13 2-ejem

FACULTAD DE CIENCIAS U.N.A.M.

METODO DE CONTINUACION PARA ECUACIONES FUNCIONALES

TESIS QUE PARA OBTENER EL TITULO DE MATEMATICO PRESENTA

RUBEN LOPEZ GONZALEZ

MEXICO. D.F. 1981.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

INDICE.

INTRODUCCION.

Se han usado métodos que involucran familias de regiones que dependen de un parametro; formulas, ecuaciones, etc., para resolver determinado problema. Los mètodos que estan estrechamente relacionados con la presente Tesis, se pueden clasificar, sin mucha presición, según su caracter general, en Mètodos por Trayectorias o Mètodos Topológicos. Entre los Métodos por Trayectorias es conveniente distinguir, entre aquellos que son de caracter teórico, en términos de Teoría de Conjuntos y aquellos que son constructivos, en el sentido de que se puede garantizar el resultado deseado en un número finito de pasos. En esta Tésis siempre supondremos, por simplicidad, que el rango del parametro es el intervalo $J=\{s\in\mathbb{R}: 0\leq s\leq 1\}$

A. Mètodos por Trayectorias. Supongamos que tenemos dos superficies X y Y, y además se sabe que a un punto $P(0)$ le corresponde un único punto $q(0)$ en Y. Se desea demostrar que a cada punto $P(s)$, en la curva que une a $P(0)$ con $P(1)$ y $s\in J$, le corresponde un único punto $q(s)$, habiendolo demostrado, localizarlos a partir de $q(0)$.

Este problema se remonta a 1869. El método para su demostración (en términos de teoría de conjuntos), generalmente consistió en demostrar que el conjunto $K := \{ s \in J :$ P(s) le corresponde un único $q(s) \}$ es a la vez abierto y cerrado; entonces $K = J$. El problema consistió en calcular $q(1)$ a partir de $q(0)$, se tenía que empezar con $q(0)$. Como K es abierto, se puede construir $q(s)$ para $0 \leq s < \delta_1$, como K es cerrado, $q(\delta_1)$ existe; como K es abierto se puede construir $q(s)$ para $\delta_1 \leq s < \delta_2$; como K es cerrado, $q(\delta_2)$ existe; repitiendo estos argumentos es posible construir $q(s)$ para $\delta_1 + \delta_2 \leq s \leq \delta_3$, y así sucesivamente. Como no fué posible acotar las δ_i, se dieron argumentos de teoría de conjuntos para afirmar la construcción de $q(1)$. Estos argumentos provocaron controversias. En esta tesis se tiene un problema similar, solo que aquí se da una cota inferior para los δ_i.

El problema de encontrar una función que sea Harmonica, en un dominio específico y que satisfaga determinadas condiciones en la frontera se le conoce como el problema de-Dirichlet. S. Bernstein quiso encontrar una función harmonica cuyo dominio era el círculo. El sabía ([5], I p. 263) que su problema tenía solución para un valor especifico de la frontera, y quería saber si lo cumplía en el resto de ella. Observó que las soluciones $u(x,y;\alpha)$ de la función harmonica $F(\theta;\alpha)$ dependían analitica de α, y que su problema se podía atacar encontrando las soluciones $u(x,y,\alpha)$ a partir de $(x,y,0)$, su solución conocida, de una manera contínua hasta llegar a la solución deseada $u(x,y,1)$. Este trabajo - contiene la necesedad de una cota a priori y un avance uniforme hacia la solución. En esta Tesis se dá una cota inferior y una uniformidad hacia la solución, en nuestro problema a resolver.

B. Métodos Topológicos. El mejor ejemplo de esto método, es de encontrar una solución para ecuaciónes funcionales, a partir de una conocida. Usando continuidad y cotas a priori, se aplica la noción de índice topológico, para obtener un teorema de existencia de una solución, a partir de una conocida. Este resultado ha tenido numerosas aplicaciónes.

C. Antecedentes.- La idea de la construcción en la presente tesis, se puede remontar al menos, hasta la extensión al espacio de funciones del teorema del punto fijo de Brower, debida a Birkhoff y Kellogg ([8], [11]). Se demostraron teoremas locales de la función implícita, en espacios de Hilbert, mediante procesos iterativos (Hart [6], [9], [10]). Parece que el paso a espacios de Banach fue dado primero por Hildebrandt y Graves [12]. En su artículo se resuelve completamente el problema de continuidad local. Mas aún, ellos obtienen "bastantes" soluciones para demostrar que la solución local puede extenderse, hasta que las hipótesis de extensión local dejen de valer. La presente tesis tiene mucho en común con este trabajo; aquí se especifica desde el principio la ecuación objetivo y se dan condiciones para que sea posible resolverla en un número finito de pasos.

D. Problema a Resolver. Sea $x \mapsto T(x)$ una transformación de un espacio de Banach en si mismo. En esta tesis se encuentran condiciones necesarias para resolver la ecuación $T(x)=0$. Algunas de estas condiciones son:

Encontrar una familia de Transformaciones $T(s,x)$, del espacio de Banach S en si mismo, con $s \in J = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1\}$, $T(0,x) = T^*(x)$, $T(1,x) = T(x)$ y que la ecuación $T^*(x)$ Tenga una solución única y conocida, en el interior de la bola $S^N = \{ x \in S : \|x\| \le N\}$ para alguna N en $\mathbb{R}^+$.

Sea S_0 en J, x_0 en el interior de S^N con $T(s_0, x_0) = 0$. Bajo hipótesis apropiadas, demostraremos, que existe una función única $x(s)$ definida en una vecindad V de s_0 con $T(s, x(s)) = 0$, $X(s_0) = X_0$, para cada s en V. UTilizando este resultado, haciendo $s_0 = 0$ y $X_0 = X^*$, obtenemos una solución para la ecuación $T(s,X) = 0$ con $0 \le s \le \sigma_0$. Repetimos el argumento para $S_0 = \sigma_0$ y $X_0 = X(\sigma_0)$ y obtenemos una solución para $T(s,X) = 0$ con $\sigma_0 \le s \le \sigma_0 + \sigma_1$. Haciendo $S_0 = \sigma_0 + \sigma_1$, $X_0 = X(\sigma_0 + \sigma_1)$ obtenemos una solución para $T(s,X) = 0$ con $\sigma_0 + \sigma_1 \le s \le \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2$, y así sucesivamente, hasta encontrar la solución $\bar{x}$, en un número finito de pasos, de la ecuación $T(1,x) = T(x) = 0$. Este mètodo se le conoce como METODO DE CONTINUACION.

I.- PRELIMINARES.

En este capitulo supondremos conocidos los resultados elementales sobre espacios de Banach. Así que solo daremos algunas definiciones y teoremas, estos se dejaran como ejercicios.

La letra $\mathbb{K}$ la denominaremos como el campo de los números reales o como el campo de los números complejos.

Una estructura de espacio vectorial sobre un conjunto E está definida por dos funciones:

A.1.- Una función $(x,y) \mapsto x+y$ de $E \times E$ en E, llamada adición

A.2.- Una función $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $\mathbb{K} \times E$ en E, llamada multiplicación por escalar.

Estas funciones (ú operaciones algebraicas) deben satisfacer los siguientes axiomas:

B.1.- $x+y = y+x$ (conmutatividad)

B.2.- $(x+y)+z = x+(y+z)$ (Asosiatividad)

B.3.- Existe un elemento $\bar{0}$ en E tal que $x+0=x$, para cada x en E. Este elemento $\bar{0}$ es llamado el cero vector o el origen de E.

B.4.- Para cada x en E, existe un elemento $-x$ en E

tal que $x+(-x)=0$. Al elemento $-x$ se le conoce como el inverso de x.

B.5.. $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$.

B.6.. $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$.

B.7.. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$.

B.8.. $1 \cdot x = x$ para cada x en E.

DEFINICION.. Si los axiomas B.1,...,B.8, se satisfacen para E, entonces se dice que E es un espacio vectorial (o espacio lineal) sobre K; a los elementos de un espacio vectorial se llamaran vectores.

DEFINICION.. Dado un espacio vectorial E, una norma en E es una función $x \longmapsto \|x\|$, de E en el conjunto de los números reales no negativos $\mathbb{R}^+$, la cual satisface las siguientes condiciones:

C.1.. $\|x\| = 0$ si y solo si $x=0$

C.2.. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ para λ en K y x en E.

C.3.. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdad del Triángulo)

DEFINICION.. En la definición anterior, si E es un espacio vectorial, diremos que E es un espacio vectorial normado o simplemente un espacio normado.

La norma de un espacio vectorial define una métrica, de una manera natural. Recalcamos que una métrica en un conjunto E, es una función $(x,y) \longmapsto \delta(x,y)$ de $E \times E$ en $\mathbb{R}^+$, la cual satisface las siguientes condiciones

D.1 $\delta(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$

D.2 $\delta(x,y) = \delta(y,x)$

D.3 $\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,y)$

Al valor $\delta(x,y)$ se le llama distancia entre los puntos x, y. A un conjunto E con una métrica definida δ, se le llama espacio métrico y diremos que E está habilitado con una métrica δ.

Si E es un espacio vectorial normado, definimos $\delta(x,y) = \|x-y\|$, es fácil ver que esta función resulta ser una métrica.

En lo sucesivo consideraremos a un espacio vectorial normado, como un espacio métrico habilitado con la métrica antes definida.

En un espacio métrico tenemos las nociones usuales de Topología: Conjuntos cerrados y abiertos, vecindades, convergencia, etc. Diremos en particular, que una sucesión $\{X_n\}$ de puntos de E converge, a un punto x, si para cada $\epsilon > 0$ existe $N = N(\epsilon)$ en $\mathbb{N}$ tal que $\delta(x, x_n) < \epsilon$ para cada $n > N$. Una sucesión se dice convergente si converge a algún punto.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente. Entonces satisface la condición de Cauchy si: Para $\epsilon > 0$ existe $N = N(\epsilon)$ en N tal que $\delta(x_n, x_m) < \epsilon$ para cada n y m mayores que N.

Una condición que satisface la condición de Cauchy, será llamada una sucesión de Cauchy. Es fácil probar que una sucesión convergente, satisface la condición de Cauchy. Si, recíprocamente, cualquier sucesión de Cauchy en E es convergente, entonces diremos que E es un espacio métrico completo.

DEFINICION.- Un espacio vectorial normado E, se dirá que es un espacio de Banach, si es un espacio métrico completo, donde la métrica está definida a partir de la norma.

Una clase muy importante de espacios de Banach, está constituida por los espacios de Hilbert, que a continuación definiremos.

DEFINICION.- Un espacio vectorial E se llamará con producto interno, si existe una función definida como $(x,y) \longmapsto (x|y)$ de $E \times E$ en K, con las siguientes propiedades:

E.1.- $(x|x) \geq 0$ para cada x en E

E.2.- $(x|x) = 0$ si y solo si $x = 0$

E.3.- $(x|y) = \overline{(y|x)}$ para x en E y y en E, donde $\bar{z}$ es el conjugado de z. (z en $\mathbb{C}$).

E.4.- $(\lambda x + \mu y | z) = \lambda (x|z) + \mu (y|z)$ para λ y μ en K; x, y, z en E.

El producto escalar define una norma en E de una manera natural, la definimos a continuación:

$$\|x\| = +\sqrt{(x|x)} \tag{1.1}$$

DEFINICION.- Sea E un espacio con producto interno y $\|x\|$ la norma definida por (1.1). Si E es completo para esta norma (es decir; E es un espacio de Banach), entonces se dice que E es un espacio de Hilbert.

Se sabe que si E es un espacio métrico, esta métrica nos permite definir una topología en E. Los siguientes teoremas se refieren a esta topología.

PROPOSICION 1.1 Sea E un espacio vectorial normado. Entonces la función $(x,y) \longmapsto x+y$, de $E \times E$ en E, la función $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$, de $K \times E$ en E y la función $x \longmapsto \|x\|$ de E en $\mathbb{R}^+$ son continuas. Si E tiene producto interno, entonces la función $(x,y) \longmapsto (x|y)$ de $E \times E$ en K es también continua.

Una cubierta abierta de un conjunto A, en un espacio métrico E, es una familia $\{B_i\}_{i \in I}$ de abiertos, tales que $A \subset \bigcup_{i \in I} B_i$. Si $J \subset I$ y $\{B_j\}_{j \in J}$ cubre a A, diremos que $\{B_j\}_{j \in J}$ es una subcubierta de $\{B_i\}_{i \in I}$. Un conjunto $A \subset X$ es compacto si y solo si las siguientes condiciones se cumplen

F.1.- Cualquier sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A, tiene una subsucesión que converge a un punto de A.

F.2.- Cada cubierta abierta tiene una subcubierta finita (Teorema de Heine-Borel-lebesgue).

F.3.- Si $\{F_i\}$ es cualquier familia de conjuntos cerrados tales que $\bigcap F_i$ es ajena con A, entonces existe una subfamilia finita de $\{F_i\}$, cuya intersección es también ajena con A (Teorema de Cantor).

NOTA: Estas condiciones son equivalentes solo en espacios métricos, y no en espacios Topológicos en general.

Un conjunto compacto es siempre cerrado. Si f es una función contínua de un espacio métrico E en espacio métrico Y, y A es compacto en E, entonces $f(A)$ es compacto en Y. Un conjunto es relativamente compacto si su cerradura es compacta o, equivalentemente, si cualquier sucesión de puntos de A Tiene una subsucesión la cual converge a un punto de E (no necesariamente de A).

