(1) Zajena.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"ALGUNOS ASPECTOS DEL DEBATE MATEMATICO ENTRE LAS ESCUELAS INTUICIONISTA Y FORMALISTA"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

EDUARDO LOPEZ ACEVES

MEXICO, D. F. 1981

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

I N T R O D U C C I O N

La presente tesis se enmarca dentro de los proyectos de estudio que sobre la Historia Social del pensamiento matemático desarrolla el Programa de Ciencia y Sociedad de la Facultad de Ciencias.

Se expone un análisis de documentos originales y un relato de algunos aspectos del debate surgido al final del siglo XIX y a principios del XX, entre dos escuelas matemáticas: la escuela formalista de D. Hilbert y la intuicionista de H. Poincaré.

Se limita el estudio a algunas partes de los siguientes documentos: "Sobre los Problemas futuros de las Matemáticas" de D. Hilbert, (1900). "Del papel de laintuición y la lógica en matemáticas" de H. Poincaré (1900), la primera Prueba del Teorema del Buen Orden de E. Zermelo (1904) y por último "Cinco cartas sobre la teoría de los Conjuntos", de: R. Baire, E. Borel, J. Hadamard y H. Lebesgue (1905). Los dos últimos documentos han sido traducidos integramente, y parcialmente la 2a. prueba del Teorema del Buen Orden de Zermelo, igualmente se encuentra traducido un documento de Poincaré de (1899), de especial interés para la enseñanza de las matemáticas.

La labor de traducción se ha considerado de especial importancia ya que en nuestro medio, donde la historia de la ciencia es una disciplina con poca tradición y desarrollo, no se encuentran fácilmente documentos originales en español que permitan un acceso menos penoso a la historia de las matemáticas.

Se cumple así una labor de difusión de estos textos cuya importancia es indiscutible, y a su vez se prepara el camino para que paulatinamente la historia de la ciencia sea una tarea colectiva.

Creemos, por otro lado, que la tesis cumple una función crítica pues es un fenómeno diario el que en el estudiante y en el profesor se encuentre con una creencia que se arraiga en la medida en que se educa acríticamente y ahistóricamente: la neutralidad ideológica del conocimiento matemático. Bajo esta idea se pretende que las matemáticas han sido fruto de hombres geniales sin tomar en consideración las condicionantes sociales que históricamente determinan el trabajo matemático, se pretende aún que las matemáticas se han desarrollado en un continuo progreso lineal que no ha encontrado obstáculos, sin tomar en cuenta los múltiples errores y luchas por las que pasa el logro del conocimiento matemático.

Pensamos que el sistema económico actual imprime sus intereses a los temas y objetivos de la investigación científica así como toda una forma de enseñanza que deja de lado la problemática histórica y social del desarrollo del conocimiento. De igual forma la clase social dominante, imprime su ideología en el interior mismo de las ciencias, en sus teorías y conceptos.

Pensamos entonces que no hay conocimiento aislado, que todo conocimiento es producto de múltiples condicionantes que históricamente se han dado; por lo tanto es necesaria a una formación crítica de cualquier estudiante de matemáticas el estudio de la historia social del pensamiento matemático.

La historia social de la matemática es una disciplina relativamente nueva que requiere de trabajo interdisciplinario y que puede llegar a tener gran valor para la formación profesional, completa y crítica de los matemáticos en tanto forme parte del interés colectivo por superar la taylorización a la que se somete el trabajo científico.

La tesis se desarrolla en cinco capítulos, el primero y segundo tratan con las conferencias de Hilbert (famosa por sus 23 problemas que propone "como prueba de apoyo" a sus concepciones sobre el quehacer matemático) y Poincaré (que rechaza por completo las concepciones de Hilbert).

El 1er. problema de Hilbert en importancia jerárquica, sobre la hipótesis del continuo, permite continuar el relato, en el capítulo III se verá la prueba del teorema de Buena Ordenación de E. Zermelo, quien seguía así el camino trazado por Hilbert en la resolución del 1er. problema.

El debate que surge con la prueba, es tan importante para muchos autores de historia como el que se dá con respecto al postulado de las paralelas de la geometría euclídea, se centra sobre todo en el axioma de elección surgido de la prueba del Teorema de Zermelo, y esto forma parte del capítulo IV.

Por último se dá una recapitulación de la tesis, se formulan algunas conclusiones y se presentan los textos traducidos.

La tesis no constituye lo que sería una historia social del debate matemático de la época (1900-1905), solo se ven parcialmente 2 de las muchas tendencias matemáticas y no cuenta tampoco más que con algunas notas e indicaciones de lo que era la situación económico social de la época y sus relaciones con la matemática. Es necesario un estudio a profundidad en el aspecto socio-histórico y una extensión mayor en el debate matemático que incluyera entre otras escuelas la logicista, la intuicionista alemana y la italiana.

Esperamos que esta tesis contribuya en algo al propósito de motivar el estudio de la historia de las matemáticas.

Deseo expresar mi agradecimiento, por la ayuda y apoyo de mi hermano Jesús, de Rafael Rojas (Ho), de Gustavo Rodríguez y de Anita Martínez.

C A P I T U L O

I

FORMALISMO MATEMATICO ALEMAN EN EL CONGRESO DE 1900.

En 1900, año en que se celebra en París el "2o congreso internacional de los matemáticos" tiene David Hilbert la ocasión para presentar un programa de trabajo para las generaciones futuras de matemáticos. El programa incluía 23 problemas y una -- clara definición en favor de una concepción sobre la labor matemática que aún en nuestros días tiene un fuerte arraigo entre los matemáticos .

En la Alemania de Hilbert se estaba dando una transformación económica de grandes y rápidos logros, la segunda Revolución Industrial estaba ya en una etapa avanzada con un desarrollo industrial y tecnológico diversificado que llevaba consigo la introducción de técnicas productivas avanzadas y novedosas. La "nueva" clase burguesa alemana surgida de este proceso requería de una - ciencia que apoyara el desarrollo económico capitalista, dando - respuesta a una amplia gama de problemas técnicos de la gran industria.

... "Se tiende a crear una ciencia abstracta y general capaz, por esto, de responder a todo tipo de problemas prácticos, presentes o futuros"(1).

Se requería entonces de un nuevo tipo de técnicos y científicos, un cambio en la enseñanza que hiciera posible la preparación de personal capacitado para manejar la industria.

Giorgio Israel nos indica como es que esto repercute en la -- ciencia y produce una nueva metodología: "Esta exigencia de personal calificado y especializado requiere un tipo de instrucción que exalte el momento de la especialización y la preparación sectorial, el uso de técnicas independientemente de la adquisición de los principales científicos que son la base de estos. Y esto estimula a su vez la fragmentación del tejido unitario de la física matemática precedente y en particular al sancionamiento de la autonomía de las teorías matemáticas, que así efectuan trámite a su formalización y axiomatización"[2].

La creación de esta ciencia con las características que se requiere en esta época de Alemania se logró rápidamente y por obra de una serie de científicos que renovaron la organización de la actividad científica , en particular las ciencias exactas pasaron por este proceso de renovación[3].

La nueva organización científica alemana fué impulsada por el mismo estado alemán unificado y, el matemático Felix Klein jugó un papel de suma importancia en las relaciones entre el Estado y la "comunidad" científica. La segunda etapa de la vida académica de F. Klein se caracteriza por su labor como organizador de la actividad matemática alemana, la cual empezó a jugar un papel en el desarrollo industrial[4]. Klein renovó la enseñanza, ampliando también el conjunto de disciplinas matemáticas al dar paso al estudio de teorías que no eran tomadas en cuenta o que eran rechazadas por los matemáticos tradicionales avocados a las disciplinas "fundamentales" .

Un ejemplo de la ceguera de los matemáticos tradicionalistas es la teoría de conjuntos de George Cantor, al ser criticada destructivamente por uno de los matemáticos de más peso de la época (Leopold Kronecker)[5].

Notemos que en Francia, a diferencia de Alemania, los matemáticos asimilaron sin trabas el contenido técnico de la obra cantoriana, siendo Poincaré uno de los primeros traductores de la teoría de conjuntos[6]. Con la llegada de las nuevas generaciones de matemáticos alemanes, se hizo resurgir la obra de Cantor y se reivindicó el contenido técnico de la misma. En esto jugó un importante papel David Hilbert, llegando a la teoría de conjuntos por las necesidades que le planteaba su propio trabajo en diversas disciplinas en particular para lograr sus objetivos en fundamentación de la aritmética.

1872, año de la unificación política de Alemania es también el año en el que F. Klein presenta su célebre "Programa de ---- Earlangen"[7] siendo la "lectura inaugural" al pasar a ser profesor en Earlangen. Su programa es un estudio de las diversas geometrías surgidas hasta entonces las cuales unifica y clasifica por medio del uso del concepto matemático de grupo. Su enfoque general y abstracto toma el contenido técnico de estas geometrías dejando de lado los presupuestos teóricos, las concepciones bajo las que se habían creado tales geometrías, por ejemplo las de un Lobachevsky o un Riemann, de tal manera que todo el "intuicionismo" de tales autores se ve olvidado. Se trata de poner los contenidos técnicos acordes a la nueva situación social y por tanto filtrar toda ideología opuesta a las nuevas ideas dominantes en la organización científica de la Alemania unificada[8].

Durante el invierno de 1898-99, Hilbert dicta una serie de lecturas en Göttingen que impresionan a sus alumnos y colegas al producir un trabajo fundamental para la geometría[9], disciplina a la que no se dedicaba. Siguiendo el camino abstracto de Klein, presenta un tratamiento axiomático para la geometría(10), rama que suscitó su interés desde 1892, a raíz de una conferencia de Hermann Wiener sobre los fundamentos de la geometría(11).

El sistema de 20 axiomas independientes produce una renovación de la geometría euclidiana(12). El problema de la consistencia de este sistema axiomático se planteó par Hilbert como algo de suma importancia y prueba tal consistencia mediante un modelo geomético concreto que lo llevó a plantear el problema de la consistencia de la aritmética del sistema de números reales. En una edición posterior Hilbert dará un nuevo axioma para el sistema de la geometría, el axioma de no-extensibilidad, que postula el sistema como no susceptible de modificaciones(13).

El camino abstracto y globalizador del trabajo de Hilbert es consecuencia no solo de su preocupación por dotar a la geometría de un sistema axiomático totalmente abstracto sino además de una filosofía explícita (la búsqueda de un sistema absoluto) y de una necesidad práctica de la enseñanza para el desarrollo industrial de Alemania(14). David Hilbert había sido educado bajo los principios de la filosofía kantiana y era un fiel seguidor de los preceptos filosóficos idealistas de Kant acerca de las matemáticas, no es de extrañar entonces el que en su examen doctoral de 1885 presentase dos proposiciones, una de ellas acerca del método para determinar resistencia electromagnética absoluta por experimento y otra en donde sellaba su compromiso con el pensamiento Kantiano: " Que las objeciones a la teoría kantiana de la naturaleza <u>a priori</u> de las proposiciones aritméticas son infundadas".

Hilbert desde luego, no tuvo oposición, en un ambiente donde la filosofía alemana de la época en su "vuelta a Kant" era parte de la ideología dominante. La tradición a la matemática abstracta "producto de la razón pura" propagada desde los tiempos de Gauss, se centraba ahora en la aritmética ante la refutación incontestable a la teoría kantiana debida al descubrimiento de las geometrías no euclidianas[15].

Para el año de 1899 Hilbert tiene ya la convicción de que el método axiomático desarrollado por él en "Los fundamentos de la geometría" es el método todopoderoso de las ciencias y no solo de las matemáticas, cosa que se encargaría de manifestar en el congreso internacional de los matemáticos de 1900 tratando así de manifestar también, su oposición a las ideas que Poincaré había expresado en el congreso anterior de Zurich sobre las relaciones entre el análisis y la física[16] que se oponían a las convicciones hilbertianas de la supremacía del trabajo matemático por sí mismo[17].

Hilbert comienza a trabajar en la conferencia pidiendo a sus amigos Hermann Minkowsky y Adolf Hurwitz la revisión del proyecto de conferencia. Su idea de la misma iba en el sentido de discutir la dirección que las matemáticas debían tomar en el siglo venidero, para ello había que seleccionar ciertos problemas importantes de su época en los que los matemáticos podrían desarrollar su trabajo.

Para introducir la lista de problemas que proponía junto con algunas líneas, de cómo podría esperarse la solución, Hilbert habla de algunos problemas que históricamente tuvieron importancia para la elección de las direcciones de desarrollo de las matemáticas, en seguida pasa a determinar las cualidades que configuran un buen problema matemático y por último pasa a examinar los requisitos y las condiciones generales que deben de cumplir las soluciones[18].

En la lista de 23 problemas, elige algunos que pertenezcan a los fundamentos de las matemáticas y que habían sido sugeridos por lo que él considera ...."los acontecimientos más sugestivos y más importantes que han tenido lugar durante el siglo XIX, me parece, la concepción aritmética de la noción de continuo que se encuentra en los trabajos de Cauchy,Bolzano y Cantor, así como el descubrimiento de la geometría no euclidiana por Gauss, Bolyai y Lobachevsky ". En la conferencia encontramos una filosofía, la del filósofo de Königsberg (Kant), renovada y defendida por un matemático de Königsberg.

Si para Kant las proposiciones matemáticas todos son juicios sintéticos a priori[19], tanto las de la aritmética como las de la geometría, para Hilbert ante la refutación incuestionable de las geometrías no euclideas sostendrá la tesis kantiana respecto de la aritmética. Pero además llevará a otro nivel el idealismo kantiano.

Si bien el conocimiento comienza a por motivación del exterior y si en un determinado grado de desarrollo "la razón" conoce por sí misma a partir de tales datos de la experiencia y si por último, existe un proceso de relación entre el razonamiento y la experiencia, no podemos hablar que tal conocimiento sea un conocimiento científico sino hasta que podamos crear por el razonamiento puro un sistema abstracto que nos permita decidir sobre ello, o sea, solo la razón pura es el criterio de verdad y solo ella la que crea, en realidad, el conocimiento matemático.

Pero además el razonamiento puro al crear un sistema que permite por tanto descubrir y conocer sin motivación exterior alguna y sólo a partir de un número finito de hipótesis que puede proporcionar la realidad exterior o no, es posible entonces descubrir infinitamente sin más que cada conocimiento venga dado por un número finito de deducciones.

Esto es lo que Hilbert nos dirá en la conferencia que empieza en el mes de agosto en París y bajo la presidencia de H. Poincaré. El texto de la misma fué distribuido en Francés entre los delegados con el objeto de que Hilbert aprovechara el tiempo que se le había asignado en leer la introducción (que ahora analizamos) y de exponer solo 10 de sus 23 problemas (como prueba de apoyo a sus - afirmaciones introductorias).

Veamos pues en palabras de Hilbert que constituye lo que - podríamos llamar su teoría del conocimiento matemático.

Luego de exponer la importancia de los problemas en el desarrollo de la matemática pasa a responder la siguiente cuestión:

¿ Cuales son las fuentes en donde las matemáticas encuentran los problemas ?

.... "los primeros y más antiguos problemas de cada rama de la ciencia matemática tienen ciertamente su origen en la experiencia, y es el mundo del conocimiento exterior que los inspira". ...[18,p.33]

... "Pero, en el desarrollo progresivo de una disciplina matemá tica, el espíritu humano, alentado por el descubrimiento de las soluciones, tiene conciencia de su independencia, crea él mismo problemas nuevos y fecundos de la manera más feliz, sin impul-- sión exterior aparente y únicamente por combinación lógica, - por generalización y particularización, por separación y reunión de ideas. Es entonces él el que, colocado en el primer plano, - plantea esencialmente los problemas". ...... [18,p.34]

... "Por otra parte en tanto que trabaja el poder creador de la razón pura, el mundo exterior hace de nuevo sentir su influencia; nos conduce, por los hechos exteriores, a nuevos problemas, nos abre nuevas regiones de la ciencia matemática; entonces, al esfor zarnos en hacer entrar estos nuevos dominios de la ciencia en el reino de la razón pura, nos encontramos muy frecuentemente con la respuesta a antiguos problemas no resueltos y hacemos avanzar las antiguas teorías de la manera más ventajosa . "Son me parece, so- bre estos intercambios repetidos entre la razón y la experiencia que reposan tantas sorprendentes analogías, así como esta armonía en apariencia preestablecida, tan corrientemente señalada por el matemático entre los problemas, los métodos y las concepciones de los diversos dominios de su Ciencia"[18,35] Hasta aquí Hilbert nos describe el proceso de conocimiento, no podríamos decir que sea un empirista o un racionalista más bien describe con claridad el proceso dialéctico de conocimiento, las relaciones sucecivas en- tre el sujeto y el objeto entre el mundo exterior y la conciencia

(la razón pura); la no coincidencia del pensamiento con los datos de la experiencia, la reflexión (..."al esforzarnos en hacer entrar estos nuevos dominios"...)y en esto no parece alejarse en nada a las descripciones epistemológicas de Poincaré en su conferencia de 1896 en Zurich.

Pero veamos en seguida cual es la solución de Hilbert para el problema del conocimiento científico, esto es, cual es el criterio de verdad de tal conocimiento, como es que en ese proceso descrito anteriormente podemos discernir el conocimiento matemático. Esto lo hará Hilbert definiendo sus condiciones generales y exigencias a las que debe responder la solución de un problema matemático. En esto juega un papel importantísimo la noción por él definida de rigor, sigamos paso a paso su pensamiento:
... "Ante todo, yo colocaría la exactitud de la solución, que debe ser obtenida por medio de un número finito de conclusiones, y que debe reposar sobre un número finito de hipótesis proporcionadas por el problema mismo, y formuladas en cada caso con precisión. Ahora bien, esta condición de la deducción lógica por medio de un número finito de conclusiones no puede ser otra cosa que aquella del rigor en las demostraciones". ..[18,p.55]

No olvidemos que en 1900 encontramos a Hilbert en los inicios de su fanatismo por el método axiomático y es en esta época que empezaría a definir lo que posteriormente se ha dado en llamar el Programa de Hilbert.

En este año 1900 es claro lo que propone: el criterio de cientificidad, para decidir cuando hay una solución matemática que se digne de serlo, cuando hay un conocimiento verdadero, es la lógica formal, el razonamiento puro.

... "En efecto, el rigor en la demostración, condición hoy de una importancia proverbial, corresponde a una necesidad filosófica general de nuestro entendimiento; por otra parte, es solamente satisfaciendo a esta exigencia que los problemas manifiestan su fecundidad y su alcance".. [18,p.36]

Cual es esa necesidad filosófica general de nuestro entendimiento ? No encuentro otra que una comunicación idealista de la certeza absoluta por medio del entendimiento mismo que no es más que el mecanismo de la lógica formal, el silogismo aristotélico. "Un nuevo problema cuando tiene su orígen en el mundo exterior, es como un arbolito que no se desarrolla y no dá frutos más que cuando ha sido injertado, con todos los cuidados del arte del jardinero, sobre el tronco madre, es decir, sobre los conocimientos matemáticos que poseemos completamente".. [18,p.36]

Hilbert no niega entonces el que los problemas matemáticos, algunos, sean sugeridos por la actividad exterior, por el nundo sensible, no niega que haya un tipo de intuición, pero esta solo plantea los problemas no los resulve. La intuición no es la actividad que nos dá el conocimiento matemático, para que este conocimiento sea parte de los conocimientos matemáticos hay que "injertar" en ellos (que han sido rigurosamente establecidos), introducirlo rigurosamente como parte de los conocimientos de un sistema axiomático o sea deducidos por las reglas de la lógica formal.

Es aquí donde vemos lo que es la filosofía de Hilbert, la del idealismo Formalista Alemán: es la razón pura la que nos dá el conocimiento, la certeza. En la búsqueda de certidumbres fuera de duda, para cada problema no importa de que tipo, solo hay un método: la lógica formal.

Su posición filosófica sobre la labor matemática y sus fundamentos llevan a Hilbert a creer en el poder del método axiomático no sólo para el descubrimiento de las verdades matemáticas sino para la transmisión de tales verdades "Sería, del resto, un error creer que el rigor en la demostración es enemigo de la simplicidad. Numerosos ejemplos al contrario, muestran que el método más riguroso es también el más simple y el más fácil de aprender"...[18, p.36]

Encontramos aquí uno de los puntos de mayor diferencia entre Hilbert y Poincaré quien como veremos hace una fuerte critica en cuanto a este punto de vista de la enseñanza.

Pero además Hilbert cree que no sólo las diversas disciplinas matemáticas son susceptibles del empleo del método axiomático, el rigor no debe limitarse a tal ciencia sino extenderse a cualquier otra disciplina, el formalismo no puede contentarse con tener verdades indubitables en la región aislada de la matemática como parte del amplio campo del conocimiento, si bien ella lleva la batuta cualquier otra disciplina debe llegar a ser científica pasando por el examen de la lógica formal, axiomatizandose, creando para cada una un sistema que cumpla determinadas condiciones (consistencia fundamentalmente).

..."Al contrario, yo pienso que, en todos sitios donde se presenten ideas matemáticas, sea en filosofía (teoría del conocimiento), sea en geometría, sea en física, se plantea el problema de la discusión de los principios fundamentales, bases de estas ideas, y del establecimiento de un sistema simple y completo de axiomas; y esto debe hacerse de tal manera que el rigor de las nuevas - definiciones y su aplicabilidad no le cedan en nada al de las antiguas definiciones aritméticas"...[19, p.39]

Debe por lo tanto, toda disciplina que se diga científica pasar al plano del pensamiento abstracto, alejado de todo significado, de toda contaminación del mundo sensible que le dió origen por medio del establecimiento de un sistema de axiomas que definen las propiedades no de objetos reales sino de símbolos matemáticos[20].

