15

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UN PROGRAMA DE INTEGRACION SIMBOLICA

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

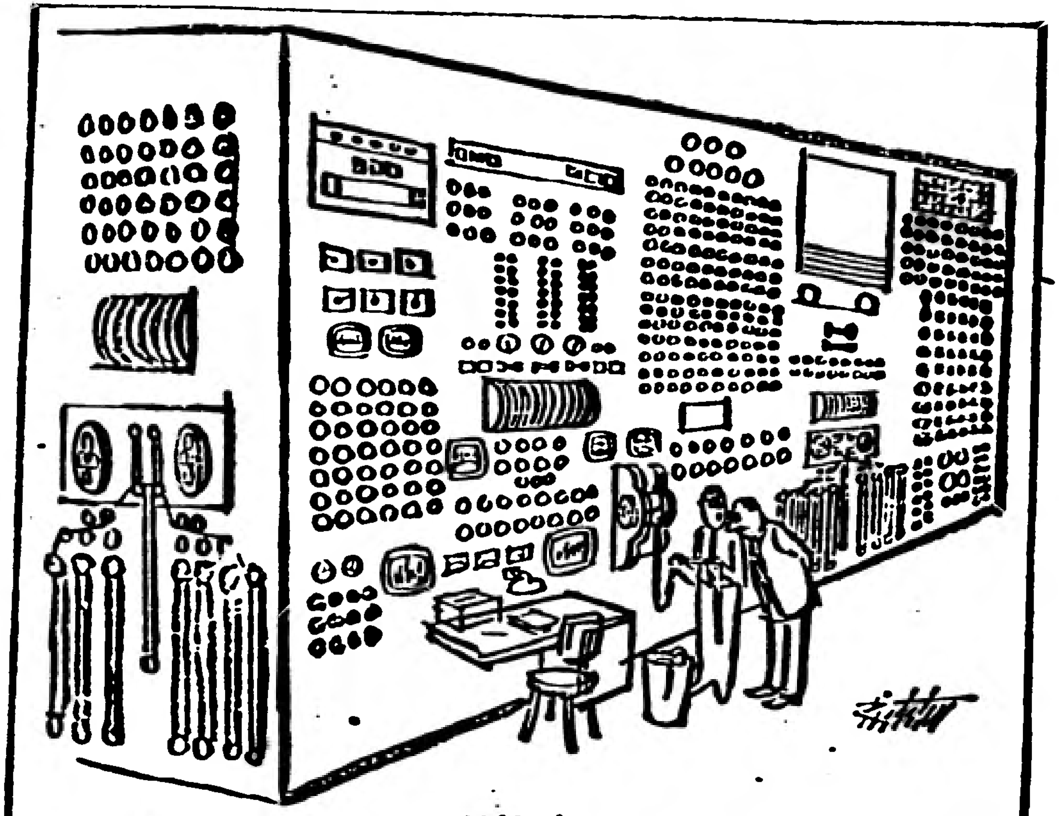
M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

DAGOBERTO MARQUEZ TOST

México, D. F. 1981

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



¡Maldición! Dice: "Cogito, ergo sum."

Dibujo de Richter

INDICE

INTRODUCCION.

En la primera etapa de aparición de las computadoras, estas se consideraron esencialmente como poderosas herramientas de cálculo. De esta manera sólo permitieron a los matemáticos, en ocasiones, liberarse de cierto número de restricciones que antes frenaban el desarrollo de sus trabajos al punto de bloquearlo totalmente; debido a que sus cálculos eran tan largos y complicados que el matemático no podía resolverlos en la práctica, a pesar de que tuviera a su disposición un método teórico, que en principio debía o podía conducir a la solución.

Fue así como la enorme capacidad de las computadoras inició un nuevo campo de investigaciones, permitiendo verificar hipótesis al efectuar los cálculos, contribuyendo además a mejorar las existentes e introduciendo nuevas. De esta forma en un principio, se podría pensar que esta sería la única aportación de las computadoras, lo cual no era del todo despreciable.

Sin embargo, se sabe que las computadoras pueden ser programadas de tal manera que sean capaces de tomar decisiones en dominios, en los que se creía que sólo la intuición y la experiencia de un matemático lograban obtener resultados eficaces.

A partir de este momento apareció una nueva rama de investigación denominada Inteligencia Artificial, (I.A.) la cual su principal meta es obtener por parte de la máquina la realización de tareas que normalmente requieren en algún grado de la inteligencia humana.

La I.A. tiene campos de acción muy variados y algunos de estos se vinculan con la lingüística, traducción de idiomas, identificación de formas y sonidos, resolución de problemas, manipulación simbólica de expresiones matemáticas, etc. En la solución de este tipo de cuestiones su interés fundamental es la manipulación automática de modelos de los problemas estudiados y su instrumento principal es la Heurística sobre la cual comentaré más adelante.

El propósito de esta tesis es presentar un programa computacional, que tiene como objetivo resolver problemas de integración simbólica a partir de funciones elementales al nivel de un buen estudiante de preparatoria y a este se le ha nombrado ISI en referencia a "Integrador Simbólico".

Al construir este programa, se ha intentado por que manipule automáticamente una expresión algebráica f(X), de manera que calcule su integral llamada antiderivada.

Antes de describir los principales mecanismos del programa expondré en primer lugar algunas ideas sobre la I.A. en una segunda parte como antecedente histórico resumiré brevemente algunos de los trabajos que resuelven problemas de integración simbólica, después examinaré cuales son los problemas generales que se plantean cuando se quiere manipular automáticamente este tipo de expresiones algebráicas, finalmente describiré ISI y presentaré algunos de los resultados obtenidos.

CAPITULO I

INTELIGENCIA ARTIFICIAL Y METODOS HEURISTICOS.

1.- COMPORTAMIENTO INTELIGENTE.

Muchas actividades humanas como son: la solución de acertijos, -- los juegos, las matemáticas, la conducción de un automóvil, se - - dice que requieren de la "inteligencia". Si las computadoras pudieran desarrollar tareas como éstas, probablemente estas tendrían - en algún grado "Inteligencia Artificial".

Es de por sí muy delicado pretender una definición simple de inte-- ligencia, es un tema sobre el cual psicólogos y fisiólogos han debatido por mucho tiempo y el hecho es de que el mismo concepto de -- "inteligencia" no está bien definido. Así de esta forma me limitaré a indicar cuales son las metas en el dominio de la I.A. y cuales son los medios que se utilizan para lograrlas.

2.- LAS FINALIDADES DE LA INTELIGENCIA ARTIFICIAL.

En ocasiones sabemos exactamente como le hacemos para resolver tal o cual problema, por ejemplo, conocemos perfectamente el - - método utilizado para resolver una ecuación de 2º grado, entonces en estos casos el método está claramente precisado y será posible escribir un programa para que la computadora opere de la misma -

manera que nosotros, obviamente lo hará mucho más rápido y eliminará los riesgos de error, pero en tales situaciones no estaríamos tentados a calificar de inteligente su comportamiento.

Sin embargo en la mayoría de nuestras actividades somos más o menos incapaces de describir los medios que hemos empleado para llegar a resultados excelentes o a veces mediocres. Y un ejemplo particularmente impactante es el del reconocimiento de las formas, nosotros no dudaremos en reconocer que cifra representa al número dos y que esa cifra se escribe como 2, 2, 2 ó 2. En este ejemplo hemos logrado la identificación inconcientemente y sin dificultad, pero sería muy difícil encontrar una definición que corresponda a todos los casos posibles. Igualmente cuando obtenemos la demostración de un teorema, muchas veces somos incapaces de explicar porque hicimos tal hipótesis en vez de otra y porqué hemos decidido usar tal o cual ensayo que reveló constituir un paso decisivo.

Encontramos por lo tanto una categoría bastante amplia de problemas para los cuales es necesario analizar de manera precisa los métodos que utilizamos y escribir un programa que los utilice a su vez.

La finalidad de la I.A. según Nilsson (Ref. 6), es que una computadora junto con sus programas ejecute tareas que normalmente requieren de la inteligencia humana y la calidad de éstos resultados nos permitirá juzgar si ha hecho prueba o no de un comportamiento inteligente.

3.- LOS CAMPOS DE ACCION DE LA INTELIGENCIA ARTIFICIAL.

Las características y finalidad de la I.A. tratadas con anterioridad - permiten concebir que sus campos de acción sean extremadamente - variados.

Aquí es de interés particular resaltar dentro de éstos las aplicacio-- nes lingüisticas en problemas de traducción automática, de conver-- sación en lenguaje natural con una computadora y de documentación - automática, así como las aplicaciones en reconocimiento de formas- para la interpretación de fotografías, análisis de señales diversas - desde la que nos da un radar hasta las que obtenemos en un encefalo- grama y aún las aplicaciones dentro del dominio llamado "Resolución de Problemas" categoría a la cual pertenece nuestro programa ISI.

Finalmente cabe señalar que cierto número de investigaciones en -- I.A. están estrechamente ligadas a la psicología, en el sentido de - que los investigadores tienden a escribir programas que simulen el comportamiento inteligente de un ser humano, el fin buscado no es ya los resultados del programa, sino que quiere solamente que su - modo de proceder se parezca lo más posible al del hombre que se - toma como modelo, esto puede permitir deducir importantes hipóte sis desde el punto de vista de la psicología.

4.- RESOLUCION DE PROBLEMAS Y LAS HEURISTICAS.

Recordemos que sólo se han considerado problemas para los cuales se ha podido definir un método preciso, algorítmico, un problema -

está definido por una meta y por los medios que se tiene derecho a -- utilizar para lograrla, de esta manera la primera idea que viene a la mente es tratar sistemáticamente todas las posibilidades ofrecidas - hasta que se llegue a un resultado positivo. Desgraciadamente este - método combinatorio presenta dos inconvenientes importantes; si el problema no admite solución la computadora no tiene ninguna razón - de detenerse y no es posible decidir si la ausencia de resultado positivo se debe a que la computadora no ha terminado su trabajo o a que no existe solución; además, genera una arborescencia cuyo crecimiento aproximadamente exponencial, hace que alcance demasiado rápido un tamaño gigantesco, en todo caso prohibitivo.

Tomemos de ejemplo, una final de partida del juego de ajedrez, suponiendo que se pueden jugar legalmente un promedio de una veintena - de movidas, esto implicará 20^n situaciones posibles después de n movidas. De igual forma si a una expresión algebráica dada podemos -- aplicar n reglas de simplificación habrá después de p etapas n^p ex-- presiones equivalentes, y aún es necesario por otro lado tener en -- cuenta que ciertas reglas pueden ser aplicadas en q lugares diferentes y diversos simultáneamente, de donde el crecimiento esta vez - es de tipo "(n^{p^q})". Es claro que incluso con computadoras cuya memoria se supusiera ilimitada, el tiempo de los cálculos necesarios - sería para muchos problemas demasiado elevados. Será por lo tanto necesario construir un programa susceptible de hacer elecciones --

juiciosas a lo largo del desarrollo de una arborescencia decidiendo no estudiar las ramas para las cuales habrá juzgado que no tiene posibilidades de llegar a la solución.

Eventualmente si el estudio de las ramas desarrolladas no se revelatan fructuoso como se esperaba el programa podrá remontar a la arborescencia, regresar y desarrollar en direcciones que se había prohibido primitivamente. Si tal programa llega a obtener buenos resultados podremos decir que presenta un comportamiento inteligente.

Este género de investigaciones pertenece plenamente al campo de acción de la I. A.

Por supuesto aún se plantea una cuestión, como permitirle al programa hacer elecciones juiciosas como las que acabamos de describir aquí es donde interviene la noción muy importante de heurística.

Se puede tratar de definir las heurísticas como métodos que permiten acercarse a la solución. La justificación de las heurísticas es esencialmente estadística, una heurística será tanto mejor cuando al utilizarla lleve el mayor número de veces a la solución. Pero si el hecho de aplicarla a veces nos aleja de la solución o nos conduce a un camino sin salida ésto no querrá decir obligatoriamente que sea mala y deba ser definitivamente condenada.

Es importante hacer notar que la aplicación de una heurística que generalmente nos conduce a la solución, pero que en un caso desfavorable nos aleja de esta no nos hará encontrar nunca un resultado incorrecto, simplemente podrá retrasar la obtención del resultado -- correcto, eventualmente hacerlo imposible, pero jamás lo falseará. Nosotros mismos aplicamos cotidianamente procedimientos heurís-- ticos y esos procedimientos muy a menudo somos incapaces de justificarlos con rigor sin otro método que no sea sobre el plano estadís-- tico por ejemplo:

a). En ajedrez se recomienda evitar "doblar" un peón, pero se hará el - esfuerzo de colocar dos torres sobre la misma columna.

b). En geometría para demostrar la igualdad de dos segmentos, se bus-- cará si pertenece o no a dos triángulos iguales.

c). En análisis para integrar una función F(X), si es de la forma - - f(x)g(x) y se conoce $\int g(x)dx$ se intentará integrarla por partes.

Se podría prolongar la lista de ejemplos interminablemente. La uti-- lización de ciertas heurísticas nos es tan familiar que las considera - mos como reflejos y las enunciamos bajo el nombre de reglas que se enseñan a los principiantes.

Para quién desea construir un programa que utiliza heurísticas, le- será necesario algunas veces hacer un serio esfuerzo de introspec- ción para descubrir las heurísticas que utiliza al tratar de resolver el problema o cuestionar sin descanso a una tercer persona, que - lo hiciera. Afortunadamente no es éste el único medio que nos queda para descubir heurísticas interesantes. El análisis del problema -- propuesto aportará elementos importantes. Además, cierto número de nociones que intervienen en las heurísticas son generalmente vá--lidas para toda una categoría de problemas y no para un problema en particular. Esta búsqueda de la generalidad es una meta ambiciosa - pero particularmente importante de la Inteligencia Artificial.

CAPITULO II

ANTECEDENTES.

En los inicios de la década de los sesentas únicamente el hombre podía determinar o solucionar integrales indefinidas aunque éstas fueran problemas de los más triviales, materialmente las técnicas de integración no habían cambiado en 200 años. Por otra parte al querer que la computadora solucionara el problema de la integración simbólica, la gente sólo se satisfacía en considerar que el problema requería de soluciones heurísticas, que estuvieran entre lo ingenioso y lo inteligente. Sin embargo ya a finales de la misma década surgieron avances muy importantes en la teoría de la integración, que hicieron sentir completamente resuelto el problema de la Integración Simbólica a partir de funciones elementales, logarítmicas, trigonométricas y exponenciales.

La implementación de estos procedimientos, hizo a la computadora más poderosa que cualquier tabla de integración.

Debido a esto, se consideró conveniente resumir en este capítulo los principales trabajos que se han realizado sobre la Integración Simbólica las cuales hacen patente que es posible disponer de sistemas automáticos de manipulación Algebráica en aquellas acciones que así lo requieran. Y es aquí donde se quiere enfatizar la gran importancia que presentarían este tipo de programas, su utilización y su construcción, ya que su uso sería una magnífica herramienta para el estudiante, profesor o pedagogo, profesionista e investigador cuando en el desempeño de su labor se le presenten problemas de este género. Y porque su construcción que en principio es un buen ejercicio, permitirá además de conocer a fondo como se realiza la manipulación automática de expresiones algebráicas, que se manejan por ejemplo en la expansión de series de potencias, demostración de teoremas, etc., -- crear una infraestructura a nivel de subrutinas de programas computacionales que facilitarán en caso necesario avanzar en otros caminos en los cuales la necesidad propia requiera utilizarlas como herramientas.

1.- S A I N T .

El primer programa que se describe es el trabajo pionero SAINT -- (Symbolic Automatic INTegrator) debido a Slagle (REF. 2), el cual por su - forma de ejecución pertenece plenamente a la inteligencia Artificial y dado que es el principal pilar para la resolución automática de la Integración -- Simbólica el programa ISI tomará como base algunos procedimientos del -- mismo.

SAINT al leer en notación conveniente algún problema de Integra-- ción Simbólica, lo primero que aplica es el procedimiento IMSLN que con- siste en resolver la cuestión comparándola con una tabla de 26 integrales - de las cuales se conoce sus primitivas, cuando puede aplicar alguna de és- tas se dice que esa integral tiene solución inmediata. Por ejemplo $\int 2^x dx$, es de la forma $\int c^v dv = c^v \ / \ (\ln c)$, esta es inmediatamente alcanzada por substitución y la solución es $2^x \ / \ \ln\ 2$.

En caso de no existir en la tabla mencionada se ensayan algunas -- transformaciones tratando de reducir la integral a alguna de las formas -- registradas. Estas transformaciones pueden ser de tipo algorítmico o -- heurístico.

Por transformación algorítmica se entiende como una transforma- ción que siempre o casi siempre es apropiada, y una transformación es a- propiada si lleva con seguridad a una ejecución correcta.

Tres de ocho transformaciones algorítmicas usadas por SAINT son:

a) Factor constante, i.e.

$$\int cg(v)dv = c \int g(v)dv.$$

b) Descomposición, i.e.

$$\int \sum g_i(v)dv = \sum \int g_i(v)dv.$$

c) Sustitución lineal, i.e. Si la integral es de la forma:

$$\int f \ (C_1 + C_2 v)dv.$$

Sustituye $u = C_1 + C_2 v$ y obtiene una integral de la forma:

$$\int \frac{1}{C_2} f(u)du$$

Por ejemplo:

$$\int \frac{\cos 3x \, dx}{(1 - \operatorname{sen} 3x)^2}$$

Sustituye:

$$y = 3x \text{ y obtiene } \int \frac{\cos y \, dy}{3\,(1 - \operatorname{sen} y)^2}$$

Una transformación es llamada heurística aún cuando pensando que - es apropiada y razonable, existe una probabilidad de que el próximo paso no sea productivo. Una transformación puede ser inapropiada ya sea porque no conduce rápidamente a la solución o porque algunas otras transformaciones pueden ser mejores.

SAINT usa 10 tipos de transformaciones heurísticas procurando usar prioritariamente el método de integración por partes. Otro método que usa - con bastante éxito es el de tratar de encontrar una subexpresión cuya deriva-da divida al integrando.

El programa SAINT actúa de manera recursiva es decir al hacer una transformación que desemboca en una o varias integrales nuevas entonces -- les aplica los mismos métodos, desarrollando una arborescencia de la cual - cada nodo es un nuevo problema o más bien un subproblema.

A los subproblemas generados se les llama metas y como se ha dicho estas metas nuevas pueden generar más, así se crea una jerarquía de metas y tal jerarquía es conveniente representarla por una gráfica o árbol con crecimiento hacia abajo como es el de la figura 1.

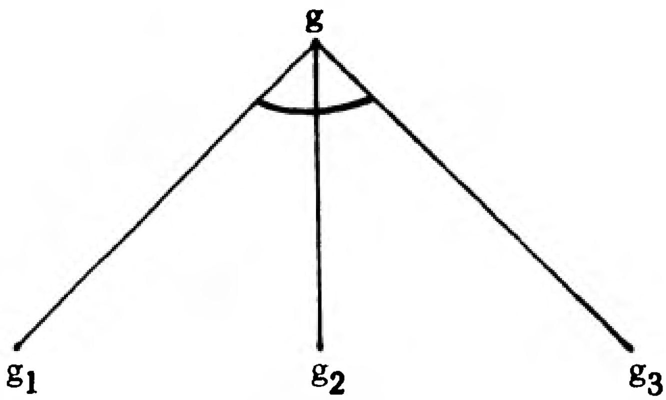


FIGURA 1

Supóngase que tenemos que realizar una integración, ó más generalmente cualquier meta g. Esta se puede representar gráficamente por un punto.

Una meta puede transformarse en una ó más submetas las cuales -- pueden estar relacionadas a la meta de varias maneras.

El procedimiento de integración incorpora dos relaciones, a saber, Y y O.

1.- Una relación Y entre una meta y al menos dos submetas es la siguiente: la meta g tiene solución si y solo si todas las submetas tienen solución.

La figura 1 describe una relación con tres submetas. El arco que -- une los segmentos indica la relación Y.

2.- Una relación O entre una meta g y sus submetas es la siguiente: la -- meta g tiene solución si y solo si cualquiera de las submetas tiene so lución, ejemplo figura 2.

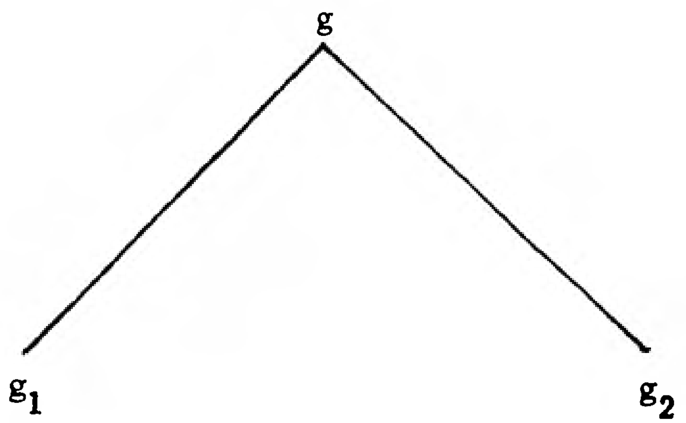


FIGURA 2

Una meta g puede tener varias submetas Y y O como se muestra - en la figura 3.

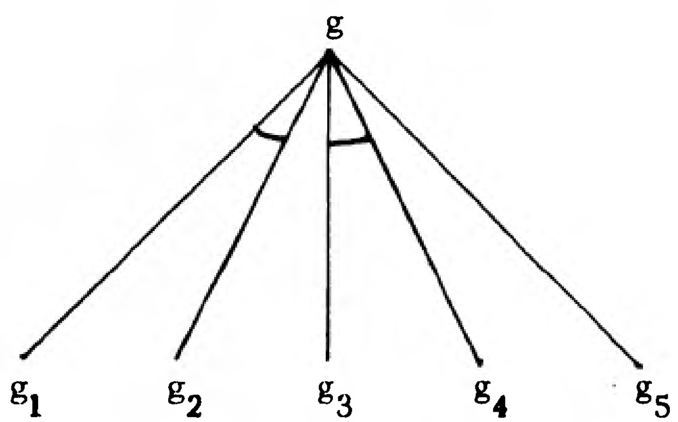


FIGURA 3

Y su versión extendida más usual se presenta en la figura 4.

