

18 original



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**GEOMETRIA Y OPTIMIZACION:
EMPAQUES Y CUBIERTAS**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
MATEMATICO**

P R E S E N T A:

Jesús Noriega Rivero

MEXICO, D. F.

1981



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

P R O L O G O

El propósito de este trabajo es el de presentar la parte de la Geometría de los Números que se aplica a problemas de interés práctico como el de empaques y cubiertas. El primero consiste en estudiar la manera en que se puede empacar un conjunto de cuerpos dentro de otro más grande, mientras que el segundo se avoca al estudio de la forma de cubrir un cuerpo con otros cuerpos.

Estos dos problemas tienen relevancia actual debido a que cada vez es más urgente optimizar el uso de espacio en situaciones tan distintas como en la localización de casas dentro de un fraccionamiento o en el problema de empacar el mayor número de cables pequeños dentro de uno más grande.

Para dar una idea de la utilidad práctica de este tema al principio del trabajo damos una variedad bastante amplia de situaciones en la vida real que son susceptibles de resolverse con estas técnicas.

Esperamos con este trabajo estimular el interés en el tema ya que creemos que no se ha hecho un estudio lo suficientemente amplio en el cual se haya cubierto todo lo que se sabe hasta ahora del mismo.

La tesis consta de cuatro capítulos. En el primero se mencionan varios problemas de interés práctico, algunos de los cuales serán desarrollados en capítulos posteriores.

En el capítulo II se da principalmente la herramienta teórica necesaria para la resolución de los problemas presentados en el capítulo I; se estudian también algunos resultados de aplicación de esta herramienta a la Teoría de los Números.

En el capítulo III probamos algunos resultados de optimización en empaques de círculos en un círculo más grande y en un polígono convexo, además de un resultado muy reciente en el tema de adoquinados del plano.

En el capítulo IV se estudian algunas aplicaciones de la teoría expuesta en los capítulos anteriores y las soluciones de algunos de los problemas del capítulo I.

Quiero agradecer al Dr. José Angel Canavati su amable dirección en la realización de esta tesis. Agradezco además a los doctores Alberto Alonso y Coria y Luis Verde Star y a los matemáticos Luis Alberto Briseño Aguirre y Javier Alagón Cano por sus consejos y valiosa ayuda en la elaboración y revisión de esta tesis. Finalmente al Mtro. Sergio Vargas Galindo y al Prof. Luis Muñoz Abogado por el apoyo brindado durante la realización de este trabajo.

J.N.R.

I N D I C E

	Página
CAP I EJEMPLOS	1
CAP II PRELIMINARES Y ALGUNOS RESULTADOS BASICOS	
2.1 Latices	4
2.2 Empaques y cubiertas	9
2.3 El Teorema de Minkowski	13
2.4 El valor mínimo de formas cuadrá ticas	16
2.5 Algunos resultados interesantes	
2.5.1 Círculos	17
2.5.2 Esferas	22
2.5.3 Más de círculos	26
2.5.4 Más de esferas	27
CAP III TEOREMAS FUERTES	
3.1 Adoquines del plano	29
3.2 Círculos en un círculo	38
3.3 Círculos en un polígono	40
CAP IV APLICACIONES	
4.1 Cubiertas	
4.1.1 Radar	52
4.1.2 Alumbrado	54
4.1.3 Boyas de sonar	54
4.2 Polimínos	55
4.3 Fraccionamientos	60
REFERENCIAS	72

CAPITULO I

EJEMPLOS

El objetivo de este capítulo es dar mediante una serie de ejemplos una idea de la diversidad de problemas y aplicaciones que, sobre empaques y cubiertas, se presentan en la vida real. No todos los problemas que mencionaremos en este capítulo serán resueltos en este trabajo ya que muchos de ellos se mantienen abiertos y en espera de solución.

1.1 *El problema del estacionamiento.* Dado un pedazo relativamente grande de terreno que va a ser usado como estacionamiento, ¿Cuál es la mejor forma de localizar los espacios para los autos de forma tal que se consiga el número máximo de espacios y que los autos puedan maniobrar y salir sin mover o tocar los otros autos? (2), (6), (10).

1.2 *El problema del fraccionamiento.* Dada una gran área de terreno y n casas rectangulares congruentes que estarán en ese terreno (cada una de lados a y b) ¿Cómo se deben acomodar las casas de forma que la distancia entre cualesquiera dos de ellas sea máxima? E inversamente, dada una distancia mínima deseada d entre las casas, ¿Cuál es el máximo número de casas que se pueden empacar en el área dada?(9).

1.3 *El problema del tablero de ajedrez.* ¿Cuántos reyes, reinas, alfiles, torres o caballos pueden ser puestos en un tablero de ajedrez sin que ningún par se atrape? Se considera también el problema en un tablero de $m \times m$ (24).

1.4 *El problema de la huerta.* ¿Cómo plantar n árboles en una huerta de forma que la distancia entre árboles vecinos sea la

mayor posible? (14), (21).

1.5 *El problema de las abejas.* En la construcción de sus panales las abejas deben usar la mínima cantidad de cera para construir sus celdas de volumen dado. Se sabe que lo hacen de la mejor manera. ¿Cómo lo hacen? (8).

1.6 *El problema de los cristales.* En estructuras cristalinas los iones de un compuesto son empacados dentro del cristal con cierto grado de eficiencia. El empaque de iones diferentes juntos puede ser visto como un empaque de esferas desiguales.

1.7 *El problema del empaque de naranjas.* Una compañía de cítricos que exporta sus frutas en cajas de madera por barco desea minimizar el número de cajas, de medida y forma uniforme, y maximizar el uso del limitado espacio en el barco. Las cajas satisfacen cierta restricción en sus dimensiones que normalmente dependen de su peso y volumen o de la amplitud del lugar por donde deben pasar. Nos preguntamos: ¿Cuál es la distribución óptima de las naranjas dentro de las cajas y cuál es la mejor medida de una caja?

1.8 *El problema del empaque de latas.* ¿Cuál es la forma más eficiente de empacar latas cilíndricas en cajas de medida dada? (19).

1.9 *El problema de la cabina telefónica.* ¿Cuál es el máximo número n de personas que pueden meterse, sin dañarse en una cabina telefónica? Esto se puede interpretar como un problema de empaque de óvalos dentro de un óvalo o círculo y ha sido resuelto para n menor que 11.

1.10 *El problema del depósito de combustible.* En la tierra se desean colocar n centros de abastecimiento de manera que la distancia de cualquier punto de la superficie al depósito más cercano sea la menor posible.

1.11 *El problema de una distribución de puntos.* Distribuir n puntos en una esfera de forma tal que la distancia menor entre ellos sea la máxima posible.

1.12 *El problema de la torre de Babel.* ¿Cuál es el máximo número de personas que con el mismo nivel de voz pueden todas hablar en una estancia al mismo tiempo de forma que ninguna persona pueda oír claramente a más de dos? Este problema está relacionado con un problema de iluminación que se resolverá en este trabajo.

1.13 *El problema del radar.* ¿Cómo situar estaciones de radar ó boyas de sonar de forma que el área de tierra sobre la cual las señales deben ser recogidas esté completamente cubierta?

1.14 *El problema de la localización de fábricas.* Dados n fabricantes, cada uno de los cuales suministra una mercancía a aquellos puntos de demanda (en un dominio poblado uniformemente) que están más cerca de él que de cualquier otro fabricante, ¿En donde deben localizarse las fábricas para minimizar el costo total de transporte? Aquí el costo total de transporte se considera una función creciente de la distancia. Se ha hecho la conjetura de que el mejor arreglo está dado por los vértices de una latiz de triángulos equiláteros (7).

CAPITULO II

PRELIMINARES Y ALGUNOS RESULTADOS BASICOS

En este capítulo definiremos algunos conceptos como el de latiz, empaque, cubierta, adoquinado, densidad y daremos algunos resultados referentes a dichos conceptos.

2.1 LATICES.

Una *latiz general* en el espacio n -dimensional real, es el conjunto de todos los puntos cuyas coordenadas están dadas por n formas lineales con coeficientes reales en n variables donde las variables pueden tomar sólo valores enteros.

Una latiz particularmente simple es la *latiz cuadrada* en el plano (fig 1) que se define como el conjunto de todos los puntos del plano cuyas coordenadas cartesianas son enteras. Siguiendo la definición de latiz general, es el conjunto de todos los puntos cuyas coordenadas están dadas por las dos formas lineales $x = n$ y $y = m$ con n y m enteros.

En esta latiz podemos formar con cuatro puntos figuras distintas a los cuadrados, por ejemplo, paralelogramos. Es fácil ver que la latiz cuadrada puede ser generada mediante traslaciones de cualquier paralelogramo que no tenga puntos de la latiz en su interior o en su frontera excepto sus vértices. Se probará que cualquiera de dichos paralelogramos tiene la misma área que el cuadrado generador (fig 1).

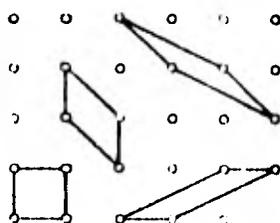


figura 1

Aún esta latiz tan simple ha dado lugar a importantes investigaciones matemáticas, la primera de ellas hecha por Gauss, el cual trató de determinar el número $f(r)$ de puntos de la latiz en el interior y en la frontera de un

círculo de radio r , donde el centro del círculo es un punto de la latiz y r es un entero. Gauss encontró empíricamente este número para varios valores de r . Por ejemplo:

$r = 10$	$f(r) = 317$
$r = 20$	$f(r) = 1257$
$r = 30$	$f(r) = 2821$
$r = 100$	$f(r) = 31417$
$r = 200$	$f(r) = 125629$
$r = 300$	$f(r) = 282697$

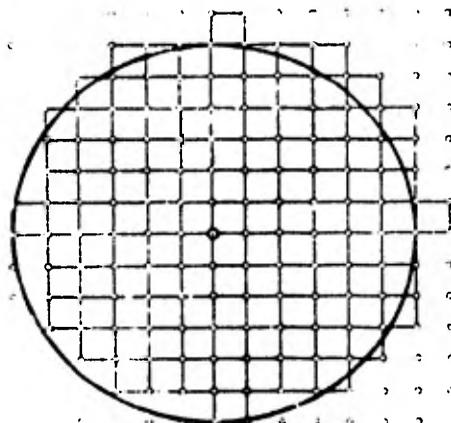


figura 2

Su interés fué motivado por el hecho de que esta función dá un método para aproximar el valor de π . Como cada cuadrado generador tiene área unitaria, $f(r)$ es igual al área de la región F cubierta por todos los cuadrados cuyas esquinas inferiores izquierdas están dentro ó en la frontera del círculo (fig 2). Entonces, la diferencia entre $f(r)$ y el área πr^2 del círculo es a lo más igual al área combinada $A(r)$ de aquellos cuadrados (los contados tanto como los omitidos) que son cortados por la frontera del círculo; es decir,

$$|f(r) - \pi r^2| \leq A(r), \delta$$

$$|f(r)/r^2 - \pi| \leq A(r)/r^2$$

Estimemos $A(r)$. La máxima distancia entre dos puntos cualesquiera de un cuadrado unitario es $\sqrt{2}$. Así, todos los cuadrados cortados por la frontera del círculo están contenidos en un anillo de ancho $2\sqrt{2}$ limitado por círculos de radios

$r + \sqrt{2}$ y $r - \sqrt{2}$. El área de este anillo es igual a

$$B(r) = ((r + \sqrt{2})^2 - (r - \sqrt{2})^2)\pi = 4\sqrt{2}\pi r.$$

Pero $A(r) < B(r)$ y por tanto

$$|f(r)/r^2 - \pi| < 4\sqrt{2}\pi/r.$$

De aquí, el paso al límite nos da la fórmula

$$(2.1) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} f(r)/r^2 = \pi$$

Insertando en esta ecuación los valores encontrados por Gauss de la función $f(r)$ obtenemos las siguientes aproximaciones al valor de π :

		error posible
$r = 10$	$f(r)/r^2 = 3.17$	1.777
$r = 20$	$f(r)/r^2 = 3.14125$.888
$r = 30$	$f(r)/r^2 = 3.134$.5923
$r = 100$	$f(r)/r^2 = 3.1417$.1777
$r = 200$	$f(r)/r^2 = 3.140725$.0888
$r = 300$	$f(r)/r^2 = 3.14107.$.0592383

Probaremos ahora ayudados de la ecuación (2.1) la afirmación antes hecha de que *el área de cualquier paralelogramo que genera la latiz cuadrada es igual a uno.*

Para esto, consideremos cada punto de la latiz de la región circular como vértice de un paralelogramo generador y comparemos la región F cubierta por los paralelogramos con el círculo. Aquí otra vez, la diferencia de las áreas es menor que el área $B(r)$ de un anillo circular de radios $r + c$ y $r - c$

donde c es la máxima distancia entre dos puntos del paralelogramo generador (y es independiente de r). Si el área del paralelogramo generador es a , entonces el área de F es $af(r)$ y obtenemos la fórmula

$$|af(r) - \pi r^2| < B(r) = 4rc\pi$$

i.e.,

$$|af(r)/r^2 - \pi| < 4c\pi/r$$

de donde $\lim_{r \rightarrow \infty} f(r)/r^2 = \pi/a$ y por (2.1) $a = 1$.

Estudiaremos ahora las *latices unitarias generales*, i.e., latices que pueden ser construidas con un paralelogramo arbitrario de área unitaria en la misma forma que la latiz cuadrada fué construída con el cuadrado unitario. Una vez más, diferentes paralelogramos pueden ser usados para generar la misma latiz, pero otra vez, deben tener área unitaria, lo que se prueba de la misma forma en que se probó el caso de la latiz cuadrada.

Para cualquier latiz unitaria la mínima distancia c entre dos puntos de la latiz es una cantidad característica. Existen latices unitarias para las cuales c es arbitrariamente pequeña, por ejemplo, las latices generadas por un rectángulo de lados c y $1/c$. Por otro lado, es obvio que c no puede ser arbitrariamente grande pues la latiz no sería unitaria. Entonces c debe tener una cota superior. Determinaremos esa cota.

En cualquier latiz unitaria dada escojamos cualquier par de puntos de la latiz que tengan entre sí la distancia mínima c . En la línea recta g que pasa por esos dos puntos debe haber un número infinito de puntos de la latiz espaciados a intervalos de longitud c . La línea recta h que es paralela a g a una distancia $1/c$ de ella, debe también contener un

número infinito de puntos de la latiz, pero la banda entre g y h no puede contener ninguno (fig 3).

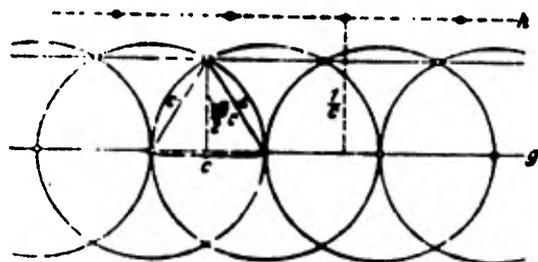


figura 3

Dibujamos ahora círculos de radio c alrededor de todos los puntos de la latiz que están en g . La totalidad de círculos cubren una banda del plano acotada por arcos circulares. Cada punto interior de esta banda está a una distancia menor que c de al menos un punto de la latiz y por lo tanto, de la definición de c , vemos que ellos no son puntos de la latiz. Así, $1/c$ es mayor o igual a la distancia entre la frontera de la banda y g . Evidentemente esta distancia es la altura de un triángulo equilátero de lado c . Por tanto tenemos

$$1/c > c\sqrt{3}/2 \quad \text{o} \quad c < \sqrt{2/\sqrt{3}}.$$

El número $\sqrt{2/\sqrt{3}}$ es la cota superior deseada para c . Más aún, hay una latiz en la cual c alcanza su máximo valor. Es el caso de una latiz generada por un paralelogramo compuesto por dos triángulos equiláteros (rombo). A esta latiz la llamamos la *latiz del mínimo paralelogramo generador*.

Por expansión o contracción cualquier latiz puede ser obtenida de una latiz unitaria. Así, si a^2 es el área del paralelogramo generador y c es la mínima distancia entre dos puntos de la latiz entonces

$$c < a\sqrt{2/\sqrt{3}}.$$

2.2 EMPAQUES Y CUBIERTAS.

Continuaremos ahora definiendo algunos términos tales como empaque cubierta y sus densidades.

Una colección de conjuntos $\{S_i\}$ $i = 1, 2, \dots$ se dice que forman un empaque en un conjunto S si

- i) Sus interiores son ajenos dos a dos y
- ii) $\bigcup_i S_i \subset S$.

Se dice que una colección $\{S_i\}$ $i = 1, 2, \dots$ de conjuntos forman una cubierta para un conjunto S si $\bigcup_i S_i \supset S$.

Estas definiciones serán usadas en el contexto de espacios euclidianos.

Por un adoquinado de un espacio euclidiano entendemos una partición de él por medio de polítopos congruentes cuyos interiores son ajenos dos a dos.

