(t_1 - \lambda_1 T), u_m(t_1 - \lambda_2 T)| \leq 6 c_2 c_5 m$$

y está definida para $t_1 > \omega$ y por tanto

$$\begin{aligned} |u_{m+1}(t)| &\leq c_5 m e^{-\lambda_1 t} + 6 c_2 c_4 c_5 m \int_{\omega}^{t} \exp[-\lambda_1 (t-s)]\, ds \\ &\leq c_5 m + 6 c_2 c_4 c_5 m \int_{0}^{\infty} \exp(-\lambda_1 t_2)\, dt_2 \\ &= c_5 m + 6 c_2 c_4 c_5 \frac{m}{\lambda_1} \end{aligned}$$

como $c_2 \to 0$ si $m \to 0$, sea m tan pequeña que $6 c_2 c_4 / \lambda_1 < 1$ por tanto $|u_{m+1}(t)| \leq 2 c_5 m$ y la sucesión está bien definida para $t \geq 0$ y uniformemente acotada.

Veamos convergencia de la sucesión. Por c) y d) y con

$$m_n(t) = \max_{0 \leq t_1 \leq t} |u_n(t_1) - u_{n-1}(t_1)|$$

$$|u_{n+1}(t) - u_n(t)| \leq 3 c_2 c_4 m_n(t) \int_{\omega}^{t} \exp[-\lambda_1 (t - t_1)]\, dt_1$$

como $u_{n+1}(t) = u_n(t)$ $t \in [0, \omega]$ $\Rightarrow m_{n+1}(t) \leq c_6 m_n(t)$, $t \geq 0$

y puesto que $c_2 \to 0$ si $c_3 \to 0$ entonces $c_6 < 1$ si m es suficientemente pequeña

$$\sum_{m=0}^{\infty} m_{m+1}(t) \le m_1(t) \sum_{m=0}^{\infty} c_6^m$$

entonces $\sum_{m=0}^{\infty} m_{m+1}(t)$ converge ,

como $|m_1(t)| \le 4 c_5 m$ entonces la serie converge uniformemente para $t \geq 0$ y la sucesión $u_n(t) \to u(t)$ tal que $u(t) = g(t)$, $t \in [0,\omega]$ y por tanto $u(t)$ es solución de la ecuación integral y consecuentemente de (21), $t \geq 0$.

De (21) obtenemos

$$|u(t)| \le c_5 m\, e^{-\lambda_1 t} + c_2 c_4 \int_{\omega}^{t} [\,|u(t_1)| + |u(t_1 - \lambda_1 T)| + |u(t_1 - \lambda_2 T)|\,] \exp[-\lambda_1 (t - t_1)]\, dt,$$

puesto que $f(0,0,0) = 0$

por tanto

$$|u(t)|\, e^{\lambda_1 t} \le c_5 m + c_2 c_4 (1 + e^{\lambda_1 \lambda_1 T} + e^{\lambda_1 \lambda_2 T}) \int_0^t |u(t_1)|\, e^{\lambda_1 t_1} dt_1$$

y usando el lema de Gronwall

$$|u(t)| \le c_5 m\, e^{[-\lambda_1 + c_2 c_4 (1 + e^{\lambda_1 \lambda_1 T} + e^{\lambda_1 \lambda_2 T})] t}$$

puesto que $c_2 \to 0$ como $m \to 0$ se sigue que $|u(t)| \to 0$ cuando $t \to \infty$ con orden exponencial, siempre que m sea suficientemente pequeño.

Finalmente tenemos el siguiente

Teorema 8. Consideremos la ecuación

(23) $\dot u(t) + [a_0(t) + b_0(t)]\, u(t) + [a_1(t) + b_1(t)]\, u(t - \lambda_1 T) + [a_2(t) + b_2(t)]\, u(t - \lambda_2 T) = f(t, u(t), u(t - \lambda_1 T), u(t - \lambda_2 T))$

a) La raíz λ de (2) de parte real más grande es simple.

b) $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$ contínuas y

$$\int^{\infty} |a_0(t)|\, dt < \infty \,, \quad \int^{\infty} |a_1(t)|\, dt < \infty \,, \quad \int^{\infty} |a_2(t)|\, dt < \infty$$

c) $f(t, u, v, w)$ contínua para $t \geq 0$ y toda u, v, w y satisface

$$|f(t, u_1, v_1, w_1) - f(t, u_2, v_2, w_2)| \le \phi(t)\, (|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2| + |w_1 - w_2|)$$

donde $\int^{\infty} \phi(t)\, dt < \infty$

también $f(t,0,0,0)=0$ para $t\geq 0$.

Entonces la ecuación (23) tiene una solución $u(t)$ definida para toda t grande, con la forma asintótica $u(t)=c_1\varphi(t)e^{\lambda t}+O(e^{\lambda t})$.

Demostración.

Escribamos la ecuación (23) en la forma

(24) $u'(t)+b_0(t)u(t)+b_1(t)u(t-\lambda_1T)+b_2(t)u(t-\lambda_2T)=f(t,u(t),$
$u(t-\lambda_1T),u(t-\lambda_2T))-a_0(t)u(t)-a_1(t)u(t-\lambda_1T)-a_2(t)u(t-\lambda_2T)$,

pensemos el término de la derecha como un término forzado. Entonces una solución de (23) es una solución de la ecuación integral

$$u(t)=u_0(t)+\int_{t_0}^{t}v(t_1,t)[f(t_1,u(t_1),u(t_1-\lambda_1T),u(t_1-\lambda_2T))-a_0(t_1)u(t_1)-a_1(t_1)u(t_1-\lambda_1T)-a_2(t_1)u(t_1-\lambda_2T)]dt_1$$

y viceversa, si $u_0(t)$ es cualquier solución de la ecuación homogenea.

Podemos reemplazar la ecuación anterior con

(25) $u(t)=c_1\Psi(s)\varphi(t)e^{\lambda(t-s)}+\int_{t_0}^{t}v(t_1,t)[f(t_1,u(t_1),u(t_1-\lambda_1T),u(t_1-\lambda_2T))-a_0(t_1)u(t_1)-a_1(t_1)u(t_1-\lambda_1T)-a_1(t_1)u(t_1-\lambda_2T)]dt_1$

puesto que $v(s,t)=\Psi(s)\varphi(t)e^{\lambda(t-s)}+v_1(s,t)$ donde $|v_1(s,t)|\leq a_2e^{\alpha(t-s)}$ con $\alpha<\lambda$ y que $v(s,t)$ es una solución de la parte homogenea de (24). Veamos que (25) tiene soluciones sobre el intervalo infinito, con la ayuda del método de aproximaciones sucesivas.

