UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

INTRODUCCION A ESPACIOS DE TEICHMULLER

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

P R E S E N N T A :

JOSE LUIS MURILLO ARELLANO

CIUDAD UNIVERSITARIA ABRIL DE 1981

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

17 2-ejem.

INDICE

INTRODUCCION

"Y escribo con tu imágen por meta, vago por los campos buscando el recuerdo de tus manos blancas, de tu frente blanca y huyo a mil dimensiones sin encontrar la variedad de tu piel. Soy incongruente, lo sé, y sólo tu belleza logra ser punto fijo en mis continuos desvaríos.

Nada como la geometría de tu cuerpo de proporciones divinas, tus isotópicos movimientos cautivan, atentos mis oídos a tu armónico acento, enmudecen mis labios cuando rozo tu cálido cubriente espacio. Es de mis funciones la rama principal el adorarte relegando el álgebra, la variable, la geometría y el análisis.

A tu lado mi felicidad no tiene límite, conmutaste en alegría mi aflicción, a mi esperanza asociaste la tuya y buscamos siempre compañía mutua evitando grupos y anhelando cercanía.

Un flujo ardiente envuelve mi pecho, ansío tu boca encendida, el acostumbrado buen orden de mis sentidos se pierde en cien fantasías y la obsesión de integrar uno, de desafiar a epsilon y delta con nuestra cercanía es tanta que mi vida se detiene y como espectro persigo tus andares.

Eres variable, compleja, mujer... y a tu lado logro descubrir las formas más hermosas del ensueño. Inmerso en estos pensamientos transcurre el tiempo infinito.

¡Y nada es imaginario!

Mis pensamientos no conocen frontera y el cálculo del tiempo se pierde como tus suspiros volando al cielo. Por casi todos los años mi alma acompañará a la tuya."

CAPITULO UNO

1 Estructuras complejas y conformes en el plano.

Los trabajos realizados por Teichmüller en los años 40's abordan el problema de estudiar el espacio de superficies de Riemann cerradas, (El conjunto de superficies de Riemann dónde él define una relación de equivalencia más débil que la noción de equivalencia conforme) que topologías tiene, que estructuras, que métricas, que propiedades topológicas y geométricas le son características.

Sabemos que una superficie de Riemann es una variedad diferenciable con una estructura conforme. Las variedades diferenciables son estudiadas en los cursos usuales de Topología Diferencial en la Facultad, algo menos común lo es el estudio de estructuras conformes.

Una estructura compleja en el espacio vectorial orientado $\mathbb{R}^2$ es un endomorfismo J tal que

$$J^2 = -I_D \quad \text{y} \quad \det(v, J(v)) > 0 \quad \text{para } v \in \mathbb{R}^2 - \{0\}.$$

Sea $M = \{\text{Estructuras complejas en } \mathbb{R}^2\}$

En M tenemos que $GL^+(\mathbb{R}^2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mid \alpha\delta - \beta\gamma > 0 \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\}$

define una acción dada por

$$GL^+(\mathbb{R}^2) \times M \longrightarrow M$$
$$T \times J \longmapsto TJT^{-1}$$

y esta acción es transitiva.

Demostración de la transitividad:

P.D.: $\forall\, \mathcal{J} \in M \quad \exists\, T \in GL^{+}(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$T\mathcal{J}T^{-1} = i \qquad i = \text{rotación de } 90°.$$

Si fuera cierto tendríamos: $T\mathcal{J} = iT$

Sean $\quad T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \qquad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} T(e_1) = \alpha e_1 + \beta e_2 & \mathcal{J}(e_1) = a e_1 + b e_2 \\ T(e_2) = \gamma e_1 + \delta e_2 & \mathcal{J}(e_2) = c e_1 + d e_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} T(a e_1 + b e_2) = i(\alpha e_1 + \beta e_2) \\ T(c e_1 + d e_2) = i(\gamma e_1 + \delta e_2) \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} a(\alpha e_1 + \beta e_2) + b(\gamma e_1 + \delta e_2) = -\beta e_1 + \alpha e_2 \\ c(\alpha e_1 + \beta e_2) + d(\gamma e_1 + \delta e_2) = -\delta e_1 + \gamma e_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} a\alpha + b\gamma = -\beta & c\alpha + d\gamma = -\delta \\ a\beta + b\delta = \alpha & c\beta + d\delta = \gamma \end{array}$$

Para que este sistema homogéneo tenga solución no trivial es condición necesaria y suficiente que el determinante de la matriz de coeficientes sea cero.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & b & 0 \\ -1 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 1 \\ 0 & c & -1 & d \end{vmatrix} = a^2d^2 - abcd - abcd + b^2c^2 + 1 + bc + bc + a^2 + d^2$$

$$\begin{aligned} &= (ad - bc)^2 + 1 + 2bc + a^2 + d^2 \\ &= 2 + 2bc + a^2 + d^2 \\ &= 2(ad - bc) + 2bc + a^2 + d^2 \\ &= a^2 + 2ad + d^2 \\ &= (a + d)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Notemos que se ha hecho uso de dos propiedades fáciles de deducir de la definición de $\mathcal{J}$:

$$ad - bc = 1 \qquad \text{y} \qquad a = -d \qquad \blacksquare$$

Al considerar la rotación de 90° $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M$ tenemos que su grupo de isotropía es $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$

porque con el encaje natural
$$\mathbb{C}^* \longrightarrow GL^+(\mathbb{R}^2)$$
$$a+bi \longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$TiT^{-1} = i \Rightarrow -T = iTi$

$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

El inverso es fácil de demostrar.

Por tanto tenemos
$$M \cong GL^+(\mathbb{R}^2) / \mathbb{C}^*$$

Como un comentario diremos que $\mathbb{R}^2$ viene a ser un espacio vectorial complejo si ia es definido como $J(a)$.

Una estructura conforme en $\mathbb{R}^2$ es una clase de equivalencia de formas cuadráticas definidas positivas (funciones bilineales simétricas definidas positivas $\langle \ , \ \rangle_x$) en $\mathbb{R}^2$, donde dos formas son equivalentes si ellas son proporcionales.

Sea $\langle \ , \ \rangle$ el producto escalar usual en $\mathbb{R}^2$.

Sea $M' = \{$Estructuras conformes en $\mathbb{R}^2\}$

Nuevamente $GL^+(\mathbb{R}^2)$ define una acción transitiva en M' :

$$GL^+(\mathbb{R}^2) \times M' \longrightarrow M'$$
$$T \times \langle \ , \ \rangle_x \longmapsto \langle T \ , T \ \rangle_x$$

Demostración:

Sólo transitividad: $\forall \langle \ , \ \rangle_x \in M' \ \exists T \in GL^+(\mathbb{R}^2)$ tal que

★ $$\langle T \ , T \ \rangle_x = \langle \ , \ \rangle$$

Sea $\{a, b\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ con métrica $\langle \ , \ \rangle_x$.

Defino $T \in GL^+(\mathbb{R}^2)$ tal que $T(e_1) = a$

$T(e_2) = b$

★ Disculpas por el abuso de notación entre clase y representante.

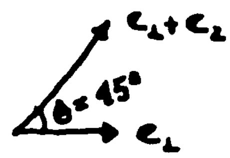
$$\langle T(e_1), T(e_1)\rangle_x = \langle a, a\rangle_x = 1 = \langle e_1, e_1\rangle$$

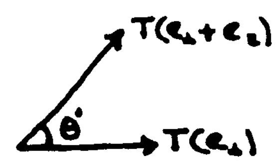
$$\Rightarrow \quad \langle T(e_1), T(e_2)\rangle_x = \langle a, b\rangle_x = 0 = \langle e_1, e_2\rangle$$

$$\langle T(e_2), T(e_2)\rangle_x = \langle b, b\rangle_x = 1 = \langle e_2, e_2\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle T\ \ , T\ \ \rangle_x = \langle\ \ ,\ \rangle . \qquad \blacksquare$$

Considerando la clase del producto escalar usual en $\mathbb{R}^2$, tenemos que su grupo de isotropía es $\mathbb{C}^*$, ya que para que $\langle T\ , T\ \ \rangle$ esté en la misma clase de $\langle\ ,\ \rangle$ tendríamos $\theta = \theta'$





$$\Rightarrow \frac{\langle T(e_1+e_2), T(e_1)\rangle}{|T(e_1+e_2)|\,|T(e_1)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\langle T(e_1), T(e_1)\rangle + \langle T(e_1), T(e_2)\rangle}{\left[\langle T(e_1+e_2), T(e_1+e_2)\rangle \langle T(e_1), T(e_1)\rangle\right]^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + \dfrac{\langle T(e_1), T(e_2)\rangle}{\langle T(e_1), T(e_1)\rangle}}{\left[1 + \dfrac{\langle T(e_2), T(e_2)\rangle}{\langle T(e_1), T(e_1)\rangle}\right]^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \langle T(e_1), T(e_2)\rangle = 0$$

$$\langle T(e_1), T(e_1)\rangle = \langle T(e_2), T(e_2)\rangle$$

$\Rightarrow T \in \mathbb{C}^*$. El inverso es fácil. $\blacksquare$

Por tanto tenemos $\quad M' \cong GL^+(\mathbb{R}^2)/\mathbb{C}^*$.

Con esto hemos logrado una identificación entre estructuras conformes y complejas en $\mathbb{R}^2$.

Para dar una representación de M que sea más manejable algebraicamente, hacemos ver que $M \cong \mathbb{H}$.
Donde $\mathbb{H}$ denota el semiplano de Poincaré.
La idea es esencialmente igual que en la primera parte:
Tenemos la acción transitiva

$$GL^+(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$$

$$T \times z \longmapsto T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

La clase de isotropía de i es $\mathbb{C}^*$.
Por tanto
$$\mathbb{H} \cong GL^+(\mathbb{R}^2)/\mathbb{C}^*$$

Como $\mathbb{H}$ es conformemente equivalente al disco unitario abierto Δ, tenemos que
$$M \cong \Delta \cong M'$$

Así tenemos identificados las estructuras complejas, conformes y el disco unitario abierto.

No tenemos, sin embargo, una manera explícita de asociar a una estructura conforme un punto de Δ, ni viceversa.
Asociemos a cada $\mu \in \Delta$ la clase de equivalencia de la forma cuadrática
$$q(x,y) = |z + \mu \bar{z}|^2 \qquad z = x + iy$$
Se puede fácilmente demostrar que $q \in M$.
Demostremos que es suprayectiva:

Sea $q(x,y) = Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 \qquad E,G > 0 \quad EG - F^2 > 0$ cualquier forma cuadrática.

$$q(x,y) = E\left(\tfrac{1}{4}(z+\bar{z})^2\right) + 2F\left(\tfrac{-i}{4}(z+\bar{z})(z-\bar{z})\right) + G\left(\tfrac{-1}{4}(z-\bar{z})^2\right)$$
$$= \left[\tfrac{1}{4}(E-G) - \tfrac{i}{2}F\right]z^2 + \left[\tfrac{1}{2}(E+G)\right]z\bar{z} + \left[\tfrac{1}{4}(E-G) + \tfrac{i}{2}F\right]\bar{z}^2$$
$$= |Az + B\bar{z}|^2 \qquad \text{supongamos}$$
$$= |A|^2 \left|z + \tfrac{B}{A}\bar{z}\right|^2$$

Por tanto, si calculo A y B escribiendo $\frac{B}{A} = \mu < 1$ terminaría.