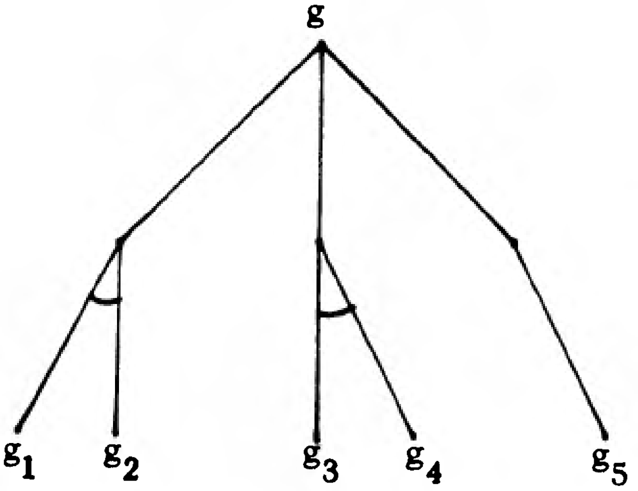


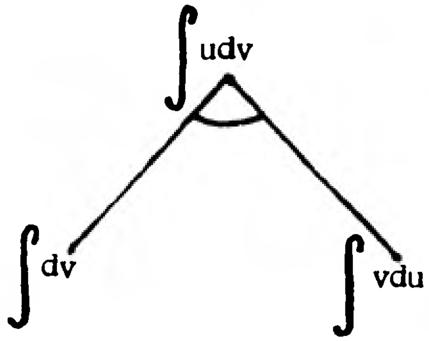
FIGURA 4

En este caso será resuelta la meta g cuando sean resueltas las -- submetas g_1 y g_2 o sean resueltas las submetas g_3 y g_4 o sea re- suelta la submeta g_5 .

La ejemplificación del árbol generado por la regla de integración- por partes:

$$\int udv = u \left(\int dv \right) - \int vdu$$

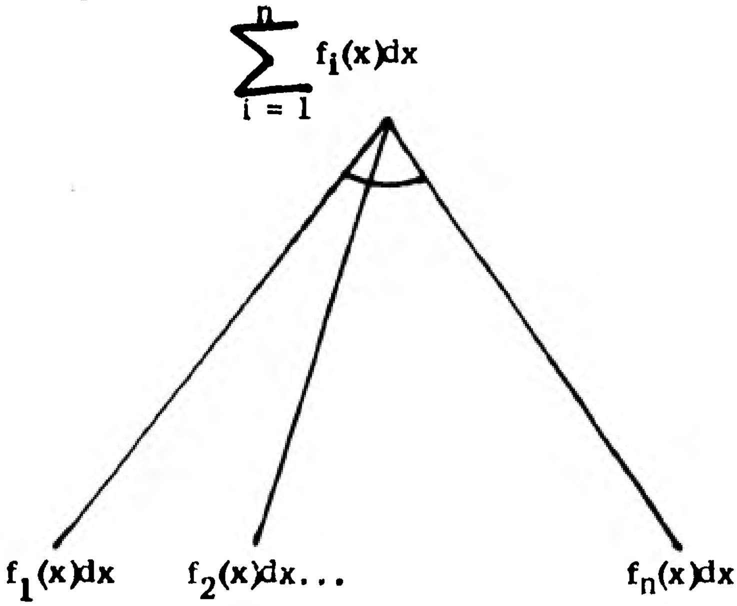
Es la siguiente:



La regla de descomposición:

$$\int \sum_{i=1}^{n} fi(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int fi(x)dx$$

Justifica el siguiente árbol:



Otra regla, llamada regla del factor reemplaza al problema - - kf(x)dx por f(x)dx; es decir:

$$
\begin{array}{c}
\int kf(x)dx \\
\Big\downarrow \\
\int f(x)dx
\end{array}
$$

SAINT cuenta con una lista de metas, en donde la meta original es - el primer miembro de la lista. De tiempo en tiempo se generan nuevas metas y cada nueva meta generada se incluye al final de la "lista de metas - - heurísticas". Toda meta encontrada no sujeta a transformaciones algorít-- micas es incluida al final de la "lista temporal de metas" y después es transferida a la "lista de metas heurísticas". Cada nuevo miembro de esta lista es llamada meta heurística y son insertadas en orden creciente con respecto al costo estimado del logro, en donde el costo estimado es el nivel del inte-- grando entendiéndose por este nivel el máximo de composición de funciones - que ocurren en la expresión, por ejemplo:

x	es de nivel 0
x^2	es de nivel 1
e^{x^2}	es de nivel 2
xe^{x^2}	es de nivel 3

Aunque fueran necesarias otras estimaciones para encontrar el costo relativo del logro de una meta por razones de tiempo de ejecución simplemente se toma el nivel de su integrando.

Reunidos los elementos antes mencionados forman un procedimiento de integración. Del cual si se requiere un conocimiento más a detalle se sugiere ver la referencia 2.

SAINT obtiene resultados muy satisfactorios, de 86 problemas estudiados sólo conoció dos fracasos. Sin embargo, entre sus carencias es importante señalar que no manipula funciones hiperbólica y además no integra por fracciones parciales.

2.- SIN.

En segundo lugar se describe el trabajo de MOSES, SIN (Symbolic -- INtegrator), (Ref. 3) el cual hace suponer resuelto el problema de la Inte-- gración Simbólica en funciones elementales. En SIN confluyen tres importantes fuentes de interés dentro de la integración simbólica; la primera proviene de la Inteligencia Artificial en el trabajo pionero de Slagle llamado -- SAINT descrito anteriormente y que en gran parte está incluído en SIN: la - segunda proviene de la manipulación algebráica, donde Manove (Ref. 9) realizó un programa de integración de funciones racionales dentro del sistema- MATHLAB y la última a través del procedimiento de RISCH, que determina- la existencia de la integral en funciones racionales.

El diseño del programa tiene dos metas principales, la primera -- requiere buscar una solución eficiente y la segunda necesita encontrar una solución que no sea materialmente diferente en su forma a la integral buscada. En particular, dentro del mismo, las integrales de funciones trigonométricas pueden ser escritas en varias formas: en términos de senos y cosenos, tangentes o arcos de ángulos o exponencial con argumentos complejos, así de acuerdo al planteamiento este podrá requerir para mayor -- facilidad de una u otra forma es decir se aplicarán transformaciones en -- uno u otro camino hasta encontrar el que lleva a la integral, Cabe señalar que en las tablas de integrales también siguen este punto de vista.

SIN fue escrito originalmente en LISP para una IBM-7094 durante - 1966-67, hay versiones para PDP-10, IBM-360 y CDC-6600. La estrategia de SIN puede ser contemplada como sigue:

Etapa 1: Procura resolver el problema en forma rápida, usando como método general una versión del método de derivadas-divididas, el - cual se explicará más adelante.

Etapa 2: Intenta resolver el problema por medio de once métodos, los cuales son específicos de ciertas clases de integrales por ejemplo: las funciones trigonométricas, o las funciones exponenciales.

Etapa 3: Cuando la primera y segunda etapa fallan trata un método general ya sea una heurística, la integración por partes, o el algorítmo de Risch.

Un problema que es resuelto en la Etapa 1 se considera resuelto completa y eficientemente. El paso por esta etapa es rápido, sea o-no exitosa la obtención de la integral.

El algorítmo en la etapa 2, es estrecho en alcance y encuentra - eficientemente la solución de cualquier integral para la cual sea aplicable, además rápidamente puede tomar una decisión en términos de la aplicabilidad del grupo de algorítmos de esta etapa.

Si ambas etapas fallan en una integral en particular, se pasaría a la última. Y ahí se procurará una transformación drástica para obtener una respuesta.

Algunos de los métodos en la etapa 3 así como el algorítmo de Risch son conocidos como procedimientos de decisión, esto es, pueden decidir la posibilidad de que una integral exista en términos de funciones usuales.

Así la solución de: $\int e^{x^2} dx$ es determinada como no conocida en funciones usuales.

La etapa 1.

La parte fundamental de esta etapa es el método de derivadas-divididas que consiste en una simple prueba para determinar cuando las derivadas de una subexpresión de la integral dividen el resto del integrando y esto es con el fin de transformar la integral a la forma:

$$\int c \ \mathrm{op} \ (u(x)) \ \ u'(x)dx$$

Donde c es una constante, u(x) es alguna función de x, u'(x) es su derivada, y op es una función elemental que puede ser miembro del conjunto $\{$sen, cos, tan, cot, sec, csc, arcsen, arcos, arctan, arcsec, log$\}$

Así op (u(x)) puede tener la forma $u(x)^{-1}$, $u(x)^{d}$, cuando $d \neq -1$ y $d^{u(x)}$ cuando d es una constante.

Después de haber determinado la expresión anterior, el método de solución consistirá en buscar en la tabla de integrales la correspondiente a la op, y sustituir u(x) por cada ocurrencia de x en la expresión que se tiene en la tabla.

Este método puede integrar algunos problemas bastante triviales y algunos no tan triviales como el siguiente:

$$\int \cos^2(e^x)\operatorname{sen}(e^x)\ e^x dx = \frac{1}{3}\ \cos^3\ (e^x).$$

donde $op(u) = u(x)^d$, $u(x) = \cos\ (e^x)$, $d=2$, $u'(x) = -\operatorname{sen}\ (e^x)e^x$, $c = -1$.

El primer estado de SIN también realiza dos transformaciones que servirán en preparar a la integral para los métodos utilizados en las etapas siguientes. La primera de estas transformaciones es la regla de la suma, esto es:

$$\int (A_1 + A_2 + . . . A_n)dx = \int A_1\, dx + \int A_2 dx + . . . + \int A_n dx.$$

La segunda transformación se aplica a expresiones multinominales de una integral cuya suma esté elevada a una potencia entera positiva.

Así: $\int (x + e^x)^2 dx$ se convierte en:

$$\int x^2 dx + \int 2x\ \ e^x dx + \int e^{2x} dx$$

La primera y tercera integrales obtenidas son resueltas en la primera etapa de SIN y la segunda, en la segunda etapa.

Uno de los objetivos de SIN fue resolver 86 problemas que originalmente intentó resolver SAINT de las cuales en su primera etapa SIN pudo resolver 45 de éstos.

La etapa 2.

Esta etapa contiene 11 métodos, los cuales son aplicables a un problema dado, que mediante una rutina llamada FORM determina cual de estos debe ser probado. Si por ejemplo, FORM encontró la subexpresión sen(x) en el integrando tratará de resolver el problema con funciones trigonométricas. De esta manera si la subexpresión es de la forma e^x llamará a la rutina que contiene exponenciales. En efecto FORM señala qué método utilizar para resolver una integral y la mayoría de éstos causan una transformación simplificada del integrando. Así una vez que el problema es transformado se inicia en la etapa 1. El trabajo pesado de estos 11 métodos es el de la rutina de integración de fracciones parciales que fue tomado del sistema MATHLAB.

La etapa 3.

La implementación original de SIN usa dos diferentes métodos generales en el tercer estado. Uno fue el método de la integración por partes (i.e. $\int udv = uv - \int v\ du$). Este método usa algunas búsquedas para determinar una buena partición de la integral.

El segundo método, el cual usa el EDGE (EDucated GuEss) es un -

método heurístico que está basado en conceptos de la Teoría de Liouville.

El programa heurístico EDGE genera la conjetura de que la forma de la solución es de la forma del integrando. La conjetura es diferenciada y sus coeficientes indeterminados son obtenidos igualando la derivada con el integrando.

El programa heurístico EDGE se ideó independientemente del trabajo de Risch sobre la teoría de Liouville.

El algorítmo de Risch es superior al heurístico EDGE, y la última versión de SIN utiliza un subconjunto del algorítmo de Risch en su tercer estado.

Hay que hacer notar que la rutina de integración más importante usada por SIN es la rutina de integraciones de fracciones parciales (v. gr. raices de polinomios). La rutina utilizada fue escrita por M. Manove para MATHALAB. Además este método también es usado en el algorítmo de Risch para integrar funciones que contienen exponenciales y términos logarítmicos.

El procedimiento de decisión de Risch procura encontrar un resultado general sobre la integración, esta búsqueda de la generalidad se remonta a principios del siglo XIX en donde Laplace conjetura que la integral de una función algebraica (p es algebraica en x si existe un polinomio no trivial p (x) = 0, donde p tiene coeficientes enteros) necesita contener solamente aquellas funciones algebraicas que están presentes en el integrando. Esta conjetura fue demostrada por Abel, Liouville, en sus trabajos hechos de 1830 a 1840, examinó la forma de la integral de una función elemental. El teorema principal de Liouville ha sido la base para la mayoría de los trabajos utilizados posteriormente en esta área.

Antes de presentar el teorema de Liouville en su formulación moderna, debida a Risch, introduciremos algunos conceptos preliminares. En el resto de nuestra discusión, asumiremos que el campo de funciones racionales es el campo D. Los coeficientes del campo serán los números racionales Q. Nótese que sobre las funciones racionales que forman el campo se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir y también podemos diferenciar sobre este campo. Sabemos que no se puede integrar todas las funciones racionales sin requerir de extensiones de funciones logarítmicas.

Es un hecho, que la integral de una función racional puede ser representada de la siguiente manera:

$$\int R(x)dx = V_0(x) + \sum_{i=1}^{k} C_i \log V_i(x)$$

donde $V_0 \in D$, los C_i son números algebráicos y los V_i están en D con coeficientes algebráicos. O sea la integral de una función racional es la suma de una función en el mismo campo más los productos de constantes por logaritmos de funciones que también están en ese campo.

La afirmación del teorema de Liouville es similar a esto, excepto por modificaciones que permiten que no exista la integral en forma cerrada.

El teorema de Liouville involucra el concepto de funciones elementales. Estas son obtenidas al hacer dos tipos de extensiones del campo D. Una extensión algebráica de un campo F es obtenida de alguna función la cual permite que exista un polinomio irreductible $p(x,y)=0$ donde sus coeficientes están en F, y su solución es diferente de cero. Por ejemplo la raíz cuadrada de x puede ser representada por z cuando es solución del polinomio $z^2-x=0$.

Una extensión trascendental de F puede ser obtenida de una función f, diferente a un polinomio, con coeficientes en F. Se llamará a una función trascendental un monomio si es una exponenciación o un logaritmo de una función que ya está en el campo. Entonces e^x, log x son monomios sobre las funciones racionales. Estaremos interesados en aquellas extensiones trascendentales que puedan ser formadas por monomios.

Una función elemental es aquella que en un campo está formada por un número finito de extensiones algebraicas y monomiales de funciones racionales.

Debe ser notado que no toda exponenciación o logaritmo de un elemento de un campo F es un monomio sobre ese campo. Considérese que el campo contenga e^x y e^{x^2} entonces e^{x+x^2} no es un monomio sobre ese -

campo.

Ahora estamos en posición de enunciar el teorema de Liouville.

Supongamos que una función f está en el campo de funciones elementales F. Entonces la integral de f es una extensión de F formada por funciones elementales.

$$\int f \ dx = Vo + \sum_{i=1}^{k} Ci \ Log \ Vi$$

donde Vo $\in$ F, Vi $\in$ F, Ci son constantes

La prueba del teorema de Liouville esté basada en las propiedades - de diferenciación de los monomios de las exponenciales y logarítmos y de - funciones algebráicas.

Para que f en F posea una integral que sea una función elemental F, debe poseer esta integral en alguna extensión finita de F, llamemosla F*. Por descomposición en fracciones parciales podemos representar la inte-- gral buscada como un polinomio en los monomios y funciones algebráicas, - más algunos términos racionales en estas funciones.

Por las propiedades de diferenciación se sigue que ninguna nueva - función pueda surgir con la excepción de nuevos términos logarítmicos -- los cuales pueden estar multiplicados por constantes.

Los argumentos de los nuevos logarítmos también deben estar en el campo original F de otra manera sus derivadas introducirían funciones que no están en el integrando.

La idea clave en la prueba de Risch del Teorema de Liouville es el requerimiento que los monomios sean algebráicamente independientes. Esto permite que se desarrollen operaciones racionales como es descomposición en fracciones parciales y factorización sobre los monomios como si fueran variables diferentes.

La descomposición en fracciones parciales de la integral nos permite obtener una representación de una función racional en los monomios y funciones algebráicas las cuales son extremadamente útiles. Cuando existe la integral y es una función elemental su descomposición en fracciones parciales en el teorema de Liouville toma la siguiente representación:

$$\int f\ (x,\ Wi)\,dx = P(x,\ Wi) + \sum_{j=1}^{k} \frac{R_j\,(x, Wi)}{S_j\,(x, Wi)}$$

$$+ \sum_{r=1}^{s} Cr \log Vr\ (x,\ Wi).$$

donde f está en F, Wi son los monomios y funciones algebráicas en F. - - P, R_j y S_j son polinomios. Las Vr son funciones racionales y las Cr son - constantes.

El algorítmo de integración de Risch es un argumento de inducción sobre el número de extensiones tanto algebráicas como monomiales que -- son necesarias para construir el campo en el cual reside el integrando. - - Así de esta manera puede ser obtenida la integral de una función racional.

Al examinar un integrando, las extensiones algebráicas y monomia les en ocasiones son obvias, sin embargo se debe tener cuidado en permitir solamente monomios que sean algebráicamente independientes a los escogidos previamente. Cuando se ha hecho esta selección sobre un orden de los monomios y de las funciones algebráicas entonces la última extensión tie-- ne que ser cualquiera de las siguiente: a) Algebráica b) Exponencial ó -- c) Logarítmica. El integrando que es expresable como una función racio-- nal de las extensiones algebráicas y de monomios, puede ser escrito como una suma de una parte polinomial y una parte racional. La integral de la - parte racional se obtiene facilmente en los casos exponenciales y logarítmi cos. La integral de la parte polinomial del caso logarítmico también se -- obtiene facilmente.

Para la parte polinomial del caso logarítmico daremos el siguiente ejemplo del algorítmo de Risch.

Encontrar la siguiente integral:

$$\int \log x \, dx \quad \text{sea} \quad W = \log x$$

$$\text{entonces:} \quad W' = \frac{1}{x}$$

Si existe la integral es de la forma:

$$B_2 \; W^2 + B_1 \; W + B_0$$

Derivando:

$$(B_2 \; W^2)' + (B_1 \; W)' + B_0' =$$

$$B_2' \; W^2 \quad + 2 \quad W \; B_2 W' \; + B_1' \; W + W' \; B_1 + B_0' =$$

$$B_2' \; W^2 \quad + 2 \frac{WB_2}{x} + B_1' \; W + \frac{B_1}{x} + B_0' =$$

Agrupando e igualando con el integrando:

$$B_2' \; W^2 \quad + \left(\frac{2B_2}{x} + B_1' \right) W + \frac{B_1}{x} + B_0' = W$$

Comparando términos se deduce:

i) $B_2' = 0$ por lo tanto $B_2 = \text{cte}$

A la cte la llamaremos b_2 así $B_2 = b_2$

$$\text{ii)} \; \frac{2b_2}{x} + B_1' = 1$$

Integrando y sustituyendo:

$$\int \frac{2b_2}{x} + \int B_1' = \int 1$$

$$2b_2 W + B_1 = x + cte$$

Comparando términos:

$$b_2 = 0 \quad y \quad B_1 = x + cte$$

a la cte la llamaremos b_1

iii) $\frac{B_1}{x} + B_0' = 0$ sustituyendo $B_1 = x + b_1$

$$\frac{x + b_1}{x} + B_0' = 1 + \frac{b_1}{x} + B_0' = 0$$

Despejando

$$\frac{b_1}{x} + B_0' = -1$$

Integrando

$$\int \frac{b_1}{x} + \int B_0' = -\int 1$$

$$b_1 W + B_0 = -x + cte$$

Comparando términos se deduce que:

$$b_1 = 0 \qquad B_0 = -x + cte$$

Así de esta forma como:

$$B_2 = 0 \quad B_1 = x \quad y \quad B_0 = -x + cte$$

La solución es:

$$\int \log x \, dx = x \log x - x + cte$$

La parte polinomial del caso exponencial es más complejo que el caso logarítmico porque la derivada de una exponencial es una exponencial del mismo grado.

Por ejemplo considerese:

$$\int e^{x^2}\,dx$$

El grado del polinomio solución a lo más es uno, digamos $(ax + b)\, e^{x^2}$ donde a y b son constantes, por diferenciación tenemos:

$$1 \quad e^{x^2} = (a + 2x\,(a \quad x + b))\; e^{x^2} = (a + 2ax^2 + 2bx)\, e^{x^2}$$

Comparando potencias de x obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2a &= 0 \\ 2b &= 0 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

Puesto que este sistema de ecuaciones no puede ser satisfecho, no existe integral en términos de funciones elementales, como es bien sabido.

Francamente no es nuestra intención ahondar en este tema, dado - - que nuestro programa ISI como SAINT, es heurístico y no integra por fracciones parciales la cual aparte de su valor propio es una herramienta necesaria para implantar el procedimiento de Risch.

En esta parte nuestra pretensión es solamente de divulgar esta información, pensando que si se quiere continuar con el conocimiento de este campo al final de esta tesis presentaremos un apéndice de referencias.

3. MACSYMA.

Terminando con este capítulo se proseguirá con la descripción del -- Sistema Macsyma desarrollado en el proyecto MAC, del M.I.T. por W. A.- Martin y R. J. Feteman (Ref 4), en el cual se explica que su principal pro-- pósito no se refiere únicamente a la integración simbólica, ni tampoco apor ta nuevas técnicas a la resolución automática de este tipo de problemas - - como los trabajos descritos anteriormente, si no que hace extensiva la capa cidad de automatizar sistemas de manipulación algebráica en varias áreas,- entre las cuales se incluye a las siguientes:

a) Cálculo de Límites.

b) Integración Simbólica.

c) Solución de Ecuaciones.

d) Simplificación Canónica.

e) Manipulación de Expresiones de uso específico

f) Asistencia en Programación y Biblioteca

La meta inicial desarrollada por Macsyma fué combinar los resultados de las investigaciones de Moses en el programa SIN y Engelman en el - Sistema MATHLAB, añadiendo procedimientos para manejar arbitrariamente la precisión algorítmica de polinomios, funciones racionales e integra-- ción en las áreas mencionadas en los incisos anteriores.