Definamos

$$u_n(t)=c_1\Psi(s)\varphi(t)e^{\lambda(t-s)} \qquad t_0-\omega\leq t\leq t_0 \qquad n=0,1,2,\ldots$$

$$u_0(t)=c_1\Psi(s)\varphi(t)e^{\lambda(t-s)} \qquad t\geq t_0$$

$$u_{n+1}(t)=c_1\Psi(s)\varphi(t)e^{\lambda(t-s)}+\int_{t_0}^{t}v(t_1,t)[f(t,u_n(t_1),u_n(t_1-\lambda_1T),u_n(t_1-\lambda_2T))$$
$$-a_0(t_1)u_n(t_1)-a_1(t_1)u_n(t_1-\lambda_1T)-a_2(t_1)u_n(t_1-\lambda_2T)]dt_1$$

sea $\|u(t)\|=|u(t)|+|u(t-\lambda_1T)|+|u(t-\lambda_2T)|$

y usando c); el hecho de que Ψ es acotada por M, ya que es contínua y periódica; y que $|v(s,t)|\leq(|\Psi(s)\varphi(t)|+a_2)e^{\lambda(t-s)}$

facilmente se demuestra que

(26) $\quad \|u_{n+1}(t)\| e^{-\lambda t} \leq |C_1 M \varphi(t) e^{-\lambda s}| (1 + e^{-\lambda_1 T} + e^{-\lambda_2 T}) + (1 + e^{-\lambda_1 T} + e^{-\lambda_2 T}) \cdot$

$$\cdot |M\varphi(t) + a_2| \int_{t_0}^{t} (\phi(t_1) + |a_0(t_1)| + |a_1(t_1)| + |a_2(t_1)|) \| u_n(t_1)\| e^{-\lambda t_1} \, dt_1$$

Supongamos que $\; 2|M\varphi(t) + a_2| \int_{t_0}^{\infty} (\phi(t_1) + |a_0(t_1)| + |a_1(t_1)| + |a_2(t_1)| \, dt_1 < 1 \;$ para t_0 elegida suficientemente grande entonces por inducción fácilmente se prueba por substitución directa en (26) de

$$\|u_n(t)\| \leq 2 |C_1 M \varphi(t) e^{-\lambda s}| (1 + e^{-\lambda_1 T} + e^{-\lambda_2 T}) e^{\lambda t}$$

que

(27) $\quad \|u_{n+1}(t)\| \leq 2 |C_1 M \varphi(t) e^{-\lambda s}| (1 + e^{-\lambda_1 T} + e^{-\lambda_2 T}) e^{\lambda t}$

Ahora sea

$$m_n(t) = \max_{t_0 - \omega \leq t_1 \leq t} \| u_n(t_1) - u_{n-1}(t_1) \| e^{-\lambda t_1}$$

entonces encontramos que

$$\| u_{n+1}(t) - u_n(t) \| e^{-\lambda t} \leq C_5 \, m_n(t)$$

donde

$$C_5 = (1 + e^{-\lambda_1 T} + e^{-\lambda_2 T}) |M\varphi(t) + a_2| \int_{t_0}^{\infty} |a_0(t_1)| + |a_1(t_1)| + |a_2(t_1)| + \phi(t_1) \, dt_1 < 1$$

por tanto de $m_{n+1}(t) \leq C_5 m_n(t)$ se sigue que la sucesión converge a una solución $u(t)$ de la ecuación integral en (25) definida para toda $t \geq t_0 - \omega$

De (27) tenemos

(28) $\quad \|u(t)\| \leq 2 |C M \varphi(t) e^{-\lambda s}| (1 + e^{-\lambda_1 T} + e^{-\lambda_2 T}) e^{\lambda t}$

Ahora obtengamos la desigualdad asintótica deseada. De $v(s,t) = \psi(s)\varphi(t) e^{\lambda(t-s)} + v_1(s,t)$ y de (28) tenemos

$$u(t) = \psi(s)\varphi(t) e^{\lambda(t-s)} + \int_{t_0}^{t} [\psi(t_1)\varphi(t) e^{\lambda(t-t_1)} + v_1(t_1,t)] [f(t, u(t_1), u(t_1 - \lambda_1 T),$$

$$u(t_1 - \lambda_2 T)) - a_0(t_1) u(t_1) - a_1(t_1) u(t_1 - \lambda_1 T) - a_2(t_1) u(t_1 - \lambda_2 T)] \, dt_1 = \mathcal{J}_1(t) + \mathcal{J}_2(t)$$

donde

$$\mathcal{J}_1(t) = \varphi(t) e^{\lambda t} \int_{t_0}^{t} \psi(t_1) e^{-\lambda t_1} [f(t_1, u(t_1), u(t_1 - \lambda_1 T), u(t_1 - \lambda_2 T)) - a_0(t_1) u(t_1) -$$

$$- a_1(t_1) u(t_1 - \lambda_1 T) - a_2(t_1) u(t_1 - \lambda_2 T)] \, dt_1$$

$$\cdot\ \vartheta_2(t) = \int_{t_0}^{t} v_1(t,t_1)\left[f(t_1, u(t_1), u(t_1-\lambda_1 T), u(t_1-\lambda_2 T)) - a_0(t_1)u(t_1) - a_1(t_1)\right.$$
$$\left. u(t_1-\lambda_1 T) - a_2(t_1)\, u(t_1-\lambda_2 T)\right] dt_1$$

puesto que la integral

$$\int_{t_0}^{\infty}\psi(t_1)\, e^{-\lambda t_1}\left[f(t_1, u(t_1), u(t_1-\lambda_1 T), u(t_1-\lambda_2 T)) - a_0(t_1)u(t_1) - a_1(t_1)u(t_1-\lambda_1 T) - a_2(t_1)u(t_1-\lambda_2 T)\right] dt_1$$

es absolutamente convergente como una consecuencia de (28), b) y c) tenemos que

$$\vartheta_1(t) = \varphi(t)e^{\lambda t}\left[\int_{t_0}^{\infty}\psi(t_1)\, e^{-\lambda t_1}[\cdots]\, dt_1 - \int_{t}^{\infty}\psi(t_1)\, e^{-\lambda t_1}[\cdots]\, dt_1\right] =$$
$$c_1\,\varphi(t)\, e^{\lambda t} + O(e^{\lambda t}) \quad \textbf{cuando} \quad t \to \infty ,$$

por otro lado, de (28) y de que $|v_1(s,t)| \leq a_2\, e^{\alpha(t-s)}$ **tenemos**

$$\vartheta_2(t) = o(e^{\lambda t}) \ .$$

V. SISTEMAS DE ECUACIONES CON RETARDOS MULTIPLOS DEL PERIODO.

Los sistemas de ecuaciones

$$z'(t) + \sum_{m=0}^{m} B_m(t)\, z(t - \lambda_m T) = 0 \qquad (1)$$

donde las $B_m(t)$ son matrices contínuas T-periódicas y $z(t)$ es el vector función incógnita ($z: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$), pueden estudiarse en forma similar a lo hecho para el caso escalar, esto es, buscar las soluciones también como

$$z(t) = \Phi(t)\, e^{st}, \qquad (2)$$

donde $\Phi(t)$ es una función T-periódica ($\Phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$, N dimensión del sistema).