En un espacio métrico E un conjunto A es acotado si esta contenido en alguna Bola $B_q(a) = \{x \in E : \|x-a\| \leq q\}$

En un espacio vectorial normado, un conjunto acotado siempre está contenido en una bola $B_\sigma(0) = B_\sigma$ con centro en el origen. Es decir, si $\|x-a\| \leq \rho$ para cada x en A, entonces

$$\|x\| = \|x-a+a\| \leq \|x-a\| + \|a\| \leq \rho + \|a\| .$$

Un conjunto compacto es siempre acotado. Esta es una propiedad básica de los espacios $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$, en los cuales el recíproco Tambien es cierto:

TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS: Un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ es compacto. Un conjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ es relativamente compacto.

Este Teorema no es cierto para espacios de Banach de dimensión infinita. En un espacio de Banach, en donde cada conjunto acotado es relativamente compacto, es necesariamente de dimensión finita.

Una función continua definida en un conjunto compacto, es acotada, y alcanza su mínimo y su máximo.

Un espacio métrico compacto es siempre completo. Un subconjunto completo de un espacio métrico es siempre cerrado. Si un espacio métrico E no es completo, se puede construir un espacio completo $\hat{X}$, llamado compactación de X, tal que X es isométrico a un subconjunto X_0 de $\hat{X}$ y X_0 denso en $\hat{X}$

Sean X y Y dos espacios métricos, cada uno con sus respectivas métricas δ y η. Una función f de X en Y se dice que es uniformemente continua, si para cada $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que
$\eta(f(x), f(y)) < \epsilon$, para cualquier par de puntos tales que $\delta(x, y) < \delta$. Una función uniformemente continua

claramente es continua; el recíproco es falso en general. Si $f: X \longmapsto Y$ es uniformemente continua y $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en E, entonces $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en Y.

PROPOSICION. 1.2 Sea f una función de un espacio vectorial normado E en un espacio vectorial normado F. La función f es uniformemente continua, si para cada vecindad W del origen en F, existe una vecindad V del origen en E, tal que $x-y$ en V implica $f(x)-f(y)$ en W para x, y en E.

PROPOSICION. 1.3. Sea E un espacio vectorial normado. La función $(x,y) \longmapsto x+y$ de $E \times E$ en E y la función $x \longmapsto \|x\|$ de E en $\mathbb{R}^+$ son uniformemente continuas. Para λ en K la función $x \longmapsto \lambda x$ de E en E es uniformemente continua, y para cada a en E la función $\xi \longmapsto \xi a$ de K en E es uniformemente continua. Si E es un espacio con producto interno y a en E, entonces la función $x \longmapsto (x|a)$ de E en K es uniformemente continua.

A continuación daremos algunas definiciones y proposiciones (con demostración), que utilizaremos a lo largo de este trabajo.

DEFINICION.- Sea L una función de un espacio normado X, a un espacio normado Y. Diremos que L es acotada inferiormente si existe $\mu > 0$ tal que, para cada u en X, $\|L(u)\|_y \geq \frac{\|u\|}{\mu}$, donde $\|\cdot\|_y$, $\|\cdot\|_x$ son las normas de los espacios.

DEFINICION.- Sea L como en la definición anterior. Diremos que L es una función acotada, si existe $\mu > 0$ tal que $\|L(u)\|_y \leq \mu \|u\|_x$, para cada u elemento de X.

PROPOSICION 1.4.- Sea S un espacio de Banach y $L : S \longmapsto S$ una transformación lineal, M su inversa, si existe. Entonces L es acotada inferiormente si y solo si M existe y es acotada.

PRUEBA.- Supongamos que M existe y es acotada. Entonces $\|Mv\| \leq \mu \|v\|$ para alguna $\mu > 0$ y para v en $L(S)$. Pero si $Mv = u$ entonces $v = Lu$, por tanto

$$\|u\| \leq \mu \|Lu\| \quad \text{implica} \quad \|Lu\| \geq \frac{\|u\|}{\mu}$$

para cada u en S. Recíprocamente, supongamos que L es acotada inferiormente. Probaremos primero que L es inyectiva, y por tanto la existencia de M.

Si $L(u_1)=L(u_2)$, entonces $L(u_1-u_2)=0$, ya que L es lineal. Por ser L acotada inferiormente existe $\mu>0$ tal que

$$0=\|L(u_1-u_2)\|\geq \frac{\|u_1-u_2\|}{\mu}\geq 0$$

Por ser S un espacio de Banach, tenemos

$$\|u_1-u_2\|=0 \quad \text{implica} \quad u_1=u_2$$

Es decir, $L(u_1)=L(u_2)$, L acotada inferiormente implica $u_1=u_2$. Por lo tanto L es inyectiva. Para ver que M es acotada, sabemos que existe $\mu>0$ tal que $\|Lu\|\geq\frac{\|u\|}{\mu}$ para cada u en S. Pero si $Lu=v$, aplicamos M a esta igualdad y tenemos $u=Mv$, $\|Lu\|\geq\frac{\|u\|}{\mu}$ implica $\|v\|\geq\frac{\|Mv\|}{\mu}$, es decir $\|Mv\|\leq\mu\|v\|$, luego M es acotada.

DEFINICION: Sean X y $\mathbb{R}$ dos espacios normados, $f: X\longmapsto\mathbb{R}$. Diremos que f es semicontinua inferiormente en $a\in X$ si y solamente si para cada $\epsilon>0$ existe V una vecindad de a tal que para cada v en V se tiene $f(v)\geq f(a)-\epsilon$.

PROPOSICION 1.5 Sea f como en la definición anterior, con X compacto, entonces si f es semi- continua inferiormente implica que f está acotada inferiormente.

PRUEBA. Como f es semicontínua inferiormente y a en X, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe una vecindad V de a. Tal que, para cada v en V $f(v) \geq f(a) - \epsilon$. Fijemos $\epsilon > 0$, entonces

$$X \subset \bigcup_{a \in J} V_a$$

Como X es compacto tenemos

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{a_i}$$

para alguna i en IN. Por consiguiente para cada a en X existe j en IN Tal que a esta en V_{a_i}, luego

$$f(a) + \epsilon \geq f(a_i)$$

Si $M = \min\limits_{1 \leq j \leq i} \{ f(a_j) \}$, concluimos con

$$f(a) + \epsilon \geq f(a_i) \geq M$$

como esto sucede para cada a en X, entonces f es acotada inferiormente.

II. TRANSFORMACIONES LINEALES.

Sea S un espacio de Banach y $L: S \mapsto S$ una Transformación lineal. Si L es una transformación inyectiva, entonces la función inversa de L, que la denotaremos por M, existe, es lineal y única. En este capítulo demostraremos el siguiente Teorema:

TEOREMA 2.1 Sea S un espacio de Banach y $L: S \longmapsto S$ una Transformación lineal. Sea $L^*: S \mapsto L(S)$ una Transformación con inversa M^*. Supongamos que podemos encontrar una familia de Transformaciones

$$L^{s'}: S \longmapsto L(S) \qquad 0 \leq s' \leq 1$$
$$L^{s'}(u) = L(s', u)$$

Tal que $L(1, u) = L(u)$ y $L(0, u) = L^*(u)$. Supongamos que la familia $L(s, u)$, con $0 \leq s \leq 1$, puede ser elegida de Tal manera que:

a.- $L(s, u)$ es continua en s relativa a $\|u\|$; especificamente, para cada $\epsilon > 0$ existe un número $\delta(\epsilon, s) > 0$ Tal que $|s' - s| \leq \delta(\epsilon, s)$ implica que

$$\|L(s', u) - L(s, u)\| \leq \epsilon \|u\| \quad \text{para cada } u.$$

b.- $L(s, u)$ es acotada inferiormente; especifica mente, para cada s, existe un número $\mu(s) > 0$ tal que,

$$\| L(s,u) \| \geq \frac{1}{\mu(s)} \|u\|.$$

Entonces, para $0 \leq s \leq 1$, la inversa $M(s,v)$ de $L(s,u)$ esta uniformemente acotada, y $M(s,v)$ puede ser encontrada, a partir de M^*, por el Método de Continuación en un número finito de etapas.

Este teorema será de mucha utilidad en los capitulos posteriores. También daremos, en los corolarios 2.1.1 y 2.1.2, alternativas a la hipótesis b. Antes de demostrar el teorema 2.1 presentaremos algunos resultados.

LEMA 2.1 En la hipótesis a del Teorema 2.1 la $\delta(\epsilon, s)$ se elige independientemente de s.

PRUEBA.- Sea $\epsilon > 0$ dada. Como $L(s,u)$ es contínua en s relativa a $\|u\|$, entonces para cada s elemento de $J = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ tenemos que $|s' - s| \leq \delta(\frac{\epsilon}{2}, s)$ implica $\| L(s',u) - L(s,u) \| \leq \frac{\epsilon}{2} \|u\|$. Ahora para cada s elemento de J definamos V_r como una vecindad de s con radio $r = \frac{\delta(\frac{\epsilon}{2}, s)}{2}$, entonces se tiene

$$J \subset \bigcup_{s \in J} V_{r(\epsilon,s)}$$

Como J es compacto tenemos

$$J \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{r(\epsilon,s_i)}$$

para alguna n elemento de $\mathbb{N}$. Tomémos s' elemento de J con $|s-s'| \leq \delta(\epsilon) := \min_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{2} \delta(\frac{\epsilon}{2}, s_i)$. Como s' es elemento de J, existe i con $1 \leq i \leq n$ tal que

$$|s - s_i| \leq r(\epsilon, s_i)$$

Por lo tanto

$$① \cdots\cdots |s'-s_i| \leq |s'-s| + |s-s_i| \leq \delta(\epsilon) + r(\epsilon, s_i)$$
$$\leq r(\epsilon,s_i) + r(\epsilon,s_i) \leq \delta(\tfrac{\epsilon}{2}, s_i)$$

Resumiendo. Dada $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon)$ tal que $|s-s'| < \delta(\epsilon)$ implica, ① y

$$\|L(s,u) - L(s',u)\| \leq \|L(s,u) - L(s_i,u)\| + \|L(s_i,u) - L(s',u)\|$$
$$\leq \frac{\epsilon}{2}\|u\| + \frac{\epsilon}{2}\|u\| = \epsilon\|u\|$$

es decir se cumple la hipòtesis a del Teorema 2.1 y $\delta(\epsilon)$ no depende s, lo que se quería demostrar.

LEMA. 2.2 .. En la hipòtesis b del Teorema 2.1 se tiene

$$\mu = \sup \mu(s) < \infty$$

donde sup. significa mínima cota superior.

PRUEBA.. Demostraremos que $(\mu(s))^{-1} := \frac{1}{\mu(s)}$ es semicontinua inferiormente.

Sea $\epsilon > 0$, por la hipótesi a del Teorema 2.1 junto con el lema 2.1, existe $\delta(\epsilon) > 0$ Tal que

② ..... $|s' - s| \leq \delta(\epsilon)$ implica $\| L(s', u) - L(s, u) \| \leq \epsilon \|u\|$.

Utilizando la desegualdad del Triángulo y ② Tenemos

③ ....
$$\| L(s', u) \| \geq \| L(s, u) \| - \| L(s', u) - L(s, u) \| \geq \frac{1}{\mu(s)} \|u\| - \epsilon \|u\|$$

donde $\mu(s)$ es la mínima cota superiór de $L(s, u)$ para cada $s \in J$. De ③ y siendo $\mu(s')$ la mínima cota superior de $L(s', u)$ Tenemos

④ .....
$$\frac{1}{\mu(s')} \geq \frac{1}{\mu(s)} - \epsilon$$

Es decir, dada $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon)$ Tal que $|s' - s| \leq \delta(\epsilon)$ implica ④. Como s es arbitraria, se sigue que $\frac{1}{\mu(s)}$ es semicontinua inferiormente en Todo J. Como J es compacto la proposición 1.5 nos permite afirmar que el lema 2.2 es cierto.

DEFINICIONES. a.- Una sucesión $\{X_n\} \subset S$ será llamada fundamental si, para cada vecindad V del origen, hay un entero positivo n_0 tal que $(x_m - x_n)$ pertenece a V para $m > n_0$ y $n > n_0$.

b.- Un subconjunto $K \subset S$ será llamado completo por sucesiones si para cualquier sucesión fundamental $\{x_n\} \subset S$ ésta converge a un punto de K.

La construcción usada en el Método de Continuación, donde ya sea que L sea lineal o no, está basado en el siguiente teorema fundamental de unicidad y existencia. En este trabajo lo enunciaremos como lema.

LEMA. 2.3 Sea S un espacio de Banach y $H: S \mapsto S$. Supongamos que, para algún número fijo $N > 0$:

a) $\|x\| \leq N$ implica $\|H(x)\| \leq N$

b) Existe θ con $0 < \theta < 1$ tal que $\|x\| \leq N$, $\|x'\| \leq N$ implica $\|H(x') - H(x)\| \leq \theta \|x - x'\|$.

Entonces hay un único x tal que $\|x\| \leq N$ y $H(x) = x$.