Por ello, desarrollando:

$$|Az+B\bar{z}|^2 = (A\bar{B})z^2 + (A\bar{A}+B\bar{B})z\bar{z} + (B\bar{A})\bar{z}^2$$

$$\Rightarrow \quad (A\bar{B})(B\bar{A}) = \frac{1}{16}(E-G)^2 + \frac{F^2}{4}$$

$$A\bar{A} + B\bar{B} = \frac{1}{2}(E+G)$$

$$\Rightarrow \quad B\bar{B} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(E+G) \pm \sqrt{EG-F^2}\right] = A\bar{A}$$

El problema de elegir los signos lo resolvemos teniendo en cuenta:

$$A\bar{A} + B\bar{B} = \frac{1}{2}(E+G) \qquad \text{(tienen signos contrarios } A\bar{A} \text{ y } B\bar{B}\text{)}$$

$$|\mu|^2 = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{B\bar{B}}{A\bar{A}} < 1 \qquad \text{(tiene signo positivo } A\bar{A}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad A\bar{A} = |A|^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(E+G) + \sqrt{EG-F^2}\right]$$

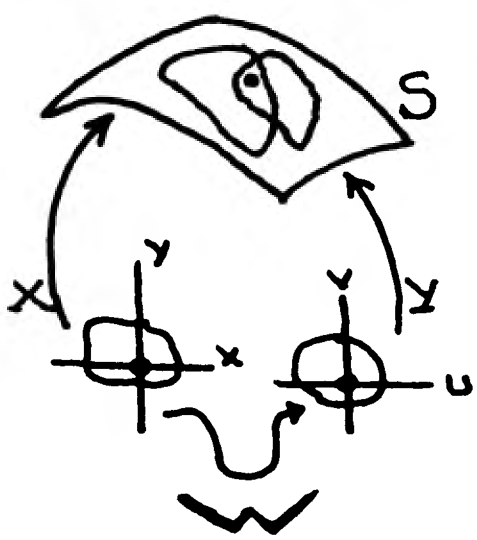
$$\mu = \frac{B}{A} = (B\bar{B})(\bar{B}A)^{-1} = \frac{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(E+G) - \sqrt{EG-F^2}\right]}{\frac{1}{4}(E-G) - \frac{i}{2}F} = \frac{\frac{1}{2}(E-G) + iF}{\frac{1}{2}(E+G) + \sqrt{EG-F^2}}$$

∎

Note que la estructura conforme usual en $\mathbb{R}^2$ es inducida por $\mu = 0$.

2 Problema de Gauss y ecuación de Beltrami.

Dada una carta $X : D \to S$ de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, tratamos de hallar otra $Y : D' \to S'$ tal que sea conforme.



Es este el problema, más conocido como el de encontrar coordenadas isotermales.

Con relación a X tengo:

$$ds^2 = E\,dx^2 + F\,dx\,dy + G\,dy^2$$

con $E, G > 0$ y $EG - F^2 > 0$.

Lo que quisiera lograr es:

$$du^2 + dv^2 = \lambda(x,y)\,ds^2.$$

Suele escribirse $ds^2 = E\,dx^2 + F\,dx\,dy + G\,dy^2$ por lo siguiente:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = |\alpha'(t)|^2 = \left|\frac{X(x(t), y(t))}{dt}\right|^2$$

$$= |X_x \cdot x(t) + X_y \cdot y(t)|^2$$

$$= \langle X_x, X_x\rangle (x'(t))^2 + 2\langle X_x, X_y\rangle x'(t)\,y'(t) + \langle X_y, X_y\rangle (y'(t))^2$$

$$= E(x'(t))^2 + 2F\,x'(t)\,y'(t) + G(y'(t))^2$$

Un primer caso estudiado por Gauss es considerar superficies como gráficas: $S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \phi(x,y) \}$

Esto implica: $ds^2 = (1+\phi_x)dx^2 + 2\phi_x \phi_y dx dy + (1+\phi_y) dy^2$

En general, dada una variedad Riemanniana queremos lograr:

$$\begin{aligned} du^2 + dv^2 &= \lambda(x,y)(E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2) \\ &= \lambda\, ds^2 \end{aligned}$$

Escribiendo $dz = dx + i\,dy$ obtengo $ds^2 = |A|^2 |dz + \mu\, d\bar{z}|^2$ como en la sección anterior, con A, μ funciones diferenciables.

Como deseo equivalencia conforme, el problema es ahora:

$$du^2 + dv^2 = \lambda |dz + \mu\, d\bar{z}|^2$$

Si tengo $W = U + iV$ U, V funciones de (x,y), como en el diagrama anterior.

Entonces

$$\begin{aligned} du^2 + dv^2 &= dW\, d\overline{W} \\ &= |dW|^2 \\ &= \left| W_z \left[dz + \frac{W_{\bar{z}}}{W_z} d\bar{z} \right] \right|^2 \\ &= |W_z|^2 \left| dz + \frac{W_{\bar{z}}}{W_z} d\bar{z} \right|^2 \end{aligned}$$

Por eso requerimos $W_{\bar{z}} = \mu W_z$ $W_z(0) \neq 0$ en una vecindad del origen.

Esta última es la llamada ecuación de Beltrami.

Podemos resumir el resultado en la proposición siguiente:

Sean $E, F, G \in C^1$ tal que $EG - F^2 > 0$ $E, G > 0$.

Sea $$\mu = \frac{\frac{1}{2}(E-G) + iF}{\frac{1}{2}(E+G) + \sqrt{EG-F^2}}$$

Si $w = u + iv \in C^1$ es una solución de $w_{\bar{z}} = \mu w_z$ cerca del origen, y $w_z(0) \neq 0$,
entonces u, v son parámetros isotermales, esto es:

1) $$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} > 0$$

2) $$du^2 + dv^2 = \lambda(x,y)(E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2).$$

Prueba:

1) $$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(w,\bar{w})}{\partial(z,\bar{z})}$$
$$= w_z \overline{w_{\bar{z}}} - w_{\bar{z}} \overline{w_z}$$
$$= |w_z|^2 - |w_{\bar{z}}|^2$$
$$= |w_z|^2 - |\mu|^2 |w_z|^2$$
$$= |w_z|^2 (1 - |\mu|^2)$$

Como $w_z(0) \neq 0$, $w \in C^1$ y $|\mu|^2 < 1$ se tiene $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} > 0$.

2) Vimos anteriormente que
$$du^2 + dv^2 = |w_z|^2 |dz + \mu\, d\bar{z}|^2$$
$$= \frac{|w_z|^2 \left[\frac{1}{4}(E - G - 2iF)\,dz^2 + \frac{1}{2}(E+G)\,dz\,d\bar{z} + \frac{1}{4}(E - G + 2iF)\,d\bar{z}^2\right]}{\frac{1}{2}(E+G) + \sqrt{EG-F^2}}$$
$$= \frac{|w_z|^2}{\frac{1}{2}(E+G) + \sqrt{EG-F^2}}(E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2)$$
$$= \lambda(x,y)(E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2).$$ ∎

La proposición anterior nos dice que el problema de encontrar coordenadas isotermales es reducido a encontrar una solución para la ecuación de Beltrami a nivel local.

Gauss probó la existencia de una solución para la ecuación de Beltrami cuando E, G, F (y por tanto también μ) son funciones analíticas reales, esto es, cuando μ puede desarrollarse en una serie de potencias en z y $\bar{z}$.

3 Ecuación de Beltrami con μ continua de Hölder.

En el problema de la ecuación de Beltrami

$w_{\bar{z}} = \mu w_z$ con $|\mu|_\infty < 1$ μ continua de Hölder, la demostración de la existencia de solución local es clásica. Las primeras pruebas fueron dadas por Lichtenstein (1916) y Korn (1919), pruebas modernizadas han sido dadas por Chern (1954) y Bers (1957).

El teorema establece que para $w_{\bar{z}} = \mu w_z$ $|\mu|_\infty < 1$ $\mu \in C^\alpha$ (μ continua de Hölder con exponente α) existe solución local $w \in C^1 \cap C^\alpha$.

Se tienen las siguientes propiedades de las soluciones w:

a) Si $\mu \in C^\alpha$ está definida para valores pequeños de z, entonces $\exists R > 0$ y una solución $w \in C^1 \cap C^\alpha$ definida para $|z| < R$ la cual es un difeomorfismo.

b) Si w y $\tilde{w}$ son soluciones, y w es un difeomorfismo, entonces $\tilde{w}$ es una función analítica de w.

c) Si w es una solución y f es analítica, entonces $\tilde{w} = f(w)$ es solución.

d) Si $\tilde{w}$ y w son soluciones, entonces $w + \tilde{w}$, $w - \tilde{w}$, $w \cdot \tilde{w}$, y si $\tilde{w} \neq 0$ $w/\tilde{w}$ son soluciones.

Demostración:

a) Sea w una solución tal que $w_z(0) \neq 0$. Entonces en toda una vecindad $w_z \neq 0$, y como vimos anteriormente:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = |w_z|^2 (1 - |\mu|^2)$$

lo cual implica que w es un difeomorfismo local.

b) Como $\tilde{w} \in C^1$ y w es difeomorfismo:

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \bar{w}} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \bar{w}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \bar{z}}\cdot\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{w}}$$

$$= \left(\frac{\partial(w,\bar{w})}{\partial(z,\bar{z})}\right)^{-1}\left(-\frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}\cdot\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \bar{z}}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial(w,\bar{w})}{\partial(z,\bar{z})}\right)^{-1}\left(-\tilde{w}_z w_{\bar{z}} + \tilde{w}_{\bar{z}} w_z\right)$$

$$= \left(\frac{\partial(w,\bar{w})}{\partial(z,\bar{z})}\right)^{-1}\left(-\mu\tilde{w}_z w_z + \mu\tilde{w}_z w_z\right)$$

$$= 0$$

c) Sea $\tilde{w} = f(w)$, entonces

$$\tilde{w}_{\bar{z}} = f'(w)\, w_{\bar{z}}$$
$$= \mu f'(w)\, w_z$$
$$= \mu \tilde{w}_z$$

d) $w+\tilde{w}$, $w-\tilde{w}$ son soluciones, ya que la ecuación es lineal.

$$(w\cdot\tilde{w})_{\bar{z}} = w_{\bar{z}}\cdot\tilde{w} + w\cdot\tilde{w}_{\bar{z}}$$
$$= \mu\left(w_z\cdot\tilde{w} + w\cdot\tilde{w}_z\right)$$
$$= \mu\left(w\cdot\tilde{w}\right)_z$$