Sustituyendo (2) en (1) y tomando en cuenta que

$$z'(t) = \Phi'(t)\, e^{st} + s\, \Phi(t)\, e^{st},$$

tenemos que

$$\Phi'(t) e^{st} + s \Phi(t)\, e^{st} + \sum_{m=0}^{m} B_m(t)\, \Phi(t)\, e^{s(t - \lambda_m T)} = 0 ,$$

es decir el problema se reduce a resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dependientes del parametro s:

$$\Phi'(t) + \Big[\, sI + \sum_{m=0}^{m} B_m(t)\, e^{-\lambda_m T s} \Big]\, \Phi(t) = 0 . \qquad (3)$$

La solución de este sistema se busca en la forma

$$\Phi(t) = V(t, s)\, \Phi(0) , \qquad (4)$$

donde $\Phi(0)$ es un vector constante diferente del vector 0 y $V(t,s)$ es la matriz fundamental de soluciones que satisface la condición $V(0,s) = I$. De la condición de periodicidad de $\Phi(t)$, obtenemos la ecuación para determinar $\Phi(0)$:

$$\Phi(T) = V(T,S)\,\Phi(0) = V(0,S)\,\Phi(0) = \Phi(0)$$

(5) $$[V(T,S) - I]\Phi(0) = 0 \quad .$$

Para que (5) tenga solución el parámetro s tiene que ser solución de la ecuación característica

(6) $$\det[V(T,S) - I] = 0$$

Del presente esquema se ve que en principio son generalizables los teoremas 1-5 al caso de sistemas tipo (1), con la única diferencia consistente en que para sistemas no contamos con una expresión explícita de la ecuación característica (6), ya que el sistema (3), en general no es integrable ni en cuadraturas.

Más aún, como en II a cada raíz S_r de (6) de multiplicidad μ_r, diferenciando de acuerdo a la regla de Leibniz obtenemos μ_r soluciones linealmente independientes tipo Floquet, las cuales forman $q_r(=N-\nu_r)$ cadenas de soluciones tipo las del caso escalar, donde q_r es la dimensión del espacio solución, N la dimensión del sistema y ν_r el rango de $[V(T,S_r)-I]$. Es decir

$$Z_{rj_1}(t) = \Phi_{rj_1}(t)\,e^{s_r t}$$

$$Z_{rj_2}(t) = [t\,\Phi_{rj_1}(t) + \Phi_{rj_2}(t)]\,e^{s_r t}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Z_{rjm_j}(t) = \left[\frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!}\,\Phi_{rj_1} + \cdots + \Phi_{rjm_j}(t)\right]e^{s_r t} \quad ,$$

donde $$j = 1, 2, \ldots, q_r$$

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_{q_r} = \mu_r$$

$\Phi_{rj\lambda}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^N$, $\Phi_{rj\lambda}=\Phi_{rj\lambda}(t)$ son funciones periódicas.

Introduciendo la función generatriz (vectorial), como en el caso escalar la función $\mathcal{U}(\tau,P)$, podremos generalizar al caso de sistemas tipo (1) los teoremas 1, 2, 3, 4 y 5.

Como en el caso escalar sea $\bar{\mathcal{U}}(\tau,P)=\sum_{r=0}^{\infty}\bar{z}(\tau+rT)P^r$ con $\bar{z}(t)=\bar{g}(t)\ \ \forall\, t\in[-\omega,0]$ y $\omega=\max\{\lambda_m T\mid m=0,\dots,m\}$.

En la ecuación (1) multiplicando por P^r y sumando en r desde $r=0$, tenemos

$$\sum_{r=0}^{\infty}\Big[\bar{z}'(\tau+rT)P^r+\sum_{m=0}^{m}B_m(\tau)\bar{z}(\tau+(r-\lambda_m)T)P^r\Big]=0$$

y puesto que las B_m son T-periódicas:

$$\sum_{r=0}^{\infty}\bar{z}'(\tau+rT)P^r+\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{m}B_m(\tau)\bar{z}(\tau+(r-\lambda_m)T)P^r=0$$

$$\frac{\partial\bar{\mathcal{U}}(\tau,P)}{\partial\tau}+\sum_{m=0}^{m}B_m(\tau)\Big[\sum_{r=0}^{\lambda_m-1}\bar{z}(\tau+(r-\lambda_m)T)P^r+\sum_{r=\lambda_m}^{\infty}\bar{z}(\tau+(r-\lambda_m)T)P^r\Big]=0$$

$$\frac{\partial\bar{\mathcal{U}}(\tau,P)}{\partial\tau}+\sum_{m=0}^{m}B_m(\tau)\Big[\sum_{r=0}^{\lambda_m-1}\bar{z}(\tau+(r-\lambda_m)T)P^r+P^{\lambda_m}\sum_{r=0}^{\infty}\bar{z}(\tau+rT)P^r\Big]=0$$

$$\frac{\partial\bar{\mathcal{U}}(\tau,P)}{\partial\tau}+\sum_{m=0}^{m}B_m(\tau)\Big[\sum_{r=0}^{\lambda_m-1}\bar{g}(\tau+(r-\lambda_m)T)P^r+P^{\lambda_m}\bar{\mathcal{U}}(\tau,P)\Big]=0$$

$$\frac{\partial\bar{\mathcal{U}}(\tau,P)}{\partial\tau}+\sum_{m=0}^{m}B_m(\tau)P^{\lambda_m}\bar{\mathcal{U}}(\tau,P)+\sum_{m=0}^{m}\sum_{r=0}^{\lambda_m-1}B_m(\tau)\bar{g}(\tau+(r-\lambda_m)T)P^r=0$$

donde podemos tomar como

$$B(\tau,P)\overset{\text{def}}{=}\sum_{m=0}^{m}B_m(\tau)P^{\lambda_m}\quad,\quad G(\tau,P)\overset{\text{def}}{=}-\sum_{m=0}^{m}\sum_{r=0}^{\lambda_m-1}B_m(\tau)\bar{g}(\tau+(r-\lambda_m)T)P^r$$

llegando así a:

$$\text{(7)}\qquad \frac{\partial\bar{\mathcal{U}}(\tau,P)}{\partial\tau}+B(\tau,P)\bar{\mathcal{U}}(\tau,P)=G(\tau,P)$$

Consideremos la ecuación homogenea

$$\frac{\partial\bar{\mathcal{U}}(\tau,P)}{\partial\tau}+B(\tau,P)\bar{\mathcal{U}}(\tau,P)=0$$

entonces $\bar{\mathcal{U}}(\tau,P)=W(\tau,P)\,\mathcal{U}(0,P)$, donde W es la matríz fundamental y $W(0,P)=I$.