PRUEBA.. Sea x_0 tal que $\|x_0\| \leq N$, entonces por la hipótesis a) tenemos $\|f(x_0)\| \leq N$, definimos inductivamente $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ como $H(x_n) = x_{n+1}$ con $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Aplicando n veces la hipótesis b), tenemos

$$\|X_{n+1} - X_n\| = \|H(X_n) - H(X_{n-1})\| \leq \theta \|X_n - X_{n-1}\| =$$
$$= \theta \|H(X_{n-1}) - H(X_{n-2})\| \leq \theta^2 \|X_{n-1} - X_{n-2}\| =$$
$$= \theta^2 \|H(X_{n-2}) - H(X_{n-3})\| \leq \theta^3 \|X_{n-2} - X_{n-3}\| \leq$$
$$\leq \cdots \leq \theta^n \|X_1 - X_0\|.$$

Es decir

⑤ ----- $$\|X_{n+1} - X_n\| \leq \theta^n \|X_1 - X_0\|$$

Tenemos por Tanto

⑥ .... $$X_{m+p} - X_m = (X_{m+p} - X_{m+p-1}) + (X_{m+p-1} - X_{m+p-2}) + \cdots + (X_{m+1} - X_m)$$

Aplicando la desigualdad del Triángulo a ⑥ y por ① Tenemos

$$\|X_{m+p} - X_m\| \leq \theta^{m+p-1} \|X_1 - X_0\| + \cdots + \theta^m \|X_1 - X_0\|$$
$$= (\theta^{m+p-1} + \cdots + \theta^m) \|X_1 - X_0\|.$$

Como el conjunto $K(X_1 - X_0) := \{y \in S : \|y\| \leq \|X_1 - X_0\|\}$ es - acotado, existe $\delta > 0$ correspondiendo a cada vecindad U del cero, Tal que $0 < \beta < \delta$ implica

$$\beta K(X_1 - X_0) \subset U.$$

Ahora como $0 < \theta < 1$, entonces $\Sigma_1 \theta^n$ converge, y para m suficientemente grande y para cualquier p Tenemos $X_{m+p} - X_m$ pertenece a U, por lo Tanto $\{X_n\}$ es una sucesión fundamental totalmente contenida en $A = \{y : \|y\| \leq N\}$. Como A es cerrado y está contenido en S, que a su vez es un espacio de Banach, entonces A es completo. Por lo tanto $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$ pertenece a A, es decir $\|X\| \leq N$. Por la continuidad de H tenemos $H(x) = x$, con esto nuestro lema 2.3 queda demostrado.

Ahora estamos preparados para demostrar el Teorema 2.1.

PRUEBA DEL TEOREMA 2.1. Supongamos que s_0 es un valor particular de $J = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ de tal manera que $L(s_0, u)$ tiene inversa $M(s_0, v)$. Demostraremos primero que, si $|s - s_0|$ es suficientemente pequeño, entonces la inversa $M(s,v)$ de $L(s,u)$ se puede calcular utilizando el lema 2.3.

Si $|s - s_0|$ es suficientemente pequeño entonces L_s es inyectiva. Para demostrarlo abreviemos $L(s,u)$ en $L_s u$, $M(s,v)$ en $M_s v$. Definamos $s = s_0 + \tau$ y $L_s - L_0 = K_\tau$. Sea $a \in L(s)$, $L(s)$ esta contenida en S y es la imagen de S bajo la transformación L, sea $b = M_{s_0} a$ y definamos $u = b + z$ para cada $u \in S$.

Observemos que $a = L_s u$ si y solamente si $H_s z = z$, donde $H_s z = -M_{s_0} K_\tau (b + z)$. En efecto

(7) ..... $a = L_s u = (L_{s_0} + K_\varepsilon)(b+z) = L_{s_0} b + L_{s_0} z + K_\varepsilon(b+z)$

Como $L_{s_0} b = a$, de (7) Tenemos

(8) ..... $0 = L_{s_0} z + K_\varepsilon(b+z)$

a (8) le aplicamos M_{s_0} y concluimos con

(9) .... $z = -M_{s_0} K_\varepsilon(b+z) := H_s z$

Reciprocamente si a (9) le aplicamos la Tramformación L_{s_0} Tenemos

(10) ..... $L_{s_0} z = -K_\varepsilon(b+z)$

Sumando a ambos miembros de (10) a Tenemos

$$a = a + L_{s_0} z + K_\varepsilon(b+z) = L_{s_0} b + L_{s_0} z + K_\varepsilon(b+z)$$

Por lo Tanto

$$a = (L_{s_0} + K_\varepsilon)(b+z) = L_s u$$

Concluimos con la siguiente afirmación

(11) .... "$a = L_s u$ si y solamente si $H_s z = z$, donde $H_s z := -M_{s_0} K_\varepsilon(b+z)$".

Ahora supongamos que $u_1 = b + z_1$, $u_2 = b + z_2$ y $Lu_1 = Lu_2$ queremos demostrar que $z_1 = z_2$. Para Hacerlo demostraremos que $H_s z$ satisface las hipótesis del lema 2.3 y utilizando que $Lu_1 = Lu_2$ junto con (11) concluimos que existe un único z tal que $H_s z = z$ y con esto $z_1 = z_2$.

Como L_{s_0} es acotada inferiormente, por la hipótesis b del teorema, existe una μ que no depende de s (lema 2.2) tal que

$$\| M_{s_0} v \| \leq \mu \cdot \| v \|$$

por la proposición 1.5.

Sea θ, con $0 < \theta < 1$. Sea $\epsilon = \frac{\theta}{\mu}$, entonces existe $\delta(\epsilon) > 0$ que no depende de s (hipótesis a y lema 2.1) tal que $|s - s_0| < \delta(\epsilon)$ implica

(12) ...... $\| L_s(z' - z) - L_{s_0}(z' - z) \| = \| K_\tau (z' - z) \|$
$$\leq \left(\epsilon = \frac{\theta}{\mu}\right) \| z' - z \|$$

Por lo tanto, utilizando (12) y la definición de $H_s z$ tenemos

(13).... $\| H_s z' - H_s z \| = \| M_{s_0} K_\tau (z' - z) \| \leq \mu \| K_\tau (z' - z) \|$
$$\leq \mu \cdot \frac{\theta}{\mu} \| z' - z \| = \theta \| z' - z \|$$

siempre que $|s - s_0| \leq \delta(\epsilon)$.

Así, tomando $|s - s_0| \leq \delta(\epsilon)$ tenemos

(14)..... $\| H_s z \| = \| M_0 K_\tau (b + z) \| \leq \mu \| K_\tau (b + z) \| \leq \mu \cdot \frac{\theta}{\mu} \| b + z \|$

$$\|b+z\| \leq \|b\| + \|z\| = \|M_0 a\| + \|z\| \leq \mu\|a\| + \|z\|$$

Por lo tanto de (14) concluimos

(15) ..... $\|H_s z\| \leq \mu\theta\|a\| + \theta\|z\|$

Fijemos $N>0$ y pongamos

$$Q = \frac{1-\theta}{\mu\theta} N > 0$$

Sea $a \in L(S)$ tal que $\|a\| \leq Q$ y $|s-s_0| \leq \delta(\epsilon)$. Entonces $\|z\| \leq N$ y (15) implican

$$\|H_s z\| \leq \mu\theta \cdot \frac{1-\theta}{\mu\theta} N + \theta N = N$$

que es precisamente la hipótesis a del lema 2.3 y para $|s-s_0| \leq \delta(\epsilon)$, con $\|z\| \leq N$ tenemos

$$\|H_s z' - H_s z\| \leq \theta\|z' - z\|$$

siendo la hipótesis b del lema 2.3. Por este mismo lema concluimos, que existe una única z con $\|z\| \leq N$ y $H_s z = z$. Por lo tanto $L_s u = a$ tiene una única solución $u = b + z$ con $\|u - b\| \leq N$ para cualquier $a \in L(s)$ con $\|a\| \leq Q$. Como L_s es homogenea, en este caso lineal, $L_s u = a$ tiene solución única para cualquier $a \in L(s)$. Es decir L_s es inyectiva para s suficientemente cercana a s_0, y por lo tanto tenemos la existencia de M_0 para s

suficientemente cercana a S_0.

Como $\delta(\epsilon)$ es independiente de s, primero usamos a M^* para construir a $M(s,v)$ con $0 \leq s \leq \delta(\epsilon)$, si $\delta(\epsilon) \geq 1$ obtenemos la inversa $M(1,v)$ de $L(1,u) = Lu$, para ver que $M(s,v)$, $0 \leq s \leq 1$, es uniformemente acotada utilizamos el lema 2.2 y la proposición 1.4, con esto el Teorema 2.1 queda demostrado. En caso de que $\delta(\epsilon) < 1$, utilizamos a $M(\delta,v)$ para construir $M(s,v)$ para $\delta(\epsilon) \leq s \leq 2\delta(\epsilon)$. Si $2 \cdot \delta(\epsilon) \geq 1$ repetimos el argumento anterior y nuestro Teorema 2.1 queda demostrado. En caso contrario utilizamos a $M(2\delta(\epsilon),v)$ para construir $M(s,v)$ para $2\delta(\epsilon) \leq s \leq 3\delta(\epsilon)$, ... Construimos la inversa $M(1,v)$ de $L(1,u) = Lu$ cuando $N\delta \leq 1 \leq (N+1)\delta$ para alguna $N < \infty$. Para ver que $M(s,v)$, $0 \leq s \leq 1$, es uniformemente acotada utilizamos el lema 2.2 y la proposición 1.4, con esto el teorema 2.1 queda demostrado.

Al aplicar el Método de Continuación, debemos de tener en cuenta a θ, previamente fijado, en cada etapa y aprovecharnos de los valores de s para los cuales $\mu(s) \leq \mu$, según el lema 2.2..

El resto de este capítulo se dedicará a dar alternativas más débiles a la hipótesis b del Teorema 2.1.

COROLARIO 2.1.1. En el Teorema 2.1 la hipòtesis b, se puede sustituir por las siguientes:

b'.- Existe un número $\mu_o > 0$ Tal que $\| L(0,u)\| \geq \frac{\|u\|}{\mu_o}$ para Toda u.

c.- Existe $\epsilon > 0$ Tal que si, $\delta(\epsilon) > 0$ esta determinada por la hipòtesis a del Teorema 2.1 y por el lema 2.1, entonces

$$\mu_o \epsilon \left(\left[\frac{1}{\delta(\epsilon)} + 1 \right) < 1 .$$

donde $[\tau]$ denota el mayor entero que no exede a τ.

PRUEBA.- Sea $\epsilon > 0$ dada, por el lema 2.1 y la hipòtesis a del Teorema 2.1, existe $\delta(\epsilon) > 0$ Tal que

$$\| L(k\delta, u) - L((k-1)\delta, u)\| \leq \epsilon \|u\|$$

y

$$\| L(s,u) - L(K_s\delta, u)\| \leq \epsilon \|u\|$$

Para Toda u, donde $k = 0, 1, \ldots, K_s$, $K_s = \left[\frac{s}{\delta(\epsilon)}\right]$. Por lo Tanto, aplicando (K_s+2) veces la desigualdad del Triángulo, Tenemos

$$\| L(s,u)\| \geq \| L(0,u)\| - \| L(\delta,u) - L(0,u)\| - \| L(2\delta,u) - L(\delta,u)\| -$$

$$- \cdots - \| L(s,u) - L(K_s u, u)\|$$

$$\geq \| L(0,u)\| - (K_s+1)\epsilon \|u\| .$$

Sea $\mu(0) := \mu_0$, como $K_s \leq K_1$ y por la hipótesis b', tenemos,

$$\|L(s,u)\| \geq \mu_0^{-1}\|u\| - (K_1+1)\epsilon\|u\|$$
$$= [\mu_0^{-1} - (K_1+1)\epsilon]\,\|u\|$$

Para toda s y para toda u. Por la hipótesis c, tenemos

$$(\mu_0^{-1} - (K_1+1)\epsilon) > 0$$

Es decir para cada s, $0 \leq s \leq 1$, hay una $\mu^{-1} = \mu_0^{-1} - (K_1+1)\epsilon > 0$ tal que

$$\|L(s,u)\| \geq \frac{1}{\mu}\|u\|$$

que es precisamente la hipótesis b del Teorema 2.1. Con esto el corolario 2.1.1 queda demostrado.

En el corolario siguiente presentamos otra alternativa a la hipótesis b del Teorema 2.1.

COROLARIO 2.1.2. En el Teorema 2.1 la hipótesis b se puede sustituir por las siguientes hipótesis:

b'.- Existe un número $\mu_0 > 0$ tal que $\|L(0,u)\| \geq \frac{\|u\|}{\mu_0}$ para toda u. (hipótesis b' del corolario 2.1.1).

d.- Existe un número $\theta_0 > 0$ tal que si $\delta\left(\frac{\theta_0}{\mu_0}\right)$ está determinada por la hipótesis a del Teorema 2.1.

entonces

$$\left(\left[\frac{1}{\theta_0}\right]-1\right)\delta\left(\frac{\theta_0}{\mu_0}\right)\geq 1$$

donde $[T]$ denota el mayor entero que no excede a T.