Y este es el principio fundamental del método axiomático - renovado de Hilbert ensayado por él en el caso de la geometría: ... " A nuevas ideas corresponden necesariamente nuevos símbolos; debemos escoger éstos últimos de manera que nos recuerden los fenómenos que han sido el origen de las nuevas ideas. Así, las figuras de la geometría son símbolos que nos recuerdan la intuición del espacio, y es así que todo matemático los emplea"[18-39]

El idealismo matemático alemán finisecular llega así a el punto en que es necesario un sistema absoluto totalmente abstracto que, acorde con su filosofía, no puede hacer referencia a otro mundo más que el de los signos mismos, aunque eventualmente nos hable sobre el mundo real de los objetos físicos. Esta necesidad filosófica responde a condicionamientos sociales propios de la época, la necesidad para la burguesía alemana de alcanzar un puesto de vanguardia económica a nivel mundial, se traduce en la en la necesidad para los científicos de alcanzar el conocimiento absoluto, para lo cual es necesario crear el sistema que les permita la certidumbre de alcanzarlo.

En las matemáticas se encontraron con la disciplina que les permitía tal certeza innegable, la "vuelta a Kant" de los filóso fos neokanteanos es también parte del clima ideológico de la -- época de la Alemania unificada y en pos del desarrollo económico que compitiera con Inglaterra fundamentalmente.

Pero veamos lo que Hilbert entiende por establecer un "sistema simple y completo de axiomas" para cualquier campo del conocimiento. Para ello veamos lo que nos dice en sus 1o. y 2o. problemas (ordenados por importancia)de la lista de 23 que presentaba en aquella ocasión, el segundo de los cuales trata de la consisten cia de la aritmética de los reales y en el primero sobre la hipó-- tesis del continuo y la hipótesis de buena ordenación de la teoría de conjuntos cantoriana, el cual veremos en detalle en el capítulo III.

La prueba de consistencia buscada por Hilbert para el sistema de los números reales se desprendía de la prueba de consistencia - relativa de la geometría que él había dado en 1899, pero además - había la necesidad de una prueba de consistencia tal que incluyera la doctrina del infinito actual, las nociones ideales transfinitas que habían sido rechazadas por sus propios compatriotas intuicionis tas. De hecho se asiste en el congreso a un acto de desagravio por parte de Hilbert y sus compañeros de generación (como Minkowski) hacia la obra de G. Cantor[21], pero tratando de conciliar con los intuicionistas de una manera que, aunque posteriormente definirá con mayor claridad, los métodos constructivos exigidos por ellos (finitistas) fuesen aplicados en la demostración de existencia de tales nociones ideales del cantorismo. Veamos entonces parte del 2o. problema de importancia jerárquica para Hilbert:

" II.- De la no-contradicción de los axiomas de la Aritmética.

Cuando se trata de poner los principios fundamentales de una ciencia, se debe de establecer un sistema de axiomas encerrando una descripción completa y exacta de las relaciones entre los conceptos elementales de ésta ciencia. Estos axiomas son a un mismo tiempo las definiciones de estos conceptos elementales; ninguna afirmación relativa a la ciencia de la cual examinamos los principios fundamentales será admitida como exacta, a menos que la podamos obtener de los axiomas por medio de un No. finito de deducciones. Si se considera las cosas más exactamente, la pregunta es la siguiente: ¿ Ciertas afirmaciones contenidas en los axiomas no serán dependientes unas de las otras, y, como consecuencia esos axiomas no encerrarán partes comunes superfluas que se deben suprimir si se quiere obtener un sistema de axioma completamente independiente ?.

Pero ante todo, entre tantas preguntas levantadas por el examen de los axiomas veo como la más importante ésta: Demostrar que los axiomas no son contradictorios, es decir, demostrar que basándose sobre los axiomas no se podrá jamás llegar a resultados contradictorios por medio de un No. finito de deducciones lógicas. " [18, p.60]

El sistema absoluto que desea Hilbert para la aritmética necesita entonces pasar la prueba de independencia de los axiomas y por sobre todo de consistencia, esto es, un sistema garantizado para no fallar nunca. Pero su prueba está condenada al fracaso ya no digamos por la base idealista que está de fundamento de tal pretensión sino por la misma base axiomática sobre la que reposa, Hilbert exige que tal prueba de consistencia de su sistema axiomático sea efectuada por vía directa, esto es, por medio de un aparato matemático propio de la aritmética misma de los reales pues ahora ya no hay como en el caso de la geometría otro sistema al cual mapear -- sus objetos (o más bien las relaciones, establecidas por los axiomas, entre tales objetos) de tal manera que fuese reconocible alguna contradicción.

Los axiomas de la aritmética son para Hilbert "las reglas ordinarias del cálculo" más dos axiomas: el axioma de Arquímedes y - y el de integridad (o completud o no extensibilidad), esto le permitió mapear uno a uno la recta y el continuo (es decir el sistema de los reales) y por ende reducir el problema de consistencia de - la geometría al de la aritmética en la clásica forma cartesiana.

El idealismo filosófico alemán con Hilbert a la cabeza se juega así su futuro, probar la consistencia de un sistema para la aritmética que significará la consistencia de todo sistema axiomático para la rama del conocimiento que se desee desde la filosofía hasta la física[22].

Por otra parte Hilbert no se olvidaba de la escuela intuicionista que exigía la existencia matemática por medios constructivos, y si para unos todo comienza con los números naturales "que nos ha dado Dios" y solo de ahí es posible generar cualquier otro sistema numérico para los otros es cuestión de probar la no-contradicción - de los atributos que conferimos a algunas nociones como la del continuo. Como buenos alemanes del Siglo XIX Kant es su guía, pero cada uno toma la palabra del maestro según conviene a su propia - - -

comprensión matemática.

Hilbert tenía ahora la oportunidad de responder a Kronecker y además remarcar la importancia que tendría una prueba de consistencia del sistema de los reales: el fracaso total de los intuicionistas.

"...Si se confiere a alguna noción atributos que se contradicen, diré que, al punto de vista matemático, esta noción no existe. ... En el caso actual en el que se trata de los axiomas relativos a los números reales de la aritmética sería al mismo tiempo la demostración de la existencia matemática del conjunto de todos los números reales, es decir, del continuo"... [18, p. 61-62]

Por último su concepción axiomática sale a relucir y en forma clara nos dice lo que él entiende por el conjunto de los reales, así como la primera reivindicación pública hacia la teoría de conjuntos de Cantor.

... "A decir verdad, el conjunto de todos los números reales, es decir, el continuo, entendido como nosotros lo hacemos aquí, no es, hablando propiamente, la totalidad de todos los desarrollos posibles en fracciones decimales o el conjunto de todas las leyes posibles según las cuales pueden proceder los elementos de una serie fundamental: es más bien un sistema de entes cuyas relaciones mutuas son regidas por los axiomas establecidos y por las cuales son verdaderos todos los hechos, y aquellos solamente, que se puede deducir de estos axiomas por medio de un No. finito de deducciones lógicas". [18, p. 62]

... "La noción de continuo, e incluso aquella del conjunto de todas las funciones, existe entonces absolutamente en el mismo sentido que existe, por ejemplo, el sistema de todos los números racionales, o aún la clase de números y las potencias más elevadas del Sr. Cantor".. [16,p.65]

Se ha sufrido así una transformación en la historia de las ciencias matemáticas, ahora de los reales no queda nada de su contenido intuitivo, el sistema axiomático de Hilbert ha dejado atrás todas las concepciones de Cauchy.
Al igual que Klein lo hiciera para la geometría dejando de lado las concepciones, materialistas en este caso, de Lobachevsky o un Riemann, el idealismo matemático alemán (Kant a la base) crea el sistema abstracto que requiere en última instancia el sistema económico de la época.

La importancia de la teoría de conjuntos se había puesto de manifiesto como una herramienta capaz de dar ayuda a diversas ramas matemáticas y, además de ser, la disciplina fundamental a la que se podría reducir los fundamentos de la matemática.

Pero había en ella, en la construcción cantoriana, intuitiva, algunas fallas, requería de una axiomatización que la haría dar todos sus frutos, hacer rigurosa esta disciplina era uno de los objetivos junto con la solución de problemas particulares pero fundamentales para su desarrollo, estos eran, la demostración de la hipótesis del continuo (¡que Hilbert pone como 1er. problema de importancia jerárquica!) por medio de la demostración de otra hipótesis: que el continuo puede bien ordenarse.

Los problemas 1o. y 2o. en importancia jerárquica, los plantea

Hilbert esperando su solución ya sea afirmativamente o por una prueba de imposibilidad. Su objetivo en la conferencia - - - era por otro lado, rebatir el punto de vista de Emil Dubois-Reymond, sobre los límites del conocimiento científico, que al parecer rayaban en el agnosticismo, y que eran muy difundidos en esa época (23).

Al término de la introducción de su conferencia, Hilbert hace una enérgica reiteración de su convicción del poder ilimitado del método axiomático que es para Hilbert equivalente a la - matemática como hemos visto:

"Entendemos siempre resonar en nosotros este llamado: He aquí el problema, busquémosle la solución. Tú puedes encontrarla por el razonamiento puro. Jamás, en efecto, matemático alguno será - reducido a decir: "Ignorabimus" (24). [18, p.46]

Hasta aquí podríamos concluir (25) que las características -- del idealismo matemático de Hilbert y por tanto las del formalismo alemán de 1900 son dos, a saber: la matemática es abstracta - (axiomática formal) y pretende contener la verdad absoluta (26).

Pero aún hay otra característica: las matemáticas son una -- ciencia, es la matemática cuya unidad se encuentra en el método - axiomático y por si fuera poco ellas son la base de cualquier otra ciencia son el criterio de verdad, de cientificidad para cualesquier disciplina del conocimiento:

... "El carácter de unidad de la matemática es la esencia misma de esta ciencia. En efecto, las matemáticas son los fundamentos de todos los conocimientos naturales exactos"... [18, p.116]

Citemos la formulación de los teoremas de K. Godel que establecen el fracaso de las ideas de Hilbert:

..."Lo que Godel demostró fue que en todo sistema formal que pretenda formalizar la teoría de números suceden dos cosas:

1o. Si suponemos que el sistema es consistente, es posible mostrar la existencia de fórmulas que corresponden a enunciados aritméticos ciertos y que sin embargo, no pueden ser deducidos ni refutados en el formalismo.

2o. La teoría no puede llegar por sus propios medios, o por medios más débiles, a demostrar su propia consistencia. Ello significa que la consistencia del sistema no puede ser demostrada con métodos reflejable o representables en él mismo." p. 115.

Para una formulación acabada de los teoremas de Godel recomendamos la lectura de la tesis citada.

26) Aún a pesar de que en 1896 Poincaré hiciera la siguiente declaración: "Hace mucho tiempo que nadie piensa ya en aventajar a la experiencia o en construir enteramente el mundo apoyado en algunas hipótesis prematuras. De todas esas construcciones en que todavía se complacían ingenuamente hace un siglo, hoy no quedan más que ruinas." p. 91. El valor de la ciencia.

con los filósofos también!" op. cit. Constance Reid. p. 71.

23) op. cit. Constance Reid. p. 72.

24) Ladrière nos dice sobre esta convicción que "se apoya en su concepción del ente matamático: para él los objetos matemáticos tienen una existencia independiente del pensamiento y de las construcciones a través de las cuales intentamos descubrirlos y describirlos". y más adelante nos dirá: "Aquí se trasluce la doctrina platónica de la adecuación de la inteligencia a las ideas. Pero el platonismo de Hilbert se queda en ese punto. Para él la realidad matemática no está situada en un mundo ideal, sino que se identifica con la realidad concreta de los signos".

25) Con el objeto de ver el desarrollo del pensamiento de Hilbert en cuanto a los problemas de fundamentación consúltese "La filosofía formalista de la matemática: el punto de vista de Hilbert." Tesis, Carlos Torres Alcaraz. 1978.

Allí se señala que Hilbert y su escuela llegan luego de algunos años a delimitar su tarea en:

..."1) reconstruir la matemática como un objeto concreto.

2) probar su no contradicción y en dicha prueba se debía evitar el empleo de medios demostrativos que pudieran ponerse en duda.".... "si lo que se deseaba era justificar el empleo de elementos transfinitos en matemáticas, nada habría más nocivo que la inclusión de dichos elementos en la justificación misma." p. 50.

21) ... "Era un tiempo donde, de acuerdo a Hilbert, el trabajo de Cantor era todavía actualmente "Tabú" en los círulos matemáticos alemanes, parcialmente debido a lo extraño de sus ideas y parcialmente por los ataques tempranos de Kronecker. Aunque Minkowski admiraba el trabajo matemático de Kronecker, deploraba tanto como Hilbert la forma en la que el viejo hombre trataba de imponer sus restrictivos prejuicios personales sobre las matemáticas como un todo"... op. cit. Constance Reid p. 50.

En realidad, el rechazo a la obra de Cantor en sus inicios, - por parte de los jerarcas académicos alemanes, se explica - más bien por la inclinación de G. Cantor por demostrar algunas proposiciones de la teología en una época en que por la unificación política y cultural alemana se daba un ataque - hacia las ideas de la iglesia católica.

Un valioso documento que muestra como las ideas religiosas de Cantor se relacionan ampliamente con su teoría de conjuntos transfinitos es: (Joseph W. Dauben: G. Cantor and Pope Leo XIII: mathematics, theology and the infinite". Journal of the history of ideas. 38 (1977), pp. 85 - 108.

22) Minkowski comentaba a Hilbert, al revisar su manuscrito, sobre el 20. problema lo siguiente:

"Altamente original, comenzar por un problema para el futuro, que los matemáticos han creido poseer completamente por largo tiempo, los axiomas aritméticos. Que gran número de legos en la audiencia dirán algo acerca de ésto? ¿Será su respeto por nosotros en aumento? ¡tendrás una pelea en tus manos

1) F. Cocho "una alternativa a la crisis matemática de los - fundamentos". Programa de Ciencia y Sociedad Facultad de Ciencias UNAM 1979

2) G. Israel "Un aspecto ideológico de la matemática contemporánea: il Bourbakismo". 1977 De Donato editore Italia. p. 42.

3) Israel caracteriza así el proceso:
"La temática científica que surge en Alemania de principios del siglo, postula una diversificación del trabajo científico una figura del científico no más "compleja", - sino "especialista", capaz de desarrollar autónomamente - los sectores individuales en los cuales la ciencia debe de ser descompuesta, a causa del imponenete crecimiento - cuantitativo de sus resultados. Se manifiesta la tendencia de separar la investigación experimental y teórica, experimentación física y tratamiento matemático de los fenómenos, construcción de aparatos y proyección de experimentos; y esta tendencia requiere la separación de la investigación en sectores autónomos y capaces de desarrollarse a un ritmo extremadamente más veloz, con el abandono contemporáneo de cada pretensión de unificación o de control complexivo de las direcciones de la investigación" p. 42.

4) Constance Reid "Hilbert" p.88 Ed. Springer-Verlag 2a. ed. 1972. ...."Klein se había dedicado a actividades que no eran matemáticas propiamente. Además de sus trabajos en la enseñanza y la administración, era el promotor de algunos proyectos: el plan para los 30 volúmenes de la enciclopedia matemática, la recientemente organizada Comisión internacional de Escuelas, la cual había estado estudiando el desarrollo de los métodos de enseñanza "en todos los países civilizados" desde kinder hasta escuelas de grado; el intento por ampliar y mejorar la educación científica ofrecida en las escuelas medias de Alemania y ocasionar a la vez, al nivel universitario, entrenamiento técnico y matemático; el sueño, anhelado desde su visita a América, de fertilizar la tecnología misma con los métodos de las matemáticas puras. Hilbert tenía escaso interés por estos proyectos de Klein"...... p. 88. C. Reid.

5) Kronecker (1823-1891) discípulo de Gauss figura dominante en la matemática alemana se empeñó en hacer entrar a las matemáticas en el molde de la teoría de números como lo ilustra su sentencia: "Los números enteros han sido hechos por Dios, lo demás es trabajo del hombre". Aceptaba que una entidad matemática existía si podía definirse verificándola en un número finito de pasos. De donde se rehusó a aceptar el infinito actual de Cantor. Hostigó todas las extensiones del concepto de número sobre todo el concepto de los números irracionales. En el avance del proceso de la unidad política de Alemania con la afirmación del Estado Prusiano -

lleva al predominio a la escuela berlinesa de la que -- Kronecker era el exponenete mayor. Ver C. Boldrighini y F. Marcheti págs. 113 y 114. "El problema de los fundamentos y la formalización de Hilbert" en matemática e física: Struttra e ideologia Ed. De Donato 1977.
y también: A concise history of mathematics D.J. Struik.

6) Boldigrini - Marchetti op. cit. p. 118.

7) Felix Klein "El Programa de Erlangen" 1872. Traducción y - advertencia preeliminar de F. Cocho Gil Prog. de C y S - Facultad de Ciencias UNAM 1978.

8) Un análisis histórico crítico se encuentra en : F. Cocho, G. Rodríguez, M. Izquierdo, S. Ursini:" Programa de C y S Facultad de Ciencias UNAM 1979.

9) David Hilbert "Los Fundamentos de la Geometría" , traducción y advertencia preeliminar y comentarios finales de F. Cocho Programa de C y S Facultad de Ciencias UNAM 1978.

10) El logro central de la creación de las geometrías eucluídeas no era simplemente el de la posibilidad de crear otras geometrías por el simple hecho de negar un axioma y por tanto - tener otros sistemas que generan otros resultados, sino más bien el logro radica en que esa operación creaba otra concepción sobre el espacio, el concepto de espacio no era ya

más euclídiano a priori sino que se demostraba el que nuestras concepciones sobre él son variadas y que es posible - aprehender el espacio de muy diversas maneras. Adoptando otros principios no necesariamente los euclidianos podemos conocer las propiedades del espacio y generar una geometría que nos hable de la realidad sin ocultarnos, con dogmatismos, nuevos conocimientos. Se mostraba entonces que - es más natural, el procedimiento de estudio del espacio -- partiendo de la realidad en forma intuitiva.

El enfoque axiomático de Hilbert olvida entonces el - problema principal en aras del rigor. La generación de conocimientos geométricos a partir de principios intercambiables y no de la confrontación con la realidad.

La creación de las geometrías no euclidianas "invalidando una creencia tradicional y rompiendo con el hábito - de pensar que se había tenido durante siglos, asestó un -- fuerte golpe al punto de vista de la verdad absoluta de -- las matemáticas". (según lo dice Howard Eves en su estudio de las geometrías tomo II). UTEHA 1963.

Pero veremos que Hilbert recuperará "el punto de vista de la verdad absoluta" dando así un fuerte revés a los progresos que suscitaron Lobachevsky y por sobre todo Riemann, en cuanto a las concepciones que podríamos llamar materialistas del que hacer matemático.

11) C. Reid op. cit. pág. 57.

12) "El sistema de 21 axiomas necesarios y suficientes para demostrar todas las proposiciones de la geometría euclidiana (bi y tridimensional) mostraba la posibilidad de hacer abstracción del contenido concreto de las entes que intervenían, refiriéndose solo a las <u>relaciones</u> existentes entre estos entes, de aquí la célebre <u>ocurrencia</u> de Hilbert, quien proponía sustituir la palabra "recta", "plano", etc., con palabras arbitrarias, sin que cesase la validez de los resultados obtenidos. La operación de Hilbert ponen por lo tanto las premisas para una completa desconexión de las matemáticas y las ciencias experimentales, "liberando" la "verdad" de las proposiciones matemáticas de "cada contacto con la verdad experimental" y fundándola solo sobre reglas de la lógica. Ese es solo el episodio más famoso de un amplio proceso de axiomatización que abarca numerosos sectores de las matemáticas: la geometría, la aritmética, la teoría de funciones de variable real y compleja, etc. Estrechamente ligada a la axiomatización esta al desarrollo de la teoría de los conjuntos la que tiende más a formar el edificio matemático y el descubrimiento contemporáneo de antinomias que minaban a -
G. Israel. op. cit. p. 54.

13) El enunciado de Hilbert en sus "fundamentos" es el siguiente: "Procediendo a los cinco grupos de axiomas, podemos añadir el siguiente, que si bien no es puramente de naturaleza geométrica, merece particular atención desde un punto de vista

teórico. Puede expresarse de la forma siguiente:

Axioma de no extensibilidad: A un sistema de puntos, lineas rectas y planos, es imposible añadir otros elementos de tal suerte que el sistema así generalizado forme una nueva -- geometría obedeciendo a todos los axiomas de los cinco grupos. En otras palabras, los elementos de la geometría forman un sistema el cual no es susceptible de extensión, si es que queremos conservar los cinco grupos de axiomas como válidos.

Este axioma no nos dice nada concretamente a la existencia de puntos límite, o de la idea de convergencia. No obstante nos es útil para demostrar el teorema de Bolzano en virtud del cual, para todos los conjuntos de puntos situados sobre una linea recta y entre dos puntos definidos de la misma linea, existe necesariamente un punto de condensación, es decir, un punto límite. Desde un punto de vista - teórico, el valor de este axioma consiste en que permite in directamente la introducción de puntos límites, y , entonces, hace posible establecer una correspondencia uno a uno entre los puntos de un segmento y el sistema de números reales. Sin embargo, en lo que sigue, no haremos uso del "axioma de no extensibilidad". Vale la pena que extendamos esta - nota refiriendo algunos comentarios de quien tradujo el trabajo de Hilbert:

"Hilbert no habla de la compatibilidad e independencia del -- axioma 21 respecto a los otros, pero éste axioma hace posible la correspondencia 1 - 1 de puntos y reales.

"Dicho de otra forma, de ese axioma depende incluso - el que tenga sentido decir que la geometría es un sistema axiomático compatible e independiente si, a su vez, lo es la aritmética (¡ que no lo es ¡) propiedades que, a su - vez, no se demuestran, respecto a ese axioma

Consecuencias de la omisión son:

i) el axioma 21 es un teorema demostrable

ii) o bien un axioma y su "independencia" hace posible crear otro sistema en donde puede añadirse como axioma su negación o sea que poner en correspondencia 1 - 1 la geome-- tría y la aritmética, disolver la primera en términos de la segunda (tendencia de la matemática alemana del siglo XIX y principios del siglo XX y aún tendencia dominante - hoy) no es más que un punto de vista subjetivo"

14) Constance Reid en el libro ya citado habla de que "una revista alemana (de la época) encontró el libro tan bellamente -- simple que predijo atrevidamente que sería pronto usado como texto en las escuelas de instrucción elemental.