Por otro lado (véase [1]) existe $Q(\tau,P)$ T-periódica no-singular y una matríz $R_1(P)$ tales que:

$$W(\tau,P)=Q(\tau,P)\exp(\tau R_1(P)) \qquad \text{con} \qquad Q(0,P)=I$$

y por lo tanto la solución de (7) (véase [1]) es

$$\bar{U}(\tau,P)=W(\tau,P)\bar{U}(0,P)+W(\tau,P)\int_0^\tau [W(\xi,P)]^{-1}G(\xi,P)\,d\xi$$

esto es

$$(8)\quad \bar{U}(\tau,P)=Q(\tau,P)\exp[\tau R_1(P)]\bar{U}(0,P)+Q(\tau,P)\exp[\tau R_1(P)]\int_0^\tau [Q(\xi,P)\exp[\xi R_1(P)]]^{-1}G(\xi,P)\,d\xi$$

Sí como en el caso escalar aplicamos las condiciones de frontera $\bar{U}(0,P)-P\bar{U}(T,P)=\bar{g}(0)$ tendremos:

$$Q(0,P)\bar{U}(0,P)-P\Big[Q(T,P)\exp(TR_1(P))\bar{U}(0,P)+Q(T,P)\exp(TR_1(P))\int_0^T[Q(\xi,P)\exp(\xi R_1(P))]^{-1}G(\xi,P)\,d\xi\Big]=\bar{g}(0),$$

pero Q es T-periódica de modo que $Q(T,P)=Q(0,P)=I$, luego

$$[I-P\exp(TR_1(P))]\bar{U}(0,P)-P\exp(TR_1(P))\int_0^T[Q(\xi,P)\exp(\xi R_1(P))]^{-1}G(\xi,P)\,d\xi=\bar{g}(0)$$

$$\bar{U}(0,P)=[I-P\exp(TR_1(P))]^{-1}\Big[\bar{g}(0)+P\exp(TR_1(P))\int_0^T[Q(\xi,P)\exp(\xi R_1(P))]^{-1}G(\xi,P)\,d\xi\Big]$$

y sustituyendo esto en (8) encontramos explícitamente a $\bar{U}(\tau,P)$

Por otro lado $V(t,S)$ es la matríz fundamental de (3) de modo que (véase [1])

$$V(t,S)=V_1(t,S)\exp(t\,R_2(S)) \quad ,$$

con $V_1(t,S)$ periódica de período T y definamos a $R_2(S)$ como

$$R_2(S)=\frac{1}{T}\ln P\exp(TR_1(P))$$

esto último tiene sentido ya que $P\exp(TR_1(P))$ es no singular y por tanto existe una matríz $R_2(S)$ tal que

$$\exp(TR_2(S))=P\exp(TR_1(P))$$

Puesto que V_1 es T-periódica y $V(0,S)=I \Rightarrow V_1(0,S)=I$, tenemos

$$V(T,S)=V_1(T,S)\exp(TR_2(S))=V_1(0,S)\exp(TR_2(S)) = \exp(TR_2(S)),$$

por lo tanto haciendo $P_r = e^{-S_r T}$ tenemos:

(9) $$\det[V(T,S_r)-I]=0 \iff \det[P_r \exp(TR_1(P_r))-I]=0$$

por otro lado, sea R el radio de convergencia más pequeño de las series

$$\sum_{r=0}^{\infty} z_1(t+rT)P^r, \ \ldots\ , \sum_{r=0}^{\infty} z_N(t+rT)P^r \quad ,$$

donde $\vec{z}=(z_1,\ldots,z_N)$,

entonces para cierta i $(1\leq i\leq N)$ tenemos

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\sqrt[r]{|z_i(t+rT)|}=\overline{\lim_{t\to\infty}}\sqrt[[\frac{t}{T}]]{|z_i(t)|}$$

$$-\ln R=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{[\frac{t}{T}]}\ln|z_i(t)|=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|z_i(t)|}{t}\frac{\frac{t}{T}}{[\frac{t}{T}]}T=T\,\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|z_i(t)|}{t}=T\lambda_i \Rightarrow R=e^{-T\lambda_i}$$

Sea P_j^* el punto singular más cercano al centro de convergencia tal que no es singularidad removible de $\vec{u}(t,P)$, entonces

$$R=|P_j|=|e^{-TS_j}|=e^{-TR_e(S_j)}$$

luego

$$e^{-T\lambda}=e^{-TR_e(S_j)} \quad \text{y} \quad \lambda=R_e(S_j)$$

por (9) tenemos que $R_e(S_j)$ es parte real de una raíz de (6) , por lo cual el conjunto de exponentes característicos de Lyapunov está formado por las partes reales de las raíces de (6). Esto constituye el teorema 1'.

(*) Obsérvese que el índice "j" no tiene nada que ver con el "i" ya que el índice "j" nos indica una cierta raíz de la ecuación característica (6); e "i" nos indica una coordenada fija del vector $\vec{z}$.

Teorema 2!. Para toda solución $z(t)$ del sistema de ecuaciones (1) y para cualquier número α podemos construir la suma finita de soluciones de Floquet

$$\bar{z}(t) = \sum_{R_e(s_r)\geq -\alpha} \sum_{i=1}^{M_r} c_{ri}\, \bar{z}_{ri}(t)$$

que satisface la condición $z_i(t) - \bar{z}_i(t) = O(e^{-\alpha t})$, $t \to \infty$.

La demostración de este teorema es similar a la del caso escalar.

Como $\bar{\mathcal{U}}$ está dada mediante una serie de potencias de P

$$\bar{\mathcal{U}}(\tau, P) = \sum_{r=0}^{\infty} z(\tau + rT)\, P^r \qquad z = (z_1, \dots, z_N)$$

entonces por la fórmula de Cauchy podemos obtener el valor de la solución

$$z(t) = z(\tau + \lambda T) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{P^{\lambda+1}} \bar{\mathcal{U}}(\tau, P)\, dP \qquad (0 \leq \tau \leq T)$$

con C circunferencia con centro en el orígen que no contiene puntos críticos en su interior.

Ahora tomemos la circunferencia C_R de radio arbitrario R sobre la cual no hay puntos críticos de $\bar{\mathcal{U}}$ entonces

$$z(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{1}{P^{\lambda+1}} \bar{\mathcal{U}}(\tau, P)\, dP - \sum_{|P_r|<R} \operatorname*{res}_{P_r} \frac{1}{P^{\lambda+1}} \bar{\mathcal{U}}(\tau, P)$$

Análogamente como en el caso escalar, $\bar{\mathcal{U}}(\tau, P)$ se expresa como la suma de una función entera

$$W(\tau, P) \int_0^{\tau} [W(\xi, P)]^{-1} G(\xi, P)\, d\xi$$

y otra meromorfa

(10) $$W(\tau, P)\left[I - P\exp(T R_1(P))\right]^{-1}\left[\xi(0) + W(T, P)\int_0^T [W(\xi, P)]^{-1} G(\xi, P)\, d\xi\right]$$

como en el caso escalar consideraremos sólo el segundo sumando en el valor $\tau = t - \lambda T$.