PRUEBA.. Por la hipótesis b' hay un número μ_0 tal que

(16) .....
$$\|L(0,u)\|\geq\frac{\|u\|}{\mu_0}$$

Sea $0<\theta_0<1$. Por la hipótesis a del Teorema 2.1, dada $\epsilon_0=\frac{\theta_0}{\mu_0}$ hay una $\delta(\epsilon_0)$, por el lema 2.1 no depende de s, tal que si $|s|\leq\delta(\epsilon_0)$ implica

(17) ....
$$\|L(0,u)-L(s,u)\|\leq\epsilon_0\|u\|$$

Por lo tanto, como

$$\|L(0,u)\|\leq\|L(s,u)\|+\|L(0,u)-L(s,u)\|$$

Tenemos por (16) y (17)

$$\frac{\|u\|}{\mu_0}-\frac{\theta_0}{\mu_0}\|u\|\leq\|L(s,u)\|$$

siempre que $|s|\leq\delta(\epsilon_0)$. Por lo tanto

$$\frac{1-\theta_0}{\mu_0}\leq\frac{1}{\mu(s)}$$

donde $\mu(s)^{-1}$ es el ínfimo* de $\|L(s,u)\|$. Concluimos con

(18) .....
$$\frac{1-\theta_0}{\mu_0}\|u\|\leq\frac{1}{\mu(s)}\|u\|\leq\|L(s,u)\|$$

* con respecto a u

Ahora Tomemos $\theta_1 = \frac{\theta_0}{1-\theta_0}$, $\mu_1 = \frac{\mu_0}{1-\theta_0}$, y $\epsilon_1 = \frac{\theta_1}{\mu_1}$. Observemos que $\frac{\theta_1}{\mu_1} = \frac{\theta_0}{\mu_0}$. Repitamos el proceso anterior. Es decir, por la hipótesis a del teorema 2.1 existe $\delta(\epsilon_1) = \delta(\epsilon_0)$ tal que si $|s - \delta(\epsilon_0)| \leq \delta(\epsilon_1) = \delta(\epsilon_0)$ implica

(19) ------ $\quad \| L(\delta, u) - L(s,u) \| \leq \epsilon_1 \|u\| = \epsilon_0 \|u\|$

luego

(19') ---- $\quad \| L(\delta, u)\| - \| L(\delta, u) - L(s,u)\| \leq \| L(s,u)\|$

si tomamos $|s - \delta(\epsilon_0)| \leq \delta(\epsilon_0)$, tenemos por (19), (18) y (19')

$$\frac{1-\theta_0}{\mu_0}\|u\| - \frac{\theta_0}{\mu_0}\|u\| \leq \| L(s,u)\|$$

concluimos con

$$\frac{1}{\mu_2} := \frac{1-2\theta_0}{\mu_0}\|u\| \leq \frac{1}{\mu(s)}\|u\| \leq \| L(2\delta, u)\|$$

Repitiendo este procedimiento podemos tomar $k = 0, 1, \ldots, N$, donde $(N+1)\theta_0 < 1 \leq (N+2)\theta_2$, y

$$\theta_k = \frac{\theta_0}{1-k\theta_0}, \quad \mu_k = \frac{\mu_0}{1-k\theta_0}$$

Entonces $0 < \theta_k < 1$, $\mu_k < \infty$,

$$\frac{\theta_k}{\mu_k} = \frac{\theta_0}{\mu_0} = \epsilon_0, \quad \mu_{k+1} = \frac{\mu_k}{1-\theta_k}$$

como μ_k decrece con k, $\mu_k \geq \mu(s)$. Además si como $\delta\left(\frac{\theta_0}{\mu_0}\right) = \delta\left(\frac{\theta_K}{\mu_K}\right)$ y $(K-1)\delta \le s \le K\delta$ entonces

$$\| L(s,u) \| \ge \frac{\|u\|}{\mu_K}$$

Es decir $L(s,u)$ esta acotada inferiormente si $(K-1)\delta \le s \le K\delta$. Por la hipótesis d, si Tomamos $K = \left(\left[\frac{1}{\theta_0}\right] - 1 \right) \delta\left(\frac{\theta_0}{\mu_0}\right) \ge 1$, Tendremos

$$\| L(s,u) \| \ge \frac{\|u\|}{\mu_K}$$

Para $0 \le s \le 1$, es decir se cumple la hipótesis b del Teorema 2.1, con esto se prueba el corolario 2.1.2.

III. CONTINUACION LOCAL

A. SUPOSICIONES.- Sean: S un espacio de Banach $T_s: S \mapsto S$ con s elemento de $J:=\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$, una familia de Transformaciones y (s_0, x_0) un elemento de $J \times S$ con $T_{s_0}(x_0) := T(s_0, x_0) = 0$. En este capitulo demostraremos, bajo ciertas hipótesis, que para alguna vecindad U de s_0 $T(s, x(s)) = 0$ con s elemento de U y $x(s)$ continua.

DEFINICION.- Diremos que $T(s,x)$ es diferenciable si existe $L(s,x,u)$, una Transformación lineal en u, definida en S, Tal que

$$(3.1) \ldots\ T(s, x+u) - T(s,x) = L(s,x,u) + \|u\| R(s,x,u)$$

con $u \neq 0$, y con la propiedad de $R(s,x,u) \mapsto 0$ siempre que $u \mapsto 0$. Si esto sucede diremos que $L(s,x,u)$ es la diferencial de $T(s,x)$.

Empezamos con las siguientes suposiciones:

LBCU: Para cada s elemento de J, x elemento de $S^N = \{y \in S : \|y\| \leq N\}$, la diferencial $L(s,x,u)$ de $T(s,x)$ existe. La Transformación $u \mapsto L(s,x,u)$ Tiene dominio S, su rango V es un subespacio de S que no depende de x ni de s, $L(s,x,u)$ es acotada inferiormente en s elemento de J y x elemento de S^N.

Especificamente:

1.- Hay una constante $\mu > 0$ tal que s elemento de J y x elemento de S^N implica que, para toda u,

$$\| L(s, x, u) \| \geq \frac{\|u\|}{\mu}$$

2.- Para $\epsilon_2 > 0$ existen números $\delta_2(\epsilon_2) > 0$ y $\alpha_2(\epsilon_2) > 0$ tales que s elemento de J, $\forall$ s' elemento de J, x en S^N, x' en S^N, $|s' - s| \leq \delta_2$, $\|x' - x\| \leq \alpha_2$ implican que, para cada u,

$$\| L(s', x', u) - L(s, x, u) \| \leq \epsilon_2 \|u\|.$$

RU: Cuando $u \mapsto 0$, $R(s, x, u) \mapsto 0$ uniformemente para s en J y x en S^N.

Especificamente: Para cada $\epsilon_3 > 0$ existe una constante $\beta(\epsilon_3) > 0$ tal que s en J, x en S^N, y $\|u\| \leq \beta$ implica

$$\| R(s, x, u) \| \leq \epsilon_3$$

TV: Para cada s en J, x en S^N, $T(s, x)$ en V.

En otras palabras, para cada s en J, $T_s(S)$ es un subconjunto del sub-espacio V de S el cual es el rango de la diferencial $L(s,x,u)$.

TCU: $T(s,x)$ es continua en s uniformemente para s en J y x en S^N.
Es decir; Para cada $\epsilon_1 > 0$ existe $\delta_1(\epsilon_1) > 0$ Tal que s en J, s' en J, x en S^N y $|s'-s| \leq \delta_1$ implican

$$\| T(s',x) - T(s,x) \| \leq \epsilon_1$$

La continuidad de $T(s,x)$ en x no es requerida (hasta el capitulo VI), ni insistiremos en que $L(s,x,u)$ sea acotada superiormente en u (lo cual implicará la continuidad de $T(s,x)$).

Por objeto de claridad y fácil referencia, estas suposiciones serán establecidas de una manera no necesariamente fuerte y redundante. Por ejemplo, como J es compacto la pura continuidad en s implica la continuidad uniforme en s. Suposiciones más débiles las daremos en el capitulo V.

Supongamos ahora que $T(s_0,x_0)=0$ s_0 en J y x_0 en S^N. Nuestra primera meta es construir una solución única localmente continua $x(s)$ para $|s-s_0| \leq \sigma(x_0)$, donde $\sigma(x_0) > 0$ está determinada. Para este fin -

demostraremos ciertos lemas, utilizando como hipótesis las proposiciones anteriores

B. LEMAS: El siguiente lema es una consecuencia inmediata de LBCU y de la proposición 1.4 en el capítulo I.

LEMA 3.1. Para cada s en J y x en S^N, la inversa $v \mapsto u = M(s,x,v)$ de $L(s,x,u)$ existe y tiene dominio V, rango S; además, M uniformemente acotada; $\|M(s,x,v)\| \leq \mu \|v\|$.

Como $T(s,x)$ y $T(s,x+u)$ estan en V, por proposición TV, se sigue de la definición de $L(s,x,u)$ que $\|u\| R(s,x,u)$ está también en V. Por lo tanto $M(s,x,v)$ se le puede aplicar a v, siempre y cuando v sea una combinación lineal de términos de la forma $T(s_1,x_1)$, $L(s_2,x_2,u_2)$ y $\|u_2\| R(S_3, x_3, u_3)$.

La posibilidad de calcular $M(s,x,v)$ por el Método de Continuación, será establecida en el siguiente corolario del Teorema 2.1.

COROLARIO 3.1.1. Bajo la hipótesis LBCU, la inversa $M(s,x,v)$ de $L(s,x,u)$, se puede calcular para cada s en J, x en S^N, por el Método de Continuación en un número finito de pasos, a partir de cualquier x_0 dada en S^N.

PRUEBA. Es suficiente probar que la Transformación $K(s,u) = L(s, x_0 + s(x-x_0), u)$ Tiene las propiedades requeridas en las hipótesis del Teorema 2.1. Como x y x_0 estan en S^N; s en J y S^N convexo, entonces $x_0 + s(x-x_0)$ está en S^N, por el lema 3.1 y la proposición 1.4 del capítulo I, la hipótesis b es cierta, la hipótesis a se sigue de la siguiente observación:

$$\| K(s',u) - K(s,u) \| = \| L(s', x_0 + s(x-x_0), u) - L(s, x_0+s(x-x_0), u) \| \leq \epsilon_2 \|u\|$$

si $|s'-s| \leq \delta_2$ y $\| (s'-s)(x-x_0) \| \leq \alpha_2$, es decir

$$|s'-s| \leq \delta = \min\left(\delta_2, \frac{\alpha_2}{\|x-x_0\|} \right).$$

LEMA 3.2. Las hipótesis LBCU y RU implican que $\|u\| R(s,x,u)$ satisfacen una condición fuerte, la condición de Lipschitz con respecto a u uniformemente para s en J, x en S^N, es decir; Para $\epsilon > 0$ existe $\alpha > 0$ Tal que $\|u\| \leq \alpha$, $\|u'\| \leq \alpha$, s en J, x en S^N, $x+u$ en S^N, implican

$$\| \, \|u'\| R(s,x,u') - \|u\| R(s,x,u) \| \leq \epsilon \| u'-u \|.$$

PRUEBA.- Empezamos con

$$
\begin{aligned}
&\| \|u'\| R(s,x,u') - \|u\| R(s,x,u) \| = \\
(3.2)\quad &= \| T(s,x+u') - T(s,x) - L(s,x,u') - T(s,x+u) + T(s,x) + L(s,x,u) \| \\
&= \| L(s,x+u,u'-u) - L(s,x,u'-u) + \|u'-u\| R(s,x+u,u'-u) \| \\
&\leq \| L(s,x+u,u'-u) - L(s,x,u'-u) \| + \| R(s,x+u,u'-u) \| \, \| u'-u \|
\end{aligned}
$$

la primera y segunda igualdad por (3.1).

Ahora sea $\epsilon > 0$ dada. Por LBCU2, hay un número $\alpha_2 > 0$ tal que x en S^N, $x+u$ en S^N y $\|u\| \leq \alpha_2$ implican

(3.3) --- $\quad \|L(s,x+u,u'-u) - L(s,x,u'-u)\| \leq \frac{\epsilon}{2} \|u'-u\|.$

por RU, hay un número $\beta > 0$ tal que $x+u$ en S^N y $\|u'-u\| \leq \beta$ implican

(3.4) ----- $\quad \|R(s,x+u,u'-u)\| \leq \frac{\epsilon}{2}$

sea $\alpha = \min(\alpha_2, \frac{1}{2}\beta)$, entonces $s \in J$, x en S^N, $x+u$ en S^N, $\|u\| \leq \alpha$, $\|u'\| \leq \alpha$ y (3.2), (3.3) y (3.4) implican

$$\| \|u'\| R(s,x,u') - \|u\| R(s,x,u) \| \leq \epsilon \|u'-u\|$$

con esto el lema 3.2 queda demostrado.

C. EXISTENCIA, CONTINUIDAD Y UNICIDAD LOCAL DE UNA SOLUCION LOCAL. Nos es posible construir una solución local $x(s)$ en la vecindad de una solución conocida $x_0(s_0)$, y verificar su continuidad y unicidad local. Aunque en la construcción se necesita el lema 2.3, parece necesario exibir los detalles para revelar claramente el origen de la lòngitud de la etapa uniforme (ver capitulo IV).

Sea S_o en J y X_o un punto interiór de S^N tal que $T(S_o, X_o) = 0$. Sea $M(S_o, X_o, v)$, la inversa de $L(S_o, X_o, v)$, denotada por brevedad por M_o. Pongamos $x = X_o + y$. Buscaremos condiciones necesarias y suficientes para que la ecuación

$$(3.5)\ldots \qquad T(s, x) = T(s, X_o + y) = 0$$

sea cierta para una única y suficientemente - pequeña.

Supongamos pues que (3.5) es cierta para alguna y suficientemente pequeña. Entonces

$$(3.6) \qquad L(S_o, X_o, y) = -T(S, X_o + y) + L(S_o, X_o, y)$$

Apliciando M_o a (3.6), obtenemos para y, la ecuación

$$(3.7) \qquad y = M_o[-T(S, X_o+y) + L(S_o, X_o, y)]$$

$$y = M_o[-T(S, X_o+y) + T(S_o, X_o+y) - T(S_o, X_o+y) + T(S_o, X_o) + L(S_o, X_o, y)]$$

$$(3.8)\ldots \qquad y = M_o[-T(S, X_o+y) + T(S_o, X_o+y) - \|y\| R(S_o, X_o, y)]$$

$$(3.9)\ldots \qquad y := H(s, y)$$

Es decir

$$(3.10) \cdots\quad y = M_0[-T(s, x_0+y) + T(s_0, x_0+y) - \|y\| R(s_0, x_0, y)] := H(s,y)$$

Por lo tanto $T(s, x_0+y)=0$ implica $y = H(s,y)$, donde $H(s,y)$ está definida en la expresión (3.10). Recíprocamente, si $H(s,y)=y$ entonces (3.9), (3.8) y (3.7) también son ciertas, aplicamos $L(s_0, x_0, u)$ a (3.7) y tenemos (3.5), es decir $H(s,y)=y$ implica $T(s, x_0+y)=0$.