Los posibles patrones para un adoquinado del plano no son conocidos pero si los adoquines son polígonos convexos el problema está casi resuelto (18), (22). Para mayores dimensiones el problema se vuelve aún más difícil.

Definimos también un cuerpo convexo en el espacio n -dimensional real como un conjunto de puntos convexo y acotado con interior no vacío. Restringir nuestra atención a cuerpos convexos es conveniente y excluye dificultades asociadas con conjuntos arbitrarios de puntos.

Para cualquier punto x del espacio y K un subconjunto, el conjunto $K+x$ es el conjunto obtenido de trasladar K por medio del vector x . Decimos que los conjuntos $K+x_1, K+x_2, \dots, K+x_N$ están empacados si ningún par de ellos tiene un punto interior común. Una cubierta de un conjunto por un cuerpo convexo K se obtiene al pedir que cada punto del conjunto pertenezca al menos a uno de los N cuerpos $K+x_1, K+x_2, \dots, K+x_N$.

Definiremos ahora la densidad del empaque más denso

$\delta(K)$ para un cuerpo convexo K como sigue:

Consideremos el n -cubo abierto unitario $C: 0 < x_i < 1$
 $i=1, 2, \dots, n$ y el cubo expandido $\lambda C: 0 < x_i < \lambda$ $i=1, 2, \dots, n$.
 Sea $N=N(\lambda)$ el número de puntos x_1, x_2, \dots, x_N tales que
 $K+x_j$ ($j=1, 2, \dots, N$) forman un empaque en λC con N maximal. En-
 tonces, si el límite

$$\delta(K) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} N(\lambda) V(K) / \lambda^n$$

existe, le llamamos la *densidad* del empaque más denso de K
 en el espacio. En este límite $V(K)$ representa el volumen de K .

Veamos que dicho límite siempre existe. Consideremos
 la función

$$F(\lambda) = N(\lambda) / \lambda^n.$$

Probaremos algunos resultados previos respecto de F
 antes de probar la existencia del límite.

Si r es un real positivo

$$\begin{aligned} F(\lambda+r) &= N(\lambda+r) / (\lambda+r)^n \geq N(\lambda) / (\lambda+r)^n \\ &= (N(\lambda) / \lambda^n) (\lambda / (\lambda+r))^n = F(\lambda) (\lambda / (\lambda+r))^n. \end{aligned}$$

Si m es un número natural

$$\begin{aligned} F(m\lambda) &= N(m\lambda) / (m\lambda)^n \geq m^n N(\lambda) / (m\lambda)^n \\ &= N(\lambda) / \lambda^n = F(\lambda). \end{aligned}$$

Además, $F(\lambda)$ está acotada por $1/V(K)$.

Probaremos pues, que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} N(\lambda) / \lambda^n \text{ existe.}$$

Sea $s = \sup F(\lambda)$. Dado $\epsilon > 0$ elegimos λ_1 tal que

$$F(\lambda_1) \geq s - \epsilon/2.$$

Sea M un natural tal que si $m \geq M \geq 1$ entonces

$$(m/(m+1))^n \geq (s - \epsilon)/(s - \epsilon/2).$$

Sea $\lambda > M\lambda_1$. Queremos probar que $s - F(\lambda) \leq \epsilon$.

$$\lambda = m\lambda_1 + k, \quad m \geq M, \quad 0 \leq k < \lambda_1.$$

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= F(m\lambda_1 + k) \geq F(m\lambda_1) (m\lambda_1 / (m\lambda_1 + k))^n \\ &\geq F(m\lambda_1) (m\lambda_1 / (m+1)\lambda_1)^n \geq F(\lambda_1) (s - \epsilon) / (s - \epsilon/2) \\ &\geq s - \epsilon, \text{ de donde} \end{aligned}$$

$s - F(\lambda) \leq \epsilon$ y s es el límite de $F(\lambda)$. †

Si en la definición de la densidad del empaque más denso, los vectores de traslación forman una latiz L , obtenemos $\delta_L(K)$, la densidad del empaque más denso en una latiz para K . Obviamente

$$0 \leq \delta_L(K) \leq \delta(K) \leq 1.$$

Saaty (23) menciona que es posible probar que la densidad de un cuerpo K en el espacio no depende de haber tomado el límite en un cubo, sino que es la misma tomando cualquier cuerpo convexo; sin embargo esta demostración no es trivial.

La densidad de la cubierta más fina es denotada por $\theta(K)$ y se define de la manera siguiente: si los N cuerpos cubren λC y si $N = N(\lambda)$ es minimal entonces

$$\theta(K) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} N(\lambda)V(K)/\lambda^n$$

Aquí, $\theta(K) \geq 1$. La existencia de este límite se demuestra de manera análoga y como antes, si los vectores de traslación forman una latiz L , la densidad de la cubierta más fina en una latiz se denota por $\theta_L(K)$ y tenemos

$$1 \leq \theta(K) \leq \theta_L(K).$$

La idea del empaque más denso es importante y la ilustraremos con algunos ejemplos.

Calcularemos la densidad del empaque de círculos unitarios en el plano teniendo como centros a los puntos de la latiz dada por $x = 2m + 1$, $y = 2n + 1$ que llamaremos L_1 (fig 4a).

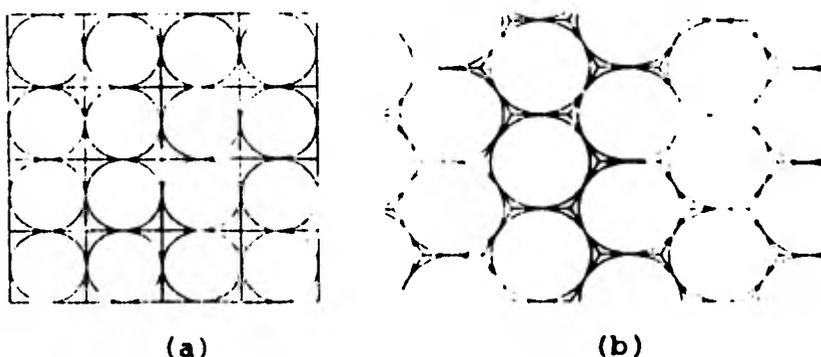


figura 4

Si tomamos un cuadrado de lado λ con lados paralelos a los ejes coordenados tendremos a lo más $\lambda/2$ círculos tangentes al lado del cuadrado y $\lambda/2$ filas de círculos. Así, $N(\lambda) \leq (\lambda/2)(\lambda/2) = \lambda^2/4$, alcanzándose la igualdad siempre que λ sea un número entero.

$$\text{Por tanto, } \delta_{L_1}(K) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\lambda^2/4)\pi/\lambda^2 = \pi/4 = .785$$

De aquí, $.785 \leq \delta(K) \leq 1$ siendo K un círculo unitario.

Un segundo ejemplo es el de los círculos unitarios empaçados de forma que cada círculo es tangente a otros seis y que tienen sus centros en la latiz hexagonal dada por

$$x = 2m + n, \quad y = \sqrt{3}n.$$

Estos círculos están empaçados de forma que una fila toca un lado del cuadrado de lado λ (fig 4b).

El máximo número de círculos en cualquier fila es $\lambda/2$. La distancia entre cada fila es $h = \sqrt{3}$ y por tanto el máximo número de filas es aproximadamente $\lambda/\sqrt{3}$.

Así,

$$N(\lambda) \leq (\lambda/2)(\lambda/\sqrt{3})$$

cota que es alcanzada al hacer λ grande. Así,

$$\delta_{L_2} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\lambda/2)(\lambda/\sqrt{3})\pi/\lambda^2 = \pi/2\sqrt{3} = .9069$$

Es interesante notar que estas densidades, δ_{L_1} , δ_{L_2} coinciden con las razones del área del círculo al área del cuadrado y del hexágono circunscrito respectivamente.

Así,

$$\delta_{L_1} = \pi r^2 / (2r)^2 = \pi/4 = .785 \quad \text{y}$$

$$\delta_{L_2} = \pi r^2 / 2\sqrt{3}r^2 = \pi/2\sqrt{3} = .9069.$$

2.3 EL TEOREMA DE MINKOWSKI.

Minkowski probó un teorema en latices que ha resuelto muchos problemas en teoría de números que no pueden ser tratados por otros métodos. No enunciaremos el teorema en su forma más general y veremos un caso especial que aunque particu-

laramente simple de enunciar contiene todo lo que es esencial para el método.

Si un cuadrado de lado 2 es sobrepuesto sobre una latiz unitaria dada en el plano de forma que el centro del cuadrado coincida con un punto de la latiz entonces habrá otro punto de la latiz dentro del cuadrado o en su frontera.

En la siguiente demostración, intersección de dos cuadrados significará intersección de sus interiores.

Para probar el teorema, consideremos una región suficientemente grande definida en el plano de la latiz, por ejemplo el interior y la circunferencia de un círculo C de radio r con centro en un punto de la latiz (fig 5). Para cada punto de la latiz en esta región construimos un cuadrado de lado s con centro en el punto de la latiz. Exigimos que ninguno de estos cuadrados se interseque no importando que tan grande sea el valor de r elegido y estimamos la longitud de los lados s sujetos a esta condición. Existen en nuestra nota

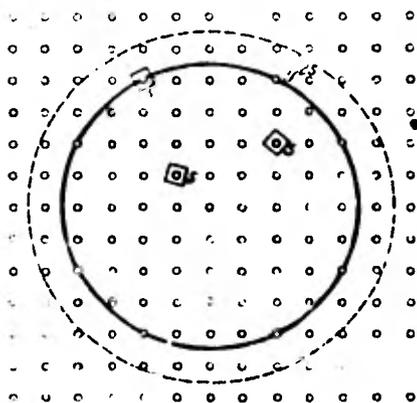


figura 5

ción previa $f(r)$ puntos de la latiz en la región; el área total de los cuadrados que no se enciman es por tanto $s^2 f(r)$.

Por otro lado, todos los cuadrados están ciertamente contenidos en el interior de un círculo concéntrico a C pero de radio $r + 2s$. Así, tenemos la siguiente desigualdad

$$s^2 f(r) \leq \pi (r + 2s)^2 \quad 6$$

$$s^2 \leq (\pi r^2 / f(r)) (1 + 2s/r)^2$$

Si s se mantiene fijo mientras r crece más allá de toda cota vemos que el lado derecho de nuestra desigualdad tiende a 1. De aquí $s \leq 1$.

Como sólo hay dos posibilidades, o los cuadrados se intersecan, o no, se sigue que debe haber intersección para cada ϵ positivo no importa que tan pequeño si empezamos con cuadrados de lado $1 + \epsilon$. No hacemos suposiciones respecto de las posiciones de los cuadrados con respecto a los otros y podemos rotarlos alrededor de sus centros. Podemos pensar que todos los cuadrados son paralelos. Si ahora tomamos dos cuadrados que se intersecan a y b con centros en A y B, entonces el punto medio M del segmento AB debe también estar situado en el interior de ambos cuadrados (fig 6).

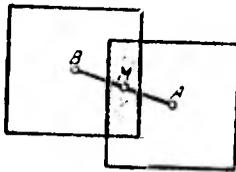


figura 6

Por brevedad usaremos el término punto bisectante de la latiz para todos aquellos puntos que, como M, bisectan un segmento que une dos puntos de la latiz.

Todo cuadrado de lado $1 + \epsilon$ cuyo centro es un punto de la latiz con tiene un punto bisectante en su interior. Si dibujamos cuadrados de la misma orientación y tamaño que a con centros en

todos los otros puntos de la latiz debe haber alguno que se interseque con a y como todos los cuadrados son equivalentes en esta figura, a debe contener una parte cubierta por otro cua-

drado b y debe por tanto contener un punto bisectante como el punto M de la figura 6.

Completaremos la prueba del teorema con una demostración indirecta. Si un cuadrado de lado 2 con centro en A , un punto de la latiz pudiera ser puesto de forma que no hubiera más puntos de la latiz dentro o en su frontera, este podría ser ligeramente agrandado a un cuadrado concéntrico paralelo a' de lado $2(1 + \epsilon)$ que no contuviera en su interior ningún punto de la latiz distinto de A . Por otro lado, podemos disminuir este cuadrado a un cuadrado paralelo concéntrico a , de lado la mitad del lado de a' el cual tiene un punto de la latiz como centro. Como es de lado $1 + \epsilon$ debe contener un punto bisectante por lo que hemos probado (fig 7).

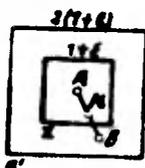


figura 7

Aquí, hemos llegado a una contradicción: si AM se prolonga hasta B con $AM = BM$, B debe ser un punto de la latiz y por las posiciones relativas de a y a' se sigue que este punto

de la latiz está dentro de a' .

2.4 EL VALOR MINIMO DE FORMAS CUADRATICAS.

Una aplicación de la teoría de latices se encuentra en el cálculo de extremos para las funciones cuadráticas.

Sea $f(m,n) = am^2 + 2bmn + cn^2$ una forma cuadrática con coeficientes reales a , b y c , con determinante $D = ac - b^2 = 1$ y $a > 0$. Esta es una forma positiva definida, i.e., positiva para todos los números m , n excepto $m = n = 0$. Probaremos lo siguiente: Existen dos enteros m y n no ambos cero, tales que $f(m,n) \leq 2/\sqrt{3}$.

Este hecho será una consecuencia de nuestra discusión acerca de la mínima distancia entre dos puntos de una la

tiz unitaria.

Completando cuadrados y usando el hecho de que $D=1$ tenemos

$$f(m,n) = (\sqrt{a}m + b/\sqrt{a})^2 + (\sqrt{1/a} n)^2$$

Ahora, consideremos los puntos con coordenadas

$$x = \sqrt{a}m + (b/\sqrt{a})n; \quad y = (1/\sqrt{a})n.$$

en un sistema de coordenadas cartesianas donde m y n sólo pueden ser enteros. Estos puntos forman una latiz unitaria pues son obtenidos de la latiz unitaria $x = m$, $y = n$ mediante la transformación afín

$$x = \sqrt{a}\xi + (b/\sqrt{a})\eta; \quad y = \sqrt{1/a}\eta$$

cuyo determinante es 1.

Ahora, $f(m,n) = x^2 + y^2$ y por tanto $\sqrt{f(m,n)}$ representa la distancia desde el origen a los puntos de la latiz obtenidos cuando m y n toman valores enteros. De acuerdo al resultado mencionado anteriormente, existe un punto P de la latiz para el cual su distancia no excede $\sqrt{2/\sqrt{3}}$. Para el par de enteros m y n que son las coordenadas de P debemos tener $f(m,n) \leq 2/\sqrt{3}$ como queríamos probar.†

2.5 ALGUNOS RESULTADOS INTERESANTES.

2.5.1 *Cálculos.* Cables de grosor pequeño son frecuentemente empacados dentro de un cable más grande que los contiene; las tas son empacadas en cajas y objetos cilíndricos regulares son empacados dentro de un "recipiente" de corte seccional constante. Estos problemas pueden ser vistos como problemas de empaque bidimensional. Para estudiar estos problemas empezaremos introduciendo algunos conceptos de adoquinados regulares.

Kepler (1571-1630) fué el primero que investigó las maneras posibles de adoquinar el plano con polígonos regulares e iguales. Usaremos el símbolo de Schafli $\{p,q\}$ para describir el adoquinado de p -ágonos regulares donde q de ellos rodean a cada vértice.

Los casos $\{6,3\}$, $\{4,4\}$ y $\{3,6\}$ se muestran en la figura 8 donde en cada caso el polígono con líneas más gruesas es el q -ágonos cuyos vértices son los puntos medios de las q aristas que concurren en un vértice.

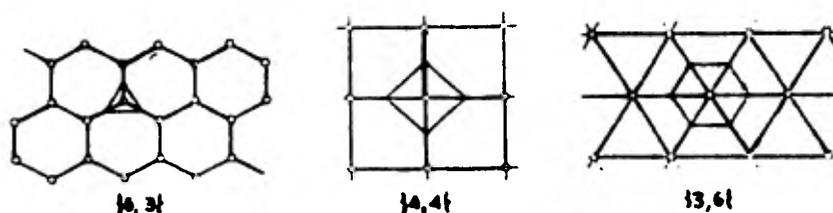


figura 8

El adoquinado $\{6,3\}$ se ve con frecuencia en los pisos de cocinas, baños, etc. y también en cualquier panel. $\{4,4\}$ nos es familiar en las hojas de papel cuadrado; es precisamente el generado por una latiz cuadrada. $\{3,6\}$ es el adoquinado dual de $\{6,3\}$ en el sentido siguiente: el dual de $\{p,q\}$ es aquel cuyas aristas son las mediatrices de las aristas de $\{p,q\}$. El dual de $\{4,4\}$ es el mismo.