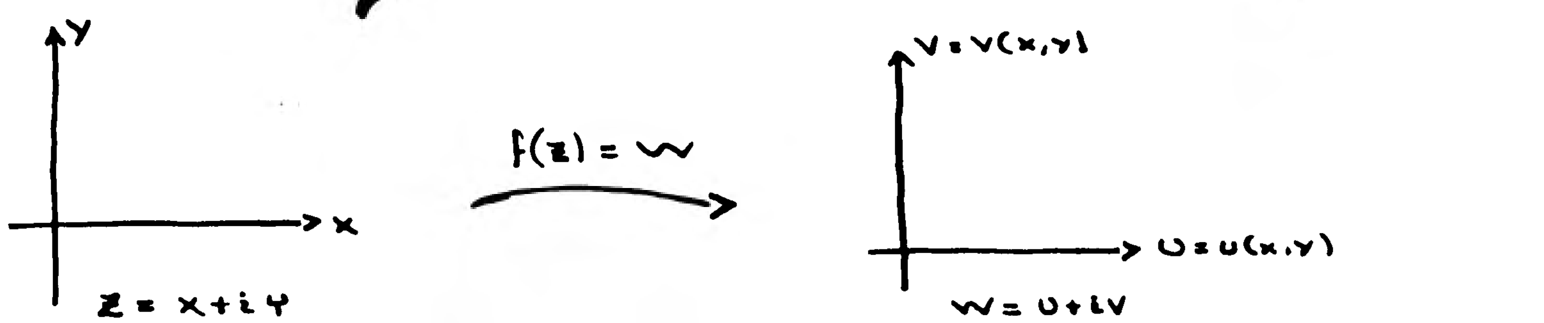
$$\left(\frac{w}{\tilde{w}}\right)_{\bar{z}} = \frac{\tilde{w}w_{\bar{z}} - \tilde{w}_{\bar{z}}w}{\tilde{w}^2}$$
$$= \mu\,\frac{\tilde{w}w_z - \tilde{w}_z w}{\tilde{w}^2}$$
$$= \mu\left(\frac{w}{\tilde{w}}\right)_z .$$

$\blacksquare$

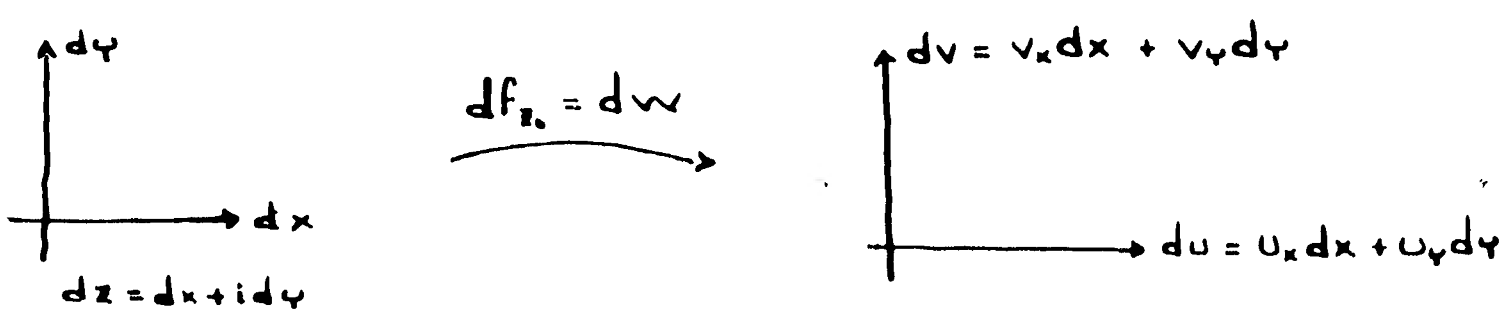
Difeomorfismos casiconformes.

Es Grötzsch quien introduce la noción de casiconforme en el año de 1928, pero no es hasta 1937 que Teichmüller comienza a probar importantes teoremas con esta técnica.
Siendo los mapeos casiconformes una generalización natural de mapeos conformes, se empezó a notar que muchos teoremas en mapeos conformes usaban solamente casiconformalidad, y fué de interés determinar cuando la conformidad era esencial y cuando no. Los mapeos casiconformes son menos rígidos de manejar que los mapeos conformes, y fueron una de las herramientas que ayudó a resolver el problema de Moduli.

Sea $w = f(z)$ un difeomorfismo de una región a otra:



En un punto z_0 induce el mapeo lineal de las diferenciales:



Un difeomorfismo f es casiconforme si D_f es acotada.

Se dice que es K-casiconforme si $D_f \leq K$.

Así, un difeomorfismo f es K-casiconforme, si y sólo si

$$f_{\bar{z}} = \mu f_z \qquad \text{con} \qquad |\mu| \leq \frac{K-1}{K+1} < 1$$

¡(Es decir, si f satisface una ecuación de Beltrami)!

Estructuras complejas y conformes en una superficie.

En adelante S denotará una superficie diferenciable (2-variedad), conexa, orientada, compacta.

Decimos que dos métricas Riemannianas diferenciables en S son conformemente equivalentes si ellas son proporcionales en cualquier punto. Llamamos a una clase de equivalencia de métricas una "estructura conforme" en S.

Del haz principal $GL^+(\mathbb{R}^2)$ de S construimos el haz homogéneo asociado, con fibra $M = GL^+(\mathbb{R}^2)/\mathbb{C}^*$.

Denotamos por $\mathcal{M}(S)$ el espacio de secciones diferenciables de este haz M, dotado con la C^∞-topología (la topología de convergencia uniforme de la función y todas sus derivadas en subconjuntos compactos de S).

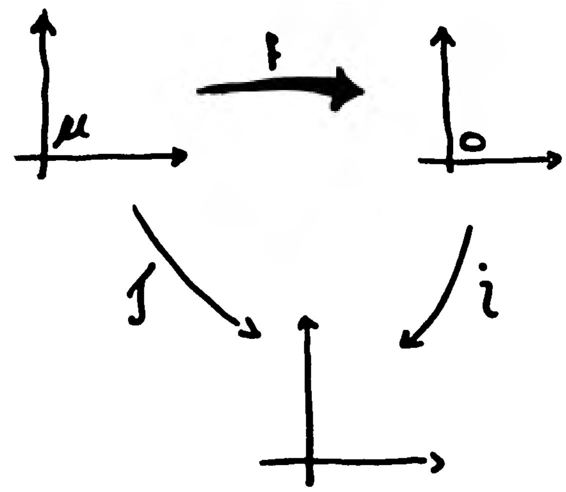
Los elementos de $\mathcal{M}(S)$ son conocidos como las estructuras casicomplejas en S las cuales son compatibles con su orientación.

"*Una estructura casicompleja J en $\mathbb{R}^2$ es compleja si existe un f difeomorfismo tal que* $f^*(i) = J$

En general, en $\mathbb{R}^{2N}$, no toda estructura casicompleja es compleja. (con una definición generalizada).

Sin embargo, en el caso de $\mathbb{R}^2$ sí sucede. Esto es debido a que si damos representaciones de J e i como en la sección 1, el problema se reduce a resolver la ecuación de Beltrame

$$f_{\bar z} = \mu f_z$$



Como demostraremos que en este caso siempre existe solución para la ecuación de Beltrame, tenemos que todas las estructuras casicomplejas son complejas en $\mathbb{R}^2$.

Se dice también que cualquier estructura casicompleja en $\mathbb{R}^2$ es integrable."

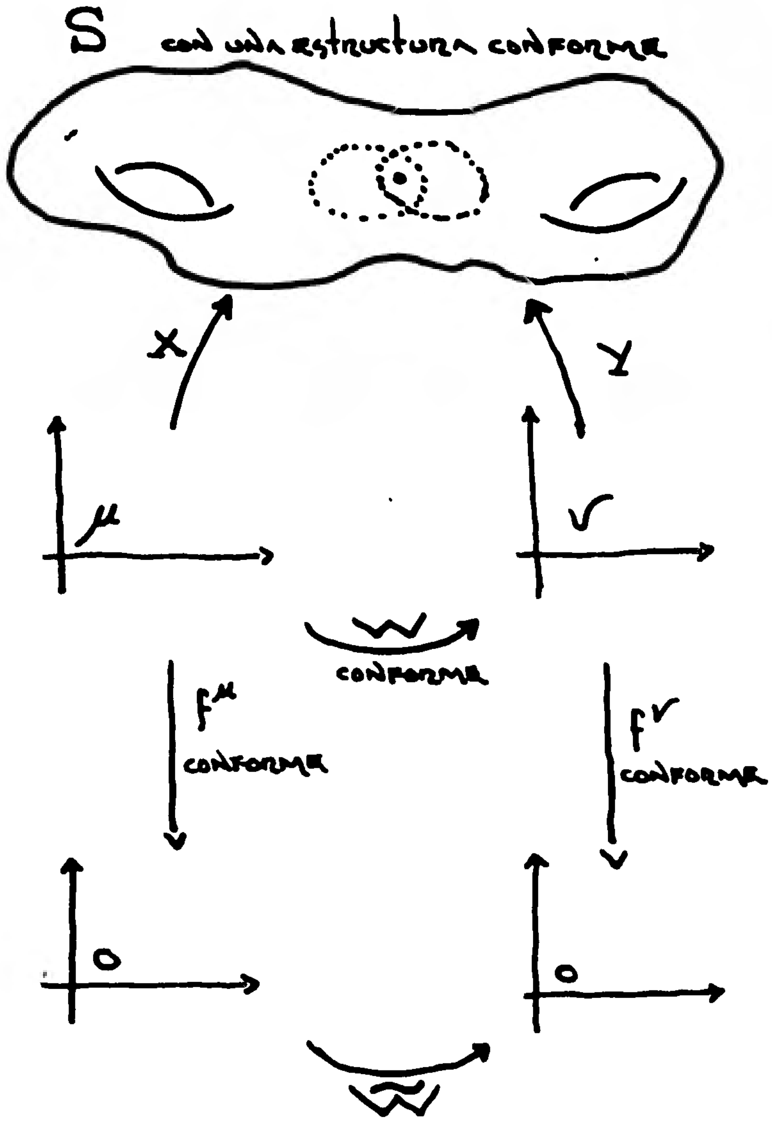
Así, $\mathcal{M}(S)$ es el espacio de estructuras complejas en S.

De acuerdo a la identificación hecha en la sección 1, el espacio de estructuras complejas puede ser considerado como el espacio de estructuras conformes.

Definimos una "Superficie de Riemann" como una una superficie orientada con una estructura conforme.

Una definición alterna de Superficie de Riemann dice que es una 1-variedad compleja conexa.

De hecho, de la primera definición tenemos que los mapeos conformes preservando orientación, (Sección 2) de conjuntos abiertos de S en el plano complejo (con su métrica usual) forman un atlas analítico complejo de S. Explícitamente:



Sean (X, D_1) y (Y, D_2) cartas de S que preservan orientación.