El libro entonces se acoplaba perfectamente al nuevo tipo de educación requerido en Alemania, tan taylorizado como una fábrica cualesquiera de las que surgían en aquella nación, y además era parte del espíritu filosófico dominante de la época, como atestigua la opinión de uno de los alumnos de Hilbert de la cuál nos hace referencia C. Reid:

"El impacto decisivo del trabajo de Hilbert, era el espíritu característico de Hilbert... combinando potencia lógica con intensa vitalidad, desdeñando convención y tradición, desarrollando lo que es esencial en la antítesis con placer kantiano, tomando ventaja para la total libertad del pensamiento matemático". op. cit. pp. 62-63.

15) C. Reid pp. 16-17.

16) Versión en español en "El valor de la ciencia" 2a. parte - Cap. V. pp. 89 a 99.
Allí Poincaré nos habla de 3 fines de las matemáticas: físico, filosófico y estético. Los fines físico (de aplicación) y estético (matemáticas puras) "no son solidarios pero no deben ser sacrificados uno u otro".

Analiza lo que "la física recibe de la matemática y lo que la matemática toma a su vez, de la física".
Algunos párrafos extraídos de ésta conferencia de Poincaré que pueden ayudarnos a resumir su punto de vista son:

"El físico no puede pedir al analista la revelación de una verdad nueva, a lo sumo este puede ayudarle a presentirla".

El físico no puede pasarse sin las matemáticas: "le suministran la única lengua que puede hablar".
además: "para inferir una ley de la experiencia es necesario generalizar" y quien guía la elección de una generalización es la analogía y el conocimiento de las analogías lo propor--

fundamentalmente las matemáticas. "El espíritu matemático que desprecia a la materia para adherirse a la forma pura". Pero por otro lado, en cuanto a los servicios de la física al análisis dice:

"Sería menester haber olvidado completamente la historia de la ciencia para no recordar que el deseo de conocer la naturaleza ha tenido la influencia más constante y más afortunada sobre el desarrollo de las matemáticas".

... "Por variada que sea la imaginación del hombre la naturaleza es mil veces más rica todavía"....

"El único objeto natural del pensamiento matemático es el número entero. El mundo exterior es quien nos ha impuesto al continuo, que hemos inventado, sin duda, pero que él nos ha forzado a inventar".

"No seamos tan puristas y estemos reconocidos al continuo, que, si bien todo surge del número entero, era el único capaz de hacer surgir tanto.

... "La física no solo nos dá ocasión de resolver problemas nos auyda a encontrar los medios, y eso de 2 maneras" :

"Nos hace presentir la solución;nos sugiere razonamientos"

... " ¡ Adivinar antes de demostrar ! ¿ tengo necesidad de recordar que así es como se hacen todos los descubrimientos importantes ?"

¡ Cuantas verdades que las analogías físicas nos permiten presentir y que no estamos en condiciones de establecer por razonamientos rigurosos¡"

17) C. Reid. op. cit. p. 69.

18) Hilbert, D. "Sobre los problemas futuros de las matemáticas" traducción de F. Cocho G. Programa de C y S Facultad de -- Ciencias UNAM 1978.

19) Para Kant la clasificación de los juicios (e.d. proposicio-- nes afirmadas por alguien) es la siguiente:

Analíticos: donde el predicado P pertenece al sujeto A (o-- aquellos cuya negación produce contradicción)

Sintéticos: donde el predicado P esta fuera del concepto A.

A priori : independiente de la experiencia y de toda impre sión de los sentidos.

A posteriori: depende de otros juicios que describen experien cias o incluso impresiones sensibles.

Para Kant hay juicios sintéticos (o aquellos cuya negación no supone contradicción) y a priori.

Formular un juicio sintético a priori (j.s.a.) es aplicar un concepto a priori (un concepto aplicable a casos particulares aunque no se abstraigan de la percepción sensible). Por -- ejemplo el tiempo y el espacio son casos particulares a priori de descripción por conceptos a priori. Ahora, la estructura de estos casos particulares es descrita por j.s.a. en los que se emplean los conceptos a priori de la geometría y la aritmética.

Kant "prueba" ésto en su "crítica de la razón pura" en la cual afirma que "La matemática debe tener como fundamento al-- gún tipo determinado de percepción pura en el que pueda representar sus conceptos in concreto y además a priori, en el que - pueda construirlos".

... "Construir un concepto es representar a priori la intuición que le corresponde".....
Un excelente librito (de donde ha sido tomado este resumen) sobre la filosofía kantiana y su relación con las matemáticas (y en particular sobre las relaciones de su filosofía con las escuelas modernas de filosofía de las matemáticas) es el de S. Korner titulado "Kant" Ed. Alianza Universidad 1977.

20) Esta idea será expresada con mayor claridad posteriormente, en 1922:

"Para mí -y en esto me opongo totalmente a Frege y a Dedekind- los objetos de la teoría de los números son los signos mismos de los cuales podemos reconocer la forma en toda su generalidad y con toda seguridad, independientemente de las circunstancias de lugar y tiempo, de las condiciones particulares de su presentación y de las diferencias que puedan afectar a su trazado. El punto de vista filosófico que considero como indispensable para el fundamento de las matemáticas puras -como para cualquier tipo de pensamiento, de comprensión y comunicación científicos -se puede resumir de esta forma: en el principio- y así nos expresamos aquí- era el signo"....
Jean Ladriére "Limitaciones internas de los formalismos" Ed. Tecnos 1969. pp. 26-27.

C A P I T U L O

II

INTUICIONISMO MATEMATICO FRANCES EN EL CONGRESO DE 1900 .

Entramos ahora a tratar con la conferencia que constituye la respuesta al formalismo matemático Alemán representado por Hilbert en aquella ocasión. Si bien la intervención de H. Poincaré no hace referencia explícita al documento presentado por Hilbert es claro que su posición esta en franco debate con las escuelas logicista y formalista de la época en particular con Hilbert.

La conferencia de Poincaré titulada "Del papel de la intuición y de la lógica en matemáticas"[1] era la última que se presentaba en el congreso, que se desarrollaba bajo la presidencia del mismo Poincaré.

Para 1900, Poincaré había escrito ya algunos artículos en los que definía su posición filosófica en cuanto al trabajo matemático, algunos de ellos son citados por él en su intervención uno de los cuales está traducido al final de la tesis presente (inédito en español) y que presenta especial interés en cuanto a la enseñanza de las matemáticas.

La escuela intuicionista francesa iniciada por Poincaré y en la cual inscribo a Borel, Lebesgue y Baire (aún y cuando haya diferencias en algunos temas entre Poincaré y los otros matemáticos)[2] difiere en algunos aspectos con la escuela intuicionista alemana de Kronecker (y posteriormente Brower, Heiting, etc) en particular porque para la escuela francesa es de utilidad la teoría de conjuntos cantoriana a diferencia de los alemanes intuicionistas que la rechazan por principio. Poincaré mismo si bien en un inicio rechaza la teoría de conjuntos por su tratamiento del infinito actual, luego será menos radical y hasta hará alguna contribución en ella[3]. Veremos cual es su posición en el capítulo III en cuanto al axioma de elección y el teo del Buen orden de Zermelo en donde también hay una diferencia respecto a sus colegas intuicionistas.

Pero en cuanto al debate con los formalistas alemanes,en particular respecto a Hilbert, Poincaré en 1899 había dado ya su posición en cuanto al trabajo "Los fundamentos de la geometría" de Hilbert en donde, como hemos dicho, este empezó a desarrollar su método axiomático.

... "El punto de vista lógico es lo único que parece interesar al profesor Hilbert"... "estando dada una sucesión de proposiciones él encuentra que todo se sigue lógicamente de la primera. Con la base de esta primera proposición, con su origen psicológico, no tiene preocupación... Los axiomas son postulados no sabemos de donde vienen; es tan fácil entonces postular A como C .... este trabajo es de esta manera incompleto, pero esto no es una crítica que hago en su contra. Incompleto realmente debe resignarse a ser uno mismo. Esto basta para que él haya hecho que la filosofía de las matemáticas tomen un largo camino por delante"[4]....

Más tarde Poincaré escribiría sobre el mismo libro: "He aquí un libro que me parece muy bueno, pero que no recomendaría a ningún estudiante de Liceo. Por otra parte, pensándolo bien, podría hacerlo sin temor, pues no creo que prolongara mucho su lectura"[5].

Explicitando así su rechazo a la enseñanza de las matemáticas, en este caso la geometría," de los que se limitan a combinar las formas vacías, puramente inteligibles, pero que la abstracción ha privado de toda materia"[6].

Tenemos entonces dos concepciones diferentes de lo que se entiende por labor matemática, por enseñanza de la misma. Estas concepciones como muchas otras que surgieron en esta época (por ejemplo la escuela logicista y en el interior de los mismos intuicionistas) deben ser explicadas como una parte del -- proceso general histórico que conlleva múltiples determinaciones, de diverso peso; pero que <u>en última instancia</u> son debidas a las determinaciones económicas de las formaciones sociales - prevalecientes en la época en la que se sitúan las concepciones.

En este sentido es que podemos decir que, así como en la- Alemania de Hilbert la 2a. revolución industrial postula un tipo de actividad científica determinada, en la Francia de la - época otras son las condiciones de desarrollo de las fuerzas - productivas que hacen que otras concepciones se den como dominantes.

"Las características fundamentales de la economía francesa son: la prevalencia del componenete agrícola; el carácter - disperso y fragmentario de la industria; el bajo nivel de intercambio con el exterior. A esto se adjunta un bajo nivel -- tecnológico, una absolecencia progresiva de la maquinaria, la escasa introducción de las nuevas técnicas productivas que eran difundidas en Alemania"[7].

Para Poincaré la lógica no es suficiente para explicar el trabajo matemático o la invención en este campo. No es posible encerrar en un sistema axiómatico las teorías matemáticas en - particular la aritmética. Si bien el rigor es necesario no dá cuenta de la creación matemática ni tampoco servirá como guía en la exseñanza por el contrario deformará a quienes así sean educados a temprana edad. Para él hay otro tipo de medios en - la creación matemática, a la manera de Kant nos dirá que las proposiciones aritméticas tienen en su base verdaderos juicios sintéticos a priori[8] y que es sólo la intuición pura la que nos dará la guía para el descubrimiento de las verdades matemáticas. ¿ Cómo es que esto sucede ?no nos lo dirá y la respuesta cree debe ser tarea del psicólogo. Más tarde, en 1904, en - su lectura a la sociedad de Psicología de París[9] describirá - el proceso (las circunstancias) en las que él mismo descubrió algunas cuestiones de una rama de las matemáticas, como ayuda- al análisis de los psicólogos.

Pero veamos lo que nos interesa, recoger de su conferencia las afirmaciones que nos conduzcan a caracterizar su intuicionismo que para nosotros no es más que una forma del idealismo - filosófico quizá de gran valor para la historia de las ciencias exactas al oponerse firmemente a la deformación que el formalismo matemático (otra faceta del idealismo filosófico) estaba dando de los procesos de conocimiento en las ciencias exactas tanto en cuanto a alternativas científicas como en cuanto a los --

problemas de la enseñanza.

Por sí misma la conferencia de Poincaré es una refutación a la concepción unitaria que del trabajo matemático tiene Hilbert, veamos como tampoco la labor matemática es abstracta -- (axiomático formal) a la manera de los formalistas alemanes de fines del siglo XIX.

Para Poincaré hay 2 tendencias entre los matemáticos, totalmente opuestos, unos que se preocupan por la lógica, otros que hacen todo con la intuición. Las dos tendencias son "igualmente necesarias para el progreso de la ciencia".... "El análisis y la síntesis tienen pues, su papel legítimo". (1, p. 6)

En la historia de la ciencia encontrará como las grandes obras son debidas a la intuición desde tiempos remotos, geómetras como Euclides que hicieron gran uso de la lógica formal en su obra no deja la intuición para establecer sus axiomas, postulados y definiciones; posteriormente los analistas han exigido no dar más concesiones, no dejar a la duda axiomas tales como el de las paralelas de Euclides, o afirmaciones tales como la referente a la de que toda función continua tendría una derivada.

Sucede entonces que la intuición no da la certitud, el rigor y éste debía necesariamente que surgir del "obscuro rincón - en donde había quedado desde los tiempos de Euclides" y poner orden en los conocimientos adquiridos, más que por la lógica por la intuición, desde entonces hasta la explosiva carga de conocimientos que el análisis adquirió en los siglos XVII y XVIII. -- Cauchy, Weierestrass y otras se encargarían de empezar; a la altura de finales del siglo, sin embargo, habían surgido las -

diversas tendencias para fundar en bases sólidas las matemáticas y la lógica formal tomaba un nuevo auge con los trabajos - de las escuelas formalista y logicista . Los intuicionistas -- por su parte no estaban dispuestos a dejar pasar nuevas aventuras que fueran más allá de la intuición del número entero.

El método axiomático probado por Hilbert había sido un - gran avance en la lucha por hacer más riguroso el conocimiento geométrico y dejar de lado cualquier origen intuitivo de tal conocimiento .

"No se ha tardado en percibirse que el rigor no podría introducirse en los razonamientos, sino se le hacia entrar antes en las definiciones"..... "Durante largo tiempo los objetos de los que se ocupaban los matemáticos estaban en la mayoría mal - definidos; se creía conocerlos porque se les representaba con - los sentidos o la imaginación, pero no se tenía más que una i-- magen grosera y no una idea precisa sobre la cual el razonamiento puediera realizarse".... (1, p. 10).

Poincaré se pregunta: " ¿ Hemos alcanzado el rigor absoluto ? En cada estadío de la evolución nuestros padres creían -- también haberlo alcanzado. Si se equivocaban, ¿ no nos equivocaremos nosotros como ellos ?"..... (1, p. 11).

Su respuesta es una crítica radical: " la lógica totalmente pura no nos llevará más que a tautologías; no podrá crear lo -- nuevo; no es de ella sola que ninguna ciencia puede salir"..... "para hacer la aritmética, como para hacer la geometría, o para hacer una ciencia cualquiera, hace falta algo más que lógica pura. Este algo más, no tenemos otra palabra para desiguarlo--

que aquello de intuición".... (1, p. 11).

Así para Poincaré si bien es necesario el rigor en la demostración, la lógica formal para llegar a la certitud esta no nos lleva a la creación, no es entonces el "espíritu" humano de Hilbert el que por sí solo "sin impulsión exterior" plantea los problemas y dá las soluciones (tu puedes encontrarla por el razonamiento puro ¡), la creación matemática la dará la intuición, sea esta intuición sensible (que no da la certeza) o intuición pura ("que puede engendrar el verdadero razonamiento matemático").

Poincaré distingue entre varios tipos de intuición: ..."ante todo el llamado a los sentidos y a la imaginación; en seguida, la generalización por inducción, calcada, por así decirlo, sobre los procedimientos de las ciencias experimentales; tenemos en fin la intuición del número puro.

"Ahora bien, en el análisis de hoy, cuando se quiere tomar la molestia de ser rigurosos, no hay más que silogismos o llamados a ésta intuición del número puro, la única que no puede engañarnos. Se puede decir que hoy se ha alcanzado el rigor absoluto". (1, p. 14).

En cuanto a la correspondencia entre las verdades matemáticas y la experiencia, que puede plantear la aplicación del conocimiento matemático, Poincaré pone de juez a la experiencia y ésta puede tener una verdad diferente a las verdades matemáticas rigurosamente establecidas: ...."al volverse rigurosa, la ciencia matemática toma un carácter artificial que golpeará a -

todo el mundo; olvida sus orígenes históricos, se ve como los - problemas pueden resolverse (pero) no se ve ya más como y porqué estos se plantean".....

Esto nos muestra que la lógica no basta, que la ciencia de la demostración no es la ciencia en entero y que la intuición debe conservar su papel como complemento; íba a decir como contrapeso o como antídoto de la lógica".... (1, p. 16).

El papel que juega en matemáticas la lógica y la intuición es ver el papel que juegan el análisis y la síntesis como partes del proceso de conocimiento, Poincaré nos hará ver ésto con algunos ejemplos pero dará a la intuición el papel fundamental:
... "El logicista descompone por decirlo así cada demostración en un gran número de operaciones elementales; cuando haya examinado estas unas después de las otras y haya constatado que cada una es correcta, ¿ creerá haber comprendido el verdadero sentido de la demostración ?"....
... "Evidentemente no, no poseemos todavía la realidad toda entera, ese no sé qué que hace la unidad de la demostración se nos escapará completamente".

"Ahora bien, para comprender un plan, es necesario percibir a la vez todas las partes, y el medio de abarcar todo con una - ojeada de conjunto, solo es la intuición que puede dárnoslo"..(1,p. 18)

Por lo tanto concluirá que la lógica y la intuición son necesarias, una de la certitud es el instrumento de la invención. Esto es: la síntesis es primordial al análisis, no es así como entiende el proceso de conocimiento un materialista pero no obstante es un progreso para la época en tanto reacción, antídoto como el lo diría, a los logicistas.

¿ Pero como es que los lógicos, los analistas pueden inventar siendo que proceden de lo general a lo particular dividiendo cada problema ?

Para Poincaré la respuesta es que se usa el procedimiento que el llamó " inducción matemática",[10] por medio del cual "al lado del silogismo clásico" han podido avanzar, esta inducción no es otra cosa que el razonamiento por recurrencia[11].

Pero ahora bien, ésta intuición pura no tiene en última instancia (diría un materialista) una correlación con la intuición sensible, con el mundo concreto? o en palabras del propio Poincaré: "¿ Se reconocería con un poco de atención que esta intuición pura en sí, no sabría pasarse sin la ayuda de los sentidos ? He aquí el negocio del psicólogo y del metafísico y no discutiré este problema"..... (1, p. 25).

Pero al menos nos dirá que los dos tipos de intuición "no-tienen el mismo objeto y parecen poner en juego dos facultades diferentes de nuestra alma, se diría que son dos proyectores enfocados sobre dos mundos extraños uno al otro.".....

La intuición del número puro será el "proyector" de las formas kantianas invariables suprasensibles del tiempo y el espacio.

... " Es la intuición del número puro, aquella de las formas lógicas puras la que ilumina y dirige a aquellos que hemos llamado analistas"...."Es la que les permite no solo demostrar, sino también inventar. Es por ella que perciben de una ojeada el plan general de un edificio lógico, y esto sin que los sentidos parezcan intervenir". (1, p. 26).

Con esto quizá Hilbert no estaría alejado, por último Poincaré hará un reconocimiento:

... "No es menos cierto que la intuición sensible es en matemáticas el instrumento más ordinario de la invención", en lo cual Hilbert estaría en total desacuerdo.

Poincaré hace uso de su autoridad político-administrativa - y su gran jerarquía académica para imponer también la educación que se requiere para aplicar las matemáticas, así nos dirá:

... "Sin ella (la intuición), los jóvenes espíritus no sabrían iniciarse en la inteligencia de las matemáticas, no aprenderían a amarlas y no verían en ellas más que una vana logomáquina; y sin ella, sobre todo, no llegarían jamás a ser capaces de aplicarlas".

Y además se opondrá autoritariamente a que alguien sea "riguroso" a temprana edad como podemos constatar en el texto del - artículo que se encuentra en el apéndice en donde concluye que - en cursos de la escuela politécnica "no se hablará de funciones sin derivados, no se hablará de ello para decir:

Puede haberlas, pero no nos ocuparemos de eso".

Reaccionando así a la tendencia educativa abstracta, axiomático-formal, que se había puesto de moda en Alemania y que tenía ya en Francia adeptos como Hadamard que impulsarían años después unas de las más poderosas escuelas modernas en matemáticas que - seguiría el camino trazado por Hilbert sin tomar en consideración los tropiezos que encontró su filosofía.

Las diferencias entre las concepciones de Poincaré y Hilbert han sido establecidas pero uno se pregunta entonces:

¿Cómo es que ambos coinciden en su filiación filosófica?[12].

¿Kant interpretado de 2 maneras distintas?

Para ambos matemáticos es claro que ponen en el orígen del conocimiento matemático a la intuición (pura o sensible) de la filosofía kantiana, pero para uno el simple reconocimiento de la intuición es una prueba de la verdad de los conocimientos matemáticos que ella nos proporciona y que luego se pueden hacer rigurosos, y para el otro son necesarias pruebas de tal verdad por medio de un nuevo movimiento en el pensamiento mismo, dándose criterios para afinar las intuiciones, y estos criterios no son más que las reglas de la lógica formal. El pensamiento así, se piensa a sí mismo y nos habla de su propia consistencia y de su capacidad absoluta de invención y de generación de verdades sin tener que recurrir sino a la intuición pura dentro de los marcos formales, y estando allí ya no es necesario salir para crear los conocimientos. En efecto entonces hay una misma filiación filosófica pero que toma soluciones diferentes dentro de ella debido en última instancia a las condiciones e intereses diferentes en el plano más amplio de las relaciones sociales que se establecen en Francia y Alemania.

Hay algunos temas matemático-filosóficos sin tratarse (de coincidencia y de divergencia) entre las escuelas intuicionista francesa y formalista alemana en particular los casos de Poincaré y Hilbert; que salen de los objetivos de la tesis y requieren de un estudio histórico a profundidad que está pendiente.

Algunos de los temas presentan dificultades en cuanto a que hay posiciones que fueron cambiando y desarrollándose a través -

de los nuevos problemas que surgían en las matemáticas.

Uno de ellos son los problemas surgidos de la prueba del buen orden de Zermelo, en donde la opinión de Poincaré toma características que difieren de la filosofía intuicionista.

Otros, como el problema de la existencia matemática, las pruebas de consistencia, etc. en los que hay diferentes interpretaciones acerca de las posiciones de Poincaré, requieren entonces de un estudio de mayor alcance.

1) "Del papel de la intuición y la lógica en matemáticas" traducción de F. Cocho. Programa de C y S Facultad de Ciencias UNAM 1980. Comunicaciones Internas del Depto. de Matemáticas No. 7.

2) Algunos elementos para definir sus coincidencias y divergencias puede encontrarse en : Abreu J.L. "On Intuitionism and constructivism".