Si probamos que $H(s,y)$ satisface las hipótesis del lema 2.3, entonces hay una única y tal que $H(s,y)=y$, concluyendo así que hay una única y, suficientemente pequeña ..., tal que $T(s,x_0+y)=0$, lo que se quiere demostrar. Vamos pues a demostrar que $H(s,y)$ satisface las hipótesis del lema 2.3. Empezamos con la condición de Lipschitz, observando primero que, por (3.9) y (3.7)

$$\begin{aligned}(3.11) \cdots\quad H(s,y') - H(s,y) &= M_0[-T(s, x_0+y') + T(s, x_0+y) + L(s_0, x_0, y'-y)] \\ &= M_0[-L(s,x_0,y') + L(s,x_0,y) + L(s_0,x_0,y'-y) \\ &\quad - \|y'\| R(s,x_0,y') + \|y\| R(s,x_0,y)].\end{aligned}$$

por consiguiente, aplicando la desigualdad del triángulo a (3.11) y como M_0 es acotada, se tiene

$$\begin{aligned}(3.12) \cdots\quad \|H(s,y') - H(s,y)\| &\leq \mu \|L(s, x_0, y'-y) - L(s_0, x_0, y'-y)\| \\ &\quad + \mu \|\, \|y'\| R(s,x_0,y') - \|y\| R(s,x_0,y)\|.\end{aligned}$$

Elijamos θ con $0<\theta<1$ y pongamos $\epsilon = \frac{\theta}{2\mu}$. Por LBCU2. hay un número $\delta_2>0$ tal que $s\in J$ y $|s-s_0|\leq \delta_2$ implican

(3.13) $$\|L(s,x_0,y'-y) - L(s_0,x_0,y'-y)\| \leq \epsilon\|y'-y\|$$

Además, por el lema 3.2, hay un número $\alpha>0$ tal que s en J, x_0+y en S^N, $\|y\|\leq y$ y $\|y'\|\leq\alpha$ implican

(3.14) ... $$\|\,\|y'\|R(s,x_0,y') - \|y\|R(s,x_0,y)\| \leq \epsilon\|y'-y\|$$

Por consiguiente, s en J, $|s-s_0|\leq\delta_2$, $\|y\|\leq\alpha$, x_0+y en S^N, (3.12), (3.13) y (3.14) implican

(3.15) ... $$\|H(s,y') - H(s,y)\| \leq \theta\|y'-y\|.$$

Por otro lado; (3.8), M_0 acotada y la desigualdad del triángulo, implican

(3.16) $$\|H(s,y)\| \leq \mu\|T(s,x_0+y) - T(s_0,x_0+y)\| + \mu\|y\|\,\|R(s_0,x_0,y)\|.$$

Por la condición RU, hay un número $\beta'>0$ tal que $\|y\|\leq\beta'$ implica

(3.17) ... $$\|R(s_0,x_0,y)\|\leq\epsilon$$

Por la condición TCU, hay un número $\delta_1(\epsilon_1)>0$ tal que, x_0+y en S^N, s en J y $|s-s_0|\leq\delta_1(\epsilon_1)$ implican

(3.18) ... $$\|T(s,x_0+y) - T(s_0,x_0+y)\|\leq\epsilon,$$

Ahora pongamos

$$K = \min(\alpha, \beta')$$

(3.19) $$v(x_0) = \min(K, N - \|x_0\|)$$

$$\epsilon_1 = \left(1 - \frac{\theta}{2}\right) \frac{v(x_0)}{\mu}$$

$$\sigma(v(x_0)) = \min(\delta_1(\epsilon_1), \delta_2)$$

mantengamos $|s - s_0| \leq \sigma(v(x_0))$, $s \in J$, $\|y\| \leq v(x_0)$, $\|y'\| \leq v(x_0)$, entonces $x_0 + y$ está en S^N, $x_0 + y'$ en S^N y

$$\| H(s, y') - H(s, y) \| \leq \theta \| y' - y \|$$

además, de (3.16), (3.17), (3.18) y (3.19) tenemos

$$\| H(s, y) \| \leq \mu \left(1 - \frac{\theta}{2}\right) \frac{v(x_0)}{\mu} + \mu \frac{\theta}{2\mu} v(x_0) = v(x_0)$$

ya que $\epsilon = \frac{\theta}{2\mu}$. El lema 2.2 nos permite, para cada s en J con $|s - s_0| \leq \sigma(v(x_0))$, una única y, que depende de s, tal que $\|y\| \leq v(x_0)$ y $H(s, y(s)) = y(s)$. Con esto probamos que hay una única $y(s)$ suficientemente pequeña tal que $T(s, x_0 + y(s)) = 0$.

Ahora probaremos que $y(s)$ es contínua para $|s - s_0| \leq \sigma(v(x_0))$. Pongamos primero, de (3.9)

(3.20).. $$\| y(s) - y(s_0) \| = \| H(s, y(s)) - H(s, y(s_0)) + H(s, y(s_0)) - H(s_0, y(s_0)) \|$$
$$\leq \| H(s, y(s)) - H(s, y(s_0)) \| + \| H(s, y(s_0)) - H(s_0, y(s_0)) \|$$

de (3.10) y (3.20) resulta

$$(3.21)\quad \|y(s)-y(s_0)\| \le \|H(s,y(s))-H(s,y(s_0))\| +$$
$$+\|M_0(-T(s,x_0+y(s_0))+T(s_0,x_0+y(s_0))-\|y(s_0)\|R(s_0,x_0,y(s_0))$$
$$-M_0(-T(s_0,x_0+y(s_0))+T(s_0,x_0+y(s_0))-\|y(s_0)\|R(s_0,x_0,y(s_0))\|.$$

pero

$$(3.22)\quad \|H(s,y(s))-H(s,y(s_0))\| \le \theta\|y(s)-y(s_0)\|$$

y como M_0 es lineal y acotada, de (3.21) y (3.22) concluimos

$$(3.23)\quad \|y(s)-y(s_0)\| \le \theta\|y(s)-y(s_0)\| + \mu\|T(s,x_0+y(s_0))-T(s_0,x_0+y(s_0))\|$$

utilizando ϵ_1, existe $\delta_1(\epsilon_1)$ tal que

$$|s-s_0| \le \sigma(v(x_0)) = \min(\delta_1(\epsilon_1),\delta_2) \le \delta_1(\epsilon_1)$$

Entonces de (3.18) y (3.23) concluimos con

$$\|y(s)-y(s_0)\| \le \theta\|y(s)-y(s_0)\| + \mu\epsilon_1$$

por consiguiente

$$(1-\theta)\|y(s)-y(s_0)\| \le \mu\epsilon_1$$

luego $y(s)$ es continua.

Para $|s-s_0| \le \sigma(v(x_0))$ y s en J, escribamos

$$x(s) = x_0 + y(s)$$

Como $T(s, x(s)) = 0$, podemos repetir el argumento anterior $x_0' = x(s)$ en lugar de x_0. Esta situación será explicada con más detalle en el próximo capítulo. Deducimos de la conclusión, que $x(s)$ es localmente única en el siguiente sentido:

$$\|x - x(s)\| \leq v(x(s)) \leq \min(K, N - \|x(s)\|) \quad y \quad T(s, x) = 0$$

implican $x = x(s)$. Es decir, con s fijo, hay una bola centrada en $x(s)$ con radio $v(x(s))$, tal que $T(s,x) = 0$ tiene a $x(s)$ como única solución. Los anteriores resultados se pueden resumir en el siguiente teorema. (Similares Teoremas se dan en [12] Teo. 4 y [13])

TEOREMA 3.1 Sea s_0 en J y x_0 en el interior de S^N con la propiedad $T(s_0, x_0) = 0$. Bajo las proposiciones LBCV, RV, TV y TCV se puede determinar una constante $K > 0$, un número $v(x_0) = \min(K, N - \|x_0\|)$, y un número $\sigma(v(x_0))$ dependiendo solo de $v(x_0)$ tal que, para s en J y $|s - s_0| \leq \sigma(v(x_0))$, existe una función continua x definida en $[s_0 - \sigma(v(x_0)), s_0 + \sigma(v(x_0))]$ y con valores en S con la propiedad de $T(s, x(s)) = 0$. La función x con esta propiedad es única.

IV. LONGITUD UNIFORME DE LA ETAPA.

Definición.- En el Teorema 3.1 tenemos $T(\sigma(v(x_0)), X(\sigma(v(x_0)))) = 0$, si $\|X(\sigma(v(x_0)))\| < N$ entonces a $\sigma(v(x_0))$ la llamaremos longitud de la etapa.

Supongamos que:

O^*G: $T^*(x) = T(0,x)$ y $T^*(x^*) = 0$ para alguna x^* en $S^N = \{x \in S : \|x\| \leq N\}$, entonces $\|x^*\| < N$, además $T^*(x_1^*) = 0$, x_1^* en S^N implica $x^* = x_1^*$.

Sea pues $T(0,x^*) = 0$ para alguna x^* en S^N, por O^*G tenemos $\|x^*\| < N$, entonces aplicamos el Teorema 3.1, con $s_0 = 0$ y $x_0 = x^*$, obteniendo así una única solución localmente continua $x(s)$ para $T(s,x) = 0$ con $0 \leq s \leq \sigma(v(x^*))$, donde $\sigma(v(x^*))$ está determinada de manera única por $v(x^*) = \min(R, N - \|x^*\|)$, en la demostración del Teorema 3.1. Si $\sigma(v(x^*)) \geq 1$, entonces existe una única solución $x(1)$ para $T(1,x) = T(x)$ con $T(1, x(1)) = T(x(1)) = 0$, obteniendo así nuestro objetivo, de manera que supondremos $\sigma(v(x^*)) < 1$.

Ahora queremos aplicar nuevamente el Teorema 3.1 a $s_0 = \sigma(v(x^*))$ y $x_0 = x(\sigma(v(x^*))) = x_0^*$.

Si $v(x^*)=k$ y $\|x_0^*\| \leq N-k$, entonces x_0^* está en el interior de S^N, $T(\sigma(v(x^*)), x_0^*)=0$ y $v(x^*)=v(x_0^*)=\min\{k, N-\|x_0^*\|\}$, luego, según el Teorema 3.1, obtenemos una solución única para $T(s,x)=0$ con $\sigma(v(x^*)) \leq s \leq 2\sigma(v(x^*))$. Si $\|x(\sigma(x^*))\| > N-k$, entonces $x(\sigma(x^*))$ no está en el interior de S^N, con esta solución de $T(\sigma(x^*),x)=0$, no nos es posible repetir el anterior argumento, para hacerlo debemos tomar $0<s'<\sigma(x^*)$ y $\|x(s')\| \leq N-k$, esto es posible dada la continuidad de $x(s)$ y $\|x(0)\| = \|x^*\| < N$ (recuérdese $k=\min(\alpha,\beta')$) pero al hacer esto la longitud de la etapa disminuirá. Y si $v(x^*)=N-\|x^*\|$ y $\|x(\sigma(x^*))\|=N$, otra vez tenemos dificultades para aplicar el Teorema 3.1, en el cual se requiere $\|x(\sigma(x^*))\| < N$.

Para prevenir estas desagradables posibilidades impondremos una fuerte "cota a priori" al conjunto $\Sigma_N := \{x \in S^N$: existe s en J con $T(s,x)=0\}$. Enunciaremos la siguiente propiedad que denotaremos por:

BS: Hay un número $\rho>0$ tal que si x esta en Σ_N, entonces $\|x\| \leq N-\rho$.

BS es para prevenir que los puntos de la frontera de S^N sean soluciones de $T(s,x)$ cuando s varía. Además la solución continua x^* de $T(0,x)$ estará definida en el interior de S^N, y ninguna solución continua fuera de S^N puede alcanzar el interior. Con esto la condición O^*G es ahora superflua.

Por BS y el Teorema 3.1, hay una constante positiva $\upsilon = \min(k, N-p)$ y la correspondiente constante positiva σ tal que, para una solución dada $x_0 = x(s_0)$, podemos encontrar una solución única localmente continua, para $|s - s_0| \leq \sigma$. En particular si $0 = s_0$, $x^* = x(0)$ entonces $x(s)$ es solución única de $T(s,x) = 0$ con $0 \leq s \leq \sigma$, repitiendo el argumento anterior para $\sigma = s_0$, $x(\sigma) = x_0$, encontramos una solución única de $T(s,x) = 0$ con $\sigma \leq s \leq 2\sigma$, haciendo lo mismo con $2\sigma = s_0$, $x(2\sigma) = x_0$, encontramos una solución localmente continua $x(s)$ para $T(s,x) = 0$ con $2\sigma \leq s \leq 3\sigma$, ..., Continuando finalmente con $s_0 = n\sigma$ y $x_0 = x(n\sigma)$, encontramos una solución única localmente continua $x(s)$ para $T(s,x) = 0$ con $n\sigma \leq s \leq (n+1)\sigma$ donde $s \in J$ y $1 \leq (n+1)\sigma$. De esta manera obtenemos en $1 + [\frac{1}{\sigma}]$ etapas ($[\tau]$ el mayor entero que no exede a τ) una única solución localmente continua para $0 \leq s \leq 1$, a partir de $x(0) = x^*$.