Dado que (10) tiene la misma forma que la parte meromorfa de (7) de III, expresando a $[I - W(T, P)]^{-1} = F^{-1}(P)$ como $\dfrac{F_1(P)}{\det F(P)}$ y además como $W(\tau, P)$ es matríz fundamental del sistema homogeneo de (7) entonces sus componentes son combinaciones de funciones T-periódicas multiplicadas por funciones exponenciales (véase [12]). Entonces las componentes del vector (10), tienen la misma forma que (17) de III; de modo que tendremos que el residuo de cada componente en el polo P_r de multiplicidad μ_r será una combinación lineal de las soluciones tipo Floquet, siempre que hagamos $P_j = e^{-s_j T}$ y expresando las derivadas respecto de P como derivadas respecto de S. El resto de la demostración se hace por cada coordenada y de la misma manera que en el caso escalar.

Los teoremas 3, 4 y 5 son fácilmente generalizables del caso escalar al caso de sistemas.

VI. ECUACIONES CON RETARDOS CONSTANTES ARBITRARIOS.

El estudio de sistemas periódicos con retardos en su caso más general (incluso con retardos representados por funciones periódicas ó sistemas descritos mediante la integral de Stiltjes) se hace utilizando análisis funcional.

El esquema de tal enfoque y sus principales resultados lo daremos aquí pero exposiciones más completas pueden hallarse en [8], [9] y [10].

Nos restringiremos a sistemas de dimensión N con un sólo retardo constante

$$(1) \qquad \dot{x}(t) + A(t)\,x(t) + B(t)\,x(t-\omega) = 0 \qquad (\omega = ct. > 0)$$

Donde las matrices $A(t)$ y $B(t)$ son T-periódicas, donde el período T no es menor que el retardo: $T \geq \omega$.

Sea $C_{[-\omega,0]}$ el espacio de las funciones contínuas definidas en $[-\omega,0]$ y con valores en $\mathbb{R}^N$.

La norma en $C_{[-\omega,0]}$ se define en forma usual: $\|y\| = \max_{-\omega \leq \theta \leq 0} |y(\theta)|$ donde $|y(\theta)|$ representa alguna norma del vector y en el espacio euclidiano de N dimensiones.

El valor de cualquier vector-función $x(t)$ sobre $[t-\omega, t]$ se considera un elemento de $C_{[-\omega,0]}$ definido como:

$$x_t(\theta) = x(t+\theta) \qquad (-\omega \leq \theta \leq 0)$$

Consideremos el operador de translación en un período a lo largo de las soluciones del sistema (1), esto es, consideremos el operador

$$\mathcal{U}(t_1)\,g = x_{t_1+T}$$

que pone en correspondencia a cada función $g \in C_{[-\omega,0]}$ con el elemento x_{t_1+T} de la solución $x(t)$, que satisface la condición inicial $x_{t_1}=g$.

Veamos que el operador $\mathcal{U}(t)$ manda cualquier conjunto acotado de funciones $\{g\}$ en un conjunto acotado $\{x_{t_1+T}(\theta)\}$.

De nuestra ecuación (1) tenemos que

$$\int_0^{\theta+T} x'_{t_1}(\eta)d\eta = -\int_0^{\theta+T} A(t_1+\eta)\, x_{t_1}(\eta)d\eta - \int_0^{\theta+T} B(t_1+\eta)\, x_{t_1}(\eta-\omega)\, d\eta$$

$$\|x_{t_1+T}(\theta)\| = \|x_{t_1}(\theta+T)\| \le \|x_{t_1}(0)\| + \int_0^{\theta+T}\|A(t_1+\eta)x_{t_1}(\eta)\|d\eta + \int_0^{\theta+T}\|B(t_1+\eta)x_{t_1}(\eta-\omega)\|\, d\eta$$

como $\{g = x_{t_1}(\theta) \mid \theta\in[-\omega,0]\}$ es acotado entonces existe $m\in\mathbb{R}^+$ tal que $\|x_{t_1}(0)\|\le m$ de modo que

$$\|x_{t_1+T}(\theta)\| \le m + \int_0^{\theta+T}\|A(t_1+\eta)x_{t_1}(\eta)\|d\eta + \int_{-\omega}^{\theta+T-\omega}\|B(t_1+\eta+\omega)\, x_{t_1}(\eta)\|\, d\eta \le$$

$$m + \int_{-\omega}^{\theta+T}\|A(t_1+\eta)\, x_{t_1}(\eta)\| + \|B(t_1+\eta+\omega)\, x_{t_1}(\eta)\|\, d\eta \le$$

$$m + \int_{-\omega}^{0}\|A(t_1+\eta)x_{t_1}(\eta)\| + \|B(t_1+\eta+\omega)x_{t_1}(\eta)\|d\eta + \int_0^{\theta+T}\|A(t_1+\eta)x_{t_1}(\eta)\| + \|B(t_1+\eta+\omega)x_{t_1}(\eta)\|\, d\eta$$

puesto que $\{x_{t_1}(\eta) \mid \eta\in[-\omega,0]\}$ es acotado y $A(t)$ y $B(t)$ son acotadas y contínuas entonces existirá m_1 tal que

$$\|x_{t_1+T}(\theta)\| \le m + m_1 + \int_0^{\theta+T}\|A(t_1+\eta)x_{t_1}(\eta)\| + \|B(t_1+\eta+\omega)x_{t_1}(\eta)\|d\eta$$

$$\le m_2 + \int_0^{\theta+T}(\|A(t_1+\eta)\| + \|B(t_1+\eta+\omega)\|)\,\|x_{t_1}(\eta)\|\, d\eta$$

$$\le m_2 + \int_0^{\theta+T}\|x_{t_1}(\eta)\|d\eta$$

y por el lema 2.1 de [2] tenemos que

$$\|x_{t_1+T}(\theta)\| \le m_2 \exp\left[M\int_0^{\theta+T} d\eta\right] = m_2\, e^{M(\theta+T)} \le m_2\, e^{MT} \qquad \text{ya que } \theta\in[-\omega,0] .$$

Ahora bien del sistema de ecuaciones (1) tenemos que

$$x'(t) = -A(t)\, x(t) - B(t)\, x(t-\omega)$$

y considerando a $x(t)$ como un elemento de $C_{[-\omega,0]}$

$$x'_{t_1+T}(\theta) = -A(\theta+t_1+T)\, x_{t_1+T}(\theta) - B(\theta+t_1+T)\, x_{t_1-\omega+T}(\theta)$$

Por otro lado, de la hipótesis de que $T \geq \omega > 0$ y del hecho que arriba demostramos tenemos que $\{x_{t,-\omega+T}(\theta)\}$ es acotado; por tanto $\{x_{t,+T}(\theta)\}$ posee derivadas uniformemente acotadas.