Los subsistemas de Macsyma fueron cuidadosamente integrados, y no están restringidos a lenguajes de comunicación inflexibles. Una única representación fue escogida, o sea, se formó un lenguaje basado en una - combinación que está entre la facilidad en el uso y la eficiencia y se trató en lo posible para que el usuario tuviera una notación natural para su problema, aunque se restrinja un poco al esqueleto de las notaciones escogidas en la fase usuario-computadora.

Este sistema está compuesto de diversos módulos, de los cuales - los principales se muestran en la figura 5, en donde los que son dependientes uno con respecto al otro se encuentran ligados y los inmóviles dentro - de su desarrollo son encerrados en un rectángulo.

En la descripción del sistema Macsyma se explica que su pretensión es servir a los matemáticos como un colaborador inteligente, en ocasiones guía, el cual conocerá y será capaz de aplicar en gran parte las técnicas del análisis numérico.

En suma, será un almacén de conocimiento acumulado acerca de - muchos problemas en una área específica, tales como: tratados de ecuaciones diferenciales o series, aplicación de algoritmos complejos y tediosos.

También pretende Macsyma que es razonable que sean estimuladas la productividad e ideas del matemático cuando pueda obtener facilmente -

Módulos del Sistema Macsyma.

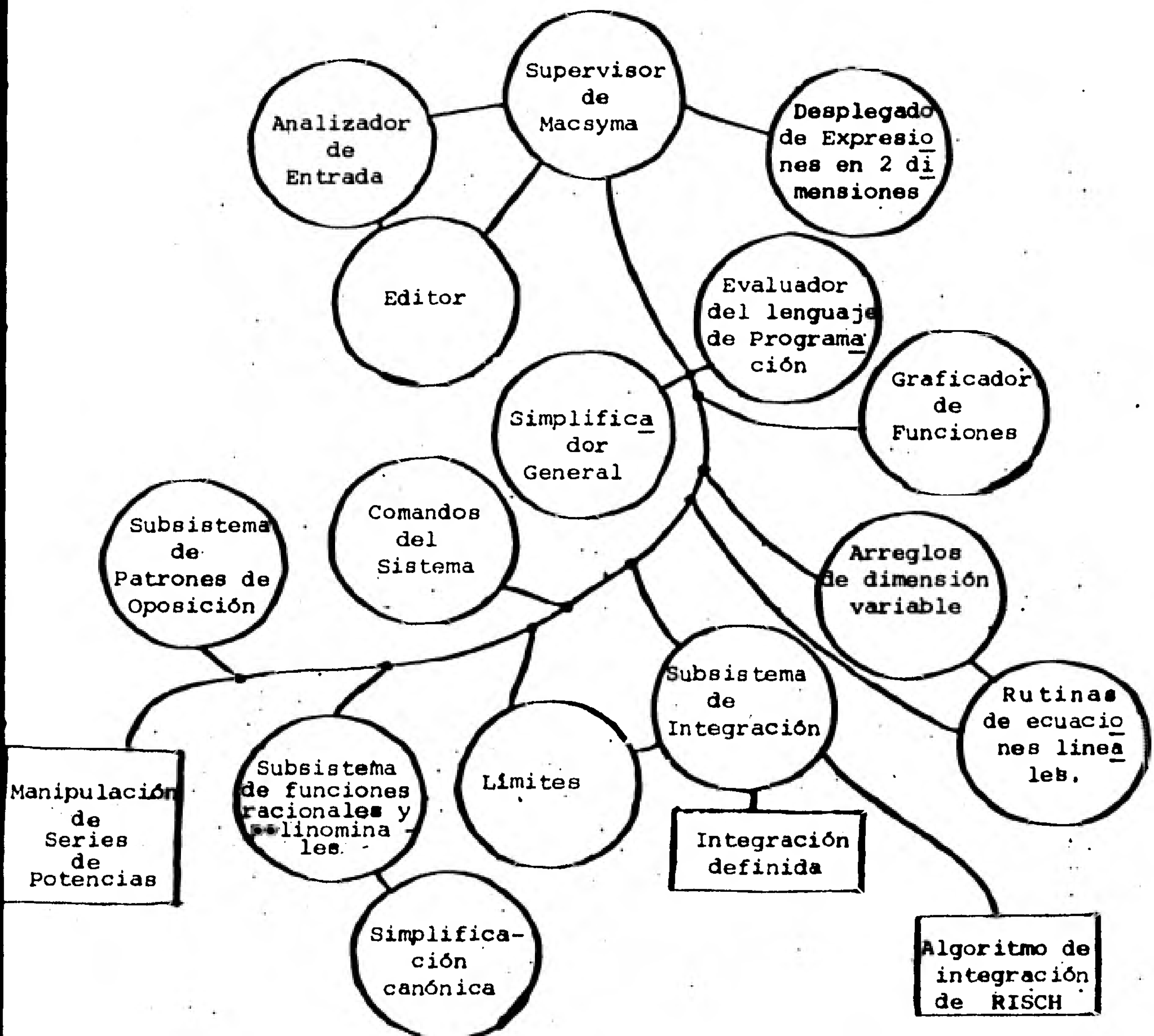


FIGURA 5

las consecuencias de estas ideas, se espera que estará abierto el camino pa ra descubrir nuevas técnicas de solución de problemas. Estas metas no son nuevas, ni únicas en las matemáticas, hay un claro paralelismo en planifica- ción de sistemas, diagnóstico médico y solución de manera interactiva de - - problemas que se presentan en muchos campos.

Es claro que el sistema Macsyma está tratando de ser muy ambicio- so, ya que su finalidad es responder a una gran variedad de demandas; sin - embargo se plantea que es apropiado, porque enfoca el pensamiento del u- - suario en las cuestiones diarias de la ciencia de la computación.

CAPITULO III

HERRAMIENTAS ALGORITMICAS.

En este capítulo se expondrá el Algoritmo de Unificación (A.U.) que fue el principal medio del cual se hizo uso para la construcción del -- programa ISI.

El A.U. es el que nos permitió aplicar a una expresión dada las -- reglas de integración, derivación, álgebra y aritmética.

Tomemos el ejemplo de querer encontrar la siguiente derivada:

D (3 * X).

Primero se aplica la regla D(N* V) = N * D (V) donde N es una constante y V una función.

Aplicando la regla queda la ecuación así:

3 * D (X)

Seguidamente se aplica la regla:

D (X) = 1 donde X es la variable.

Así, la ecuación queda:

3 * 1

Y por último aplicando la regla:

V * 1 = V donde V es cualquier función.

De esta forma concluímos:

D (3 * X) = 3 * D (X) = 3 * 1 = 3.

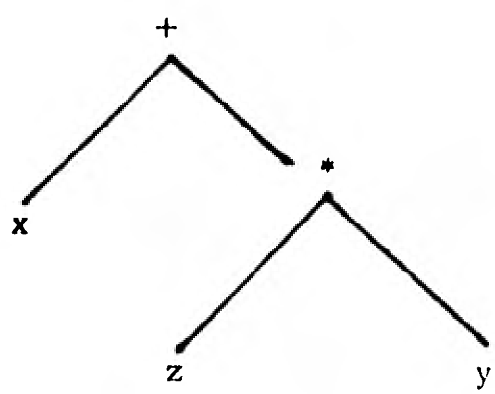
Para explicar como se hizo para que la computadora aplicara estas substituciones es necesario introducir los conceptos de notación infija, notación polaca, término, variable, orden de una conectiva y el teorema de la notación polaca prefija.

Pero como sabemos, la integración simbólica no es únicamente la aplicación de substituciones, como es el caso de la derivación que por medio de la aplicación de un número de "recetas" se encuentra la solución, el problema de la derivación es algorítmico, sin embargo el tratar de solucionar una integral esta puede no existir en forma simbólica o puede haber distintas substituciones que nos permitirán llegar a la solución.

NOTACIONES.

Para representar una expresión algebráica se puede usar varias notaciones. La primera diferencia es entre las lineales y las no lineales.

Sobre las notaciones no-lineales, ya que no las utilizamos en ISI, sólo diremos que consisten en representar un enunciado por una gráfica -- por ejemplo:



Nuestro interés radica sobre las notaciones lineales.

Para representar las expresiones algebraicas que utilizamos nor -- malmente usamos la notación inflija, esta utiliza paréntesis y dado que -- por medio de una visualización general de la expresión nos damos cuenta - como se afectan sus partes, esto hace difícil su manejo en la computadora.

Las notaciones polaca prefija y sufija no utilizan paréntesis y esto facilia su manipulación algorítmica.

La notación polaca prefija se escribe anteponiendo las conectivas - de los términos por ejemplo: + X * Z Y = X + (Z * Y).

La notación polaca sufija se escribe anteponiendo los términos de - las conectivas por ejemplo: X + Z Y * = X + (Z * Y).

La notación utilizada por ISI fue la polaca prefija dado que existen técnicas ya desarrolladas, como son el Teorema Fundamental de la Notación Polaca Prefija (T.F.N.P.P.) y el Algorítmo de Unificación que explicaremos más adelante, que nos permiten la facilidad de aplicar las reglas de substitución.

Existen algorítmos para pasar de notación infija a polaca prefija y de notación polaca prefija a notación infija, estos fueron implementados - en ISI en la entrada y en la salida respectivamente siendo el manejo interno de las expresiones algebraicas siempre en notación polaca prefija.

Caracterizaremos el concepto de conectiva y definiremos que es un término como preámbulo para presentar el T.F.N.P.P.

ORDEN DE UNA CONECTIVA

A una conectiva se le asigna un orden según el número de términos que afecte. Hay conectivas que afectan a un sólo término a las que llamamos unarias como es la negación en lógica - que aplicado a T se obtiene — "lo contrario de T", " NO T ". Hay conectivas binarias como por ejemplo en aritmética + que aplicado a X y Y es: X + Y " X más Y". Una conectiva n-aria afectará a n-términos. Se quiere hacer notar que en aritmética la conectiva menos " - " puede ser unaria o binaria ejemplificándose:

- 3 unaria.

8 - 2 binaria.

Internamente en el programa ISI se diferenció el "-" unario del — "-" binario substituyendo el símbolo admiración " ! " por el "-" unario, - ya que sus reglas de substitución son diferentes.

TERMINO.

DEFINICION. - Se llamará término.

i) a una variable o a una constante.

ii) a una conectiva n-aria seguida de n términos.

Nótese que esta definición es recursiva ya que hace intervenir en - - la definición la misma noción que está definiendo.

Es necesario introducir la noción de rango.

DEFINICION DE RANGO DE UNA SUCESION DE SIMBOLOS.

- Si la sucesión de símbolos es vacía su rango es - 1.
- Si se compone de una variable o una constante su rango es -1.
- Si es una conectiva n-aria su rango es n-1. ej. unaria 0. binaria +1.
- Si la sucesión de símbolos está formada por la concatenación de la sucesión de símbolos A y la sucesión de símbolos S su rango - es igual a R(A) + R(S).

Ejemplos:

+ X * Y Z

R(+) = 1, R (*) = 1.

R (X) = -1, R (Y) = -1, R (Z) = - 1.

R (+X*YZ) = R (+) + R (X) + R (*) + R (Y) + R (Z)

R (+X*YZ) = 1 - 1 + 1 - 1 - 1 = - 1

Así podemos presentar:

El Teorema Fundamental de la Notación Polaca Prefija. (T.F.N.P.P.).

Este teorema es de gran utilidad para implantar el A.U. y lo que - nos determina es donde termina el término que empieza en un símbolo- -

dado de una expresión.

TEOREMA.

La sucesión de símbolos A es un término si y sólo si.

1a) $R(A) = -1$.

2a) Para toda sucesión B que sea una "cabeza propia" de A (es decir que existe una sucesión de símbolos C tal que A pueda estar formado por la concatenación de B seguida de C), R(B) debe ser positivo o nulo.

Ejemplos:

+X no es un término ya que $R(+X) = 0$

XY* no es un término, aunque $R(XY^*) = -1$ ya que el rango de su "cabeza propia" X es igual a -1, o sea no cumple 2, esto es $R(X) = -1$.

Este teorema es muy útil para determinar el término que comienza con un cierto símbolo, Basta, a partir de ese símbolo, calcular el rango de cada símbolo, acumular su valor y detenerse cuando se alcanza el -1.

Ejemplo:

En la secuencia: *+XY + ZX encontraremos el término que empieza en el primer +.

R (+) = 1

R (+X) = 0

R (+XY) = -1

Entonces el término que empieza en el primer + es +XY.

El Algoritmo de Unificación (A.U.).

Como ya dijimos el A.U. es el que nos permite aplicar la substitución S = J al término T.

El método utilizado es el desarrollado por Pitrat en la referencia 1, básicamente es el mismo aunque se tuvieron que contemplar algunos puntos que no estaban presentes en ese algoritmo.

Primero identificaremos los elementos del término T a el cual le aplicaremos la substitución S = J. Y después a los elementos de S y J. Los elementos de T podrán ser únicamente operadores, números o variable.

Operadores: El orden de estos es binario o unario. Los primeros son: "+" más, "-" menos, "*" por, "/" entre, "ñ" potencia. Los cuales establecen una relación entre dos términos.

Fué mayor el conjunto de las operadores unarios ya que se incluyen en él las funciones: trigonométricas {sen, cos, tan, cot, sec, csc}, exponencial {exp}, logaritmica {log}, arcos de ángulos {angsen, -

angcos, angtan, angcot, angsec, angcsc $\}$, así como la función Derivación $\{$ D $\}$ y la de integración $\{$I$\}$.

El símbolo "!" representó el menos unario. Internamente en el programa los operadores se representan con un sólo símbolo, siendo algunas - de las equivalencias las siguientes: S = sen, C = cos, E = exp, L = log, - - J = angsen, O = angcot, I = integral, D = derivada, etc. En el listado del - código del programa que es presentado en el siguiente capítulo se encuentra completa la tabla de equivalencias.

Números: Es el conjunto de símbolos $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, en este punto existió una contrariedad cuando se tuvo que efectuar operaciones como 4 * 3 = 12 y el programa internamente sólo podía representar un número por un símbolo y el "12" ocupaba dos. Quedaba la alternativa de restringir el programa a que sólo manejara números de "tamaño" uno lo cual no era muy satisfactorio; para solucionar esto se definió el operador binario "&" léase seguido, que significa concatenación así por ejemplo: 4 * 3 - fué igual a 1&2, léase uno seguido de dos, el símbolo "&" no se imprimió- en el resultado final siendo invisible su manejo para el usuario.

Variable: Fué unicamente el símbolo "X".

Los elementos de S y J son los mismos, sólo agregándole el de término el cual tiene cuatro tipos, a saber:

1) $\{N\}$. Términos que son constantes, o sea cualquier término - - cuyo resultado sea una constante por ejemplo: (3*4) + (8/3).

2) $\{U, V, W,\}$. Términos que aparecen una vez en la expresión S (origen) y una o varias veces en la expresión J (destino).

3) $\{A\}$. Términos que aparecen dos veces en la expresión ori-- gen y una en la expresión destino por ejemplo:

$$A * U + A * W = A * (U + W)$$

4) $\{B\}$. Términos que aparecen dos veces en la expresión ori- gen y no aparecen en la expresión destino por ejemplo: $\frac{B}{B} = 1$

Ahora expondré el A. U.

Sea T el término a aplicar la substitución S = J, siendo T, S, J, sucesio-- nes de símbolos las cuales las podemos expresar de la siguiente forma:

$$T = t_1 \ t_2 \ldots \ t_n$$

$$S = s_1 \ s_2 \ldots \ s_m$$

$$J = j_1 \ j_2 \ldots \ j_r$$

Supongamos que los primeros p símbolos de T y S coinciden. Es claro que al principio podemos tener en p el valor cero.

Así:

$$T = t_1\, t_2 \ldots t_p\, t_{p+1} \ldots t_n$$

$$S = t_1\, t_2 \ldots t_p\, s_{p+1} \ldots s_m$$

$$J = j_1\, j_2 \ldots j_r$$

Comparando t_{p+1} con s_{p+1} se pueden dar los tres siguientes casos:

1) t_{p+1} es variable o número, entonces se compara con s_{p+1}, si es el mismo símbolo (p+1) símbolos coinciden y después de aumentar p en una unidad volvemos a empezar el procedimiento, sino existe FRACASO.

2) t_{p+1} y s_{p+1} son ambos conectivos. Si son diferentes símbolos hay FRACASO, ninguna substitución puede hacer que coincidan conectivos diferentes, sino p se incrementa en uno y seguimos con el procedimiento.

3) t_{p+1} es una conectiva y s_{p+1} es un término. Aquí dado que existen cuatro tipos de términos se toman cuatro diferentes alternativas:

i) s_{p+1} es N. Entonces se determina el término que comienza en -- t_{p+1}.

Sea $t_{p+1} t_{p+2} \ldots t_{p+k}$ al cual llamaremos T_{pk}. Para esto basta utilizar el T.F.N.P.P. Si todos los elementos de la sucesión de símbolos $t_{p+1}\, t_{p+2} \ldots t_{p+k}$ son: conectivos o números entonces se puede concluír que este término es una constante y se substituirá en J en cualquier lugar donde encontremos el símbolo N, si así no fuera será FRACASO.

ii) s_{p+1} es U, V o W, de la misma manera que en el caso anterior - - utilizaremos el T.F.N.P.P. para encontrar el término T_{pk} este lo substituiremos en J en el lugar donde encontraremos el símbolo U, V o W según el -- caso.

iii) s_{p+1} es A. Como sabemos que A se presenta dos veces en el término S, la primera vez encontraremos T_{pk} el cual lo guardaremos en memoria, la segunda ocasión que se presente A, lo cual se detecta por medio de una bandera, se calcula otra vez el término T_{pk} este se compara con el guardado en memoria, si estos términos no fueran iguales existiría FRA-- CASO, sino se substituirá en J el término Tpk en el lugar donde aparece A.

iv) s_{p+1} es B. El procedimiento en este caso es igual al anterior, -- con la diferencia de que como B no aparece en J no se hará ninguna substitución.

Nótese que si no existe ningún FRACASO que hiciera terminar el procedimiento en la sucesión de símbolos J quedará el término con la substitución ya aplicada. Según las propiedades de la notación polaca prefija las dos sucesiones de símbolos T y S se agotarán al mismo tiempo, o sea, llegarán al valor - 1 en igual momento lo que indicará que se ha finalizado.

Además, dado que el principal problema que estaba enfocado a re- - solver era la integración, el presente algoritmo tuvo una implementación -.

de tal forma que si la substitución a aplicar era una regla de integración, -- el A.U. verificaría que correspondiera la variable del integrando y la de - - integración, demos el siguiente ejemplo:

$$\int \mathrm{sen}^2 (x)\, d\, (\mathrm{sen}\ x)$$

Al cuestionar el programa ISI se le daría con la siguiente notación.

(I (S X) # 2) @ (D(SX))

El símbolo "@ " es una conectiva binaria que establece una relación entre la integral y término con respecto al cual se va a integrar.

Así en el ejemplo antes de aplicar la substitución:

$$\int u^n \ dw = \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

se tuvo que corroborar la igualdad u' =w'. Esta prueba la realizó el A.U. - Continuando con el ejemplo, primero en memoria se guardará sen(x) des-- pués al encontrar el otro término sen(x) que es con respecto al cual se in-- tegrará (es obvio que lo que nos indica; es el símbolo "D") este se deriva; - siendo el resultado cos(x), después se deriva el guardado en memoria y el resultado es cos(x), ambas derivadas se comparan como resultan iguales - de esta forma procede la substitución y la integral queda resuelta.

Dado que ISI estaba orientado principalmente a resolver integrales esta última implementación en el A.U. hizo al programa ISI más ágil tanto en su ejecución como en su subsecuente programación.

Ahora daremos un ejemplo del mecanismo seguido por el algoritmo- de unificación. Supongamos que queremos resolver la siguiente integral.

$$\int \cos(x+3)dx$$

y nuestra tabla de substituciones consta únicamente de las siguientes dos:

$$\int \text{sen}(a)da = -\cos(a)$$

$$\int \cos(a)da = \text{sen}(a)$$

Para consultar a ISI la integral tomaría la siguiente forma:

I(C(X+3)@(DX))

ISI lo transforma a notación polaca prefija, quedando de la siguiente forma:

I@ C+X3DX

Entonces T=I@C+X3DX

Nuestras substituciones S y J en ISI tendrían la siguiente representación:

S	J
I@SADA	: CA
I@CADA	SA

Iniciaremos los enteros K y L con el valor uno.

	1	2	3	4	5	6	7	8
T:	I	@	C	+	X	3	D	X
S:	I	@	S	A	D	A		
J:	:	C	A					

Se comparan los símbolos T(K) y S(L) o sea T(1) y S(1) como ambos son - conectivos iguales se incrementa K y L en 1 y se compara T(2) y S(2) como resultan otra vez conectivos iguales se incrementa K y L en 1 y se compa- ran T(3) y S(3) como resultan ser conectivos diferentes entonces no procede la unificación y termina el procedimiento con FRACASO.