3) En el libro de Fraenkel A. y Bar Hillel "Foundations of set theory". Se señala que Poincaré dá una nueva prueba de la no numerabilidad del continuo. Ver nota 2 p. 203. Un buen análisis de las escuelas intuicionistas se puede encontrar en este libro, fundamentalmente de la escuela alemana, dedicándoles el capítulo IV. págs. 196-264.

Para los autores hay un hábito de localizar a la tercera crisis de los fundamentos de las matemáticas (la cual no ha terminado) en el tiempo del surgimiento de las antinomias de la teoría de conjuntos surgidos en el cambio de siglo. Pero el sacudimiento real comienza unos cuantos años después, con las reacciones a la primera prueba de Zermelo del teorema del buen orden y con el ataque frontal de los neointuicionistas (1907) en contra de las matemáticas clásicas...."

... "el intuicionismo en general considera la aritmética, digamos en la forma de inducción matemática, no solo como el concepto primario sino como el origen de las matemáticas en su totalidad".....

"El grupo de matemáticos que se llaman ellos mismos intuicionistas o neointuicionistas (usado por Brower y sus seguidores) esta compuesto de varias tendencias ampliamente divergentes, salvo por algunas excepciones datan del siglo XIX y del inicio del XX. El nombre no deriva de la naturaleza intuitivamente creativa del descubrimiento matemático o invención lo cual es aceptado universalmente sino de la "intuición primordial" del número entero".......

... "con la primera prueba del teorema del Buen Orden -- (1904) comienza un ataque general principalmente de los escolares franceses incluyendo algunos analistas que habían tomado parte activa en la aplicación de la toería de conjuntos a la teoría de funciones, tales como Baire, Borel y Lebesque; Lusin más tarde unido a la "escuela de - París" de intuicionistas, mientras otros como Pasch habían tomado independientemente una línea relacionada".

"En 1907 las tesis de Brown marca el primer paso de - una nueva dirección: el neointuicionismo y sus seguidores de la "Escuela Holandesa".

... "Otras como H. Weyl tenían posiciones cercanas a Brower y a la escuela de París".

4) C. Reid. p. 63. op. cit. Cap. I.

5) H. Poincaré "Las definiciones matemáticas y la enseñanza" en ciencias y método. p. 94.

6) En artículos posteriores a 1900 que aparecen también en el libro citado, repite sus observaciones en cuanto a los -- "Grundlagen" y sus convicciones sobre la intuición; por - ejemplo en el artículo "Las matemáticas y la lógica":

"Lo que primero nos sorprende en la nueva matemática es su carácter puramente formal: (Pensemos, dice Hilbert, tres clases de cosas que llamaremos puntos, rectas y planos; convengamos que una recta está determinada por dos - puntos; podemos decir que pasa por esos dos puntos o que estos dos puntos estan situados sobre la recta) ¿ Qué son estas cosas ? No solamente no sabemos nada sino que tampoco debemos tratar de saberlos.
... De esta manera para demostrar un teorema no es necesario ni útil saber lo que quiere decir. ... se podría - imaginar una máquina donde se introducirían los axiomas por un extremo, recogiéndose los teoremas por el otro extremo... Con estas máquinas el matemático no tendría necesidad de - saber lo que hace.
... Lo que Hilbert había hecho para la geometría, otros lo han querido hacer para la aritmética y para el análisis. Si hubieran tenido éxito, ¿ estarían los kantianos definitivamente condenados al silencio ? Puede ser que no, porque reduciendo el pensamiento matemático a una forma hueca, se le mutila.

... Pues bien, lo que quiero averiguar es si es verdadero que una vez admitidos los principios de la lógica, se puede, no digo descubrir, sino demostrar todas las verdades matemáticas, sin llamar de nuevo a la intuición". op. cit. págs. 113-114.

7) G. Israel p. 43 op. cit. en el Cap. I .

8) En su crítica a Russell y Peano y Couturat; Poincaré nos - habla de lo que son estos juicios:

... "Han mostrado (Russell, etc.) que no hay juicios sintéticos a priori (como dijo Kant para desiguar los juicios que no podrían ser demostrados analíticamente, ni reducidos a identidades ni establecidos experimentalmente), han de-- mostrado que las matemáticas son reducibles a la lógica y - que la intuición no desempeña ningún papel"..... Ciencia y-método Ed. esposa-colpe. Col. Austral. p. 113.

9) Traducido en Ciencia y Método "La invención matemática" Cap. III. Es recomendable también, para ilustrar el papel que -- tiene la intuición en el descubrimiento y en la invención matemática el libro: "The psychology of invention in the mathematical field". Ed. Dover 1954. escrito por un formalista -- francés (Jaques Hadamard) que "reivindicó" las ideas de Poincaré sin dejar por ello su posición formalista en matemáticas.

10) Hasta aquí, Poincaré se declara partidario del rigor, de la demostración lógico formal y la reconstrucción del - saber matemático en bases axiomáticas, en tanto da la - certeza. Pero veamos en seguida, dado el lugar a la ló gica, cual es el verdadero trabajo matemático para Poin caré y que lugar ocuparán los diversos tipos de intuición que define, entre las cuales una saldrá como la panacea a lo que parecía ser la "contradicción insoluble", como - el mismo la llamó en otra parte, a la "posibilidad misma de la ciencia matemática".

11) En un artículo de la Revista de Metafísica y moral de 1899 que aparece como "sobre la naturaleza del razonamiento ma-temático" en el libro "La ciencia y la Hipótesis" nos di rá que: "El carácter esencial del razonamiento por recu-rrencia es que contiene condensados, por decirlo así, en una fórmula única, infinidad de silogismos".
y que..." esta regla inaccesible a la demostración analíti ca y a la experiencia, es el verdadero tipo de juicio sin-tético a priori".

12) Poincaré responde negativamente entonces a que sea verdade ro que admitiendo la reductibilidad de las matemáticas a - la lógica sea posible descubrir o demostrar sin hacer uso de la intuición.
... "Si había contestado que no, es porque el "principio -

de inducción completa" me parecía a la vez necesario al matemático e irreductible a la lógica.

... Si una propiedad es verdadera par el número 1 y si se establece que es verdadera par n + 1 , siempre que lo sea para n, sería verdadera para todos los números enteros". En ello veía el razonamiento matemático por excelencia". Ciencia y Método p. 116.

13) Transcribo enseguida párrafos de dos cartas que G. Cantor envió a B. Russell en 1911 y en las que señala y dá una base para la explicación de la renovación de las ideas kantianas, en ellas se demuestran afirmaciones que hemos hecho en el capítulo I sobre la oposición por aceptar la teoría cantoriana del infinito actual:

... "quizá sepa usted que soy un gran hereje en muchas cuestiones científicas, " "soy un resuelto adversario del viejo Kant, quien, a mis ojos, ha hecho mucho daño a la filosofía, e incluso a la humanidad, como se vé fácilmente a través de ese desarrollo pervertido de la metafísica en Alemania en todo cuanto le siguió, como en Fichte, Schellnig, Hegel, Herbart, Schopenhauer, Hartmann, Nietzsche, etc. nunca pude entender eso, ni porque personas tan razonables como los italianos, los ingleses y los franceses, han podido seguir a ese filisteo sofístico, que fue tan mal matemático.

Y ahora resulte que Monsieur Poincaré se ha enamorado perdidamente de esa momia abominable que es Kant,..."

... " Así comprendo muy bien la oposición de monsieur Poincaré, por la cual me siento honrado, aunque nunca haya sido su intención honrarme".

... " En cuanto a Kant y sus sucesores, veo y le mostraré la verdadera causa de su situación sobre una base tan aparentemente firme de éxito, honor, veneración, idolatría. Y esta causa consiste en que el protestantismo germano, - en su desarrollo hacía el "liberalismo", necesita un fundamento sobre el que construir su aparente cristianismo de modo que los teólogos protestantes eligen a Kant o a uno de sus sucesores para que sea su atlas." ......

B. Russell. Autobiografía (1872-1914) Ed. Aguilar. 1968.

C A P I T U L O

I I I

EL TEOREMA DE ZERMELO.

Hemos visto hasta ahora dos concepciones distintas del trabajo matemático que se debaten a principios de nuestro siglo. - Para una de las concepciones la matemática es una (solo hay una forma de poseer al conocimiento matemático), abstracta (axiomático-formal) y obsoluta (donde no caben contradicciones y puede responder a todo problema); para la otra visión de la labor matemática la creación matemática esta indisolublemente ligada a la "intuición", las proposiciones matemáticas tienen en su base juicios sintéticos a-priori y el papel de la lógica y de la axiomática se limita a dar axactitud y corroboración a las ideas provenientes de la intuición pura.

Sigamos ahora esta pequeña parte de la historia del debate, (que por sí misma demuestra la no unicidad preconizada por Hilbert) viendo cual fue la suerte corrida por el primero de los - problemas que Hilbert planteara en una rama matemática que consideraba uno de los hechos más sobresalientes de la historia de las matemáticas del siglo XIX: la teoría de conjuntos de George Cantor.

Es en la década del setenta del siglo pasado cuando Cantor - comienza a tratar con los principios de lo que sería la teoría - de conjuntos[1], para 1900 era ya un campo de amplio interés -- (aún cuando y todavía se mantenían reticencias para su aceptación por parte sobre todo de la escuela intuicionista de Kronecker por el tratamiento del infinito en acto) y grandes matemáticos de la época hacian contribuciones importantes a la teoría, - entre los cuales estaban Dedekind [2], Russell, Kovig, Shoenflier, Bernstein, etc.

Pero a pesar de ellos la teoría de conjuntos adolecía de una serie de fallas; la forma "intuitiva" con la que Cantor presentó sus ideas, su tratamiento poco elaborado había abierto las puertas a la crítica y a la localización de contradicciones o antinomias. Las parodojas de Burali-Forti y Zermelo-Russell entre otras hicieron que se tambaleara la creación cantoriana y produjo la necesidad de una labor de revisión y estudio detallado que la pusiera sobre bases firmes.

Para algunos autores como Fraenkel, Bar-Hillel, y Moore(3), en realidad no fueron tanto las paradojas como las concepciones opuestas sobre la fundamentación de las matemáticas los que produjeron la inquietud por dar una fundamentación rigurosa. La escuela formalista alemana tomó como uno de sus objetivos principales la tarea de axiomatizar la teoría de conjuntos(4).

Ernst Zermelo, discípulo de Hilbert, se había formado como físico pero se mostró interesado por los problemas que su maestro expusiera en el congreso internacional de París acerca de la teoría de conjuntos: la hipótesis del continuo y su conexión con el problema de la buena ordenación del sistema de los números reales.

Los intentos de Zermelo por resolver el problema de la buena ordenación para cualquier conjunto infinito, en 1904, y el debate surgido por la solución que dió en ese año, (que analizamos adelante) lo llevaron a presentar también en 1908 un tratamiento axiomático de la teoría de conjuntos que constituye la primera axiomatización de la teoría(5).

En base a 7 axiomas trata de una manera "rigurosa" y sistemática los resultados de mayor importancia hasta su época exceptuando-los problemas de la teoría del buen orden.

Su presentación tiene aún un carácter intuitivo en su generalidad y bajo la comparación de obras posteriores, en particular respecto a los tratamientos actuales de la muy conocida y - usada axiomatización de Zermelo- Fraenkel[6].

Es de interés señalar que Zermelo no trata el problema de - la consistencia de la axiomatización de su teoría[7] (aún y cuando era la piedra de toque para que todo campo de conocimiento se volviese riguroso según la misma escuela formalista), su interés fundamental se centra en tratar de dar a la teoría una buena base para su uso matemático (sacrificio del rigor en pos de la utilidad) y superar así mismo las antinomias[8].

Si bien en el trabajo de Zermelo hay tal intención, de dar a la teoría una forma disponible para el uso matemático práctico, también hay la intención de que puesta en forma axiomática sir-- viera para fundamentar la aritmética y por ello como el basamento teórico de toda la matemática[9].

Cantor fué quien formuló por primera vez la hipótesis del -- continuo en 1878, veamos la formulación de Hilbert notando la importancia que tiene para él probar la hipótesis (que él ya llama teorema), siguiendo paso a paso su 1er. problema de 1900:

(1er. problama del Sr. Cantor relativo a la potencia del continuo)

Dos sistemas, es decir, dos conjuntos, de números reales ordinarios (o de puntos) son, según el Sr. Cantor, llamados <u>equivalentes</u> o de la <u>misma potencia</u>, cuando se puede establecer entre ellos una relación tal que a cada número determinado y uno solo del - otro. Las investigaciones del Sr. Cantor sobre tales conjuntos- vuelven muy probable la exactitud de un teorema que, hasta aquí, a pesar de los más grandes esfuerzos, no ha podido ser demostrado por ninguno. Este teorema es el siguiente: todo sistema de números reales en número infinito, es decir todo conjunto infinito de números (o de puntos), o bien es equivalente al conjunto de - todos los números enteros naturales 1,2,3,......, o bien es equivalente al conjunto de todos los números reales, y por consecuencia al continuo,es decir, a los puntos de un segmento; al punto de vista de la equivalencia no habría pues más que dos conjuntos de números: el conjunto numerable y el continuo.

De este teorema resultaría igualmente que el continuo formaría la potencia inmediatamente superior a la potencia de los conjuntos numerables. Dejemos hasta aquí el planteamiento de Hil-- bert para hacer unos comentarios[9]:

1) Hilbert nos habla de conjuntos infinitos de números. De- ahí que al ser demostrada la hipótesis del continuo tendríamos - únicamente dos conjuntos de números, pues de otra manera al no - hablar de conjuntos numéricos evidentemente la conclusión sería falsa al considerar tan solo que por medio del conjunto potencia de cada conjunto se extienden infinitamente los conjuntos. Además se podrían considerar conjuntos que difieren de la potencia de N y de C, p.e., el conjunto de todas las funciones reales definidas en el intervalo (0,1).

2) Se establece a priori la correspondencia biunívoca entre- números reales y puntos ("todo conjunto infinito de números (o de puntos), ") (Ver para esto el capítulo I, la nota sobre el axioma de completud).

De la demostración de tal teorema resultaría, nos dice, que

$$\overline{\overline{\mathbb{N}}} = \aleph_0 < \aleph_1 = \overline{\overline{\mathbb{R}}} = 2^{\aleph_0}$$

Hechas las observaciones continuemos con el texto del 1er. problema, para ver cual es el camino que proponía Hilbert para la demostración de lo que él consideraba un teorema al igual que Cantor.

... "Citemos aún una muy remarcable afirmación del Sr. Cantor, - que tiene una relación de las más intimas con el teorema prece-- dente y que sería quizá la llave de la demostración.".......

... " ¿el conjunto de todos los números no podría ser ordenado - de alguna otra manera tal que todo conjunto parcial tenga un elemento precediendo a todos los otros?. Dicho de otra forma, ¿el - continuo puede ser concebido como conjunto bien ordenado?. A esta pregunta, el Sr. Cantor creía que se podía responder por la afirmativa. Me parece extremadamente deseable obtener una demostración directa de esta remarcable afirmación del Sr. Cantor, asignando por ejemplo efectivamente un orden de los números tal que en todo conjunto parcial se pueda asignar un número precediendo- todos los otros.".......

Hilbert pensaba entonces que teniendo al continuo bien ordenado en forma efectiva se tendría que, como conjunto bien ordenado tendría un ordinal bien determinado en la serie de los ordinales, precisamente el más pequeño de los ordinales mayores a aquellos ordinales de conjuntos bien ordenados numerables o de tipo ordinal W. Este ordinal sería precisamente el aleph que sigue inmediatamente a $\aleph_0$ (el cardinal de los conjuntos numerables) o - sea $\aleph_1$ (10).

De esa manera el continuo ($\mathbb{R}$) tendría un cardinal exactamente igual a $\aleph_1$, o sea, $2^{\aleph_0} = \aleph_1$,.

En la actualidad sabemos que la hipótesis del continuo no es lo que Hilbert esperó: un teorema demostrable. Y de la misma manera en que su pretensión de dotar a las matemáticas de un método infalible, de un sistema que no llevará nunca a contradicciones y diera un carácter de verdades absolutas a las proposiciones matemáticas, fué totalmente fallido, la hipótesis del continuo sigue teniendo el carácter de hipótesis.

En 1939 Gödel demostró que la hipótesis era *consistente* con axiomas de Zermelo-Fraenkel, o sea el suponer que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ no llevaba a contradicciones. Fué hasta 1963 en que Cohen demostraría que la hipótesis $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ tampoco implica contradicción alguna[11].

Los resultados de Gödel y Cohen sobre la consistencia e independencia de la hipótesis del continuo llevan a señalar la hipótesis como una propocisión *indecidible*[12].

El idealismo de la escuela formalista que postulaba que todo problema matemático es susceptible de solución o de una prueba de imposibilidad de solución se encontró con un problema en donde no es posible decidir si hay o no una solución en el sentido de Hilbert.

La hippótesis del continuo dió origen, según hemos visto, a que Zermelo intentara la solución propuesta por Hilbert de bien ordenar el continuo. En realidad lo que Zermelo dió fue una prueba de que "cualquier conjunto *puede* ser bien ordenado"(1904), -

usando para ello una herramienta poderosa no solo en la teoría de conjuntos sino en muchos campos de las matemáticas: el axioma de elección[13].

Continuamos ahora la historia del debate matemático con respecto al teorema de Zermelo de buena ordenación. Como hemos dicho en la prueba se hacía uso de un principio matemático que era por primera vez establecido explícitamente; el principio de elección había sido usado sin una clarificación del mismo, en diversas partes de las matemáticas.

En cuanto a la teoría de conjuntos se refiere, este principio había sido usado por Cantor sin percatarse de él, esto lo hizo en una "prueba" de que todo conjunto puede ser bien ordenado. La prueba mandada a Hilbert en 1896 ó 1897[14] y reproducida en parte, en otra carta mandada a Dedekind en 1899[15] contiene también la llamada Paradoja de Burali-Forti[16] y un primer paso por superarla[17].

Más tarde, en 1903, P. Jourdain, manda a Cantor una "prueba" del teorema que dice que cada cardinal transfinito es un aleph y por tanto que cualquier conjunto puede ser bien ordenado[18]. La "prueba" era fundamentalmente la misma de Cantor. En agosto de 1904 J. König presenta en el 3er. congreso internacional de matemáticas en Heidelberg un documento en donde prueba que el conjunto de los números reales no puede ser bien ordenado. Un día después Zermelo encontró el error en el argumento de König[19]. Un mes después el 24 de septiembre de 1904, Zermelo completa y envía a Hilbert su prueba de que cualquier conjunto puede ser bien ordenado.

G. Cantor prometía en 1883 probar que "cualquier agregado - bien-definido puede ser puesto en la forma de un agregado bien-ordenado" y considera ésto como una "ley del pensamiento que parece ser fundamental, rica en consecuencias, y particularmente remarcable por su generalidad"[20].

La prueba resultaba ser un gran apoyo a las concepciones de la escuela formalista de Hilbert y por ella se consideraba su - ler. problema, de lista de París, resuelto parcialmente. En realidad del teorema se sigue que los reales pueden ser bien ordenados, pero no se daba, como Hilbert lo pidió, en orden efectivo al sistema de números reales tal que cada uno de sus subconjuntos tuviese un elemento precediendo a los otros[21].

Veamos en seguida la prueba de Zermelo de 1904, en ella se han puesto notas que ayudan a entenderla y por otra parte señalan los puntos en que se hicieron objeciones a la prueba. Estas objeciones son de diverso tipo, al final del capítulo se reseñan las debidas a H. Poincaré y en el siguiente capítulo entraremos a revisar las de los "empiristas" o "neointuicionistas" - (como a veces son llamados) franceses.

El debate que surge aquí, es una muestra fehaciente de que no hay una sola parte del conocimiento científico en el que no exista una concepción ideológica que lo sustenta. Hemos puesto atención por ello a las objeciones en las que hay posiciones filosóficas incompatibles (Poincaré y los intuicionistas franceses) dejando por ello sin análisis las objeciones de los cantorianos alemanes. No hay entonces neutralidad en las matemáticas ni tampoco son ellas un producto único e indivisible de mentes geniales sino por el contrario se construyen en sociedades históricamente dadas que les imprimen determinadas metodologías, orientaciones y contenidos específicos[22].

Teorema del Buen Orden (cualquier conjunto puede ser bien-ordenado)

La prueba que se presenta es una versión de la primera prueba del teorema del buen orden dada por Zermelo en 1904, y respeta la estructura de aquella en lo fundamental.

Sea M un conjunto infinito[23] arbitrario

$$\text{Sea} \quad S = \{ N \mid N \subseteq M \quad y \quad N \neq \emptyset \}$$

Denotamos por M el cardinal de cada sobconjunto de M. Deseamos encontrar un buen orden[24] para M para lo cual procedemos de la siguiente manera:

1) Para cada $N \in S$, elegimos un elemento $\gamma(N) = m_N \in N$ al que llamamos "elemento distinguido" de N.

Se afirma entonces que hay un conjunto que contiene como elementos a aquellos m_N elegidos de alguna manera en cada subconjunto de M[25]. Habrá de hecho infinidad de conjuntos que contengan un elemento de cada subconjunto de M.

Zermelo llama "cubierta" de S, por elementos de M, a cada uno de los conjuntos así obtenidos y los denotaremos por γ, e.d. ----

$\gamma = \{ \gamma(N) \mid N \in S \}$

Ahora bien, el número de las cubiertas posibles, simbolizado por $\prod m$, es el producto infinito de los subconjuntos de M diferentes del vacío.

Zermelo afirma entonces que $\prod \mathfrak{m} \neq \phi$ ya que para cada $N \subseteq M$, $N \neq \phi$ [26].

Tomamos una cubierta γ arbitraria de la que derivaremos - un buen orden en M[27].

Definición. $N_m = \{ X \in M \mid x < m \text{ y } m \in N \}$ es el segmento inicial de N determinado por m.

Definición. $N \in S$ es un γ-conjunto si:

i) N es un conjunto bien ordenado (COBO) y

ii) Si $m \in N$ con m arbitrario entonces $\gamma(M-N_m)=m$

2) En M existen γ-conjuntos.