Es fácil ver para que valores de p y q es posible adoquinar el plano mediante adoquines regulares. Igualando el ángulo de un p -ágonos, a saber $(1 - 2/p)\pi$ con el valor que ha de tener cuando hay q de estos polígonos que concurren en un vértice:

$$(1 - 2/p)\pi = 2\pi/q \quad \text{si y sólo si} \quad (p - 2)(q - 2) = 4.$$

De las tres posibles maneras de factorizar 4 obtenemos los adoquinados que ya hemos descrito.

Volvamos sobre los empaques de círculos en el plano. Las primeras dos configuraciones que se ocurren son aquellas en que inscribimos círculos en el adoquinado $\{4,4\}$ y en el adoquinado $\{6,3\}$ que ya hemos descrito. En el primer caso obtuvimos que la densidad es .785 mientras que en el segundo la densidad es de .9069 que dá un empaque mucho más denso (fig 9). Dada una latiz plana arbitraria, un empaque regular de círculos puede ser obtenido dibujando un círculo con centro en cada punto de la latiz y radio igual a la mitad de la mínima distancia entre dos puntos de la latiz. Claramente estos círculos no se intersecan.

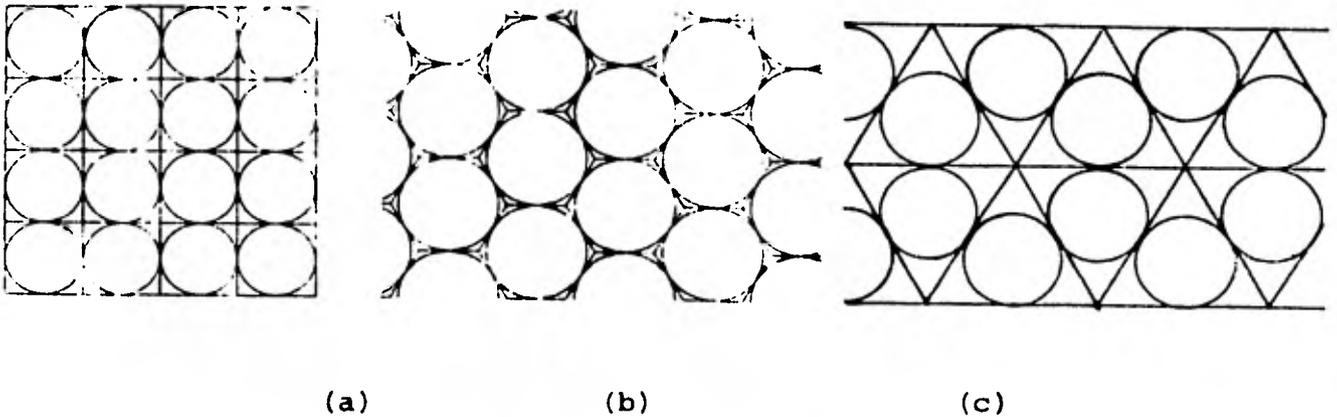


figura 9

En el caso de los adoquinados $\{4,4\}$ y $\{6,3\}$ la densidad ha coincidido con el cociente del área del círculo al área del polígono que lo circunscribe. Veremos que lo mismo sucede en el adoquinado $\{3,6\}$.

El máximo número de círculos de cada fila en un cuadrado de lado λ es aproximadamente $\lambda/\sqrt{3}$ y en una columna es $\lambda/3$ que resulta de dividir λ entre la altura de un triángulo

equilátero que circunscribe a un círculo de radio 1.

Así,

$$N(\lambda) \leq (\lambda/\sqrt{3})(\lambda/3)$$

Si llamamos L_3 a la latiz de los centros de estos círculos tendremos que

$$\delta_{L_3} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\lambda/\sqrt{3})(\lambda/3)\pi/\lambda^2 = \pi/3\sqrt{3} = .6046$$

que es muy pequeña.

Hemos visto así que la densidad de estos empaques coincide con el cociente del área del círculo entre el área del polígono que lo contiene.

Si se tiene un p -ágono de lado 2λ , su inradio es $r = \lambda \cot(\pi/p)$ y su área $p\lambda r$. La densidad por tanto será

$$\pi r^2 / p\lambda r = (\pi/p) / \tan(\pi/p)$$

Aquí tenemos una función creciente de p que tiende a 1 cuando p tiende a infinito. Pero, puesto que el p -ágono es una de las caras de un adoquinado los únicos valores de p que tienen relevancia son 3, 4 y 6. El "mejor" valor de p es portanto, 6, y los empaques regulares que más se ajustan a los círculos que contienen consisten en los círculos inscritos de las caras de $\{6,3\}$, donde la densidad es

$$(\pi/6) \cot(\pi/6) = \pi/2\sqrt{3} = .9069, \text{ como habíamos visto.}$$

Veremos ahora algunos resultados referentes a cubiertas del plano por medio de círculos unitarios con centros en una latiz (fig 10).

Para la cubierta de círculos unitarios circunscritos a las caras del adoquinado $\{4,4\}$ tenemos que los lados de cada cuadrado medirán $\sqrt{2}$ y así $N(\lambda)$ es aproximadamente $\lambda^2/2$.

de donde $\theta_1(K) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\lambda^2/2)\pi/\lambda^2 = \pi/2 = 1.5707\dots$

En el caso de los círculos unitarios circunscritos a las caras del adoquín {6,3} tenemos que en un cuadrado de lado λ habrá aproximadamente $\lambda/(3/2)$ filas de círculos teniendo $\lambda/\sqrt{3}$ círculos cada fila, de donde $N(\lambda)$ es aproximadamente $2\lambda^2/3\sqrt{3}$ y así

$$\theta_2(K) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (2\lambda^2/3\sqrt{3})\pi/\lambda^2 = 2\pi/3\sqrt{3} = 1.209\dots$$

Para el adoquinado {3,6} de triángulos inscritos en círculos unitarios $N(\lambda)$ será aproximadamente $\lambda/(3/2)(2\lambda/\sqrt{3})$ y

$$\theta_3(K) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (4\lambda^2/3\sqrt{3})\pi/\lambda^2 = 4\pi/3\sqrt{3} = 2.418$$

Podemos observar, que así como en el caso de empaques, el de el adoquinado {6,3} es el más denso, aquí tenemos que en cubiertas, la del adoquinado {6,3} es la más fina. En el {3,6} que es el del empaque menos denso de círculos en un adoquinado, tenemos que también es el de la cubierta menos fina.

Vemos también, que estas densidades coinciden con los cocientes formados por el área del círculo entre el área de la cara del adoquín. Recuérdese que en empaques el cociente era el inverso, y así

$$\theta_1(K) = \pi/\sqrt{2}/2 = 1.5707$$

$$\theta_2(K) = \pi/3/3/2 = 1.209$$

$$\theta_3(K) = \pi/3/3/4 = 2.418$$

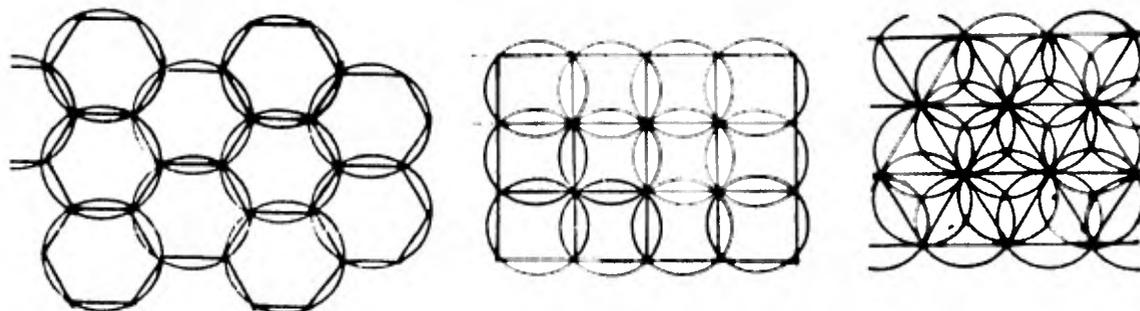


figura 10

Veremos ahora un tipo especial de arreglo cuya densidad puede reducirse a la densidad de un empaque. Un conjunto de discos abiertos forman un *arreglo Minkowskiano* si ninguno de los discos contiene el centro de otro. Preguntamos: ¿Cuál es el arreglo minkowskiano más denso? Para círculos congruentes de radio r en el plano, esto es equivalente al problema del empaque más denso del plano por círculos iguales. Para ver esto, reemplazamos cada círculo del arreglo por un círculo concéntrico de radio $r/2$, obteniendo así un empaque de círculos cuya densidad es menor o igual a $\pi/\sqrt{12}$ y es $1/4$ de la densidad del conjunto original, i.e., la densidad del conjunto original es menor o igual a $2\pi/\sqrt{3} = 3.627\dots$

Para otro tipo de arreglos minkowskianos el problema está aún muy poco estudiado.

Estudiaremos ahora algunos resultados referentes a los empaques de esferas en el espacio.

2.5.2 *Esferas*. Por analogía con el uso de paralelogramos para construir latices planas podemos usar paralelepípedos de diferentes formas para construir latices espaciales, pero ellos deben tener todos el mismo volumen. También por analogía al plano definimos la densidad como el cociente del volumen de la esfera entre el volumen del poliedro en el que se ha inscrito.

En el caso de la colmena de cubos de aristas 2λ (tablero tridimensional de ajedrez) la densidad será

$$(4/3)\pi\lambda^3/(2\lambda)^3 = .5236\dots$$

que no es muy eficiente.

Se puede obtener una densidad mayor al usar las esferas medias de celdas alternas, como veremos más adelante. Por la *esfera media* de un cubo entendemos aquella que es tangente al cubo en los puntos medios de sus aristas.

Imaginemos que las celdas de la colmena cúbica se

han pintado alternadamente de blanco y negro, como si fuera un tablero tridimensional de ajedrez, de manera que podamos dividir cada cubo blanco en seis pirámides cuadradas (por medio de planos que unan los pares de aristas opuestos) para añadir en seguida cada pirámide al cubo negro que está a su lado. Cada cubo negro queda cubierto por seis pirámides blancas, una en cada cara, de manera que forman un dodecaedro rómbico (fig 11) en el que las doce caras rómbicas tienen las doce aristas del cubo negro por diagonales menores. Así, tenemos que la esfera inscrita del dodecaedro rómbico viene a ser la esfera media

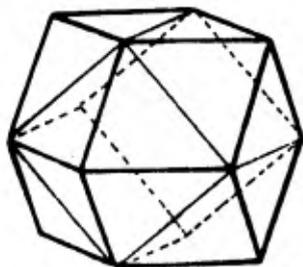


figura 11

del cubo, cuyo radio es $\sqrt{2}\lambda$ y el volumen del dodecaedro rómbico será el doble de el del cubo, a saber $2(2\lambda^3) = 16\lambda^3$. En la colmena de estas celdas mayores, cada esfera inscrita es la esfera media de un cubo negro, y estas esferas se tocan en los centros de las caras rómbicas, es decir, en los puntos medios de las aristas de la colmena del cubo original.

Por lo tanto, cada esfera es tangente a otras doce, y los puntos de contacto son los puntos medios de las doce aristas de un cubo. La densidad de este empaque cúbico repleto es evidentemente

$$(4/3)\pi(\sqrt{2}\lambda)^3 / (16\lambda^3) = \pi/3\sqrt{2} = .74048\dots$$

Otra forma alternativa de empaque es el hexagonal. Aquí se ponen juntas un grupo de esferas en un plano de acuerdo al empaque hexagonal de círculos, i.e., cada esfera tocará a otras seis en el mismo plano. Luego, tres esferas se pondrán sobre los "boquetes" sombreados como se ve en la figura 12.

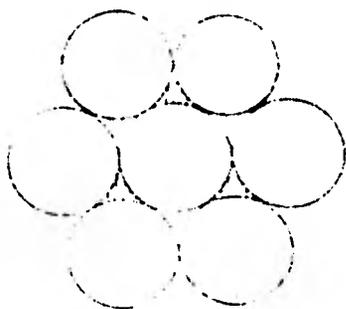


figura 12

Esto es repetido sobre todo el plano hasta que se ha creado otro empaque hexagonal. Aquí, cada esfera tocará a otras doce, pero en diferente configuración. La tercera capa es puesta verticalmente sobre la primera. La densidad de este empaque es la misma que la del empaque cúbico.

El problema de encontrar la distribución más densa de esferas unitarias que no se encimen aún no se ha resuelto. En general, la densidad asociada con una sola esfera en un empaque de esferas en el espacio n -dimensional es el cociente de su volumen al volumen interior del poliedro T compuesto de aquellos puntos que están más cerca del centro P de la esfera que de cualquier otro centro. Este poliedro es conocido como un *poliedro de Voronoi* o una *región de Dirichlet*. Tales regiones, cada una circunscribiendo a una esfera pueden llenar todo el espacio. La densidad es entonces tomada como el límite del promedio de las densidades asociadas con aquellas esferas que están dentro de un cubo W cuando el volumen de W tiende a infinito.

Los experimentos que han contribuido a la investigación en este sentido comenzaron cuando en 1727, Hales notó que comprimiendo chicharos con fuerzas superiores a las 1600 libras, éstos tomaban formas regulares; él los describió como dodecaedros regulares. En 1939 Marvin y Matske, dos botánicos, repitieron el experimento de Hales. Sustituyeron sus chicharos por perdigones de plomo "escogidos con mucho cuidado bajo el microscopio para tener uniformidad de formas y tamaños" y los colocaron en un cilindro de acero, donde se les comprimió por medio de un émbolo de acero, con una presión suficien

te (40,000 libras), con el objeto de eliminar todos los intersticios. Cuando los perdigones se colocaron en pilas semejantes a las de las balas de cañón, se convirtieron en dodecaedros rómbicos casi perfectos. Pero "si los perdigones eran puestos en el cilindro de cualquier manera, cosa que seguramente hizo Hales al poner sus chicharos en el recipiente de acero se formaban cuerpos irregulares de 14 caras".

Matzke realizó también un examen microscópico de la espuma de 1900 burbujas medidas. "En 600 de las burbujas centrales que se examinaron el nuevo promedio de contactos fué de 13.7". La forma más frecuente nuevamente tenía trece caras un cuadrángulo, diez pentágonos y dos hexágonos.

En 1959 el profesor Bernal confirmó la predominancia de las caras pentagonales en un experimento notablemente sencillo en el que pelotas iguales de plastilina, enrolladas en polvo de tiza, se empaquetaron irregularmente y se presionaron para formar un bloque sólido. Los poliedros que resultaron tenían en promedio 13.3 caras.

"Cuando el pie se apoya en la arena después de que la marea descendente la ha dejado firme, el sector en los alrededores inmediatos al pie queda momentaneamente seco... La presión del pie ha causado una dilatación de la arena de manera que se extrae más agua por los intersticios de la arena de los alrededores..., por lo que queda seca hasta que se obtiene de las regiones inferiores un suministro suficiente, y entonces vuelve a humedecerse. Al levantar el pie, por lo general observamos que la arena que estaba debajo y la de los alrededores se humedece por un lapso breve de tiempo. Esto se debe a que la arena se contrae cuando se retiran las fuerzas que la distorsionaban, y el exceso de agua escapa a la superficie".

Osborne Reynolds (1842-1913)

Sea cual fuere el paquete fortuito más repleto, el experimento de Osborne Reynolds en la playa nos señala que cualquier pequeña alteración incrementa el tamaño de los intersticios. Mediante este principio se puede explicar el truco del fakir hindú que narra Martin Gardner. Un frasco cilíndrico, de boca bastante estrecha, se llena de arroz crudo, dándole pequeñas sacudidas, de manera que quede bastante repleto. Se mete en el frasco un cuchillo de mesa varias veces, cada vez a mayor profundidad. Después de una docena de movimientos, el cuchillo se ceñirá de manera que, al levantarlo por el mango, sostendrá el frasco de arroz.

2.5.3 Más de círculos. Ahora consideraremos brevemente el problema del empaque más eficiente de círculos de radio r en un círculo mayor de radio R . Se tienen fundamentalmente dos preguntas:

- i) Dados R y r , qué tan grande puede ser el número n de círculos empacados y
- ii) Dados r y n , qué tan grande debe ser R para tener un número requerido de círculos.

No hay resultados teóricos a este problema. Unos pocos casos han sido considerados, pero en general, el problema es atacado en una forma que es esencialmente empírica. Si R/r es dado, una aproximación posible es crear un anillo de círculos tangentes entre ellos y al círculo grande. (Puede ser posible que no se complete el anillo). Después colocar otro anillo dentro y continuar este proceso hasta que no se puedan empacar más círculos. (fig 13).

Si por otra parte, n y r son dados, podemos construir un encaje de círculos en un patrón circular manteniendo tanta simetría como sea posible para hacer R lo menor

posible. Ninguno de estos métodos es satisfactorio pero no existe un procedimiento general a seguir. (19).