Ahora pasamos con la segunda regla de sustitución:

	1	2	3	4	5	6	7	8
T.	I	@	C	+	X	3	D	X
S:	I	@	C	A	D	A		
J:	S	A						

Dado que los tres primeros símbolos son conectivos iguales seguiremos el ejemplo en el punto donde K y L tienen el valor 4, como T(4) es conectivo y S (4) el símbolo A entonces se encuentra el término que empieza en T(4) incrementando únicamente K, esto se hace utilizando el T.F.N.P.P., este es +X3 y se guarda en memoria, también se enciende la bandera que indica que ya se presentó el símbolo A, se incrementa el valor de K y L en uno, siendo en este momento sus valores K = 7 y L = 5 entonces se compara T(7) y S(5) - como resultan conectivos iguales se incrementa K y L en uno y se compara T(8) y S(6). Aquí como es la segunda vez que se presenta el símbolo A en - el término S, se encuentra el término que empieza en T(8) este es X el cual se deriva y su resultado es 1, el guardado en memoria +X3 se deriva siendo el resultado 1 se comparan ambas derivadas y como son iguales se substituye en J lo guardado en memoria en el lugar donde aparece A quedando J con la siguiente representación S+X3, por último dado que T y S se agotaron al mismo tiempo termina el procedimiento con EXITO y el resultado - queda en el término J el cual es transformado a notación infija.

Así:

$$S + X3 = S(X+3)$$

Siendo la solución: $\int \cos (x+3)\, dx = \mathrm{sen}(x+3).$

El código de la subrutina del A.U. se muestra en el próximo capí--
tulo.

CAPITULO IV

DESCRIPCION DEL PROGRAMA ISI.

ISI fue programado en lenguaje ALGOL versión 3.1 de la máquina - Burroughs B6700. Su código consta de aproximadamente 2000 líneas. Su -- captura de datos, o sea las integrales a resolver, puede ser tanto de manera interactiva por medio de una terminal remota como por tarjeta. La notación utilizada para consultar con una integral a ISI es la notación infija, esta es casi igual a la utilizada en el lenguaje ALGOL cuando se quiere representar una expresión aritmética, algunos cambios fueron la introducción de conectivos como son "I" integración, "D" derivación, etc. En ISI a diferencia de ALGOL el símbolo potencia fue "ñ" en vez de "**". Las prioridades - de los conectivos en la utilización de paréntesis es la misma.

LA TABLA SUBSTITUCIONES.

La facilidad que presenta la notación polaca prefija es que se puede - caracterizar a un término dado por el primer conectivo que presenta, así - las substituciones utilizadas por ISI se dividieron en grupos que contienen - como primer símbolo el mismo conectivo, el primer grupo fue el de las reglas de derivación que ocuparon en la tabla de los lugares 2 al 25. Las - - reglas de integración se dividieron en varios subgrupos, entre estos están las reglas que extraen una constante de la integral o si la integral es una -- suma o resta separa el problema de dos integrales.

Las substituciones de un mismo conectivo según sus propiedades se - dividieron en los siguientes 7 grupos:

1) CONSTANTES. - Son substituciones que involucran solo constantes por ejemplo: $2 * 3 = 6$

Aplicar estas substituciones siempre significa una simplificación del término.

2) ENTRADA. - Este grupo desaparece el operador "/" del término, substituyéndolo por el operador " * " por ejemplo:

$$\frac{U}{3} = U * 3^{-1}$$

3) UNIFICA. - Hace que los términos a manejar estén dentro de - - una misma respresentación ya que iguales expresiones pueden tener en notación polaca prefija diferentes representaciones por ejemplo:

$$4 * (3 * 2) = 4 * 3 * 2$$

$$* \ 4 * 32 = * * \ 4 \ 3 \ 2$$

4) SIMPLIFICA. - Aplica reglas como las siguientes: $U * 1 = U$, - - $U^{\circ} = 1$, $\frac{U}{1} = U$.

5) SEPARA.- Trata de aplicar las substituciones que en notación - - polaca prefija anteponen los operadores "+" y "-" a los operadores "*" y - - "ñ" lo que, en algunos casos, facilita su integración.

6) UNE.- Trata de aplicar las substituciones que anteponen los operadores "*" y "ñ" a los operadores "+" y "-".

7) SALIDA.- Al fin para la impresión introduce el operador "/" - que había sido quitado con las substituciones del grupo ENTRADA.

Además existen grupos de substituciones especiales, como son por - ejemplo la conmutatividad.

MANIPULACION DEL ALGORITMO DE UNIFICACION.

UNIFICA es el nombre de la rutina que ejecuta el A.U. la cual tiene como parámetros dos números enteros; los límites inferior y superior de - los lugares físicos que ocuparon en la tabla las substituciones que se intentará aplicar.

El A.U. se aplicó de dos maneras diferentes a saber:

1) Por medio de la rutina UNIFICANDO que a un término dado aplicaría un grupo de substituciones hasta que ya no pueda aplicar otra más, - o sea de manera exhaustiva.

2) Por medio de la rutina UNIFICO que a un término dado al aplicar un grupo de substituciones se detendrá al haber obtenido el primer EXITO.

LA ESTRATEGIA DE INTEGRACION.

El mecanismo seguido por ISI al cuestionarlo con una integral es el siguiente:

1) Al integrando se intenta completarle cuadrados.

2) Trata de aplicar 21 substituciones las cuales son integrales que conoce sus primitivas si termina con FRACASO sigue con la etapa 3.

3) Por medio de la rutina llamada IUDU, intenta aplicar el método de derivadas-divididas, que se explicó en el capítulo dos, este consiste en determinar cuando la derivada de una subexpresión dividen el resto del in--tegrando, si obtiene EXITO se detiene, sino pasa a la siguiente etapa.

4) Aplica la rutina POR PARTES que como lo dice su nombre tiene implementado el método de integración por partes, otra vez en caso de -- EXITO se detiene, sino sigue adelante.

5) Trata de separar la integral aplicando reglas como:

$$\int (u+v) = \int u + \int v \qquad ó$$

$$\int (u+v)^2 = \int u^2 + 2\int uv + \int v^2$$

Si pudiera aplicar este tipo de reglas intentaría los mismos procedimientos desde la etapa uno, sino terminaría con FRACASO.