Tenemos a $\{m_1\}$ siendo m_1 el elemento distinguido de M, o sea, $\gamma(M)=m_1$.

i) $\{m_1\}$ es COBO   ii) como $\{m_1\}_{m_1} = \emptyset$ entonces $\gamma(M-\emptyset) = \gamma(M) = m_1$.

De igual manera $\{m_1, m_2\}$ es γ-conjunto, teniendo a $m_2 = \gamma(M-\{m_1\})$ ya que:

i) $\{m_1, m_2\}$ es COBO, con $m_1 < m_2$

ii) $\{m_1, m_2\}_{m_2} = m_1$ y $\gamma(M-\{m_1\}) = m_2$

. y $\{m_1, m_2\}_{m_2} = \emptyset$ y $\gamma(M-\emptyset) = m_1$

3) De dos γ-conjuntos distintos cualesquiera uno de ellos es igual a un segmento inicial del otro.

Prueba: Sean N y N' dos γ-conjuntos diferentes, N y N' son COBO's por lo que son comparables[28] y por ello tenemos que uno de ellos, por ejemplo N, es <u>similar</u>[29] con un segmento del otro N' (o - con N' mismo) al cual denotamos por N" es decir $N \simeq N"$.

Vamos a demostrar que N=N" , utilizando para ello inducción transfinita:

i) Por 2) podemos intuir que cualquier γ-conjunto tiene a - m_1 como su primer elemento:

Sea C el primer elemento de N, tenemos entonces que, ----- $\gamma(M-N_c)=C$ por ser N un γ-conjunto , pero $N_c = \emptyset$ por lo que $\gamma(M-\emptyset) = \gamma(M) = m_1$, por lo tanto $c=m_1$[30].

ii) Sea ahora m el primer elemento de N, que está asignado - a $m' \in N"$ por el mapeo de similaridad, tal que $m \neq m'$.

Pero tenemos que (bajo la suposición de que $\forall x < m$ el mapeo de similaridad manda a $y < m'$ tal que $x = y$):

$N_m = N'_{m'}$, y entonces como N y N' son γ-conjuntos -- $m = \gamma(M-N_m) = \gamma(M-N'_{m'}) = m'$ ¡¡

<u>Observación</u>: Dos γ-conjuntos con un elemento m en común coinciden en los segmentos iniciales determinados por m. Y si tienen dos elementos m y m' en común entonces se tendrá que $m < m'$ o - $m' < m$ en ambos conjuntos, o sea, tendrán el mismo orden en los dos γ-conjuntos.

4) Sea $\Gamma = \bigcup \left\{ m \mid m \in N \text{ y N es } \gamma\text{-conjunto} \right\}$[31].

Vamos a demostrar lo siguiente:

I) Γ puede ordenarse

II) Γ es además bien ordenado

III) Γ es un γ-conjunto

IV) $\Gamma = M$.

con lo cual obtendríamos un buen orden en M.

Pruebas:

i) Sean m y n elementos de Γ tales que $m \neq n$ existen entonces M' y N' Γ-conjuntos tales que $m \in M'$ y $n \in N$.

Supongamos que $M' \neq N'$, por 3) sabemos que uno de ellos es un segmento del otro, por ejemplo M' de N'. En tal situación $m, n \in N'$ y bajo el orden de N' se tendrá que

$$m < n \qquad o \qquad n < m$$

Por la observación hecha al final de 3) este orden es independiente de los Γ-conjuntos considerados.

Es fácil ver que la relación de orden determinada por N es también transitiva(32).

ii) Vamos a ver que todo subconjunto $\Gamma' \neq \emptyset$ de Γ tiene primer elemento:

Sea $n \in \Gamma'$ arbitrario, y N' un Γ-conjunto tal que $n \in N'$. Por la observación final de 3) N' contiene a todos los elementos que preceden a n, N' contiene también al conjunto $N'' = N' \cap \Gamma' =$ $= \{\Gamma' - \{m \mid m > n\}\}$.

Entonces ya que $N'' \subset N'$ es un conjunto bien ordenado y por lo tanto tiene un primer elemento que es también un primer elemento de Γ'.

iii) Basta probar la 2a. condición de la definición de Γ-conjunto.

Sea $m \in \Gamma$ y Γ_m el segmento determinado por m, entonces -- $m \in M'$ con M' Γ- conjunto y m determina igualmente un segmento M'_m. Tenemos entonces que $\Gamma_m = M'_m$ y $\therefore$ $\Gamma(M- M'_m) = m = \Gamma(M- \Gamma_m)$ y $\therefore$ Γ es un Γ-conjunto.

IV) Supóngase que $\Gamma \subset M$ o sea $\exists c \in M \cdot \ni \cdot c \notin \Gamma$ entonces ----- $c \in (M- \Gamma)$ y como $(M- \Gamma) \subset M$ tenemos que $\exists\, z = \Gamma(M- \Gamma)$ y $\therefore$ el conjunto $\Gamma \cup \{z\}$ sería un Γ-conjunto, lo cual contradice el -

que Γ contiene a todos los elementos de todos los γ-conjuntos, $\therefore \quad \Gamma = M$.[33]

Fraenkel escribe que desde el descubrimiento de los números irracionales por los pitagóricos "difícilmente la prueba de un teorema matemático ha sido tan fuertemente disputada y ha causado una preocupación tan profunda y continua a los matemáticos y lógicos como la primera prueba de Zermelo del teorema del Buen Orden"[34]. Russell que había formulado su axioma multiplicativo en 1906 y que posteriormente se probó como equivalente al axioma de elección, hizo algunos intentos por probarlo[35].

Los enfoques axiomáticos actuales de la teoría de conjuntos han transformado la prueba bastante pero lo que no se puede es prescindir del axioma de elección. De hecho el axioma de elección y la buena ordenación son equivalentes.

Poincaré, que como hemos visto dá a la intuición el papel central en el trabajo matemático, produjo una serie de artículos (muchos de los cuales no son conocidos en español)[36] en los que ataca frontalmente a sus reconocidos enemigos logicistas que trataban de reducir las matemáticas a la lógica, entre lo que, en un momento determinado, se encontraron para Poincaré, los formalistas de la escuela de Hilbert. En un principio Poincaré también cargó sobre la teoría de conjuntos no tanto por la teoría misma sino por la tendencia por ponerla como la base de todo el edificio matemático y en su crítica se basa mucho en las antinomias descubiertas en la época[37]. Para él, lo que debía estar a la base de las matemáticas eran los juicios sintéticos a priori en particular, como vimos, el principio de inducción matemática.

Pero, acerca del axioma de elección, Poincaré creía, que era -

imposible probarlo o refutarlo, lo consideró un juicio sintético a priori más esencial para la teoría de cardinales tanto finitos como infinitos[38].

En contraste, Poincaré, rechaza la prueba del teorema del Buen Orden de Zermelo por el uso de lo que el llama "definiciones impredicativas"[39]. "Para él la definición de un objeto A es impredicativa si A está definida en términos de una clase B, de la cual A es un miembro. En la prueba primera de Zermelo A era Γ y B la familia de los Γ-conjuntos"[40].

Esta objeción de Poincaré a la prueba, fue duramente criticada por Zermelo, como podemos comprobar en la traducción que se ha hecho de su respuesta en el apéndice de la tesis, en la que se señala que este tipo de definición se usa frecuentemente en otras ramas de las matemáticas no solo en teoría de conjuntos y que por tanto su exigencia haría que diversos conceptos matemáticos fueran echados abajo.

Por 1907 es cuando Zermelo, prepara respuestas a las críticas de su prueba de 1904, en el documento podemos encontrar una nueva definición del buen-orden y establece principios como el Axioma de Separación y el de conjunto potencia, que usa en su prueba. Así mismo hace explícito el axioma de elección en la forma multiplicativa. En el documento donde presenta su axiomatización (también de 1908) de la teoría, presenta de nuevo el axioma y prueba luego que el principio general de elección es consecuencia del axioma. Desde esa época en adelante podríamos decir que se hicieron más claras las diferencias de concepción entre los matemáticos que ya para 1904 se dividían en varias escuelas pero que fundamentalmente eran la formalista y la intuicionista.

El principio de elección es un axioma de uso cotidiano en matemáticas (y por ello se le ha aceptado) pero no obstante pocas veces se le formúla explícitamente, aún en los libros de texto donde se utiliza. Este ocultamiento no es quizá por otra razón que el axioma puede ser obvio para el autor y desee evitar discusiones. Pero considero que este ocultamiento constituye también una falta pedagógica al no informar explícitamente de principios matemáticos que son tan usuales y que constituyen puntos de divergencia entre concepciones matemáticas.

Las equivalencias del axioma de elección son muchas y se encuentran en varios lados de las matemáticas actuales y hay libros que tratan ampliamente tales equivalencias(41). Igualmente hay alternativas en cuanto a buscar la forma de no utilizar este axioma, por parte de los intuicionistas modernos llamados CONSTRUCTIVISTAS, y en general de reconstruir las matemáticas clásicas y actuales por medios constructivos(42).

Veremos en el siguiente capítulo las críticas a la prueba de Zermelo por parte de la llamada escuela funcionalista francesa de los intuicionistas Borel, Baire y Lebesgue que forman parte de los orígenes de las actuales tendencias constructivistas.

N O T A S   C A P I T U L O

I I I

1) ... "Es quizás no muy generalmente sabido, pero el estímulo de Cantor por estudiar teoría de conjuntos surge de los ordinales contables. Estudiando el problema de la unicidad de la expansión de una función por series trigonométricas, consideró la operación de tomar un conjunto E de números reales y remover sus puntos discretos para formar el conjunto E* . La cuestión que surgió entonces fue que tantas veces la operación * necesitaría ser aplicada para eventualmente llegar al conjunto vacío (si alguna vez se puede). Considerando conjuntos de números reales que sean bien ordenados bajo $<$ uno puede ver que la operación * puede ser repetida un número transfinito de veces, dependiendo del buen ordenamiento antes de que el conjunto pueda ser eventualmente vaciado. Es curioso que esta aproximación de Cantor no fuera exitosa para la solución del problema original, a saber mostrar que si una serie trigonométrica converge a cero excepto para un conjunto contable, la serie es idénticamente cero."

P.J. Cohen " Set teory and the continum hipotesis" Ed. W.A. Benjamin. p. 64. 1966.

El contexto en que se daba la creación cantoriana es vista por F. Cocho en su artículo "las matemáticas y la 2a. Revolución Industrial Alemana" 1980. En cuya 1a. parte se analiza la evolución del análisis, de la cual extraemos algunos párrafos que aclaran el sentido de la obra de Cantor y los problemas que enfrentó para su aceptación.

..."La teoría de la integración va emergiendo siguiendo el camino siguiente:

"motivación física en primera instancia": fenómenos vibracionales	⇒	"Formulación matemática inicial en base a la representación --- (intuición) Geométrica"	⇒	"se desemboca en problemas patológicos de la teoría de funciones": Contar conjuntos infinitos de máximos y mínimos y de singularidades.

(Proceso inductivo hacia la "abstracción")

...En la época, por otros caminos, pero también motivados por problemas físicos conretos, se iba abriendo el campo de los "problemas patológicos". Desde Bolzano que en 1799... habla de sucesiones infinitas, de sucesiones infinitas de intervalos cada vez menores que encierran más y más " un punto ", con lo que se preludia la noción de "número irracional" de Dedeknid (límite aritmético de dichas sucesiones) hasta weirestrass (1815-1897) que estudia las funciones elípticas y sus singularidades, bajo fundamentación algebraica."

..."Al iniciarse la 2a. Revolución Industrial (recién unificada Alemania) esta propagación de problemas patológicos, no era bien vista por la "comunidad científica" de la época, la ciencia institucionalizada parece haber siempre tenido una gran -

inercia, y resistencia a nuevas ideas.

En el caso alemán hay dos motivos específicos para ello:

1o.) Es el comienzo de la industrialización y aún no surgen los variados y sofisticados problemas técnicos capaces de "tronar" la ciencia tradicional de la época por ejemplo la de un Kronecker.

2o.) la unificación alamana se ha hecho en torno a Prusia, país protestante, que verá un enemigo político en el pensamiento católico. .... consecuencias: la época de Bismarck del "kulturmampf" la persecución estatal de las organizaciones católicas y de su ideología .... persecución de aquellas ideas matemáticas que, explícitamente o no, dieran pie a justificar tales ideas religiosas (veremos el caso de Cantor).

Cantor desarrolla sus obras en tres etapas:

1a) 1873-1877 a partir de la motivación concreta, que ha llevado a la teoría de las funciones a los "problemas patológicos" empieza a estudiar el comportamiento singular de "líneas", "puntos","números" considerados como colecciones de agregados, (orientación que también impulsaban matemáticos como Bolzano, Dedekind, Du Bois Raymond, etc.).

2o) 1877 y 1882, el sujeto de estudio se vuelve más abstracto y es ahora la topología de los espacios métricos, y en última instancia va a hablarse, problemas métricos echados a un lado, de puntos y números, de sus agregados infinitos o no, en abstracto .

3o.) 1882-1884 la creación de Cantor se puede decir que está terminada, de ella ha surgido una teoría de los agregados (o de los conjuntos) tan abstracta como la definición misma de agregado dada en 1895."
Ver también nota 20 del capítulo I.

2) Dedekind es considerado uno de los dos creadores de la Teoría de Conjuntos .

3) G. H. Moore (Journal of Symbolic Logic Vol. 7 no. 3 1978) nos dice que las interpretaciones (Morrisklnie, Evertbeth , N. Bourbaki, J.V. Heijenoort y W.V. Quine) que sostienen - que lo que motivó a Zermelo para axiomatizar la teoría de - conjuntos fué la aparición y búsqueda de solución de las paradojas, son equivocadas y "forman parte del folklor matemático y filosófico". Explica que más bien el factor central que motivó a Zermelo fue su prueba del teorema de Buena Ordenación y la controversia sobre tal prueba en particular el - axioma de elección .

Sostiene Moore, además, que no había unamotivación idéntica en los contemporáneos a Zermelo (p.e. Russell) que se - interesaban en los fundamentos de la Teoría de Conjuntos.

4) "En 1908, Zermelo presentaba un conjunto formal de axiomas - para la teoría de conjuntos que comprendía todos los razonamientos presentes en matemáticas y además presumiblemente -

libre de paradojas. Esta axiomatización de la teoría estaba en concordancia con el espíritu de la escuela Formalista, dirigida por David Hilbert". P.J. Cohen op.cit. p. 2.

5) G.H. Moore (en Historia Mathematica Vol. 3. pp. 206-209 de mayo de 1976) afirma sin embargo que las ideas de Zermelo - "estaban en el aire" de la misma manera en que D.J. Struick habla del surgimiento de las ideas en geometría no euclídea en el siglo XIX por varios matemáticos (Gauss, Bolyai, ---- Lobachevsky) así, Moore, descubre un "obscuro matemático inglés". A. E. Harward, que dió en un documento de 1905 (entregado a revisión a Jourdain) muchas de las ideas que Zermelo maneja en su axiomatización de 1908 sin haber conocido el documento de Harward.

Entre tales ideas se encuentran una proposición parecida al axioma de elección en su forma multiplicativa; la distinción entre conjuntos y clases (distinción que es obscura en Zermelo) y por último una forma del axioma de reemplazo - (que aparece sólo con Fraenkel en 1922).

6) Para apreciar las diferencias entre las axiomatizaciones de la teoría de conjuntos de Zermelo, Zermelo,Fraenkel,Russell Whitehead, Von Neumann, es recomendable "La teoría de conjuntos sus origenes, desarrollo y consecuencias". Tesis profesional, Alejandro Garciadiego Dantan, UNAM 1977.

7) "De acuerdo al punto de vista formalista, las matemáticas - debían ser consideradas como un juego puramente formal jugado con marcas sobre el papel, y el único requisito que este juego necesitaba llenar es el de que no lleve a una in-- consistencia. Para describir completamente el juego requería establecer las reglas de la lógica matemática con mucha ma-- yor precisión que lo que había sido hecho. Esto estaba hecho, y los formalistas llevaron su atención hacia mostrar que varios sistemas eran consistentes. Como es bien conocido, esta esperanza fue destruída por el descubrimiento de Gödel del teorema de incompletud, el cual implica que la consistencia de un sistema matamático no puede ser probado excepto por métodos más poderosos que aquellos del sistema mismo". op. cit. P.J. Cohen. p. 2-3.

8)..."Zermelo no ha demostrado que sus axiomas esten excentos de - contradicción, y no podía hacerlo, pues para eso le habría sido necesario apoyarse en otras verdades ya enunciadas; pero - él supone que no hay todavía verdades ya establecidas o ciencia construída, arrasa todo lo existente y quiere que sus --- axiomas se basten, por completo, así mismos".

.."Pero aunque ha cerrado bien su redil, no estoy seguro de que no haya encerrado al lobo en él. Yo, sólo me sentiría tranquilo cuando hubiera demostrado que está libre de contradicción; bien sé que no podría hacerlo puesto que habría necesitado --- apoyarse, por ejemplo, en el principio de inducción, cuya certeza no había negado, pero que se proponía demostrar más adelante. Habría debido pasar de largo; lo habría hecho a costa -

de un error de lógica, pero al menos estaríamos seguros de ello." H. Poincaré p. 94. "Ultimos pensamientos". Ed. Espasa Calpe. Col. Austral.

9) Al final de la introducción a su documento de la axiomatización de 1908 Zermelo anuncia un segundo documento que -- trata de la teoría de buena ordenación y la definición conjuntista de número natural.

En efecto, Zermelo presenta en el IV congreso internacional de matemáticos en abril de 1908, y posteriormente - en 1909 " Sur les ensembles finis er le principe de l'in-- duction compléte " (en ACTA MATHEMATICA, 32, 185-183) documentos en donde dá una definición de los números naturales en una teoría de conjuntos finitos.

Poincaré, al hacer un esbozo histórico de la obra de Cantor y sus seguidores nos habla sobre la tendencia de -- basar todo en la teoría de conjuntos:

. . . "Se han familiarizado de tal modo con los números -- transfinitos, que han llegado a hacer dependen la teoría de los números finitos de las de los números cardinales transfinitos, después de distinguir entre ellos una pequeña clase, la de los ordinales enteros. Merced a ésto se podrían - llegar a demostrar todas las proposiciones relativas a esta pequeña clase (es decir, toda nuestra aritmética y álgebra) sin servirse de ningún principio extraño a la lógica.

Este método es evidentemente contrario a toda sabia - psicología; por supuesto, no es así com el espíritu huma- no ha procedido para construir las matemáticas; tampoco -- sus autores sueñan, según creo, en introducirlo en la ense ñanza secundaria. Pero ¿es lógico o mejor dicho correcto? Está permitido dudarlo". p.112 Cap. III Las matemáti-- cas y la lógica. en Ciencias y Método. Ed. Espasa-Colpe.

10) "El problema del continuo de Cantor es simplemente la cues- tión: Cuantos puntos hay sobre una linea recta en el espacio Euclideano? En otros términos, la cuestión es: Cuantos con-- juntos diferentes de enteros existen?"
Las anteriores formulaciones son debidas a Gödel y estan en su artículo "What is cantor's continuum Problem?" (American Mathematical Monthly nov. 1947) más adelante nos dirá que la hipótesis del continuo de Cantor es:
... "encontrar cual de los $\aleph$'s es el número de puntos sobre una línea recta o (lo cúal es lo mismo) sobre cualquier otro con tinuo en un espacio euclidiano. Cantor después de haber pro bado que este número es ciertemente más grande que $\aleph_0$,con- jetura que es $\aleph_1$, o (la cual es una proposición equivalente) que cualquier subconjunto infinito del continuo tiene ya sea la potencia del conjunto de enteros o la del continuo. Esta - es la hipótesis del continuo de Cantor".

11) Veamos la problemática dando algunos resultados que nos permi ten demarcar el problema:

1) Para todo conjunto C el conjunto potencia de él $\wp(c)$ es tal que $C < \wp(c)$.
en particular W (el conjunto de los números naturales) -- cumple con que $W < \wp(w)$.

2) Cantor demuestra lo anterior en 1873 e igualmente en ese mismo año prueba que $W \not\sim R$, con R el conjunto de los números reales.

3) Para todo conjunto C se tiene también que :

$$\wp(c) \sim 2^{C}$$

4) $R \sim 2^{W}$, lo cual implica que $\overline{\overline{R}} = 2^{\overline{\overline{W}}}$.

Ahora establecemos la hipótesis del continuo :
No existe cardinal K tal que $\overline{\overline{W}} < K < 2^{\overline{\overline{W}}}$.

Al desarrollar Cantor la teoría de ordinales se encontró con lo que él llama dos clases numéricas:

1a.) La del conjunto de todos los ordinales finitos - (con cardinal $\aleph_0$)

2a.) Aquélla del conjunto de todos los ordinales numerables. (con cardinal $\aleph_1$)

La pregunta es ahora:
¿Tiene la 2a. clase numérica la potencia de $\mathbb{R}$?
o en forma equivalente: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

12) Ver pág. 68 de los "Elementos de historia de las matemáticas" N. Bourbaki.

13) Gödel en 1947 en su artículo "What is Cantor continuum Problem?". Nos dice que, hay una fundamentación satisfactoria de la teoría de conjuntos: Axiomatización de la misma bajo el sistema lógico de Principia Mathematica Supuesto. Y para el problema del continuo . . . "hay (suponiendo la consistencia de los axiomas) a priori tres posibilidades para la conjetura de Cantor: puede ser probable, refutable o indecidible . La tercera alternativa (la cual es solamente una formulación de la conjetura establecida de que las dificultades del problema son quizás no puramente matemáticas) es la más creíble, y buscar una prueba para ello es en el presente uno de los caminos más promisorios de atacar el problema.".....

14) Fraenkel aclara el carácter del axioma de elección en la prueba de Zermelo y su relación con la hipótesis del continuo de la siguiente manera:

" Muchas objeciones contra el axioma de elección se basan en incomprensiones y son por tanto inválidas, puesto que ignoran la *naturaleza puramente existencial* de lo que afirma. Debido a este carácter existencial resulta bastante natural y de esperarse que uno pueda deducir del teorema del Buen Orden *dónde* debe encontrarse el cardinal K del continuo en la serie de los cardinales. Esta dificultad constituye el problema del continuo; para resolverlo, necesitamos una formación constructiva del conjunto de - elección correspondiente." Teoría de los conjuntos y ló gica Pág. 55. A. A. Fraenkel.