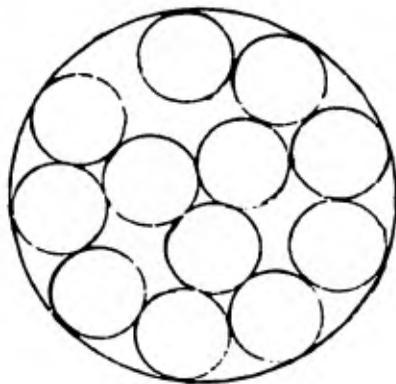


figura 13

2.5.4. Más de esferas (empaques mixtos). Una variación del problema del empaque de esferas sería el empaque de esferas desiguales en una región. Una forma simple de este problema es: ¿Cuál es el empaque más denso de esferas de dos diferentes radios R_1 y R_2 si deseamos empaquetar aproximadamente igual número de cada una en una región dada?

Sin perder generalidad podemos hacer $R_1 = 1$ y suponer que $R_2 < R_1$. Nuestra primera idea sería empaquetar las esferas unitarias en el empaque cúbico cerrado y tratar de introducir las menores dentro de los intersticios dejados entre las unitarias. Los centros de los intersticios están a una distancia de $\sqrt{2}$ de los centros de las esferas unitarias más cercanas.

Entonces, si

$R_2 + 1 \leq \sqrt{2}$ las esferas menores pueden empaquetarse

dentro de los espacios vacíos. La densidad de este empaque sería:

$$\begin{aligned} \delta &= ((4/3)\pi(\sqrt{2})^3 + (4/3)\pi R_2^3) / 2(2)^3 \\ &= (\pi/12)(2\sqrt{2} + R_2^3) \end{aligned}$$

Si $R_2 = \sqrt{2} - 1$ la densidad sería $7\pi/12(\sqrt{2} - 1) = .76\dots$

Si $R_2 > \sqrt{2} - 1$ esta configuración no es posible.

Si $R_2 \leq 1$ podemos usar la latiz para esferas unitarias pero reemplazando alternadamente esferas unitarias por esferas de radio R_2 .

Este tipo de empaque mixto se aprecia en la molécula de sal común donde los iones de sodio y cloro pueden ser vistos como esferas de diferentes tamaños que son empaçadas juntas (fig 14).

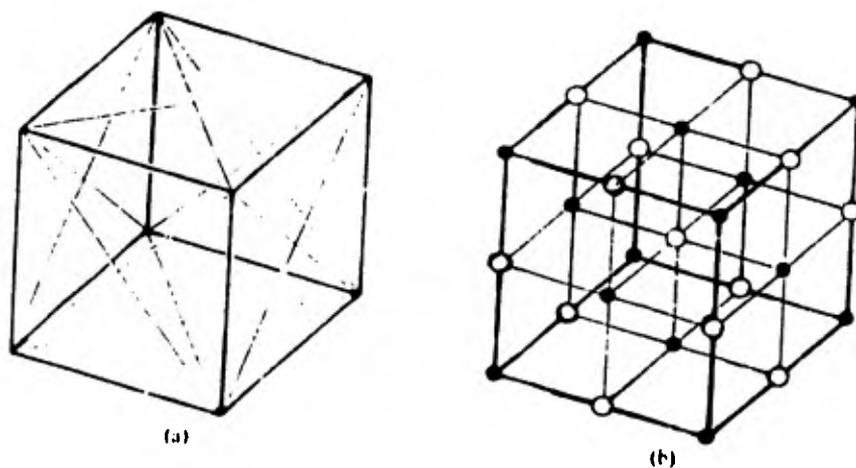


figura 14

CAPITULO III

TEOREMAS FUERTES

En este capítulo probaremos algunos resultados de optimización referentes a empaques de círculos en un círculo más grande y en un polígono convexo. También probaremos un resultado muy reciente en el tema de adoquinados del plano. Los teoremas que probaremos, además de tener importancia por ellos mismos, nos dan una idea de los métodos y técnicas utilizados en las demostraciones de resultados en este campo.

3.1 POLIGONOS QUE NO PUEDEN ADOQUINAR EL PLANO.

En el capítulo II hemos definido un adoquinado de un espacio euclidiano como una partición del espacio por medio de politopos congruentes cuyos interiores son ajenos dos a dos.

Ampliaremos un poco el concepto de adoquinado del plano permitiendo que los polígonos que lo forman no sean congruentes entre sí, y aún así los llamaremos adoquines.

Kershner (18) en 1968 enuncia un teorema en el que cree encontrar todos los polígonos convexos que con copias congruentes pueden adoquinar el plano, pero Gardner muestra que la lista anterior es incompleta. Probaremos aquí el siguiente resultado.

TEOREMA. a) Si α y β son dos números reales positivos arbitrarios, es imposible adoquinar el plano con cualquier colección de polígonos convexos, cada uno de los cuales tiene siete lados o más, área mayor que α y perímetro menor que β .

b) Si una de estas condiciones se quita entonces es posible adoquinar el plano con polígonos que satisfagan las condiciones restantes.

Una consecuencia inmediata de la parte a) de este teorema es la imposibilidad de adoquinar el plano con cualquier colección de polígonos que consista de copias congruentes de un número finito de polígonos convexos distintos, teniendo cada uno siete lados o más.

Para demostrar el teorema haremos uso de dos hechos fundamentales.

i) En una red poligonal si f es el número de polígonos de la red, v el número de vértices y s el número de lados se tiene que

$$f - s + v = 1$$

igualdad que es conocida como la fórmula de Euler (3').

y ii) El área de un polígono de perímetro menor que β tiene área menor que β^2 .

Para ver esto, consideremos cualquier polígono en el plano de perímetro menor que β y tracemos un círculo de radio $\beta/2$ con centro en cualquiera de sus vértices. Es claro que el polígono no tiene ningún punto en común con la frontera del círculo. Así, el polígono está completamente contenido en un círculo que tiene área $\pi\beta^2/4$, de donde el polígono tiene área menor que β^2 .

Demostración de la parte a) del teorema.

Supongamos que el plano puede adoquinarse mediante una colección de polígonos convexos cada uno de los cuales tiene siete o más lados, área mayor que α y perímetro menor que β , donde α y β son cualquier par de números reales positivos dados de antemano. El adoquinado podría verse como en la fi-

gura 15. Aquí tenemos tres adoquines T_1 , T_2 y T_3 y hemos destacado con A, B y C tres de los vértices del adoquinado.

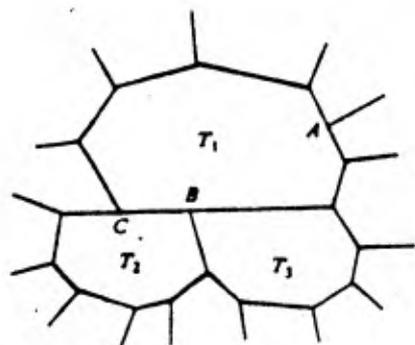


figura 15

Nos referiremos a los polígonos del adoquinado en dos sentidos, como un adoquín, y como un polígono de la red. El primer sentido es el que se le da en el enunciado del teorema; en el segundo, el polígono puede tener más vértices y lados que el adoquín. Por ejemplo, el adoquín T_1 tiene siete vértices y siete lados, pero, como un polígono de la red, tiene nueve vértices y nueve lados. Los vértices A y B están incluidos en el análisis de T_1 como un polígono de la red, pero no como un adoquín. Si un polígono es visto como un adoquín o como un polígono de la red, su área es la misma y también su perímetro.

Por cada vértice añadido, por ejemplo A y B en el adoquín T_1 , se introduce un "ángulo interior" adicional de medida π . Así la suma de los ángulos interiores del polígono T_1 de la red es 7π porque T_1 tiene 9 lados. En general la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono de la red con n lados es $(n-2)\pi$, y esto es siempre al menos 5π pues el nú-

mero de lados de los polígonos de la red es al menos siete.

Consideremos en el plano un sistema de coordenadas rectangulares y denotemos con $S(r)$ el cuadrado con vértices en $(\pm r, \pm r)$ donde el número real positivo r será elegido lo suficientemente grande para obtener una contradicción. Sea N_1 la red finita que cubre a $S(r)$ de manera minimal. La cota inferior α impuesta en el área de cada polígono garantiza que la red N_1 es una colección finita de polígonos.

Sea f_1 el número de polígonos de la red N_1 , y sea v_1 el número total de vértices, cada uno contado sólo una vez. Como el perímetro de cada polígono es menor que β se sigue que la red N_1 está completamente contenida en el interior del cuadrado $S(r+\beta)$.

Sea N la red finita que cubre a $S(r+\beta)$. Sea f el número de polígonos de la red N , y denotemos por v y s el número de vértices y lados respectivamente, cada uno contado una vez, de esos f polígonos de la red. Sabemos que

$$(3.1) \quad v + f = s + 1 \quad \text{ó} \quad v + f > s$$

Consideremos los ángulos interiores de los polígonos de la red N_1 . Como hay f_1 de tales polígonos la suma de esos ángulos es al menos $5\pi f_1$. Pero estos polígonos de la red tienen v_1 vértices, y la suma total de los ángulos en cada vértice es a lo más 2π . Se sigue que

$$(3.2) \quad 2\pi v_1 \geq 5\pi f_1 \quad \text{ó} \quad 2v_1 \geq 5f_1$$

Ahora veamos los v vértices de los polígonos de la red N . Como estos polígonos de la red tienen s lados en total y cada lado une dos vértices, vemos que $2s$ cuenta cada vértice más de una vez, pero en cada vértice concurren al menos dos lados,

entonces cada vértice es contado por $2s$ por lo menos dos veces. Además cada vértice interior pertenece a tres polígonos de la red por lo menos y así cada vértice es contado por lo menos tres veces por $2s$. Notando que todo vértice de la red interior N_1 es vértice interior de N se deduce la siguiente desigualdad

$$(3.3) \quad 2s > 3v_1 + 2(v-v_1) = 2v + v_1$$

Pero $2v + 2f > 2s$ por (3.1) y así $2f > v_1$ y usando

(3.2) se tiene

$$(3.4) \quad 4f > 2v_1 > 5f_1$$

Definiendo $f_2 = f - f_1$ vemos que f_2 es el número de polígonos en N que no están en N_1 . Esto con (3.4) nos da

$$(3.5) \quad 4f = 4f_1 + 4f_2 > 5f_1 \quad \text{ó} \quad 4f_2 > f_1$$

Como los f_1 polígonos en la red N_1 tienen área total menor que $\beta^2 f_1$ y estos polígonos cubren a $S(r)$ que tiene área $4r^2$ concluimos que

$$(3.6) \quad \beta^2 f_1 > 4r^2$$

Ahora consideremos los f_2 polígonos que están en N pero no están en N_1 . El área total de estos f_2 polígonos excede a αf_2 . El área de la región dentro de $S(r+2\beta)$ pero fuera de $S(r)$ es $4(r+2\beta)^2 - 4r^2$. Esta es una cota superior para el área total de los f_2 polígonos y así tenemos que

$$(3.7) \quad 4(r + 2\beta)^2 - 4r^2 > \alpha f_2$$

Las desigualdades (3.5) , (3.6) y (3.7) son contradictorias si r es suficientemente grande. Reordenando (3.7) y multiplicando por $4\beta^2$ obtenemos

$$64\beta^3(r + \beta) > 4\beta^2\alpha f_2 > \beta^2\alpha f_1 > 4\alpha r^2$$

usando (3.5) y (3.6).

Dividiendo por $4\alpha r$ se tiene

$$(3.8) \quad r < 16\beta^3\alpha^{-1} (1 + \beta/r)$$

Esto último es falso si $r = \beta + 16\beta^3\alpha^{-1}$. Si (3.8) falla para un valor positivo de r , entonces falla para todos los valores mayores a r . Así hemos llegado a una contradicción si

$$(3.9) \quad r \geq \beta + 16\beta^3\alpha^{-1}$$

y queda probada la parte a) del teorema.

Demostración de la parte b) del teorema.

Se tienen 4 condiciones sobre los polígonos en la parte a) del teorema:

- i) Convexidad,
- ii) 7 lados ó más.
- iii) Area mayor que α y
- iv) perímetro menor que β .

Para probar la parte b) mostraremos que existen adoquinados del plano que satisfacen todas excepto una de las condiciones.

i) El plano puede ser adoquinado con polígonos no convexos que tengan siete lados ó más. La figura 16 ilustra un

adoquinado con polígonos de siete lados y réplicas congruentes.

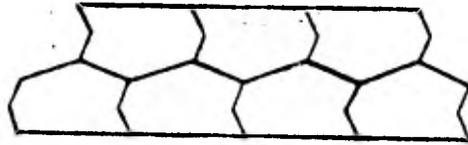


figura 16

ii) La condición de que tengan siete lados ó más es esencial pues hemos mostrado en el capítulo II, sección 2.5, que se tienen adorno con n -ágonos para $n = 3, 4, 5$ y 6 que cumplen las restantes condiciones.

iii) y iv) Finalmente construyamos dos adornos del plano por heptágonos convexos, el primero teniendo polígonos con perímetro menor que β y el segundo con área mayor que α . Ambos se construyen de la misma manera. Los vértices de los polígonos dados en coordenadas polares estarán en círculos concéntricos de radios $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$ como sigue.

Primero definimos el polígono Q por los vértices, enumerados en sentido contrario al de las manecillas del reloj $(0,0)$ y $(\rho_1, k\pi/10)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, donde ρ_1 será especificado. Se obtienen tres polígonos más rotando Q con ángulos $\pi/2, \pi, 3\pi/2$, con el origen como centro de rotación,

Para $n = 1, 2, 3, \dots$ definimos el polígono P_n por los vértices

$$(3.10) \quad (\rho_n, \pi/10 \cdot 4^{n-1}), (\rho_n, 0), (\rho_{n+1}, k\pi/10 \cdot 4^n), \\ k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

enumerados en sentido contrario a las manecillas del reloj, donde ρ_n y ρ_{n+1} serán especificados. Nótese que el primero y el último vértice listados en (3.10) son colineales con el origen, y también lo son los vértices $(\rho_n, 0)$ y $(\rho_{n+1}, 0)$.

Así, un "anillo" de polígonos se obtiene rotando P_n alrededor del origen repetidamente con un ángulo $\pi/10 \cdot 4^{n-1}$. El anillo se cierra después de que la rotación se repite $20 \cdot 4^{n-1} - 1$ veces. (fig. 17).

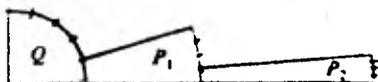


figura 17

Más aún, los vértices exteriores del anillo de polígonos formado al rotar P_n , son los vértices interiores del anillo formado al rotar P_{n+1} . Estos vértices comunes son

$$(\rho_{n+1}, k\pi/10 \cdot 4^n) \quad k = 0, 1, 2, \dots, 20 \cdot 4^{n-1}.$$

Se sigue que los heptágonos convexos Q, P_1, P_2, \dots junto con sus réplicas congruentes formadas por las rotaciones alrededor del origen adoquinan el plano, si hacemos que ρ_n tienda a infinito con n .

Ahora especificaremos los valores de $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$ en dos formas, primero para obtener un conjunto de polígonos que satisfagan la propiedad de que cada uno tenga perímetro menor que β , y segundo para obtener un conjunto de polígonos cada uno con área mayor que α .

Para lo primero definamos

$$(3.11) \quad \rho_n = n\beta/8 \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Aquí ρ_n tiende a infinito con n . Verificaremos que P_n tiene perímetro menor que β . El lado que une los primeros dos vértices de (3.10) tiene longitud menor que el arco del círculo de radio $r=\rho_n$ entre esos dos puntos. Esta longitud de

arco es

$$(3.12) \quad \pi \rho_n / 10 \cdot 4^{n-1} = n\beta\pi / 20 \cdot 4^n$$

y es claramente menor que $\beta/7$. El lado de P_n que une $(\rho_n, 0)$ y $(\rho_{n+1}, 0)$ tiene longitud

$$\rho_{n+1} - \rho_n = \beta/8 < \beta/7$$

Otro lado de P_n tiene longitud $\rho_{n+1} - \rho_n$, y los cuatro lados restantes, aquellos que unen los últimos cinco vértices de (3.10) tienen longitudes del tipo (3.12) con n reemplazada por $n+1$. Así, los siete lados de P_n tienen longitud menor a $\beta/7$ y por tanto P_n tiene perímetro menor a β . Es fácil verificar que Q tiene la misma propiedad.

Así, tenemos un adoquinado de heptágonos convexos cada uno de perímetro menor a β . Por la parte a) del teorema se sigue que las áreas de estos heptágonos tienden a cero.

Por último, para obtener un adoquinado de heptágonos convexos cada uno con área mayor que α , usaremos una definición distinta que en (3.11). Primero queremos elegir ρ_1 de forma que Q tenga área mayor a α . El área de cualquier heptágono convexo excede el área de cualquier triángulo formado con tres de sus vértices. Consideremos el formado por

$$(0, 0), (\rho_1, 0) \text{ y } (\rho_1, \pi/2).$$

Este triángulo tiene área $\rho_1^2/2$ y podemos elegir ρ_1 de forma que $\rho_1^2/2$ exceda a α .

