17 2-ejem.

LA INTUICION Y EL RIGOR

EN LA ENSEÑANZA DE

LOS CONCEPTOS DE

LIMITE Y CONTINUIDAD

TESIS QUE PARA OBTENER EL TITULO DE MATEMATICO

PRESENTA GUILLERMO LOPEZ MAYO

FACULTAD DE CIENCIAS

U N A M

1981

P R O L O G O

La elección del tema en este trabajo de tesis, ha sido motivada fundamentalmente por la experiencia en la enseñanza del cálculo, que desde hace algunos años he impartido en la Escuela de C. Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Puebla. Tal experiencia consiste en que una gran mayoría de estudiantes, no logran comprender y manejar adecuadamente los conceptos de límite y continuidad, en los cursos introductorios de cálculo. Las consecuencias inevitables de esta deficiencia — para sólo mencionar dos de las más importantes— han sido: 1) Que los conceptos de derivada e integral, usualmente definidos en términos de la idea de límite y varias de cuyas propiedades emplean la noción de continuidad, sean también insuficientemente comprendidos y 2) El alto índice de estudiantes reprobados.

La mencionada experiencia —como también he podido observar— no es privativa de nuestra escuela, sino que por el contrario, es una característica común de las escuelas de física y matemáticas de nuestro y otros paises. De entre las causas del problema, podemos distinguir aquellas que se localizan en el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo y las que están fuera de este ámbito.

Por lo que respecta a las segundas, tenemos indudablemente a las socioeconómicas; sin embargo, su estudio escapa a las metas y posibilidades de este trabajo.

En cuanto a las primeras, su estudio me ha llevado a la conclusión de que la principal, se sitúa en el divorcio que tradicionalmente ha existido entre las motivaciones intuitivas y las formulaciones rigurosas de los conceptos del cálculo. Casi todos los textos que sobre la materia circular en nuestro medio, se caracterizan por ofrecer presentaciones excesivamente formales, recurriendo sólo de manera accidental a las ideas físicas o geométricas. Tales enfoques pasan por alto la importancia que desempeña la intuición en la formación de los conceptos no solo matemáticos, sino también de toda la ciencia, dando la impresión de que sus autores consideran que la calidad de sus obras disminuye si se les dá mayor énfasis a las ideas informales. Los otros enfoques que le dan una mayor atención a las motivaciones intuitivas han dejado, sin embargo, un problema sin resolver, consistente en que no aclaran suficientemente al estudiante que la idea intuitiva y la definición formal corresponden a un mismo concepto. El resultado de esto es -- que el estudiante no emplea la intuición o sólo lo hace tímidamente como una guía en la resolución de problemas.

Por tales motivos es que el principal objetivo de este trabajo consiste en estudiar la relación entre la intuición y el rigor en la enseñanza de los conceptos de límite y de continuidad. La causa de restringir el estudio únicamente a los conceptos de límite y de continuidad, obedece fundamentalmente a que tales conceptos son bastante representativos del tipo de problemas que se presentan en la enseñanza del cálculo, sin que por eso piense que en los demás conceptos del cálculo no aparecen problemas similares. Hay que aclarar que cuando se recurre en el desarrollo del trabajo a los conceptos de derivada e integral, entre otros, es sólamente con la finalidad de reforzar algún argumento.

Es necesario señalar que el problema de establecer la relación entre intuición y rigor aparece, independientemen te del enfoque que se le dé al cálculo, razón por la cual últimamente se han producido importantes intentos por dar respuesta al problema. Sin embargo, tales intentos han -- abarcado sólo algunas partes del problema, sin dar espuestas concluyentes, por cuanto el problema es harto complejo y requiere, entre otras cosas, de una reconstrucción históa rica de los conceptos del cálculo, que hasta ahora sólo se ha hecho de manera incompleta.

En este trabajo no se analizan los aspectos físicos - de la intuición sino sólo los geométricos, mencionándose - los primeros ocasionalmente. Su importancia en el desarro llo de los conceptos del cálculo nos obliga a reservar su estudio a un tratamiento no contemplado aquí.

Un señalamiento adicional es que este trabajo esta re ferido a las presentaciones convencionales del cálculo en las que el concepto de límite ocupa un papel central, sin hacerse referencia alguna a las presentaciones modernas -- del mismo, como son: el cálculo no estándard o el cálculo sin límites de Marsden.

Dentro de este marco de referencia es posible enten-- der las limitaciones del presente trabajo cuya estructuración es la siguiente:

En el capítulo I se presenta una descripción de la - más usual de las exposiciones formales del concepto de límite, a partir de un tratamiento previo del sistema de los números reales, señalándose a continuación los problemas - que involucra la definición formal del límite de una fun-- ción. Inmediatamente después se hacen notar las limitacio nes y problemas que surgen partiendo de la noción intuitiva del límite de una función, para de ahí, exhibir los problemas que se derivan de confrontar ambos puntos de vista. El tratamiento que se le dá al concepto de continuidad de una función sigue las mismas líneas. Por último, se mencionan también algunos problemas en la exposición formal sobre la convergencia de sucesiones. El propósito de este capítulo es el de dejar establecidos los problemas a discutir, y eventualmente, a resolver.

En el capítulo II se hace un breve resumen histórico de los conceptos de límite y continuidad no con la finalidad de realizar un estudio a fondo de la misma, sino más bien con la idea de extraer elementos que permitan apuntalar las afirmaciones que se hacen en los capítulos III y IV. En este sentido, se distinguen los diferentes períodos de la historia del cálculo durante los cuales se han hecho las principales aportaciones de los conceptos de límite y de continuidad. Debido a la importancia que ha tenido el concepto de infinito en el desarrollo de la noción de límite, he considerado conveniente hacer también una breve reseña histórica de su desarrollo. Al final de este capítulo se enlistan algunas conclusiones relacionadas con los problemas planteados en el capítulo I.

En el capítulo III se hace una descripción de otros elementos también necesarios para fundamentar las afirmaciones que se hacen en el capítulo IV. Se habla en primer lugar, de las diversas construcciones que hay de los números reales, tratando de hallar sus relaciones con los enfoques intuitivos de los conceptos de límite y continuidad. Después se comentan los trabajos de David Tall en los que se estudia la convergencia de sucesiones a partir de la expansión decimal de los números reales. Finalmente se resumen las ideas de Tall acerca de una aproximación intuitiva al concepto de continuidad.

En el capítulo IV se proponen y discuten algunas alternativas de exposición a los conceptos de límite y de continuidad a la luz de las conclusiones obtenidas en el capítulo III y las observaciones hechas en el IV, orientadas a salvar los problemas planteados en el capítulo I.

Por último, en el epílogo se hacen consideraciones generales de lo realizado a lo largo de todo el trabajo.

No puedo dejar de mencionar que muchas de las ideas y puntos de vista expresados en este trabajo, corresponden a otros autores, como sucede, por ejemplo, con la parte histórica donde las principales referencias y enfoques son de Carl B. Boyer y C. H. Edwards, Jr. Otras más, han surgido de las sugerencias y discusiones que de algún tiempo a la fecha he tenido con mi compañero Humberto Madrid, a quien en gran medida se deben los aciertos. De los errores de interpretación o de precisión que pudieran aparecer, los únicos responsables son tanto la falta de tiempo para desarrollar algunas ideas, como mis propias limitaciones.

I N D I C E

CAPITULO I

PLANTEAMIENTO DE LOS PROBLEMAS

a) UNA EXPOSICION FORMAL DEL CONCEPTO DE LIMITE

Todas las exposiciones formales del cálculo principian con un tratamiento del sistema de los números reales, ya - sea postulando más o menos explícitamente la existencia de los números naturales y a partir de ellos, obtener los números enteros y los números racionales. Después de demostrar que existen números como $\sqrt{2}$ que no son racionales, se concluye con un bosquejo de construcción de los números reales a partir de los números racionales, vía cortaduras de Debekind, haciéndose ver finalmente el teorema fundamental de - completez de los números reales. Otro camino que se sigue al tratar los números reales, consiste en postular su existencia y unicidad como un campo ordenado completo, procediéndose inmediatamente a demostrar sus propiedades a partir de los axiomas de campo ordenado, e insistiéndose sobre todo en aquellas que se emplearán en la definición formal - de límite, tales como las referentes a la relación de orden y de valor absoluto.

El siguiente tema que se aborda usualmente en estos enfoques formales es precisamente el de límite de una función Se enuncia la siguiente definición formal, para empezar:

> "Sea x_0 un punto de acumulación del dominio de la función f. Se dice que la función f tiene como - límite el número real L cuando x tiende a x_0 - -- ($\lim_{x \to x_0} f(x) = L$), sí para todo número real $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, si $0 < |x - x_0| < \varepsilon$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$"

A esta definición se le asocia la siguiente interpretación geométrica:

"La función f tiene como límite L cuando x tiende a x_0, sí para toda vecindad dibujada en el eje Y con centro en L y radio ε, existe una vecindad dibujada en el eje X con centro en x_0 y radio δ, de tal manera que la gráfica de la función se haya totalmente contenida en la banda horizontal cuyos extremos son $L+\varepsilon$ y $L-\varepsilon$, para las x contenidas en la vecindad $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, (ver fig.I.1)

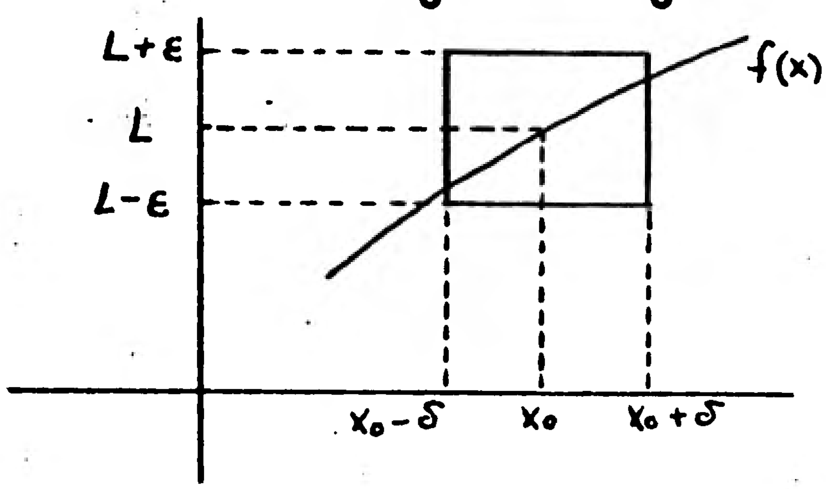

Fig. I.1

De manera inmediata, siempre de acuerdo a estos enfoques, se procede a exponer ejemplos en los que se aplica la definición formal.

A este respecto hay dos observaciones que podríamos hacer:

i) Que la definición formal es complicada en el sentido de que el estudiante se pregunta ¿qué hago para demostrar que L es el límite de la función f cuando x tiende a x_0? Una vez que ha logrado comprender que el asunto consiste en encontrar una δ a partir de la $\varepsilon > 0$ arbitrariamente dada, surge de manera natural la pregunta ¿cómo encontrar la δ? La respuesta a esta pregunta se dá de manera concreta con ejemplos como el siguiente:

"Demostrar que $\lim_{x \to 0} 3x^2 = 0$"

De acuerdo con la definición formal, se tiene que demostrar que "Para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que ---- $0 < |x - 0| < \delta$, implica que $|3x^2 - 0| < \varepsilon$

Para tal propósito, se procede como sigue:

$|3x^2 - 0| = |3x^2| = 3|x^2| = 3|x|^2 = 3|x - 0|^2$

De aquí puede verse que

Si $|3x^2 - 0| < \varepsilon$, entonces $|x - 0| < \sqrt{\varepsilon/3}$

Tomando $\delta = \sqrt{\varepsilon/3}$ resulta que

$|x - 0| < \delta \Rightarrow 3|x - 0|^2 < \varepsilon \Rightarrow 3|x^2| < \varepsilon \Rightarrow |3x^2 - 0| < \varepsilon$

y por lo tanto $\lim\limits_{x \to 0} 3x^2 = 0$

Este sencillo ejemplo pone de relieve los siguientes -- hechos:

a) Cuando se impone la condición que $|3x^2 - 0| < \varepsilon$, para después determinar la δ, en cierta forma se presupone que es posible hacer lo que se quiere demostrar que es verdadero.

b) Para encontrar la δ deseada a partir de la ε, - primeramente se emplea la implicación

$$|3x^2 - 0| < \varepsilon \Rightarrow |x - 0| < \delta$$

para después, cuando se quiere probar que la δ cumple con los requerimientos de la definición, se --- echa mano de la implicación $|x - 0| < \delta \Rightarrow |3x^2 - 0| < \varepsilon$

Con esto se ve, que en realidad en la demostración - se emplea la condición más fuerte de equivalencia lógica entre las proposiciones

$$|3x^2 - 0| < \varepsilon \text{ y } |x - 0| < \delta$$

Por otro lado, hay que señalar que cuando se trata - de funciones menos sencillas que la del ejemplo ante rior, la determinación de la δ suele convertirse en un problema bastante complicado para el estudiante tanto por lo que respecta a los cálculos como a los razonamientos que se emplean.

ii) Que en la definición formal se presupone la existencia del límite L, sin establecer una vía para determinarlo, Sin mencionarse explícitamente, esta carencia es cubierta de alguna de las siguientes maneras:

a) Considerando casos de funciones que son contínuas en el punto x_o en las que evidentemente el límite cuando x tiende a x_o, coincide con el valor que la función toma en x_o.

b) Empleando las todavía no demostradas y ni al menos enunciadas propiedades sobre límites de funciones.

c) Recurriendo a criterios intuitivos cuya validez no ha sido aclarada.

Todas estas maneras entrañan trampas más o menos veladas que contribuyen a reforzar en muchos estudiantes la idea de las matemáticas como cosas mágicas.

b) UNA APROXIMACION INTUITIVA DEL CONCEPTO DE LIMITE

Las ideas intuitivas que en relación con el límite de una función se manejan más usualmente, son las siguientes:

"Se dice que $\lim_{x \to x_o} f(x) = L$, sí:

a) Cuando x se aproxima a x_o, f(x) se aproxima también a L.

b) Puede hacerse $f(x)$ tan próxima a L como se quiera, pero sin ser igual necesariamente, con tal que x - sea suficientemente cercano a x_o."