A continuación se presenta el listado del código del programa.

```
BEGIN
REAL OT2,CPAE;
%                     I          SSS          I
%                     I        S     S        I
%                     I         S             I
%                     I           S           I
%                     I        S     S        I
%                     I          SS           I
  % AUTOR : DAGOBERTO MARQUEZ TOST
  %         ========= ======= ====

%   TABLA DE EQUIVALENCIAS DE SIMBOLOS CON FUNCIONES

%      EXP =====>      E
%      LOG =====>      L
%      SEN =====>      S
%      COS =====>      C
%      TAN =====>      T
%      COT =====>      G
%      SEC =====>      F
%      CSC =====>      H
%      ANGSEN =====>   J
%      ANGCOS =====>   K
%      ANGTAN =====>   M
%      ANGCOT =====>   O
%      ANGSEC =====>   P
%      ANGCSC =====>   Q
%     TERMINOS QUE SE REPITEN
%     DOS VECES EN LA 2A
%          PRODUCCION     =======> A,B
%      INTEGRAL =====> I
%      DERIVADA =====> D
%      CONSTANTE ====> N,R
%      TERMINOS  ====> U,V,W,Z
%      VARIABLES ====> X,Y

        DEFINE              IREG=22#,
                            FINOF=*FINOF*#;
FILE TTY(KIND=REMOTE,MAXRECSIZE=22);
FILE TARJ;
FILE IMP(KIND=PRINTER);

TRANSLATETABLE CAMBIO("ISCTGELFHJKMOQ&I"=+*/ÑƏRNXZUVWABD" TO
                      "000000000000000000000001123333456");
TRUTHSET NUMEROS("0123456789"),
         NUMAND("&0123456789"),
         UNARIOS("I"ISCTGELDFHJKMOPQ"),
         OPERADORES("I2()I"&-+*/ÑSCTGDELFHJKMOPQ"),
         OPERADORES1("I"&-+*/ÑSCTGELFHJKMOPQ"),
         OPERADORES2("I=+*/ÑEL""),
         TERMINOS("UVWZ"),
         CONST("NR"),
         OPERNUM("2I&+-*/Ñ0123456789LESC"),
         D("D"),
         DIS("DI"),
         I("I"),
         MAS("+"),
         POR("*"),
         MASPOR("+*"),
         PORDATO("*/"),
         GATO("#"),
         BINARIOS("&2+*/-"),
         BLANCO(" "),
         VARIABLES("XY");

  DEFINE PPRI(X)=POINTER(SUBSTITUCIONES[10*X])#,
         IPRI(X)=INTEGER(POINTER(SUBSTITUCIONES[(10*X)+3])+3,2)#,
         PSOLPRI(X)=POINTER(SUBSTITUCIONES[(10*X)+5])+5#,
         ISOLPRI(X)=INTEGER(POINTER(SUBSTITUCIONES[(10*X)+9])+4,2)#,

     CONMUTAINT(A)=          UNIFICO(A,96)#,
     SACACTEINT(A)=          UNIFICANDO(A,97)#,
     AISLAIENGPC(A)=         UNIFIC(A,104)#,
```

```
AISLA2DCGPC(A)=              UNIFIC(A,107)ñ,
DERIVA(A)=                   UNIFICANDO(A,96)ñ,
SIMPLIFICA(A)=               UNIFICANDO(A,1)ñ,
RESOLU1ERGPO(A)=             UNIFICC(A,105)ñ,
RESOLU2DOGPO(A)=             UNIFICO(A,108)ñ,
SACA1ELEMDIVANDO(A)=         UNIFIC(A,92)ñ,
SEPARAINT(A)=                UNIFICANDO(A,95)ñ,
INTEGRASIMPLES(A)=UNIFICANDO(A,100)ñ,
UNIFICAOPERADORES(A)=        UNIFICANDO(A,2)ñ,
INTEGRACOMPUESTAS(A)=        UNIFICANDO(A,96)ñ,
CUADRADOS1ERGPO(A)=          UNIFICO(A,101)ñ,
CUADRADOS2DOGPO(A)=          UNIFICO(A,93)ñ,
ENTRADA(A)=                  UNIFICANDO(A,1)ñ,
SALIDA(A)=                   UNIFICANDO(A,7)ñ,
ANTECEDEMASDEPOS(A)=         UNIFICANDO(A,4)ñ,
ANTECEDEMASDEGATO(A)=        UNIFICANDO(A,5)ñ,
IUDU1ERGPO(A)=               UNIFICIUDU(A,1)ñ,
IUDU2DOGPO(A)=               UNIFICIUDU(A,2)ñ,
MASENNUMERADOR(A)=           UNIFICANDO(A,109)ñ,
AISLALN(A)=                  UNIFIC(A,110)ñ,
AISLACOS(A)=                 UNIFIC(A,111)ñ,
RESOLLPORPARTES(A)=          UNIFIC(A,112)ñ,
INTEGRA(A)=
  UNIFICAOPERADORES(A);
                   SIMPLIFICA(A);          SACACTEINT(A);
 INTEGRACOMPUESTAS(A);
    SCAN POINTER(A) FOR W:(6*TREG) UNTIL IN DI;
    IF W = 0 THEN BEXI:=TRUE;
  IF NOT BEXI THEN
  BEGIN
    UNIFICAOPERADORES(A);
    SIMPLIFICA(A);
    IUDU2DOGPO(A);
    SCAN POINTER(A) FOR W:(6*TREG) UNTIL IN DI;
    IF W = 0 THEN BEXI:=TRUE;
   END;
  IF NOT BEXI THEN
  BEGIN
    UNIFICAOPERADORES(A);
    SIMPLIFICA(A);
    IUDU1ERGPO(A);
    SCAN POINTER(A) FOR W:(6*TREG) UNTIL IN DI;
    IF W = 0 THEN BEXI:=TRUE;
    END,
     FINDELOSDEFINES=          ****************ñ;

ARRAY A,AUX,AAUX1,AAUX2,AAUX3,AAUX4,AAUX5,
                AD1,AD2,HELP,AYUDA,ANT,AANT[0:(TREG-1)];
POINTER PAUX1,PAUX2,PAUX3,PAUX4,PAUX5;
INTEGER W,R,IP1,IP2,IP3,IP4,IP5;
REAL PRO1,PRO2,ASUSTI;
BOOLEAN BEXI,BUNIFICC;
LABEL ETIQ,SIG,ADELANTE;

$INCLUDE "APCC81/D/I/2/SUSTII ON SISTEMAS."
$INCLUDE "APCC81/B/I/1/PRE ON SISTEMAS."
BOOLEAN PROCEDURE UNIFICA(A,Z,X);VALUE X;ARRAY A,Z[0];INTEGER X;
FORWARD;
BOOLEAN PROCEDURE UNIFICANDO(A,CON);VALUE CON;
                                        ARRAY A[0];INTEGER CON;FORWAR

IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII
IIIIIIIIIIIIIIIIII R A N G O IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII
IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII

INTEGER PROCEDURE RANGO(P,SW);
POINTER P;
INTEGER SW;
BEGIN
INTEGER W;
IF SW = 1 THEN
BEGIN
  IP1:=*+1;
  REPLACE PAUX1:PAUX1 BY P FOR 1;
END ELSE
IF SW = 2 THEN
```

```
BEGIN
  REPLACE PAUX2:PAUX2 BY P FOR 1;
  TP2:=*+1;
END ELSE
IF SW = 3 THEN
BEGIN
  REPLACE PAUX3:PAUX3 BY P FOR 1;
  TP3:=*+1;
END ELSE
IF SW = 4 THEN
BEGIN
  REPLACE PAUX4:PAUX4 BY P FOR 1;
  TP4:=*+1;
END ELSE
IF SW = 5 THEN
BEGIN
  REPLACE PAUX5:PAUX5 BY P FOR 1;
  TP5:=*+1;
END;
IF P IN NUMEROS THEN
  RANGO:=-1
ELSE
  IF P IN VARIABLES THEN
    RANGO:=-1
  ELSE
    IF P IN UNARIOS THEN
      RANGO:=0
    ELSE
      RANGO:=1;
END OF RANGO;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%   U N I F I C A   %%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

BOOLEAN PROCEDURE UNIFICA(A,Z,X);
VALUE X;
ARRAY A,Z[0];INTEGER X;
BEGIN

     % ESTE PROCEDURE UNIFICA UNA CUERDA DE CARACTERES EN
     % NOTACION POLACA PREFIJA CON ALGUNA SUSTITUCION DE
     % LAS QUE SE ENCUENTREN EN LA TABLA *SUBSTITUCIONES*

ARRAY AUX[0:(TREG-1)];
POINTER PA,
        PAA,
        PAUX,
        PZ;
BOOLEAN BITERA,
        BPRIVEZ,
        BDERIV,
        BPRIMVEZ,
        [illegible]
        BFRACASO;
INTEGER AUX1,
        AUX2,
        [illegible]
PA:=POINTER(A);
PAUX:=POINTER(AUX);
PZ:=POINTER(Z);
  REPLACE PZ BY " " FOR (6*TREG);
  REPLACE PZ BY PSOLPRI(X) FOR TSOLPRI(X);
  WHILE NOT (BITERA OR BFRACASO) DO
  BEGIN
    PAUX:=POINTER(AUX);
    REPLACE PAUX BY PPRI(X)+AUX1 FOR 1 WITH CAMBIO;
    CASE INTEGER(PAUX,1) OF
    BEGIN
  0:IF PA NEQ PPRI(X)+AUX1 FOR 1 THEN BFRACASO:=TRUE;
   1:BEGIN
      IF PA IN NUMEROS THEN
      BEGIN
        REPLACE PAUX BY " " FOR (6*TREG);
        WHILE PZ NEQ " " FOR 1 DO
```

```
          IF PZ = PPRI(X)+AUX1 FOR 1 THEN
          BEGIN
             REPLACE PAUX:PAUX BY PA FOR 1;
             PZ:=*+1;
          END
          ELSE
             REPLACE PAUX:PAUX BY PZ:PZ FOR 1;
      END
      ELSE
      BEGIN
         PAA:=PA;R:=IP2:=0;PAUX2:=POINTER(AAUX2);
         WHILE R:=*+RANGO(PA,2) NEQ -1 DO
         BEGIN
            IF PA IN CPERNUM THEN
            ELSE
               BFRACASO:=TRUE;
            PA:=*+1;
         END;
         IF PA IN OPERNUM THEN ELSE
            BFRACASO:=TRUE;
         IF NOT BFRACASO THEN
         BEGIN

            REPLACE PAUX BY " " FOR (6*TREG);
            WHILE PZ NEQ " " FOR 1 DO
            IF PZ = PPRI(X)+AUX1 FOR 1 THEN
            BEGIN
               REPLACE PAUX:PAUX BY PAA FOR TP2;
               PZ:=*+1;
            END
            ELSE
               REPLACE PAUX:PAUX BY PZ:PZ FOR 1;
      END;
     END;
   REPLACE PZ:=POINTER(Z) BY PAUX:=POINTER(AUX) FOR (6*TREG);
   END;
   2:IF PA IN VARIABLES THEN ELSE BFRACASO:=TRUE ;
 3:BEGIN
   REPLACE PAUX:=POINTER(AUX) BY " " FOR (6*TREG);
   WHILE PZ NEQ " " FOR 1 DO
   BEGIN
     IF PZ NEQ PPRI(X)+AUX1 FOR 1 THEN
     BEGIN
       IF PZ ="$" FOR 1 THEN
       BEGIN
         PAUX4:=POINTER(AAUX4);
         REPLACE PAUX:PAUX BY PAUX4 FOR TP4;
         PZ:=*+1;% WRITE(TTY,*/,TP4);WRITE(INP,*/,TP4);
       END
       ELSE
       BEGIN
         IF PZ = "," FOR 1 THEN
         BEGIN
           PAUX5:=POINTER(AAUX5);
           REPLACE PAUX:PAUX BY PAUX5 FOR TP5;
           PZ:=*+1;
         END
         ELSE
           REPLACE PAUX:PAUX BY PZ:PZ FOR 1;
       END;
     END
     ELSE
     BEGIN
       R:=0;PAA:=PA;
       WHILE R:=*+RANGO(PA,0) NEQ -1 DO
          REPLACE PAUX:PAUX BY PA:PA FOR 1;
       REPLACE PAUX:PAUX BY PA FOR 1;
       PZ:=*+1;PA:=PAA;
     END;
   END;
   REPLACE PZ:=POINTER(Z) BY PAUX:=POINTER(AUX) FOR (6*TREG);
   R:=0;WHILE R:=*+RANGO(PA,0) NEQ -1 DO PA:=*+1;
   END;
 4:BEGIN
   IF NOT BPRIVEZ THEN
```

```
BEGIN
  BPRIVEZ:=TRUE;
  REPLACE PAUX BY " " FOR (6*TREG);
  WHILE PZ NEQ " " FOR 1 DO
    IF PZ NEQ PPRI(X)+AUX1 FOR 1 THEN
      REPLACE PAUX:PAUX BY PZ:PZ FOR 1
    ELSE
    BEGIN
      IF BA THEN PA:=PAA;PAA:=PA;BA:=TRUE;
      PAUX1:=POINTER(AAUX1); TP1:=0;
      REPLACE PAUX1 BY " " FOR (6*TREG);
     R:=0;
     WHILE R:=*+RANGO(PA,1) NEQ -1 DO
       REPLACE PAUX:PAUX BY PA:PA FOR 1;
     REPLACE PAUX:PAUX BY PA FOR 1;
     PZ:=*+1;
    END;
  REPLACE PZ:=POINTER(Z)  BY PAUX:=POINTER(AUX) FOR (6*TREG);
  END
  ELSE
  BEGIN
    PAUX1:=POINTER(AAUX1);
    IF BPERI THEN
    BEGIN
      REPLACE POINTER(AD1) BY " " FOR (6*TREG);
      REPLACE POINTER(AD1) BY "D" FOR 1,
                           PAUX1 FOR TP1;
      REPLACE POINTER(HELP) BY POINTER(A) FOR (6*TREG);
      REPLACE POINTER(AYUDA) BY POINTER(Z) FOR (6*TREG);
      UNIFICANDO(AD1,96); SIMPLIFICA(AD1);

      REPLACE POINTER(A) BY POINTER(HELP) FOR (6*TREG);
      PAUX3:=POINTER(AAUX3);TP3:=R:=0;
      WHILE R:=*+RANGO(PA,3) NEQ -1 DO PA:=*+1;
      REPLACE POINTER(AD2) BY " " FOR (6*TREG);
      REPLACE POINTER(AD2) BY "D" FOR 1,
                      POINTER(AAUX3) FOR TP3;
      REPLACE POINTER(HELP) BY POINTER(A) FOR (6*TREG);
      UNIFICANDO(AD2,96);  SIMPLIFICA(AD2);
      REPLACE POINTER(A) BY POINTER(HELP) FOR (6*TREG);
      REPLACE POINTER(Z) BY POINTER(AYUDA) FOR (6*TREG);
      IF POINTER(AD1) NEQ POINTER(AD2) FOR (6*TREG) THEN
        BFRACASO:=TRUE;
    END
    ELSE
    BEGIN
      IF PAUX1 NEQ PA FOR TP1 THEN
        BFRACASO:=TRUE
      ELSE
      BEGIN
        R:=0;
        WHILE R:=*+RANGO(PA,0) NEQ -1 DO PA:=*+1;
      END;
    END;
  END;
END;
5:BEGIN
  IF NOT BPRIVEZ THEN
    BPRIVEZ:=TRUE
  ELSE
  BEGIN
    PAUX1:=POINTER(AAUX1);
    IF PAUX1 NEQ PA FOR TP1 THEN
      BFRACASO:=TRUE;
  END;
  PAUX1:=POINTER(AAUX1);TP1:=R:=0;
  WHILE R:=*+RANGO(PA,1) NEQ -1 DO PA:=*+1;
  END;
    6:BEGIN
        IF PA NEQ PPRI(X)+AUX1 FOR 1 THEN
          BFRACASO:=TRUE
        ELSE
          BPERI:=TRUE;
        END;
  END;
```

```
  IF (AUX[=*+1]) = TPRI(X) THEN BITERA:=TRUE ELSE PA:=*+1;
  END;
  IF BFRACASO THEN        UNIFICA:=TRUE;
END DE UNIFICA;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%       U N I F I C A N D O   %%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

BOOLEAN PROCEDURE UNIFICANDO(A,COM);
VALUE COM;ARRAY A[0];
INTEGER COM;
BEGIN
POINTER PA,PA1,PAUX,PB,PZ;
ARRAY Z,B,AUX[0:(TREG-1)];
BOOLEAN BUNIFICA,BPASA;
INTEGER X,XANT,XANTBIS,W,XFIN,NVECES,NVEC;
LABEL ETIUNIF;
PA:=POINTER(A);
PAUX:=POINTER(AUX);
PB:=POINTER(B);
PZ:=POINTER(Z);
SCAN PA:PA FOR W:72 UNTIL IN BLANCO;
W:=72-W;
WHILE W > 0 DO
BEGIN
   BPASA:=FALSE;
   IF W NEQ 0 THEN
   BEGIN
    PA:=*-1;
    CASE COM OF
    BEGIN
      92:94:97:98:99:100:104:105:106:107:108:109:112:
       IF PA IN I THEN BPASA:=TRUE;
      96:IF PA IN D THEN BPASA:=TRUE;
      ELSE:IF PA IN OPERADORES2 THEN BPASA:=TRUE;
    END;
   END;
  IF BPASA THEN
  BEGIN
    REPLACE PB BY " " FOR (6*TREG);
    R:=0;
    PA1:=PA;
    WHILE R:=*+RANGO(PA,O) NEQ -1 DO
      REPLACE PB:PB BY PA:PA FOR 1;
    REPLACE PB:PB BY PA:PA FOR 1;
    PB:=POINTER(B);
    CASO(PB,X,XFIN,C(M)); BUNIFICA:=FALSE;
    WHILE ((X:=*+1) LEQ XFIN) AND (NOT BUNIFICA) DO
      IF NOT UNIFICA(B,Z,X) THEN BUNIFICA:=TRUE;
    IF BUNIFICA AND (COM NEQ 1) THEN
    BEGIN
      IF X = XANT THEN
      BEGIN
        IF (NVECES:=*+1) > 2 THEN
        BEGIN
          BUNIFICA:=FALSE;
        END;
      END
      ELSE
      BEGIN
        IF X = XANTBIS THEN
        BEGIN
          IF (NVEC:=*+1) > 2 THEN
          BEGIN
            BUNIFICA:=FALSE;
          END;
        END
        ELSE      XANTBIS:=XANT;
        NVECES:=0;
        XANT:=X;
      END;
    END;
    IF BUNIFICA THEN
    BEGIN
```

```
        REPLACE PAUX BY " " FOR (6*TREG);
        REPLACE PAUX:PAUX BY POINTER(A) FOR W-1;
        REPLACE PAUX:PAUX BY PZ WHILE NEQ " ";
        REPLACE PAUX:PAUX BY PA WHILE NEQ " ";
        PAUX:=POINTER(AUX); PA:=POINTER(A);
        PB:=POINTER(B); PZ:=POINTER(Z);
        REPLACE PA BY PAUX FOR (6*TREG);
        SCAN PA:PA FOR W:72 UNTIL IN BLANCO;
        W:=72-W;
        UNIFICANDO:=TRUE;
        NSUSTI:=*+1;

      END
      ELSE
      BEGIN
        PA:=PA1;
        W:=*-1;
      END;
    END
    ELSE
    BEGIN
      W:=*-1;
     END;
  END;ETIUNIF:
END UNIFICANDO;

ZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZ
ZZZZZZZZZZZZZZZZ          U N I F I C          ZZZZZZZZZZZZZZZZZZZ
ZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZ

BOOLEAN PROCEDURE UNIFIC(A,COM);
VALUE COM;ARRAY A[0];
INTEGER COM;
BEGIN
POINTER PA,PA1,PAUX,PB,PZ;
ARRAY Z,B,AUX[0:(TREG-1)];
BOOLEAN BUNIFICA,BPASA;
INTEGER X,W,XFIN;
PA:=POINTER(A);
PAUX:=POINTER(AUX);
PB:=POINTER(B);
PZ:=POINTER(Z);
SCAN PA:PA FOR W:72 UNTIL IN BLANCO;
W:=72-W;
WHILE W > 0 DO
BEGIN
   BPASA:=FALSE;
   IF W NEQ 0 THEN
   BEGIN
     PA:=*-1;
     CASE COM OF
     BEGIN
       92:94:97:98:99:100:104:105:106:107:108:109:110:111:112:
          IF PA IN I THEN BPASA:=TRUE;
       96:IF PA IN O THEN BPASA:=TRUE;
       ELSE:IF PA IN OPERADORES2 THEN BPASA:=TRUE;
     END;
   END;
  IF BPASA THEN
  BEGIN
    REPLACE PB BY " " FOR (6*TREG);
    R:=0;
    PA1:=PA;
    WHILE R:=*+RANGO(PA,0) NEQ -1 DO
      REPLACE PB:PB BY PA:PA FOR 1;
    REPLACE PB:PB BY PA:PA FOR 1;
    PB:=POINTER(B);
    CASO(PB,X,XFIN,COM); BUNIFICA:=FALSE;
    WHILE ((X:=*+1) LEQ XFIN) AND (NOT BUNIFICA) DO
      IF NOT UNIFICA(B,Z,X) THEN BUNIFICA:=TRUE;
    IF BUNIFICA THEN
    BEGIN
     PA:=POINTER(A);
                           PZ:=POINTER(Z);
      REPLACE PA BY PZ     FOR (6*TREG);
```

```
         W:=0;  UNIFIC:=TRUE;
      END
      ELSE
      BEGIN
         PA:=PA1;
         W:=*-1;
      END;
   END
   ELSE
   BEGIN
      W:=*-1;
    END;
END;
END UNIFIC;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%       U N I F I C O    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

BOOLEAN PROCEDURE UNIFICO(A,COM);
VALUE COM;ARRAY A[0];
INTEGER COM;
BEGIN
POINTER PA,PA1,PAUX,PB,PZ;
ARRAY Z,B,AUX[0:(TREG-1)];
BOOLEAN BUNIFICA,BPASA;
INTEGER X,W,XFIN;
PA:=POINTER(A);
PAUX:=POINTER(AUX);
PB:=POINTER(B);
PZ:=POINTER(Z);
SCAN PA:PA FOR W:72 UNTIL IN BLANCO;
W:=72-W;
WHILE W > 0 DO
BEGIN
   BPASA:=FALSE;
   IF W NEQ 0 THEN
   BEGIN
    PA:=*-1;
    CASE COM OF
    BEGIN
      92:94:97:98:99:100:104:105:106:107:108:109:
         IF PA IN I THEN BPASA:=TRUE;
      96:IF PA IN D THEN BPASA:=TRUE;
      ELSE:IF PA IN OPERADORES2 THEN BPASA:=TRUE;
    END;
  END;
 IF BPASA THEN
 BEGIN
    REPLACE PB BY " " FOR (6*TREG);
    R:=0;
    PA1:=PA;
    WHILE R:=*+RANGO(PA,0) NEQ -1 DO
      REPLACE PB:PB BY PA:PA FOR 1;
    REPLACE PB:PB BY PA:PA FOR 1;
    PB:=POINTER(B);
    CASO(PB,X,XFIN,COM); BUNIFICA:=FALSE;
    WHILE ((X:=*+1) LEQ XFIN) AND (NOT BUNIFICA) DO
      IF NOT UNIFICA(B,Z,X) THEN BUNIFICA:=TRUE;
    IF BUNIFICA THEN
    BEGIN
      REPLACE PAUX BY " " FOR (6*TREG);
      REPLACE PAUX:PAUX BY POINTER(A) FOR W-1;
      REPLACE PAUX:PAUX BY PZ WHILE NEQ " ";
      REPLACE PAUX:PAUX BY PA WHILE NEQ " ";
      PAUX:=POINTER(AUX); PA:=POINTER(A);
      PB:=POINTER(B); PZ:=POINTER(Z);
      REPLACE PA BY PAUX FOR (6*TREG);
      IF X < (XFIN-1) THEN UNIFICO:=TRUE;
      W:=0;    BUNIFICO:=TRUE;
    END
    ELSE
    BEGIN
      PA:=PA1;
      W:=*-1;
    END;
```

```
      END
      ELSE
      BEGIN
        W:=-1;
      END;
END;
END UNIFICC;
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXX          I U D U              XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
BOOLEAN PROCEDURE IUDU(X,CC);
ARRAY X[0];INTEGER CC;
BEGIN
ARRAY AX,AX1,XUA[0:(TREG-1)];
POINTER PAX,PX,PX1;
BOOLEAN CNTRL;          LABEL FFF;
PAX:=POINTER(AX);PX:=POINTER(X);PX1:=POINTER(AX1);
REPLACE POINTER(XUA) BY PX FOR TREG WORDS;
SACACTEINT(X);    % SACA FACTOR CONSTANTE DE LA INTEGRAL
REPLACE PAX BY PX FOR TREG WORDS;
REPLACE POINTER(XUA) BY PX FOR TREG WORDS;
IF CC = 1 THEN
BEGIN IF AISLA1ERGPO(X) THEN ELSE CNTRL:=TRUE;END
ELSE BEGIN IF AISLA2DOGPO(X) THEN ELSE CNTRL:=TRUE; END;
IF NOT CNTRL THEN
BEGIN
REPLACE POINTER(XUA) BY PX FOR TREG WORDS;
REPLACE PX1 BY "D" FOR 1, PX FOR 6*(TREG-1);
DERIVA(AX1);   % OBTIENE DERIVADA
SIMPLIFICA(AX1);% SIMPLIFICA LA DERIVADA
REPLACE POINTER(XUA) BY PX1 FOR TREG WORDS;
PAUX4:=POINTER(AUX4); TP4:=R:=0;%      INTRODUCE LA DERIVADA
WHILE R:=*+RANGO(PX1,4) NEQ -1 DO PX1:=*+1;   % EN AUX4
REPLACE PX BY PAX FOR TREG WORDS;
IF CC = 1 THEN
BEGIN
  IF   RESOLU1ERGPO(X) THEN    %   APLICA  REGLA DE RESOLUCION
    CNTRL:=TRUE;
END
ELSE
  IF RESOLU2DOGPO(X) THEN CNTRL:=TRUE;
REPLACE POINTER(XUA) BY PX FOR TREG WORDS;
SACACTEDERIVANDO(X);%SACA FACTOR CONSTANTE DEL DENOMINADOR
                   %                DEL DERIVANDO
REPLACE POINTER(XUA) BY PX FOR TREG WORDS;
IF NOT CNTRL THEN

BEGIN
  SEPARAINT(X);
  IF INTEGRASIMPLES(X) THEN CNTRL:=TRUE;% INTEGRA CON SIMPLES
END;
IF CNTRL THEN
BEGIN
    UNIFICAOPERADORES(X); SIMPLIFICA(X);% SIMPLIFICA
    REPLACE POINTER(XUA) BY PX FOR TREG WORDS;
    INTEGRACOMPUESTAS(X);% APLICA REGLAS DE INTEGRACION
    PX:=POINTER(X);
    SCAN PX FOR W:(6*TREG) UNTIL IN CI;
    IF W = 0 THEN
      IUDU:=TRUE
  ELSE
    REPLACE PX BY PAX FOR TREG WORDS;
END ELSE REPLACE PX BY PAX FOR TREG WORDS;
END ELSE REPLACE PX BY PAX FOR TREG WORDS;
END OF IUDU;
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXX  O N I F I C I U D U  XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

BOOLEAN PROCEDURE UNIFICIUDU(A,PAR);
ARRAY A[0];
INTEGER PAR;
BEGIN
POINTER PA,PA1,PAUX,PB,PZ;
ARRAY Z,B,AUX[0:(TREG-1)];
```

```
BOOLEAN BUNIFICO,BPASA;
INTEGER X,W,XFIN;
PA:=POINTER(A);
PAUX:=POINTER(AUX);
PB:=POINTER(B);
PZ:=POINTER(Z);
SCAN PA:PA FOR W:72 UNTIL IN BLANCO;
W:=72-W;
WHILE W > 0 DO
BEGIN
  BPASA:=FALSE;
  IF W NEQ 0 THEN
  BEGIN
   PA:=*-1;
   IF PA IN I THEN
   BEGIN
     IF PA+2 IN OPERADORES1 AND PAR=2 THEN
        BPASA:=TRUE
     ELSE
        IF PA+2 IN PORGATO AND PAR=1 THEN BPASA:=TRUE;
   END;
  END;
 IF BPASA THEN
 BEGIN
   REPLACE PB BY " " FOR (6*TREG);
   W:=0;
   PA1:=PA;
   WHILE F:=*+RANGO(PA,0) NEQ -1 DO
     REPLACE PB:PB BY PA:PA FOR 1;
   REPLACE PB:PB BY PA:PA FOR 1;
   PB:=POINTER(B);
   IF PB+2 IN POR THEN CONMUTAINT(B);% C O N M U T A
   IF IUDU(B,PAR) THEN BUNIFICA:=TRUE
   ELSE
   BEGIN
     IF PB+2 IN POR THEN
     BEGIN
       CONMUTAINT(B);
       IF IUDU(B,PAR) THEN BUNIFICA:=TRUE;
     END;
   END;
   REPLACE PZ BY PB FOR (6*TREG);
   IF BUNIFICA THEN
     BEGIN
     REPLACE PAUX BY " " FOR (6*TREG);
     REPLACE PAUX:PAUX BY POINTER(A) FOR W-1;
     REPLACE PAUX:PAUX BY PZ WHILE NEQ " ";
     REPLACE PAUX:PAUX BY PA WHILE NEQ " ";
     PAUX:=POINTER(AUX); PA:=POINTER(A);
     PB:=POINTER(B); PZ:=POINTER(Z);
     REPLACE PA BY PAUX FOR (6*TREG);
      W:=0;
   END
   ELSE
   BEGIN
     PA:=PA1;
     W:=*-1;
   END;
 END
 ELSE
 BEGIN
   W:=*-1;
  END;
END;
END UNIFICO;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%     P O R P A R T E S %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

BOOLEAN PROCEDURE PORPARTES(X);
ARRAY X[0];
BEGIN
ARRAY A1,A2,A3[0:(TREG-1)];
POINTER PP1,PP2,PP3,PX;
PP1:=POINTER(A1);PP2:=POINTER(A2);PP3:=POINTER(A3);PX:=POINTER(X);
```

```
REPLACE PP1 BY PX FOR TREG WORDS;
REPLACE PP3 BY PX FOR TREG WORDS;
IF DISLAUNO(A1) THEN
BEGIN
  REPLACE PP2 BY PX FOR TREG WORDS;
  AISLADOS(A2);
  IF INTEGRASIMPLES(A1) THEN
  BEGIN
    SIMPLIFICA(A1);
    PAUX5:=POINTER(AAUX5);TP5:=R:=0;
    WHILE R:=*+RANGO(PP1,5) NEQ -1 DO PP1:=*+1;
    DERIVA(A2);
    SIMPLIFICA(A2);
    PAUX4:=POINTER(AAUX4);TP4:=R:=0;
    WHILE R:=*+RANGO(PP2,4) NEQ -1 DO PP2:=*+1;
    RESOLUPORPARTES(X);
    SIMPLIFICA(X);
    SACACTEINT(X);
    INTEGRACOMPUESTAS(X);
    PX:=POINTER(X);
    SCAN PX FOR W:(6*TREG) UNTIL IN DI;
    IF W = 0 THEN
      PORPARTES:=TRUE
    ELSE
      REPLACE PX BY PP3 FOR TREG WORDS;
  END ELSE REPLACE PX BY PP3 FOR TREG WORDS;
END;
END OF PORPARTES;
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX  E  J  E  C  U  C  I  O  N  XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
C12:=-1;CPAG:=0;
IF MYSELF.TASKVALUE = 99 THEN
  TARJ(KIND=REMOTE,MYUSE=IO)
ELSE
BEGIN
  TARJ(KIND=DISKPACK,FILETYPE=7,
  TITLE="APOC9I/D/T/DATOS ON SISTEMAS.");
  SEEK(TARJ[MYSELF.TASKVALUE]);
END;
ON ANYFAULT:
BEGIN
  WRITE(TTY,<"*FIN DE RECURSOS  ">);
  WRITE(IMP,<"*FIN DE RECURSOS  ">);
  GO TO ADELANTE;
END;
ADELANTE:
WHILE NOT READ(TARJ,TREG,A) DO
BEGIN
  IF ((OT2:=*+1) MOD 6) = 0 THEN
  BEGIN
    WRITE(IMP[SKIP 1]);
    WRITE(IMP[SPACE 2]);
    WRITE(IMP,<X35,"-",I2,"-">,CPAG:=*+1);
    WRITE(IMP[SPACE 5]);
  END;
  NSUSTI:=0;
  REPLACE POINTER(A)+68 BY (OT2+1) FOR * DIGITS;
  REPLACE POINTER(A)+72 BY " " FOR 8;
  WRITE(IMP,TREG,A);WRITE(TTY,TREG,A);
  WRITE(IMP[SPACE 1]);
  REPLACE POINTER(A)+68 BY " " FOR 12;
  DEINFIJAPREFIJA(A);
  REPLACE POINTER(AUX) BY POINTER(A) FOR (6*TREG);
  DEPREFIJAINFIJA(AUX);FORMATEA(AUX);
  NEXT:=FALSE;
  REPLACE POINTER(AANT) BY POINTER(A) FOR (6*TREG);
  ENTRADA(A);
  REPLACE POINTER(ANT) BY POINTER(A) FOR (6*TREG);
  UNIFICO:=FALSE; CUADRADOSENGPO(A);
  IF UNIFICO THEN
  BEGIN
    UNIFICAOPERADORES(A);
    SIMPLIFICA(A);
  END
```

```
ELSE
BEGIN
   BUNIFICO:=FALSE; CUADRADOS2DOGPO(A);
   IF BUNIFICO THEN
   BEGIN
      UNIFICAOPERADORES(A);
      SIMPLIFICA(A);
   END;
END;
IF MASENNUMERADOR(A) THEN
BEGIN
   ANTECEDEMASDEPOR(A);
   SEPARAINT(A);
END;
INTEGRA(A);
IF NOT BEXI THEN
BEGIN
   REPLACE POINTER(A) BY POINTER(AANT) FOR (6*TREG);
   IF PORPARTES(A) THEN BEXI:=TRUE
   ELSE
   BEGIN
      CONMUTAINT(A);
      IF PORPARTES(A) THEN BEXI:=TRUE;
   END;
END;
 IF NOT BEXI THEN
 BEGIN
   REPLACE POINTER(A) BY POINTER(ANT) FOR (6*TREG);
   ANTECEDEMASDEPOR(A);
   ANTECEDEMASDEGATO(A);
   SEPARAINT(A);
   INTEGRA(A);
 END;
 IF BEXI THEN
 BEGIN
   WRITE(TTY,<12("* "),"EXITO">);WRITE(IMP,<12("* "),X1,"EXITO ">)
 END
 ELSE
 BEGIN
   WRITE(TTY,<12(" *"),"*FRACASO ">);
   WRITE(IMP,<12(" *"),"*FRACASO ">);
 END;
 SIMPLIFICA(A);UNIFICANDO(A,6);SALIDA(A);
 UNIFICANDO(A,95); WRITE(IMP[SPACE 1]);
 DEPREFIJAINFIJA(A);
 FORMATEA(A);
 WRITE(TTY,<X22,"CONSUMO ",P19," SUSTITUCIONES">,NSUSTI);
 WRITE(IMP,<X22,"CONSUMO ",P19," SUSTITUCIONES">,NSUSTI);
 WRITE(IMP[SPACE 1]);WRITE(IMP,<72("=")>);WRITE(IMP[SPACE 1]);
END;
END.
```

```
VALUE ARRAY SUBSTITUCIONES(
1123456123456123456123456123456123456123456123456123456   I 1
"* * C E R O * ESTE          NO SE USA                   ",I 0
"*LN                         03*NU                    03",I 1
IINF ** U A C **                  REGLAS DE DERIVACI
"CN                          020                      01",I 2
"DX                          031                      01",I 3
"DEUN                        04**NÑU-N1DU             10",I 4
"DSU                         03*CUDU                  05",I 5
"DCU                         03*ISUDU                 06",I 6
"DTU                         03*ÑFU2DU                07",I 7
"DGU                         031*ÑHU2DU               08",I 8
"CFU                         03**FUTUDU               08",I 9
"DHU                         031**HUGUDU              09",I 10
"DEU                         03*EUDU                  05",I 11
"DLU                         03*DUÑU11                07",I 12
"DÑNU                        04**ÑNULNDU              09",I 13
"DÑUV                        04*ÑUV**LUDV*VCLU        15",I 14
"DJU                         03*/1Ñ-1ÑU2/12DU         14",I 15
"DKU                         031*/1Ñ-1ÑU2/12DU        15",I 16
"DMU                         03*/1*1ÑU2DU             10",I 17
"DCU                         031*/1*1ÑU2DU            11",I 18
"DPU                         03*/1*UÑ-ÑU21/12DU       16",I 19
"DQU                         031*/1*UÑ-ÑU21/12DU      17",I 20
"D*UV                        04*DUDV                  05",I 21
"D-UV                        04-DUDV                  05",I 22
"D1U                         0310U                    03",I 23
"D*UV                        04**UDV*VDU              09",I 24
"D/UV                        04/-*VDU*UDVÑV2          13",I 25
IINF *** D O S ***              REGLAS DE INTEGRACION
"I21UDW                      061I2UDW                 06",I 26
"I2*NWDV                     07*NI2WDV                07",I 27
"I2*UNDW                     07*NI2UDW                07",I 28
"I2**UNZDW                   09*NI2*UZDW              09",I 29
"I2**NUZDW                   09*NI2*UZDW              09",I 30
"I2Ñ*NWRDV                   09*ÑNBI2ÑWRDV            11",I 31
IINF *** T R E S ***            REGLAS DE INTEGRACION
"I2SADA                      061CA                    03",I 32
"I2NDV                       05*NV                    03",I 33
"I2CADA                      06SA                     02",I 34
"I2EADA                      06EA                     02",I 35
"I2EIADA                     07EIA                    03",I 36
"I2GAI1DA                    08LA                     02",I 37
"I2ÑAI1DIA                   091LA                    03",I 38
"I2ÑANDA                     07*ÑA*N1Ñ*N111           12",I 39
"I2ADA                       05*ÑA2Ñ211               08",I 40
"I2ÑNADA                     07*ÑNAÑCR11              09",I 41
"I2TADA                      06LFA                    03",I 42
"I2EFA2DA                    08TA                     02",I 43
"I2ENA2DA                    08IGA                    03",I 44
"I2*FATADA                   09FA                     02",I 45
"I2*HAGADA                   091HA                    03",I 46
"I2GADA                      06LSA                    03",I 47
"I2FADA                      06L*FATA                 06",I 48
"I2HADA                      06L-HAGA                 06",I 49
"I2Ñ*ÑA2NI1DA                12*Ñ'NI1N*AÑ'NI1         14",I 50
"I2Ñ**ÑÑA2NI1DA              14*Ñ*NI1N**RAÑ'NI1       17",I 51
"I2Ñ-ÑA2NI1DA                12*Ñ*2'NI1L*-AÑNÑ*A*NI1  21",I 52
"I2Ñ-*ÑÑA2NI1DA              14*Ñ*2'NI1L*-**RA'NÑ**'RA'NI1 27",I 53
"I2Ñ-NÑA2I1DA                12*Ñ*2'NI1L***NÑ-A'NI1   21",I 54
"I2Ñ-N*ÑÑA2I1DA              14*Ñ*2'NI1L***Ñ*'RAÑ-*'RA'NI1 27",I 55
"I2Ñ-NÑA2IÑ2I1DA             15J*A'N                  05",I 56
"I2Ñ*NÑA2NIÑ2I1DA            15L*A'*ÑA2'N             10",I 57
"I2Ñ-ÑA2NIÑ2I1DA             15L*A*-ÑA2'N             10",I 58
"I2Ñ-NÑA2Ñ2I1DA              14**AÑ21Ñ-*NÑA2          15",I 59
IINF *** C U A T R O *** PROPIEDADES DE LA INTEGR
"I2*UVDW                     07*I2UDWI2VDW            11",I 60
"I2-UVDW                     07-I2UDWI2VDW            11",I 61
IINF *** C I N C O ***           DE ESPECIALES
"I2SXDX                      061CX                    03",I 62
"I2*NXDX                     08*IC*NXÑNI1             10",I 63
"I2NDX                       05*NX                    03",I 64
"I2DX                        04X                      01",I 65
"I2CXDX                      06SX                     02",I 56
```

```
-IaC*NXOX              08*S*NXÑNII                            09",X  67
-IaEXDX                06EX                                   02",X  68
-IaEIXDX               07EIX                                  03",X  69
-IaE*NXDX              08*E*NXÑNII                            09",X  70
-IaE*XNDX              08*E*NXÑNII                            09",X  71
-IaEI*NXDX             09*EI*NXÑNII                           10",X  72
-IaEI*XNDX             09*EI*NXÑNII                           10",X  73
-IaÑXIIDX              08LJ                                   02",X  74
-IaÑXNDX               07*ÑX*NIÑ*NIII                         12",X  75
-IaJDX                 05*ÑX2Ñ2II                             08",X  76
-IaÑNXDX               07*ÑNXÑLNII                            09",X  77
-IaÑN*RXDX             09**ÑNXÑLNIIÑRII                       14",X  78
-IaÑFX2DX              08TX                                   02",X  79
-IaÑHX2DX              08JGX                                  03",X  80
-Ia*FXTXDX             09FX                                   02",X  81
-Ia*HXGXDX             091HX                                  03",X  82
-IaGXDX                06LSX                                  03",X  83
-IaFXDX                06L*FXTX                               06",X  84
-IaHXDX                06L-HXGX                               06",X  85
-IaÑ*ÑX2NIIDX          12*Ñ*NIIM*XÑ*NII                       14",X  86
-IaÑ**RÑX2NIIDX        14*Ñ*NIIM**RXÑ*NII                     17",X  87
-IaÑ-ÑX2NIIDX          12*Ñ*2*NIIL*-X*NÑ*X*NII                21",X  88
-IaÑ-*RÑX2NIIDX        14*Ñ*2*NIIL*-**RX*NÑ**RX*NII           27",X  89
-IaÑ-NÑX2IIDX          12*Ñ*2*NIIL**AXÑ-X*NII                 21",X  90
-IaÑ-N*RÑX2IIDX        14*Ñ*2*NIIL***N**RXÑ-**RX*NII          27",X  91
-IaÑ-NÑX2ÑÑ2IIDX       15J*X*N                                05",X  92
-IaÑ*ÑX2NÑ2IIDX        14L*XÑ*ÑX2*NÑ2II                       14",X  93
-IaÑ-ÑX2NÑ2IIDX        14L*XÑ-ÑX2*NÑ2II                       14",X  94
-IaÑ-NÑX2Ñ2IIDX        14***XÑ2IIÑ-*NÑX2                      15",X  95