Procederemos recursivamente definiendo para $n=1, 2, 3, \dots$

$$(3.13) \quad \rho_{n+1} = n + \rho_n + 2\alpha\rho_n^{-1} \csc(\pi/10 \cdot 4^{n-1})$$

Notemos que ρ_n tiende a infinito si n lo hace y por tanto se

tendrá un adquinado de todo el plano. Veamos que P_n tiene área mayor que α , $n=1,2,3,\dots$

Este heptágono tiene área mayor que la del triángulo formado por los vértices

$$(\rho_n, \pi/10 \cdot 4^{n-1}), (\rho_n, 0) \text{ y } (\rho_{n+1}, 0).$$

El área de este triángulo es

$$(1/2)(\rho_{n+1} - \rho_n)\rho_n \text{ sen } \pi/10 \cdot 4^{n-1} \text{ que excede a } \alpha, \text{ lo}$$

cual se ve usando (3.13). Esto completa la demostración. †

Para finalizar esta sección enunciamos una forma equivalente del teorema anterior, más elegante pero no tan clara.

TEOREMA. Si se adoquina el plano con polígonos convexos cada uno de siete lados o más, y si r es la razón del perímetro del adquin a su área, entonces el conjunto de valores de r no está acotado.

3.2 CIRCULOS EN UN CIRCULO.

Veremos ahora algunos teoremas relativos a empaques de círculos dentro de un círculo mayor.

TEOREMA. El número de círculos de radio r empaçados de forma que cada uno es tangente a otros seis y contenidos completamente en un círculo de radio $R > r$ que es concéntrico a uno de los círculos está dado por

$$N = 1 + \sum_{k=0}^{\lfloor n \rfloor} \left[\sqrt{n^2 - (3/4)k^2} - k/2 \right], \quad n = (1/2)(R/r - 1)$$

Aquí los corchetes indican la función mayor entero. Demostración. Para probar este teorema supondremos primero que la distancia entre los centros de dos círculos adyacentes es uno, y encontraremos el número de centros dentro de un círculo de radio n . Por la naturaleza triangular del arreglo de centros, necesitamos considerar solamente uno de los seis sectores similares del círculo como se muestra en la figura 18, donde los centros marcados con \circ están en el sector adyacente y el centro común C no está en ningún sector. Claramente el número de centros contenidos dentro del sector es la suma de las partes enteras de la longitudes, tales como AB , desde CE hasta FG . Sea $CB = k$ que es un entero. entonces, como el ángulo BCD es de 30°

$$CD = (\sqrt{3}/2)k \text{ y } BD = k/2.$$

Como $(AC)^2 = (AD)^2 + (CD)^2$ tenemos que

$$n^2 = (AB + k/2)^2 + (3/4)k^2, \text{ de donde}$$

$$AB = \sqrt{n^2 - (3/4)k^2} - k/2.$$

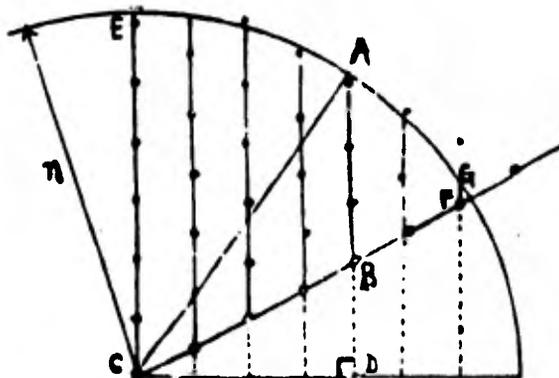


figura 18

El número de centros dentro del sector es la suma de la parte entera de este número AB desde $k=0$ hasta $k=[n]$. Como

hay seis sectores y el centro común C tenemos que

$$N = 1 + 6 \sum_{k=0}^{[n]} \left[\sqrt{n^2 - (3/4)k^2} - k/2 \right].$$

Ahora, de hecho, los centros no están a distancia unitaria sino a una distancia de $2r$. Así que un radio $R=2rn$ contendrá n centros y por tanto un radio $R = 2rn + r$ contendrá n círculos, de donde

$$n = (1/2)(R/r - 1).$$

lo que completa la demostración. †

3.3 CIRCULOS EN UN POLIGONO.

Veremos un teorema de empaques de un círculo unitario en un polígono convexo dada el área de dicho polígono.

TEOREMA. *A lo más $A/\sqrt{12}$ círculos unitarios pueden empacarse en un polígono convexo de área A . Los ángulos del polígono dado no deben ser mayores a $2\pi/3$.*

(Una consecuencia inmediata de esta restricción, es que como la suma de los ángulos de un n -ágono es $(n-2)\pi$, por lo menos un ángulo es mayor o igual a $(n-2)\pi/n$ y por tanto $n \leq 6$).

La demostración está basada en dos lemas que tienen interés por ellos mismos. Empezaremos con una definición.

El polígono convexo $S(P)$. Sea Σ un conjunto de puntos P, P_1, P_2, \dots en el plano, tal que la distancia $P'P''$ de cualquier par de puntos distintos P', P'' de Σ es al menos 2. Entonces si $C(P), C(P_1), \dots$ son los círculos de radio 1 y cen-

tros P, P_1, P_2, \dots entonces ningún par de estos círculos se intersecta.

Sea K cualquier círculo en el plano, digamos de radio r y sea K' el círculo concéntrico de radio $r+1$. Si $P', P'', \dots, P^{(\lambda)}$ son puntos de Σ en K entonces los círculos $C(P'), C(P''), \dots, C(P^{(\lambda)})$ están contenidos en K' ; su área total $\lambda\pi$ es por tanto no mayor que el área $(r+1)^2\pi$ de K' y así $\lambda \leq (r+1)^2$. Entonces cualquier círculo contiene a lo más un número finito de puntos de Σ .

Para el punto P de Σ denotemos por $S(P)$ al conjunto de todos los puntos Q en el plano para los cuales

$$(3.14) \quad PQ \leq P_k Q \quad k=1, 2, \dots$$

El círculo $C(P)$ es un subconjunto de $S(P)$ puesto que si Q está en $C(P)$, entonces

$$P_k Q \geq PP_k - PQ \geq 2 - 1 = 1 \geq PQ$$

Denotemos por Λ_k el lugar de todos los puntos Q para los cuales $PQ = P_k Q$. Evidentemente Λ_k es la mediatriz del segmento PP_k . Al centro del segmento PP_k llamémoslo $P^{(k)}$. Los puntos Q que satisfacen $PQ \leq P_k Q$ forman el semiplano determinado por Λ_k conteniendo a P , y ésta es una región convexa. Además, por (3.14), es una región convexa cerrada (fig 19).

Supondremos ahora que $S(P)$ es de área finita, digamos $A(P)$. Sea Q distinto de P un punto en $S(P)$ y denotemos por T_1 y T_2 los dos extremos del diámetro de $C(P)$ perpendicular a PQ . Como $S(P)$ es convexo y como los tres puntos Q, T_1 y T_2 pertenecen a $S(P)$, el triángulo T_1QT_2 es un subconjunto de $S(P)$ y por tanto su área es no mayor a $A(P)$. Ahora, el área de este triángulo es

$$(1/2)(T_1T_2)(PQ) = PQ, \text{ y así}$$

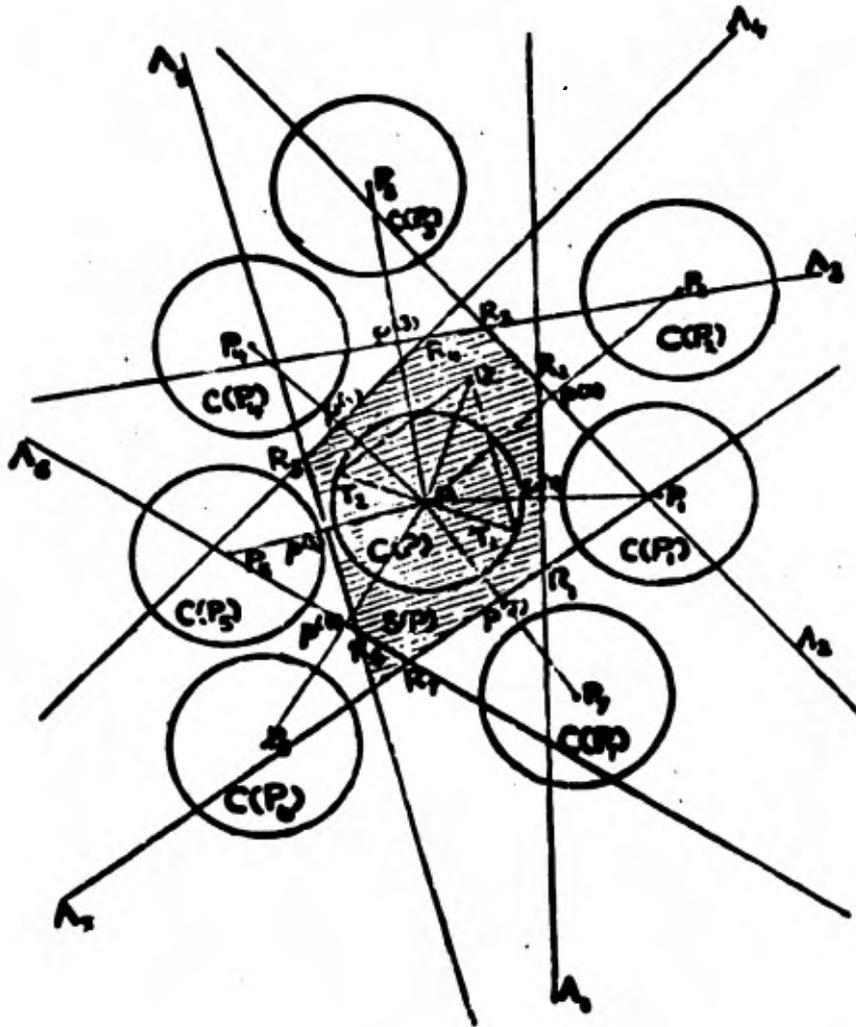


figura 19

$$(3.15) \quad PQ \leq A(P) \quad \text{para todo punto } Q \text{ de } S(P).$$

Por (3.15) $S(P)$ está en el círculo $C'(P)$ de centro P y radio $A(P)$. Así, tiene puntos en común solamente con aquellas líneas Λ_k que tocan o pasan por $C'(P)$. Como $P^{(k)}$ es el punto de Λ_k más cercano a P , se requiere que

$$PP^{(k)} \leq A(P), \text{ i.e., que } PP_k = 2PP^{(k)} \leq 2A(P).$$

Pero como solo un número finito de puntos P_k de Σ

satisfacen esta desigualdad, la frontera de $S(P)$ toca sólo un número finito de líneas Λ_k . Por tanto, $S(P)$ es un polígono convexo, digamos con n lados, $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ y n vértices R_1, R_2, \dots, R_n . Escogemos la notación tal que estos lados y vértices estén en la frontera de $S(P)$ en el orden de sus índices, y que R_k y R_{k+1} son los vértices en Λ_k y así Λ_{k-1} y Λ_k son los lados por R_k . (Los índices 0 y $n+1$ deben ser reemplazados por n y 1 respectivamente).

Las líneas de P a los vértices R_1, R_2, \dots, R_n dividen a $S(P)$ en n triángulos $R_1PR_2, R_2PR_3, \dots, R_nPR_1$, digamos de áreas a_1, a_2, \dots, a_n . Sean además los ángulos en P de estos triángulos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ respectivamente.

Evidentemente

$$(3.16) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n = a(P) \text{ y}$$

$$(3.17) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 2\pi.$$

En lo que sigue probaremos el siguiente resultado.

LEMA. Para cada índice k

$$(3.18) \quad a_k \geq (\sqrt{3}/\pi) \alpha_k.$$

Demostración. Pongamos $x = PP^{(k)} = (1/2)PP_k$ y así $x \geq 1$ (fig 20). Denotemos por Γ al círculo de centro P y radio x ; entonces Λ_k es tangente a Γ . Las dos líneas desde P a R_k y R_{k+1} cortan a Γ en un sector de ángulo α_k y por tanto de área $(1/2)x^2\alpha_k$. Como este sector está completamente contenido en el triángulo R_kPR_{k+1} de área a_k la desigualdad $a_k \geq (1/2)x^2\alpha_k$ sucede. Por tanto, si $(1/2)x^2 \geq \sqrt{3}/\pi$, i.e., si $x \geq \sqrt[4]{12/\pi^2} > 1$, entonces (3.18) es satisfecha y el lema queda probado.

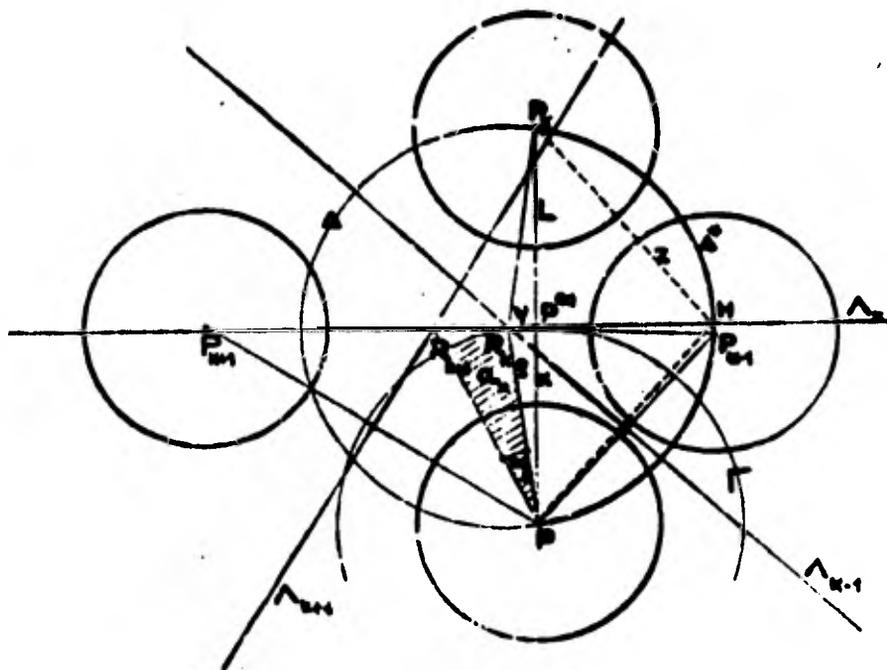


figura 20

Excluyamos por tanto ese caso y supongamos que

$$(3.19) \quad 1 \leq x < \sqrt[4]{12/\pi^2} < \sqrt{4/3}.$$

Probaremos el siguiente resultado: El punto $P^{(k)}$ es interior al segmento $R_k R_{k+1}$.

Si ésto no pasara, entonces R_k y R_{k+1} serían dos puntos distintos en Λ_k estando del mismo lado de $P^{(k)}$. Así, uno de estos puntos, digamos R_k , está más cerca que el otro de $P^{(k)}$ y R_k posiblemente coincidiría con $P^{(k)}$.

Por nuestra notación Λ_{k-1} y Λ_k se encuentran en R_k . Como todos los puntos de Λ_{k-1} están equidistantes de P y P_{k-1} entonces $PR_k = P_{k-1}R_k$ y por tanto P y P_{k-1} están en el círculo Δ de centro R_k y radio $\rho = PR_k$. Este círculo contiene también a P_k y está dividido en dos arcos por la línea L que une P y P_k . Sea Δ^* el arco que toca Λ_k en un punto, digamos H , se-

parado de R_{k+1} por R_k ; entonces Δ^* está separado de R_{k+1} por L . Como el único punto común de la línea Λ_{k-1} y el ángulo $PR_k R_{k+1}$ es el vértice R_k de este ángulo, se sigue que la imagen P_{k-1} de P en Λ_{k-1} está separada de R_{k+1} por la línea PP_k y su imagen $R_k P_k$ en $\Lambda_k = R_k R_{k+1}$; así P_{k-1} está en Δ^* . Poniendo

$z = PH$ es evidente que para todo punto Q en Δ^*

$$\min(PQ, P_k Q) \leq z$$

y así, en particular,

$$\min(PP_{k-1}, P_k P_{k-1}) \leq z.$$

Por lo tanto, de la definición de Σ ,

$$(3.20) \quad z \geq 2$$

Ahora, pongamos $R_k P^{(k)} = y$, y así

$$\begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2 \quad \text{y} \quad P^{(k)} H = R_k H - R_k P^{(k)} = \rho - y = \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} - y \leq x \quad \text{pues} \quad \sqrt{x^2 + y^2} \leq x + y. \end{aligned}$$

Así, $z^2 = (PP^{(k)})^2 + (P^{(k)} H)^2 \leq x^2 + x^2 = 2x^2$, y por (3.19)

$z \leq \sqrt{2}x < \sqrt{2}\sqrt{4/3} < 2$ contrario a (3.20). Esta contradicción prueba el resultado.