Para formalizar el Teorema 4.1, demostraremos que, para $T(s,x)=0$ existe una única solución $x(s)$ en el interior de S^N. Por O^*G esto es cierto si $s=0$. Supongamos que $T(s_0,x_0)=0$ con $0<s_0<1$ y $X_0 \neq X(s_0)$. Por BS, $\|X_0\| \leq N-\rho$. Con $0 \leq \tau \leq 1$ consideremos la ecuación

$$U(\tau, X) = T\left((1-\tau)s_0, X\right) = 0$$

en la esfera $\|X\| \leq N$. Aplicamos el Teorema 3.1 a X_0, con $U(0,X_0)=0$ y $\|X_0\| \leq N-\rho$, obteniendo una solución única localmente continua $X(\tau)$ para $0 \leq \tau \leq 1$. Por BS, $\|X(\tau)\| \leq N-\rho$. Ya que

$$U(1, X(1)) = T(0, X(1)) = T^*(X(1)) = 0$$

se sigue de O^*G que $X(1) = X^*$.

Poniendo

$$y(s) = X\left(1 - \frac{s}{s_0}\right)$$

Tenemos, para $0 \leq s \leq s_0$, dos soluciones localmente continuas $X(s)$ y $Y(s)$, con $x(0) = y(0) = X^*$. Como

$$y(s_0) = X_0 \neq X(s_0)$$

existe al menos una s', $0 \leq s' < s_0$, tal que $y(s) = X(s)$ para $0 \leq s \leq s'$, pero esto no sucede si

$s' \leq s \leq s' + \delta$. Por la continuidad de $X(s)$ y $Y(s)$ en s', $y(s'+) = X(s'+) = X(s)$, mientras que para cualquier $\delta > 0$ el intervalo $s' \leq s < s' + \delta$ contiene valores de s en la cual $y(s) \neq X(s)$. Esto contradice la propiedad de unicidad local de s'. Concluimos, para $0 \leq s \leq 1$, $T(s,x) = 0$ no tiene otra solución distinta de $X(s)$ en el interior de S^N; es decir, $X(s)$ es única globalmente. Hemos probado el siguiente teorema.

TEOREMA 4.1. Sea $x \longmapsto T(x)$ una transformación de un espacio de Banach en sí mismo. Sea $x \longmapsto T^*(x)$ una transformación con la propiedad O^*G. Supongamos que una familia de transformaciones $x \longmapsto T(s,x)$, $0 \leq s \leq 1$, se puede encontrar de tal manera que: $T(0,x) = T^*(x)$, $T(1,x) = T(x)$ y tal que los requerimientos de las afirmaciones LBCU, RU, TV, TCU y BS se cumplen. Entonces es posible construir una función $x: J \mapsto S$ tal que $T(s, x(s)) = 0$, con x continua en J, en un número finito de pasos, a partir de la solución x^* de $T^*(x) = 0$. En particular, la solución $X(1)$ de la ecuación $T(x) = T(1,x) = 0$ se puede construir por el Método de Continuación.

V. COMPACIDAD EN EL CONJUNTO DE SOLUCIONES

Al revisar los argumentos del capitulo III y IV vemos que, excepto en la prueba del lema 3.3, la diferencial $L(s,x,u)$, su inversa $M(s,x\,v)$ y el residuo $\|u\| R(s,x,u)$, se usan solamente para parejas (s,x_0) en la cual x_0 tiene la propiedad de que $T(s_0,x_0)=0$ para alguna $x_0 \in J$. La condición O^*G implica que Σ_N no es vacío.

Usualmente muchas propiedades que se cumplen localmente, se cumplen en un conjunto compacto y se extienden uniformemente.

Supongamos:

$\Sigma_N C$: Σ_N es compacto; especificamente, cualquier sucesión de elementos de Σ_N tiene una subsucesión que converge a un elemento de Σ_N.

Suponiendo que $\Sigma_N C$ se cumple, buscaremos demostrar el Teorema 3.1 sustituyendo las hipótesis LBCU, RU y TCU, por las hipótesis que a continuación enunciaremos:

$LBC\Sigma_N$: Para cada s en J y ξ en Σ_N existe una vecindad, $U(\xi)=\{x \in S : \|x-\xi\| \leq r(\xi)\}$, de ξ tal que si x está en $U(\xi)$, entonces la diferencial $L(s,x,u)$ de $T(s,x)$ existe, su rango V esta contenido en S y no depende de s ni de x. $L(s,\xi,u)$ es acotada inferiormente, es continua en s relativo a $\|u\|$ y es continua en x relativo a $\|u\|$.

Especificamente:

1.- Para cada s en J y ξ en Σ_N hay un número $\mu(s,\xi)>0$ tal que

$$\frac{1}{\mu(s,\xi)}\|u\| \leq \|L(s,\xi,u)\|.$$

2.- Para cada $\epsilon_2>0$, s en J, $\xi\in\Sigma_N$ existen números $\delta_2(\epsilon_2,s,\xi)>0$ y $\alpha_2(\epsilon_2,s,\xi)>0$ tales que

a.- $|s'-s|\leq\delta_2(\epsilon_2,s,\xi)$ implica $\|L(s',\xi,u)-L(s,\xi,u)\|\leq\epsilon_2\|u\|$

b.- $\|x-\xi\|\leq\alpha_2(\epsilon_2,s,\xi)$ y x en $U(\xi)$ implican

$$\|L(s,x,u)-L(s,\xi,u)\|\leq\epsilon_2\|u\|.$$

$RU\Sigma_N$: Para cada ξ en Σ_N, cuando $u\mapsto 0$ se tiene $R(s,x,u)\mapsto 0$ uniformemente para s en J y x en $U(\xi)$.

$TC\Sigma_N$: Para cada $\xi\in\Sigma_N$, $T(s,x)$ es continua en s

uniformemente para $x \in U(\xi)$.

Especificamente: Para cada ξ en Σ_N y s en J, $\epsilon_1 > 0$ hay un número $\delta_1(\epsilon_1, s, \xi) > 0$ tal que

$|s' - s| \le \delta_1(\epsilon_1, s, \xi)$ implica $\| T(s', x) - T(s, x) \le \epsilon_1$,

" para cada x en $U(\xi)$

Para verificar que estas condiciones son suficientes, con la asistencia de $\Sigma_N C$ y TV, y garantizar los sucesos de la construcción local del Teorema 3.1, empezaremos por examinar la prueba del lema 3.2. Veremos la misma conclusión, ahora de la continuidad de $L(s,x,u)$ en x para $x = \xi$ y de $RU\Sigma_N$. Es decir:

LEMA 5.1 $LBC\Sigma_N$ y $RU\Sigma_N$ implican que para $\xi \in \Sigma_N$, $\|u\| R(s,x,u)$ satisface una fuerte condición de Lipschitz con respecto a u, uniformemente para s en J y x en $U(\xi)$.

Especificamente: Dada $\epsilon > 0$, existe $\alpha > 0$ tal que $\|u\| \le \alpha$, $\|u'\| \le \alpha$, s en J, x en $U(\xi)$ y $x+u$ en $U(\xi)$, implican

$$\| \, \|u'\| R(s,x,u') - \|u\| R(s,x,u) \, \| \le \epsilon \, \| u' - u \| .$$

PRUEBA.-- Haciendo los mismos cálculos que en el lema 3.2, es decir:

$$\| \|u'\| R(s,x,u') - \|u\| R(s,x,u) \| =$$
$$= \| T(s,x+u') - T(s,x) - L(s,x,u') - T(s,x+u) + T(s,x) + L(s,x,u) \|$$
$$= \| L(s,x+u,u'-u) - L(s,x,u'-u) + \|u'-u\| R(s,x+u,u'-u) \|$$
$$\leq \| L(s,x+u,u'-u) - L(s,x,u'-u) \| + \| R(s,x+u,u'-u) \| \|u'-u\|$$

luego

(5.1)... $$\| \|u'\| R(s,x,u') - \|u\| R(s,x,u) \| \leq \| L(s,x+u,u'-u) - L(s,x,u'-u) \| + \| R(s,x+u,u'-u) \| \|u'-u\|.$$

Por otra parte

(5.2) $$\| L(s,x+u,u'-u) - L(s,x,u'-u) \| \leq \| L(s,x+u,u'-u) - L(s,\xi,u'-u) \| + \| L(s,\xi,u'-u) - L(s,x,u'-u) \|$$

con ξ en Σ_{iN}. Como $x \in U(\xi) = \{ x \in S : \|x-\xi\| \leq r(\xi) \}$ hay un $\alpha_1 > 0$ de tal manera que $x+u \in U(\xi)$ y $\|u\| \leq \alpha_1$. Por LBCΣ_{iN}.2.b. existe $\alpha_2(\frac{\epsilon}{4}, s, \xi) > 0$ de tal manera que $\|x-\xi\| \leq \alpha_2$ y $\|x+u-\xi\| \leq \alpha_2$ implican

(5.3)... $$\| L(s,x+u,u'-u) - L(s,x,u'-u) \| \leq \frac{\epsilon}{4} \|u'-u\| + \frac{\epsilon}{4} \|u'-u\| = \frac{\epsilon}{2} \|u'-u\|$$

Ahora por RUΣ_{iN}, para ξ en Σ_{iN}, existe $\beta(\frac{\epsilon}{2})$ tal que $\|u'-u\| \leq \beta$ y como s en J, $x+u$ en $U(\xi)$ entonces

(5.4) . . . $\qquad \|R(s, x+u, u'-u)\| \leq \frac{\epsilon}{2}$

Para que el lema quede demostrado Tomemos $\delta = \min\{r(\xi), \alpha_1, \alpha_2, \beta/2\}$ y pongamos

$$U(\xi) = \{x \in S : \|x - \xi\| \leq \delta\}.$$

Reformulandolo nos queda. Dada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \min \{r(\xi), \alpha_1, \alpha_2, \beta/2\}$ tal que $\|u\| \leq \delta$, $\|u'\| \leq \delta$ implican que si s en J, x en $U(\xi)$, $x+u$ en $U(\xi)$ entonces, de (5.1), (5.2), (5.3) y (5.4) Tenemos

$$\| \|u'\| R(s, x, u') - \|u\| R(s, x, u) \| \leq \epsilon \|u' - u\|.$$

OBSERVACION. Los cálculos usados anteriormente y en la prueba del lema 3.2 se requiere de la existencia de $L(s, x, u'-u)$ cuando x esta en una vecindad de ξ y esta es la única razón para introducir las vecindades de $U(\xi)$ de la suposición $LBC\Sigma_N$.

Ahora usaremos la compacidad de J y Σ'_N para simplificar las suposiciones $LBC\Sigma'_N$ y $TC\Sigma_N$.

LEMA 5.2 En las proposiciones $LBC\Sigma'_N$ y $TC\Sigma'_N$ los números $r(\xi)$, $[\mu(s, \xi)]^{-1}$, $\delta_2(\epsilon_2, s, \xi)$, $\alpha_2(\epsilon_2, s, \xi)$ y $\delta_1(\epsilon_1, s, \xi)$ pueden ser reemplazados por $r > 0$,

$\mu^{-1}>0$, $\delta_2(\epsilon_2,\xi)$, $d_2(\epsilon_2,S)>0$ y $\delta_1(\epsilon_1,\xi)>0$ respectivamente.

PRUEBA. Para ver que r no depende de la variable ξ, que δ_2, δ_1 no dependen de la variable s véase el lema 2.1, ya que tanto J como Σ_N son compactos. Por este mismo lema $[\mu(s,\xi)]^{-1}$ no depende de la variable s (para ξ fijo). Para ver que $[\mu(\xi)]^{-1}$ es semicontínua inferiormente en ξ (y con esto que $[\mu(\xi)]^{-1}$ es independiente de la variable ξ, proposición del capítulo 1), notemos que, si $\xi_n \longmapsto \xi$, entonces

$$
\begin{aligned}
L(s_n,\xi_n,u) &= T(s,\xi_n+u)-T(s,\xi_n)-\|u\|R(s,\xi_n,u)\\
&= T(s,\xi)+L(s,\xi,\xi_n-\xi+u)+\|\xi_n-\xi+u\|\\
&\quad -R(s,\xi,\xi_n-\xi+u)-[T(s,\xi)+L(s,\xi,\xi_n-\xi)\\
&\quad +\|\xi_n-\xi\|R(s,\xi,\xi_n-\xi)-\|u\|R(s,\xi_n,u)]\\
&= L(s,\xi,u)-\|u\|R(s,\xi_n,u)+\\
&\quad \|\xi_n-\xi+u\|R(s,\xi,\xi_n-\xi+u)-\|\xi_n-\xi\|R(s,\xi_n,\xi_n-\xi)
\end{aligned}
$$

Es decir

$$
\begin{aligned}
(5.5)\ldots\quad L(s_n,\xi_n,u) &=\\
&= L(s,\xi,u)-\|u\|R(s,\xi_n,u)+\|\xi_n-\xi+u\|R(s,\xi,\xi_n-\xi+u)\\
&\quad -\|\xi_n-\xi\|R(s,\xi_n,\xi_n-\xi)
\end{aligned}
$$

Por tanto, de (5.5) y de la desigualdad $|\|a\|-\|b\||\leq\|a-b\|$

Tenemos

$$(5.6)\qquad \|L(s,\xi_n,u)\| \geq \frac{1}{\mu(\xi)}\|u\| - \|R(s,\xi_n,u)\|\,\|u\| - \|\,\|\xi_n-\xi+u\|R(s,\xi,\xi_n-\xi+u) - \|\xi_n-\xi\|R(s,\xi,\xi_n-\xi)\|.$$

elejimos $\epsilon>0$ y supongamos de aquí en adelante que n es tan grande que $\|\xi_n-\xi\|\leq r$ (es decir, ξ_n esta en $U(\xi)$). Por $RU\Sigma_N$ hay un $\alpha(\epsilon)>0$ tal que $\|u\|\leq\alpha$ implica

$$(5.7)\ ..\qquad \|R(s,\xi_n,u)\| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Además, hay un $\beta(\epsilon)>0$ tal que

$$\|\xi_n-\xi\|\leq\frac{1}{2}\beta \quad , \quad \|u\|\leq\frac{1}{2}\beta$$

implican

$$(5.8)\ ..\qquad \|\xi_n-\xi+u\|\leq\beta \quad , \quad \|\xi_n-\xi\|\leq\beta$$

de donde, por el lema 5.1, Tenemos

$$(5.9)...\ \|\,\|\xi_n-\xi+u\|R(s,\xi,\xi_n-\xi+u) - \|\xi_n-\xi\|R(s,\xi,\xi_n-\xi)\| \leq \frac{\epsilon}{2}\|u\|.$$

de (5.6), (5.7), (5.9) y para n suficientemente grande se sigue

$$\|L(s,\xi_n,u)\| \geq \left(\frac{1}{\mu(\xi)}-\epsilon\right)\|u\|.$$

esto implica

$$\frac{1}{\mu(\xi_n)} \geq \frac{1}{\mu(\xi)} - \epsilon$$

por lo tanto $[\mu(\xi)]^{-1}$ es semicontínua inferiormente en ξ, completando la prueba del lema 5.2. El siguiente lema es una consecuencia inmediata del lema anterior.