Sean μ, ν las métricas inducidas por la estructura conforme, lo cual implica que W es conforme con respecto a estas métricas.

Los mapeos f^{μ} y f^{ν} son conformes por ser soluciones, respectivamente, de las ecuaciones de Beltrami

$$f_{\bar{z}} = \mu f_z$$

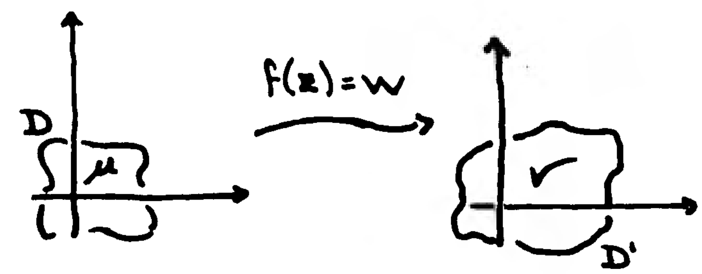
$$f_{\bar{z}} = \nu f_z \, .$$

Por tanto, $\tilde{W}$ es conforme.

Conversamente, cualquier 1-variedad compleja conexa tiene una orientación natural (Jacobiano > 0) y es un hecho clásico (seguido del teorema de uniformización) que S tiene una métrica Riemanniana natural. (La inducida por su cubriente universal).

Un mapeo conforme entre superficies de Riemann es un difeomorfismo que preserva orientación, el cual es conforme con respecto a las estructuras conformes dadas.

En el caso del plano tendríamos:



La estructura conforme en D' estaría representada por

$$|dw + \nu d\bar{w}|$$

Entonces

$$|(f_z + (\nu\circ f)\bar{f}_z)\,dz + (f_{\bar z} + (\nu\circ f)\bar{f}_{\bar z})\,d\bar{z}|$$

Si f fuera conforme, es decir: $f^*(\nu) = \mu$

se cumpliría la relación:

$$\mu = \frac{f_{\bar z} + (\nu\circ f)\bar{f}_{\bar z}}{f_z + (\nu\circ f)\bar{f}_z}$$

Cuando ν es la estructura conforme usual $\nu = 0$, tenemos:

f es conforme sii $f^*(0) = \mu$

sii $f_{\bar z} = \mu f_z$.

(Nuevamente la ecuación de Beltrami).

Diferenciales de Beltrami.

Comentario.

El cubriente universal tiene una estructura de superficie de Riemann, tal que la proyección π es holomorfa. Entonces el cubriente universal es una superficie de Riemann simplemente conexa y de acuerdo al teorema de uniformización es biholomorfo a la esfera S^2, al plano $\mathbb{C}$ o al disco unitario Δ (El cual es biholomorfo al semiplano de Poincaré) con su estructura conforme usual.

Además la superficie de Riemann puede recobrarse como el cociente (que tiene estructura de superficie de Riemann) del cubriente universal bajo el grupo de transformaciones biholomorfas del cubriente que conmutan con la proyección π.

Se dice que G es el grupo de transformaciones cubrientes.

Se demuestra también que para $g \geq 2$ toda superficie de Riemann compacta tiene al semiplano de Poincaré $\mathbb{H}$ como cubriente universal.

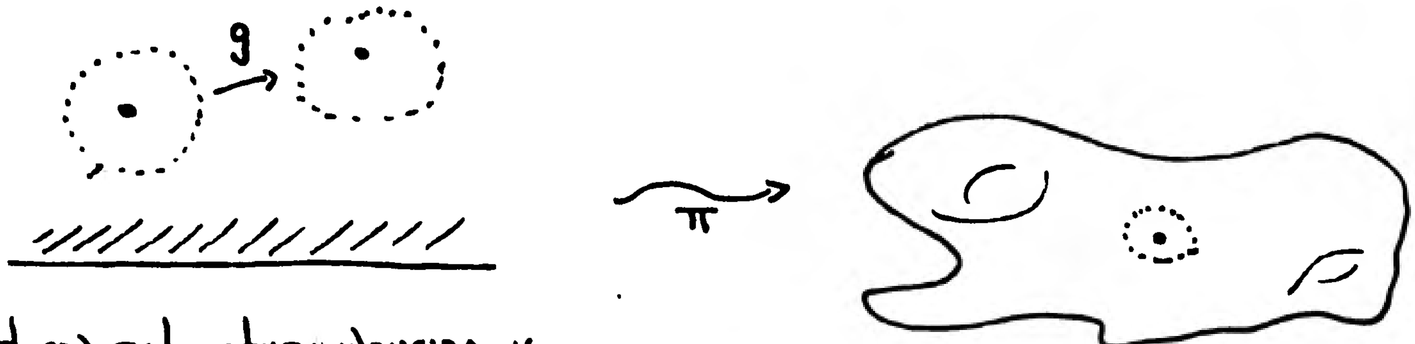
En el resto de la sección supondremos S de género $g \geq 2$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{H} \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{H} \arrow[dl, "\pi"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Si $g \in G$ el diagrama conmuta.

$$S \cong \mathbb{H}/G.$$

Ahora, la superficie de Riemann S induce una estructura conforme en $\mathbb{H}$, y es inmediato que cualquier transformación cubriente $g \in G$ será conforme con la estructura inducida.



$\mathbb{H}$ con estructura inducida μ

S con una estructura conforme.

La pregunta es ahora: ¿Qué estructuras μ en $\mathbb{H}$ tendrán la propiedad de que $g \in G$ es conforme? (Para toda $g \in G$). Ya que entonces se podrían pasar al espacio cociente $\mathbb{H}/G \cong S$.

Y conversamente, si elegimos un grupo de transformaciones G de $\mathbb{H}$ con ciertas propiedades y tomamos una estructura conforme μ en $\mathbb{H}$ tal que g es conforme para toda $g \in G$, obtendremos una superficie de Riemann $\mathbb{H}/G$ con la estructura conforme inducida por μ.

Consideremos:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}_{\mu} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f^{\mu}\ \text{conforme}"] & \mathbb{H}_{\mu} \arrow[d, "f^{\mu}\ \text{conforme}"] \\
\mathbb{H}_{\blacksquare} \arrow[r, "h"'] & \mathbb{H}_{\blacksquare}
\end{tikzcd}$$

Donde f^{μ} es solución de la ecuación de Beltrami

$$f_{\bar{z}} = \mu f_{z}$$

Tenemos las siguientes condiciones equivalentes:

i) g es conforme.

ii) h es conforme.

iii) $h\circ f = f\circ g$ es solución de $W_{\bar z} = \mu W_z$.

iv) $\mu(g(z))\dfrac{\overline{g'(z)}}{g'(z)} = \mu(z) \qquad \forall z\in H,\ g\in G.$

Demostración:

Es fácil ver i) $\Leftrightarrow$ ii) $\Leftrightarrow$ iii)

Demostremos iii) $\Rightarrow$ iv):

$$\mu = \frac{W_{\bar z}}{W_z} \qquad \text{Hipótesis.}$$

$$= \frac{(f_z\circ g)g_{\bar z} + (f_{\bar z}\circ g)\bar g_{\bar z}}{(f_z\circ g)g_z + (f_{\bar z}\circ g)\bar g_z} \qquad \text{Regla de la cadena.}$$

$$= \frac{(f_{\bar z}\circ g)\bar g_{\bar z}}{(f_z\circ g)g_z} \qquad \text{Por ser } g \text{ conforme.}$$

$$\left[\ \mu(g(z)) = \frac{f_{\bar z}\circ g}{f_z\circ g} \qquad \bar g_{\bar z} = \overline{g_z}\ \right]$$

$$\mu(z) = \mu(g(z))\frac{\overline{g_z}}{g_z}$$

$$= \mu(g(z))\frac{\overline{g'(z)}}{g'(z)}$$

Ahora que iv) $\Rightarrow$ iii) es lo anterior. (Regresar).

Llamaremos diferenciales de Beltrami a las μ que satisfacen iv). Otra forma de expresar la condición iv) es que $\mu(z)\frac{d\bar{z}}{dz}$ es invariante bajo G:

$$\mu(g(z))\frac{d(\overline{g(z)})}{d(g(z))} = \mu(g(z))\frac{\bar{g}_z dz + \bar{g}_{\bar{z}} d\bar{z}}{g_z dz + g_{\bar{z}} d\bar{z}}$$

$$= \mu(g(z))\frac{\overline{g_{\bar{z}}}\, dz + \overline{g_z}\, d\bar{z}}{g_z dz + g_{\bar{z}} d\bar{z}}$$

$$= \mu(g(z))\frac{\overline{g_z}\, d\bar{z}}{g_z\, dz}$$

$$= \mu(g(z))\frac{\overline{g'(z)}\, d\bar{z}}{g'(z)\, dz}$$

$$= \mu(z)\frac{d\bar{z}}{dz}.$$

Por todo lo anterior, nos damos cuenta que resulta interesante e importante resolver la ecuación de Beltrami.

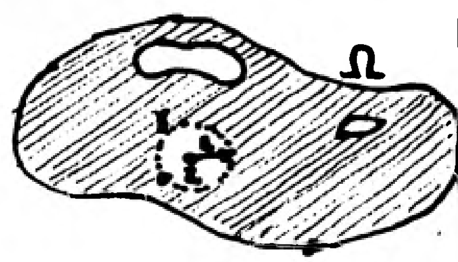
7 Introducción a la resolución de la Ecuación de Beltrami.

Como la intención es resolver y estudiar los resultados de la ecuación de Beltrami $w_{\bar z} = \mu w_z$ trataremos de dar toda la información posible de w antes de intentar resolver el problema.

Si acudimos a Cauchy (Stokes) nos afirma lo siguiente

$$w(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{w(\xi)}{\xi - z}\, d\xi}_{(Hw)(z)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\iint_{\Omega} \frac{w_{\bar\xi}}{\xi - z}\, d\xi\, d\bar\xi}_{(Pw_{\bar z})(z)}$$

" *Las líneas de la demostración son las siguientes:*



$\Omega_\varepsilon = \{\xi \in \Omega \mid |\xi - z| > \varepsilon\}$ con $\varepsilon < d(z, \partial\Omega)$

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{w(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = -\iint_{\Omega_\varepsilon} \frac{w_{\bar\xi}(\xi)}{\xi - z}\, d\xi\, d\bar\xi$$

$$\int_{\partial\Omega} \frac{w(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \int_{\gamma} \frac{w(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = -\iint_{\Omega_\varepsilon} \frac{w_{\bar\xi}(\xi)}{\xi - z}\, d\xi\, d\bar\xi$$

$$w(z) = \left(\int_{\partial\Omega} \frac{w(\xi)}{\xi - z}\, d\xi + \iint_{\Omega} \frac{w_{\bar\xi}(\xi)}{\xi - z}\, d\xi\, d\bar\xi\right)\frac{1}{2\pi i} \quad \blacksquare$$ "

Algunas consecuencias sencillas de este teorema:

$$\bar{z} = \frac{1}{2\pi i} \iint_{B_R} \frac{d\xi \, d\bar{\xi}}{\xi - z} \qquad |z|^2 = \frac{1}{2\pi i} \iint_{B_R} \frac{\bar{\xi}\, d\xi}{\xi - z} d\bar{\xi} + R^2$$

con $|z| < R$.