De lo anterior, la línea $PP^{(k)}$ divide el triángulo $R_k PR_{k+1}$ en los dos triángulos $R_k PP^{(k)}$, digamos de área b_k y $P^{(k)} PR_{k+1}$ de área c_k , de donde

$$(3.21) \quad b_k + c_k = a_k$$

La línea $PP^{(k)}$ parte α_k en dos ángulos, $\beta_k = R_k PP^{(k)}$
 Y $\gamma_k = P^{(k)} PR_{k+1}$, satisfaciendo

$$(3.22) \quad \beta_k + \gamma_k = \alpha_k.$$

Por (3.21) y (3.22) el lema queda probado si podemos mostrar que

$$(3.23) \quad b_k \geq (\sqrt{3}/\pi)\beta_k \quad y$$

$$(3.24) \quad c_k \geq (\sqrt{3}/\pi)\gamma_k.$$

Será suficiente probar (3.23) ya que (3.24) se prueba de manera análoga.

Como antes denotemos por Δ al círculo de centro R_k y radio $\rho = PR_k$ (fig 21); entonces P , P_{k-1} y P_k están en este círculo. La línea L que une P y P_k divide Δ en dos arcos desiguales (dado que $P^{(k)}$ y R_k son distintos. Sea Δ^* el mayor de los dos, i.e., el arco que está separado de R_{k+1} por L . Entonces, por un argumento ya usado vemos que P_{k-1} está en Δ^* .

Denotemos nuevamente por H el punto donde Δ^* y Λ_k se intersectan y pongamos

$$y = R_k P^{(k)}, \quad z = PH = P_k H.$$

Entonces $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ y podemos encontrar como en (3.20) que

$$(3.25) \quad z \geq 2, \quad \text{pero ahora,}$$

$$P^{(k)} H = R_k H + P^{(k)} R_k = \rho + y = \sqrt{x^2 + y^2} + y,$$

$$(3.26) \quad z^2 = (PH)^2 = (PP^{(k)})^2 + (P^{(k)} H)^2 = x^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} + y)^2$$

$$= 2(x^2 + y^2 + y \sqrt{x^2 + y^2})$$

De (3.25) y (3.26) se tiene

$$x^2 + y^2 + y \sqrt{x^2 + y^2} \geq 2,$$

que resolviendo para y da

$$y \geq (2-x^2)/\sqrt{4-x^2} ;$$

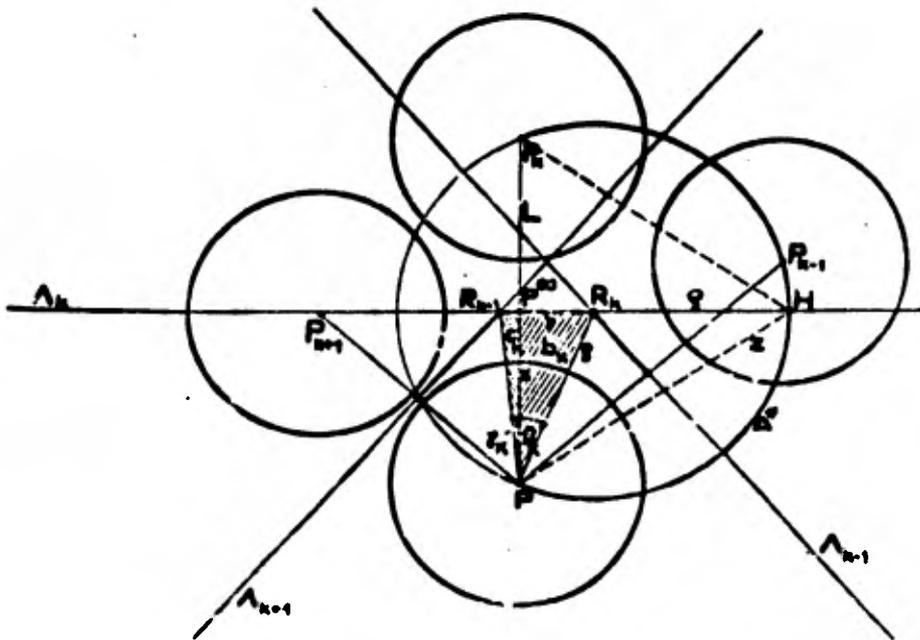


figura 21

Como además $b_k = (1/2)xy$ y $\beta_k = \text{sen}^{-1} y/(\sqrt{x^2+y^2})$

la desigualdad (3.23) puede ser escrita como $F(x,y) \geq 0$,

donde $F(x,y) = \pi xy - \sqrt{12} \text{sen}^{-1} y/\sqrt{x^2+y^2}$

Entonces (3.23) queda probada si logramos mostrar que

$$(3.27) \quad F(x,y) > 0 \text{ si}$$

$$(3.28) \quad 1 < \sqrt{4/3} \text{ y } y > (2-x^2)/\sqrt{4-x^2}$$

Cuando (3.28) es satisfecha, entonces

$$(x^2+y^2)/x \cdot \partial F(x,y)/\partial y = \pi(x^2+y^2) - \sqrt{12}$$

$$> \pi(x^2 + (2-x^2)^2/(4-x^2)) - \sqrt{12} = 4\pi/(4-x^2) - \sqrt{12}$$

$$> 4\pi/3 - \sqrt{12} > 0.$$

Así, $F(x,y)$ es una función estrictamente creciente de y . Para probar (3.27) es por tanto suficiente probar que la función

$$\begin{aligned} f(x) &= F(x, (2-x^2)/\sqrt{4-x^2}) \\ &= \pi x(2-x^2)/\sqrt{4-x^2} - \sqrt{12} \operatorname{sen}^{-1}(1-(1/2)x^2) \text{ es} \end{aligned}$$

estrictamente creciente, pues $f(1) = 0$. Ahora,

$$f(x) = 2g(t) \text{ donde } t = 1-(1/2)x^2,$$

$$g(t) = \pi t \sqrt{(1-t)/(1+t)} - \sqrt{3} \operatorname{sen}^{-1} t,$$

y donde por (3.28), t satisface la desigualdad

$$1/3 = 1 - 2/3 < t < 1 - 1/2 = 1/2.$$

Diferenciando tenemos

$$df(x)/dx = -2dg(t)/dt;$$

$$dg(t)/dt = (1-t)/(1-t^2)^{3/2} (\pi - (\pi t + \sqrt{3})(1+t))$$

Ahora, $3 < \pi < 10/3$ y $\sqrt{3} > 3/2$ y por tanto

$$(\pi t + \sqrt{3})(1+t) \geq (3(1/3) + 3/2)(1+1/3) = 10/3 > \pi$$

y así, $dg(t)/dt < 0$ ó $df(x)/dx > 0$ como queríamos.

Un segundo lema.

LEMA. El polígono convexo $S(P)$ es de área $A(P) \geq \sqrt{12}$.

Este lema se sigue inmediatamente de (3.16), (3.17) y el lema anterior.

Ahora probaremos el teorema vuelto a enunciar así:

TEOREMA. Sea π_0 un polígono convexo de ángulos no mayores a $2\pi/3$, por tanto de seis lados a lo más. Si A denota el área de π_0 , entonces a lo más $A/\sqrt{12}$ círculos unitarios pueden ser empacados en π_0 .

Demostración. Sean $C_{01}, C_{02}, \dots, C_{0\lambda}$ los círculos empacados en π_0 y sean $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ los lados de π_0 . Denotemos además por π_h el polígono que resulta de reflejar π_0 en Λ_h , y por $C_{h1}, C_{h2}, \dots, C_{h\lambda}$ los círculos simétricos a $C_{01}, C_{02}, \dots, C_{0\lambda}$ con respecto a Λ_h . Estos nuevos círculos están en π_h . (fig 22). Ninguno de los $m=(n+1)\lambda$ círculos

(3.29) $C_{01}, C_{02}, \dots, C_{0\lambda}, \dots, C_{n1}, C_{n2}, \dots, C_{n\lambda}$ se intersecan.

Esto es obvio, por la hipótesis de que dos círculos que están en el mismo polígono π_h no se cortan. Para probar esto en dos círculos que están en diferentes polígonos es su

ficiente mostrar que ningún par de polígonos π_h, π_k ($h \neq k$) se intersecan. Esto es evidente si Λ_h y Λ_k son paralelas. Si Λ_h, Λ_k se cortan en un punto, digamos O , consideramos el ángulo ϕ del vértice O formado por estas dos líneas que contiene a π_0 .

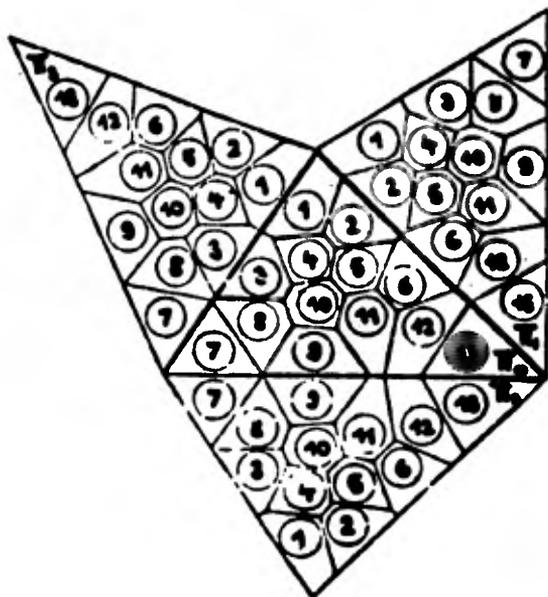


figura 22

Entonces $\phi < 2\pi/3$ y por tanto las imágenes de ϕ en Λ_h y Λ_k son dos ángulos que no se intersecan. Como uno de estos ángulos contiene a π_h y el otro a π_k se sigue que π_h y π_k no se intersecan.

Denotemos ahora por Σ al conjunto de los centros

$P_{01}, P_{02}, \dots, P_{0\lambda}, \dots, P_{n1}, P_{n2}, \dots, P_{n\lambda}$ de los círculos de (3.17).

Formemos las siguientes regiones convexas

$S(P_{01}), S(P_{02}), \dots, S(P_{0\lambda}), \dots, S(P_{n1}), S(P_{n2}), \dots, S(P_{n\lambda})$

Estas n regiones juntas adoquinan el plano y no se intersecan. Ahora mostraremos que los λ polígonos

(3.30) $S(P_{01}), S(P_{02}), \dots, S(P_{0\lambda})$ están en π_0 . Por

ejemplo, consideremos $S(P_{01})$, y tomemos cualquier lado Λ_h de π_0 . Si P_{h1} es el punto reflejado de P_{01} en Λ_h , entonces cualquier punto Q de $S(P_{01})$ está más cercano a P_{01} que a P_{h1} ; así está en el mismo lado de Λ_h que P_{01} . Esto es cierto para todos los índices $h = 1, 2, 3, \dots, n$ y así Q está en π_0 . Deducimos entonces que el área total de los λ polígonos (3.30) es justamente igual al área de π_0 .

Por el segundo lema cada polígono $S(P_{0i})$ es al menos de área $\sqrt{12}$. Así se tiene que $\lambda\sqrt{12} \leq A$ ó $\lambda \leq A/\sqrt{12}$ que es lo queríamos probar. †

Finalmente hacemos notar que el teorema no es cierto para polígonos con ángulos mayores a $2\pi/3$. Por ejemplo, el heptágono regular circunscrito a un círculo de radio 1 es de área menor que $\sqrt{12}$.

CAPITULO IV

APLICACIONES

En este capítulo veremos algunas aplicaciones de la teoría expuesta en capítulos anteriores y algunas soluciones a problemas del capítulo I. Veremos una aplicación de cubiertas, una de adoquines y una de empaques.

4.1 CUBIERTAS: RADAR, ALUMBRADO Y BOYAS DE SONAR.

El problema de las estaciones de radar consiste en asegurar que todos los puntos que están a una cierta altura h sobre la superficie de la tierra estén dentro de la semiesfera de alcance de alguna de las estaciones. Necesitaremos que la familia de los círculos dentro de los cuales puede operar efectivamente cada estación sea una cubierta para la tierra y que las esferas correspondientes se corten a una altura de por lo menos h .

Otros dos problemas que consideraremos en esta sección son el emplazamiento de luces de forma que la iluminación en todos los puntos no decrezca de un cierto nivel y el de colocación de boyas de sonar de forma tal que la señal pueda ser recogida en todos los puntos que se quieren cubrir.

Nótese que éstos son problemas a pequeña escala (locales) pues ignoramos la curvatura de la tierra.

Los tres problemas que acabamos de mencionar son problemas de cubiertas: todos los puntos en un dominio dado deben estar al menos en un círculo ó esfera.

4.1.1. *Estaciones de radar.* Las estaciones de radar deben estar localizadas de forma que puedan recoger una señal clara desde una distancia menor o igual a r . Se requiere cubrir

una altura h , i.e., las secciones de las semiesferas en cualquier dirección se deben cortar a una altura de al menos h . Observemos que si localizamos las estaciones en los centros de la cubierta más fina de círculos de radio $\sqrt{r^2 - h^2}$ entonces las restricciones impuestas a h y a r se satisfacen, tal como se muestra en la figura 23.

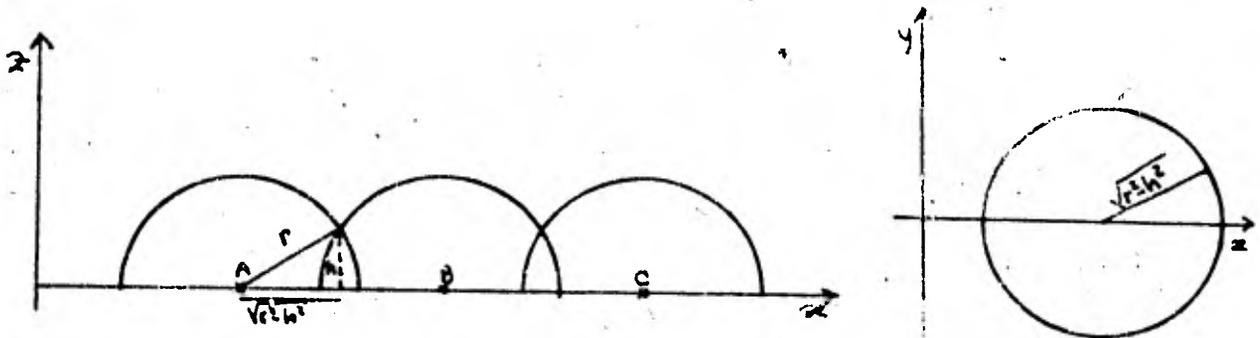


figura 23

Como hemos visto en el capítulo II, sección 2.5, los centros forman una latiz hexagonal regular que apoya a un adoquín del plano compuesto por hexágonos inscrito en los círculos (fig 24).

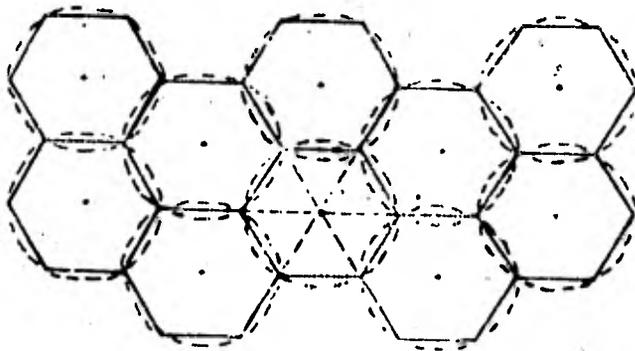


figura 24

La distancia entre los centros de cualquier par de círculos que se intersecan es

$2(\sqrt{3}/2) \sqrt{r^2-h^2} = \sqrt{3}(r^2-h^2)$ y la densidad de la cubierta es

$$\theta = \pi(r^2-h^2) / (6(1/2)(\sqrt{3}/2)(r^2-h^2)) = 2\pi/3\sqrt{3} = 1.209\dots$$

4.1.2 *Iluminación.* Se requiere suministrar un nivel aceptable de luz sobre un área dada a cierta altura específica. Como la intensidad de la iluminación varía inversamente a la distancia de la fuente de luz, tenemos como en el problema anterior, semiesferas de influencia aunque consideraremos usualmente una región bajo el nivel de las lámparas (fig 25).

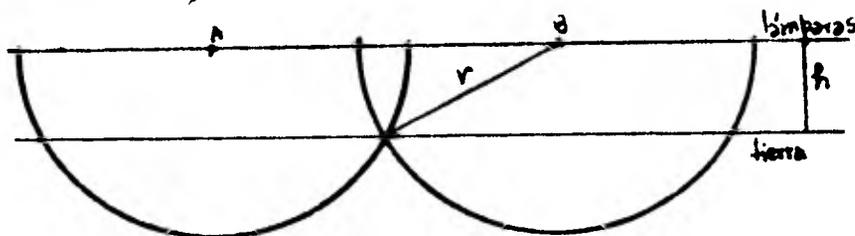


figura 25

Este es esencialmente el mismo problema que antes y los mismos puntos de la latiz dan la solución.