15) Grattan Guinness I. "The correspondence between G Cantor an P. Jourdain" Jahresbericht Deut. Math.- Verein 73 (1971) pp. 111-130. Cantor usa sin darse cuenta el -- axioma de elección en varias pruebas. En 1897 hace una - suposición equivalente al axioma de elección para probar el hoy llamado teorema de Cantor-Schroder-Bernstein. Por el que se demuestra por ejemplo que $2^{w} \sim \mathbb{R}$ y por tanto $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(w)$ por lo que el cardinal de $\mathbb{R} = 2^{\aleph_0}$).

Jourdain señala también el uso inconciente del principio de elección por parte de Cantor en dos teoremas de los artículos de 1895 y 1897 que aparecen en "Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers". Ed. Dover. Ver notas finales p. 205.

16) Cantor G. Gesammelte Abhandlungen Mathematischen und -- philosophischen inhalts. Editado por E. Zermelo Springer Berlin 1932. Aparece también en Van Heijenoort. pp. 113-117. "From Frege to Gödel". Source Book of Mathematical - Logic, Harvard Univ. Press 1967.

17) Para G. H. Moore hay un problema sobre el origen de la pa radoja pues para él no aparece en el artículo de 1897 -- "Una questione sui numeri transfiniti" que Burali-Forti -

manda al "circolo matemático di Palermo", y opina Moore que la paradoja como la conocemos actualmente puede haber surgido de una transposición del argumento de B-F - en otro argumento de un documento de Cantor de 1897: "Bei trage zur Bergrundung der transtiniten de Mengenlehre" aparecido en Math. Annalen 49 (1897) 207-246. La opinión de Moore es certificada por Van Heijenoort. Ibid. p. 105.

18) Para Cantor no hay paradoja. En su documento 15) dice - que hay 2 clases de multiplicidad o totalidad: consistentes e inconsistentes.

Multiplicidad consistente es la que puede ser concebida como un todo sin llevar a contradicción y se le llama "conjunto", así la multiplicidad de Ω (el conjunto de todos los ordinales) es inconsistente.

Esta distinción prefigura la dada por Von Neumann - en 1925 entre conjuntos y clases. La distinción hecha - por Cantor entre las multiplicidades ya había sido hecha por Schröder en 1890 independientemente de las paradojas. (ver Heijenoort, Ibid. p. 113).

19) La "prueba" fué rechazada ampliamente y Cantor mismo negó el permiso para su publicación. Jourdain la publicó bajo su responsabilidad en Phil. Mag. (6) 7 (1904) pp. 465-470.

20) Utilizando el sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel con elección, damos en seguida una realización de la idea de Cantor para la demostración de la Buena Ordenación de cualquier conjunto (ver la nota 6 del capítulo IV).

Sea A un conjunto no vacío y $f': \mathcal{P}(A) - \emptyset \rightarrow A$ una función de elección para $P(A) - \emptyset$ Extendemos a f' para el $\emptyset$ de la siguiente forma: Sea $e \notin A$ y $f : \mathcal{P}(A) \rightarrow A$ tal que :

$$f(x) = \begin{cases} (x) & \text{si } x \in \mathcal{P}(A) - \emptyset \\ e & \text{si } x = \emptyset \end{cases}$$

Definimos ahora $h: OR \rightarrow A \cup \{e\}$, (con OR la clase de los ordinales), en forma recursiva como: $h(\alpha) = f\left(A - \{h(\beta) \mid \beta \in \alpha\}\right) = f(A - h[\alpha])$.

1) Para todo $X \in P(A)$, si $f(x) = e$ entonces $X = \emptyset$.

<u>Demostración</u>:

Ya que si $X \neq \emptyset$ entonces $X \in (\mathcal{P}(x) - \{\emptyset\})$ y $f(X) = f'(X)$, pero f' es una función de elección, entonces $f(x) \in X$ y por tanto $f(x) \in A$ y de aquí que $f(x) \neq e$.

2) Para todo ordinal α, si $h(\alpha) = e$ entonces para todo ordinal β tal que $\beta \geq \alpha$ tenemos que $h(\beta) = e$.

<u>Demostración</u>:

$e = h(\alpha) = f(A - h[\alpha])$, por 1) tenemos que $A - h[\alpha] = \emptyset$. Pero si $\beta \geq \alpha$, $h[\beta] \supseteq h[\alpha]$ y por tanto $A - h[\beta] = \emptyset$ por lo que $h(\beta) = f(A - h[\beta]) = f(\emptyset) = e$.

3) Si $B = \{\alpha \in OR \ / \ h(\alpha) \neq e\}$ entonces $h \upharpoonright B : B \rightarrow A \cup \{e\}$ es inyectiva.

<u>Demostración</u>:

Sean $\alpha, \beta \in B$ y $\alpha \neq \beta$. P.D.: $h \upharpoonright B(\alpha) \neq h \upharpoonright B(\beta)$.

$h \upharpoonright B(\alpha) = h(\alpha) = f(A - h[\alpha])$ y

$h \upharpoonright B(\beta) = h(\beta) = f(A - h[\beta])$

como $\alpha, \beta \in B$ y $h(\alpha) \neq e$, $h(\beta) \neq e$, por lo tanto

$A-h[\alpha] \neq \emptyset$ y $A-h[\beta] \neq 0$.

entonces por la definición de f

$h(\alpha) = f'(A-h[\alpha])$ y $h(\beta) = f'(A-h[\beta])$

Ahora bien, como f' es función de elección

$h(\alpha) \in (A-h[\alpha])$ y $h(\beta) \in (A-h[\beta])$

Sin pérdida de generalidad, supongamos $\alpha \in \beta$

como $h[\beta] = \{h(\gamma) \mid \gamma \in \beta\}$

entonces $h(\alpha) \in h[\beta]$ por lo tanto

$h(\alpha) \notin A-h[\beta]$

de esto y de que $h(\beta) \in (A-h[\beta])$

tenemos $h(\alpha) \neq h(\beta)$.

4) Para todo ordinal α , si $h(\alpha) = e$ entonces $A \subseteq h[\alpha]$.

<u>Demostración</u>:

$e = h(\alpha) = f(A-h[\alpha])$, por 1)

$A-h[\alpha] = \emptyset$ y por tanto $A \subseteq h[\alpha]$.

5) Existe un ordinal β tal que $h[\beta] = A$.

Supongamos que para todo ordinal β, $h[\beta] \neq A$ -(*)

De la definición de h tenemos que para todo $\beta \in OR$,

$h[\beta] \subseteq A \cup \{e\}$

pero,si para algun α , $e \in h[\alpha]$

tendríamos, por 4), $A \subseteq h[\alpha]$ por lo que

$h[\alpha] = A \cup \{e\}$, ya que $e \notin A$.

Por 2), sea $\gamma \in \alpha$ el primer ordinal tal que $h(\gamma) = e$,

entonces $h[\gamma] = A$ contradiciendo(*).

De esto y de (*) inferimos que para todo β , $h[\beta] \subsetneq A$ es decir para todo α , $h(\alpha) \in A$.
Ahora bien, por 3), $h: OR \longrightarrow A$ es inyectiva, por tanto $h[OR] \subseteq A$. y $h: OR \longrightarrow h[OR]$ es biyectiva y tiene una inversa h^{-1}.

Pero el axioma de reemplazo garantiza que $h^{-1}[h(OR)] = OR$ es un conjunto pues $h(OR) \subseteq A$, lo que contradice el que OR sea una clase propia.

21) Una errónea aplicación de un resultado de Bernstein sobre la expronunciación de Alephs.

22) Ver P. E. Jourdain "A Proof that any agregate can be well Ordered" Acta Math. 43 pp. 239-261. 1922. En este documento hay una breve pero muy buena historia del teorema del Buen Orden adicionada por una versión del teorema por Jourdain.

23) "Teniendo el teorema del Buen Orden, podemos tener un buen orden W sobre el conjunto de los reales $\mathbb{R}$. El orden usual en $\mathbb{R}$ no es un buen orden por lo que W es un orden inusual. Cuál es ?
Específicamente no se sabe y es totalmente posible que no exista una fórmula del lenguaje de teoría de conjuntos que defina explícitamente un buen orden sobre $\mathbb{R}$." H. Enderton Elements of set theory Academic Press 1977. p. 197.

24) "... El pensamiento es siempre histórico, es el pensamiento de una época, y en esa medida, cualesquiera sea el dominio al que haga referencia, es una de las formas como se expresa socialmente dicha época, esto es, de los intereses sociales (en última instancia económicos) que en esa época son dominantes." p. 3. " El nacimiento de la teoría de conjuntos y la obra de Cantor" S. Ursini, F. Cocho. 1977-78.

25) Para conjuntos finitos el buen orden se obtiene por inducción.

26) Deseamos que todo subconjunto no vacío de M posea un primer elemento, en 1908 Zermelo dará una definición de buen orden. (Ver traducción en el apéndice).

27) Zermelo da así (o de manera equivalente) la primera versión del llamado por el mismo "Principio general de elección" el cual reformulará posteriormente (en 1908) ante las objeciones surgidas provenientes sobre todo de los intuicionistas franceses.

Dando, también en 1908, el nombre de Axioma de elección a una proposición equivalente al "Principio" que pide que los subconjuntos de M sean mutuamente disjuntos.

El axioma de elección como lo demostró Gödel en 1940 es un axioma consistente, no engendra contradicciones suponiendo la consistencia de los otros axiomas.

Pero también el axioma, ha sido demostrado por P.J. Cohen en 1963, es independiente, e.d., no es posible probarlo a partir de los otros axiomas de Z.F.

Además Cohen ha probado que no hay incompatibilidades al considerar la negación del axioma por lo que "nos encontramos en una situación en cierto modo parecida a la que ha existido en la geometría desde mediados del siglo XIX con respecto al axioma de las paralelas " (A. Fraenkel, Set theory and logic).

28) Zermelo da de esta manera una equivalencia de su Axioma de Elección. En 1908 dentro de la discusión que elabora ante las objeciones surgidas por la presente prueba de 1904 pondrá esta afirmación como uno de los ejemplos en los que la utilización del axioma de elección es indispensable para la demostración de tal aserción.

Hay que decir también que la formulación de su axioma de elección (o su equivalencia dada ya en 1904) de 1908 es equivalente al llamado "axioma multiplicativo" de Russell quien lo dió en 1906, pero al parecer Zermelo desconocía tal versión.

29) Los intuicionistas franceses enfocan aquí su crítica (a excepción de Poincaré) dudando de la <u>existencia</u> de esta cubierta. En particular Lebesgue pregunta como determinar Υ unívocamente y cómo se puede asegurarla como idéntica durante la prueba. Versiones posteriores sanjan al último cuestionamiento diciendo simplemente que γ permanece fija

en toda la prueba. (Kamke, Fraenkel).

30) **Zermelo se basa en el siguiente resultado:**
Teorema: Dos conjuntos bien ordenados A y B son o bien semejantes el uno al otro o uno es semejante a un segmento inicial del otro. Por lo tanto se cumple una y solo una de las siguientes relaciones:

$$\alpha = \beta \quad , \quad \alpha < \beta \quad , \quad \beta < \alpha$$

con α el ordinal de A y β el de B.

31) <u>**Definición**</u>. Un conjunto A ordenado se dice similar -- (o semejante) a un conjunto ordenado B ($A \simeq B$) si - hay un mapeo de A sobre B que preserva el orden.
Si $a_1 \neq a_2 \in A$ y $b_1, b_2 \in B$ son los elementos - que corresponden a a_1, a_2 bajo el mapeo, entonces - -- $a_1 < a_2$ implica $b_1 < b_2$.

32) En realidad no es necesaria la base de inducción para - la demostración.

33) La definición de Γ como el conjunto al que pertenecen - todos los elementos (Γ-elementos) de todos los Γ-conjuntos, es la objeción principal de Poincaré a la prueba de Zermelo.

Acerca del axioma de elección, Poincaré no tiene -- crítica sino por el contrario considera a este principio, como a la "inducción matemática", un juicio sintético a priori. O sea que acepta el resultado del teorema (entendido como: el principio de elección implica el buen orden) pero rechaza la prueba.

Su crítica está en lo que el llama "definición impredicativa" de Γ .

34) Un orden lineal o total $<$ sobre un conjunto A es aquel -- que cumple con $\forall$ a, b, c $\in$ A:

1) $a \nless a$

2) Si $a < b \rightarrow b \nless a$

3) Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$

4) Una y sólo una de: $a < b$ o $a > b$ o $a = b$ se cumple.

En la prueba de Zermelo entiende orden lineal como - aquellos que cumplen 3) y 4).

35) En esta parte final fué objetada por los cantorianos alemanes F. Bernstein y A. Shoenflies. Ver para esto la 2a. -- prueba de Zermelo y el artículo ya citado de Moore, para - un análisis de sus objeciones las cuales dejamos fuera de esta tesis, pero que se basan en la antinomia de Burali - Forti que se relaciona con el conjunto W de todos los or-- dinales.

36) ..."La falta de voluntad -para aceptar la prueba de Zermelo del buen ordenamiento- se profundiza cuando se hace -- obvio, que el principal propósito conectado con el buen ordenamiento desde 1880, por acertar el lugar de la potencia

del continuo en la serie de los Alephs, no se adelanta en nada teniendo el teorema del buen orden. Las tremendas - dificultades del problema del continuo, más claramente - percibidas hoy que hace 70años, durante el cambio de siglo habían inducido a muchos matemáticos a creer que el continuo (lineal) y conjuntos más complicados no podrían ser -- bien ordenables, en otras palabras que $\aleph = 2^{\aleph_0}, 2^{\aleph}, \ldots$ etc. no eran Alephs..." Fraenkel.Foundations of Set --- Theory. p. 76.

37) El axioma en su forma multiplicativa es: " Si S es un conjunto disjunto que no contiene al conjunto nulo, el producto cartesiano Ps es diferente del conjunto nulo. En otras palabras, entre los subconjuntos de Us hay al menos uno cuya intersección con cada miembro de S es un conjunto unitario ". Tomado de Fraenkel ibid. p. 46.

El artículo original de Russell es "on some difficulties in the Theory of transfinite numbers and order types" Proc. of the London Math. Soc. (2) 4 p. 29-53

38) Al español hay algunas traducciones en la colección Austral de Espasa-Calpe y una antología editada por la UNAM, que - adolecen de una serie de errores, omisiones y hasta cortes de los artículos originales, aunque también sucede que -- Poincaré frecuentaba el autoplagio y producía artículos en los que repite mucho pasajes de sus obras anteriores.

39) "No hay infinito actual, los cantorianos lo han olvidado y han caído en contradicción. Es verdad que el cantorismo ha rendido servicios, pero cuando se le aplicaba a un verdadero problema, donde los términos estaban netamente definidos y entonces se marchaba sin temor". Ciencia y Método H. Poincaré. Pág. 150.

40) ... "Pincaré, a pesar de su inclinación intuicionista, estaba dispuesto a aceptar el axioma de elección, admintiendo la posible existencia de reglas que no pueden ser formuladas constructivamente, o de ninguna forma completadas; en el caso presente la existencia de subconjuntos de la $\bigcup M$ los cuales no se pueden obtener por medio del axioma de subconjuntos.".... A. Fraenkel Foundations of Set Theory, North Holland. p. 76.

41) Al criticar la posición logicista de Russell en cuanto al axioma de elección, Poincaré decía:

"Así, el Sr. Russell espera aún que se pueda demostrar deductivamente, partiendo de otros postulados, que el axioma de Zermelo es falso, o bien que es verdadero. Inútil decir cuanto de esta esperanza me parece ilusoria. No es de (clearer notions in logic) que nosotros tiraremos los obstáculos; en eso no consistirá (the Technical Aduance of Mathematics). Los axiomas en cuestión no serán jamás sino proposiciones que unos admitirán como (Self- evident) y de los cuales otros dudarán. Cada uno no creerá de ello sino su intuición. Hay siempre un punto sobre el cual todo el mundo estará de acuerdo. El axioma es "Self-evident" para las clases infinitas; pero si él es indemostrable para las clases in finitas, lo es sin duda también para las clases finitas, lo que en ello no se ha distinguido aún en este estadio de la teoría; es luego un juicio sintético a-priori sin el cual la teoría cardinal sería imposible, tanto para los números finitos como para los infinitos."

H. Poincaré "Las matemáticas y la lógica" en la Revista de Metafísica y Moral No. 3 1906 pp. 312-313.

42) ..."Las definiciones que deben ser consideradas como no predicativas son las contienen un círculo vicioso". Ciencia y Método p. 147. Ed. Espasa- Calpe.

43) H, Moore op. cit. p. 316.

44) Por ejemplo Rubin and Rubin "Equivalences of the axiom of choice" North Holland.

45) Ver para ello el artículo de J. L. Abreu. "On Intuitionism and constructivism".

C A P I T U L O

IV

L A S   C A R T A S .

Introducción:

La prueba de Zermelo del teorema del Buen Orden, apareció en el mes de septiembre de 1904; poco tiempo después, el primero de diciembre del mismo año, Emile Borel (1) definía su posición respecto a la prueba. La comunicación de Borel inició un intercambio de cartas entre los matemáticos de la llamada escuela funcionalista francesa que constituyen el tema de este capítulo. "Las cinco cartas sobre la teoría de los conjuntos (2) "son un valioso documento histórico que da cuenta de la polémica entre las grandes figuras de la matemática fracesa de la época y constituye un testimonio de la lucha entre concepciones al interior mismo de las matemáticas.

Los matemáticos mencionados eran Emile Borel (1871-1956), Henri Lebesgue (1875-1941), Rene Baire (1874-1932) y Jaques Hadamard (1865- 1963). Todos ellos habían participado activamente en la aplicación de la teoría de conjuntos cantoriana a diversas cuestiones del análisis matemático, pero tenían posiciones diversas en cuanto a la aceptación completa de la teoría de Cantor a la cual enriquecieron con sus diversas aplicaciones . Además había entre ellos y Poincaré algunas diferencias, en particular como veremos en cuanto al axioma de elección de Zermelo. Borel, Lebesgue y Baire son frecuentemente llamados semi intuicionistas, Hadamard por su parte era en difinitiva un representante de la escuela formalista alemana, en Francia. Las cinco cartas aparecieron publicadas en 1905, y Zermelo tuvo la oportunidad de conocerlas y rebatir algunos puntos de vista de Borel en su 2a. prueba del teorema del buen orden de 1908 -- (ver apéndice).

El inicio de la polémica:

En la nota de Borel de 1904, la cual no aparece en las cartas, considera lo que Zermelo ha mostrado es que para un conjunto arbitrario M los problemas siguientes son equivalentes (3) :

A. bien-ordenar M

B. elegir un elemento definido pero arbitrario m' de cada subconjunto no vacío M' de M.

El resultado de Zermelo es el de encontrar que una solución de B provee de una solución a A.

Para considerar B resuelto, escribe Borel, para un conjunto arbitrario M, es necesario dar medios, al menos teóricamente, para determinar un elemento distinguido m' de un subconjunto arbitrario M'; y tal problema parece ser de los más difíciles, si uno supone, con el objeto de ser terminante que M coincide con el continuo (el conjunto de todos los números reales). -- (p. 194).

Para Borel no es posible aceptar el principio de elección para ningún matemático: " cualquier argumento donde uno supone una elección ARBITRARIA por hacer un infinito no-numerable (4) de veces . . . . (está) fuera del dominio de las matemáticas " (p. 195).

Borel rechaza el procedimiento de elección, entendido como una serie de elecciones sucesivas, cada una de ellas dependiendo de la precedente, siguiendo transfinitamente hasta agotar el conjunto dado M.

Este procedimiento achacado a Cantor por varios autores (5), tuvo -- problemas que soluciona la prueba de Zermelo al hacer las elecciones independientes las unas de las otras (por el principio de elección) y al asegurar por medio del recurso de los γ -conjuntos la existencia del buen orden del conjunto completo (6).

La cuestión importante del rechazo de Borel a la prueba esta más bien en cuanto a que él pide medios que permitan en forma efectiva elegir los elementos de cada subconjunto no vacío del conjunto por bien ordenar,,pues su objeción en cuanto a lo no aceptación de elecciones en un número no numerable fue rechazada de inmediato.

Las Cartas:

Tanto Hadamard (carta 1) como Lebesgue (carta 111) responden a Borel - en este punto observando que en ambos casos (de elecciones numerables o no numerables) se encuentra igualmente con una infinidad de elecciones que no se pueden tener como realizables efectivamente.

En esto reside entonces la diferencia central entre las concepciones - intuicionista y formalista. Hadamard hace explícita la diferencia tomando - para ello la distinción hecha por Tannery (7) entre los entes matemáticos - susceptibles de ser DETERMINADOS y aquello que pueden ser DESCRITOS.

Para el primer tipo de entes matemáticos se pretenderá CONSTRUIR el elemento que se quiere definir, para el último se tendrá que conformarse a suponer que cumplen ciertas condiciones [7].

El debate de las cartas comienza con la enviada por Hadamard a Borel (carta I), en respuesta a su nota de 1904, en ella además de negar validez a la diferencia establecida por Borel en cuanto a la numerabilidad o no de las elecciones con el objeto de aceptar unas y no otras, rechaza que establezca analogías entre el razonamiento cantoriano pra bien ordenar y el hecho que sirve de base a Zermelo para su demostración, es decir, el principio de elección.

Por otra parte Hadamard reconoce que en la prueba, Zermelo no dá "ningún medio" (tal y como lo exigía Borel) para llevar a cabo en forma efectiva la selección de cada elemento en cualquier subconjunto M' de M y "permanece dudoso que alguién pueda, en consecuencia, indicar ese medio", pero para Hadamard no hay necesidad de indicar tales medios para afirmar la exactitud del teorema de Zermelo. De esta manera lo que hizo Zermelo es dar una prueba abstracta de existencia, no ha dado un algoritmo, que es lo que Borel requería. Además muestra la inconsistencia de la exigencia Boreliana al mencionarle en esta carta(I) el trabajo que el mismo Borel había hecho sobre ciertos teoremas de convergencia en los que había empleado funciones cuya existencia estaba dada abstractamente.