Hemos factorizado W en dos partes: una función holomorfa HW y otra no holomorfa $PW_{\bar{z}}$

Así vemos que para calcular W_z y $W_{\bar{z}}$ sólo tendremos problemas con $PW_{\bar{z}}$, es decir, trataremos de decir quién es $(PW_{\bar{z}})_z$ y $(PW_{\bar{z}})_{\bar{z}}$.

Sin embargo, por razones técnicas que se verán en las demostraciones hechas en el apéndice de esta tesis, $PW_{\bar{z}}$ es transformada en

$$(PW_{\bar{z}})(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Omega} W_{\bar{\xi}}(\xi) \left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi} \right) d\xi \, d\bar{\xi}$$

Este cambio no afecta gran cosa nuestra discusión anterior (sólo hemos restado una constante):

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{W(\xi)\, d\xi}{\xi - z} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{W(\xi)\, d\xi}{\xi} - \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Omega} \frac{W_{\bar{\xi}}(\xi)}{\xi} d\xi\, d\bar{\xi}}_{0} + \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Omega} \frac{W_{\bar{\xi}}(\xi)}{\xi - z} d\xi\, d\bar{\xi}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{W(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{W(\xi)}{\xi} d\xi}_{(HW)(z)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \iint_{\Omega} W_{\bar{\xi}}(\xi) \left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi} \right) d\xi\, d\bar{\xi}}_{(PW_{\bar{z}})(z)}$$

En adelante denotaremos por Ω todo el plano complejo.

Consideraremos los operadores lineales P y T definidos por

$$(Pw)(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Omega} w(\xi) \left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi} \right) d\xi \, d\bar{\xi} .$$

$$(Tw)(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{w(\xi) - w(z)}{(\xi - z)^2} \, d\xi \, d\bar{\xi}$$

Lema 1. Supongamos que $w \in L_p(\Omega)$, $p > 2$.

Entonces Pw existe dondequiera como una integral absolutamente convergente, (Es en este punto donde se requiere $p > 2$ y el término de corrección de Pw) y Tw existe casi dondequiera como un límite principal de Cauchy.

Se cumplen las relaciones:

*(1) $\quad (Pw)_z = Tw \qquad (Pw)_{\bar{z}} = w$

*(2) $\quad |Pw(z_1) - Pw(z_2)| \leq c_p \|w\|_p |z_1 - z_2|^{1 - \frac{2}{p}}$

*(3) $\quad \|(Pw)_z\|_p = \|Tw\|_p \leq C_p \|w\|_p = C_p \|(Pw)_{\bar{z}}\|_p$

Para $p = 2$ se tiene $C_p = 1$, es decir $\|Tw\|_2 = \|w\|_2$

*(4) $\quad \lim_{p \to 2} C_p = 1 .$

El resultado *(3) es debido a Calderón y Zygmund.

Este lema constituye la parte más técnica de este trabajo, y lo demuestro en el Apéndice 3.

Es sumamente importante, y podríamos decir que es aquí donde se resuelve la ecuación de Beltrami.

8 Resolución de la Ecuación de Beltrami.

En adelante todas las funciones denotadas por μ, con o sin suscripto, están sujetas a la restricción $\|\mu\|_\infty \leq K$ con K fijo y $K < 1$. ($\mu: \Omega \to \Omega$ medible.).

El exponente p será tal que satisfaga:

$*(5)$ $\qquad p > 2 \qquad KC_p < 1$.

Por $*(4)$ siempre existe tal p, cualquiera que sea el valor de K.

Introducimos el espacio de Banach

$$B_p = \left\{ w: \Omega \to \Omega \;\middle|\; \begin{array}{l} w(0)=0 \quad \exists\, w_z, w_{\bar z} \in L_p(\Omega) \\ w \text{ es de Hölder (global) de orden } 1-\frac{2}{p} \end{array} \right\}$$

La norma en B_p está definida por

$$\|w\|_{B_p} = \sup \frac{|w(z_1) - w(z_2)|}{|z_1 - z_2|^{1-2/p}} + \|w_z\|_p + \|w_{\bar z}\|_p$$

Teorema 1. Si $\sigma \in L_p(\Omega)$ entonces la ecuación

$$*(6) \qquad W_{\bar z} = \mu W_z + \sigma$$

tiene una única solución $W^{\mu,\sigma} \in B_p$.

Demostración:

Demostraremos primero la unicidad. Esto es equivalente a que la solución de la ecuación homogénea $W_{\bar z} = \mu W_z$ es cero si $w \in B_p$.

Sabemos que $\quad W = F + PW_{\bar z} \quad$ (donde F es holomorfa)

$$\Longrightarrow \quad W_z = F' + TW_{\bar z} \qquad \text{por } *(1)$$

$$= F' + T(\mu W_{\bar z})$$

$$\Longrightarrow \quad \|F'\|_p \leq \|W_z\|_p + \|T(\mu W_{\bar z})\|_p$$

$$\leq \|W_z\|_p + C_p \|\mu W_{\bar z}\|_p \qquad \text{por } *(3)$$

$$\leq (1 + KC_p)\|W_z\|_p$$

$$\Longrightarrow \quad F \text{ es constante}$$

$$\Longrightarrow \quad F' = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \|W_z\|_p \leq KC_p \|W_z\|_p \qquad (\text{por } *(5):\ KC_p < 1)!$$

Una contradicción a menos que $W_z = 0$, $W = 0$. $(W(0) = 0)$

Para la existencia, consideremos que tenemos una solución dada por el operador lineal P:

$$*(7) \qquad W = P(\mu f + \sigma)$$

Para que se cumpla $*(6)$: $\qquad W_{\bar z} = \mu f + \sigma$ $\qquad$ por $*(1)$

necesitamos que $\qquad w_z = f$

es decir que necesitamos resolver $\qquad f = T(\mu f + \sigma)$ $\qquad$ por $*(1)$

La solución f en $L_p(\Omega)$ sería

$$f = \lim f_N \qquad f_N = (T\mu)^N(\varphi_0) + \sum_{i=0}^{N-1} (T\mu)^i (T\sigma) .$$

Pero $T\mu$ es una contracción en $L_p(\Omega)$: $\quad \|T\mu\|_p \leq KC_p < 1$

y además $\sum (T\mu)^i (T\sigma)$ es absolutamente convergente en $L_p(\Omega)$

Lo cual implica que existe $f \in L_p(\Omega)$ como queremos.

$$\left(\|f\|_p \leq \|T\mu\|_p \|f\|_p + \|T\|\|\sigma\| \quad \Rightarrow \quad \|f\|_p \leq \text{const}(K,p) \|\sigma\|_p \right)$$

Por tanto, $\qquad w = P(\mu f + \sigma)$

es solución de $\qquad w_{\bar z} = \mu w_z + \sigma$.

Claramente $w_z, w_{\bar z} \in L_p(\Omega)$.

De acuerdo con $*(2)$:

$*(7')$
$$\begin{aligned} |w(z_1) - w(z_2)| &= |P(\mu f+\sigma)(z_1) - P(\mu f+\sigma)(z_2)| \\ &\leq c_p \|\mu f + \sigma\|_p \, |z_1 - z_2|^{1-2/p} \\ &\leq \text{const}(K,p) \, \|\sigma\|_p \, |z_1 - z_2|^{1-2/p} \end{aligned}$$

Así $\quad w \in B_p$. ■

Como un corolario inmediato de la demostración tenemos que $\sigma \mapsto W^{\mu,\sigma}$ es una transformación lineal acotada de $L_p(\Omega)$ a B_p.

(Tenemos $\quad (W^{\mu,\sigma_1} + W^{\mu,\sigma_2})_{\bar z} = W_{\bar z}^{\mu,\sigma_1} + W_{\bar z}^{\mu,\sigma_2}$

$$= \mu (\Sigma W^{\mu,\bullet})_z + (\sigma_1 + \sigma_2)$$

así, $W^{\mu,\sigma_1} + W^{\mu,\sigma_2}$ es solución de $W_{\bar z} = \mu W_z + (\sigma_1 + \sigma_2)$

como la solución es única $\quad W^{\mu,\sigma_1} + W^{\mu,\sigma_2} = W^{\mu,\sigma_1+\sigma_2}$.

$$\|W\|_{B_p} = \sup \frac{|w(z_1) - w(z_2)|}{|z_1 - z_2|^{1-2/p}} + \|W_z\|_p + \|W_{\bar z}\|_p$$

$$\leq \left(\text{const}(K,p)\,\|\sigma\|_p\right) + \left(\text{const}(K,p)\|\sigma\|_p\right) + \left(\text{const}(K,p)\, K\|\sigma\|_p + \|\sigma\|_p\right)$$

$$\leq \text{const}(K,p)\,\|\sigma\|_p \;\blacksquare\;).$$

Ahora bien, ya que $W^{\mu,\sigma}$ depende continuamente en σ y como la cota no depende de μ la continuidad es uniforme con repecto a μ. Mostrando que $W^{\mu,\sigma}$ es también continua en μ, la continuidad simultánea en μ y σ se seguiría, pero esto es fácil de probar directamente.

9 Continuidad, Diferenciabilidad y Analiticidad:

Teorema 2. Si $\mu_n \to \mu$ casi en cualquier lado y $\|\tau_n - \tau\|_p \to 0$, entonces $w^{\mu_n,\tau_n} \to w^{\mu,\tau}$.

Es decir, el mapeo $(\mu,\tau) \longmapsto w^{\mu,\tau}$ de un abierto de $L_\infty(\Omega)\times L_p(\Omega)$ a B_p es continuo. (El abierto es $B_k(0)\times L_p(\Omega)$)

Demostración: Sean

$$\Phi = w^{\mu_n,\tau_n} - w^{\mu,\tau}$$

$$q_n = w_{\bar z}^{\mu_n,\tau_n}$$

$$q = w_{\bar z}^{\mu,\tau}$$

$$\Rightarrow \Phi_{\bar z} = \mu_n q_n - \mu q + \tau_n - \tau$$

$$= \mu_n \Phi_{\bar z} + (\mu_n - \mu) q + \tau_n - \tau$$

*(8) $\Rightarrow \Phi = w^{\mu_n,\lambda}$ con $\lambda = (\mu_n - \mu)q + \tau_n - \tau$.

Pero $\|\lambda\|_p \to 0$ (Convergencia dominada)

$\Rightarrow \|\Phi\|_{B_p} \to 0$ (por continuidad en τ de $w^{\mu,\tau}$).

$\Rightarrow \Phi \to 0$ en B_p.