Un interesante problema de iluminación fué propuesto por Fejes Tóth (11). Consideremos una carretera recta infinita a lo largo de la cual son puestas lámparas idénticas con un cierto número promedio por kilómetro, ¿Cómo deben ser puestas de forma que se maximice la iluminación de la carretera en el punto menos iluminado? Tóth conjeturó que la mejor solución es una distribución de las lámparas consistente de la unión de un número finito de conjuntos congruentes de puntos de una latiz a lo largo de la línea. Recientemente Henry (15) ha demostrado que la conjetura es falsa.

4.1.3 *Boyas de sonar.* El problema del emplazamiento de boyas de sonar es efectivamente una combinación de los dos pro-

blemas anteriores ya que los elementos de la cubierta deben ser esferas para que cubran sobre y por debajo del nivel de la boya. La solución es como antes.

4.2 POLIMINOS

Un *poliminó* es una figura plana formada por cuadrados que están unidos y cada dos cuadrados contiguos están unidos por un lado común. Un *dominó* es un poliminó simple consistente de dos cuadrados. Muchos juegos populares han sido basados en estas figuras. Consideremos por ejemplo los *pentominós*, de los cuales hay 12 ya que cinco cuadrados pueden ser unidos en doce formas posibles (fig 26).

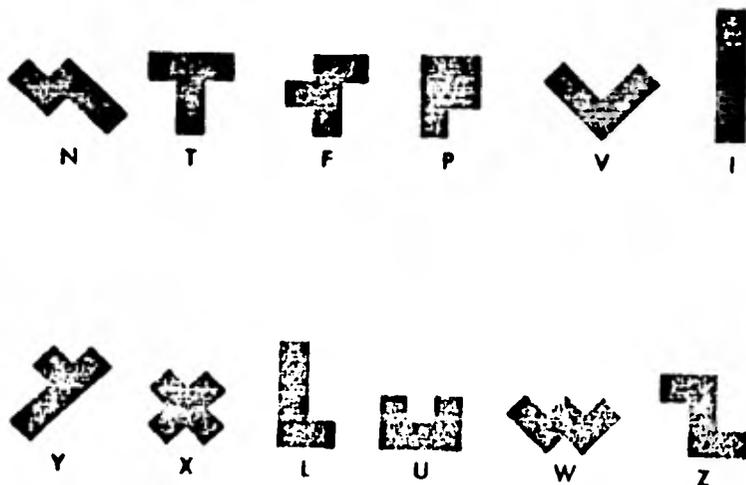
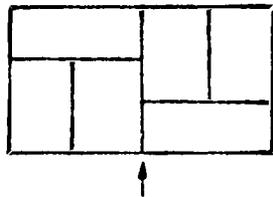


figura 26

Un problema relativo a dominós tiene aplicaciones en la construcción. ¿Es posible cubrir un rectángulo con dos ó más dominós de forma que cada línea reja del rectángulo interseque al menos un dominó? (Las líneas reja son las líneas horizontales y verticales espaciadas al ancho de un dominó a partir de los lados del rectángulo que son perpendiculares a los lados del rectángulo y que están en su interior). Si una línea reja no interseca ningún dominó puede ser visto como una debilidad estructural y una posible línea de falla. (Los dominós pueden ser vistos como ladrillos o como losas de recubrimiento). Deseamos identificar aquellos rectángulos que pueden ser cubiertos con dominós sin líneas de falla (fig 27).



línea de falla

figura 27

Podemos excluir aquellos rectángulos que en ambos lados tienen un número impar de cuadrados, pues entonces el número total de cuadrados será impar y por tanto imposible de cubrir con dominós. Es también obvio que rectángulos con un lado de 2, 3 ó 4 unidades deben tener una línea de falla y podemos ver que un rectángulo de 5x6 es el menor que puede ser adoquinado de manera libre de falla. Existen dos cubiertas posibles para este tipo de rectángulos. (fig 28).

Podemos probar que *no hay cuadrados de 6x6 que pueden ser adoquinados por dominós y que queden libres de falla.*

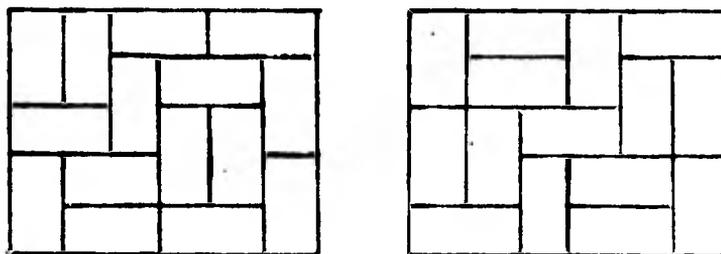


figura 28

Consideremos un cuadrado de 6×6 adoquinado por dominós. Tendrá 36 cuadrados unitarios y por tanto 18 dominós. Tendrá además cinco líneas rejá horizontales y cinco verticales.

Veamos dos hechos:

i) Cada línea reja corta un número par de dominós. En casos libres de falla cada línea reja debe cortar dos o un par mayor de dominós.

ii) Las diez líneas reja deben cortar veinte dominós ó más si el adoquinado es libre de falla.

Como solamente hay 18 dominós al menos una línea reja debe ser línea de falla.⁺

El mismo tipo de razonamiento puede aplicarse a otras configuraciones y a poliminós más complicados. El estudio de poliminós lleva a algunas demostraciones interesantes. Una de ellas es la que sigue y es debida a Spira (26).

Por un L-hexominó entendemos un hexominó en forma de L. Observemos que sólo existen dos tipos : El de 4×3 y el de 5×2 .

Probaremos que réplicas de un L-hexominó de 3×4 (i.e., reflexiones y rotaciones de un L-hexominó que dejan sus lados paralelos a los ejes coordenados) no pueden encajarse para formar un rectángulo.

Un L-hexominó de 3×4 se puede formar uniendo en orden los siguientes puntos: $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,1)$, $(1,1)$, $(1,4)$,

(0,4) y (0,0) (fig 29).

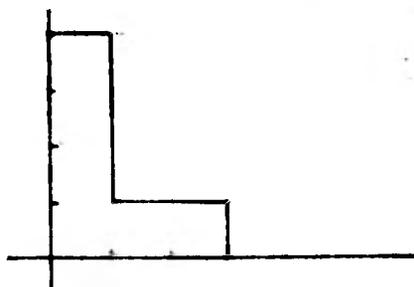


figura 29

Las réplicas del L-hexomino toman ocho posiciones y las etiquetamos del 1 al 8 (fig 30).

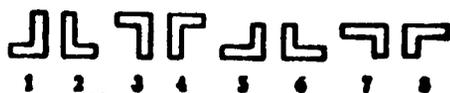


figura 30

Supongamos que los lados del cuadrado que tratamos de cubrir está de forma que tiene uno de sus lados en la parte positiva del eje X y otro en la parte negativa del eje Y de un sistema de coordenadas. Etiquetamos los cuadrados unitarios en este cuadrante por el renglón y la columna en los cuales están, i.e., el cuadrado (i,j) tiene esquinas $(j-1,i-1)$, $(j,i-1)$, (j,i) y $(j-1,i)$. Ahora intentaremos construir un adoquinado. El diagrama de árbol en la figura 31 muestra que cualquier posibilidad termina con un cuadrado que no puede ser cubierto. El diagrama se lee como sigue: el número a la izquierda de cada nodo del árbol indica el número-posición del

del hexominó (fig 30). Este hexominó estará emplazado de forma que cubra el cuadrado unitario dado por los números a la derecha del nodo anterior.

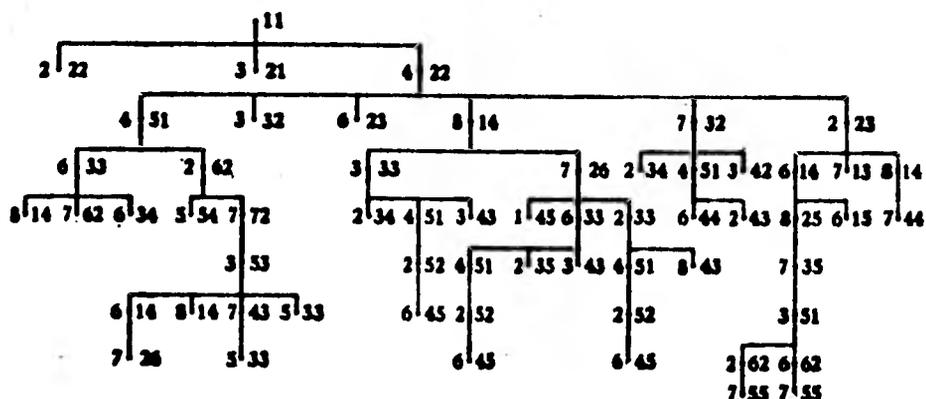


figura 31

Cuando el árbol termina en un nodo, el par de la derecha indica un cuadrado que es imposible de cubrir o, si puede ser cubierto, la forma de hacerlo lleva rápidamente a otro cuadrado que obviamente no puede ser cubierto.

Por ejemplo, podemos cubrir el cuadrado (1,1) con un L-hexominó de posición 2. Entonces, aunque podamos cubrir el cuadrado (2,2) con L-hexominós de posiciones 3, 7 u 8, no es difícil ver que no podemos seguir adelante sin dejar algún cuadrado de alrededor descubierto. Otra vez, si cubrimos (1,1) con un L-hexominó de posición 4 y luego (2,2) con uno de posición 8, (1,4) con 7, (2,6) con 2, (3,3) con 4, (5,1) con 2, (5,2) con 6, el árbol indica que (4,5) no puede ser cubierto.[†]

4.3 FRACCIONAMIENTOS

Este problema consiste en acomodar tantas casas como sea posible en un área grande con la condición de que las casas (que tienen bases rectangulares) no estén más cerca entre sí que cierta distancia dada.

Para ver la resolución de este problema podemos suponer que esta distancia es de dos unidades. Tomamos un rectángulo de lados a y b , $a \leq b$ y construimos alrededor de él lo que se conoce como un *dominio paralelo*, i.e., el lugar geométrico que consiste de todos los puntos que están a una distancia menor o igual que una distancia dada del dominio.

El dominio paralelo a una distancia unitaria se obtiene dibujando primero líneas paralelas a los lados a una distancia de una unidad y de la misma longitud. Luego dibujamos arcos de círculos unitarios con centros en cada esquina del rectángulo. La frontera del conjunto así construido contiene todos los puntos que están a una distancia unitaria de los lados de la base (fig 32).

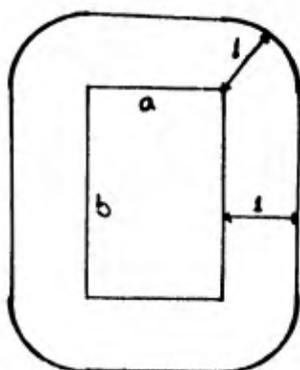


figura 32

A los dominios paralelos a distancia unitaria los llamaremos *sitios*. Si dos sitios son puestos juntos de forma que no se intersequen, entonces los rectángulos no pueden estar más cerca que dos unidades y así se habrá satisfecho la restricción de las distancias.

Hemos así convertido el problema en el de empacar los sitios S de la forma más eficiente en el área dada. Como hemos visto, para adoquinar el plano podemos hacerlo con triángulos, cuadriláteros, pentágonos y hexágonos. Si circunscribimos alguno de éstos alrededor de un sitio S es

claro que el de menor área es el hexágono.

Mostraremos que dependiendo de a existen tres tipos de empaques que definiremos por ciertas propiedades del hexágono H de menor área que contenga a S . El empaque correspondiente adoquinará el plano con réplicas trasladadas de H y se inscribirá en cada hexágono una réplica trasladada de S .

El eje de simetría de S paralelo al eje mayor del rectángulo es llamado el eje de S . Si $a = b$ uno de los ejes de simetría se escoge como el eje de S .

Consideraremos el hexágono circunscrito alrededor de S de forma que:

- i) Todos los puntos medios de sus lados están en la frontera de S y
- ii) Los lados opuestos del hexágono son paralelos e iguales (fig 33).

A los hexágonos que satisfacen la propiedad ii) se les llama hexágonos centrosimétricos.

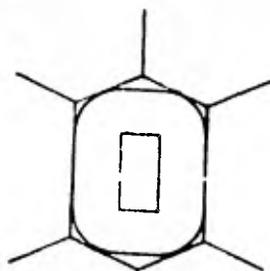


figura 33

Entre todos los hexágonos que tienen estas propiedades distinguimos tres tipos:

TIPO I. Los hexágonos que tienen simetría bilateral con respecto al eje de S (fig 34).

TIPO II. Los hexágonos que no tienen simetría bilateral con respecto al eje de S y ningún lado perpendicular al eje de S (fig 35).

TIPO III. Los hexágonos con dos lados perpendicula-

res al eje de S (fig 36).

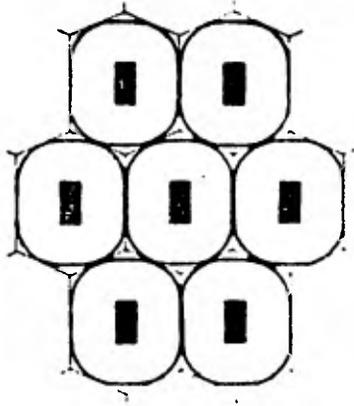


figura 34

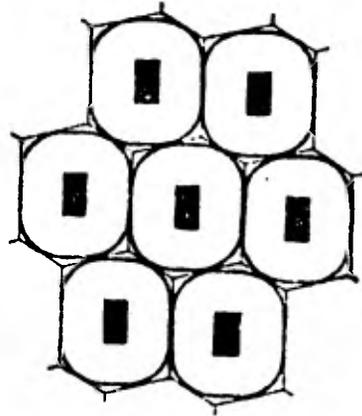


figura 35

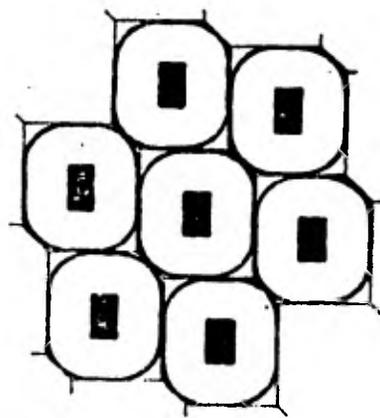


figura 36

Nuestro resultado es como sigue:

Sea S el dominio paralelo a distancia unitaria de un rectángulo cuyo lado más corto tiene longitud a . Entonces el hexágono centrosimétrico de menor área conteniendo a S es del tipo I, II ó III dependiendo de:

$$a < 4 - \sqrt{2}$$

$$4 - \sqrt{2} < a < 2 - \sqrt{2}$$

$$2 - \sqrt{2} < a \text{ respectivamente.}$$

Antes de iniciar la demostración confesaremos que ésta tiene una mancha: la comparación en el orden de algunas funciones de una variable fueron llevadas a cabo solamente con computaciones numéricas realizadas por Fejes Tóth (9). Como este proceso parece ser lo suficientemente confiable evitamos entrar en investigaciones tediosas.

Primero consideraremos el caso en el que el rectángulo es un cuadrado q con lados de longitud $a = 2x$. Para estudiar los hexágonos H los clasificaremos como sigue:

CLASE 0. H no tiene lados paralelos a un lado de q .

Sean A, B y C vértices consecutivos de q tales que el círculo unitario con centro en B contiene dos puntos medios S y T de H (fig 37).

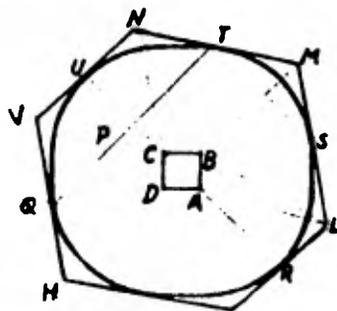


figura 37

Sean LM y MN los lados de H que contienen a S y T y sean R y U los puntos medios de los lados adyacentes. Como $LS = SM = MT = TM$ se tiene que $LB = MB = NB$. Otra vez, dada la simetría central $RL = NU$, de donde $AL = CN$. Por tanto los triángulos ALB y CNB son congruentes y en consecuencia H es simétrico con respecto a la diagonal de q que pasa por B .

Calculemos la semiárea del hexágono. Dado que T y Q son puntos medios de los lados del trapecio HMN tenemos que el área de dicho trapecio es

$$f_0(x) = (1 + \sqrt{2}x) \cdot TQ, \text{ pero}$$

$$TQ = 2PQ + 2\sqrt{2}x \quad \text{de donde}$$

$$f_0(x) = (1 + \sqrt{2} x) (2PQ + 2\sqrt{2} x).$$

Ahora, $PQ = \sqrt{(DQ)^2 - (PD)^2}$, $DQ = 1$ y $PD = (1/2)(1 + \sqrt{2}x)$

y así, $PQ = (1/2)\sqrt{3 - 2\sqrt{2}x - 2x^2}$, de donde

$$f_0(x) = (1 + \sqrt{2} x) (\sqrt{3 - \sqrt{8} x - 2x^2} + \sqrt{8} x).$$

Es claro que $2ST = RU = 2(1 + \sqrt{2} x)$ y que $ST < 2$, de donde vemos que se tiene un hexágono de la clase 0 sólo si $2x < 2 - \sqrt{2}$.