IINF *** S E I S ***            DE ESPECIALES
-IaZD*UÑ*ÑNII          12*ÑRIIIaZD*UÑNII                      15",X  96
-IaZD*UÑ*NRII          12*ÑRIIIaZD*UÑNII                      15",X  97
-IaZD*UÑI*ÑRII         13*IÑRIIIaZD*UÑNII                     16",X  98
-IaZD*UÑI*RNII         13*IÑRIIIaZD*UÑNII                     16",X  99
-IaZD*NÑNII            10*ÑNIIIaZDN                           10",X  100
IINF *** S I E T E ***          DE ESPECIALES
"**ÑX2*RXN             09*Ñ*X*RÑ2II2-NÑ*RÑ2II2                21",X  101
 ****UÑX2*RXN          11*U*Ñ*X*RÑ*2UII2-*NÑUIIÑ*RÑ*2UII2     32",X  102
IINF *** C N S I S ***          DE SPECIALS
IINF *** U N O *** DE SPECIALS *AISLA TERMINO*
-IaÑNWDZ               07W                                    01",X  103
-IaÑVUDZ               07V                                    01",X  104
-Ia*VÑNWDZ             09W                                    01",X  105
-Ia*VÑUWDZ             09U                                    01",X  106
-Ia*VUDZ               07U                                    01",X  107
IINF *** D O S ***     REGLA DE RESOLUCION
-IaÑNWDZ               07IaÑNWD**SZÑSII                       15",X  108
-IaÑUWDZ               07IaÑUWD**SZÑSII                       15",X  109
-Ia*UWDZ               07IaWD**SIaUDZÑSII                     16",X  110
-Ia*UWDZ               07IaWD**SIaUDZÑSII                     16",X  111
-Ia*UWDZ               07IaWD**SIaUDZÑSII                     16",X  112
IINF *** T R E S ***            DE SPECIALS
-*ÑX2*NX               07-Ñ*X*NÑ2II2Ñ*NÑ2II2                  19",X  113
-*ÑXÑX2                07-Ñ*NÑ2II2Ñ-X*NÑ2II2                  19",X  114
IINF *** C U A T R O ***        DE SPECIALS
IIa*UVDZ               07Ia*VUDZ                              07",X  115
IINF *** C I N C O ***          DE SPECIALS
-IaEUDW                06U                                    01",X  116
-IaSUDW                06U                                    01",X  117
-IaCUDW                06U                                    01",X  118
-IaTWDW                06U                                    01",X  119
-IaFUDW                06U                                    01",X  120
-IaHUDW                06U                                    01",X  121
-IaGUDW                06U                                    01",X  122
-IaÑWU2DZ              08U                                    01",X  123
-Ia*WEUDZ              08U                                    01",X  124
-Ia*WCUDZ              08U                                    01",X  125
-Ia*AFU2WDZ            10U                                    01",X  126
-Ia*FUTDZ              09U                                    01",X  127
-Ia*HUGDZ              09U                                    01",X  128
-Ia*TUFF*2DW           11ÑF*2                                 04",X  129
IINF *** S E I S ***            DE SPECIALS
-IaEUDZ                08IaEUD**SZÑSII                        13",X  130
-IaSUDZ                08IaSUD**SZÑSII                        13",X  131
-IaCUDZ                08IaCUD**SZÑSII                        13",X  132
```

```
*IaTUDZ                 06IaTUD**SZñS11                    13",Z 133
*IaHUDZ                 06IaHUD**SZñS11                    13",Z 134
*IaGUDZ                 06IaGUD**SZñS11                    13",Z 135
*IaFUDZ                 06IaFUD**SZñS11                    13",Z 136
*Ia*FVTHDZ              09Ia*FVTHD**SZñS11                 16",Z 137
*Ia*HVGUDZ              09Ia*HVGUD**SZñS11                 16",Z 138
*Ia*HU2DZ               08Ia*HU2D**SZñS11                  17",Z 139
*Ia*EUDZ                08IaEUD**SIaUDZñS11                17",Z 140
*Ia*HCUDZ               08IaCUD**SIaUDZñS11                17",Z 141
*Ia*AFU2HDZ             10IaAFU2D**SIaUDZñS11              19",Z 142
IINF *** S I E T E ***           DE  ESPECIALS
*Ia*-UHAV11DZ           12Ia*-UHAV11DZ                     12",Z 143
*Ia**UHAV11DZ           12Ia**UHAV11DZ                     12",Z 144
IINF *** O
*Ia*UVDH                07IaVDH                            05",Z 145
IINF *** I
*Ia*UVDH                07DU                               02",Z 146
IINF *** II
*Ia*UVDH                07-*U,Ia*,SDH                      11",Z 147
IINF *** III
IINF *** IV
IINF *** V
IINF *** VI
IINF *** VII
IINF *** C N S I S ***                       DE I
IINF ** I), E N T R A D A **                 DE I
IINF ** II), U N I F I C A **                DE I
IINF ** III) S I M P L I F I C A **          DE I
*IU                     02U                                01",Z 148
*IU                     03U                                01",Z 149
*I-UV                   04-VU                              03",Z 150
IINF ** IV) C O N M U T A **                 DE I
IINF ** V) S E P A R A **                    DE I
IINF ** VI) U N E **                         DE I
IINF ** VII) S A L I D A **                  DE I
IINF ** 0) C N S I S **                      DE *
**OU                    03U                                01",Z 151
**AA                    03*2A                              03",Z 152
**21                    033                                01",Z 153
**31                    034                                01",Z 154
**41                    035                                01",Z 155
**51                    036                                01",Z 156
**61                    037                                01",Z 157
**32                    035                                01",Z 158
**UN                    03*NU                              03",Z 159
IINF ** I), E N T R A D A **                 DE *
IINF ** II), U N I F I C A **                DE *
IINF ** III) S I M P L I F I C A **          DE *
**OU                    03U                                01",Z 160
**UU                    03U                                01",Z 161
**BAA                   05**N1A                            03",Z 162
**6582CC82              091                                01",Z 163
**UHN11                 08**U*NRñN11                       10",Z 164
*IUV                    04-HU                              03",Z 165
**UIV                   04-UV                              03",Z 166
**AA                    03*2A                              03",Z 167
**CR11N                 06**1*RNñR11                       10",Z 168
IINF ** IV) C O N M U T A **                 DE *
IINF ** V) S E P A R A **                    DE *
IINF ** VI) U N E **                         DE *
**R/HV                  05/**VRNV                          07",Z 169
**/VR                   05/*N*RVV                          07",Z 170
IINF ** VII) S A L I D A **                  DE *
IINF ** 0) C N S I S **                      DE -
**OU                    031U                               02",Z 171
**01                    03U                                01",Z 172
**02                    030                                01",Z 173
**21                    031                                01",Z 174
**12                    0311                               02",Z 175
**31                    032                                01",Z 176
**13                    033                                01",Z 177
**22                    0312                               02",Z 178
**14                    0313                               02",Z 179
**41                    033                                01",Z 180
**41                    033                                01",Z 181
```

```
"-51                          034                                       01",X 182
"-15                          0314                                      02",X 183
"-52                          033                                       01",X 184
"-25                          0313                                      02",X 185
"-43                          031                                       01",X 186
"-42                          032                                       01",X 187
"-34                          0311                                      02",X 188
"-24                          0312                                      02",X 189
"-61                          035                                       01",X 190
"-16                          0315                                      02",X 191
XINF  ** I) E N T R A D A **                 DE -
XINF  ** II) U N I F I C A **                DE -
XINF  ** III) S I M P L I F I C A            DE -
"-U0                          03U                                       01",X 192
"-CU                          031U                                      02",X 193
"-BB                          030                                       01",X 194
"-1UV                         041*UV                                    04",X 195
"-V1U                         04*VU                                     03",X 196
"-*UÑN11R                     08*-U*NRÑN11                              10",X 197
"-R*UÑN11                     08*-U*NRÑN11                              10",X 198
"-RÑN11                       06*-*NR1ÑN11                              10",X 199
"-ÑN11R                       06*-1*NRÑN11                              10",X 200
XINF  *** IV) C O N M U T A **               DE -
XINF  *** V) S E P A R A **                  DE -
XINF  *** VI) U N E **                       DE -
"-N/WV                        05/-*NVWV                                 07",X 201
"-/UVN                        05/-U*NVV                                 07",X 202
XINF  *** VII) S A L I D A **                DE -
XINF  ** 0) C N S T S **                     DE *
"*0U                          030                                       01",X 203
"*1U                          03U                                       01",X 204
"*AA                          03ÑA2                                     03",X 205
"*23                          036                                       01",X 206
"*24                          038                                       01",X 207
"*34                          03812                                     03",X 208
"*26                          03812                                     03",X 209
"*25                          03810                                     03",X 210
"*56                          03830                                     03",X 211
"*92                          03818                                     03",X 212
"*63                          03818                                     03",X 213
"*UN                          03*NU                                     03",X 214
XINF  ** I) E N T R A D A **                 DE *
XINF  ** II) U N I F I C A **                DE *
"**UVW                        05*U*VW                                   05",X 215
XINF  ** III) S I M P L I F I C A **         DE *
"*UU                          030                                       01",X 216
"*U0                          030                                       01",X 217
"*1U                          03U                                       01",X 218
"*U1                          03U                                       01",X 219
"*6Ñ211                       062                                       01",X 220
"*EUEW                        05E*UW                                    04",X 221
"*Ñ2114                       062                                       01",X 222
"*Ñ2116                       063                                       01",X 223
"*6Ñ211                       063                                       01",X 224
"*AA                          03ÑA2                                     01",X 225
"*EÑ811                       061                                       01",X 226
"*8*WÑ811                     08W                                       01",X 227
"*1UV                         041*UV                                    04",X 228
"*V1W                         041*VW                                    04",X 229
"*ÑAWÑAU                      07ÑA*WU                                   05",X 230
"*ÑANA                        05ÑA*N1                                   05",X 231
"*AÑAN                        05ÑA*N1                                   05",X 232
"**ÑAÑWÑAN                    09*WÑA*RN                                 07",X 233
"*/NWÑ                        05/*NRW                                   05",X 234
"*U*VW                        05*W*UV                                   05",X 235
XINF  ** IV) C O N M U T A **                DE *
"*-UWV                        05-*UV*WV                                 07",X 236
"**UWV                        05**UV*WV                                 07",X 237
"*U-VW                        05-*UV*UW                                 07",X 238
"*U*VW                        05**UV*UW                                 07",X 239
XINF  ** V) S E P A R A **                   DE *
"*VBGB                        051                                       01",X 240
XINF  ** VI) U N E **                        DE *
XINF  ** VII) S A L I D A                    DE *
"*W1                          03W                                       01",X 241
```

```
"*1W                    03W                              01",X 242
"*EV1WU                 06/UEVW                          05",X 243
"*UAV1W                 06/UAVW                          05",X 244
"*U/1V                  05/UV                            03",X 245
"*/1UV                  05/VU                            03",X 246
"*W/WR                  05*W/WR                          05",X 247
"*ÑUAÑVA                07Ñ*UVA                          05",X 248
XINF ** O) C N S T S **                DE /
"/U1                    03U                              01",X 249
"/00                    031                              01",X 250
"/43                    032                              01",X 251
"/63                    032                              01",X 252
"/62                    033                              01",X 253
"/64                    03/32                            03",X 254
"/3112                  05/14                            03",X 255
"/26                    03/13                            03",X 256
XINF ** I) E N T R A D A               DE /
"/UV                    03*UÑV11                         06",X 257
"/UEVW                  05*UÑVIW                         06",X 258
XINF ** II) U N I F I C A **           DE /
XINF ** III) S I M P L I F I C A **    DE /
XINF ** IV) C O N M U T A **           DE /
XINF ** V) S E P A R A **              DE /
XINF ** VI) U N E **                   DE /
XINF ** VII) S A L I D A **            DE /
"/U1                    03U                              01",X 259
"/U/VW                  05/*UWV                          05",X 260
"/1UV                   041/UV                           04",X 261
"/U1V                   041/UV                           04",X 262
"/7UVW                  05/U*VW                          05",X 263
XINF ** O) C N S T S **                DE Ñ
"ÑU1                    03U                              01",X 264
"ÑOU                    030                              01",X 265
"Ñ1V                    031                              01",X 266
"Ñ22                    034                              01",X 267
"ÑU0                    031                              01",X 268
"Ñ32                    039                              01",X 269
XINF ** I) E N T R A D A **            DE Ñ
"ÑNX                    03E*XLN                          05",X 270
"ÑEUW                   04E*UW                           04",X 271
XINF ** II) U N I F I C A **           DE Ñ
XINF ** III) S I M P L I F I C A **    DE Ñ
"ÑU0                    031                              01",X 272
"ÑOU                    030                              01",X 273
"ÑU1                    03U                              01",X 274
"ÑEUW                   04E*UW                           04",X 275
"ÑUVW                   05ÑU*VW                          05",X 276
"ÑUIL                   051ÑUIL                          05",X 277
"ÑUI111                 07U                              01",X 278
"Ñ1U2                   04ÑU2                            03",X 279
"Ñ*ÑR2                  05*ÑR2ÑR2                        07",X 280
XINF ** IV) C O N M U T A **           DE Ñ
XINF ** V) S E P A R A **              DE Ñ
"Ñ*NUV                  05*ÑNVÑUV                        07",X 281
"Ñ*UNV                  05*ÑNVÑUV                        07",X 282
"Ñ+UW2                  05*+ÑU2*2*UWÑW2                  13",X 283
"Ñ-UW2                  05*-ÑU2*2*UWÑW2                  13",X 284
"ÑSUIN                  05ÑHUN                           04",X 285
"ÑCUIN                  05ÑFUN                           04",X 286
"ÑTU2                   04-ÑFU21                         06",X 287
"ÑGU2                   04-ÑHU21                         06",X 288
XINF ** VI) U N E **                   DE Ñ
XINF ** VII) S A L I D A **            DE Ñ
"ÑU1V                   04/1ÑUV                          05",X 289
"Ñ61                    03W                              01",X 290
"ÑEULW                  05ÑWU                            03",X 291
"Ñ*ÑWN                  05*ÑNRÑWR                        07",X 292
XINF ** O) C N S T S **                DE E
XINF ** I) E N T R A D A **            DE E
XINF ** II) U N I F I C A **           DE E
XINF ** III) S I M P L I F I C A **    DE E
"E0                     021                              01",X 293
XINF ** IV) C O N M U T A **           DE E
XINF ** V) S E P A R A **              DE E
XINF ** VI) U N E **                   DE E
```

```
%INF ** VIII) S A L I D A **                    DE E
=E*UN                    04EUN                                          04",% 294
=E*XLN                   05XX                                           03",% 295
=E*UN                    04*EUEM                                        05",% 296
%INF ** 0) C N S T S **                         DE L
%INF ** I) E N T R A D A **                     DE L
%INF ** II) U N I F I C A **                    DE L
%INF ** III) S I M P L I F I C A **             DE L
%INF ** IV) C O N M U T A **                    DE L
%INF ** V) S E P A R A **                       DE L
%INF ** VI) U N E **                            DE L
%INF ** VIII) S A L I D A **                    DE L
=L/IN                    04/ILN                                         04",% 297
%INF ** 0) C N S T S **                         DE S
=*1                      021                                            01",% 298
=*4                      022                                            01",% 299
=*9                      023                                            01",% 300
=*116                    044                                            01",% 301
=*125                    045                                            01",% 302
%INF ** I) E N T R A D A **                     DE S
%INF ** II) U N I F I C A **                    DE S
%INF ** III) S I M P L I F I C A **             DE S
=*1                      021                                            01",% 303
=*4                      022                                            01",% 304
=*9                      023                                            01",% 305
=*116                    044                                            01",% 306
=*125                    045                                            01",% 307
%INF ** IV) C O N M U T A **                    DE S
%INF ** V) S E P A R A **                       DE S
%INF ** VI) U N E **                            DE S
%INF ** VIII) S A L I D A **                    DE S
=U                       02EU/12                                        05",% 308
%INF POR QUE ??????????????????????             DE S
"ZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZ").        % 265           % 309
ZZZZZZZ(" ZZZZZZ");                                     % 266           % 310
ZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZ
ZZZZZZZZZZZZZ          C A S O          ZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZ
ZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZ
PROCEDURE CASO(P,X,Y,COM);
 VALUE P;
 POINTER P;
 INTEGER X,Y,COM;
 BEGIN
 ARRAY AUX[0:0];INTEGER IJI;
 TRANSLATETABLE CMB("1*-*/NEL*" TO
                   "123456789");
 REPLACE POINTER(AUX) BY P FOR 1 WITH CMB;
 IJI:= INTEGER(POINTER(AUX),1)*2;
  CASE COM OF
  BEGIN
    1:IJI:=IJI+E+COM;
    92: IJI:=6; %SACA CNTE DEL DENOMINADOR DEL INTEGRANDO
    93: IJI:=1;% MULTIPLICA POR UNO
    94: IJI:=12;% C O N M U T A T I V I D A D
    95: IJI:=0;
    96: IJI:=1;
    97: IJI:=2;%REGLAS UNO DE INTEGRACION
    98: IJI:=3;%REGLAS DOS DE INTEGRACION
    99: IJI:=4;%REGLAS TRES DE INTEGRACION
    100: IJI:=5;%REGLAS SIMPLES DE INTEGRACION
    101: IJI:=7;%ENCUENTRA CUADRADOS
    104:IJI:=9;  %AISLA
    105:IJI:=10;% R E G L A  DE  R E S O L U C I O N
    107:IJI:=13;%
    108:IJI:=14;% R E G L A  DE  R E S O L U C I O N
    109:IJI:=15;% M A S  EN  N U M E R A D O R
    110:IJI:=16;%
    111:IJI:=17;%
    112:IJI:=18;%

  ELSE:IF P+1 IN NUMANO AND P+2 IN NUMANO THEN IJI:=IJI+8
      ELSE IJI:=IJI+E+COM;
  END;
 CASE IJI OF
```

```
BEGIN
?PPPPPPPPPPPPPPPP
0:X:=0;Y:=1;
1:X:=1;Y:=25;
2:X:=25;Y:=31;
3:X:=31;Y:=59;
4:X:=59;Y:=61;
5:X:=61;Y:=95;
6:X:=95;Y:=100;
7:X:=100;Y:=102;
8:X:=102;Y:=107;
9:X:=102;Y:=107;
10:X:=107;Y:=112;
11:X:=112;Y:=114;
12:X:=114;Y:=115;
13:X:=115;Y:=129;
14:X:=129;Y:=142;
15:X:=142;Y:=144;
16:X:=144;Y:=145;
17:X:=145;Y:=146;
18:X:=146;Y:=147;
19:X:=147;Y:=147;
20:X:=147;Y:=147;
21:X:=147;Y:=147;
22:X:=147;Y:=147;
23:X:=147;Y:=147;
24:X:=147;Y:=147;
25:X:=147;Y:=147;
26:X:=147;Y:=147;
27:X:=147;Y:=150;
28:X:=150;Y:=150;
29:X:=150;Y:=150;
30:X:=150;Y:=150;
31:X:=150;Y:=150;
32:X:=150;Y:=159;
33:X:=159;Y:=159;
34:X:=159;Y:=159;
35:X:=159;Y:=168;
36:X:=168;Y:=168;
37:X:=168;Y:=168;
38:X:=168;Y:=170;
39:X:=170;Y:=170;
40:X:=170;Y:=191;
41:X:=191;Y:=191;
42:X:=191;Y:=191;
43:X:=191;Y:=200;
44:X:=200;Y:=200;
45:X:=200;Y:=200;
46:X:=200;Y:=202;
47:X:=202;Y:=202;
48:X:=202;Y:=214;
49:X:=214;Y:=214;
50:X:=214;Y:=215;
51:X:=215;Y:=235;
52:X:=235;Y:=239;
53:X:=239;Y:=240;
54:X:=240;Y:=240;
55:X:=240;Y:=248;
56:X:=248;Y:=256;
57:X:=256;Y:=258;
58:X:=258;Y:=258;
59:X:=258;Y:=258;
60:X:=258;Y:=258;
61:X:=258;Y:=258;
62:X:=258;Y:=258;
63:X:=258;Y:=263;
64:X:=263;Y:=269;
65:X:=269;Y:=271;
66:X:=271;Y:=271;
67:X:=271;Y:=280;
68:X:=280;Y:=280;
69:X:=280;Y:=288;
70:X:=288;Y:=288;
71:X:=288;Y:=292;
72:X:=292;Y:=292;
```

```
73:X:=292;Y:=292;
74:X:=292;Y:=292;
75:X:=292;Y:=293;
76:X:=293;Y:=293;
77:X:=293;Y:=293;
78:X:=293;Y:=293;
79:X:=293;Y:=296;
80:X:=296;Y:=296;
81:X:=296;Y:=296;
82:X:=296;Y:=296;
83:X:=296;Y:=296;
84:X:=296;Y:=296;
85:X:=296;Y:=296;
86:X:=296;Y:=296;
87:X:=296;Y:=297;
88:X:=297;Y:=302;
89:X:=302;Y:=302;
90:X:=302;Y:=302;
91:X:=302;Y:=307;
92:X:=307;Y:=307;
93:X:=307;Y:=307;
94:X:=307;Y:=307;
95:X:=307;Y:=308;
END;
END OF CASO;
```

```
IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII
IIIIIIIIIIIIIIIIII D E I N F I J A P R E F I J A IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII
IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII
PROCEDURE DEINFIJAPREFIJA(A);
ARRAY A[0];
BEGIN
   %ESTE PROCEDURE CAMBIA UNA CUERDA DE CARACTERES EN NOTACION
   %INFIJA A NOTACION POLACA PREFIJA

TRANSLATETABLE PRIORIDADES("I()+-*/^SCTGFLEHJKMOPQ" TO
                            "1665544432222222222225");
INTEGER UTIL; ARRAY AUTIL[0:11]; POINTER PUTIL;
POINTER PA;
INTEGER CONT,CONT1,CONT2;
ARRAY PILA1,PILA2,PILAPRIO[0:30];
BOOLEAN BITERA;
DEFINE P(A,B)=POINTER(A[B])#;
PA:=POINTER(A);
PUTIL:=POINTER(AUTIL);
REPLACE PUTIL BY " " FOR 12 WORDS;
SCAN PA:PA FOR UTIL:72 UNTIL IN BLANCO;
CONT:=72-UTIL;
WHILE CONT NEQ 0 DO
BEGIN
   PA:=*-1;
   REPLACE PUTIL BY PA FOR 1 ;
   PUTIL:=*+1; CONT:=*-1;
END;
CONT1:=CONT2:=-1;
CONT:=72-UTIL;
PUTIL:=POINTER(AUTIL);
WHILE CONT NEQ 0 DO
BEGIN
   SCAN PUTIL FOR UTIL:1 UNTIL IN OPERADORES;
   IF UTIL = 0 THEN
   BEGIN
      REPLACE P(PILA2,CONT2:=*+1) BY PUTIL FOR 1;
   END
   ELSE
   BEGIN
      REPLACE P(PILA1,CONT1:=*+1) BY PUTIL FOR 1;
      REPLACE P(PILAPRIO,CONT1) BY PUTIL FOR 1 WITH PRIORIDADES;
      BITERA:=FALSE;
      WHILE NOT BITERA DO
      BEGIN
         IF CONT1 LEQ 0 THEN
            BITERA:=TRUE
         ELSE
         BEGIN
            IF P(PILA1,CONT1) = ")" FOR 1     OR
               P(PILAPRIO,CONT1) LEQ P(PILAPRIO,CONT1-1) FOR 1 THEN
               BITERA:=TRUE
            ELSE
            BEGIN
               IF P(PILA1,CONT1) = "(" FOR 1 THEN
               BEGIN
                  WHILE P(PILA1,CONT1:=*-1) NEQ ")" FOR 1 DO
                     REPLACE P(PILA2,CONT2:=*+1) BY P(PILA1,CONT1) FOR 1;
                  CONT1:=*-1;
                  BITERA:=TRUE;
               END
               ELSE
               BEGIN
                  REPLACE P(PILA2,CONT2:=*+1) BY P(PILA1,CONT1-1) FOR 1;
                  REPLACE P(PILA1,CONT1-1) BY P(PILA1,CONT1) FOR 1;
                  REPLACE P(PILAPRIO,CONT1-1) BY P(PILAPRIO,CONT1) FOR 1;
                  CONT1:=*-1;
               END;
            END;
         END;
      END;
   END;
   CONT:=*-1;
   PUTIL:=*+1;
```

```
END;
PA:=POINTER(A);
REPLACE PA BY " " FOR 12 WORDS;
CONT1:=*+1;
WHILE CONT1 NEQ 0 DO
    IF P(PILA1,CONT1:=*-1) = "(" FOR 1 OR
       P(PILA1,CONT1) = ")" FOR 1 THEN ELSE
          REPLACE P(PILA2,CONT2:=*+1) BY P(PILA1,CONT1) FOR 1;
CONT2:=*+1;
WHILE CONT2 NEQ 0 DO
   REPLACE PA:PA BY P(PILA2,CONT2:=*-1) FOR 1;
END DE INFIJAPREFIJA;

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXX D E P R E F I J A I N F I J A XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

PROCEDURE DEPREFIJAINFIJA(A);
ARRAY A[0];
BEGIN
TRANSLATETABLE CMBUNO("XITDSCTGELFHJKNOQP$+-*/@A" TO
                      "0111111111111111112222222"),
               CMBDOS("+-*/@A" TO
                      "112234");
TRUTHSET INVISIBLES("@");
ARRAY STACK[0:179],PRIOR[0:9],AUTIL1,AUTIL2,AUTIL3[0:15];
INTEGER K1,K2,K3; POINTER PAU1,PAU2,PAU3,PA;
DEFINE PSTACK(X)=POINTER(STACK[12*(X)])#;
PAU1:=POINTER(AUTIL1);PAU2:=POINTER(AUTIL2);PAU3:=POINTER(AUTIL3);
PA:=POINTER(A);
REPLACE PSTACK(0) BY " " FOR 180 WORDS;
REPLACE PAU1 BY " " FOR 12 WORDS;
SCAN PA:PA FOR K2:72 UNTIL IN BLANCO;
K1:=72-K2;
WHILE K1 NEQ 0 DO
BEGIN
   PA:=*-1;
   REPLACE PAU1 BY PA FOR 1;
   PAU1:=*+1; K1:=*-1;
END;
K1:=72-K2;
K2:=-1;
PAU1:=POINTER(AUTIL1);
WHILE K1 NEQ 0 DO
BEGIN
   REPLACE PAU2 BY PAU1 FOR 1 WITH CMBUNO;
   CASE INTEGER(PAU2,1) OF
   BEGIN
 0:BEGIN
      REPLACE PSTACK(K2:=*+1) BY " " FOR 8 WORDS;
      REPLACE PSTACK(K2) BY PAU1 FOR 1;
      PRIOR[K2]:=4;
    END;
 1:BEGIN
      REPLACE PAU2 BY " " FOR 12 WORDS;
      REPLACE PAU2 BY PAU1 FOR 1,
                      "(" FOR 1,
                      PSTACK(K2) WHILE NEQ " ",
                      ")" FOR 1;
      REPLACE PSTACK(K2) BY PAU2 WHILE NEQ " ";
      PRIOR[K2]:=4;
    END;
 2:BEGIN
      REPLACE PAU2 BY PAU1 FOR 1 WITH CMBDOS;
      K3:=INTEGER(PAU2,1);
      REPLACE PAU2 BY " " FOR 12 WORDS;
      IF K3 > PRIOR[K2] THEN
         REPLACE PAU2:PAU2 BY "(" FOR 1,
                              PSTACK(K2) WHILE NEQ " ",
                              ")" FOR 1
      ELSE
          REPLACE PAU2:PAU2 BY PSTACK(K2) WHILE NEQ " ";
      IF PAU1 IN INVISIBLES THEN ELSE
      REPLACE PAU2:PAU2 BY PAU1 FOR 1;
      IF K3 > PRIOR[K2:=*-1] THEN
```

```
        REPLACE PAU2:PAU2 BY "(" FOR 1,
                                   PSTACK[K2] WHILE NEQ " ",
                                   ")" FOR 1
      ELSE
        REPLACE PAU2:PAU2 BY PSTACK[K2] WHILE NEQ " ";
      PRIOR[K2]:=K3;
      PAU2:=POINTER(AUX[L2]);
      REPLACE PSTACK[K2] BY PAU2  WHILE NEQ " ";
    END;
  END;
  K1:=*-1; PAU1:=*+1;
END;
REPLACE PA BY PSTACK[0] FOR 12 WORDS;
END DEPREFIJAINFIJA;
ZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZ
ZZZZZZZZZZZ      F O R M A T E A      ZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZ
ZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZZ

PROCEDURE FORMATEA(A);
ARRAY A[0];
BEGIN
TRANSLATETABLE CMB(EBCDIC TO 48"00",8"ELSCTGFHJKMCPQI" TO
                             48"0102030405060708091011121314 15");
ARRAY B,C[0:21],BB[0:0];
POINTER PA,PB,PC,PBB;
INTEGER TC,BL;
PA:=A;
PB:=POINTER(B);
PBB:=POINTER(BB);
PC:=POINTER(C);
REPLACE PB BY " " FOR 132;
WHILE PA NEQ " " FOR 1 DO
BEGIN
  REPLACE PBB BY PA FOR 2 WITH CMB;
  CASE BB[0].[47:08] OF
  BEGIN
    REPLACE PB:PB BY PA FOR 1;
    REPLACE PB:PB BY "EXP" FOR 3;
    REPLACE PB:PB BY "LN" FOR 2;
    REPLACE PB:PB BY "SEN" FOR 3;
    REPLACE PB:PB BY "COS" FOR 3;
    REPLACE PB:PB BY "TG" FOR 2;
    REPLACE PB:PB BY "CTG" FOR 3;
    REPLACE PB:PB BY "SEC" FOR 3;
    REPLACE PB:PB BY "CSC" FOR 3;
    REPLACE PB:PB BY "ARCSEN" FOR 6;;;;;;;
    REPLACE PB:PB BY "ARCCOS" FOR 6;
    REPLACE PB:PB BY "ARCTAN" FOR 6;
    REPLACE PB:PB BY "ARCCOT" FOR 6;
    REPLACE PB:PB BY "ARCSEC" FOR 6;
    REPLACE PB:PB BY "ARCCSC" FOR 6;
    REPLACE PB:PB BY "-" FOR 1;
  END;
  PA:=*+1;
END;
 PB:=POINTER(B);
SCAN PB FOR BL:132 UNTIL IN BLANCO;
TC:=132-BL;  BL:=(70-TC)/2;
REPLACE PC BY " " FOR 132; REPLACE PC+BL BY PB FOR TC;
WRITE(IMP[SPACE 2],22,C);WRITE(TTY,22,C);
 END FORMATEA;
```