Tanto la notación misma como sus interpretaciones, su gieren la idea de movimiento en las variables x y $f(x)$. Tales ideas son además, susceptibles de representarse geométricamente en el plano cartesiano de acuerdo con los siguientes esquemas:

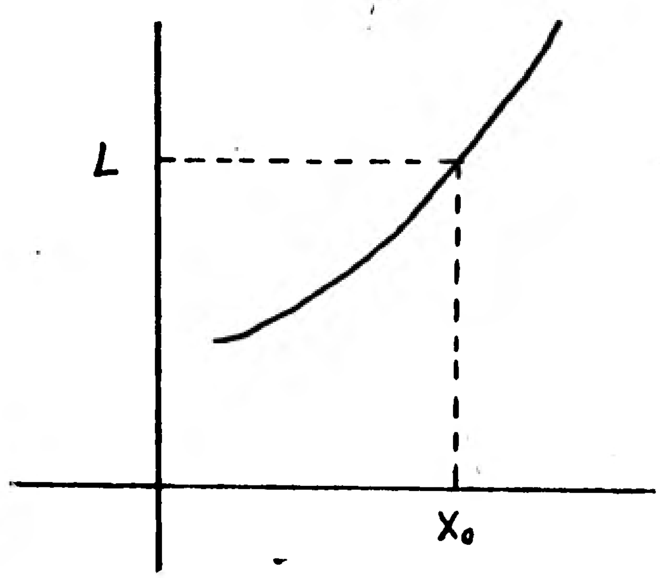

Fig. I.2

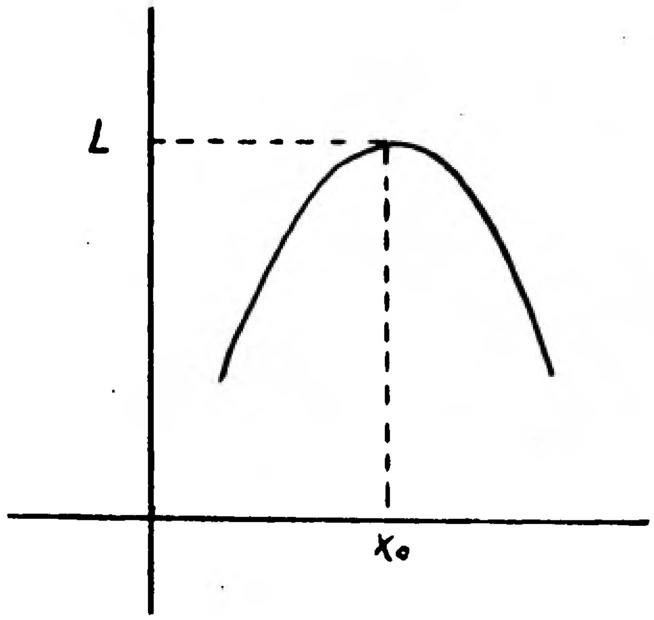

Fig. I.3

Conforme a tales interpretaciones, es posible calcular el límite de funciones tales como $f(x) = 3x$ cuando x tiende a 2 o de $g(x) = x^2$ cuando x tiende a 1, para lo cual basta con hacer las correspondientes tablas de valores de x, aproximándose a 2 y 1 respectivamente (ver tabl s anexas) y observar a que valores se aproximan $f(x)$ y $g(x)$, - pudiéndose ver que esos valores son 6 y 1 respectivamente.

x	f(x)
0	0
1	3
1.5	4.5
1.8	5.4
1.9	5.7
1.99	5.97
1.999	5.997
2.01	6.03
2.1	6.3
2.5	7.5
3	9

x	g(x)
0	0
0.5	0.25
0.8	0.64
0.9	0.81
0.99	0.9801
0.999	0.998
1.001	1.002
1.01	1.02
1.1	1.21
1.5	2.25
2	4

x	h(x)
2	5
2.5	5.5
2.8	5.8
2.9	5.9
2.99	5.99
2.999	5.999
3.001	6.001
3.01	6.01
3.1	6.1
3.2	6.2
3.5	6.5

Hay otros ejemplos como el de la función $h(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ cuyo límite es 6 cuando x tiende a 3, como puede observarse nuevamente en su tabla de valores, aún cuando no existe el valor de la función en $x = 3$.

Sin embargo, si se considera ahora el ejemplo de la función $\varphi(x) = 10^3/3$ y se quiere averigüar cuál es su límite cuando x tiende a 0.1, se observa, recurriendo a su tabla de valores que el límite de la función es 10 000, a pesar de que los valores de $\varphi(x)$ se aproximan "más lentamente" a su límite que en los ejemplos anteriores. Es decir, que cuando x está próxima a 0.1 en sólo 0.1 unidades, ¡ la diferencia entre $\varphi(0.2) = 5000$ y su límite es de 5000 unidades ! Esta ambigüedad nos obliga a darle un significado preciso a la idea de "cercanía o proximidad"

x	$\varphi(x)$
0.5	2000
0.2	5000
0.15	6666
0.11	9090
0.101	9900
0.1001	9990
0.10001	9999

x	$\psi(x)$
0.5	0.5
0.9	0.9
0.99	0.99
0.999	0.999
1	1
1.01	1.0101
1.001	1.0011

Con el siguiente ejemplo se hace más patente aún la insuficiencia de las ideas intuitivas para dilucidar si un número real es o no el límite de una función. En efecto, considérese la siguiente función:

$$\psi(x) = \begin{cases} x & , \text{ si } x = 1 \\ x + 0.0001, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

cuya tabla de valores aparece arriba y de la cual podría concluirse ingenuamente que su límite cuando x tiende a 1, es 1. Sin embargo, un examen más cuidadoso permite darnos cuenta que tal límite no existe.

(c) AFINIDADES Y CONTRASTES ENTRE LOS ENFOQUES INTUITIVO Y FORMAL

Una primera diferencia que se desprende de la interpretación geométrica de la definición formal, consiste en que nos sitúa inicialmente en el contradominio de la función, $(L + \varepsilon \; , \; L - \varepsilon)$, después es en el dominio de la función $(x_0 - \delta \, , \, x_0 + \delta)$, para finalmente volver al contradominio, mientras que la idea intuitiva fija al principio la atención en los valores de x en el dominio de la función, suficientemente próximos a x_0, y luego en los valores de f(x) en el contradominio de la función próximos a L.

Otra incongruencia entre la definición formal y la idea intuitiva, es que la primera no establece una vía para calcular el límite de una función, en tanto que la segunda permite calcular dicho límite para una clase bastante amplia de funciones.

(d) EL LIMITE DE UNA SUCESION

A partir de la definición formal de convergencia de una sucesión:

"La sucesión de números reales (s_n) converge a s, sí para todo número real $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$, tal que si $n > N$, entonces $|s_n - s| < \varepsilon$. Simbólicamente $\lim_{n \to \infty} s_n = s$."

podemos de inmediato hacer los siguientes comentarios:

1) Que en ella se presupone la existencia del límite s de la sucesión, sin establecer una vía para su determinación. En la práctica lo que se hace para determinar el límite s, es aplicar las propiedades acerca de convergencia de sucesiones, que a estas alturas todavía no se han visto, o bien, cuando se trata de sucesiones simples, se apela a la siguiente interpretación coloquial de la definición:

   "La sucesión (s_n) converge a s, sí s_n puede aproximarse a s tanto como se quiera con tal que n sea suficientemente grande".

2) Muchos estudiantes que piensan el límite de una sucesión como un proceso infinito, se preguntan si una sucesión llega o no a alcanzar su límite. Tal duda se ve reforzada cuando se consideran ejemplos como el de la sucesión $s_n = 1/n$, cuyo límite es 0, resultando que 0 y s_n son indistinguibles para n suficientemente grande, es decir, que si se trabaja con una exactitud de ε, los términos de la sucesión que distan de 0 en menos que ε, son iguales a 0, ya que con la representación elegida, sólo es posible distinguir aquellos tér-

minos cuya distancia a 0 es mayor que ε. De esto resulta que, para salvar esta dificultad, no basta con mostrar al estudiante que hay ejemplos de sucesiones que a partir de un número finito de términos alcanzan su límite. Más aún, si aceptamos que la mayoría de los estudiantes piensan en términos de la representación perfecta de los números reales y no en la inexactitud de su trazo, no resultará obvio que la sucesión alcance su límite con cualquier exactitud ε.

(e) LA NOCION INTUITIVA DEL CONCEPTO DE CONTINUIDAD

La idea informal que todos los textos de cálculo manejan en relación con el concepto de continuidad de una función, es la siguiente: "Una función f(x) es contínua sí su gráfica puede trazarse libremente sin despegar el lápiz del papel".

De acuerdo con tal noción geométrica, es fácil decidir si una función es o no contínua (ver figuras I.4 y I.5), quedando incluídas en la clase de las funciones contínuas las funciones polinomiales, una amplia gama de funciones racionales y varias funciones trigonométricas y trascendentes, para sólo mencionar las que más frecuentemente aparecen en los cursos de cálculo.

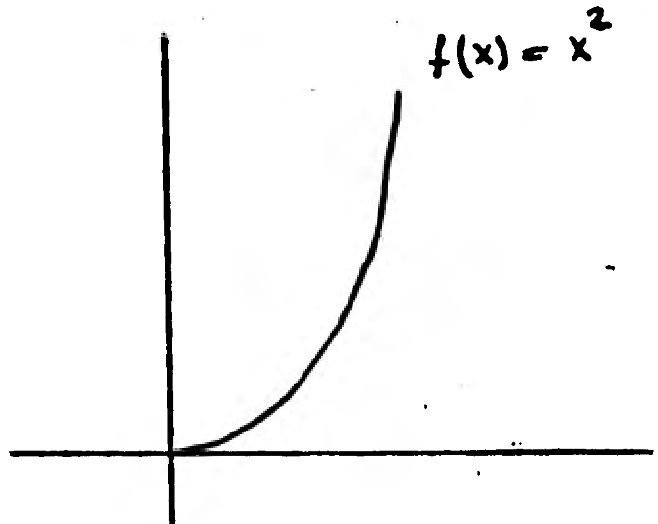

Fig. I.4

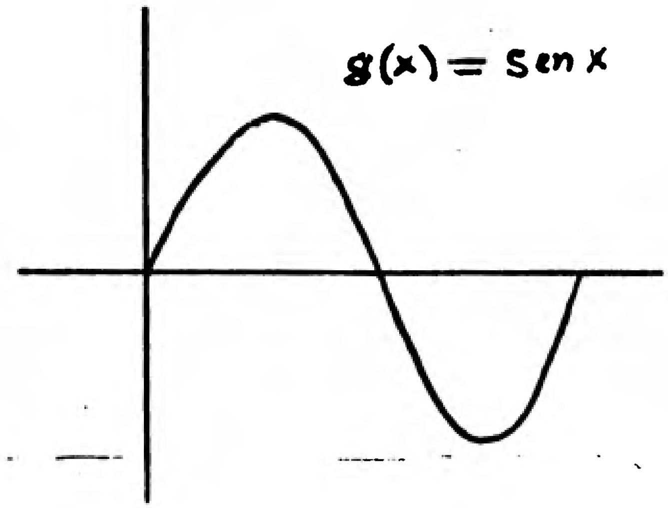

Fig. I.5

(f) LA DEFINICION FORMAL

Por lo que respecta a la definición rigurosa de continuidad, su formulación es como sigue:

"Se dice que la función f es contínua en el punto x_0, si la función está definida en x_0, si existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y además $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$."

De manera casi inmediata se define la continuidad global de una función en los siguientes términos:

"Una función es globalmente contínua, sí es contínua en cada punto de su dominio".

La interpretación geométrica que se dá a la continuidad puntual pocas veces se menciona y cuando esto ocurre, se refiere a la ya descrita para $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, haciendo $L = f(x_0)$.

En cuanto a la interpretación geométrica de la continuidad global, se menciona que esta coincide con la de la idea intuitiva. Veamos hasta q ue punto es válida esta - afirmación:

(g) DIFERENCIAS ENTRE LA APROXIMACION INTUITIVA Y LA DEFINICION FORMAL

Una primera diferencia que puede observarse es el distinto punto de partida de ambos enfoques: por un lado la aproximación intuitiva se refiere a la continuidad global de una función, mientras que el punto de vista formal fija inicialmente su atención en la continuidad puntual, en términos de la cual se define la continuidad global. En otras palabras, aquí la definición de continuidad global no es autosuficiente.

En cuanto a las nociones intuitiva y formal de continuidad global, podemos localizar una primera divergencia si se considera el siguiente ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ sen } 1/x, & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En este caso la función es globalmente contínua en todo $\mathbb{R}$, inclusive para x = 0, y no obstante, es imposible trazar libremente la gráfica de la función sin separar el lápiz del papel en la proximidad de x = 0. (fig. I.6)

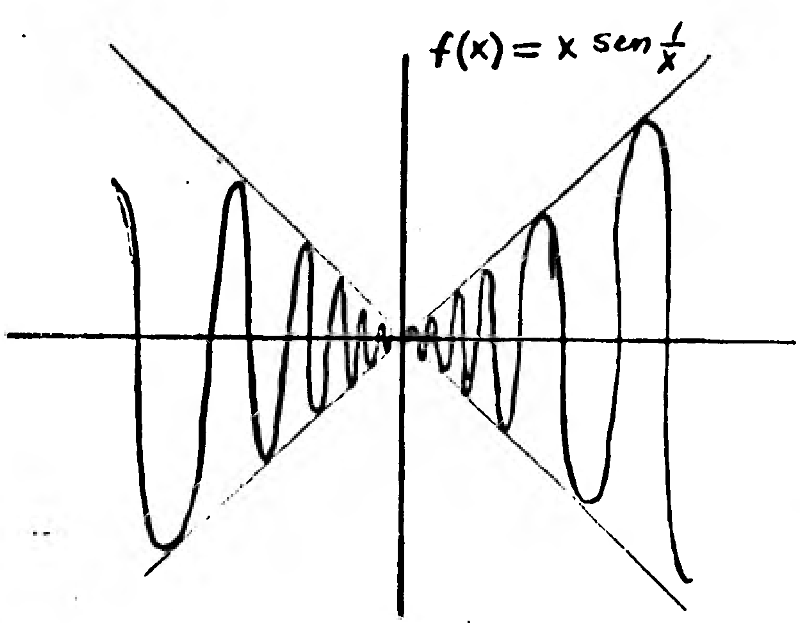

Fig. I.6

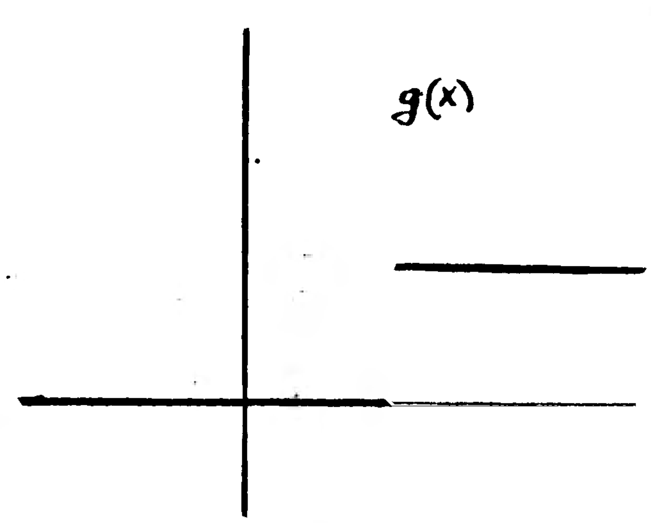

Fig. I.7

Más aún, si se considera el caso de la función

$$g(x) = \begin{cases} 0 \ , \ si \ x < \sqrt{2} \\ 1 \ , \ si \ x > \sqrt{2} \end{cases}$$

puede comprobarse que es contínua en cada uno de los puntos de su dominio, según la definición formal. En efecto,

Si $x_0 \in Q$, entonces $x_0 < \sqrt{2}$, o bien $x_0 > \sqrt{2}$.