Clase 1.H tiene exactamente un par de lados paralelos a un lado de q . Aquí tenemos dos subclases.

Subclase 11. H tiene como eje de simetría el eje de S (fig 38). Debido a la simetría central, H tiene dos ejes de simetría, uno de los cuales debe ser paralelo a aquellos lados de H que son paralelos a un lado de q .

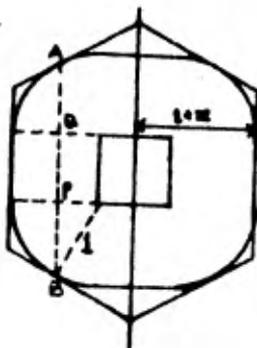


figura 38

Se tiene un hexágono de esta clase sólo si

$$(1 + x)/2 < 1 \quad \text{ó} \quad x < 1.$$

La semiárea del hexágono en este caso es

$$f_{11}(x) = (1+x) \cdot AB, \text{ pero}$$

$$AB = AQ + QP + PB = 2PB + 2x.$$

$$PB = \sqrt{1 - ((1-x)/2)^2} = (1/2) \sqrt{3 + 2x - x^2}$$

$$\text{por tanto, } f_{11}(x) = (1+x) (\sqrt{3 + 2x - x^2} + 2x).$$

Subclase 12. H no tiene eje de simetría. Sea AB un lado de q no paralelo a ningún lado de H (fig 39). Imaginemos que AB está horizontal y supongamos que A y B son los vértices superiores de q. Sean L, M y N los tres vértices superiores

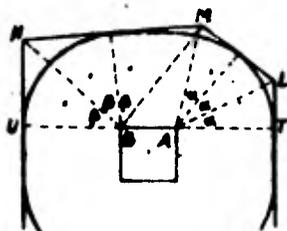


figura 39

de H tales que $AL = AM < BM = BN$. Hagamos que la recta determinada por AB interseque los lados verticales de H en T y U. Llamando α al ángulo TAL y β al UBN tenemos que $AL = 1/\cos\alpha$, y $BN = 1/\cos\beta$.

Expresando la distancia z de M a la línea TU en términos de α y β tenemos que

$$(4.1) \quad z(\alpha) = z(\beta).$$

$$\text{donde } z(\phi) = \frac{\sin 3\phi}{\cos \phi}.$$

Por otro lado, proyectando la línea quebrada AMB perpendicularmente sobre la recta determinada por AB obtenemos

$$2x = -\cos 3\alpha / \cos \alpha - \cos 3\beta / \cos \beta, \text{ pero}$$

$$\cos 3\phi / \cos \phi = 1 - 4 \operatorname{sen}^2 \phi \text{ de donde}$$

$$(4.2) \quad x = 2(\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta) - 1.$$

La suposición de que $AL < BN$ junto con las condiciones obvias

$$\operatorname{sen} 3\alpha / \cos \alpha > 1 \text{ y } \tan \beta < 1 \text{ implica}$$

$$(4.3) \quad \pi/8 < \alpha < \beta < \pi/4.$$

En el intervalo $(\pi/8, \pi/4)$ la función $z(\phi)$ tiene un extremo dado por

$$z'(\phi) = (3\cos 3\phi \cos \phi + \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} 3\phi) / \cos^2 \phi = 0 \quad \delta$$

$$3\cos 3\phi \cos \phi + \operatorname{sen} 3\phi \operatorname{sen} \phi = 0 \quad \delta$$

$$8\cos^4 \phi - 4\cos^2 \phi - 1 = 0$$

Haciendo $y = \cos^2 \phi$ resolvemos $8y^2 - 4y - 1 = 0$

que tiene como raíces $y = (1 \pm \sqrt{3})/4$ δ si γ es raíz de la

ecuación entonces $\cos^2 \gamma = (1 + \sqrt{3})/4$ (la otra raíz no daría

un $\cos \gamma$ real).

En $(\pi/8, \pi/4)$ la función $z(\phi)$ crece y en $(\gamma, \pi/4)$ decrece. Consecuentemente, para cualquier valor de α tal que $\pi/8 < \alpha < \gamma$ la ecuación (4.1) asocia un único valor de β tal que $\gamma < \beta < \pi/4$. Así, en vista de (4.2), x puede ser considerada como una función de α . Cálculos numéricos muestran que x decrece estrictamente cuando α crece de $\pi/8$ a γ .

En el caso límite, cuando $\alpha = \beta = \gamma$ tenemos

$$x = 4\text{sen}^2\gamma - 1 = 3 - 4\text{cos}^2\gamma = 3 - 4(1+\sqrt{3})/4 = 2 - \sqrt{3}$$

En el otro caso límite cuando $\alpha = \pi/8$ tenemos $\beta = \pi/4$ y $2x = 2 - \sqrt{2}$. Como estos casos límite no pertenecen a la subclase en consideración tenemos que

$$2 - \sqrt{3} < x < 1 - \sqrt{2}/2.$$

La semiárea del hexágono es

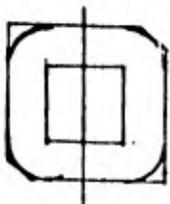
$$f_{12}(x) = 8(\text{sen}^3\alpha\text{cos}\alpha + \text{sen}^3\beta\text{cos}\beta) + 2x(1+x).$$

donde α y β están dados por (4.1), (4.2) y (4.3).

Clase 2. H tiene dos pares de lados paralelos (fig 40).

El tercer par de lados debe ser perpendicular a una diagonal de q .

Este caso puede darse sólo si $2x \geq 2 - \sqrt{2}$ (ya que $2(1 + \sqrt{2}x) \geq 2\sqrt{2}$). La semiárea del hexágono está dada por



$$\begin{aligned} f_2(x) &= (1/2)(2+2x)^2 - 2(1/2)(\sqrt{2}-1)^2 \\ &= 2x^2 + 4x + \sqrt{8} - 1. \end{aligned}$$

fig 40 Esto completa la enumeración de los hexágonos en

consideración. Ahora, seleccionaremos de las funciones f_0 , f_{11} , f_{12} y f_2 la menor para diferentes valores de x . Denotaremos las gráficas de éstas funciones por g_0 , g_{11} , g_{12} y g_2 respectivamente.

La siguiente tabla ilustra los intervalos en los cuales las funciones se pueden dar.

$$f_0(x) \text{ para } x < 1 - \sqrt{2}/2$$

$$f_{11}(x) \text{ para } x < 1$$

$$f_{12}(x) \text{ para } 2 - \sqrt{3} < x < 1 - \sqrt{2}/2$$

$$f_2(x) \text{ para } x \geq 1 - \sqrt{2}/2.$$

Para $0 \leq x \leq 2 - \sqrt{3} = .2679\dots$ podemos comparar solamente f_0 y f_{11} . Tenemos

$$f_0(0) = f_{11}(0) = \sqrt{3}, \quad f_0'(0) = \sqrt{8/3} + \sqrt{8} = 4.46\dots$$

y

$$f_{11}'(0) = \sqrt{48}/3 + 2 = 4.31\dots$$

Así, g_0, g_{11} parten del mismo punto, pero g_0 tiene aquí mayor pendiente que g_{11} . La gráfica de g_0 permanece en todo el intervalo $(0, 2 - \sqrt{3})$ por encima de g_{11} .

En $x = 2 - \sqrt{3}$ seguimos teniendo $f_0 = 3.0426 > f_{11} = 3.0394\dots$

En el intervalo abierto $(2 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{2}/2)$ compiten tres funciones; f_0 , f_{11} y f_{12} . En todo el intervalo f_{12} se vuelve la menor. En $x = 2 - \sqrt{3} = .2679\dots$ tenemos $f_{11} = f_{12}$, y en el principio f_{11} es un fuerte rival de f_{12} . En $x = .2680\dots$ ($\alpha = 33^\circ 30'$, $\beta = 35^\circ 1' 28.9\dots$) tenemos $f_{12} = 3.0400064\dots$ y $f_{11} = 3.0400065\dots$

De aquí, la diferencia $f_{11} - f_{12}$ crece más rápidamente.

En $x = 1 - \sqrt{2}/2 = .29289\dots$ tenemos $f_{11} = 3.1761411$ y $f_{12} = 3.1715729\dots$. Aún en el final del intervalo f_{12} tiene otro rival. En un valor de x cerca de .28 la gráfica g_0 interseca a g_{11} y en el final del intervalo g_0 encuentra a g_{12} .

Sin embargo, g_0 permanece arriba de g_{12} . Por ejemplo para $x = .29082$ ($\alpha = 23^\circ$, $\beta = 44^\circ 35' 2.5''$) tenemos $f_{12} = 3.1608412\dots$ y $f_0 = 3.1608621\dots$

Para $x \geq 1 - \sqrt{2}/2$ la competencia es menos aguda. Al principio hay dos competidores; f_{11} y f_2 . En vista de que $f_{12}(1 - \sqrt{2}/2) = f_2(1 - \sqrt{2}/2) < f_{11}(1 - \sqrt{2}/2)$, g_2 empieza desde un punto más abajo que g_{11} y permanece abajo de g_{11} . En $x = 1$ la función f_2 se queda sin rivales.

Recapitulando, el hexágono centrosimétrico minimal circunscrito al sitio S pertenece:

Para $x \leq 2 - \sqrt{3}$ a la clase 11.

Para $2 - \sqrt{3} < x < 1 - \sqrt{2}/2$ a la clase 12.

Para $x \geq 1 - \sqrt{2}/2$ a la clase 2.

Como estas tres clases coinciden con los tipos I, II y III respectivamente, nuestra proposición queda probada para un cuadrado.

Ahora, deseamos establecer el resultado en el caso general. Transformamos un polígono convexo P en uno nuevo como sigue:

Sean a y b dos líneas soporte verticales de P (fig 41). Sean A y B los vértices de P que tocan a y b respectivamente. A y B descomponen la frontera de P en una línea poligonal superior A...B y en una inferior B...A. Consideramos P como la intersección de dos conjunto convexos de puntos P_1 y P_2 acota-

dos por $a, A...B, b$ y $b, B...A, a$ respectivamente. Trasladando P_2 hacia arriba una distancia d al polígono que se obtiene al intersecar P_1 con el trasladado de P_2 le llamaremos P' .

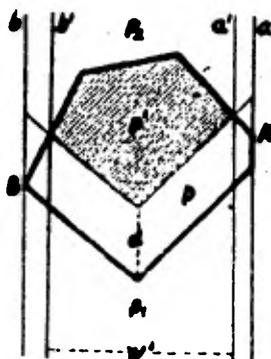


figura 41

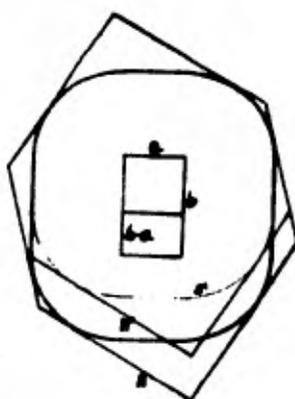


figura 42

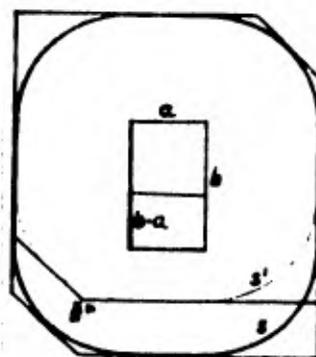


figura 43

A lo anterior lo llamamos un *proceso telescópico*.

Suponemos que P' es no vacío. Sean a' y b' las líneas soporte verticales de P' y sea w' la distancia entre a' y b' . Entonces

$$t = t' + w'd + t''$$

donde t , t' y t'' son las áreas de P , P' y la parte de P que está fuera de la banda acotada por a' y b' . (Paralelogramos de misma base y altura tienen la misma área).

Ahora, sea S un sitio con un eje vertical alrededor de un rectángulo de lados a y b con $a < b$. Sea H un hexágono arbitrario de área t circunscrito a S . Hacemos un proceso te-

lescópico de H en dirección vertical una distancia $b-a$, obteniendo un hexágono H' de área t' (fig 42). El hexágono H' contiene un sitio S' alrededor de un cuadrado de lado a teniendo un eje vertical. Por consiguiente, el ancho w' de H' en dirección horizontal es al menos $2 + a$. Así,

$$t \geq t' + w'(b - a) \geq t' + (2 + a)(b - a).$$

Reemplazando t' por el área t^* del hexágono H^* de mínima área que contiene a S' obtenemos

$$t \geq t^* + (2 + a)(b - a).$$

Pero como H^* tiene un par de lados verticales, la suma $t^* + (2 + a)(b - a)$ es igual al área del hexágono alrededor de H^* obtenido por un proceso telescópico en dirección vertical a una distancia $b-a$ (fig 43). Como este hexágono contiene a S , queda probado que es el hexágono minimal de todos los hexágonos que contienen a S . †

"El matemático, como el pintor o el poeta, es un constructor de diseños. El hecho de que sus diseños sean más permanentes que los de los otros se debe a que están hechos con ideas".

Hardy.

REFERENCIAS

- (1) Blachman, Nelson M. The closest packing of equal spheres in a large sphere. *Amer. Math. Monthly*, 70(1963), pp. 526-529.
- (2) Cassels, J. W. S. *An introduction to the Geometry of Numbers*, Springer-Verlag, Berlin, 1959.
- (3) Chakerian, G. D. Intersection and Covering properties of convex sets. *Amer. Math. Monthly*, 76(1969).
- (3') Courant and Robins, *What is Mathematics?*, Oxford University Press, 1959.
- (4) Coxeter, H. M. S., *Introduction to Geometry*, John Wiley, 1961.
- (5) Demir, H., Sutcliffe, A., *Circle Packing*, *Math. Mag.* 1961 pp. 427-428.
- (6) Fejes Tóth, G. Uber die blockierungszahl einer kreispakung, *Elem. Math.* 19(1964), pp. 49-53.
- (7) Fejes Tóth, G. Covering the plane by convex discs, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 23(1972), 263-270.
- (8) Fejes Tóth, L. What the bees know and what they do not know, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 70(1964), pp. 468-481.
- (9) Fejes Tóth, L. On the arrangement of houses in a housing estate, *Studia Sci. Math. Hungar.*, 2(1967), pp. 37-42.
- (10) Fejes Tóth, L. Solid circle packings and circle coverings *Ibid.*, 3(1968), pp. 401-409.
- (11) Fejes Tóth, L. A problem of illumination, *Amer. Math. Monthly*, 77(1970), pp. 869-870.
- (12) Fejes Tóth, L. Perfect distribution of points on the sphere, *Period.Math.Hungar.*, 1(1971).
- (13) Gardner, Martin, On the tessellating the plane with convex polygon tiles, *Scientific American*, 7(1975) 112-117, también, 12(1975) 117-118.
- (14) Goldberg, Michael, Maximizing the smallest triangle made by n points in a square, *Math. Mag.*, 45(1972), pp. 135-144.

- (15) Henry, B.R., Solution of Fejes Tóth's illumination problem, *Amer.Math.Monthly*, 80(1973), pp. 409-410.
- (16) Heppes, A. On the densest packing of circles not blocking each other, *Studia Sci. Math. Hungar.* 2(1967), 257-263.
- (17) Hilbert, H. and Cohn-Vossen, S. *Geometry and the imagination*, Chelsea, New York, 1952.
- (18) Kershner, R. On paving the plane, *Amer. Math. Monthly*, 75(1968), pp. 839-844.
- (19) Kravitz, Sidney, Packing cylinders into cylindrical containers, *Math. Mag.*, 40(1967).
- (20) Lekkerkerker, C.G., *Geometry of Numbers*, *Bibliotheca Mathematica*, vol VIII, North-Holland, Amsterdam, 1969.
- (21) Meir, A., Schaer, J., On a geometric extremum problem *Canad.Math.Bull.*, 8(1965), pp. 21-28.
- (22) Niven, Ivan, Convex polygons that cannot tile the plane, *Amer. Math. Monthly*, 85(1978), pp. 785-792.
- (23) Saaty y Alexander, *Optimization and Geometry of Numbers*, *SIAM Review*, 17(1975), pp. 475-519.
- (24) Scheid, Francis, Some Packing Problems, *Amer. Math. Monthly*, 67(1960), pp. 231-235.
- (25) Smalley, Ian, Simple regular sphere packings in three dimensions. *Math. Mag.*, 36(1963).
- (26) Spira, Robert, Impossibility of covering a rectangle with L-hexominoes, *Amer. Math. Monthly*, (1968) pp. 785-786.