LEMA 5.3. Con las hipótesis $\Sigma_N C$ y $LBC\Sigma_N$ la transformación $u \longmapsto v = L(s,\xi,u)$ tiene, para cada s en J y ξ en Σ_N, una inversa $v \longmapsto u = M(s,\xi,u)$, con dominio $V = L(s,\xi,\mathcal{S})$, rango $\mathcal{S}$ y está acotada superiormente para s en J y ξ en Σ_N: Es decir $\| M(s,\xi,v)\| \leq \mu \|v\|$.

PRUEBA.- Las hipótesis $LBC\Sigma_N 1$ dice: Para cada s en J y ξ en Σ_N hay un $\mu(s,\xi)>0$ tal que

$$\frac{1}{\mu(s,\xi)} \|u\| \leq \| L(s,\xi,u)\|$$

La hipótesis $\Sigma_N C$ junto con el lema 5.2, nos dicen que $\mu(s,\xi)$ no depende de s ni de ξ y

$$\frac{1}{\mu} \|u\| \leq \| L(s,\xi,u)\|$$

Es decir para s en J, ξ en Σ_N^1, u en S', $L(s,\xi,u)$ está acotada inferiormente. Por la proposición $M(s,\xi,u)$ existe y es acotada para s en J y ξ en Σ_N^1. Ahora probaremos un analogo al Teorema 3.1 para el caso en que tengamos $T(s_0,\xi)=0$ para algún s_0 en J y ξ en el interior de S^N.

TEOREMA 5.1 Sea s_0 en J y ξ en el interior de S^N tal que $T(s_0,\xi)=0$. Bajo las hipótesis $\Sigma_N^1 C$, $LBC\Sigma_N^1$, $RU\Sigma_N$, TV y $TC\Sigma_N$ se puede determinar una constante $k>0$, un número $v(\xi)=\min\{k,r,N-\|\xi\|\}$, y un número $\sigma(v(\epsilon))$ tal que existe una función única contínua $x:[s_0-\sigma(v(\epsilon)),s_0+\sigma(v(\epsilon))]\mapsto S$ con $T(s,\xi(s))=0$.

PRUEBA.- Sea s_0 en J, ξ en el interior de Σ_N^1 con $T(s_0,\xi)=0$. La inversa $M(s_0,\xi,v)$ de $L(s_0,\xi,u)$, por el lema 5.3 existe, será denotada por M_0. Poniendo $x=\xi+y$, definamos la siguiente ecuación

$$(5.10)\qquad T(s,x):=T(s,\xi+y)=0$$

de aquí que

$$(5.11)\qquad L(s_0,\xi,y)=-T(s,\xi+y)+L(s_0,\xi,y)$$

Aplicamos M_0 a (5.11) y tenemos

$$(5.12) \qquad y = M_0\left[-T(s,\xi+y) + L(s_0,\xi+y)\right]$$

$$y = M_0\left[-T(s,\xi+y) + T(s_0,\xi+y) - T(s_0,\xi+y) + T(s_0,\xi) + L(s_0,\xi,y)\right]$$

$$(5.13) \qquad y = M_0\left[-T(s,\xi+y) + T(s_0,\xi+y) - \|y\|\, R(s_0,\xi,y)\right] := H(s,y)$$

Es decir $T(s,\xi+y) = 0$ implica $H(s,y) = y$. Como los pasos anteriores son reversibles, si $y = H(s,y)$ aplicamos $L(s_0,\xi,u)$ a (5.12) y obtenemos (5.11), es decir $y = H(s,y)$ implica $T(s,\xi+y) = 0$. Resumiendo

$$(5.13)^{*} \qquad T(s,x) = T(s,\xi+y) = 0 \text{ si y solo si } H(s,y) = y.$$

Por lo tanto, de la definición de $H(s,y)$, en (5.13), y de (5.12), resulta

$$H(s,y') - H(s,y) = M_0\left[-T(s,\xi+y') + T(s,\xi+y) + L(s_0,\xi,y'-y)\right]$$

$$(5.14) \ldots \qquad = M_0\left[-L(s,\xi,y') + L(s,\xi,y) + L(s_0,\xi,y'-y) - \|y'\|\, R(s,\xi,y') + \|y\|\, R(s,\xi,y)\right].$$

esta última igualdad resulta de la definición de diferencial.

Aplicando la desigualdad del triángulo y el lema 5.3 a (5.14) obtenemos

$$(5.15)\ldots \quad \| H(s,y') - H(s,y)\| \leq \mu \| L(s,\xi,y'-y) - L(s_0,\xi,y'-y)\| + \mu \| \|y'\| R(s,\xi,y') - \|y\| R(s,\xi,y)\|.$$

elijamos θ con $0<\theta<1$ y pongamos $\epsilon = \frac{\theta}{2\mu}$. Por $LBC\Sigma_N$ condición 2.a, existe $\delta_2\left(\frac{\theta}{2\mu}, s, \xi\right)$ tal que $|s-s_0|\leq \delta_2$ implica

$$(5.16)\ldots \qquad \| L(s,\xi,y'-y) - L(s_0,\xi,y'-y)\| \leq \frac{\theta}{2\mu}\|y'-y\|$$

Además por el lema 5.1 existe $\alpha>0$ tal que s en J, $\xi+y$ en Σ_N, $\|y\|\leq\alpha$ y $\|y'\|\leq\alpha$ implican

$$(5.17)\ldots \qquad \| \|y'\| R(s,\xi,y') - \|y\| R(s,\xi,y)\| \leq \frac{\theta}{2\mu}\|y'-y\|$$

Por tanto s en J, $|s-s_0|\leq\delta_2$, $\|y\|\leq\alpha$, $\|y'\|\leq\alpha$, $\xi+y\in\Sigma_N$, (5,15), (5,16) y (5,17) implican

$$(5.18)\ldots \quad \| H(s,y') - H(s,y)\| \leq \left(\mu\cdot\frac{\theta}{2\mu} + \mu\cdot\frac{\theta}{2\mu}\right)\|y'-y\| = \theta\|y'-y\|$$

Por otro lado tenemos, de la definición de $H(s,y)$ en (5.13) y del lema 5.3

$$(5.19)\ldots \quad \| H(s,y)\| \leq \mu \| T(s,\xi+y) - T(s_0,\xi+y)\| + \mu \|y\| \| R(s_0,\xi,y)\|.$$

Por $RU\Sigma_N$, existe $\beta>0$ tal que $\|y\|\leq\beta'$ implica

$$(5.20). \qquad\qquad \| R(s_0,\xi,y)\| \leq \epsilon$$

Por $TC\Sigma_N$, existe $\delta_1(\epsilon_1, s, \xi)>0$ tal que $\xi+y$ en Σ_N

s en J y $|s-s_0| \leq \delta_1$ implican

(5.21) .... $$\|T(s,\xi+y)-T(s_0,\xi+y)\| \leq \epsilon_1$$

Ahora pongamos

(5.22)
$$\begin{aligned} K &= \min(\alpha,\beta') \\ v(\xi) &= \min(K, r, N-\|\xi\|) \\ \epsilon_1 &= \left(1-\frac{\theta}{2}\right)\frac{v(\xi)}{\mu} \\ \sigma(v(\xi)) &= \min(\delta_1(\epsilon_1), \delta_2). \end{aligned}$$

Teniendo $|s-s_0| \leq \sigma(v(\xi))$, $s \in J$, $\|y\| \leq v(\xi)$, $\|y'\| \leq v(\xi)$, entonces $\xi+y$ en Σ_N, $\xi+y'$ en Σ_N y por (5.18) resulta

(5.23) $$\|H(s,y')-H(s,y)\| \leq \theta\|y'-y\|,$$

y por (5.19), (5,20), (5.21) y (5.22) se sigue

(5.24)
$$\begin{aligned} \|H(s,y)\| \leq \mu\epsilon_1 + \mu\|y\|\epsilon &= \mu\left(1-\frac{\theta}{2}\right)\frac{v(\xi)}{\mu} + \mu\, v(\xi)\frac{\theta}{2\mu} \\ &= \left(1-\frac{\theta}{2}\right)v(\xi) + \frac{\theta}{2}v(\xi) \\ &= v(\xi) \end{aligned}$$

Aplicando el lema 2.2, para cada s en J con $|s-s_0| \leq \sigma(v(\xi))$, a (5.23) y a (5.24), existe una única $y(s)$ tal que $\|y\| \leq v(\xi)$ y $H(s,y(s)) = y(s)$. Se sigue, de (5.13)*, que existe una única $y(s)$

de tal manera que

$$T(s,x) = T(s, \xi + y(s)) = 0$$

Para probar que $y(s)$ es continua se hace de una manera análoga como se hizo en el Teorema 3.1. Con esto la prueba del teorema 5.1 está completa.

Las hipótesis locales LBCU, RU, TV y TCU fueron suficientes (Teorema 3.1) para garantizar la existencia y unicidad de una solución local. Después de agregar las hipótesis globales O^*G y BS fue posible demostrar (Teorema 4.1) la existencia y unicidad de una solución global. Para pasar de la solución local del Teorema 5.1 a la situación global, mantendremos la hipótesis O^*G pero debilitaremos a BS.

BW: Si x esta en Σ_N, entonces $\|x\| < N$. (cota débil a priori).

LEMA 5.4. BW y $\Sigma_N C$ implican BS.

PRUEBA. Supongamos BW y $\Sigma_N C$ ciertas. Por $\Sigma_N C$ Σ_N es compacto. Por ser Σ_N compacto y estar contenido en un espacio de Banach,

Σ_N es cerrado. El conjunto $F=\{x\in S: \|x\|=N\}$ es cerrado. Por BW tenemos $\Sigma_N \cap F=\phi$.

Sea $\rho = \min_{x\in\Sigma_N,\, y\in F} \|x-y\|$. Como Σ_N es compacto y F es cerrado entonces $\rho>0$. En efecto, si $\rho=0$ entonces existe $\{x_i\}\subset\Sigma_N$ tal que $\|x_i-y\|\mapsto 0$ cuando $i\mapsto 0$ para alguna y en F. Como Σ_N es compacto, existe una subsucesión $\{x_{i_k}\}$ de $\{x_i\}$ tal que $x_{i_k}\mapsto x_0$ con x_0 en Σ_N, entonces $\|x_0-y\|=0$. Como S es un espacio de Banach tenemos $y=x_0$, esto implica $\Sigma_N\cap F\neq\phi$, una contradicción. Por lo tanto x en Σ_N implica $\|x\|+\rho\leq N$, lo que queríamos demostrar.

Ahora estamos listos para demostrar nuestro segundo gran teorema.

TEOREMA 5.2. En las hipótesis del Teorema 4.1 supongamos que LBCU, RU, TCU y BS las sustituimos por $\Sigma_N C$, LBC Σ_N, RUΣ_N, TC Σ_N y BW respectivamente. Entonces a partir de la solución x^* de $T^*(x)=0$, podemos generar una única solución contínua $x(s)$ para s en $[0,1]$, en un número finito de pasos. En particular, la solución $x(1)$ de $T(x)=T(1,x)=0$ se puede construir por el Método de Continuación.

PRUEBA. Supongamos que X^* en S^N es solución de la ecuación $T^*(X) = T(0,X)$. Entonces por BW, $\Sigma_N C$ y por el lema 5.4 existe $\rho > 0$ tal que X^* en Σ_N implica $\|X^*\| \leq N - \rho$. Por $\Sigma_N C$, $LBC\Sigma_N$, $RU\Sigma_N$, TV, $TC\Sigma_N$ y por el Teorema 5.1 podemos determinar una constante $k > 0$, un número $v(X^*) = \min(k, r, N - \|X^*\|)$ y un número $\sigma = \sigma(v(X^*))$, tal que existe para $|s| \leq \sigma$ existe una función única $X(s)$ tal que $T(s, X(s)) = 0$. Repitiendo nuevamente el procedimiento anterior para $X(\sigma)$, solución de la Transformación $T(\sigma(v(X^*)), X) = 0$, podemos encontrar una solución única $X(s)$ localmente continua para la Transformación $T(s,X)$ con $\sigma \leq s \leq 2\sigma$, ..., continuando finalmente, por el Teorema 5.1, existe una solución única localmente continua para $T(s,X)$ con $n\sigma \leq s \leq (n+1)\sigma$, donde s en J y $1 \leq (n+1)\sigma$. De esta manera obtenemos, en un número finito de pasos, a saber $1 - [\frac{1}{\sigma}]$, una única solución localmente continua para $T(1,X) = T(X)$. Para ver que, para cada s en J, $T(s,X) = 0$ tiene en la esfera S^N ninguna otra solución distinta de $X(s)$, véase la parte correspondiente en la prueba del Teorema 4.1.