$\Rightarrow w^{\mu_n,\tau_n} \longrightarrow w^{\mu,\tau}$. ∎

De la demostración obtenemos la estimación:

$$*(9) \quad \| W^{\mu_1,\sigma_1} - W^{\mu_2,\sigma_2} \|_{B_p} \leq \operatorname{Cons}(K,p)\left(\|\mu_1-\mu_2\|_\infty \|\sigma_2\|_p + \|\sigma_1-\sigma_2\|_p \right)$$

" *Definiremos diferenciabilidad:*

. Sean V y W espacios lineales normados, y sea A un abierto de V. Una función $F: A \to V$ es diferenciable en A, si para todo $x_0 \in A$ existe una transformación lineal acotada $T: V \to W$ tal que

$$F(x_0+h) - F(x_0) = T(h) + o(h)$$

Se acostumbra usar la notación:

$$\Delta F_{x_0}(h) = dF_{x_0}(h) + o_{x_0}(h) .$$ "

Teorema 3. El mapeo $(\mu,\sigma) \longmapsto W^{\mu,\sigma}$ es diferenciable.

Demostración:

De acuerdo con $*(8)$:

$$W^{\mu_0+m,\,\sigma_0+s} - W^{\mu_0,\sigma_0} = \underset{\cdots\cdots\cdots}{W^{\mu_0,\lambda}} \quad (\text{con } \lambda = mq_0+s)$$
$$+ W^{\mu_0+m,\lambda} - \underset{\cdots\cdots\cdots}{W^{\mu_0,\lambda}}$$

Proponemos como diferencial del mapeo a

$$T(m,s) = W^{\mu_0,\lambda}$$

Claramente T es lineal acotada:

$$\begin{tikzcd}
(m,s) \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "T"'] & \lambda \arrow[r, mapsto] & W^{\mu_0,\lambda}
\end{tikzcd}$$

Además

$$\| W^{\mu_0+m,\lambda} - W^{\mu_0,\lambda} \|_{B_p} \leq \mathrm{Const}(K,p)\, \|m\|_\infty \|\lambda\|_p$$ por [illegible]

En conclusión:

$$W^{\mu_0+m,\sigma_0+s} - W^{\mu_0,\sigma_0}$$

$$= \underbrace{W^{\mu_0,\lambda}} + \underbrace{W^{\mu_0+m,\lambda} - W^{\mu_0,\lambda}}$$

$$= T(m,s) + o(m,s) \qquad \blacksquare$$

Corolario 1. Si σ y μ son diferenciables (analíticas), entonces $W^{\mu,\sigma}$ es diferenciable (analítica).

10 Propiedades locales de mapeos μ-conformes.

En esta sección adicionamos el supuesto de que μ se desvanece fuera de un compacto fijo.

Una solución continua de $f_{\bar z} = \mu f_z$ (no necesariamente biyectiva) se dice que es μ-conforme si f_z es localmente de clase L_2.

Teorema 4. Existe una única función μ-conforme f^μ con $f^\mu(0)=0$ $f^\mu_z - 1 \in L_p(\Omega)$.
Está dada por

$$*(11) \qquad f^\mu(z) = z + w^{\mu,\mu}(z).$$

Demostración:

$$f^\mu_{\bar z} = w^{\mu,\mu}_{\bar z} = \mu w_z + \mu = \mu(w_z + 1) = \mu f^\mu_z .$$

$$f^\mu(0) = 0 + w^{\mu,\mu}(0) = 0$$

$$f^\mu_z - 1 = w^{\mu,\mu}_z \in L_p(\Omega)$$

Como $p>2$ entonces f^μ_z es localmente de clase L_2. ∎

Esperamos que si μ es diferenciable también lo sea f^μ.

Se puede debilitar la hipótesis:

Teorema 5. Si $\mu_z \in L_p(\Omega)$, entonces $f^\mu \in C^1$.
También f^μ es un homeomorfismo del plano en el plano, y su Jacobiano es positivo.

Demostración:

Quiero un $f^\mu \in C^1$. Intentando aplicar la variante del Lema de Weyl del apéndice 2, trataría de hallar una λ continua tal que

$$*(12) \quad \begin{aligned} f_z &= \lambda \\ f_{\bar z} &= \mu\lambda \end{aligned} \qquad \lambda_{\bar z} = (\mu\lambda)_z$$

Lo primero es mostrar que μ es continua:

$$\bar\mu = F + P\bar\mu_{\bar z} \qquad F \text{ holomorfa}$$
$$= F + P\overline{\mu_z}$$

esto implica que μ es continua.

Sea $\rho = W,^{\mu,\mu_z}$ y $\lambda = e^\rho$

$$\Rightarrow \lambda_{\bar z} = e^\rho_{\bar z} = \rho_{\bar z}\, e^\rho$$
$$= (\mu W_z^{\mu,\mu_z} + \mu_z)\lambda$$
$$= \mu(\lambda W_z^{\mu,\mu_z}) + \mu_z\lambda$$
$$= \mu\lambda_z + \mu_z\lambda$$
$$= (\mu\lambda)_z$$

Por tanto, existe una $f^\mu \in C^1$ que cumple *(12).

El jacobiano de f^μ es

$$|f^\mu_z|^2 - |f^\mu_{\bar z}|^2 = \lambda^2(1-|\mu|^2) > 0 .$$

Así, f^μ es difeomorfismo local.

Sólo falta checar infinito.

Ahora: $f^\mu_{\bar z} = \mu\lambda$ (f^μ es analítica cerca de ∞)

y $f^\mu_z(\infty) = \lambda(\infty) = e^{\rho(\infty)}$.

($\rho_{\bar z} = \mu W^{\mu,\mu_z} + \mu_z = 0$ cerca de ∞, así ρ es holomorfa cerca de ∞, lo que implica que $\rho(\infty) =$ constante.)

De aquí que: El jacobiano de f^μ cerca de ∞ es mayor que cero.
Y $f^\mu(\infty) = \infty$ (f^μ es analítica en ∞).

Por lo anterior, f^μ es un mapeo cubriente de S^2 en S^2 (Es suprayectivo por ser f^μ abierto y S^2 compacta) y como S^2 es arco conexo y simplemente conexo tenemos que f^μ es un homeomorfismo global. ∎

【La solución normalizada sería $e^{-\rho(\infty)}(f^\mu(z) - f^\mu(0))$】

Teorema 6. Siempre es f^μ un homeomorfismo del plano en el plano.

Siempre es posible encontrar una sucesión $\{\mu_n\}$, $\mu_n \in C^1$ con soporte compacto fijo, tal que

$$\mu_n \to \mu \qquad \text{casi dondequiera.}$$

En consecuencia $\|\mu_n - \mu\|_p \to 0$

y de acuerdo con el teorema 2 : $\quad f^{\mu_n} \to f^{\mu}$ en B_p.

Pero f^{μ_n} es un homeomorfismo.

Denotaremos : f^{μ_n} como f_n

$(f^{\mu_n})^{-1}$ como g_n.

Por el Apéndice 1 tenemos:

$$(g_{n,\bar{z}}) \circ f_n = \frac{-\bar{f}_{n\bar{z}}}{\bar{f}_{n\bar{z}}} (g_{n,z}) \circ f_n$$

$$g_{n,\bar{z}} = \left(-\frac{f_{n,z}}{\bar{f}_{n,\bar{z}}} \cdot \frac{f_{n,\bar{z}}}{f_{n,z}}\right) \circ g_n \cdot g_{n,z}$$

$$\Rightarrow g_{n,\bar{z}} = \nu_n \, g_{n,z} \qquad \text{con } \nu_n = \left(-\frac{f_{n,z}}{\bar{f}_{n,\bar{z}}} \cdot \mu_n\right) \circ g_n$$

Tratamos de calcular $\|\nu_n\|_p$; usaremos Fubini, la desigualdad de Hölder y el hecho de que

$$\| f_{n,\bar{z}} \|_p = \| w_{\bar{z}}^{\mu_n, \mu_n} \|_p \leq c \|\mu_n\|_p$$

$$\iint_\Omega |\nu_N|^p \,dx\,dy = \iint_\Omega |\mu_N|^p \left(|f_{N,z}|^2 - |f_{N,\bar z}|^2 \right) dx\,dy$$

$$= \iint_\Omega |\mu_N|^p \left(\frac{|f_{N,\bar z}|^2}{|\mu_N|^2} - |f_{N,\bar z}|^2 \right) dx\,dy$$

$$= \iint_\Omega |\mu_N|^{p-2} \left[(1 - |\mu_N|^2) |f_{N,\bar z}|^2 \right] dx\,dy$$

$$\leq \iint_\Omega |\mu_N|^{p-2} \cdot |f_{N,\bar z}|^2 \,dx\,dy$$

$$\leq \left(\iint_\Omega |\mu_N|^p \,dx\,dy \right)^{1-\frac{2}{p}} \left(\iint_\Omega |f_{N,\bar z}|^p \,dx\,dy \right)^{\frac{2}{p}}$$

$$= \|\mu_N\|_p^{p-2} \|f_{N,\bar z}\|_p^2$$

$$\leq \|\mu_N\|_p^{p-2} c^2 \|\mu_N\|_p^2$$

$$= c \|\mu_N\|_p^p$$

$$\Rightarrow \quad \|\nu_N\|_p \leq c \|\mu_N\|_p$$

Ahora, como $g_N = f^{\nu_N}$ $\Big[$ $f^{\nu_N} \circ f^{\mu_N}$ es analítica, homeomorfismo, $(f^{\nu_N} \circ f^{\mu_N})(0) = 0$ $\quad (f^{\nu_N} \circ f^{\mu_N})_z(\infty) = 1$ $\Rightarrow f^{\nu_N} \circ f^{\mu_N}(z) = z$. $\Big]$

$$|g_N(z_1) - g_N(z_2)| = |f^{\nu_N}(z_1) - f^{\nu_N}(z_2)|$$

$$= |z_1 + W^{\nu_N,\nu_N}(z_1) - z_2 - W^{\nu_N,\nu_N}(z_2)| \qquad \text{por } *(\ldots$$

$$\leq |z_1 - z_2| + |W^{\nu_N,\nu_N}(z_1) - W^{\nu_N,\nu_N}(z_2)|$$

$$\leq |z_1 - z_2| + \mathrm{Const}(K,p) \|\nu_N\|_p |z_1 - z_2|^{1-\frac{2}{p}} \qquad \text{por } *(7\ldots$$

$$\leq |z_1 - z_2| + c \|\mu_N\|_p |z_1 - z_2|^{1-\frac{2}{p}}$$

Equivalentemente:

$$|z_1 - z_2| \leq |f_n(z_1) - f_n(z_2)| + c\|\mu_n\|_p |f_n(z_1) - f_n(z_2)|^{1-\frac{2}{p}}$$

Haciendo tender n a ∞, se sigue que

$$f^\mu(z_1) = f^\mu(z_2) \quad \Rightarrow \quad z_1 = z_2$$

y se ha probado que f^μ es inyectiva.

Como $f_{n,z} \to 1$ cuando $z \to \infty$ para toda n (ver teo. 5)

tenemos $f^\mu_z \to 1$ cuando $z \to \infty$,

y como f^μ es holomorfa cerca de ∞

su Jacobiano es mayor que cero.