Luego entonces, este conjunto de funciones es uniformemente acotado y equicontínuo de forma que por el teorema de Arzelá es compacto.

Los operadores que mandan conjuntos acotados en compactos se llaman completamente contínuos y de este modo se muestra que el operador $\mathcal{U}$ es completamente contínuo. Las propiedades de tales operadores están bien estudiadas, en particular se sabe que el espectro de un operador completamente contínuo es a lo más numerable y puede tener sólo un punto límite: el cero.

Todos los puntos del espectro de un operador completamente contínuo, distintos del cero son valores propios de multiplicidad finita.

Esta última afirmación significa que para cada $\lambda_r \neq 0$ y cada t existen en $C_{[-\omega,0]}$ un subespacio μ_r-dimensional $E_r(t)$ y un subespacio infinito-dimensional $K_r(t)$ tales que:

i) Los subespacios $K_r(t)$ y $E_r(t)$ no tienen elementos comunes distintos del cero.

ii) Cualquier función $g \in C_{[-\omega,0]}$ es unívocamente representable en la forma $g = g_1 + g_2$ con $g_1 \in E_r(t)$ y $g_2 \in K_r(t)$.

iii) Los subespacios $K_r(t)$ y $E_r(t)$ son invariantes respecto del operador $\mathcal{U}(t)$, esto es, sí $g \in E_r(t)$ y $g_2 \in K_r(t)$, entonces $\mathcal{U}(t)g_1 \in E_r(t)$ y $\mathcal{U}(t)g_2 \in K_r(t)$.

iv) El operador $\mathcal{U}(t)$ restringido al subespacio $E_r(t)$ posee sólo un valor propio igual a λ_r .

v) El operador $\mathcal{U}(t)$ considerado sólo en el subespacio $k_\nu(t)$ tiene los mismos valores propios que posee en todo $C_{[-\omega,0]}$ excepto λ_ν.

Intentemos obtener la representación matricial de las soluciones tipo Floquet.

Sea $d^1, d^2, \ldots, d^{\mu_\nu}$ cualquier base en el subespacio $E_\nu(t_1)$.

Consideremos la solución del sistema (1) definida por la condición inicial: $x_{t_1}^{\lambda} = d^{\lambda} \quad (\lambda = 1, \ldots, \mu_\nu)$

Los valores correspondientes $x_{t_1+T}^{\lambda} = \mathcal{U}(t_1) x_{t_1}^{\lambda}$, también pertenecen al subespacio $E_\nu(t_1)$, y por lo tanto pueden desarrollarse según los elementos de la base.

Introduzcamos, por comodidad en la escritura, la matriz $(N \times \mu_\nu)$ $\underline{X}_t = (x_t^1, x_t^2, \ldots, x_t^{\mu_\nu})$ cuyas columnas son funciones con valores vectoriales de dimensión N. Así la acción del operador $\mathcal{U}(t_1)$ en el subespacio $E_\nu(t_1)$ toma la forma:

$$\mathcal{U}(t_1)\, \underline{X}_{t_1} = \underline{X}_{t_1+T} = \underline{X}_{t_1} Q_\nu$$

donde Q_ν es cierta matriz $(\mu_\nu \times \mu_\nu)$ constante, con todos sus valores propios iguales a λ_ν, luego esta matríz no es degenerada y por tanto su logaritmo existe, esto significa que existe la matríz constante $R_\nu = \frac{1}{T} \ln Q_\nu$ tal que $Q_\nu = e^{R_\nu T}$

Las columnas de las matrices $\underline{X}(t+T)$ y $\underline{X}(t)\, Q_\nu$ son soluciones de nuestro sistema (1), puesto que sus coeficientes son T-periódicos.

Es por esto que la fórmula

$$\underline{X}(t_1+T+\theta) = \underline{X}(t_1+\theta)\, Q_\nu$$

demostrada en el conjunto inicial $-\omega \le \theta < 0$, sigue siendo cierta, para el teorema de unicidad, para toda $t \geq t_1$, es decir

$$\underline{X}(t+T) = \underline{X}(t)\, Q_\nu \, , \quad \text{para} \quad t_1 \le t < \infty$$

Ahora consideremos la matríz $(\omega \times \mu_r)$: $P_r(t) = X(t)\, e^{-R_r t}$

Esta matríz $P_r(t)$ es periódica, dado que

$$P_r(t+T) = X(t+T)\, e^{-R_r(t+T)} = X(t)\, Q_r\, e^{-R_r T} e^{-R_r t} = X(t)\, e^{-R_r t} = P_r(t)$$

por lo tanto, la familia de soluciones considerada $x^1, x^2, \ldots, x^{\mu_r}$ admite su extención a todo $\mathbb{R}$ y puede representarse en la forma

$$X(t) = P_r(t)\, e^{R_r t}$$

donde la matriz $P_r(t)$ tiene período T y todos los valores propios de la matriz constante R_r son iguales a $s_r = \frac{1}{T} \ln \lambda_r$. Es así que pudimos obtener la representación matricial de las soluciones tipo Floquet.

La base $d^1, d^2, \ldots, d^{\mu_r}$ puede escogerse de manera que la matriz R_r tenga la forma normal de Jordan. En tal caso calculando $e^{R_r t}$ hallamos que las soluciones consideradas toman la forma:

$$x_{rj_1}(t) = \varphi_{rj_1}\, e^{s_r t}$$

$$x_{rj_2}(t) = \left[t\, \varphi_{rj_1}(t) + \varphi_{rj_2}(t)\right] e^{s_r t}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{rj m_j}(t) = \left[\frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!}\varphi_{rj_1}(t) + \cdots + \varphi_{rj m_j}(t)\right] e^{s_r t}$$

$$j = 1, 2, \ldots, q_r$$

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_{q_r} = \mu_r$$

Donde q_r es el número de bloques de Jordan en la matríz R_r, mientra que m_j son las dimensiones de tales bloques y $\varphi_{rjl}(t)$ son funciones T-periódicas.

El caso $T < \omega$ se reduce al caso arriba considerado $T \geq \omega$.

En efecto hallamos un cierto n tal que $nT \geq \omega$ y consideramos la translación en n períodos.

El operador de translación en n períodos es igual a $U^n(t)$

y es completamente contínuo. Realizando de manera similar a todo lo anteriormente hecho para $\mathcal{U}(t)$ obtenemos el sistema de soluciones tipo Floquet con coeficientes T-periódicos, teniéndose que a cada valor propie λ del operador $\mathcal{U}(t)$ le corresponde el valor propio $\tilde{\lambda}=\lambda^{m}$ del operador $\mathcal{U}^{m}(t)$.