Para $x_0 < \sqrt{2}$, elíjase $\delta < \sqrt{2} - x_0$, entonces para $|x - x_0| < \delta$

tenemos $x < \sqrt{2}$, así $f(x) = 0 = f(x_0)$ y para toda $\varepsilon > 0$, $x \in Q$,

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = 0$

Análogamente, para $x_0 > \sqrt{2}$, elíjase $\delta < \sqrt{x_0} - \sqrt{2}$,

entonces $|x - x_0| < \delta \Rightarrow x > \sqrt{2}$, $f(x) = 1 = f(x_0)$

Para $\varepsilon > 0$, $x \in Q$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = 0$.

A pesar de ser esta una función contínua, su gráfica no puede ser trazada en la proximidad de ningún número racional. (en la figura 1.7 aparece la gráfica idealizada de la función).

(h) C O N C L U S I O N

Las incongruencias observadas entre las definiciones formales y las nociones intuitivas en los conceptos de límite de una función y de continuidad podrían conducirnos -- como ha ocurrido con muchos matemáticos -- a menospreciar el papel que desempeña la intuición en la enseñanza de las matemáticas. Tal cosa, sin embargo, no ocurre aquí, sino -

que por el contrario, nos llevan a tratar de establecer las relaciones que en el pasado y en la actualidad juegan la intuición y el rigor en la enseñanza de estos conceptos.

CAPITULO II

BREVE RESEÑA HISTORICA DE LOS CONCEPTOS DE LIMITE Y CONTINUIDAD

a) EL CONCEPTO DE LIMITE EN LA ANTIGUEDAD GRIEGA

Difícilmente puede sostenerse— como hay quienes lo hacen — que durante este período se haya inventado el cálculo. Sin embargo, es innegable el fuerte impulso que recibieron las ideas y métodos en los conceptos de límite, derivada e integral. Una importante aportación de caracter especulativo lo constituyen las paradojas planteadas por Zenón de Elea en contra de la idea pitagórica de punto como una unidad con posición y en contra también, de la concepción atomista acerca de la divisibilidad infinita del espacio y tiempo. Tales paradojas son las siguientes:

1.- "La Dicotomía.- Antes de que un objeto pueda recorrer una distancia dada, debe recorrer la mitad de esa distancia; antes debe cubrir la mitad de ella, sin embargo, antes debe recorrer un cuarto, y así hasta el infinito, luego el movimiento es imposible puesto que el cuerpo tendría que recorrer un número infinito de divisiones en un tiempo finito".

2.- "Aquiles: Supóngase una tortuga que ha empezado a recorrer una distancia determinada; en el tiempo empleado por Aquiles para alcanzar esta distancia adicional, la tortuga se ha desplazado un poco más; y así hasta el infinito. Puesto que esta serie de distancias es infinita, Aquiles nunca puede alcanzar a la tortuga."

3.- "La Flecha: Cualquier cosa que ocupa un espacio igual a sí misma, está en reposo, pero esto es cierto para la flecha en todo momento de su vuelo, luego la flecha no se mueve."

4.- "El Estado.- El espacio y el tiempo están constituídos de puntos e instantes. Sean dadas tres rectas paralelas bases de puntos A, B y C. Muévase C a la derecha y A hacia la izquierda a la velocidad de un punto por instante, relativos a B, pero entonces cada punto de A se moverá pasados dos puntos de C en un instante, tal que podemos subdividir esto, el intervalo más pequeño de tiempo; y este proceso puede continuarse al infinito, demanera que el tiempo no puede estar hecho de instantes."

Las dos primeras paradojas están basadas en la imposibilidad de concebir intuitivamente el límite de la suma de una serie infinita, en tanto que la paradoja de la flecha que vuela involucra directamente la concepción de la derivada y su respuesta inmediatamente es contestada en términos de esta. El argumento en esta paradoja, como también es la de "El Estado" se encuentra en la suposición de que los intervalos de distancia y tiempo contienen un número infinito de subdivisiones.

Las respuestas que los pensadores griegos dieron a estas paradojas fueron bastante limitadas, debido sobre todo al rechazo a todas las ideas matemáticas que no pudieran captarse intuitivamente. De esta manera Aristóteles rechazó los argumentos en "El Estado" y "La Flecha" por un apego a la percepción sensorial y a la negación de la velocidad instantanea. De la misma manera, Aristóteles resolvió las paradojas de "La Dicotomía" y "Aquiles" por la breve afirmación, sugerida por la esperiencia que aunque uno no puede recorrer un espacio infinito en un tiempo finito, es posible cubrir un espacio infinitamente dividido en un tiempo finito a causa de la divisibilidad infinita del último.[1] Aristóteles, al adoptar la actitud científica inductiva, no fué más allá de lo que es representable en la mente. En consecuencia negó completamente la existencia del infinito actual y restringió el uso del término para indicar su potencialidad solamente.

Esta incapacidad de los matemáticos griegos para dar una respuesta satisfactoria a las paradojas de Zenón, los condujo a renunciar al intento de explicar cuantitativamente los fenómenos de variabilidad y movimiento. Sin embargo, la manera en que le dieron la vuelta al problema de las magnitudes infinitamente pequeñas o infinitesimales, fué mediante el procedimiento atribuido a Eudoxio, aunque algunos lo atribuyen a Arquímedes, conocido como el método de Exhaución o de Agotamiento, el cual establece (según el libro X de Euclides) que

> "Dadas dos magnitudes desiguales (ninguna de ellas iguales a cero, puesto que para los griegos el cero no era un número de magnitud), si de la más grande fuera substrída una magnitud más grande que su mitad, y de la que queda es substraída una magnitud más grande, quedará una magnitud la cual será menor que la más peq ueña magnitud dada."

Expresado en laterminología moderna, este "Principio de Eudoxio" puede expresarse como sigue: "Sean M_o y E dos magnitudes dadas, y sea M_1, M_2,... M_n una sucesión tal que $M_1 < \frac{1}{2} M_o$, $M_2 < \frac{1}{2} M_1$, $M_3 < \frac{1}{2} M_2$, etc. Enconces $M_n < \mathcal{E}$ para alguna n.

---

1 Carl B. Boyer, The History of the Calculus and its Conceptual Development, p. 44

Tal principio de Eudoxio puede ejemplificarse para describir precisamente la manera en la cual el área de una circunferencia puede ser agotada mediante polígonos inscritos:

"Dada una circunferencia C y un número $\mathcal{E} > 0$, existe un polígono regular P inscrito en C tal que: $A(C) - A(P) < \mathcal{E}$

Demostración: empezaremos con un cuadrado P_o = EFGH inscrito en la cimunferencia C, y escribimos $M_o = A(C) - A(P_o)$. Doblando el número de lados, obtenemos un octágono regular P_1 inscrito en C. (Ver figura II.1)

Continuando en esta forma, obtenemos una sucesión $P_o, P_1, P_2, \ldots P_n$, con P_n teniendo 2^{n+2} lados. Escribiendo

$$M_n = A(C) - A(P_n)$$

deseamos demostrar que

$$M_n - M_{n+1} > \frac{1}{2} M_n \qquad (1)$$

Se sigue entonces del principio de Eudoxio que M_n para n suficientemente grande, y habremos concluído.

La demostración de (1) es esencialmente la misma para toda n, de manera que consideramos el caso n = 0 ilustrado en la figura 1, encontes:

$$\begin{aligned} M_o - M_1 &= A(P_1) - A(P_o) \\ &= 4\ A(EFK) \\ &= 2\ A(EFF'E') \\ &> 2\ A(EKF) \\ &= \frac{1}{2}\ 4\ A(EKF) \\ &= \frac{1}{2}\ A(C) - A(P_o) \quad \therefore \end{aligned}$$

$$M_o - M_1 > \frac{1}{2} M_o$$

donde denotamos por EFK el segmento circular cortado en la circunferencia por el lado EF del cuadrado P_o . En el caso general, obtenemos

$$M_n - M_{n+1} = A(P_{n+1}) - A(Pn)$$

$$> \frac{1}{2} A(C) - A(P_n) = \frac{1}{2} M_n$$

donde $A(C) - A(P_n)$ es la suma de las áreas de los 2^{n+1} segmentos circulares cortados por los lados de P_n[2].

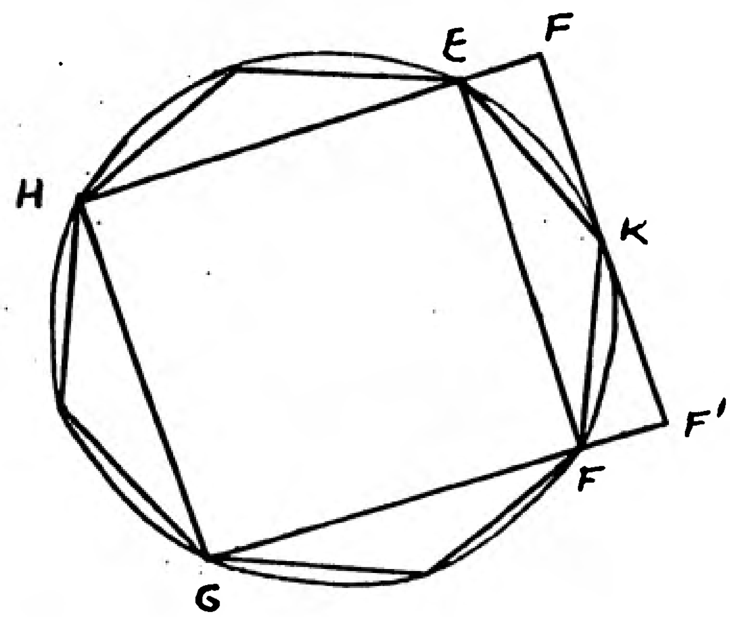

Fig. II.1

En este ejemplo puede palparse claramente la resistencia de los pensadores griegos a considerar explícitamente a la circunferencia como la posición límite de un polígono regular inscrito en ella cuando el número de lados tiende a infinito, si bien es cierto, que estas ideas intuitivas las utilizó Arquímedes como una guía para la resolución de problemas.

La imposibilidad de los pensadores griegos por darle una expresión aritmética a los fenomenos de variabilidad y cambio,

---

2 C.H. Edwards, Jr., The Historical Development of the Calculus, p.p. 17, 18.

se vió compensada por la introducción que hicieron del rigor lógico en las matemáticas, el cual está presente sobre todo en los Elementos de Euclides y en particular en el método de Eudoxio, el cual como se ha visto, aplica en dos ocasiones el razonamiento de reducción al abardo.

Puede decirse que el misterio con el que los griegos atacaron el infinito y el concepto de límite se sintetiza en el principio de Eudoxo. Aristóteles recalcó que los matemáticos no hacen uso de magnitudes infinitamente grandes ni pequeñas, pero se contentan con magnitudes que pueden hacerse tan grandes o tan pequeñas como se quiera. [3]

b) EL CONCEPTO DE LIMITE DURANTE EL SIGLO PRECEDENTE A NEWTON

Durante el siglo que precedió a Newton y Lebniz, el método de exhayción fué refinado y aplicado por numerosos matemáticos a una amplia variedad de nuevos problemas sobre cuadratura, cubatura y rectificación. Aún cuando se siguió considerando al método arquimediano como el modelo de rigor y precisión, hubo más interés en nuevos resultados y métodos de rápido descubrimiento. Así, el método de los indivisibles de Cavalieri fué considerado por él mismo:

> "...sólamente como un mecanismo geométrico practico para evitar el método de exhaución; las bases lógicas de su procedimiento no le interesaron. El rigor, decía, es asunto de la filosofía más que de la geometría."[4]

Esta circunstancia motivó que los geómetras de la época fueran cautos paraaceptar el método de los indivisibles como válido en las demostraciones. El punto de vista común del

---

3 C. H. Edwards, Jr., Ob. cit. pp. 27, 28.
4 Boyer, ob. cit. p. 123

período fué expresado en 1657 por Huygens como sigue:

"...Para lograr la confianza de los expertos no es de gran interés si damos una demostración absoluta o tal fundamento de él, que después de haber visto si ellos no dudan que una demostración perfecta puede ser dada. Yo de buena gana admito lo que se parezca en su forma clara, elegante e ingeniosa, a los trabajos de Arquímedes. Pero la primera y más importante cosa es el modo de descubrimiento mismo, con el cual los hombres de saber, se deleitan en conocer. De aquí parece que nosotros debemos antes que nada seguir aquel método por el cual esto puede ser entendido y presentado más concisa y claramente. Entonces nos ahorramos a nosotros mismos de la tarea de escribir, y a otros de la de leer —aquellos otros que no tienen tiempo de tomar nota de la enorme cantidad de invenciones geométricas que aumentan día a día y en este instruído siglo parecen aumentar más allá de todo límite si ellos deben usar el prolijo y perfecto método de los antiguos."[5]

Esta amalgama entre los problemas planteados por Arquímedes y las técnicas algebraicas con los conceptos del infinito manejados intuitivamente dieron lugar a una profusión de métodos infinitesimales.

(C) EL CONCEPTO DE LIMITE EN NEWTON Y LEIBNIZ

A Newton y Leibniz se les considera los inventores del cálculo en el sentido de que dieron a los procedimientos in-

---

5 Struik D. J., A Source Book in Mathematics, p. 189

finitesimales de sus predecesores la unidad algorítmica y precisión necesaria para nuevos desarrollos.

La constante meta de Leibniz fué laformulación de métodos generales y algorítmos que sirvieran para unificar el tratamiento de diversos problemas. Los métodos generales están ciertamente implícitos en el trabajo de Newton, pero su gran entusiasmo por la solución de problemas particulares es evidente. La diferencia es más que nada de énfasis-Leibniz enfatiza las técnicas generales que pueden ser aplicadas a problemas específicos, mientras que Newton enfatiza en resultados concretos que puedan ser generalizados.