CAPITULO V

RESULTADOS OBTENIDOS.

Para tratar de evaluar de alguna manera al programa ISI se tomó el libro de texto "CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL" de los autores: Granville, Smith, Longley (8). Que tiene un nivel de preparatoria y primer año de profesional, del capítulo XII cuyo título es "INTEGRACION", donde se describen los principales mecanismos para la integración simbólica, se extrajeron de los problemas propuestos cien de estos, tomándose aproximadamente diez de cada sección.

Se consultó a ISI con estas cien integrales obteniéndose resultados satisfactorios, dado que conoció cuatro FRACASOS, dos debido a que el método para resolverlas era el de fracciones parciales y este no estaba implementado en ISI, y los otros dos aunque tenía el método a su disposición no encontró la partición conveniente.

A continuación se presentan las cien integrales, para cada una hay cinco renglones que significan lo siguiente:

1º Muestra la integral en la notación con la cual se consultó ISI.

2º Esa misma pero con una representación más parecida a la que se maneja tradicionalmente, esto para facilitar su comprensión.

3º El estado del resultado, o sea EXITO o FRACASO.

4º El resultado, en caso de EXITO la antiderivada.

5º CONSUMO; el número de aplicaciones exitosas del A.U. pretendiendo con esto dar una medida del costo.

I((SX)a(DX)) 1

I(SEN(X)D(X))

* * * * * * * * * * * * EXITO

-(COS(X))

CONSUMO 3 SUSTITUCIONES

==

I(S(3*X)a(D(3*X))) 2

I(SEN(3*X)D(3*X))

* * * * * * * * * * * * EXITO

-(COS(3*X))

CONSUMO 17 SUSTITUCIONES

==

I(S(3*X+2)a(D(3*X))) 3

I(SEN(3*X+2)D(3*X))

* * * * * * * * * * * * EXITO

-(COS(3*X+2))

CONSUMO 21 SUSTITUCIONES

==

I((CX)a(DX)) 4

I(COS(X)D(X))

* * * * * * * * * * * * EXITO

SEN(X)

CONSUMO 3 SUSTITUCIONES

==

I((XA2)a(DX)) 5

I(XA2D(X))

* * * * * * * * * * * * EXITO

XA3/3

CONSUMO 8 SUSTITUCIONES

==

I((XA(-1))a(DX)) 6

I(XA-(1)D(X))

* * * * * * * * * * * * EXITO

LN(X)