Supongamos ahora que $\tilde{\lambda}$ es un valor propio del operador $\mathcal{U}^{m}(t)$ y $\tilde{x}(t)$ la correspondiente solución tipo Floquet que satisface la condición $\tilde{x}(t+mT)=\tilde{\lambda}\,\tilde{x}(t)$

Supongamos además que las raices de $\sqrt[m]{\tilde{\lambda}}$ son $\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},\ldots,\lambda^{(m)}$. Construyamos las m siguientes funciones (cada una de ellas con valores en $\mathbb{R}^{N}$):

$$x(t)^{(i)}=\tilde{x}(t)+\frac{\tilde{x}(t+T)}{\lambda^{(i)}}+\cdots+\frac{\tilde{x}(t+(m-1)T)}{(\lambda^{(i)})^{m-1}} \qquad i=1,2,\ldots,m$$

De la periodicidad de $A(t)$ y $B(t)$ de (1) se sigue que cada una de las funciones arriba construidas $x(t)^{(i)}$ es solución del sistema (1), que satisfacen las igualdades

$$x(t+T)^{(i)}=\lambda^{(i)}x(t)^{(i)}$$

sí $\lambda^{(\lambda)}$ no es valor propio del operador $\mathcal{U}(t)$, entonces llegamos a una contradicción, de la cual se sigue que $x(t)^{(\lambda)}=0$.

Todas las funciones $x(t)^{(i)}$, no idénticamente cero, resultan ser soluciones tipo Floquet con coeficientes T-periódicos.

El caso que acabamos de analizar tiene una desventaja que hace muy complicada la aplicación práctica del esquema teórico desarrollado. En efecto, a diferencia del caso con retardo múltiple del período de los coeficientes el caso analizado no es susceptible de escribir explícitamente la ecuación característica que satisface los valores propios λ_r o los exponentes S_r y tampoce podemos escribir explícitamente las expresiones de las soluciones tipo Floquet, así el correspondiente λ_r ya es conocido.

Analizaremos el sistema de ecuaciones con retardo:

$$x'(t) + A(t)x(t) + B(t)\,x(t-\omega) = 0 \qquad (\omega = ct > 0)$$

a este tipo de ecuaciones pueden extenderse todos los resultados analizados en la sección de desarrollo asintótico en serie de las soluciones a través de soluciones tipo Floquet, en particular los teoremas 1 y 2, así como los teoremas 3,4 y 5 de la sección IV.

Enunciaremos en términos de las propiedades espectrales del operador $\mathcal{U}(t)$ dos de tales teoremas (el 2 y 3) a manera de ejemplo.

Teorema . Las soluciones del sistema (1) son asintóticamente estables si y sólo si todos los valores propios del operador $\mathcal{U}(t)$ pertenecen al círculo unitario $|\lambda_r| < 1 \quad (r = 1, \cdots)$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Al valor propio λ_r le corresponde una solución tipo Floquet con exponente $s_r = \frac{1}{T} \ln \lambda_r$

Supongamos que $|\lambda_r| \geq 1$, entonces $Re(s_r) \geq 0$ y esta solución no tiende a cero.

$\Leftarrow$) Para un cierto valor fijo t consideremos la sucesión de pedazos de la solución:

$$x_t = g \;,\quad x_{t+T} \;,\quad x_{t+2T} \;,\; \cdots$$

sabemos que $x_{t+mT} = \mathcal{U}^m(t)g$

y que (ver [9]) $\lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{\|\mathcal{U}^m(t)\|} = \max\limits_r |\lambda_r|$,

donde la norma del operador queda definida por $\|\mathcal{U}\| = \sup\limits_{g \in C[-\omega,0]} \frac{\|\mathcal{U}g\|}{\|g\|}$

Por hipótesis tenemos que $\max_{r} |\lambda_r| < 1$ puesto que los valores propios de un operador completamente contínuo no pueden tener punto límite distinto del cero por lo tanto

$$\lim_{m \to \infty} \sqrt[m]{\|\mathcal{U}^m\|} = q < 1$$

esto es para $m \geq m_1$ suficientemente grandes tenemos

$$\sqrt[m]{\|\mathcal{U}^m\|} < q + \varepsilon < 1$$

y

(2) $$\|\mathcal{U}^m(t)\| < (q+\varepsilon)^m$$

supongamos que $M = \max\left\{\max_{1 \leq m \leq m_1} \|\mathcal{U}^m(t)\|,\ 1\right\}$ entonces para cualquier solución tendremos que

$$\|X_{t+mT}\| \leq M \|g\| \qquad (0 \leq m < \infty)$$

y también para m suficientemente grande de (2)

$$\|X_{t+mT}\| \leq (q+\varepsilon)^m \|g\|$$

la siguiente desigualdad es válida para toda m

$$|x(t+mT+\tau)| \leq M_1 \|X_{t+mT}\|$$

por la dependencia contínua de las soluciones respecto de las condiciones iniciales.

Combinando las estimaciones obtenidas llegamos a

$$|x(\tau)| \leq M \cdot M_1 \|g\| \qquad (t \leq \tau < \infty)$$

$$|x(t+mT+\tau)| \leq M_1 \|g\| (q+\varepsilon)^m \quad , \quad \text{para } m > m_1 \text{ y } 0 \leq \tau \leq T$$

De estas desigualdades se sigue que las soluciones son asintóticamente estables y el teorema queda demostrado.

<u>Teorema</u> . Para toda solución del sistema (1) y cualquier número α se puede construir con las soluciones tipo Floquet

$$x_{rj_1}(t) = \varphi_{rj_1}(t) e^{s_r t}, \ldots, x_{rjm_j} = \left[\frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!}\varphi_{rj_1}(t) + \cdots + \varphi_{rjm_j}(t)\right] e^{s_r t} ,$$

la suma finita

$$\bar{x}(t)=\sum_{Re(s_r)\geq -\alpha}\ \sum_{j=1}^{q_r}\ \sum_{l=1}^{m_j} c_{rjl}\, x_{rjl}(t)$$

que satisface la condición:

$$\|x(t)-\bar{x}(t)\|=O(e^{-\beta t}) . \qquad (\beta>\alpha)$$

cuando $t\to\infty$.

Demostración.

Sean $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_k$ todos los valores propios del operador $\mathcal{U}(t)$, que satisfacen la condición $|\lambda_r|\geq e^{-\alpha T}$ y sean $E_1(t)$, $E_2(t)$, $\ldots$, $E_k(t)$ los correspondientes subespacios invariantes. Entonces toda función $g\in C_{[-w,0]}$ podemos representarla unívocamente en la forma $g=g_1+g_2+\cdots+g_{k+1}$ con $g_r\in E_r(t_1)$ $(r=1,\ldots,k)$ y $g_{k+1}\in K(t_1)$. Aquí $K(t)$ representa el subespacio invariante en el que el operador $\mathcal{U}(t)$ no tiene valores prpios $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$.