Por lo que respecta al límite de una función, Newton lo hace por vez primera explícito al intentar definir este concepto en el Lema I del Libro I de los Principia Mathematica:

> "...Cantidades, y las razones de cantidades, las cuales en cualquier tiempo finito convergen contínuamente a la igualdad, y antes del fin del tiempo se aproximan más cerca a cada otra que por cualquier diferencia dada, llegan a ser finalmente iguales."[6]

En moderna notación, diríamos que si dada $\varepsilon > 0$, se sigue que f(x) y g(x) difieren por menos que ε para toda x suficientemente cercano a x_0, entonces:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$$

En los trabajos de Newton están presentes los procedimientos esenciales del cálculo, aún cuando su justificación no es clara de acuerdo a laexplicación que él dió. Sus contribuciones fueron dirigidas a facilitar las operaciones

---

6 C.H. Edwards, Ob. cit. p. 14

más que a aclarar los conceptos. Como Newton mismo admitió en su trabajo "de analysi per aequationes numero terminorum infinitas" :

> "...Mi método es brevemente explicado más que demostrado con exactitud."

En otro de sus libros "Methodus fluxionum et sirierum infinitarum", Newton introdujo sus concepciones y notación característica. Aquí el consideró sus cantidades variables como generadas por el movimiento continuo de puntos, líneas y planos, más que como conjuntos infinitos. Para resumir, Newton tuvo en mente las cantidades infinitamente pequeñas que no son finitas ni aún precisamente cero, "fantasmas de cantidades pasadas", como fueron llamadas apropiadamente por los críticos del método del siguiente siglo , así Newton enfocó su atención en su razón, que en general es un número finito. Conociendo esta razón, se puede ahora sustituir por las cantidades infinitesimales que la forman cualquier otra magnitud finita concebida que tenga la misma razón, tales como aquellas cantidades que son pensadas como las velocidades o fluxiones de aquellas que entran en la ecuación.[7]

Por lo que respecta a Leibniz, es particularmente notable su invento de notación que captó la esencia de su cálculo, hasta hacer notación y concepto virtualmente inseparables.

La tradición matemática generalmente atribuye a Leibniz una creencia en laexistencia de cantidades infinitesimales. Veamos lo que al respecto dice en un manuscrito elaborado poco después de 1700:

---

7 Boyer, Carl, Ob. cit. p. 200

"...Si las extensiones (cantidades) infinitas sucesivamente más grandes y más grandes, o extensiones infinitamente pequeñas sucesivamente más pequeñas y más pequeñas, son consideraciones legítimas, es un tema que yo mismo posiblemente abriría la cuestión; pero para quien discutiera estos temas, no es necesario caer en controversias metafísicas, tales como las composición del continuo, o hacer depender de eso los temas geométricos... Será suficiente si, cuando hablamos de infinitamente grandes (o más estrictamente ilimitados) o de cantidades infinitamente pequeñas (es decir, las más pequeñas de las que podemos concebir), se entiende que nos referimos a cantidades que son infinitamente grandes o infinitamente pequeñas, es decir, tan grandes como usted quiera, o tan pequeñas como usted quiera, tal que el error que cualquiera pueda asignar puede hacerse menor que una cierta cantidad asignada. También, puesto que en general parecerá que, cuando cualquier error es asignado, puede demostrarse que debe ser menor, se sigue que el error es absolutamente nada... Si cualquiera desea entender esto (el infinitamente grande y el infinitamente pequeño) como las cosas últimas, o como realmente infinitas, puede hacerse, y esto también sin caer en una controversia acerca de larealidad de extensiones, o del continuo infinito en general, o de los infinitamente pequeños, aún cuando él piense que tales cosas son absolutamente imposibles; será suficiente hacer uso simplemente de ellos como una herramienta que tiene ventajas para los fines de los cálculos, tal como los algebristas retienen las raíces imaginarias con gran beneficio. Para ellos contiene un medio práctico de cálculo, como puede ser claramente verificado en cualquier caso de manera rigurosa por el método ya establecido."[8]

Para Leibniz, las diferenciales separadas dx y dy son fundamentales; su razón dy/dx es meramente un cociente con significado geométrico. Para Newton, sin embargo, especialmente en su último trabajo, la derivada misma — como una razón de fluxiones o como una "razón última de cantidades evanescentes" —, es el meollo del asunto.

A falta de definiciones precisas, Leibniz recurrió a las analogías para aclarar la naturaleza de losdiferenciales infinitamente pequeños, haciendo uso de las imágenes de Newton y hablar de las diferenciales como los incrementos o decrementos momentáneos de cantidades. En un estilo menos crítico él dice que:

"La diferencial de una cantidad puede ser pensada como sosteniendo con la cantidad misma, una relación análoga a aquella de un punto de la tierra o del radio de la tierra a aquella del cielo."

d) MAS CONTRIBUCIONES AL CONCEPTO DE LIMITE

Durante el período comprendido entre Newton y Leibniz y principios del siglo dieciocho, losconceptos de "razón primera y última", de "cantidades evanescentes" y de fluxiones", así como los de "infinitestimales", fueron sometidos a dura crítica por los matemáticos de la época.

Un crítico de Newton, Robins, se dió cuenta que la can-

8 Edwards, C.H., Ob. cit. pp. 264, 265

tidad variable no necesita ser considerada de tal manera que finalmente alcance la cantidad fija como su último valor, observación que a su vez fué objeto de variadas críticas motivadas por la confusión entre el concepto numérico de límite y su representación geométrica, a lo que hay que agregar la carencia de la idea formal de función.

Mientras en Inglaterra hubo latendencia a unir el cálculo con las concepciones intuitivas de lageometría, en el continente la tendencia creciente fué para vincular el cálculo con el concepto formal de función, siendo en este punto sobresalientes las aportaciones de Euler, quien aplicó los métodos infinitesimales no solamente a las funciones algebraicas, sino también a las funciones exponenciales y logarítimicas. Son dignas de mencionarse también los intentos de D'Alembert por definir la derivada como el límite de un cociente de incrementos en la manera sugerida pero no establecida por Newton, afirmando que el método de las fluxiones debía encontrarse en la idea de límite:

> "...La diferenciación de ecuaciones consiste simplemente en encontrar los límites de la razón de diferencias finitas de las dos variables incluídas en la ecuación."[9]

En otras palabras, D'Alembert concibió a la derivada como $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, de acuerdo con la notación actual.

Debido a su ideología geométrica, las elaboraciones de D'Alembert sobre el concepto de límite carecieron de claridad en la fraseología necesaria para hacerlo aceptable como un sustituto para las interpretaciones infinitestimales. De esta manera cuando él concibe a la tangente como el límite de la

---

9 Boyer, Carl, Ob. cit. p. 247

secante, impone la necesidad de visualizar el proceso mediante el cual dos puntos llegan a confundirse en uno solo y dejando, de esta manera, la puerta abierta para las críticas de Zenón.

En su Théorie des Fonctions Analytiques, publicado en 1797, Lagrange, otra de las grandes figuras del siglo dieciocho, presentó un desarrollo comprensivo del cálculo encaminado a eliminar toda referencia a diferenciales, infinitesimales y el concepto de límite de la materia, es decir, toda idea que él calificó como "metafísica del cálculo". Sin embargo, su libro sobre cálculo incluye varias contribuciones en las que está presente la idea de límite. Por ejemplo, el término residual para la fórmula de Taylor hace su primera aparición en el capítulo VII.

En vista de la carencia de claridad y uniformidad de las entonces exposiciones corrientes del cálculo, Carnot trató de hacer la teoría rígidamente precisa. Sostuvo que para que sea cierto que dos cantidades sean rigurosamente iguales, es suficiente demostrar que su diferencia no puede ser una cantidad asignada. Dijo, parafraseando a Leibniz:

"...por toda cantidad se puede sustituir otra que difiera con ella por un infinitesimal."[10]

Más aún, refiriéndose al método de los infinitesimales:

"...las cantidades inapreciables, son meros auxiliares, de manera semejante a los números imaginarios, introducidos sólamente para facilitar los cálculos, siendo eliminados el alcanzar el resultado final."[11]

En resumen, el siglo dieciocho se caracterizó por ser

---

10 Boyer, Carl, Ob. cit. p. 258
11 Ibid, p. 258

un período de consolidación y explotación de los grandes descubrimientos del siglo precedente, y de su aplicación a la investigación de problemas científicos.

e) EL SIGLO XIX Y LA FORMULACION RIGUROSA DEL CONCEPTO DE LIMITE

Cauchy, quien es considerado por muchos como el fundador del rigor en las matemáticas, estableció como Bolzano, el concepto de límite de una sucesión en forma clara y definidamente aritmética, más que geométrica en su obra "Cours d' analyse" :

> "...Cuando los valores sucesivos atribuidos a una variable se aproxima indefinidamente a un valor fijo, así hasta el final, difiriendo de él tan poco como se desee, este último es llamado el límite de los otros."[12]

Como puede verse, esta definición recurre más a las nociones de número, variable y función, que a intuiciones geométricas o dinámicas. Para ilustrar este concepto, Cauchy citó el ejemplo de que todo número irracional es el límite de una sucesión de números racionales. Sobre la base de esta definición Cauchy procedió a definir el escurridizo término de infinitesimal en sus "Euvres (2), III, 19":

> "... Se dice que una cantidad variable llega a ser infinitamente pequeña cuando su valor numérico decrece indefinidamente en tal forma que converge hacia el límite cero."[13]

En sus trabajos, Cauchy sentó las bases de la teoría de la convergencia y divergencia de las series infinitas, entre

---

12 Boyer, Carl , Ob. cit. p. 272

13 Ibid, p. 273

otras cosas, al establecer la siguiente definición:

"...Se dice que la serie converge a cierto límite S, si para valores crecientes de n, la suma S_n se aproxima a S."[14]

De esta manera, quedaban resueltas definitivamente las paradojas de "Aquiles" y "La Flecha" de Zenón. Cauchy intentó demostrar además, el teorema que más tarde llevó su nombre y cuyo enunciado es el siguiente:

"...Una condición necesaria y suficiente para que una sucesión converja a un límite S, es que para todo número real $\varepsilon > 0$, $|S_p - S_q| < \varepsilon$ para p y $q > n$ y n suficientemente grande."

La necesidad de la condición se sigue inmediatamente, pero la suficiencia requiere unadefinición previa del sistema de los números reales. En particular, es indispensable una definición de los números irracionales.

Sin embargo, Cauchy había afirmado antes en sus "Cours D'analyse" que los números irracionales se pueden considerar como límites de sucesiones de números racionales, con lo cual y de acuerdo a su definición de sucesión convergente, no se podría definir $\sqrt{2}$ como el límite de la sucesión 1, 1.4, 1.41, 1.414,... porque para demostrar que esta sucesión tiene un límite, se debe suponer, en vista de las definiciones de límite y convergencia, la existencia de este número como previamente demostrado o definido. Cauchy parece no haberse percatado de la circularidad de su razonamiento, aún cuando supuso que toda sucesión convergente dentro de sí misma tenía un límite. Este hecho sería el que más tarde llevaría a matemáticos de la segun

---

14 Boyer, Carl, Ob. cit. p. 281
14 Boyer, Carl, Ob. cit. p. 281

da mitad del siglo diecinueve a tratar de formular definiciones de los números irracionales que no dependieran de la definición de límite.

Aún cuando fué Cauchy quien dió a los conceptos del cálculo su forma general presente, basada en el concepto de límite, la última palabra en rigor no fué dicha por él, pues fué Karl Weierstrass quien construyó las bases aritméticas puramente formales para el cálculo. Weierstrass quiso establecer el cálculo sobre el concepto de número solamente, separándolo completamente de la geometría, para lo cual realizó investigaciones acerca de los principios de la aritmética y en particular de los números irracionales, obteniendo una definición de estos independientemente de la idea de límite, superando así el círculo vicioso de Cauchy.

Weierstrass criticó también el apego por Cauchy a las ideas intuitivas de movimiento cuando habla de que "una variable se aproxima a un límite", definiéndola en términos puramente estáticos como sigue:

> "...El número L es el límite de la variable o función $f(x)$ para $x = x_0$ si, dado cualquier número $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, puede encontrarse otro número δ, tal que para todos los valores de x que difieran de x_0 en menos que δ, los valores de $f(x)$ diferirán de L por menos que ε."[15]

Por vez primera en la definición de este concepto, la idea de movimiento se encuentra totalmente ausente, de la misma manera que no se haya referencia alguna a los infinitesimales o infinitamente pequeños. Aquí se ve con toda claridad

---

15 Boyer, Carl, Ob. cit., p. 287

que ladiscusión de sí la variable o función que se aproxima a su límite, llega o no a alcanzalo, carece de significado. Más aún, Weierstrass aclara que una variable no denota un paso progresivo a través de todos los valores de un intervalo, sino la suposición de cualquiera de los valores en el intervalo.

Charles Méray en su artículo "Nouveau précis d'analyse infinitésimale" publicado en 1872, rechaza la definición de Cauchy de convergencia de una sucesión en términos del límite S y la enuncia de la siguiente manera:

> "...S_n es convergente si para todo real positivo ε, existe un entero N tal que para $n > N$ y para cualquier valor entero p mayor que el entero n, la desigualdad $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ es válida."[16]

Es decir, Méray establece la convergencia de una sucesión en términos de sus relaciones internas, cuando afirma que un número racional o irracional está "determinado" por el límite de la sucesión convergente de números racionales.

Más tarde Cantor en forma más aguda, diría que la sucesión S_n convergente de números racionales "define" un número racional o irracional. El enfoque de Cantor estaba basado en la idea de un número real como el límite de una sucesión (S_n) de números racionales. En este caso (S_n) será una sucesión fundamental que satisface la condición de Cauchy sobre convergencia, es decir que $S_m - S_n$ tiende a 0 cuando $m, n \to \infty$. Cantor identifica el número real con esta sucesión fundamental de números racionales. Sin embargo, dos sucesiones fundamentales

16 Boyer, Carl, Ob. cit., p. 289

(S_n) y (T_n) tendrán el mismo límite si $\lim_{n\to\infty} (S_n - T_n) = 0$ en cuyo caso estas dos sucesiones serán convergentes. En lenguaje moderno, la construcción de Cantor equivale a definir el conjunto de números reales como el conjunto de clases de equivalencia de sucesiones fundamentales de números racionales.