Creo que Hadamard no tiene reticencias en considerar los dos tipos de entes matemáticos (surgidos en cuanto a la diferencia de Tamery). Si bien para él una entidad matemática puede existir sin haber podido ser definida o construida, en el método para probar tal existencia no tiene importancia, [8] pues las existencias "son un hecho como cualquier otro" (carta IV).

Borel envía la carta de Hadamard a René Baire, quien contesta a Hadamard (carta II). Las exigencias de Borel se vuelven en Baire mucho mayores, comenzando por establecer su insatisfacción por el ocultamiento, bajo el principio de elección, de problemas de mayor alcance, considera un conjunto infinito arbitrario como -- "virtual" (un objeto definido por ciertas convenciones que permiten luego afir-- mar ciertas propiedades del objeto). Entonces dice, si tenemos un conjunto infi- nito dado (por ejemplo las sucesiones de enteros positivos), es falso que pode-- mos considerar las partes de este conjunto como dadas. O sea Baire limita el cam po de seres matemáticos aceptables, rechaza la noción del conjunto de partes de un conjunto dado.

Por tanto no tiene sentido para él la elección de un elemento en cada subcon- junto, como Zermelo lo hace en su prueba.

Para Baire entonces, además, no tiene existencia el conjunto de todos los nú- meros reales.

Por otra parte, Baire continua pensando las elecciones de Zermelo como depen- dientes una de otra.

"Claramente la perspectiva de Baire era diferente de la de Hadamard, cada uno había visto la prueba de Zermelo en diferente Gestalt (9)". Termina su carta defi-- niéndose implícitamente Kroneckeriano: "Para mí el progreso, en este orden de --- ideas, consistirá en delimitar el dominio de eso que es definible".

Borel envió también la carta de Hadamard al analista más destacado de la épo- ca Henri Lebesgue. Lebesgue envía una larga contestación a Borel (carta III).

Para Lebesgue hay acuerdo con Borel sobre lo que hizo Zermelo, esto es, sabe bien ordenar un conjunto arbitrario M siempre que hace corresponder a cada subcon-- junto M' de M un elemento particular m' de M', (problemas A y B de Borel).

Pero para el analista francés no es fácil resolver el problema de la elección, por lo que para él no se tiene una solución general al problema de bien ordenar un conjunto arbitrario. Lo que hizo Zermelo es dar una demostración de existencia -- del anterior problema y en eso está de acuerdo con Hadamard.

La diferencia estará en que para Lebesgue no se demuestra la existencia de un ser matemático sino definiéndolo o sea "nombrando una propiedad característica que lo define".

Lebesgue reconoce que él mismo ha utilizado la palabra existencia en el sentido de existencia abstracta, pero a tal existencia no le atribuye sentido. Lebesgue se declara así coincidente con Kronecker.

Solamente, nombrando las propiedades que definen los entes matemáticos, se puede construir sobre bases sólidas a las matemáticas.

Sobre la prueba concretamente Lebesgue apunta que Zermelo utiliza la existencia de una correspondencia entre los subconjuntos de M y algunos de sus elementos .

Pero como determinar la que hemos llamado cubierta Υ ? Zermelo no lo indica. Existe para él y para Hadamard. Como saber además que Υ es la misma en toda la prueba?

Si una cubierta Υ existiera y pudiera ser definida es dudoso que se pueda utilizar en el sentido en que Zermelo lo hace pues los subconjuntos M' de M no estaban definidos de manera única: "M' estando dado ¿es evidente que puede elegirse m'? esto sería evidente si M' existiera en el sentido casi kroneckeriano que he dicho puesto que decir que M' exoste será entonces afirmar que se pueden nombrar algunos de sus elementos pero extendemos el sentido de la palabra existir". (carta III).

En cuanto a la prueba de Zermelo nos dice que no hay que limitarse a "pensar" una propiedad que define el ser matemático (para Zermelo elegir = pensar en) y le da certificado de existencia (para Zermelo, la existencia de una correspondencia entre los subconjuntos de M y sus elementos) sino que es necesario <u>nonbrarla,</u> Zermelo no da la ley que define los elementos elegidos.

Zermelo no nombra algún elemento del conjunto formado por los subconjuntos de

M, no se sabe si existe entoncas tal conjunto.

Aquí Lebesgue plantea con poca certitud lo que en Baire es claro: refuta la existencia del conjunto potencia de M.

Por otro lado y en cuanto al problema de si las elecciones son independientes o no, Lebesgue reconoce que son independientes pero se "tiende solamente al reemplazo de una infinidad ordenada por otra no ordeneda, pero de potencia mayor".

La carta IV es la que envía Hadamard a Borel sorprendido por la posición --- kroneckeriana da sus oponentes . En ella como hemos dicho afirma que es posible - demostrar la existencia de un ente matemático sin definirlo o determinarlo. Entonces respecto al conjunto γ esta de acuerdo en que no es posible nombrar un elemento de tal conjunto. Pero este problema no lo es para él sino para ellos, bajo su concapción el problema no existe.

Para Hadamard la cuestión se plantea an los mismos términos en que se planteaba antas, para Riemann y sus adversarios sobre la noción de función, pues la - regla que axiga Lebesgue para determinar cada valor unívocamente de la cubierta - γ de la prueba da Zermelo, es análoga a la expresión analítica que demandaban - los adversarios da Riemann.

Considera además que el progreso efectivo de las matemáticas ha consistido en la anexión sucesiva de nociones que estaban según la expresión de Borel "fuera de las matemáticas" porque no fué posible describirlas. Y dá una muestra de su aceptación de las nociones de la teoría de conjuntos de Cantor (10), que para Borel, tienen un sentido que aclara en la siguiente y última carta. (V)

Borel justifica el uso que el ha hecho de los métodos cantorianos y los no -- justificables de usarse desde el punto de vista constructivo: "conducen ulteriormente a resultados efectivos",......y que habría un trabajo por hacer para ver cual es el sentido real y preciso que se le puede dar a estos razonamientos y que.....

"las relaciones con lo concreto de estos razonamientos demasiado abstractos aparecen luego que la necesidad se hace sentir en ellos."

La mejor conclusión del debate que se presenta en estas cartas está dado por Hadamard cuando escribe: "Estas son entonces dos concepciones de las matemáticas, dos mentalidades que estan presentes."(11)

N O T A S C A P I T U L O

IV.

1) Borel E. "Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles". Math. Annalen 6o (1905). pp. 194-195.

2) Ya en los capítulos I y II se ha señalado la situación de atraso económico-social que prevalece en Francia a diferencia de Alemania, en esta época, la siguiente nota permite entender algo de las características de la investigación en Francia respecto a los autores de las cartas: "A este estado de cosas corresponde el perpetuamiento de la figura de un científico "complexivo" que dirige todos los niveles de la investigación, de aquel puro a aquel aplicado y constituye la garantía de la interdependencia entre estos diversos niveles, a través de la referencia a un cuadro unitario. La resistencia de Poincaré y de varios científicos franceses de principios de siglo, que contraponen a la crisis progresiva de este tipo de rol, era reforzada por la ausencia de un empuje significativo, al interior de la sociedad francesa, por una renovación técnica productiva, cultural y educativa del tipo de aquel que tiene lugar en Alemania.

La crisis del programa de Poincaré tiene efectos relevantes sobre el desarrollo de la ciencia físico matemática francesa. En primer lugar, en la física (ligada a los nombres de Languein, di Perrim y de De Broglie) -- que, por varios decenios queda a las márgenes de las corrientes principales de la investigación. Pero también del punto de vista de la matemática, que no obstante tiene una producción de alto nivel, ligada a los nombres de Borel, Lebesgue, Hadamard, Baire, etc, se tiene un fenómeno de involución, en el sentido de una parcial marginación de las corrientes fundamentales de la investigación matemática que cada vez más esta representada por la escuela alemana de Hilbert;" ...."Los motivos de este deterioro pueden ser resumidos muy esquemáticamente observando como la llamada -

"escuela funcionalista" queda ligada a los tratos del programa de Poincaré, sin someterse en cuanto a la instancia unificante que era la base de aquel programa, estaba ahora perdida. No pudiendo (ni en definitiva queriendo) tener firme esta instancia, la escuela funcionalista - se limita a rebatir algunas de las proposiciones de Poincaré relativas a la matemática, con un carácter ambiguo.

Un análisis más detallado muestra como, al interior de la escuela existían profundas diferencias. Así Hadamard se coloca en el punto de vista formalista y así también Frécht,"..... El único elemento verdaderamente caracterizante de la escuela funcionalista está en el adjetivo que la define, esto es, la substancial limitación de la investigación matemática a la teoría de las funciones, limitación que es consecuencia del repudio -ye expresado por Poincaré- del conjuntismo y por tanto del álgebra abstracta que ahora se desarrollaba desmesuradamente en la obra de la escuela alemana, invadiendo con sus métodos todos los sectores. Esta limitación -no obstante la tentativa de ruptura de Hadamard- será uno de los principales motivos de la crisis de la escuela francesa y punto de ataque de los bourbaki."

El cuadro que hemos ofrecido de la escuela funcionalista nos retiene a - confirmar lo dicho que es: de un lado, el ejercicio de una indudable influjo por parte del modelo de investigación matemática prevaleciente en Alemania y de inspiración hilbertiana; por otro lado, la incapacidad de superar el punto de vista intuicionista; que tenía todavía poco que ver con el proyecto originario de Poincaré; incapacidad derivada del hecho de que no emerge de la sociedad una clara instancia que tienda a superar el viejo rol atribuido a los científicos." Giorgio Israel op. cit. págs. 44-49.

3) Cinq lettres sur La Theórie des ensembles. Bulletin de la Societé Mathematique de France. Tomo 33. 1903 - 1905. pp. 261-273.

4) Me he basado en el artículo de G. H. Moore para la exposición de la crítica de Borel. de diciembre de 1904 op. cit. pp. 312-313.

5) P.E. Jourdain en su artículo " A Proof that every aggregate can be well ordered" nos dice a cerca de la actitud de Borel que: ---- " Cualesquiera razones que Borel haya tenido para su rechazo de que las series de elecciones arbitrarias no esta dada, parece que el ha pasado sobre un punto lógico envuelto muy importante, ya que el admite cualquier infinito numerable de elecciones y rechaza un no-numerable de elecciones ". " Borel hace uso de un infinito numerable de elecciones en sus 'Lecons sur la theórie des functions' por ejemplo pp. 12-13 ". p. 241.

6) De Jourdaine extractamos la problemática de Cantor: "La prueba de Cantor, para bien ordenar un conjunto infinito (completada en 1895 y comunicada a Hilbert en 1896 y a Dedekind en 1899) -- era en el sentido siguiente: Sea M un conjunto infinito arbitrario tomemos de él un elemento m_1, si de $M - m_1$ tomamos otro elemento y lo denotamos por m_2, y vamos formando el conjunto bien ordenado ---- $\{m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots m_n \ldots\ldots\}$ tomando a cada m_i del residuo $M - m_{i-1}$ podría imaginarse que se bien ordena M después de un número infinito de elecciones, pero estas elecciones sería imposible llevarlas a cabo. Aún y cuando Cantor aceptó explícitamente el axioma de - elección en su prueba, llegó a la siguiente contradicción : Si W es el sistema de todos los números ordinales, considera como evidente -

que cualquier conjunto M es equivalente a una parte de W o también puede que una parte de M sea equivalente a W. Para este último caso tenemos que si w es el tipo de orden de W arreglado por orden de magnitud entonces w es un número ordinal y por tanto ya que el tipo de un conjunto sin último elemento es de rango más alto que cualquier término del agregado, $w > w$ Esta contradicción esta muy cercana a la bien conocida de Burali-Forti en 1897."

Borel entonces critica las elecciones dependientes en un número infinito no numerable, atribuyendo a Zermelo el argumento de Cantor, al no aceptar el principio de elección. Ver también: A. Frankel, A. Levy: -- "Abstract Set Theory". North Holland 1953.

" Tres objeciones pueden surgir de este argumento (del de Cantor). Primera, en contra del uso hecho de la cuestionable " Serie de ordinales ", con la suposición aparentemente infundada de que los ordinales son suficientes para agotar cualquier conjunto dado, con todo lo comprensivos que puedan ser. Segunda, contra el carácter arbitrario de los miembros tomados de S (el conjunto por bien ordenar) en los pasos sucesivos del procedimiento (de Cantor). Finalmente, contra la infinidad de elecciones de los miembros S_n sin una ley que los defina simultáneamente, lo cual parece petición para una cantidad infinita de tiempo." p. 233.

7) En la discución con los cantorianos alemanes y con Jourdain, hace Zermelo referencia a la crítica de Borel:

. . . "Esta idea de una construcción por pasos no es nueva, me era comunicada oralmente hace algún tiempo por F. Bernstein, y probablemente viene de Cantor, quien, de cualquier manera, aparentemente tenía reservas para aceptarla como prueba. Borel (1905), recomienda también la misma construcción, solo para rechazarla inmediatamente sin posterior explicación, y de ese modo, él cree, reducir al absurdo el principio de elección. Pero él no tuvo éxito total; pues no es la elección infinitamente repetida lo que enviciaba esta prueba, sino simplemente el hecho de que la prueba no lleva al objetivo final.". . . . p. 193, Zermelo - 1908.

8) Se refiere a Paul Tannery (1843-1904), una autoridad en el campo de de la historia de las matemáticas.

9) G. Israel op. cit. pág. 47.

10) Para G. H. Moore, Hadamard es el primero en notar que las objeciones de los intuicionistas a la prueba de Zermelo se centraban sobre la noción de constructividad. op. cit. p. 313.

11) G.H. Moore op. cit. p. 314.

12) " Hadamard sin adherirse explícitamente al punto de vista de Hilbert, asume una postura pragmática, consistente en rechazar todas las definiciones reestrictivas y susceptibles de impedir una ampliación del campo de intervención de la matemática. En conclusión, Hadamard no logrando presentar un programa orgánico alternativo al de Borel, intenta coligarse operativamente con la investigación matemática alemana." G. Israel . pág. 48.

13) Poincaré, ofrece un pasaje que resume algo el debate de las cartas: ..." ¿Tiene algún sentido un teorema que no admite ninguna conclusión verificable? Más generalmente, ¿tiene algún sentido un teorema fuera de las verificaciones que admite? En esto difieren los matemáticos. Los de la primera escuela, que llamaré pragmatistas (puesto que hace falta darles un nombre), responden no, y cuando se les -- ofrece un teorema sin darles un medio para verificarlo, no ven en él sino un trabajo inútil.". . . .

..." Tomemos, por ejemplo, el teorema de Zermelo, según el cual el - espacio es susceptible de ser transformado en un conjunto bien ordenado. Los cantorianos quedarán seducidos por el rigor, real o aparente de la demostración; los pragmatistas les responderán:

-- Decís que podeís transformar el espacio en un conjunto bien ordenado. Y bien ¡ transformadlo ¡

-- Eso sería demasiado largo.

--Entonces, demostradnos, por lo menos, que alguien con suficiente tiempo y paciencia, podrá realizar la transformación.

-- No, no podemos, porque el número de operaciones necesarias es infi-- nito, aún mayor que alef cero.

-- ¿Podreís demostrarnos cómo se podría expresar por un número finito de palabras la ley que permitiría ordenar el espacio?

-- No.

Los pragmatistas concluyen que el teorema carece de sentido, es falso o, por lo menos, no está demostrado". H. Poincaré. Ultimos Pensamientos. p. 100-103.

C O N C L U S I O N E S

Hemos visto en primer lugar que hay marcadas diferencias entre las concepciones de D. Hilbert y H. Poincaré sobre lo que constituye el quehacer matemático.

Para Hilbert el tipo de trabajo que caracteriza como matemático es sólo aquel que está constituido por medio de un sistema axiomático independiente y consistente. Y si bien no niega el papel de la intuición sensible o de la intuición pura, afirma que esta no nos dá la certeza, el conocimiento matemático verdadero. Las matemáticas según esta concepción deben ser aquellas que esten formalizadas, trabajadas en los dominios abstractos de la lógica. Estamos aquí en los inicios de la concepción formalista que posteriormente llegará a trabajar en la llamada metamatemática.

En esta época llamaba la atención de los matemáticos para iniciar el trabajo de fundamentar la aritmética probando la consistencia del sistema axiomático de los números reales.

Para Hilbert entonces, el carácter totalmente abstracto del conocimiento matemático, lo lleva a concluir que hay una unidad de las matemáticas que radica en el método axiomático, ya no será posible decir " las matemáticas " sino " la matemática ". Su ilusión de que con el método, la dispersión que caracterizaba desde un siglo antes al trabajo matemático, la especialización, fuera superada, no fue realizable, como no lo es proyecto alguno que repose en bases tan poco firmes como el idealismo filosófico.

Por último, para Hilbert, esa fé en el método axiomático lo lleva a postular a su matemática como la base de todo conocimiento científico, llegando a considerarla como el criterio único de verdad de todo conocimiento, se trata de llegar de esta manera al sistema generador de verdades, que solo tenía que pasar para ésto por una prueba de consistencia.

Por otro lado, hemos visto que en H. Poincaré hay un cambio radical en tanto que para él no es la lógica, el método axiomático, el rigor en la demostración lo que constituye el núcleo creador en el quehacer matemático.

Para Poincaré es la intuición, calcada de la filosofía kantiana, quien nos dá los conocimientos matemáticos, más precisamente la intuición pura, la del número puro. Así el razonamiento matemático por excelencia viene basado en juicios sintéticos a-priori, uno de ellos, el más simple, será el razonamiento por recurrencia o inducción matemática. Otro ejemplo será el axioma de elección y en general la intuición, sea pura o sea sensible es la que dirige el descubrimiento, la que nos dá el verdadero conocimiento matemático.

Tenemos entonces dos concepciones diametralmente opuestas de lo que son las matemáticas, de ellas surgieron dos tipos diferentes de labor matemática, con consecuencias para el desarrollo científico del siglo actual.

Las consecuencias que se derivan de estas concepciones diferentes tuvieron grande influencia para el trabajo matemático de los años que siguieron y es difícil decir con base en esta tesis si estas consecuencias impulsaron o retardaron al desarrollo de las matemáticas. Lo que es cierto es que se tuvo un desarrollo acelerado de la lógica matemática y que la filosofía formalista de Hilbert tuvo un retroceso del cual es imposible que se recupere.

El papel del formalismo, no obstante su fracaso como programa de fundamentación de la matemática ha sido de gran influencia en la labor de las matemáticas pues se ha impuesto como una forma de trabajar y enseñar las matemáticas cuyas consecuencias es necesario verlas en una perspectiva social.

En cuanto a las consecuencias ideológicas que tiene al hacer aparecer la labor matemática como un fruto de la razón pura que eventualmente puede aplicarse a la realidad (la cual a su vez puede ocasionalmente sugerir problemas)es que el conocimiento matemático se pone aparentemente fuera de ideologías, no tiene nada que ver con política o con realidades sociales, es neutro.

Y por otro lado se parcializa el proceso de conocimiento matemático, haciendo creer que las matemáticas no son más que un juego sin sentido en el que solo es necesario el aparato de la lógica para descubrir las verdades matemáticas.

Se hace pensar que mientras más abstracto y alejado de la realidad esté un sistema matemático más científico será. Pero en segundo lugar, hemos visto, como es que en el dominio más abstracto de las matemáticas, se presentan diferencias de concepción.

La teoría de conjuntos, que había pasado ya en esta època a ser un pilar de la tendencia abstracta y totalizadora sobre el saber matemático al presentarse como la disciplina a la que se podían remitir los conceptos básicos de cualquier otra disciplina matemática,había perdido cualquier contacto con la problemática concreta de donde había surgido y era impulsada por Hilbert en el 1er. problema de su lista pasando a ser un punto fundamental para probar sus concepciones absolutistas.

Hemos visto que la respuesta de Zermelo (la prueba existencial del buen orden) aunque habia de un buen orden no es el buen orden efectivo de los reales que Hilbert esperaba.

El problema, vimos, que se reducía a si se acepta la existencia de objetos matemáticos aún si no es posible construirlos.

El problema, que puede ser visto como puramente filosófico y que para algunos no traba el desarrollo formal de las matemáticas, es, no obstante, un problema que se plantea a diario en el trabajo matemático y que dió lugar a la formación de escuelas de pensamiento que en nuestros días siguen divergiendo.

Teniendo como base metodológica el que la actividad matemática es un producto social, históricamente determinado hemos encontrado que la tendencia abstracta y totalizadora del saber científico que impulsa el formalismo está relacionado al idealismo filosófico kantiano que por esa época era parte de la ideología que se imponía socialmente (la " vuelta a Kant " de los neokantianos) acorde a los intereses de la burguesía alemana surgida de la reunificación política de 1871 y de la 2a. Revolución Industrial.

Por otra parte, el estado en que socialmente se encuentra Francia por la misma época histórica, tanto de atraso económico como a otros niveles, presenta al nivel del desarrollo científico y técnico, dos concepciones una dominante otra en formación, una intuicionista, pragmática, que impulsa fundamentalmente Poincaré (prototipo del " hombre universalista " francés) y la otra en estrecha relación con las ideas de Poincaré pero que ya empieza a alejarse de ellas por esta época, formada por la llamada escuela funcionalista en donde Hadamard juega un papel de suma importancia como el antecedente de la tendencia formalista francesa que se verá realizada hasta 30 años después con la escuela N. Bourbaki.

Tenemos entonces varias concepciones matemáticas, que luchan entre ellas y se imponen en la medida en que representen las ideas de las clases socialmente dominantes.

El debate matemático analizado representa una etapa en la historia de las matemáticas que ha sido y es de gran importancia para la reflexión sobre el trabajo matemático, pero es necesario profundizar en el estudio de estas escuelas y de otras que actualmente han superado en mucho las ideas que se dieron en la época que se ha estudiado.