La solución $x(t)$, con condición inicial $x_{t_1}=g$, se desarrolla en la suma de soluciones

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)+\cdots+x_{k+1}(t) ,$$

con condiciones iniciales

$$(x_r)_t=g_r \qquad (r=1,2,\ldots,k+1)$$

Para cada subespacio invariante $E_r(t)$ como base puede tomarse un sistema de soluciones tipo Floquet (de los mencionados en el enunciado del teorema).

Por lo anterior, cada solución $x_r(t)$ $(r=1,\ldots,k)$ unívocamente se desarrolla en suma de soluciones del mencionado tipo Floquet.

En el subespacio $K(t)$ el operador $\mathcal{U}(t)$ no tiene valores propios $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$. Por lo tanto el $\max|\lambda_r|<e^{-\alpha T}$ para todos los valores propios del operador $\mathcal{U}(t)$ en el subespacio $K(t)$.

Sabemos que (ver [9]) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|\mathcal{U}^n(t)\|}=\max|\lambda_r|$ de modo que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|\mathcal{U}^n\|}<e^{-\alpha T}$$

para $m \geq m_0$ tenemos que $\sqrt[m]{\|\mathcal{U}^m\|} < e^{-\alpha T}$

$$\|\mathcal{U}^m\| < e^{-\alpha T m}$$

puesto que $(x_{\lambda+1})_{t+mT} = \mathcal{U}^m(t)\, g_{\lambda+1}$ claramente tenemos

$\|(x_{\lambda+1})_{t+mT}\| \leq \|g_{\lambda+1}\|\, e^{-\alpha T m}$ para $m \geq m_0$

esto es equivalente a $\|x_{\lambda+1}(t)\| \leq e^{-\beta t}\, \|g_{\lambda+1}\|$ cuando $t \to \infty$

es decir $x_{\lambda+1}(t) = O(e^{-\beta t})$

A P E N D I C E .

EXISTENCIA Y UNICIDAD.

Teorema. Supongamos que $g(t) \in C_{[-\omega,0]}$ entonces existe una única función contínua $u(t)$ para $t \geq -\omega$, la cual satisface

(1) $\dot{u}(t) + b_0(t)u(t) + b_1(t)\,u(t-\lambda_1 T) + b_2(t)\,u(t-\lambda_2 T) = 0$

(2) $u(t) = g(t)$, $t \in [-\omega, 0]$, $\omega = max\{\lambda_1 T, \lambda_2 T\}$.

Demostración.

Sea $v(t) = -b_1(t)u(t-\lambda_1 T) - b_2(t)u(t-\lambda_2 T)$

entonces (1) puede ser escrita como

$$\dot{u}(t) + b_0(t)u(t) = v(t)$$

de modo que

(3) $$u(t) = c\, e^{-\int^t b_0(s)ds} + e^{-\int^t b_0(s)ds}\int^t v(s)\, e^{\int^s b_0(\xi)d\xi}\, dt$$

por hipótesis $v(t) \in C_{[0,\omega]}$ y de (3) vemos que hay una única función $u(t)$ la cual satisface (1) para $t \in [0,\omega]$ y para la cual $u(0) = g(0)$ .Puesto que esta función es contínua $v(t) \in C_{[0,2\omega]}$ .De (3) se sigue que hay una única función contínua $u(t)$ la cual satisface (1) para $t \in [0, 2\omega]$ .Puesto que claramente este proceso puede ser repetido un número infinito de veces,hemos establecido la existencia y unicidad de la función $u(t)$ para $t \geq 0$.

Análogamente se puede probar existencia y unicidad para sistemas de la forma

$$z'(t) + \sum_{i=0}^{m} B_i(t)\, z(t-\lambda_i T) = 0 \qquad \lambda_0 = 0$$

con condición inicial

$$z(t) = g(t) \qquad t \in [0, \omega] \quad , \quad \omega = max\{\lambda, T\}$$

Para más detalles ver [2].

REFERENCIAS.

[1] BRAUER F., NOHEL J. A.; The Cualitative Theory of Ordinary Differential Equations, Addison-Wesley, 1969.

[2] BELLMAN R., COOKE K. L.; Differential Difference Equations, Acad. Press, 1963.

[3] ELSGOLTZ L. E., NORKIN S. B.; Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments, Acad. Press, 1973.

[4] ZVIERKIN A. M.; K teorii linieinij differentzialnyj uravnienii s zapazdyvayushim argumentom y periodicheskimi coeffitzentami (Sobre la teoría de ecuaciones diferenciales lineales con argumento retardado y coeficientes periódicos). Dokl. Akad. Nauk SSSR, 128, 5(1959), 882-885.

[5] ZVIERKIN A. M.; O polnotie odnoi sistemy chastnyj reshenii differentzialnave uravnienya s zapazdyvaniem y periodicheskimi coeffitzentami (Sobre la completez de un sistema de soluciones particulares de la ecuación diferencial con retardo y coeficientes periódicos). Trudy Sem. po Diff. Urav. s Otkl. Arg., U.D.N., T. 2, (1963), 94-112.

[6] SVESHNIKOV A. G., TIKHONOV A. N.; The Theory of Functions of a Complex Variable, MIR, 1974.

[7] KRASOVSKII N. N.; Stability of Motion, Stanford University Press. 1963.

[8] SHIMANOV S. N.; K teorii linieinij differentzialnyj uravnii s periodicheskimi coeffitzentami y zapazdyvaniem vremeni (Sobre la teoría de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos y tiempo retardado). Prikl. Mat.

Mek., 27, 3(1963), 450-458.

[9] HALANAY A.; Teoriya ustoichivosti linieinij periodicheskij sistem s zapazdyvaniem (Teoría de estabilidad para sistemas lineales periódicos con retardo). Revue de Mathem. Pures et Appliq. Rep. Pop. Rum., 6, 4(1961), 633-653.

[10] STOKES A.; A Floquet theory for functional differential equations. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 48, 8(1962), 1330-1334.

[11] KOLMOGOROV A. N., FOMIN S. V.; Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional, MIR, 1972.

[12] JORDAN D. W., SMITH P.; Nonlinear Ordinary Differential Equations, Oxford University Press, 1977.

[13] MARSDEN J. E.; Basic Complex Analysis, W. H. Freeman and Comp., 1973

[14] ELSGOLTZ L. E.; Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional, MIR, 1977.

[15] ERDELYI A.; Asymptotic Expansions, Dover, 1956.

[16] FOMIN S. V., BUDAK B. M.; Multiple Integrals, Field Theory and Series, MIR, 1978.

[17] MALKIN J. G.; Theory of Stability of Motion, Some Problems in the Theory of Nonlinear Oscillations, 1956.

[18] NEMITSKII V. V., STEPANOV V. V.; Qualitative Theory of Differential Equations, Princeton University Press, 1960.