Otro intento hecho en esta dirección fué hecho por Dedekind, quien lo explica de la siguiente manera:

> "...Como profesor en la Escuela Politécnica de Zürich me encontré al principio obligado a dar clases sobre los elementos del cálculo diferencial y sentí más vivamente que nunca antes la carencia de una verdadera fundamentación científica para la aritmética. Al discutir la noción de la aproximación de una magnitud variable a un valor fijo como límite, y especialmente al probar el teorema que toda magnitud que aumenta continuamente, pero no más allá de todo límite, debe ciertamente aproximarse a un valor límite,he tenido que recurrir a evidencias geométricas. Aún ahora tal recurso a la intuición geométrica en una primera presentación del cálculo diferencial, la considero extremadamente útil, desde el punto de vista didáctico, y verdaderamente indispensable, si uno no desea perder mucho tiempo. Pero esta forma de introducción en el cálculo diferencial no se puede pretender que sea científica y nadie lo negará. Para mí este sentimiento de insatisfacción fué tan poderoso que decidí mantener meditaciones sobre la cuestión hasta que encontré una fundamentación puramente aritmética y perfectamente rigurosa sobre los principios del análisis infinitesimal."[17]

La idea de Dedekind, a diferencia de Cantor, Méray y

17 Dedekind, Richard, Essays on the Theory of Numbers, pp. 1,2

Weierstrass, quienes se preocuparon por definir los irracionales eludiendo el círculo vicioso de Cauchy, consistió en analizar la naturaleza misma del continuo de los números reales, observando que en cualquier división de los puntos de la recta numérica en dos clases tales que todo punto de una de ellas está a la izquierda de todo punto de la otra, hay uno y solo un punto que produce la división. Esto no es cierto para los sistemas ordenados de números racionales. Siendo esta larazón por la cual los puntos de una recta constituyen un continuo, pero los números racionales no. Esta idea queda redondeada con el axioma de Cantor-Dedekind que establece la existencia de una correspondencia biunívoca entre los puntos de una recta y los números reales.

De esta manera, los teoremas fundamentales sobre límites pueden demostrarse sin recurrir a la geometría, basándose sólamente sobre la nueva definición de Dedekind de los números reales.

f) EL CONCEPTO DE CONTINUIDAD EN EL SIGLO XVIII

A diferencia del concepto de límite, cuya primera definición la dá Newton, con el concepto de continuidad tiene que llegar el siglo dieciocho, a principios del cual se conocen ya varias propiedades del continuo numérico y la moderna definición de función, que se emprende la tarea de definirla. Sin embargo, la idea que entonces se tiene acerca de dicho concepto no coincide con la que más tarde formularían Bolzano, Cauchy y Weierstrass, por cuanto, como lo expresara Euler:

"...Una función continua, es una función cuya gráfica se puede trazar con un movimiento libre de la mano y tal que su expresión analítica se haya sujeta a una ley de continuidad."[18]

En otras palabras, todas las funciones continuas de acuerdo a la definición de Euler son continuas conforme a la moderna concepción de continuidad.

La moderna idea geométrica de una función continua es establecida hasta 1791 por Arbogast, quien establece que para que una función sea continua basta con que su gráfica pueda trazarse libremente con la mano. Es probablemente el mismo Arbogast quien pese a no lograr darle una formulación aritmética al concepto de continuidad, si consigue establecer un puente entre su idea geométrica con la moderna formulación aritmética de continuidad:

> "...La Ley de continuidad consiste en que una cantidad no puede pasar de un estado a otro sin pasar a través de todos los estados intermedios que se encuentran sujetos a la misma ley. Las funciones algebraicas son consideradas continuas porque los diferentes valores de estas funciones dependen en la misma manera sobre las de la variable; y, suponiendo que la variable aumente continuamente, la función recibirá variaciones correspondientes; pero no pasará de un valor a otro sin haber pasado a través de todos los valores intermedios. De este modo, la ordenada de una curva algebraica, cuando la abscisa x varía, no puede pasar bruscamente de un valor a otro; no puede ser un salto de una ordenada a otra que difiera de él por una cantidad asignable; pero todos los valores sucesivos de y deben estar unidos por una y la misma ley que hace las extremidades de estas ordenadas confeccionar una curva regular y continua."[19]

---

19 Edwards, C.H. Ob. cit., p. 303

g) LA FORMULACION MODERNA DEL CONCEPTO DE CONTINUIDAD

Bernard Bolzano en 1817 formula la definición moderna del concepto de continuidad, argumentando que las demostraciones geométricas intuitivas — una curva continua debe cruzar en algún punto toda línea recta que separa sus extremos — están basadas en ideas inadecuadas de continuidad. Como alternativa, él propone el significado de la frase:

> "...Una función $f(x)$ varía conforme a la ley de continuidad para todos los valores de x que están fuera o dentro de ciertos límites, no es otra cosa que esto: Si x es cualquier valor, la diferencia $f(x + \ ) - f(x)$ puede ser hecha tan pequeña que cualquier cantidad dada, si se hace w tan pequeña como uno quiera."[20]

De hecho las formulaciones de Bolzano y Cauchy sobre el concepto de continuidad, bordan sobre la misma definición de Arbogast y le dan una mayor precisión. Veamos lo que dice Cauchy:

> "...La función $f(x)$ será, entre los dos límites (extremos) asignados a la variable x, una función continua, si para cada valor de x intermedio entre estos límites, el valor numérico de la diferencia $f(x + \omega) - f(x)$ decrece indefinidamente con aquel de ω. En otras palabras, la función $f(x)$, permanecerá contínua con respecto a x entre los límites dados, si, entre estos límites un incremento infinitamente pequeño de la variable siempre produce un incremento infinitamente pequeño de la función misma."[21]

No obstante las notables aportaciones de Cauchy para establecer el rigor en los conceptos del cálculo, su intuición

---

20 Edwards, C.H. Ob. cit. p. 308

21 Cauchy, Cours de analyse, p. 43

geométrica lo llevó a la creencia que la continuidad de una función era suficiente para representarla geométricamente y para la existencia de su derivada, correspondiendo el mérito de probar la falsedad de tal afirmación a Weierstrass, aún cuando ya antes Bolzano lo hubiera también demostrado, pero sin que hubiera sido dada a conocer.

La demostración de Weierstrass consistió en exhibir la función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$, donde x es una variable real, a un entero impar, y b es una constante positiva menor que la unidad y tal que $ab > 1 + \frac{3}{2}$, Esta serie infinita converge uniformemente en la recta real, de manera que es continua dondequiera. Sin embargo, resulta que dado cualquier número positivo M, existen puntos x_1 y x_2 arbitrariamente cercanos a x_0 tales que

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} > M, \text{ mientras que } \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} < -M,$$

de lo cual obviamente se sigue que f no es diferenciable en x_0.

De una manera similar a Bolzano y Cauchy, Weierstrass definió la continuidad de una función, aunque con mayor claridad y precisión, de la siguiente manera:

> "...f(x) es continua dentro de ciertos límites de x, si para cualquier valor x_0 en este intervalo y para un número positivo ε arbitrariamente pequeño, es posible encontrar un intervalo alrededor de x_0 tal que para todos los valores en este intervalo la diferencia $f(x) - f(x_0)$ es en valor absoluto menor que ε ."[22]

22 Boyer, Carl, Ob. cit. p. 287

h) EVOLUCION DEL CONCEPTO DE INFINITO

La evolución del concepto de infinito se haya íntimamente asociada a la del concepto de límite, en tanto que este último puede ser visualizado como un proceso infinito. No es casual por tal motivo, que la incapacidad de los pensadores griegos para dar respuestas satisfactorias a las paradojas de Zenón, haya coincidido con sus apreciaciones acerca del infinito:

> "...Aristóteles, al adoptar laactitud científica inductiva, no fué más allá de lo que es representable en la mente. En consecuencia negó completamente la existencia del infinito actual y restringió el uso del término para indicar su potencialidad solamente."[23]

Durante el período medieval prosiguieron las especulaciones acerca del infinito. De esta manera, mientras Aristóteles distinguió dos clases de infinito, la existencia del infinito actual fué categóricamente negado y el potencial ha sido admitido como concretado únicamente en casos de magnitudes continuas infinitamente pequeñas y de números infinitamente grandes. Las discusiones escolásticas del siglo catorce estuvieron referidas con frecuencia al infinito como una potencialidad y como una actualidad, invocando una subdivisión del intervalo de tiempo infinito para obtener el equivalente de una serie infinita. De hecho los filósofos escolásticos no resolvieron las paradojas de Zenón en el sentido de aclarar de qué manera a una serie infinita se le puede atribuir una suma, debido a que estuvieron interesados más en magnitudes infinitas

23 Boyer, Carl, Ob. cit. p. 40

que en series infinitas.

La amalgama entre los problemas planteados por Arquímedes y las técnicas algebraicas con los conceptos del infinito manejados intuitivamente dieron lugar a una profusión de métodos infinitesimales durante el siglo que antecedió a Newton y Leibniz.

Respecto a las ideas que tuvo Leibniz acerca del infinito, pueden ilustrarse con lo que decía en su libro Théodicee acerca del infinito y de los infinitamente pequeños:

"...pero todo aquello es nada sino ficciones; todo número es finito y asignable, como es toda línea análogamente."[24]

No obstante, años más tarde, decía:

"...mientras tanto, concebimos los infinitamente pequeños no como un simple y absoluto cero, sino como un cero relativo, esto es, como una cantidad evanescente que aún retiene el caracter de aquella que desapareció."[25]

Las críticas que recibieron los métodos británicos de fluxiones como también el método de las diferenciales usados en el continente por parte de Berkeley, se apoyaron en la "inconcebible" idea de velocidad instantánea, debido a que para él, las matemáticas eran inseparables del mundo de las impresiones sensoriales "reales". De manera semejante consideró a los indivisibles de Cavalieri como finitos en número, ya que la divisibilidad hasta el infinito le pareció poco menos que una ficción.

Durante el príodo del rigor en el cálculo, es Bolzano quien dá cuenta que finalmente cualquier contínuo podría pensarse como compuesto de puntos. Su punto de vista a este res

---

24 Boyer, Carl, Ob. cit. p. 218
25 Ibid., p. 218, 219

pecto semeja al de Galileo, a quien se refirió en esta dirección. Aunque él negó la existencia de las magnitudes infinitamente grandes e infinitamente pequeñas, él mantuvo, con Galileo, la posibilidad de un infinito actual con respecto a colecciones. El insistió, con respecto a tales agregados, la paradoja que Galileo puntualizó:

> "...la parte puede en este caso ser puesta en correspondencia biunívoca con el total."[26]

La teoría matemática sobre el continuo está basada, como se ha visto en la teoría de Dedekind sobre los números reales y en los conjuntos infinitos de puntos. Es Dedekind quien enuncia de manera precisa la definición de conjunto infinito:

> "...Un sistema S se dice que es infinito cuando es similar a una parte propia de él mismo; en caso contrario se dice que S es un sistema finito."[27]

Cantor, quien coincide con la definición de Dedekind, introduce una mayor precisión aún al establecer la diferencia entre un conjunto infinito de números enteros y una magnitud infinita. En su celebrada obra "Gesammelte Abhandlungen", Cantor se refiere no al infinito potencial de Aristóteles, sino al infinito categórico de la filosofía medieval.

i) C O N C L U S I O N E S

De la reseña histórica que hemos hecho sobre los conceptos de límite, continuidad e infinito, podemos desprender las siguientes conclusiones:

1.- Que las ideas intuitivas de movimiento se hayan íntimamente ligadas al período griego en que a las matemáticas se

26 Ibid, p. 270
27 Dedekind, Essays on the Theory of Numbers, p.63

les consideraba como una rama de laciencia empírica o de la filosofía trascendental, siendo este el motivo por el cual se excluyeron de ella las ideas de infinito actual y de los infinitesimales, aduciéndose una supuesta incongruencia con el mundo de la naturaleza y por haberse demostrado su inconsistencia lógica. Aún el método de exhaución, inventado para resolver algebraica y geométricamente problemas infinitesimales, se haya caracterizado por esta tendencia.

2.- Durante el período medieval los conceptos de infinito y del continuo, fueron enfocados desde un punto de vista filosófico más que matemático, introduciéndose la idea de movimiento para salvar las dificultades de continuo e infinito. Esta tendencia seguida por algunos matemáticos no impidió que otros matemáticos como Galileo y Kepler siguieran el punto de vista platónico del trascendentalismo racional.

3.- El siglo dieciseis se caracteriza porque durante el, los matemáticos estuvieron más interesados por la obtención de resultados novedosos más que por su fundamentación rigurosa, empleando métodos, igualmente poco rigurosos, como el de los indivisibles de Cavalieri.

4.- Después de Newton y Leibniz y durante todo el siglo diecisiete los métodos infinitesimales fueron empleados con cautela debido a las imprecisiones que se pusieron de manifiesto en las variadas críticas de que fueron objeto.

Con el siglo dieciocho se inicia un período de consolidación de los poderosos métodos infinitesimales, entendiéndose lafundamentación de los conceptos del cálculo no en el sentido de su consistencia lógica, sino de su explicación intuitivamente plausible, aún cuando se dan serios intentos como los de Euler y Lagrange por darles una formulación formal en términos algebraicos.

5.- Es finalmente hasta el siglo diecinueve que los conceptos del continuo y del infinito, así como los de límite y continuidad alcanzan su formulación rigurosa en términos puramente aritméticos, siendo los dos últimos expresados también en términos del concepto de función.
Por vez primera se consigue eliminar de todos estos conceptos toda referencia a la idea intuitiva de movimiento o geométrica. Las teorías de Cantor sobre los conjuntos infinitos y de Dedekind sobre la construcción de los números reales se les reconoce como creaciones de la mente humana y su fundamentación equivale a su consistencia lógica.

6.- La tendencia hacia la formalización, con el siglo diecinueve como su principal punto de referencia, ha encontrado, sin embargo, oposición desde el tiempo de Newton y Leibniz. El punto de vista de estos opositores al formalismo, los intuicionistas, es de que por ejemplo, en el cálculo las definiciones formales acerca de los números reales deben desecharse y definirlos alternativamente, como implícitamente lo hace Cauchy y reteniendo de esta manera la intuición como guía.

7.- En el desarrollo de los conceptos del cálculo, la intuición física y/o geométrica y el rigor lógico, han marchado paralelamente. Algunas veces como en el período medieval, la invención de técnicas y formulaciones infinitesimales, siendo frenadas por el rigor de los griegos.
En otras ocasiones, como en el caso de Arquímedes, impulsando y motivando la intuición física de movimiento la

resolución de problemas infinitesimales mediante el riguroso método de exhaución. Más todavía, los métodos infinitesimales se consolidan en el siglo dieciocho cuando se relega a un segundo término la demostración rigurosa de los resultados obtenidos.