VI. $\hat{T}_s(x) = x - T(s,x)$ COMPACTA. UNA CONDICION LOCAL.

En la literatura de este problema se supone frecuentemente que la transformación $\hat{T}_s(x)$ es completamente contínua. Esto significa que la transformación $\hat{T}_s(x)$ tiene la siguiente propiedad: cualquier conjunto acotado tiene una imagen, bajo $\hat{T}_s$, cuya cerradura es compacta.

E. Hille señala que el término "completamente contínuo" es un nombre equivocado ([14] p. 14; ver también [15] p. 53). Siguiendo a Hille, un conjunto E está totalmente acotado, si para cualquier $\delta > 0$, E es la unión de un número finito de conjuntos, cada uno de diámetro menor que δ. Por otra parte, afirma, una transformación de un espacio mètrico completo en otro, es compacta, si las imagenes de conjuntos acotados, son totalmente acotadas. Ahora bien, en un espacio mètrico completo la cerradura, de un conjunto totalmente acotado, es compacta. Por lo tanto el requisito clásico, que la transformación $\hat{T}_s(x)$ deba ser completamente contínua, dejará su lugar aquí por el siguiente: La transformación $\hat{T}_s(x)$ es compacta (en el sentido que da el término, dado por E. Hille).

LEMA 6.1 Supongamos que $T(s,x)$ tiene las siguientes propiedades:

1.- $T C U \Sigma_N$; $T(s,\xi)$ es continua en s uniformemente para ξ en Σ_N.

2.- Para cada s en J, $T(s,x)$ es continua en x.

Además, si $\hat{T}_s(x)$ es compacta para cada s, entonces Σ_N es compacta para cada $N > 0$.

PRUEBA.- Sea ξ_n en Σ_N, $n=1,2,\ldots$. Entonces $T(s_n,\xi_n)=0$ para alguna s_n en J y $\xi_n = \xi_n - T(s,\xi_n)$. Como J es compacto, podemos suponer que el s_n se elija de manera que $s_n \mapsto s_0$ con s_0 en J. Como Σ_N es acotado y $\hat{T}_{s_0}(x)$ es compacta, podemos suponer que el ξ_n se elija con

$$(6.1)\ \ldots \qquad y_n = \xi_n - T(s_0,\xi_n) \longmapsto \eta$$

Por otro lado tenemos

$$(6.2)\ \ldots \qquad \xi_n = \xi_n - T(s_0,\xi_n) + T(s_0,\xi) - T(s_n,\xi_n)$$

sumando a ambos miembros de (6.2) y utilizando

(6.1) resulta

$$(6.3) \ldots \qquad \xi_n - \eta = y_n - \eta + T(s_0, \xi_n) - T(s_n, \xi_n).$$

Sea $\epsilon > 0$ dada, entonces por (6.1) y $T \subset U \Sigma_N$ (la hipótesis 1 de este lema), existe $\delta(\epsilon)$ tal que $|s_n - s_0| \leq \delta(\epsilon)$ implica

$$(6.4) \qquad \|y_n - \eta\| \leq \epsilon \quad \text{y} \quad \|T(s_0, \xi_n) - T(s_n, \xi_n)\| \leq \epsilon$$

luego, por (6.3) y (6.4) resulta

$$(6.5) \qquad \|\xi_n - \eta\| \leq \|y_n - \eta\| + \|T(s_0, \xi_n) - T(s_n, \xi_n)\| \leq 2\epsilon$$

como esto sucede para cada $\epsilon > 0$, concluimos con $\xi_n \longmapsto \eta$. Como $T(s_0, X)$ es contínua, hipótesis 2, se sigue que $T(s_0, \eta) = 0$. Para que η este en Σ_N, solo nos falta demostrar que $\|\eta\| \leq N$. Pero ξ_n en Σ_N, para $n = 1, 2, \ldots$, implica $\|\xi_n\| \leq N$ para cada n. Utilizando (6.5) y la siguiente desigualdad

$$(6.6) \ldots \qquad \|\eta\| \leq \|\xi_n - \eta\| + \|\xi_n\| \leq 2\epsilon + N$$

concluimos que $\|\eta\| \leq N$, ya que (6.6) sucede para cada $\epsilon > 0$. Por lo tanto η esta en Σ_N y con esto concluimos con Σ_N compacta para cada $N > 0$. Luego hemos demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA 6.1. La conclusión del Teorema 5.2, seguirá siendo cierta, si la hipótesis $\Sigma_N C$ es sustituida por las siguientes: $\hat{T}_s(x) = x - T(s,x)$ es compacta, y las hipótesis 1 y 2 del lema 6.1.

Finalmente, buscaremos condiciones locales, que impliquen que cada Σ_N sea compacto (lema 6.3).

Denotemos por B una sucesión convergente $\{S_n\}$, de puntos en J, tales que para cada una de las transformaciones $T(S_n, X)$, existe al menos una ξ_n' en S' tal que $T(S_n, \xi_n') = 0$. Definamos el siguiente conjunto: $\Sigma_N(B) := \{\xi$ en Σ_N: existe al menos una S_n en B con $T(S_n, \xi) = 0\}$. Si Σ_N es compacto entonces, para cada B, tiene una subsucesión que converge a un punto de Σ_N. El recíproco también es cierto.

LEMA 6.2. Supongamos que, para cada B, $\Sigma_N(B)$ tiene una subsucesión que converge a un punto de Σ_N. Entonces Σ_N es compacto.

PRUEBA.- Sea ξ_n en Σ_N con $n = 1, 2, \dots$. Entonces $T(S_n, \xi_n) = 0$ para alguna S_n en J. Como J es compacto podemos suponer los S_n elegidos, tales que $s_n \mapsto s_0$. Denotemos por B la sucesión $\{s_n\}$. Entonces $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un subconjunto de $\Sigma_N^i(B)$ y por tanto, por hipótesis, tiene una subsucesión $\{\xi_{n_i}\}$, que converge a un punto ξ de Σ_N^i. Luego Σ_N^i es compacto.

Buscaremos condiciones que impliquen que $\Sigma_N^i(B)$ sea compacto para cada B. Si $\Sigma_N^i(B)$ es finito el resultado es trivial, así que supondremos que $\Sigma_N^i(B)$ es infinito. Sea s_n^i en B tal que, para algún ξ' en Σ_N^i, se tenga $T(s_n^i, \xi_n^i)=0$. Esto se reduce a buscar condiciones que nos permitan afirmar que $\{\xi_n^i\}$ es una sucesión de Cauchy.

Sabemos que si $L(s_n^i, \xi_n^i, u)$ existe, entonces

$$(6.7) \ldots L(s_n^i, \xi_n^i, \xi_m^i - \xi_n^i) = T(s_n^i, \xi_m^i) - T(s_n^i, \xi_n^i) - \\ - \|\xi_m^i - \xi_n^i\| R(s_n^i, \xi_n^i, \xi_m^i - \xi_n^i)$$

Supongamos $TCU\Sigma_N^i$ (cf. lema 6.1) y

$LBBU\Sigma_N^i$: Para cada s en J y ξ en Σ_N^i, $L(s, \xi, u)$ existe y es uniformemente acotada superior e inferiormente: Es decir, existen constantes $\lambda > 0$ y $\mu > 0$ tal que

(6.8) ... $$\lambda \|u\| \geq \| L(s,\xi,u) \| \geq \frac{\|u\|}{\mu}$$

De LBBUΣ_N concluimos que $T(s,x)$ es continua en ξ uniformemente en s y ξ, que $M(s,\xi,v)$ existe, y que $\|M(v)\| \leq \mu \|v\|$. Una aplicación de $M(s'_n, \xi'_n, v)$ en la ecuación (6.7) nos da

(6.9) ... $$\xi'_m - \xi'_n = M\left(s'_n, \xi'_n, T(s'_n, \xi'_m) - T(s'_n, \xi'_n)\right) - \|\xi'_m - \xi'_n\| \, M\left(s'_n, \xi'_n, R(s'_n, \xi'_n, \xi'_m - \xi'_n)\right)$$

Como $T(s'_n, \xi'_n) = T(s'_m, \xi'_m) = 0$, se sigue de (6.9) que

(6.10) ... $$\|\xi'_m - \xi'_n\| \leq \mu \| T(s'_n, \xi'_m) - T(s'_m, \xi'_m) \| + \mu \|\xi'_m - \xi'_n\| \, \| R(s'_n, \xi'_n, \xi'_m - \xi'_n) \|$$

Consideremos la siguiente proposición:

A.- Hay un número ρ, $0<\rho<1$, y un número $\delta>0$ tal que $T(s,\xi)=0$, $T(s',\xi')=0$ y $|s-s'| \leq \delta$ implican

(6.11) ... $$\mu \| R(s,\xi,\xi'-\xi) \| \leq \rho < 1$$

Ahora, sea $\epsilon > 0$ dada. Utilizemos TCUΣ_N para elegir σ tan pequeño que, $|s'_n - s'_m| \leq \sigma$ implique

(6.12) ... $$\| T(s'_n, \xi'_m) - T(s'_m, \xi'_m) \| \leq \frac{1-\rho}{\mu} \epsilon .$$

Si m y n son tan grandes que, $|s_n - s_m| \leq \sigma$ y $|s'_n - s'_m| \leq \delta$, entonces por A tenemos

$$(6.13)\ldots \qquad \mu \| R(s'_n, \xi'_n, \xi_m - \xi'_n)\| \leq \rho < 1$$

y por (6.10), (6.12) y (6.13) resulta

$$(1-\rho)\|\xi'_m - \xi'_n\| \leq \mu \| T(s'_n, \xi'_m) - T(s'_m, \xi)\| \leq (1-\rho)\epsilon,$$

y finalmente

$$\|\xi'_m - \xi'_n\| \leq \epsilon .$$

Como S es un espacio de Banach, existe x en S tal que $\xi'_n \mapsto x$. Como $\|x\| \leq \|x - \xi'_n\| + \|\xi'_n\|$ y $\|\xi'_n\| \leq N$ para cada n en $\mathbb{N}$, tenemos $\|x\| \leq N$.
Resumiendo. Para cada sucesión convergente B, en J, $\Sigma'_N(B)$ tiene una subsucesión convergente, además converge a un punto de S^N. Si el elemento a que converge fuera elemento de Σ'_N, por el lema 6.2, concluiríamos que Σ'_N es compacto. Demostraremos que, efectivamente, esto sucede.

Sea $\lim\limits_{n\to\infty} s'_n = s'_0$. Como $\|x\| \leq N$ queremos que $T(s'_0, x) = 0$. En efecto,

$$(6.14)\ldots \qquad T(s'_0, x) = T(s'_0, x) - T(s'_0, \xi'_n) + T(s'_0, \xi'_n) - T(s'_n, \xi'_n).$$

Por la continuidad de T en Ξ_n y por $TCU\Sigma_N$, los respectivos pares de términos del lado derecho de (6.14), pueden ser arbitrariamente pequeños haciendo n suficientemente grande. Esto nos permite afirmar que $T(s_0 X)=0$. Estos resultados se pueden resumir en el siguiente lema.

LEMA 6.3. Si la familia de transformaciones $T(s,X)$, $0 \leq s \leq 1$, tiene las propiedades $LBBU\Sigma_N$, $TCU\Sigma_N$ y A, entonces Σ_N es compacto para $N>0$.

Por el lema anterior $\Sigma_N C$ es cierta, así que hemos probado el siguiente teorema.

TEOREMA 6.2. La conclusión del Teorema 5.2 seguirá siendo cierta si, la hipótesis $\Sigma_N C$ es reemplazada por las hipótesis del lema 6.3.

BIBLIOGRAFIA

[1].- H. L. Royden. Real Analysis. McMillan.

[2].- John Horváth. Topological Vector and Distributions. Addison-Wesley.

[3].- Kôsaku Yosida. Functional Analysis. Springer Verlag.

[4].- Walter Rudin. Functional Analysis. McGraw-Hill.

[5].- Bernstein, S. Sur la généralisation du probleme de Dirichlet. Mathematische Annalen, Volumen 62, 1906, pp. 253-271.

[6].- Hart, W. L. Differential equations and implicit functions in infinitely many variables. American Mathematical Society Transactions, Vol. 18, 1917, p.p. 125-160.

[7].- Lichtenstein, L., Kontinuitätsmethode im Gebiete der Konformen Abbildung, Encyklopädie der Mathematischen, IIC 3, § 46, 1918, p.p. 346-352.

[8].- Birkhoff, G. D., and Kellogg, O. D., Invariant points in function space, American Mathematical Society Transactions, Volume 23, 1922, p.p. 96-118

[9] .. Hart, W. L., Funtions of infinitely many variables in Hilbert space. American Mathematical Socety Transactions, Volume 23, 1922, pp. 30-50.

[10] .. Hart, W. L. Functionals of summable functions, Annals of Mathematics, Volume 24, 1923.

[11] .. Schauder, J., Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, Studia Mathematica, Volume 2, 1930, p.p. 182-196.

[12] .. Hildebrandt, T. H., and Graves, L. M. Implicit functions and Their differential in general analysis, American Mathematical Society Transactions, Volume 29, 1927, p.p. 127-153

[13] .. Kerner, M., Zur Theorie der impliziten Funktionaloperationen, Studia Mathematica Volume 3, 1931, pp. 156-173.

[14] .. Hille, E., Functional analysis and semigroups, American Mathematical Socety (Colloquium Publications, Volume XXXI) New York, 1948.

[15] .. Friedrichs, K. O., Functional Analyses (mimeographed lecture notes), Institute for Mathematics and Mechanics, New York University, 1950, CHapers VII and X.