Así f es continua en S^2 y f es suprayectiva. ∎

En este momento es muy accesible seguir la dirección de mapeos casiconformes y demostrar muchos de los teoremas principales. No se realiza en el presente trabajo.

Puede encontrarse en:

Riemann's mapping theorem for variable metrics.
Lars Ahlfors, Lipman Bers.
Annals of Mathematics. Vol. 72, No. 2, Sept. 1960.

(De hecho, demostrando que f^μ y su inversa son medibles y con la ayuda de algunos lemas técnicos de derivadas generalizadad (Apéndice 2) son consecuencia inmediata los teoremas).

TEOREMA 7. El mapeo f^{μ} y su inversa son medibles.

$f^{\mu}_{z} \neq 0$: casidondequiera.

*(13) $$\text{mes } f^{\mu}(e) = \iint_{e} \left(|f^{\mu}_{z}|^2 - |f^{\mu}_{\bar z}|^2 \right) dx\,dy$$

para cualquier conjunto medible e.

"*Un homeomorfismo f se llama medible si conjuntos medibles son mapeados en conjuntos medibles. Una condición equivalente es que conjuntos nulos son mapeados en conjuntos nulos.*"

Demostración:

Sea e un conjunto abierto.

Sean $$\chi(z) = \begin{cases} 1 & z \in f^{\mu}(e) \\ 0 & z \notin f^{\mu}(e) \end{cases}$$

$$\chi_n(z) = \begin{cases} 1 & z \in f_n(e) \\ 0 & z \notin f_n(e) \end{cases}$$ funciones características.

Entonces $\chi \leq \liminf \chi_n$

$$\Rightarrow \quad \text{mes } f^{\mu}(e) \leq \liminf \text{ mes } f_n(e)$$

Pero tenemos:

$$\text{mes } f_n(e) = \iint_{e} \left(|f_{n,z}|^2 - |f_{n,\bar z}|^2 \right) dx\,dy \qquad \text{(Fubini)}$$

$$\leq \iint_{e} |f_{n,z}|^2 \,dx\,dy$$

$$\leq \left(\iint_{e} |f_{n,z}|^p \,dx\,dy \right)^{\frac{2}{p}} (\text{mes } e)^{1-\frac{2}{p}} \qquad \text{(Hölder)}$$

$$\le \left(\|f_{n,z}-1\|_p + (\mathrm{mes}\ e)^{\frac{1}{p}}\right)^2 (\mathrm{mes}\ e)^{1-\frac{2}{p}}$$

$$\le \left(c\|\mu_n\|_p + (\mathrm{mes}\ e)^{\frac{1}{p}}\right)^2 (\mathrm{mes}\ e)^{1-\frac{2}{p}}$$

Ya que $\|\mu_n\|_p \to \|\mu\|_p$, lo anterior muestra que conjuntos nulos son mapeados en conjuntos nulos (cualquier conjunto nulo está contenido en un conjunto abierto de medida arbitrariamente pequeña) y por tanto, f^μ es medible.

Los mismos razonamientos aplicados a $(f^\mu)^{-1}$ muestran que es medible. ($(f^\mu)^{-1} = \lim f^{\nu_n}$ y $\|\nu_n\|_p$ es acotada).

Como $f_{n,z} \to f^\mu_z$ y $f_{n,\bar z} \to f^\mu_{\bar z}$ en $L_2(e)$ para e abierto y acotado:

$$\mathrm{mes}\ f^\mu(e) \le \iint_e \left(|f^\mu_z|^2 - |f^\mu_{\bar z}|^2\right) dx\,dy .$$

Para conjuntos compactos e la desigualdad inversa es verdadera.
Aproximando un conjunto abierto por subconjuntos compactos se concluye que la igualdad *(13) se cumple para conjuntos abiertos.
Se cumple, por tanto, para conjuntos cerrados, conjuntos de Borel y finalmente para todos los conjuntos medibles.
Ya que la función inversa mapea conjuntos nulos en conjuntos nulos, es imposible que $|f^\mu_z|^2 - |f^\mu_{\bar z}|^2$ sea cero en un conjunto de medida positiva. (Por *(13)).

∎

A-1 Derivadas.

Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$.

Sea $w = f(z)$ $\qquad w = u + iv$

$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ $\qquad z = x + iy$

diferenciable.

Tenemos las definiciones:

i) $dz = dx + i\,dy \qquad d\bar{z} = dx - i\,dy$

ii) $f_x = u_x + i\,v_x \qquad f_y = u_y + i\,v_y$

iii) $f_z = \frac{1}{2}(f_x - i f_y)$

$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + i f_y)$

iv) $du = u_x\,dx + u_y\,dy$

$dv = v_x\,dx + v_y\,dy$

Consecuencias:

a) $dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \qquad dy = \frac{-i}{2}(dz - d\bar{z})$

b) $f_x = f_z + f_{\bar{z}} \qquad f_y = i(f_z - f_{\bar{z}})$

c) f es analítica sii $f_{\bar{z}} = 0$

sii $u_x = v_y$ y $v_x = -u_y$

d) Si $f_{\bar{z}} = 0$ entonces $f_z = f_x$

$= f'(z)$

e) $dw = du + i\,dv$

$= f_z\,dz + f_{\bar{z}}\,d\bar{z}$

f) $\overline{w_z} = \overline{w}_{\bar{z}}$ $\qquad$ $\overline{w_{\bar{z}}} = \overline{w}_z$

g) $J = \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$

$= u_x v_y - u_y v_x$

$= |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$

$= |w_z|^2 - |w_{\bar{z}}|^2$

$= w_z \overline{w_z} - w_{\bar{z}} \overline{w_{\bar{z}}}$

$= \dfrac{\partial(w, \overline{w})}{\partial(z, \bar{z})}$

h) Si $f_{\bar{z}} = 0$ entonces $J = u_x^2 + v_x^2$

$= |f_z|^2$

$= |f'(z)|^2$

Ahora determinamos las derivadas complejas de un mapeo compuesto $g \circ f$.

Sea $\zeta = f(z)$

Aplicaremos la regla usual de la cadena.

$$d(g\circ f) = (g\circ f)_z\, dz + (g\circ f)_{\bar z}\, d\bar z$$

Por otra parte:

$$d(g\circ f) = g_\zeta\, d\zeta + g_{\bar\zeta}\, d\bar\zeta \qquad \text{(Abuso de notación)}$$

$$= g_\zeta(f_z\, dz + f_{\bar z}\, d\bar z) + g_{\bar\zeta}(\bar f_z\, dz + \bar f_{\bar z}\, d\bar z)$$

$$= (g_\zeta f_z + g_{\bar\zeta}\bar f_z)\, dz + (g_\zeta f_{\bar z} + g_{\bar\zeta}\bar f_{\bar z})\, d\bar z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (g\circ f)_z = (g_\zeta\circ f) f_z + (g_{\bar\zeta}\circ f)\bar f_z \\ (g\circ f)_{\bar z} = (g_\zeta\circ f) f_{\bar z} + (g_{\bar\zeta}\circ f)\bar f_{\bar z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g_\zeta\circ f = \dfrac{1}{J_f}\left[(g\circ f)_z\bar f_{\bar z} - (g\circ f)_{\bar z}\bar f_z\right] \\ g_{\bar\zeta}\circ f = \dfrac{1}{J_f}\left[(g\circ f)_{\bar z} f_z - (g\circ f)_z f_{\bar z}\right] \end{cases}$$

Tomando $g = f^{-1}$ tenemos:

$$\begin{cases} (f^{-1})_\zeta\circ f = \dfrac{\bar f_{\bar z}}{J_f} \\ (f^{-1})_{\bar\zeta}\circ f = \dfrac{-f_{\bar z}}{J_f} \end{cases}$$

1.2 Derivadas Generalizadas.

Si f es localmente integrable en Ω, entonces f_z y $f_{\bar{z}}$ se llaman derivadas generalizadas de f si ellas son localmente integrables y satisfacen respectivamente

i) $$\iint_\Omega f_z \varphi \, dxdy = -\iint_\Omega f \varphi_z \, dxdy$$

ii) $$\iint_\Omega f_{\bar{z}} \varphi \, dxdy = -\iint_\Omega f \varphi_{\bar{z}} \, dxdy$$

para toda $\varphi \in C^1$ con soporte compacto en Ω.

Cuando $f \in C^1$ sus derivadas $f_z, f_{\bar{z}}$ satisfacen i) y ii). (Por Stokes.)

Así, la definición de arriba generaliza la definición usual en el mismo sentido que la integral de Lebesgue generaliza la integral de Riemann.

Se puede demostrar la unicidad de derivadas generalizadas.

Lema. Sea f un mapeo μ-conforme (μ con soporte compacto). Supongamos que $h_z, h_{\bar z}$ son localmente de clase L_q $(q>2)$, entonces $h\circ f$ tiene derivadas generalizadas:

$$\begin{cases} (h\circ f)_z = (h_z\circ f)f_z + (h_{\bar z}\circ f)\bar f_z \\ (h\circ f)_{\bar z} = (h_z\circ f)f_{\bar z} + (h_{\bar z}\circ f)\bar f_{\bar z} \end{cases}$$

Además

$$\|(h\circ f)_z\|_r \leq M(\|h_z\|_q + \|h_{\bar z}\|_q)$$

$$r = \frac{pq}{p+q-2}$$

Donde las normas están sobre las regiones correspondientes Ω_0, $f(\Omega_0)$ (que son acotadas) y M es independiente de h.

Demostración:

Mostraremos que la igualdad implica la desigualdad primeramente.

$$\iint_{\Omega_0} |(h_z\circ f)f_z|^r\,dx\,dy \leq \left(\iint_{\Omega_0} |h_z\circ f|^q |f_z|^2\,dx\,dy\right)^{r/q}\left(\iint_{\Omega_0} |f_z|^p\,dx\,dy\right)^{1-\frac{r}{q}}$$

Esto por Hölder: $\iint (xy)^r = \iint (x^r y^{2r/q})(y^{r-\frac{2r}{q}})$
$\leq \left(\iint x^q y^2\right)^{r/q}\left(\iint y^{r-\frac{2r}{q}}\right)^{1-\frac{r}{q}}$
$= \left(\iint x^q y^2\right)^{r/q}\left(\iint y^{\frac{2r-qr}{r-q}}\right)^{1-\frac{r}{q}}$
$= \left(\iint x^q y^2\right)^{r/q}\left(\iint y^p\right)^{1-r/q}$

$$\leq \left(\frac{1}{1-K^2}\iint_{\Omega_0} |h_z\circ f|^q(|f_z|^2-|f_{\bar z}|^2)\,dx\,dy\right)^{r/q}\left(\iint_{\Omega_0} |f_z|^p\,dx\,dy\right)^{1-\frac{r}{q}}$$

Esto por $|f_z|^2-|f_{\bar z}|^2 \leq |f_z|^2-|\mu f_z|^2 \leq |f_z|^2(1-K^2)$

$$\leq \left(\frac{1}{1-K^2} \iint_{f(\Omega_0)} |h_z|^q \, dx\,dy \right)^{p/q} \left(\iint_{\Omega_0} |f_z|^p \, dx\,dy \right)^{1-\frac{p}{q}}$$

Esto por el teorema 7.