8. El desarrollo de los conceptos del cálculo no ha sido siempre ascendente, puesto que ha habido períodos de indecisión e incluso de retroceso. Aún en pleno período de rigor en el cálculo, la exposición de Cauchy sobre límites, como se ha visto, no fué del todo rigurosa.

9. El proceso mediante el cual Weierstrass llega a la definición formal de límite de una función no está suficientemente aclarado, pues desde la definición que propone Newton, solo se haya la aplicación de tal concepto por D'Alembert y Cauchy al definir laderivada de una función. En consecuencia, el desarrollo histórico de tal concepto puede seguirse sólo de manera fragmentaria, sin quedar establecido con precisión, de que manera se dá el salto de lo intuitivo a lo formal.

CAPITULO III

OTROS ELEMENTOS NECESARIOS

a) LA CONSTRUCCION DE LOS NUMEROS REALES

La importancia de una construcción precisa de los números reales en los conceptos del cálculo ha quedado de manifiesto en las visicitudes de Cauchy para definir el límite de una sucesión. Veamos lo que dice Dedekind al respecto:

> "...La afirmación tan frecuentemente hecha acerca de que el cálculo diferencial trata con magnitudes continuas, y aún una explicación de esta continuidad no ha sido dada; aún las más rigurosas exposiciones del cálculo diferencial no basan sus demostraciones en la continuidad, sino con más o menos conciencia del hecho, ellos recurren a nociones geométricas o aquellas sugeridas por la geometría, o bien dependen en teoremas nunca establecidos de una manera puramente aritmética. Entre estos, por ejemplo, se encuentra el teorema arriba mencionado (toda sucesión creciente de números reales acotada superiormente, converge a un límite) y una más cuidadosa investigación me convenció que este teorema, o cualquiera equivalente a él, puede ser considerado en algún aspecto como una base suficiente para el cálculo infinitesimal. Ha faltado solamente descrubrir su verdadero origen en los elementos de la aritmética y de este modo al mismo tiempo garantizar una verdadera definición de la esencia de la continuidad."[28]

Estos hechos explican el por qué de la descripción y los comentarios de las construcciones de los números reales que se hacen en este capítulo.

---

28 Dedekind, Essays on the Theory of Numbers, p. 2

Desde que Dedekind estableció la fundación puramente aritmética de los números reales hasta nuestros días, en los cursos de cálculo se ha impuesto progresivamente la tendencia de iniciarlos con un tratamiento más o menos detallado de la construcción de los números reales bien sea mediante el método de las cortaduras de Dedekind, o bien mediante encajes de intervalosde números racionales. Por cualquiera de las dos vías puede llegarse a demostrar la propiedad de que los números reales constituyen un sistema completo, en el sentido de que toda sucesión de números reales, creciente y acotada superiormente, es convergente. La demostrable afirmación de Dedekind en el sentido de que esta propiedad o cualquiera otra equivalente ofrece una base suficiente para el cálculo infinitesimal, nos permite enfocar ahora nuestra atención en algunos aspectos didácticos de ambas construcciones, considerando como un caso particular de la construcción mediante encajes de intervalos racionales, la expansión decimal de los números reales.

b) EL METODO DE LAS CORTADURAS DE DEDEKIND

Por lo que respecta a la construcción de Dedekind, hay que hacer laobservación de que su rigurosa formulación puede interpretarse en términos geométricos y por tanto, hacerse más asequible su comprensión. En efecto, el Teorema Fundamental de Cortaduras establece:

"Si A y B son dos conjuntos ajenos, no vacíos, cuya unión es el conjunto de los números reales y además son tales que $x \quad y$ para todos $x \in A$ y $y \in B$, entonces existe

un y sólo un número real z tal que $x \leq z$ para toda $x \in A$, y $z \leq y$ para toda $y \in B$."

La interpretación geométrica de este hecho (fig III.1) es bastante clara si postulamos la existencia de una correspondencia biunívoca entre los puntos de una recta y el conjunto de los números reales. En tal caso existirá un punto único sobre la recta perteneciendo a uno y sólo uno de los

Fig. III.1

dos conjuntos A y B, que "separe" a dichos conjuntos que satisfacen la hipótesis del teorema. En otras palabras, no existe "hueco" alguno en el corte realizado. En cambio, si se considera el conjunto de números racionales A menores que el número $\sqrt{2}$ y el conjunto B de números racionales mayores que $\sqrt{2}$, puede verse que estos conjuntos tienen la propiedad de ser no vacíos, además su unión es todo el conjunto de números racionales y también satisfacen la condición de que $x < y$ para todos $x \in A$, y $y \in B$. Sin embargo, no existe número racional alguno que "separe" los dos conjuntos A y B debido al hecho de que $\sqrt{2}$ es un número irracional. En caso de existir un número racional r en el corte, necesariamente $r < \sqrt{2}$ o bien $r > \sqrt{2}$ ya que $\sqrt{2}$ es irracional. Suponiendo que r estuviera en A, entonces $r^2 < 2$. Eligiendo un racional h tal que $0 < h < 1$, y tal que

$h < \dfrac{2 - p^2}{2p + 1}$ y haciendo $p = r + h$, se tiene que $p < r$,

además $p^2 = r^2 + (2r + h)h < r^2 + (2r + 1)h < r^2 + (2 - p^2) = 2$

Por lo tanto r no es mayor que todos los elementos de A, contradiciendo la suposición de que r estaba en el corte.

El tratamiento que se le dá al caso de que r estuviera en B es semejante, pues ahora $r > \sqrt{2}$, luego $r^2 > 2$. Haciendo $p = r - \frac{r^2 - 2}{2r} = \frac{r}{2} + \frac{1}{r}$, resulta que $0 < p < r$, y

$$p^2 = r^2 - (r^2 - 2) + \left(\frac{r^2 - 2}{2r}\right)^2 > r^2 - (r^2 - 2) = 2$$

Por lo tanto r no es menor que todos los elementos de B, contradiciéndose nuevamente la suposición de que r estaba en el corte.

Esta comprobación necesariamente aritmética del hecho de que no existe un número racional que "corte" a los conjuntos A y B, permite ver el contraste con la "demostración" geométrica del Teorema de Dedekind, motivado por el hecho de que los números reales se pueden pensar como los puntos en una recta, mientras que no existe representación gráfica del conjunto de los números racionales.

Es interesante ver en relación con este punto, que Dedekind tenía clara conciencia del valor didáctico de las argumentaciones de carácter geométrico. Finalmente, habría que señalar que las siguientes dos condiciones equivalentes al Teorema de Dedekind, pueden demostrarse sin mayores problemas.

1) "Principio del Supremo: Todo conjunto S no vacío de números reales acotado superiormente, tiene una cota superior mínima." y
2) "Toda sucesión de números reales, creciente y acotada superiormente, converge a un límite."

c) LA REPRESENTACION DECIMAL DE LOS NUMEROS REALES

Por lo que respecta a la construcción de los números reales mediante su representación decimal, hay que decir que durante mucho tiempo, y hasta antes del siglo pasado, se aceptó como válida. Ciertamente, a partir de la condición de Arquímedes como único instrumento, es posible concluír que todo número real x satisface las desigualdades siguientes:

$$a_o + a_1/10 + a_2/10^2 + \ldots + a_n/10^n \leq x <$$
$$< a_o + a_1/10 + a_2/10^2 + \ldots + a_n/10^n + 1/10^n$$

donde a_1 es un número entero y a_i $(i = 1,\ldots,n)$ es alguno de los dígitos 0,1,2,...,9

Puesto que n puede hacerse tan grande como se quiera, es decir, el proceso puede continuarse indefinidamente, se conviene en identificar el número real x con la expansión decimal infinita

$$a_o + a_1/10 + a_2/10^2 + \ldots + a_n/10^n + \ldots = a_o.a_1a_2\ldots a_n\ldots$$

Debido a la propiedad de que todo número real es racional sí y sólo si tiene una expansión decimal infinita períodica, se definen los números irracionales como aquellos números reales cuya expansión decimal infinita es no períodica. De una manera más general, y para no hacer referencia a una base numérica específica, considérese la sucesión cualquiera de intervalos I_1, I_2,...I_n de la recta numérica, cuyos extremos sean puntos racionales, cada uno de los cuales esté contenido en el precedente, y tal que la longitud del intervalo n-ésimo I_n tienda a cero al crecer n. En otras palabras, considérese un encaje de intervalos racionales y postúlese el principio de que para cada encaje de intervalos racionales, existe un y sólo un punto de la recta numérica contenido en todos los intervalos del encaje; en caso de que el punto x no corresponda a un número racional, se definirá como el correspondiente a un número irracional. A partir de esta definición y de operaciones adecuadamente definidas entre los encajes de intervalos racionales, es posible obtener todas las propiedades de los números reales.

Un rasgo muy importante de la representación decimal consiste en que intuitivamente es claro el principio de los encajes de intervalos racionales, puesto que todo número real satisface las desigualdades, como puede el número irracional 2. En efecto

De $1< 2$ y $2< 4$, se sigue q ue $1<\sqrt{2}< 2$. Además $1.1^2 = 1.21$, $1.2^2 = 1.44$, $1.3^2 = 1.69$, $1.4^2 = 1.96$, $1.5^2 = 2.25$ luego $1.4<\sqrt{2}<1.5$. Procediendo ahora con la siguiente cifra $1.41^2 = 1.9881$, $1.42^2 = 2.0164$, de manera que $1.41<\sqrt{2}<1.42$ Para la tercera cifra, $1.411^2 = 1.990921$, $1.412^2 = 1.993744$, $1.413^2 = 1.996569$, $1.414^2 = 1.999396$, $1.415^2 = 2.002225$, de modo que $1.414<\sqrt{2}< 1.415$ y así sucesivamente.

Por consiguiente para todo número real x se puede construír una sucesión de intervalos racionales en cada uno de los cuales se encuentra precisamente x.

d) LA CONSTRUCCION DE TALL

David Tall en su libro "From Intuition to Rigour in

Real Analysis" lo que hace es precisamente contruir los números reales a partir de su representación decimal y de las propiedades de las sucesiones de números reales, de cuya interrelación desprende las principales propiedades de los números reales. Así por ejemplo, demuestra una versión equivalente a la completez de los números reales.

"(a) Dado un subconjunto no vacío S R acotado superiormente por K, existe una mínima cota superior λ de S, donde $\lambda \leq K$

(b) Dado un subconjunto no vacío S R acotado inferiormente por L, existe una máxima cota inferior μ de S, donde $\mu \geq L$.

<u>Demostración</u>

Consideremos la parte (b) porque la demostración es un poco más clara. Sea a_o el entero mayor que es cota inferior de S. (este está ciertamente entre L - 1 y todo $s \in S$)

Fig III.2

Ahora elíjase un entero a_1 tal que $a_o.a_1$ sea el número mayor a una cifra decimal que sea una cota inferior. Continue en esta forma para encontrar $a_o.a_1a_2...a_n$ que sea el mayor número a n cifras decimales que sea una cota inferior. Si $b_n = a_o.a_1a_2...a_n$, entonces (b_n) es una sucesión creciente con $b_n = s$ para toda $s \in S$. De este modo (b_n) tiende a un límite, el cual es una cota inferior para S. Este límite es, naturalmente, el decimal infinito $\mu = a_o.a_1a_2...a_n...$, por construcción μ es la máxima cota inferior. Esto se sigue suponiendo que L fuera otra cota inferior con $L > \mu$. Si esto sucediera, $L - \mu > 0$, de manera que podríamos encontrar n natural tal que $1/10^n < L - \mu$. Esto significa que

$$L > \mu + 1/10^n > a_o.a_1\ldots a_n + 1/10^n$$

pero $a_o.a_1\ldots a_n$ es el mayor número a n cifras decimales que es cota inferior de S, luego existe $s_o \in S$, donde

$s_o \quad a_o.a_1\ldots a_n + 1/10^n$. Nuestro cálculo implica que $s_o < L$, debido a que se supuso que L era una cota inferior. De esta manera no existe cota inferior L que supere a μ.

La demostración de (a) se hace recurriendo a la parte (b) como sigue: Si $s < K$ para toda $s \in S$, entonces $-s > -K$ para toda $s \in S$. El conjunto $T = \{x \in R / -s \in S\}$ tiene a $-K$ como cota inferior y, por (b), existe una máxima cota inferior $\mu = -K$. Un cálculo trivial muestra que $-\mu$ es la mínima cota superior para S y $-\mu \leq K$." (fig. III.2)[28]

Debido a que los estudiantes están familiarizados ya desde los níveles de enseñanza anteriores con la representación decimal de los números reales, su uso para construir los números reales, posiblemente permita una mayor visualización geométrica de sus propiedades.

e.) EL ENFOQUE DE TALL ACERCA DE LA CONTINUIDAD DE UNA FUNCION

Por lo que respecta al concepto de continuidad, David Tall lo presenta a partir de ideas intutivas[29]. Su idea es la de tomar como punto de partida el trazado de curvas de las que sólo se conocen algunos puntos de la misma. Por ejemplo,

28 Tall, David, From Intuition to Rigour in Real Analysis, p. 1.33

29 Ibid. pp. 3.1 - 3.27

la gráfica correspondiente a la función que dá la temperatura que hay durante la noche cada día de la semana (fig. III.3) o bien, cuando se conoce la regla que permite encontrar todos los puntos de la curva, como ocurre con las gráficas de las funciones: (2) $f(x) = x^2$, en $[-2,2]$ y

(3) $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{, si } x \text{ es racional} \\ 1/2\text{,} & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$

Se observa que en los dos primeros ejemplos es posible trazar la gráfica de las curvas conociendo sólo algunos puntos de las mismas, mientras que en el tercer ejemplo no basta conocer algunos puntos de la gráfica, sino que se necesita también la descripción explícita de la función (fig III. 4 y 5)