CONSUMO 3 SUSTITUCIONES

==

```
I(()ñ(12))a(DX))                                                          7
                              I(Xñ-(2))(X))
• • • • • • • • • • • •  EXITO
                                 -(1/X)
                        CONSUMO         15 SUSTITUCIONES
===========================================================================
I((Xñ4)a(DX))                                                             8
                               I(Xñ4D(X))
• • • • • • • • • • • •  EXITO
                                  Xñ5/5
                        CONSUMO          8 SUSTITUCIONES
===========================================================================
I((Xñ(2/3))a(DX))                                                         9
                             I(Xñ(2/3))(X))
• • • • • • • • • • • •  EXITO
                               3/5•Xñ(5/3)
                        CONSUMO         25 SUSTITUCIONES
===========================================================================
I((Xñ(I(1/2)))a(DX))                                                     10
                             I(Xñ-(1/2)D(X))
• • • • • • • • • • • •  EXITO
                                2•Xñ(1/2)
                        CONSUMO         25 SUSTITUCIONES
===========================================================================
I((3•Xñ2)a(DX))                                                          11
                              I(3•Xñ2D(X))
• • • • • • • • • • • •  EXITO
                                   Xñ3
                        CONSUMO          7 SUSTITUCIONES
===========================================================================
I((2•Xñ(I(1/2)))a(DX))                                                   12
                            I(2•Xñ-(1/2)D(X))
• • • • • • • • • • • •  EXITO
                                4•Xñ(1/2)
                        CONSUMO         30 SUSTITUCIONES
===========================================================================
```

```
I(2*XÑ(12)a(CX))                                                    13
                              I(2*XÑ-(2)D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                                   -(2/X)
                        CONSUMO         21 SUSTITUCIONES
*******************************************************************************
I(3*XÑ(1/3)a(DX))                                                   14
                             I(3*XÑ(1/3)D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                               3*3/4*XÑ(4/3)
                        CONSUMO         30 SUSTITUCIONES
*******************************************************************************
I((3*X)Ñ(1/3)a(DX))                                                 15
                            I((3*X)Ñ(1/3)D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                            3Ñ(1/3)*3/4*XÑ(4/3)
                        CONSUMO         32 SUSTITUCIONES
*******************************************************************************
I(()Ñ(3/2)-2*XÑ(2/3)+5*XÑ(1/2)-3)a(DX))                             16
                  I((XÑ(3/2)-2*XÑ(2/3)+5*XÑ(1/2)-3)D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                2/5*XÑ(5/2)-2*3/5*XÑ(5/3)+5*2/3*XÑ(3/2)-3*X
                        CONSUMO        179 SUSTITUCIONES
*******************************************************************************
I((4*XÑ2/X)a(DX))                                                   17
                             I(4*XÑ2/XD(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                                   2*XÑ2
                        CONSUMO         14 SUSTITUCIONES
*******************************************************************************
I(((4*XÑ2-2*XÑ(1/2))/X)a(DX))                                       18
                        I((4*XÑ2-2*XÑ(1/2))/XD(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                              2*XÑ2-4*XÑ(1/2)
                        CONSUMO         58 SUSTITUCIONES
*******************************************************************************
```

```
I((Xñ2/2-2/Xñ2)ã(DX))                                              19
                        I((Xñ2/2-2/Xñ2)D(X))
• • • • • • • • • • • •  EXITO
                             Xñ3/6+2/X
                     CONSUMO          37  SUSTITUCIONES
••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••
I((Xñ(1/2)•(3•X-2))ã(DX))                                          20
                       I(Xñ(1/2)•(3•X-2)D(X))
• • • • • • • • • • • •  EXITO
                 (3•X-2)•2/3•Xñ(3/2)-3•2/3•2/5•Xñ(5/2)
                     CONSUMO         222  SUSTITUCIONES
••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••
I(((Xñ3-6•X+5)/X)ã(DX))                                            21
                        I((Xñ3-6•X+5)/XD(X))
• • • • • • • • • • • •  EXITO
                          Xñ3/3-6•X+5•LN(X)
                     CONSUMO          28  SUSTITUCIONES
••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••
I(((1+2•X)ñ(1/2))ã(DX))                                            22
                        I((1+2•X)ñ(1/2)D(X))
• • • • • • • • • • • •  EXITO
                         2/3•(1+2•X)ñ(3/2)/2
                     CONSUMO          91  SUSTITUCIONES
••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••
I((3•(1+2•X)ñ(1/2))ã(DX))                                          23
                       I(3•(1+2•X)ñ(1/2)D(X))
• • • • • • • • • • • •  EXITO
                        3/2•2/3•(1+2•X)ñ(3/2)
                     CONSUMO          94  SUSTITUCIONES
••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••
I(((1+2•X)ñ(I(1/2)))ã(DX))                                         24
                        I((1+2•X)ñ-(1/2)D(X))
• • • • • • • • • • • •  FXITO
                             (1+2•X)ñ(1/2)
                     CONSUMO          89  SUSTITUCIONES
••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••••
```

```
I(((1+2*X)ñ2)a(DX))                                                    25
                        I((1+2*X)ñ2D(X))
* * * * * * * * * * * *   EXITO
                             (1+2*X)ñ3/6
                    CONSUMO        72 SUSTITUCIONES
************************************************************************
I((X*(2+Xñ2)ñ2)a(DX))                                                  26
                        I(X*(2+Xñ2)ñ2D(X))
* * * * * * * * * * * *   EXITO
                             (2+Xñ2)ñ3/6
                    CONSUMO        69 SUSTITUCIONES
************************************************************************
I((X*(2*Xñ2+3))a(DX))                                                  27
                        I(X*(2*Xñ2+3)D(X))
* * * * * * * * * * * *   EXITO
                        (4*Xñ2ñ2/2+6*Xñ2)/4
                    CONSUMO       128 SUSTITUCIONES
************************************************************************
I(((4*Xñ2)*(Xñ3+8)ñ(I(1/2)))a(DX))                                     28
                    I(4*Xñ2*(Xñ3+8)ñ-(1/2)D(X))
* * * * * * * * * * * *   EXITO
                        4/3*2*(Xñ3+8)ñ(1/2)
                    CONSUMO       116 SUSTITUCIONES
************************************************************************
I(((6*X)*(5-3*Xñ2)ñ(1/2))a(DX))                                        29
                    I(6*X*(5-3*Xñ2)ñ(1/2)D(X))
* * * * * * * * * * * *   EXITO
                      -(2/3*(5-3*Xñ2)ñ(3/2))
                    CONSUMO       144 SUSTITUCIONES
************************************************************************
I(((2ñ(1/2)-Xñ(1/2))ñ2)a(DX))                                          30
                    I((2ñ(1/2)-Xñ(1/2))ñ2D(X))
* * * * * * * * * * * *   EXITO
                  2*X-2ñ(3/2)*2/3*Xñ(3/2)+Xñ2/2
                    CONSUMO       277 SUSTITUCIONES
************************************************************************
```

```
I((((2Ñ(1/2)-XÑ(1/2))Ñ2)/XÑ(1/2))a(DX))                                31
                    I((2Ñ(1/2)-XÑ(1/2))Ñ2/XÑ(1/2)D(X))
* * * * * * * * * * * *  EXITO
                         -(2/3*(2Ñ(1/2)-XÑ(1/2))Ñ3)
                         CONSUMO       165 SUSTITUCIONES
=========================================================================
I(((XÑ3)/(2Ñ4+XÑ4)Ñ(1/2))a(DX))                                        32
                         I(XÑ3/(2Ñ4+XÑ4)Ñ(1/2)D(X))
* * * * * * * * * * * *  EXITO
                             2*(2Ñ4+XÑ4)Ñ(1/2)/4
                         CONSUMO       112 SUSTITUCIONES
=========================================================================
I((1/(1+2*X)Ñ3)a(DX))                                                   33
                             I(1/(1+2*X)Ñ3D(X))
* * * * * * * * * * * *  EXITO
                              -(1/4*(1+2*X)Ñ2)
                         CONSUMO        35 SUSTITUCIONES
=========================================================================
I(((C(X)*(S(X)Ñ2)a(DX))                                                 34
                           I(COS(X)*SEN(X)Ñ2D(X))
* * * * * * * * * * * *  EXITO
                                 SEN(X)Ñ3/3
                         CONSUMO        43 SUSTITUCIONES
=========================================================================
I(((C(X)*(S(X)))a(DX))                                                  35
                            I(COS(X)*SEN(X)D(X))
* * * * * * * * * * * *  EXITO
                                 SEN(X)Ñ2/2
                         CONSUMO        74 SUSTITUCIONES
=========================================================================
I(((C(2*X))*(S(2*X))))a(DX))                                            36
                          I(COS(2*X)*SEN(2*X)D(X))
* * * * * * * * * * * *  EXITO
                                SEN(2*X)Ñ2/4
                         CONSUMO       373 SUSTITUCIONES
=========================================================================
```

```
I(((C(2*X))*(S(2*X))Ñ2)@(DX))                                      37
                        I(COS(2*X)*SEN(2*X)Ñ2D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                              SEN(2*X)Ñ3/6
                        CONSUMO       109 SUSTITUCICNES
======================================================================
I(((TX)*(FX)Ñ2)@(DX))                                              38
                           I(TG(X)*SEC(X)Ñ2D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                                TG(X)Ñ2/2
                        CONSUMO        54 SUSTITUCIONES
======================================================================
I(((FX)Ñ2/(1+TX)Ñ2)@(DX))                                          39
                        I(SEC(X)Ñ2/(1+TG(X))Ñ2D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                             -(1/(1+TG(X)))
                        CONSUMO        92 SUSTITUCIONES
======================================================================
I((1/(2+3*X))@(DX))                                                40
                             I(1/(2+3*X)D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                                LN(2+3*X)/3
                        CONSUMO        80 SUSTITUCIONES
======================================================================
I(((EX)/(1+2*(EX)))@(DX))                                          41
                        I(EXP(X)/(1+2*EXP(X))D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                             LN(1+2*EXP(X))/2
                        CONSUMO        78 SUSTITUCIONES
======================================================================
I(((SX)/(1-CX))@(DX))                                              42
                         I(SEN(X)/(1-COS(X))D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                               LN(1-COS(X))
                        CONSUMO        54 SUSTITUCIONES
======================================================================
```

```
I(((FX)Ã2/(1-2*TX))@(DX))                                                    43
                        I(SEC(X)Ã2/(1-2*TG(X))D(X))
* * * * * * * * * * * *   EXITO
                            -(LN(1-2*TG(X))/2)
                        CONSUMO        98 SUSTITUCIONES
*****************************************************************************
I(((2*X+3)/(X+2))@(DX))                                                      44
                            I((2*X+3)/(X+2)D(X))
 * * * * * * * * * * * * **FRACASO
                        2*I(X/(X+2)D(X))+3*LN(X+2)
                        CONSUMO       227 SUSTITUCIONES
*****************************************************************************
I((E(2*X)/(E(2*X)+1))@(DX))                                                  45
                       I(EXP(2*X)/(EXP(2*X)+1)D(X))
* * * * * * * * * * * *   EXITO
                             LN(EXP(2)ÃX+1)/2
                        CONSUMO       125 SUSTITUCIONES
*****************************************************************************
I(((E(2*X)+1)/(E(2*X)-1))@(DX))                                              46
                     I((EXP(2*X)+1)/(EXP(2*X)-1)D(X))
 * * * * * * * * * * * * **FRACASO
                  LN(EXP(2)ÃX-1)/2+I(1/(EXP(2)ÃX-1)D(X))
                        CONSUMO       211 SUSTITUCIONES
*****************************************************************************
I((6*E(3*X))@(DX))                                                           47
                             I(6*EXP(3*X)D(X))
* * * * * * * * * * * *   EXITO
                                2*EXP(3)ÃX
                        CONSUMO        55 SUSTITUCIONES
*****************************************************************************
I((E(X/2))@(DX))                                                             48
                              I(EXP(X/2)D(X))
* * * * * * * * * * * *   EXITO
                                2*EXP(X/2)
                        CONSUMO        43 SUSTITUCIONES
*****************************************************************************
```

```
I((1/EX)a(DX))                                                          49
                              I(1/EXP(X)D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                                 EXP(-(X))
                        CONSUMO          11 SUSTITUCIONES
==========================================================================
I((E(IX))a(DX))                                                         50
                             I(EXP(-(X))D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                                 EXP(-(X))
                        CONSUMO           6 SUSTITUCIONES
==========================================================================
I((9ÑX)a(CX))                                                           51
                                I(9ÑXD(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                                9ÑX/LN(9)
                        CONSUMO          40 SUSTITUCIONES
==========================================================================
I((9Ñ(2*X))a(DX))                                                       52
                              I(9Ñ(2*X)D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                              9Ñ(2*X)/2*LN(9)
                        CONSUMO          74 SUSTITUCIONES
==========================================================================
I((E(XÑ(1/2))/XÑ(1/2))a(DX))                                            53
                        I(EXP(XÑ(1/2))/XÑ(1/2)D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                              2*EXP(XÑ(1/2))
                        CONSUMO         127 SUSTITUCIONES
==========================================================================
I((X*E(XÑ2))a(DX))                                                      54
                             I(X*EXP(XÑ2)D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                                EXP(XÑ2)/2
                        CONSUMO          46 SUSTITUCIONES
==========================================================================
```

```
I(((E(SX))*(CX))ã(DX))                                                  55
                         I(EXP(SEN(X))*COS(X)D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                               EXP(SEN(X))
                       CONSUMO          27 SUSTITUCIONES
==========================================================================
I(((E(TX))*(FX)ñ2)ã(DX))                                                56
                       I(EXP(TG(X))*SEC(X)ñ2D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                               EXP(TG(X))
                       CONSUMO          44 SUSTITUCIONES
==========================================================================
I(((E(X/2)-E(I()/2)))ñ2)ã(DX))                                          57
                    I((EXP(X/2)-EXP(-(X/2)))ñ2D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                      EXP(X/2)ñ2-2*X*EXP(-(2*X/2))
                       CONSUMO          164 SUSTITUCIONES
==========================================================================
I(((EX)ñ(1/2))ã(DX))                                                    58
                           I(EXP(X)ñ(1/2)D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                               2*EXP(X/2)
                       CONSUMO          45 SUSTITUCIONES
==========================================================================
I((2ñX*(EX)ã(DX))                                                       59
                            I(2ñX*EXP(X)D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                          2ñX*EXP(X)/(LN(2)+1)
                       CONSUMO          50 SUSTITUCIONES
==========================================================================
I((E(5*X)+2ñ(5*X))ã(DX))                                                60
                         I((EXP(5*X)+2ñ(5*X))D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                       EXP(5)ñX/5+2ñ(5*X)/5*LN(2)
                       CONSUMO          143 SUSTITUCIONES
==========================================================================
```

```
I((C(5*X))@(D(X))                                                       61
                              I(COS(5*X)D(X))
* * * * * * * * * * * *  EXITO
                                 SEN(5*X)/5
                        CONSUMO        48 SUSTITUCIONES
==========================================================================
I((T(6*X))@(D(X))                                                       62
                              I(TG(6*X)D(X))
* * * * * * * * * * * *  EXITO
                              LN(SEC(6*X))/6
                        CONSUMO        64 SUSTITUCIONES
==========================================================================
I((F(7*X))@(D(X))                                                       63
                              I(SEC(7*X)D(X))
* * * * * * * * * * * *  EXITO
                          LN(SEC(7*X)+TG(7*X))/7
                        CONSUMO        64 SUSTITUCIONES
==========================================================================
I((H X)@(D X))                                                          64
                               I(CSC(X)D(X))
* * * * * * * * * * * *  EXITO
                             LN(CSC(X)-CTG(X))
                        CONSUMO         7 SUSTITUCIONES
==========================================================================
I((F(3*X)*T(3*X))@(D X))                                                65
                          I(SEC(3*X)*TG(3*X)D(X))
* * * * * * * * * * * *  EXITO
                                 SEC(3*X)/3
                        CONSUMO       112 SUSTITUCIONES
==========================================================================
I((H(2*X)*G(2*X))@(D X))                                                66
                          I(CSC(2*X)*CTG(2*X)D(X))
* * * * * * * * * * * *  EXITO
                               -(CSC(2*X)/2)
                        CONSUMO       121 SUSTITUCIONES
==========================================================================
```

```
I((H(3*X)Ñ2)@(D)))                                                              67
                              I(CSC(3*X)Ñ2D(X))
* * * * * * * * * * * *  EXITO
                                  -(CTG(3*X)/3)
                         CONSUMO        106 SUSTITUCIONES
==============================================================================
I((G(X/2))@(D X))                                                               68
                                I(CTG(X/2)D(X))
* * * * * * * * * * * *  EXITO
                                2*LN(SEN(X/2))
                         CONSUMO         56 SUSTITUCIONES
==============================================================================
I((((F(XÑ3))Ñ2)*(XÑ2))@(DX))                                                    69
                            I(SEC(XÑ3)Ñ2*XÑ2D(X))
* * * * * * * * * * * *  EXITO
                                   TG(XÑ3)/3
                         CONSUMO        100 SUSTITUCIONES
==============================================================================
I(((TX+GX)Ñ2)@(DX))                                                             70
                           I((TG(X)+CTG(X))Ñ2D(X))
* * * * * * * * * * * *  EXITO
                            TG(X)-X+2*X-CTG(X)+X
                         CONSUMO        104 SUSTITUCIONES
==============================================================================
I(((SX)/(1+(CX)))@(DX))                                                         71
                          I(SEN(X)/(1+COS(X))D(X))
* * * * * * * * * * * *  EXITO
                                -(LN(1+COS(X)))
                         CONSUMO         63 SUSTITUCIONES
==============================================================================
I((((FX)Ñ2)/(1+(TX)))@(DX))                                                     72
                          I(SEC(X)Ñ2/(1+TG(X))D(X))
* * * * * * * * * * * *  EXITO
                                  LN(1+TG(X))
                         CONSUMO         80 SUSTITUCIONES
==============================================================================
```

```
I(()*C(XÑ2))ã(D?))                                                    73
                      I(X*COS(XÑ2)D(X))
* * * * * * * * * * * *  EXITO
                         SEN(XÑ2)/2
                  CONSUMO        55 SUSTITUCIONES
***********************************************************************
I((X+S(2*X))ã(D?))                                                    74
                     I((X+SEN(2*X))D(X))
* * * * * * * * * * * *  EXITO
                      XÑ2/2-COS(2*X)/2
                  CONSUMO        97 SUSTITUCIONES
***********************************************************************
I(((SX)/((4-(X)Ñ(1/2)))ã(DX))                                         75
                 I(SEN(X)/(4-COS(X))Ñ(1/2)D(X))
* * * * * * * * * * * *  EXITO
                     2*(4-COS(X))Ñ(1/2)
                  CONSUMO        83 SUSTITUCIONES
***********************************************************************
I((((FX)Ñ2)/((1+2*TX)Ñ(1/2)))ã(DX))                                   76
                I(SEC(X)Ñ2/(1+2*TG(X))Ñ(1/2)D(X))
* * * * * * * * * * * *  EXITO
                     (1+2*TG(X))Ñ(1/2)
                  CONSUMO        128 SUSTITUCIONES
***********************************************************************
I((1/(XÑ2+9))ã(DX))                                                   77
                      I(1/(XÑ2+9)D(X))
* * * * * * * * * * * *  EXITO
                        ARCTAN(X/3)/3
                  CONSUMO        51 SUSTITUCIONES
***********************************************************************
I((1/(XÑ2-4))ã(DX))                                                   78
                      I(1/(XÑ2-4)D(X))
* * * * * * * * * * * *  EXITO
                     LN((X-2)/(X+2))/4
                  CONSUMO        54 SUSTITUCIONES
***********************************************************************
```

```
I((1/(285-XÑ2))a(DX))                                                  79
                        I(1/(25-XÑ2)D(X))
* * * * * * * * * * * *   EXITO
                        LN((5+X)/(X-5))/10
                CONSUMO          57  SUSTITUCIONES
=======================================================================
I((1/(XÑ2-186))a(DX))                                                  80
                        I(1/(XÑ2-16)D(X))
* * * * * * * * * * * *   EXITO
                        LN((X-4)/(X+4))/8
                CONSUMO          53  SUSTITUCIONES
=======================================================================
I((4/(9*XÑ2+1))a(DX))                                                  81
                        I(1/(9*XÑ2+1)D(X))
* * * * * * * * * * * *   EXITO
                           ARCTAN(3*X)
                CONSUMO          70  SUSTITUCIONES
=======================================================================
I((1/(4-9*XÑ2))a(DX))                                                  82
                        I(1/(4-9*XÑ2)D(X))
* * * * * * * * * * * *   EXITO
                        LN((2+3*X)/(3*X-2))/4
                CONSUMO          74  SUSTITUCIONES
=======================================================================
I((CX/(4-(SX)Ñ2))a(DX))                                                83
                I(COS(X)/(4-SEN(X)Ñ2)D(X))
* * * * * * * * * * * *   EXITO
                LN((2+SEN(X))/(SEN(X)-2))/4
                CONSUMO         140  SUSTITUCIONES
=======================================================================
I((1/((X-2)Ñ2+9))a(DX))                                                84
                        I(1/((X-2)Ñ2+9)D(X))
* * * * * * * * * * * *   EXITO
                        ARCTAN((X-2)/3)/3
                CONSUMO          63  SUSTITUCIONES
=======================================================================
```

```
I((1/(4-(X+3)ñ2)ñ(1/2))a(DX))                                                        85
                          I(1/(4-(X+3)ñ2)ñ(1/2)D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                                ARCSEN(2*(X+3))
                          CONSUMO         59 SUSTITUCIONES
***************************************************************************
I((1/(Xñ2+4*X+3))a(DX))                                                              86
                             I(1/(Xñ2+4*X+3)D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                             LN((X+2-1)/(X+2+1))/2
                          CONSUMO         75 SUSTITUCIONES
***************************************************************************
I((1/(Xñ2+2*X))a(DX))                                                                87
                              I(1/(Xñ2+2*X)D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                             LN((X+1-1)/(X+1+1))/2
                          CONSUMO         73 SUSTITUCIONES
***************************************************************************
I((1/(2*X-Xñ2)ñ(1/2))a(DX))                                                          88
                           I(1/(2*X-Xñ2)ñ(1/2)D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                                  ARCSEN(X-1)
                          CONSUMO         59 SUSTITUCIONES
***************************************************************************
I((1/(Xñ2+3*X+1))a(DX))                                                              89
                             I(1/(Xñ2+3*X+1)D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                ARCTAN((X+3/2)/(1-9/4)ñ(1/2))/(1-9/4)ñ(1/2)
                          CONSUMO         81 SUSTITUCIONES
***************************************************************************
I((1/(Xñ2+2*X+1)ñ(1/2))a(DX))                                                        90
                          I(1/(Xñ2+2*X+1)ñ(1/2)D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                                    LN(X+1)
                          CONSUMO         19 SUSTITUCIONES
***************************************************************************
```

```
I((1/(4*XÑ2+4*X+5))@(DX))                                          91
                          I(1/(4*XÑ2+4*X+5)D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
    ARCTAN((X+4/8)/((5-4Ñ3/8Ñ2)/4)Ñ(1/2))/4*((5-4Ñ3/8Ñ2)/4)Ñ(1/2)
                        CONSUMO       190 SUSTITUCIONES
********************************************************************
I(((2*X+1)/(XÑ2+1))@(DX))                                          92
                          I((2*X+1)/(XÑ2+1)D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                            LN(XÑ2+1)+ARCTAN(X)
                        CONSUMO       151 SUSTITUCIONES
********************************************************************
I(((3*X-1)/(XÑ2+9))@(DX))                                          93
                          I((3*X-1)/(XÑ2+9)D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                        3/2*LN(XÑ2+9)-ARCTAN(X/3)/3
                        CONSUMO       154 SUSTITUCIONES
********************************************************************
I(((X+3)/(XÑ2+4)Ñ(1/2))@(DX))                                      94
                        I((X+3)/(XÑ2+4)Ñ(1/2)D(X))
* * * * * * * * * * * * *  EXITO
                 (XÑ2+4)Ñ(1/2)+3*LN(X+(XÑ2+2)Ñ(1/2))
                        CONSUMO       143 SUSTITUCIONES
********************************************************************
I(((2*X+5)/(XÑ2+2*X+5))@(DX))                                      95
                        I((2*X+5)/(XÑ2+2*X+5)D(X))
 * * * * * * * * * * * * **FRACASO
             2*I(X/(XÑ2+2*X+5)D(X))+5*I(1/(XÑ2+2*X+5)D(X))
                        CONSUMO       758 SUSTITUCIONES
********************************************************************
I(((X+3)/()Ñ2-2*X)Ñ(1/2)@(DX))                                     96
                       I((X+3)/(XÑ2-2*X)Ñ(1/2)D(X))
 * * * * * * * * * * * * **FRACASO
         I(X/()Ñ2-2*X)Ñ(1/2)D(X))+3*I(1/(XÑ2-2*X)Ñ(1/2)D(X))
                        CONSUMO       764 SUSTITUCIONES
********************************************************************
```

```
)(((LX)*1)3((X))                                                    97
                         I(LN(X)*1D(X))
* * * * * * * * * * * *  EXITO
                            LN(X)*X-X
                    CONSUMO        13 SUSTITUCIONES
=======================================================================
)((X*(SX))3((X))                                                    98
                         I(X*SEN(X)D(X))
* * * * * * * * * * * *  EXITO
                         SEN(X)-X*COS(X)
                    CONSUMO       178 SUSTITUCIONES
=======================================================================
)((X*3ÑX)3(DX))                                                     99
                          I(X*3ÑXD(X))
* * * * * * * * * * * *  EXITO
                      X*3ÑX/LN(3)-3ÑX/LN(3)Ñ2
                    CONSUMO       269 SUSTITUCIONES
=======================================================================
)(((LX)*(XÑ2))3(DX))                                               100
                        I(LN(X)*XÑ2D(X))
* * * * * * * * * * * *  EXITO
                        LN(X)*XÑ3/3-XÑ3/9
                    CONSUMO        90 SUSTITUCIONES
=======================================================================
```

CONCLUSIONES.

El área de la integración simbólica es muy extensa y haciendo un - - análisis de ISI saltan a la vista muchas carencias, para que ISI llegara a la - meta de resolver completamente el problema de la integración simbólica me gustaría hacer algunos comentarios acerca de los pasos que habría que seguir.

Primero: Que en la generación del arbol Y-O, se pueda aplicar heu-- rísticas de tal forma que nos permita avanzar en el camino que creemos nos llevará a la solución, detenernos si se revela infructuoso y regresar a otro- que parezca más productivo.

Segundo: Implantar el método de integración por fracciones parciales el cual por sí mismo resuelve gran número de integrales y además sirve - - como herramienta en la implantación del procedimiento de Risch que nos -- daría el método para saber si una integral tiene solución en forma simbóli- ca.

Por último cabría la pregunta ¿tuvo ISI comportamiento inteligente? sobre esto quisiera tomar la posición del investigador francés J. Pitrat - - que afirma "... Ante un programa de I.A. no hay que preguntarse si la -- máquina ha dado prueba de inteligencia. Hay que ver si el programa tiene resultados en un dominio en el cual nosotros desconocemos el método que utilizamos y si los resultados son buenos o malos".

B I B L I O G R A F I A .

(1) J. Pitrat: "Un programme de demostration de théoremes", Dunod, París, 1970.

(2) J.R.Slagle: "Artificial Inteligence", The heuristic programing aproach",

(3) Moses: 2nd symposium on symbolic and algebraic manipulation, 1971,

(4) Macsyma: 2nd symposium on simbolic and algebraic manipulation, 1971.

(5) J.P. Laurent: "Un programme qui calcule des límites en levant les indeterminations par des procédes heuristiques", París, 1972.

(6) Nilson: "Problem-solving methods in artificial intelligence" Mcgraw-hill, 1971.

(7) M. Lara Aparicio: "Métodos de integración", Anuies, 1975.

(8) Granville, Smith, Longley: "Cálculo diferencial e integral" Uthea, 1963.

(9) A.M. Turin: "Mentes y Máquinas", UNAM, 1970.

(10) Mathlab: 2nd symposium on simbolic and algebraic manipulation, 1971.