$\Rightarrow \quad \| (h_z \circ f) f_z \|_p \leq M \| h_z \|_q$ con M independiente de h.

Una estimación semejante se obtiene para $(h_{\bar z} \circ f) \bar f_z$ y entonces:

$$\| (h \circ f)_z \|_p \leq \| (h \circ f) f_z \|_p + \| (h_{\bar z} \circ f) \bar f_z \|_p$$

$$\leq M (\| h_z \|_q + \| h_{\bar z} \|_q).$$

Sean $h_m, f_N \in C^1$ tales que $h_m \to h$, $f_N \to f$ y

$$\iint_{f(\Omega_0)} (| h_{m,z} - h_z |^2 + | h_{m,\bar z} - h_{\bar z} |^2) \, dx\,dy \to 0$$

$$\iint_{\Omega_0} (| f_{N,z} - f_z |^2 + | f_{N,\bar z} - f_{\bar z} |^2) \, dx\,dy \to 0$$

Consideremos

$$\iint_{\Omega_0} | (h_{m,z} \circ f_N) f_{N,z} - (h_z \circ f) f_z | \, dx\,dy \leq I_1 + I_2 + I_3$$

Donde $\displaystyle I_1 = \iint_{\Omega_0} |(h_{m,z} \circ f) - (h_z \circ f)| |f_z| \, dx\,dy$

$$I_2 = \iint_{\Omega_0} |(h_{m,z} \circ f) - (h_{m,z} \circ f_N)| |f_z| \, dx\,dy$$

$$I_3 = \iint_{\Omega_0} |h_{m,z} \circ f_N| |f_N - f_{N,z}| \, dx\,dy$$

Es fácil ver que escogiendo m suficientemente grande I_1 puede hacerse arbitrariamente pequeño.
Cuando m está fijo es evidente que I_2, I_3 tienden a 0 para $N \to \infty$.
En consecuencia, es posible encontrar m y N tales que $I_1 + I_2 + I_3$ sea arbitrariamente pequeño.

El mismo razonamiento se puede aplicar a

$$\iint_{\Omega_0} |(h_{m,\bar z} \circ f_N)\bar f_{N,z} - (h_{\bar z} \circ f)\bar f_z| \, dx\, dy .$$

Consecuentemente

$$\iint_{\Omega_0} |(h_m \circ f_N)_z - (h_z \circ f) f_z - (h_{\bar z} \circ f)\bar f_z| \, dx\, dy$$

$$\leq \iint_{\Omega_0} |(h_{m,z} \circ f_N) f_{N,z} - (h_z \circ f) f_z| + |(h_{m,\bar z} \circ f_N)\bar f_{N,z} - (h_{\bar z} \circ f)\bar f_z| \, d$$

$$\longrightarrow 0$$

Concluimos que la primera igualdad es válida.
De manera análoga se demuestra la segunda. ∎

Lema. Si $f_{\bar z} = 0$, entonces f es holomorfa.

Demostración:
Esto es consecuencia inmediata si $f \in C^1$.
Lo único que hay que demostrar es que $f \in C^1$.
Y de acuerdo al lema de Weyl, sólo hay que demostrar que el laplaciano débil de f es C^1.

" *Decimos que μ es el laplaciano débil de f si $\iint f\, d{*}d\varphi = \iint \varphi \mu$ para toda $\varphi \in C_c^\infty$.*
La igualdad anterior es equivalente a:
$$\iint f \Delta\varphi \, dx\, dy = \iint \varphi \mu \, dx\, dy$$ "

Aseguramos que el laplaciano débil es cero, demostrando esto terminamos.

$$\iint f\,\Delta\varphi\,dx\,dy = \iint f\,(4\,\varphi_{z\bar z})\,dx\,dy$$
$$= -4\iint f_{\bar z}\,\varphi_z\,dx\,dy \qquad (\text{Definición de } f_{\bar z})$$
$$= 0$$

∎

Se aclara que al decir que f es holomorfa significa que existe una función holomorfa que difiere de f en un conjunto de medida cero.

En adelante denotaremos por G a una función tal que:

a) $G \in C^\infty(\mathbb{C})$.

b) $0 \le G(z) \le 1 \qquad z \in \mathbb{C}$.

c) $G(z) = 0 \qquad$ para $|z| \ge 1$.

d) $G(z) = G(|z|) \qquad z \in \mathbb{C}$.

e) $\frac{-1}{2i}\iint G(z)\,dz\,d\bar z = 1 = \iint G(z)\,dx\,dy$

La construcción se realiza sin gran esfuerzo.

Sea $\varepsilon > 0$, definimos:

$$G_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^2}\,G(z/\varepsilon) \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Claramente satisface a), d) y e);

$$0 \le G_\varepsilon(z) \le \frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$G_\varepsilon(z) = 0 \qquad \text{para } |z| \ge \varepsilon.$$

Definimos la ε-modificación de f por:

$$f_\varepsilon(z) = \frac{-1}{2i}\iint f(\zeta)\, G_\varepsilon(z-\zeta)\, d\zeta\, d\bar{\zeta} \qquad z\in\mathbb{C}.$$

Tenemos las propiedades:

i) $\|f_\varepsilon\|_1 \leq \|f\|_1$

ii) f continua con soporte compacto K
$\Rightarrow f_\varepsilon \to f$ uniformemente en K cuando $\varepsilon\to 0$.

iii) La ε-modificación conmuta con diferenciación:
$(f_\varepsilon)_{\bar z} = (f_{\bar z})_\varepsilon$.

Demostración:

i) $$\iint |f_\varepsilon|\, |dz\, d\bar z| \leq \frac{1}{2}\iint\left(\iint |f(\zeta) G_\varepsilon(z-\zeta)\, d\zeta\, d\bar\zeta|\right)|dz\, d\bar z|$$
$$= \frac{1}{2}\iint |f(\zeta)| \iint G_\varepsilon(z-\zeta)\, |dz\, d\bar z|\, |d\zeta\, d\bar\zeta|$$
$$= \iint |f(\zeta)\, d\zeta\, d\bar\zeta|.$$

ii) $$f_\varepsilon(z) - f(z) = \iint f(\zeta) G_\varepsilon(z-\zeta)\, dx\, dy - f(z)\iint G_\varepsilon(z-\zeta)\, dx\, dy$$
$$= \iint (f(\zeta) - f(z))\, G_\varepsilon(z-\zeta)\, dx\, dy$$
$$\Rightarrow |f_\varepsilon(z) - f(z)| \leq \sup_{|z-\zeta|<\varepsilon} |f(z) - f(\zeta)|$$

Como f es continua en K, es uniformemente continua en K, de aquí que $f_\varepsilon \to f$ uniformemente.

iii) Sea $h = f_{\bar z}$, $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{C})$.

$$-2i\iint f_\varepsilon\, \varphi_{\bar z}\, dz d\bar z = \iint \iint f(\zeta)\, G_\varepsilon(z-\zeta)\, \varphi_{\bar z}(z)\, d\zeta d\bar\zeta \quad dz d\bar z$$

$$= \iint f(\zeta) \iint G_\varepsilon(z-\zeta)\, \varphi_{\bar z}(z)\, dz d\bar z \quad d\zeta d\bar\zeta$$

$$= -\iint f(\zeta) \iint G_{\varepsilon,\bar z}(z-\zeta)\, \varphi(z)\, dz d\bar z \quad d\zeta d\bar\zeta$$

$$= -\iint \iint f(\zeta)\, G_{\varepsilon,\bar z}(z-\zeta)\, \varphi(z)\, d\zeta d\bar\zeta \quad dz d\bar z$$

$$= \iint \iint f(\zeta)\, G_{\varepsilon,\bar\zeta}(z-\zeta)\, \varphi(z)\, d\zeta d\bar\zeta \quad dz d\bar z$$

$$= -\iint \iint f_{\bar\zeta}(\zeta)\, G_\varepsilon(z-\zeta)\, \varphi(z)\, d\zeta d\bar\zeta \quad dz d\bar z$$

$$= 2i \iint h_\varepsilon(z)\, \varphi(z)\, dz d\bar z$$

Concluimos que $h_\varepsilon = f_{\varepsilon,\bar z}$

es decir $(f_{\bar z})_\varepsilon = (f_\varepsilon)_{\bar z}$. ∎

Lema. Si p y q son continuas y tienen derivadas generalizadas que satisfacen $p_{\bar z} = q_z$ entonces existe una función $f \in C^1$ con

$$f_z = p \quad y \quad f_{\bar z} = q .$$

Demostración:

Como en cálculo, es suficiente mostrar que

$$\int_\gamma p\, dz + q\, d\bar z = 0$$

a lo largo de cualquier γ.

(Definiríamos $f(z) = \int_{z_0}^{z} p\, dz + q\, d\bar z$ y como su laplaciano débil es cero, terminamos).

Consideremos $p_\varepsilon, q_\varepsilon \in C^\infty$.

Son tales que $(p_\varepsilon)_{\bar z} = (p_{\bar z})_\varepsilon = (q_z)_\varepsilon = (q_\varepsilon)_z$

Por tanto $$\int_\gamma p_\varepsilon \, dz + q_\varepsilon \, d\bar z = 0$$

Ya que p, q son continuas, haciendo tender ε a cero obtenemos la igualdad deseada. ∎

Bibliografía.

1. Ahlfors L. ; "Lectures on Quasiconformal Mappings"; Van Nostrand ; 1966.
2. Ahlfors L. and Bers L. ; "Riemann's mapping theorem for variable metrics" ; Annals of Math. ; Vol. 72 ; 1960.
3. Bers L. ; "Riemann Superfaces" ; Notas de clase (1957-1958) ; Courant Institute of Math. Sciences ; New York Univ.
4. Earle C.J. and Eells J. ; "A fibre bundle description of Teichmüller theory" ; J. Differential Geometry 3 ; 1969.
5. Guillemín V. and Pollack A. ; "Differential Topology" ; Prentice Hall ; 1974.
6. Harvey W.J. ; "Discrete groups and Automorphic functions" ; Academic Press ; 1977.
7. Kra I. ; "Automorphic forms and Kleinian groups" ; Math. Lecture Note series ; W.A. Benjamín ; 1972.
8. Loomis L.H. and Sternberg S. ; "Advanced calculus" ; Addison Wesley ; 1968.
9. MacLane S. and Birkhoff G. ; "Algebra" ; Mac Millan ; 1967.
10. Ramírez A. ; "Superficies de Riemann" ; (Por publicarse) Notas de clase (1979-1980).
11. Ramírez A. ; "Variable compleja" ; (Por publicarse) Notas de clase (1979).
12. Rudin W. ; "Real and complex Analysis" ; Tata McGraw Hill ; 1974.