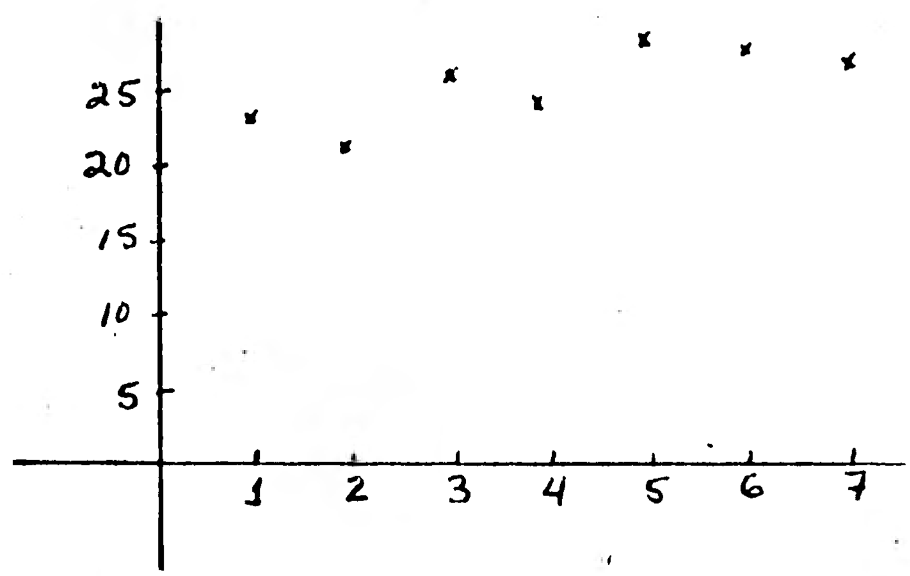

fig III.3

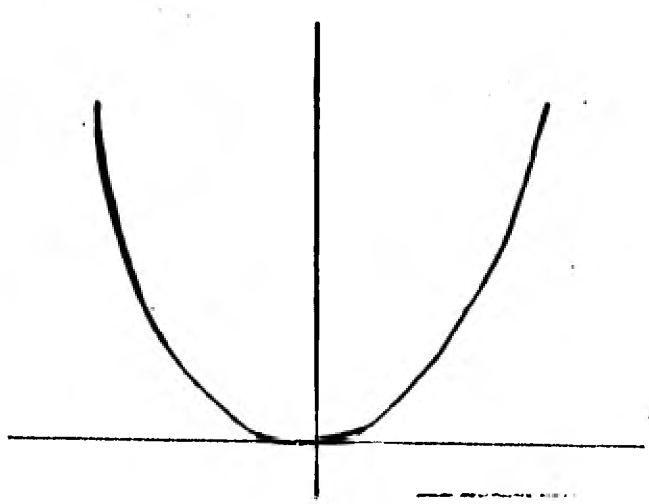

Fig III.4

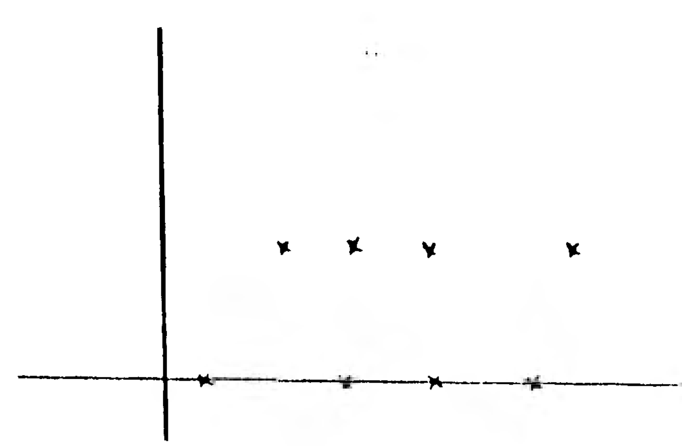

Fig. III.5

Tal diferencia geométrica es debida a que las dos primeras funciones son contínuas y la segunda no, y a que para un trazo práctico lo que se requiere es que si el punto x_1 es bastante cercano a x_2, entonces los correspondientes puntos de la curva $(x_1, f(x_2, f(x_2))$ estén razonablemente cercanos, y lo mismo los valores $f(x_1)$ y $f(x_2)$.

Más aún, Tall hace ver que para determinar el valor de la función f en un cierto punto x suponiendo conocida la gráfica de dicha función, tal valor no puede determinarse con precisión puesto que siempre existe un error motivado por el grosor de la punta del lápiz con el que se hacen los trazos. De esta manera, si en las figuras III. 6, 7 y 8 suponemos que la línea horizontal es de ancho menor que ε, la curva será idealizada para considerarla sin grosor y por último, la línea vertical será trazada con una punta de lápiz suficientemente delgado para garantizar que el error en el traslape, sea menor que ε. Esta situación puede expresarse como sigue:

> "Para que el error entre los valores $f(x_1)$ y $f(x_2)$ de la gráfica de la función f, sea menor que ε, suponiendo que la gráfica de la función no tenga grosor, basta con trazar la línea horizontal de grosor menor que ε, y a continuación trazar la línea vertical de grosor δ, suficientemente pequeño."

En otras palabras:

> "supóngase que esta línea vertical es de ancho menor que . Si x_1 y x_2 son dos números reales sobre el eje X dentro de la línea, es decir, $|x_1 - x_2| < \delta$, entonces los valores de la función están dentro de la línea horizontal, es decir $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$."

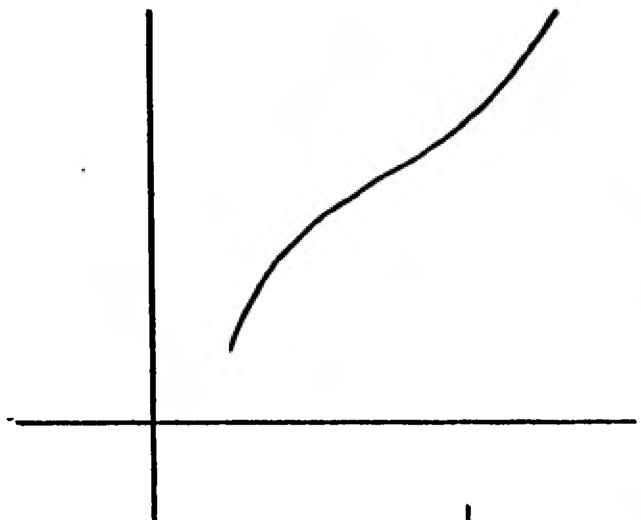

Fig. III.6

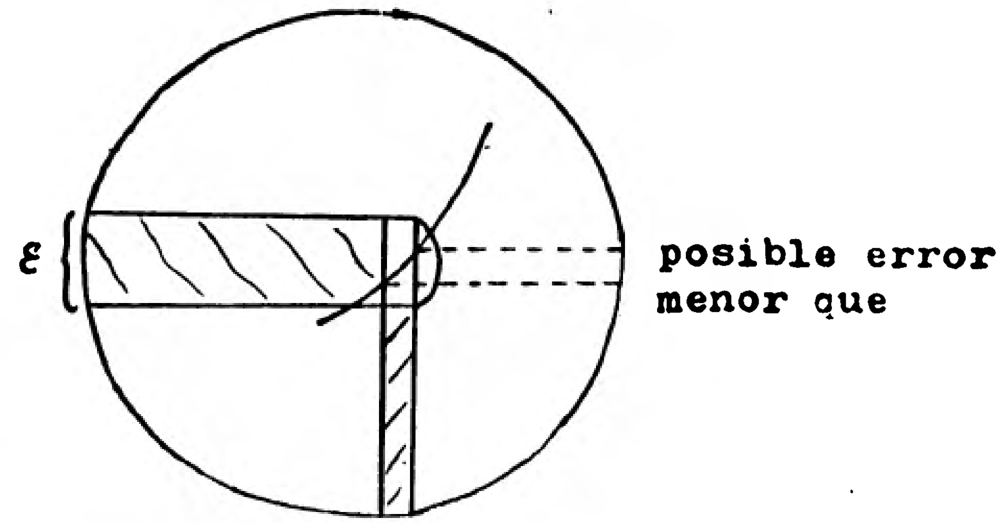

Fig. III.7

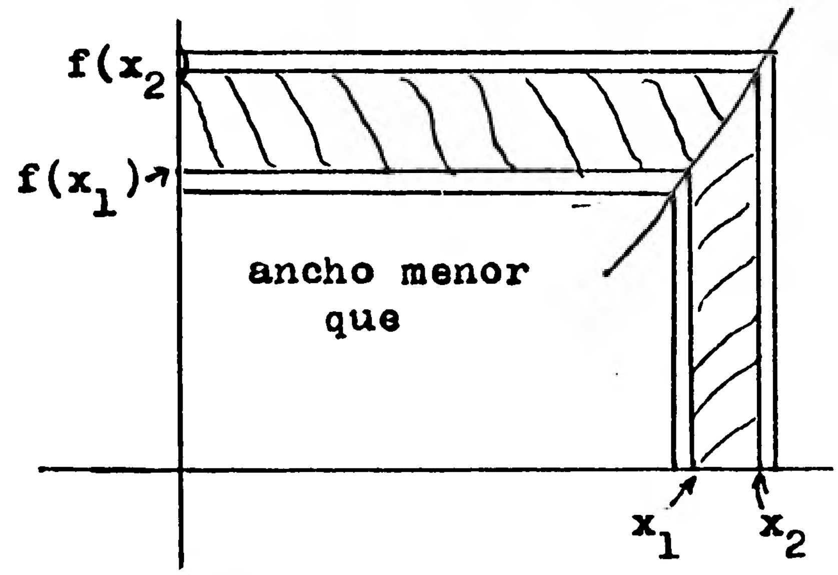

Fig. III.8

A lo que se ha llegado de esta manera, es al concepto de continuidad uniforme, en el sentido de que sí, dado cualquier $\varepsilon > 0$, se puede encontrar $\delta > 0$, tal que si $|x_1 - x_2| < \delta$, entonces $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, para todos x_1, x_2 en el dominio D de f.

El hecho de que se haya llegado a la formalización del concepto de continuidad uniforme en lugar de la del concepto de continuidad, como se intentaba originalmente, se explica como sigue:

"Dependiendo del empinamiento de la gráfica de una función dada y para toda ε, podemos usar diferentes valores de δ en diferentes partes del dominio. Donde la gráfica esté más empinada, necesitamos un valor pequeño de , donde esté menos empinada, lo conseguiremos hacer con un valor más grande; conforme a la definición de continuidad uniforme, debemos poder encontrar un solo valor de δ, el cual funcione para todas las partes del dominio. Este es el momento en que la palabra "uniforme" llega, simplemente significa que hay un solo (uniforme) valor de δ el cual funciona a través de todo el dominio D." (fig. III.9)

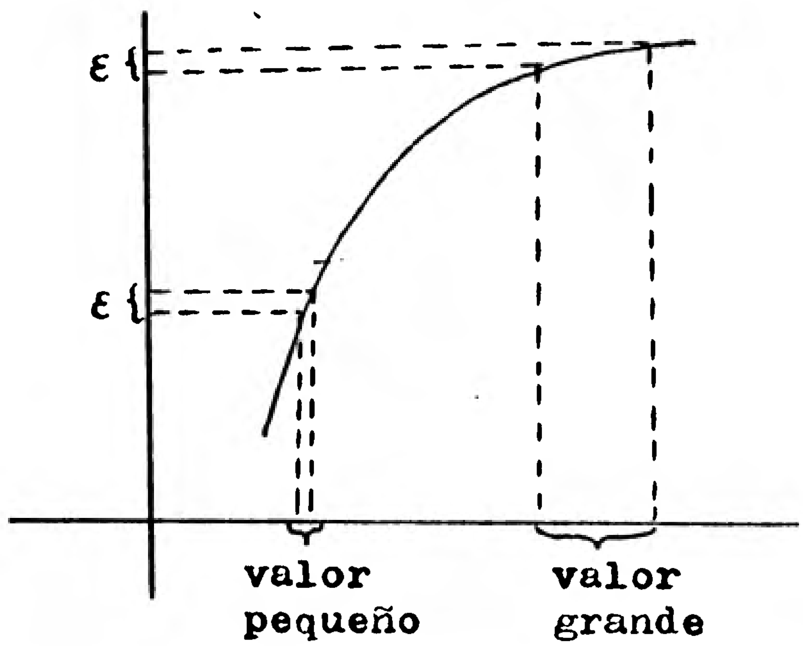

Fig. III.9

Después de ver algunos ejemplos de funciones uniformemente contínuas, Tall introduce el más general concepto de continuidad, el cual admite diferentes valores de δ, en diferentes partes del dominio:

"...La función $f: D \to R$ se dice que es contínua en $x_0 \in D$ si dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $x \in D$, $|x_0 - x| < \delta$, implica que $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$."[31]

Aquí mismo se hace la aclaración q ue el cambio de notación de x_1, x_2 a x, x_0, se debe a que la δ, depende no sólo de ε, sino también de x_0.

31 Tall, David, Ob. cit., p. 3.10

CAPITULO IV

RETORNO A LOS PROBLEMAS ORIGINALES

Después de haber echado una hojeada a la evolución que los conceptos de límite y continuidad han tenido desde la antiguedad griega hasta el siglo pasado, así como de los elementos adicionales señalados en el capítulo III, podemos entender mejor el tránsito progresivo de estos conceptos, desde las ideas intuitivas, hasta las formulaciones rigurosas más difundidas, así como de las relaciones que tienen unas con otras. Discutamos ahora algunas vías para salvar los problemas observados en el capítulo I.

a) IMPORTANCIA DE LA REPRESENTACION DECIMAL DE LOS NUMEROS REALES

De las consideraciones hechas en los dos capítulos anteriores ha quedado suficientemente aclarada la importancia que para la definición y propiedades de los conceptos de límite y continuidad tiene una adecuada y rigurosa presentación de los números reales. En la actualidad casi todos los libros de cálculo principian con una exposición sobre este tema. Algunos, al hacer su tratamiento extremadamente detallado y riguroso, convierten de hecho a los cursos de cálculo en cursos de análisis, colocándose así, en otro extremo de aquellos antiguos textos que poca o ninguna importancia le daban a los números reales.

Una presentación que tome en cuenta ambos puntos de vista sería lo deseable para un curso introductorio de cálculo. En este sentido, la representación decimal de los números reales presenta características de uno y de otro tipo: por un lado su interpretación geométrica tiene un carácter marcadamente intuitivo, y por otro, de su conjunción con la noción de convergencia de sucesiones, se pueden obtener las más importantes propiedades de los números reales, como lo es la completez.

b) CONVERGENCIA DE SUCESIONES

Después de haberse construído los números reales mediante el modelo de su representación decimal, la definición y demostración de las principales propiedades de las sucesiones de números reales son tareas que pueden efectuarse con mucha naturalidad. Por lo que respecta a la idea intuitiva de la noción de convergencia de una sucesión (s_n) y a la respectiva definición formal, hay que recalcar el hecho de que aquí no se presenta la incongruencia que aparece con el concepto de límite de una función. En efecto, mientras la idea intuitiva de convergencia de una sucesión es:

> "...La sucesión (s_n) converge a s cuando n tiende a ∞, si los términos s_n se pueden aproximar tanto como se quiera a s, siempre que n sea suficientemente grande."

la definición formal es como sigue:

> "La sucesión (s_n) converge a s cuando n tiende a ∞, si para todo número real $\varepsilon > 0$, existe un número real $N > 0$, tal que si n N, entonces $s - s_n$."

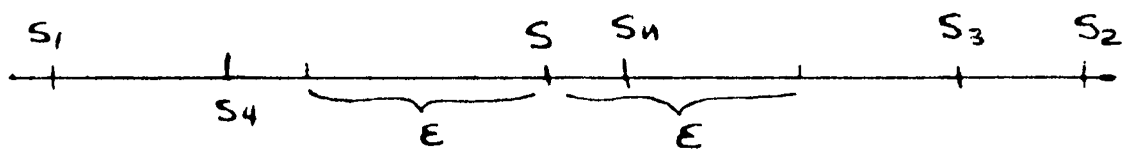

Fig. IV.1

Adoptando como representación geométrica de la idea intuitiva la que aparece en la figura IV.1 se puede comprobar sin gran dificultad que la misma representación geométrica es adecuada para la definición formal. Faltaría sólamente darle un significado a la frase "s_n se puede aproximar", lo cual no entraña mayor dificultad si la interpretamos como "los diversos valores que s_n toma en la sucesión.

Por lo que respecta a la suposición que hace la definición formal de la existencia del límite s de la sucesión, la determinación práctica de éste, puede hacerse recurriendo a la noción intuitiva de convergencia para una amplia gama de sucesiones.

c) UNA PRESENTACION ALTERNATIVA PARA LA CONVERGENCIA DE SUCESIONES

Como un intento para superar la duda de si una sucesión alcanza o no su límite, Sue Taylor en su artículo "An Alternative Definition for the Convergence of Sequences" sugiere la idea intuitiva de aproximación decimal para reformular la definición de convergencia. Su idea es la siguiente:

"Considere la sucesión dada por los semiperímetros de un cuadrado, un octágono, un 16-ágono,..., 2^n-ágono,...

Los términos iniciales son:

$$S_1 = 2\sqrt{2}, \qquad S_2 = 4\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$S_3 = 8\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\ ,\ \text{y}\quad S_4 = 16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

Calculando algunos cuantos primeros términos de esta sucesión hasta dos cifras decimales se obtiene:

2.83, 3.06, 3.13, 3.14, 3.14,...

con valor constante igual π aproximado a 2 cifras decimales."

De la observación de este ejemplo llega a las siguientes definiciones:

"(i) Una sucesión (S_n) se dice que es m-convergente si la sucesión aproximada a m cifras decimales llega a ser constante después de un número finito de términos, es decir, existe M tal que la sucesión aproximada tiene términos iguales después del M-ésimo.

(ii) La sucesión (S_n) se dice que converge al límite S si existe un número N tal que (S_n) es m-convergente siempre que m N, donde m es el número de cifras decimales. Aquí S será el número real tal que la sucesión m-convergente tiene valor constante S aproximado a m cifras decimales."

Esta formulación como puede verse, echa mano de las ventajas de la expansión decimal de los números reales. De esta manera, en caso de contar con una buena calculadora, se puede verificar si algunas funciones son o no convergentes.

Sin embargo, esta definición que pretende ser sustitutiva de la definición estándard de convergencia de una sucesión presenta dificultades formales no menos graves que las que aparecen en aquella definición. Por ejemplo, para comprobar que una sucesión es m-convergente para toda m mayor que una cierta N, los pasos que se siguen, son muy semejantes a los que se siguen para calcular la N a partir de la arbitrariamente dada en la definición estándard. Esto puede verse muy claramente con el mismo ejemplo que menciona a Taylor:

"...para probar que la sucesión

$S_n = 1 + 1/2 + \ldots 1/2^n$ tiene límite 2, hágase

$$|2 - S_r| = |2 - (1 + 1/2 + \ldots + (1/2)^r|$$

$$= |2 - (1 - (1 - 1/2^r)/(1 - 1/2)|$$

$$|2 - S_r| = |2 - 2 + 1/2^{r-1}|$$

$$= 1/2^{M-1} \quad \text{puesto que } r \quad M$$

$$< 1/10^n \quad \text{para alguna } n$$

De aquí, cualquiera que sea el valor de n, podemos encontrar M tal que los términos después del M-ésimo, están dentro de $1/10^n$ del límite y por tanto, dentro del suconjunto que contiene el límite. De este modo después del M-ésimo será aproximado al mismo número, es decir, la sucesión llegará a ser constante, como se deseaba."

c) EL LIMITE DE UNA FUNCION EN UNA PRESENTACION DISTINTA

El conocido teorema atribuído a Cauchy:

"La función f converge al límite L cuando x tiende a x_o, sí y sólo si, para toda sucesión (x_n) que converja a x_o, las correspondientes sucesiones $(f(x_n))$ convergen a L."

permite en términos formales, adoptar como definición de límite de una función la condición equivalente expresada en el teorema. De hecho, existen varios textos de cálculo que adoptan este punto de vista al presentar el concepto de límite de una función.

Este distinto enfoque posiblemente sea más adecuado que a través de la definición de Weierstrass por cuanto se adapta en mayor grado a la noción intuitiva de límite de una función. En efecto, cuando se dice:

"f tiene como límite L cuando x tiende a x_o, sí cuando x se aproxima a x_o, f(x) se aproxima también a x_o", su traducción en términos de sucesiones no es otra que la condición expresada en el teorema atribuído a Cauchy. (fig. IV.2), misma que puede expresarse en términos más llanos:

"La función f tiene como límite el número L cuando x tiende a x_o, si cada vez que x se aproxima a x_o a través de los valores x_1, x_2,...x_n,...; los valores correspondientes $f(x_1)$, $f(x_2)$,... $f(x_n)$,... se aproxima a L."

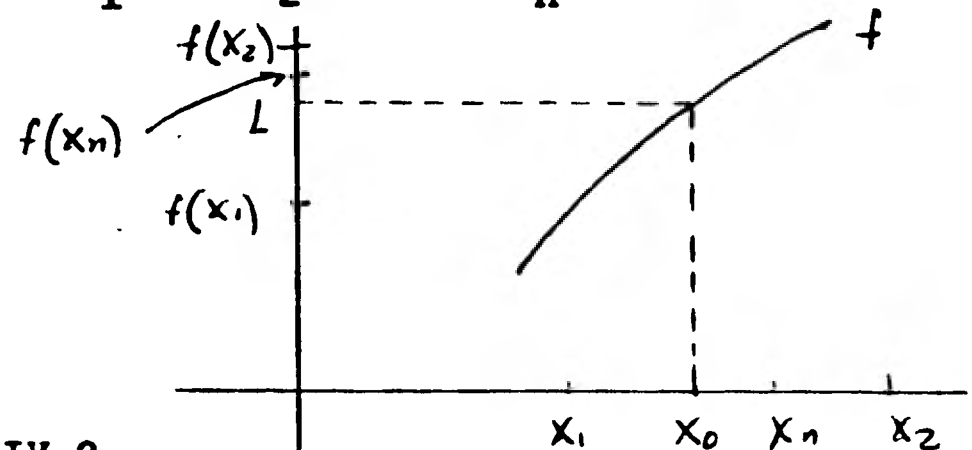

Fig. IV.2

A diferencia de la interpretación geométrica de la definición de Weierstrass (fig. I.1) en la que hay que fijar inicialmente la atención en el contradominio, después en el dominio y nuevamente en el contradominio por último, mediante el otro enfoque basta con tomar una sucesión en el dominio que converja a x_o y ver lo que ocurre con la correspondiente sucesión en el contradominio.

De esta manera, los problemas de la convergencia de una función, se trasladan a los de convergencia de sucesiones de números reales.

Por último, es necesario destacar que este nuevo enfoque no representa sino uno entre varios intentos por salvar las dificultades de la definición de Weierstrass. En la medida que se esclarezca la historia del concepto de límite de una función —sobre todo el período comprendido entre Lagrange y y Cauchy, por un lado y Cauchy y Weierstrass por otro— se podrán diseñar exposiciones alternativas en las que la intuición y el rigor se complementen mutuamente.

d) EL CONCEPTO DE CONTINUIDAD: UN ENFOQUE HISTORICO

La deinición de Arbogast acerca del concepto de continuidad constituye sin duda alguna un salto cualitativo con relación a la idea que del mismo tenía Euler. Ciertamente, cuando Arbogast establece que para que una función sea contínua, basta con que su gráfica pueda trazarse con un movimiento libre de la mano, está pasando a un nivel de abstracción al que Euler no pudo llegar en el concepto de continuidad, ya que para él, era necesario para que una función fuera contínua, además de la condición de Arbogast, la condición adicional de que su expresión analítica se halle sujeta a una ley de continuidad.

La formulación simbólica de Arbogast abrió la brecha sobre la cual se asientan las posteriores aportaciones de Bolzano, Cauchy y Weierstrass. Nuevamente, como en el caso de límite de una función, el salto de Cauchy a Weierstrass, históricamente se encuentra insuficientemente aclarado. Sobre todo, la manera en que se elimina el carácter dinámico de la definición de continuidad.

No obstante, el desarrollo general de este concepto desde Euler hasta Weierstrass, ha podido reconstruirse con mayor precisión, que el de límite de una función.

Es en esta dirección que debe ubicarse el intento de David Tall (capítulo III (d)) por presentar un enfoque intuitivo del concepto de continuidad.

De esta manera, cuando Tall observa que para que una función sea contínua, se requiere que si el punto x_1 es bastante cercano a x_2, entonces los correspondientes valores $f(x_1)$ y $f(x_2)$ estén razonablemente cercanos, de hecho lo que está haciendo es tomar como punto de partida para su posterior definición formal de continuidad, la idea de Arbogast.

Finalmente, cabe señalar que David Tall en su exposición del cálculo[32], invierte el orden tradicional en los conceptos de límite de una función y de continuidad, que empieza con la exposición de límite de una función. Modificaciones de este tipo, sin embargo, sólo podrán valorarse correetamente a la luz de los resultados obtenidos en el proceso de enseñanza aprndizaje.

---

32 Tall, David, From Intuition to Rigour in Real Analysis or "Calculus Explained..."

EPILOGO

A lo largo del estudio que hemos realizado, varios de los problemas originalmente planteados han quedado resueltos, la superación de algunos más ha quedado pospuesta hasta en tanto no se haya reconstruído la historia de los conceptos de límite y continuidad. Otros, como la interrogante: ¿ hasta que punto la definición formal y estática de Weierstrass coincide con nuestra noción intuitiva de límite de una función?, podría responderse como lo hace Courant:

> "...Que esta idea corresponda satisfactoriamente o no a la noción intuitiva —dinámica—, es un problema idéntico al de establecer si los axiomas de la geometría procuran una descripción satisfactoria del concepto intuitivo de espacio. Ambas formulaciones prescinden de algo que tiene intuitivamente una existencia real, pero proporcionan un esquema matemático adecuado para expresar nuestro conocimiento de esos conceptos."[33]

Para resumir el desarrollo que han tenido los conceptos de límite y de continuidad desde la antiguedad griega hasta el período de rigor en el cálculo, la siguiente referencia es extremadamente ilustrativa:

> "...Como todas las demás ciencias, la matemática ha nacido de las necesidades de los hombres: de la medición del tiempo y de la mecánica. Pero, como en todos los ámbitos del pensamiento, al llegar a cierto nivel de evolución se separan del mundo real las leyes abstraídas del mismo, se le contraponen como algo independiente, como leyes que le llegaran de afuera y según las cuales tiene que disponerse el mundo."[34]

---

33 Courant y Robins, Qué es la Matemática?, p. 317
34 Engels, Federico, AntidUhring, p. 25

A la luz de esta apreciación engeliana podemos explicarnos ahora la opinión más aceptada en la actualidad:

> "...Las matemáticas no son una descripción de la naturaleza ni una explicación de sus operaciones; no está interesada en el movimiento físico o con la generación metafísica de mágnitudes. Es meramente la lógica simbólica de posibles relaciones."[35]

como una justificación para eludir los problemas derivados de confrontación de los conceptos del cálculo con la realidad. El reflejo de este punto de vista en la enseñanza del cálculo, nos explica probablemente la razón por la cual muchos matemáticos le conceden tan poca importancia a la intuición.

Como conclusión, y por si esto fuera necesario, diré que mi punto de vista al respecto coincide con el expresado por Tall:

> "...Un enfoque puramente formal, aún con un somero conocimiento de informalidad, es psicológicamente inapropiado para el principiante, debido a que no toma en cuenta todas las realidades del proceso de aprendizaje. Concentrándose en los tecnicismos, a expensas de la manera en la cual las ideas son concebidas, se presenta sólo una cara de la moneda. El matemático práctico no piensa puramente en un simbolismo seco y estereotipado: por el contrario, su pensamiento tiende a concentrarse en aquellas partes del problema sobre los cuales su experiencia le aconseja que son las fuentes principales de dificultad. Mientras el está intentando resolverlo con ellos, el rigor lógico ocupa un lugar secundario:

---

35 Cohen, M. R., Reason and Nature, pp. 171-205

es sólamente después de que el problema ha sido resuelto intuitivamente después de todos intentos y propósitos, que las ideas subyacentes son cubiertas en una demostración formal. Naturalmente, hay excepciones a esta regla: partes de un problema pueden ser completamente formalizadas antes que otras sean comprendidas, aún intuitivamente."[36]

36 Tall y Stewart, The Foundations of Mathematics, Prefacio

BIBLIOGRAFIA

Aleksandrov, Kolmogorov, Laurentiev y otros, La Matemática: su contenido, métodos y significado

Apostol, Calculus, Vol. I.

Bers, Lipman and Frank Karal, Cálculo

Birkhoff Garrett, A Source Book in Classical Analysis

Boyer, Carl, The History of the Calculus and its Conceptual Development

Courant, Differential and Integral Calculus, Vol. I, II

Courant y Robbins, ¿Qué es la Matemática?

Dedekind, Richard, Essays on the Theory of Numbers

Edwards, C. H., Jr., The Historical Development of the Calculus

Haaser, LaSalle, Sullivan, Análisis matemático, curso de introducción

Hardy, G. H. , Pure Mathematics

Lagrange, Théorie des Fonctions Analytíques

Lakatos, Imre, Pruebas y Refutaciones

Leithold, Lous, El Cálculo con Geometría Analítica

Marsden, Jerrold, Calculus Unlimited

Kuratowski, K, Introducción al Cálculo

Rudin, Walter. Principles of Mathematical Analysis

Spivack, Michael, Calculus

Stewart Ian and David Tall, The Foundations of Mathematics

Tall, David, From Intuition to Rigour in Real Analysis

Tall, David, "A Long Term Learning Schema for Calculus and Analysis"

Tall, David, "Cognitive Conflict and the Learning of Mathematics

Tall, David, "Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits"

Struik, D. J., A Source Book in Mathematics 1200 - 1800

Engels, Federico, Anti-dühring

Fulks, Watson, Advanced Calculus

Taylor Sue, "An Alternative Definition for the Convergence of Sequences