A P E N D I C E S

LA LOGICA Y LA INTUICION EN LA CIENCIA MATEMATICA Y EN LA ENZEÑANZA

Para comprender bien la cuestión que voy a tratar y que tiene a mi parecer una importancia capital para la enseñanza de las matemáticas, hace falta echar una ojeada retrospectiva sobre la historia del desarrollo de la Ciencia.

Si leemos un libro escrito hace cincuenta años, la mayor parte de los razonamientos que encontramos allí nos parecerán desprovistos de rigor.

Se admitía en esa época que una función continua no puede cambiar de signo sin anularse; se demuestra hoy; se admitía que las reglas ordinarias del cálculo son aplicables a los números incomensurables; se demuestra hoy. Se admitía incluso otras cosas que alguna vez eran falsas.

Vemos entonces que se ha marchado hacia el rigor; yo agregaría que se ha logrado y que nuestros razonamientos no parecerán ridículos a nuestros descendientes; quiero hablar, entiéndase bien, de los razonamientos que nos satisfacen.

Pero como se logra el rigor? es restringiendo más y más la parte de la intuición en la ciencia, y haciendo más grande la de la lógica formal. Antaño, se partía de un gran número -

de nociones, miradas como primitivas, irreductibles e intuitivas; tales eran las de número entero, de fracción, de magnitud continua, de espacio, de punto, de línea, de superficie, etc. Hoy, sólo una subsiste, la de número entero: Todas las otras no son sino combinaciones, y a este precio se logra el rigor perfecto.

Nuestros padres inscribían en una área plana una serie de rectángulos, y obtenían como límite de la suma de esos rectángulos una integral que representaba esa área plana. En efecto, decían ellos, la diferencia entre la superficie buscada y la suma, tiende a cero pues se puede volver más pequeña que cualquier cantidad dada.

Ellos hacían este razonamiento sin escrúpulos, porque creían saber lo que es una superficie. Nosotros, al contrario, este rezonamiento no nos satisface ya, porque sabemos que estas cosas no se saben al nacer: Que no se puede saber lo que es una superficie sino cuando se sabe cálculo integral. Nosotros no demostramos otra cosa que la superficie es igual a la integral, pero consideramos a la integral como la definición de la superficie. Esta noción de superficie, antaño fundada sobre la intuición ya no nos parece legítima por sí misma.

Por otra parte, las nociones matemáticas no han adquirido esta pureza perfecta sino alejándose de la realidad. Se puede recorrer todo el dominio matemático sin reencontrar ninguno -

de los obstáculos que se heredaron de otro tiempo; pero estos obstáculos no han desaparecido, solamente han sido transportados a la frontera y se tendrá que vencerles de nuevo si se -- quiere franquear esta frontera para entrar en el dominio de - la práctica.

Se poseía una noción más o menos vaga, formada de elementos disparejos, unos a priori, otros proporcionados por la generalización de datos de la experiencia; se creía conocer por intuición sus propiedades principales. Hoy en día se rechazan todos los elementos empíricos, no se conservan sino los ele-- mentos a priori; se toma una de las propiedades por defini--- ción y de allí se deducen todas las demás por razonamiento riguroso. Pero queda por probar que la propiedad que sirve de - definición pertenece en efecto a los objetos reales, que conocemos por la experiencia, y de donde deducimos anteriormente la noción intuitiva por una generación inconsciente. Es esto- lo que el señor Milhaud ha puesto en sólida evidencia en la - tesis que ha sostenido en la Facultad de Letras de Paris.

He aquí en que sentido la ciencia ha evolucionado después de medio siglo.

Es entonces que se vió surgir toda una multitud de funciones bizarras que perecían esforzarse en semejarse lo menos -- que fuera posible a las honestas funciones que servían para -

algo. Más continuidad, o bien continuidad, pero nada de derivadas, etc, etc. además, desde el punto de vista lógico, son estas funciones extrañas las que son más generales; por el -- contrario,las que se han encontrado sin haberlas buscado, y - que se siguen de leyes simples, no aparecen sino como un caso muy particular; ello no les quita nada.

En otro tiempo, cuando se inventaba una nueva función, era en vista de algún objetivo práctico; Hoy se las inventa - expresamente para poner en entredicho los razonamientos de -- nuestros padres, y no se obtendrá más que eso. Luego, si la lógica debe ser nuestra única guía en las cuestiones de enseñanza es evidentemente por las funciones más bizarras que hay que empezar. Es al principiante que hace falta en principio, familiarizarse con este museo teratológico. Por no hacerlo, - no logrará jamás el rigor, o no lo logrará sino por etapas.

He aquí a lo que la lógica absoluta nos quisiera condenar; ¿debemos hacer este sacrificio? tal es la cuestión que, por - mi cuenta, no vacilo en responder que no.

Sin duda es duro para un maestro enseñar un razonamiento- que no le satisface enteramente; y no será a su parecer sino un paliativo insuficiente decir: nosotros admitimos que, o:Se concluye seguido que, en lugar de decir: es evidente que.

Pero la satisfacción del maestro no es el único objetivo de la enseñanza, y debe de preocuparse ante todo de lo que es el espítrtu del alumno y de lo que se quiere que llegue a -ser.

Los zoologistas pretenden que el desarrollo embrionario -de un animal resume en un tiempo muy corto toda la historia -de sus ancestros de épocas geológicas. Como si en él estuviera el propio desarrollo de los espíritus.

La tarea del educador es hacer repasar al espíritu del muchacho por donde ha pasado el de sus padres, pasando rápida--mente por ciertas etapas pero no suprimiendo de ellas ninguna. A este respecto la historia de la ciencia debe de ser ---nuestra guía.

Cuando un alumno comienza seriamente a estudiar matemáticas, cree saber lo que es una fracción, lo que es continuidad, lo que es el área de una superficie curva; considera como evidente, por ejemplo, que una función continua no pueda cambiar de signo sin anularse. Si, sin otra preparación, usted viene a decirle: Nó todo esto es evidente, hace falta que yo le demuestre; y, si en la demostración usted apoya esto sobre premisas que no le parecerán más evidentes que la conclusión, -¿qué pensará desgraciadamente? pensará que la ciencia matemática es un montón arbitrario de sutilesas inútiles; o bien se divertirá como en un juego y arrivará a un estado espiritual análogo al de los sofistas griegos; o bien se desalentará.

Al contrario, cuando él avance, cuando se haya familiarizado con el razonamiento matemático y su espíritu haya madurado por la frecuentación misma, las dudas nacerán por sí mismas, y entonces su demostración será la bienvenida. Ella despertará con novedades, y las preguntas se plantearán sucesivamente al muchacho, como se han planteado sucesivamente a nuestros padres. Hasta que el rigor perfecto pueda solo satisfacerlo. No basta dudar de todo, hace falta saber porque se duda.

Esto no es todo; he dicho que desde el punto de vista de la pura lógica, no queda más que una noción irreductible, la de número entero, y que las otras no son sino combinaciones de ello. Pero combinaciones semejantes, se pueden imaginar millares; pero ¿por qué esas en lugar de otras? la elección no se explica sino por el recuerdo de la noción intuitiva de la que esta combinación ha tomado el lugar; pero si este recuerdo es desechado la elección parecerá injustificada. Ahora bien, para comprender una teoría, no es suficiente constatar que el camino que se ha seguido np está cortado por un obstáculo, falta rendir cuentas de las razones que han hecho elegirlo. ¿Podrá entonces decirse alguna vez que se comprende una teoría si quiere dársele de entrada su forma definitiva aquella que la lógica impecable le impone, sin que quede rastro alguno de los tanteos que han conducido hasta allí? nó, no se la comprendería realmente, no se podrá incluso retenerla, o no se la retendría sino a fuerza de aprenderla de memoria.

El objetivo principal de la enseñanza matemática es el de desarrollar ciertas facultades del espíritu, y entre estas la intuición no es una menos preciada. Es por ello que el mundo matemático permanece en contacto con el mundo real y cuando incluso los matemáticos puros pudieran pasar de allí, faltarían para ello recursos para llenar el abismo que separa al símbolo de la realidad. El practicante tendrá de ella siempre necesidad y para un geómetra puro debe tener cien veces esta necesidad.

Pero para el geómetra puro mismo, esta facultad es necesaria; es por la lógica que demuestra, pero es por la intuición que se inventa; no es suficiente estar en condiciones de criticar los teoremas de otros, falta inventar nuevos. No es suficiente saber hacer combinaciones correctas, falta poseer el arte de elegir entre todas las combinaciones posibles.

Este arte, ya lo he dicho más arriba, es la intuición que aprendemos. Sin ella el geómetra sería como un escritor que estuviera aferrado a la gramática, pero que no tuviera ideas.

Ahora bien, ¿cómo esta facultad se desarrollaría si tan pronto se muestra, se la persigue y proscribe, se aprende a defenderse de ella antes de saber lo que puede sacársele de bueno?.

Pero ¿el arte de razonar justo no es también una cualidad reconocida, que el profesor de matemáticas debe ante todo ----

cultivar? yo no he procurado olvidarlo, y debe de preocuparse de ello desde el principio; pero se tienen demasiadas ocasiones de ejercitar a los alumnos en el razonamiento correcto, - en las partes de la matemática donde los inconvenientes que - he señalado no se presentan. Se tienen largos encadenamientos de teoremas donde la lógica absoluta ha reinado desde el primer momento para así decir muy naturalmente, que han conservado en consecuencia la forma que los primeros geómetras le habían dado.

Lo único que hay que evitar, es buscar a la pequeña bes-- tia en la exposición de los primeros principios. Esto no impide de aprender a razonar justo, procurando tener cuidado de no - dar a los alumnos ideas falsas. Algunas veces se necesitará - para esto, mucho tacto por parte del maestro; frecuentemente sufrirá al decir, como lo he explicado más arriba: nosotros - admitiremos que, en lugar de decir: es evidente que.

Entre los jóvenes que reciben una educación matemática -- completa, unos deberán llegar a ingenieros; aprenden geometría para servirse de ella; hace falta ante todo que ellos apren-- dan a ver bien y a ver rápido; es de la intuición que ellos tienen necesidad de antemano, los otros, menos numerosos deben a su vez llegar a ser maestros; haciendo entonces falta que - lleguen hasta el fondo; una conciencia profunda y rigurosa de los primeros principios les es ante todo indispensable. Pero esto no es una razón para no cultivar en ellos la intuición, - pues se harán una idea falsa de la ciencia si la vieran ------ solo desde un lado, y además no pudieran desarrollar en sus alumnos una cualidad que no poseyeran ellos mismos.

He escrito un largo artículo sobre una cuestión bien abstracta y muy general.

Para que el lector me lo perdone, voy e enunciar algunas conclusiones pecisas.

En especiales y para el primer año de la escuela politécnica, no se hablará de funciones sin derivadas, no se hablará de ello para decir:

Puede haberlas, pero no nos ocuparemos de eso. La primera vez que se hable a los alumnos de integrales, faltará definirlas por las superficies, y no será sino cuando ellos hayan tomado muchas integrales cuando se les dará la definición rigurosa.

H. Poincaré (PARIS)

PRUEBA DE QUE TODO CONJUNTO PUEDE SER BIEN ORDENADO

1904, ERNEST ZERMELO.

...La prueba en cuestión surgió de conversaciones que tuve la última semana con el Sr. Erhard Schmidt, y es como sigue:

1) Sean M un conjunto arbitrario de cardinalidad α, m un elemento arbitrario de él y M' de cardinalidad α', un subconjunto de M que contiene al menos un elemento m y puede igualmente contener a todos los elementos de M, y M-M' el subconjunto "complementario" a M' . Dos subconjuntos son considerados como distintos si uno de ellos contiene algún elemento que no ocurre en el otro. Denotamos por S al conjunto de todos los subconjuntos M'.

2) Imagine que con cada subconjunto M' está asociado un elemento arbitrario m'_1, que ocurre en el mismo M', que llamo elemento "distinguido" de M'. Esto produce una "cubierta" γ del conjunto S por ciertos elementos del conjunto M. El número de estas cubiertas γ es igual al producto $\Pi\,\alpha'$ tomado sobre todos los subconjuntos M' y es por lo tanto ciertamente diferente de cero. En lo que sigue tomamos una cubierta arbitraria γ y derivamos de ella un buen orden definido de los elementos de M.

3) DEFINICION.- Aplicamos el término "γ-conjunto" a cualquier conjunto bien ordenado M_γ que consista completamente --

de elementos de M y tenga la siguiente propiedad: cada - vez que m sea un elemento arbitrario de M_γ y A es el segmento "asociado", el cual consiste de los elementos x de M tales que $x < m$, m es el elemento distinguido de M - A.

4) Hay γ -conjuntos incluídos en M. Así, por ejemplo, (el conjunto contiende justamente)m_1, el elemento distinguido de M' cuando M=M', es él mismo un γ- conjunto; como lo es el conjunto (ordenado) $M_2=(m_1; m_2)$, donde m_2 es el elemento distinguido de $M-m_1$.

5) Cada vez que M'_γ y M''_γ sean cualesquiera dos distintos - γ - conjuntos (asociados, no obstante, con la misma cubierta γ elegida una vez para todos!), uno de los dos - es idéntico con un segmento del otro.

De los dos conjuntos bien - ordenados, sea M'_γ para el cual existe un mapeo de similaridad sobre el otro, M''_γ , o sobre uno de sus segmentos. Entonces cualesquiera dos elementos correspondiendo el uno al otro bajo este mapeo deben ser idénticos. Pues el primer elemento de cualquier γ - conjunto es m_1, ya que el segmento asociado A no contiene elementos y por lo tanto M-A=M.

Si ahora m' fuera el primer elemento de M'_γ que difiere del elemento correspondiente m", los segmentos asociados A' y A" podrían todavía ser idénticos, consecuentemente también los complementos M-A' y M-A", y así sus elementos distinguidos m' y m" mismos, contrariamente a la suposición.

6) CONSECUENCIAS .- Si dos γ-conjuntos tienen un elemento m en común, tienen también el segmento A de los elementos - precedentes en común . Si ellos tienen dos elementos m y n en común, entonces ya sea que en ambos conjuntos $m < n$- o en ambos conjuntos $n < m$.

7) Si llamamos a cualquier elemento de M que ocurre en al -- gún γ- conjunto un "γ-elemento", el teorema siguiente se cumple: LA TOTALIDAD L_{γ} DE TODOS LOS γ- ELEMENTOS PUEDE SER ASI ORDENADA TAL QUE ella misma sea un γ - conjunto y contenga todos los elementos del conjunto original M. - M es por ésto bien - ordenado.

I) Si a y b son dos γ-elementos arbitrarios y si M'_{γ} y M''_{γ} - son cualesquiera dos γ- conjuntos a los cuales pertenecen respectivamente, entonces acorde a 5) el más grande de los dos γ-conjuntos contiene a ambos elementos y determina si la relación de orden es ya sea $a < b$ o $b < a$.

De acuerdo a 6) esta relación de orden es independiente de los γ- conjuntos seleccionados.

II) Si a, b y c son tres γ- elementos arbitrarios y si $a < b$ y $b < c$, entonces siempre $a < c$. Pues de acuerdo a 6) cada γ-conjunto que contiene a c también contiene a b, de donde también a a, y entonces, como es simplemente ordenado, - dentro del conjunto, $a < c$ realmente se sigue de $a < b$ y $b < c$. El conjunto L_{γ} es por lo tanto SIMPLEMENTE ORDENADO.

III) Si L'_γ es un subconjunto arbitrario de L y a es uno de - sus elementos, perteneciendo, digamos, al γ- conjunto M_γ, entonces de acuerdo a 6) M_γ contiene todos los elementos precediendo a a, de donde incluye el subconjunto L''_γ que se obtiene de L'_γ cuando todos los elementos que siguen a a son removidos; L''_γ , siendo un subconjunto del conjunto bien ordenado M_γ , posee un <u>PRIMER</u> elemento, el cual es también el primer elemento de L'_γ . L_γ es por tanto también <u>BIEN</u> - <u>ORDENADO</u>.

IV) Si a es un γ- elemento arbitrario y A la totalidad de <u>TODOS</u> los elementos precedentes $x < a$, entonces de acuerdo a 6), en cada conjunto M_γ conteniendo a, A es el segmento asociado con a; acorde a 3), consecuentemente, a es el elemento distinguido de M-A. <u>POR LO TANTO</u> L_γ <u>ES EL MISMO UN</u> γ <u>- CONJUNTO</u>.

V) Si existía un elemento que no pertenecía a <u>ningún</u> γ - conjunto, que consecuentemente era un elemento de $M-L_\gamma$, podría también existir un elemento distinguido m'_1 de -- $M-L_\gamma$, y el conjunto ordenado (L_γ , m'_1), en el cual cada γ - elemento precede al elemento m'_1, podría el mismo de acuerdo a 3) ser un γ - conjunto. Entonces m'_1 también podría ser un γ - elemento, contrariamente a la suposición; así realmente $L_\gamma = M$, y así M es un conjunto <u>BIEN</u> - <u>ORDENADO</u>.

Por consiguiente, a cada cubierta γ le corresponde un buen ordenamiento definido del conjunto M, aún si los buen-ordenamientos que corresponden a dos distintas cubiertas no son siempre distintos. Debe existir en todo caso AL MENOS UN tal buen - ordenamiento, y para cada conjunto para el cual la totalidad de subconjuntos, y así sucesivamente, está lleno de sentido y puede ser considerado como bien-ordenado y su cardinalidad como un "aleph". Por lo tanto se sigue que, para cada cardinalidad transfinita,

$$\alpha = 2\alpha = \aleph_0\alpha = \alpha^2 \quad , \text{ y así sucesivamente;}$$

y cualesquiera dos conjuntos son "comparables"; o sea, uno de ellos puede ser siempre mapeado uno a uno sobre el otro o a una de sus partes.

La prueba presente descansa sobre la suposición de que las cubiertas γ existen efectivamente, por lo tanto sobre el principio de que igualmente para una totalidad infinita de conjuntos hay siempre mapeos que asocian con cada conjunto uno de sus elementos, o, expresado formalmente, que el producto de una totalidad infinita de conjuntos, cada uno conteniendo al menos un elemento, difiere de cero. Este principio lógico no puede, seguramente, ser reducido a uno todavía más simple, pero es aplicado sin dudas en todo lugar de la deducción matemática. Por ejemplo, la valides de la proposición de que el número de partes en la cual se descompone un conjunto es menor que o igual al número de la totalidad de sus elementos no puede ser probado excepto por la asociación de cada una de las partes en cuestión a uno de sus elementos.

Debo al Sr. Erhard Schmidt la idea de que, invocando este principio, podemos tomar una cubierta ARBITRARIA γ como una base para el buen - orden; la prueba, como la he llevado a cabo, descansa entonces sobre la fusión de los varios posibles " γ - conjuntos", o sea, de los segmentos bien ordenados resultando del principio de ordenamiento.

UNA NUEVA PRUEBA DE LA POSIBILIDAD DE UN BUEN ORDEN (1908)

ERNEST ZERMELO

Aunque todavía sostengo completamente mi "Prueba de que cualquier conjunto puede ser bien ordenado", publicada en 1904, en presencia de varias objeciones que están completamente discutidas en el §2, la nueva prueba que doy abajo puede ser de interés, ya que por un lado, no presupone teoremas específicos de teoría de conjuntos y, por otro lado, pone de relieve, más claramente de como lo hace la primera prueba, el carácter puramente formal del buen orden, el cual no tiene nada que ver respecto del arreglo espacio temporal.

§ 1 LA NUEVA PRUEBA.

Las suposiciones y formas de inferencia que uso en la prueba del teorema pueden ser reducidas a los siguientes postulados.

I.- Todos los elementos de un conjunto M que tienen una propiedad C bien definida para cualquier elemento individual son los elementos de otro conjunto, M_e, un "subconjunto" de M .

Entonces a cada subconjunto M_1 de M corresponde un "subconjunto complementario", $M-M_1$, que contiene todos los elementos que no ocurren en M_1, y cuando $M=M_1$, se reduce al "conjunto nulo" (vacío).

II.- Todos los subconjuntos de un conjunto M, o sea, todos los conjuntos M_1 cuyos elementos son también elementos de M, son los elementos de un conjunto $\mathfrak{U}(M)$ determinado por M. Al postular I se cumple fácilmente la proposición siguiente:

III.- Todos los elementos que son comunes a todos los conjuntos A, B, C, ..., siendo elementos de un conjunto mayor T, son los elemen tos de un conjunto $Q=D(T)$, el cual puede ser llamado la "intersección" - o el "componente común de los conjuntos A,B,C,.....

TEOREMA. Si con cada subconjunto no vacío de un conjunto M un elemento de tal subconjunto es asociado por alguna ley como "elemento distinguido", entonces $\mathfrak{U}(M)$, el conjunto de todos los subconjuntos de M, posee uno y sólo un subconjunto $\mathfrak{M}$ tal que a cada sub-conjunto arbitrario P de M corresponde siempre uno y sólo un elemento P de $\mathfrak{M}$ que incluye a P como un sub-conjunto y contiene un elemento de P como su elemento distinguido. El conjunto M es bien ordenado por $\mathfrak{M}$.

PRUEBA.- Si A es cualesquier subconjunto no vacío de M y entonces un elemento de $\mathfrak{U}(M)$, y si $a=\varphi(A)$ es su elemento distinguido, sea $A'=A-\{a\}$ la parte de A que resulta cuando el elemento distinguido es removido. Ahora $\mathfrak{U}(M)$, el conjunto de todos los subconjuntos de M, posee las siguientes tres propiedades:

1) CONTIENE EL ELEMENTO M;

2) JUNTO CON CADA UNO DE SUS ELEMENTOS A CONTIENE TAMBIEN EL CORRESPONDIENTE A';

3) JUNTO CON CADA UNO DE SUS SUBCONJUNTOS, $\mathfrak{Q}=\{A,B,C,.....\}$ contiene también la intersección correspondiente $Q=\mathfrak{D}(\mathfrak{Q})$ como un elemento.

Si un subconjunto Θ de $\mathfrak{U}(M)$ tiene estas tres propiedades es llamado una "Θ-cadena", se sigue inmediatamente que la intersección de varias Θ-cadenas es siempre una Θ-cadena, y la intersección $\mathfrak{M}$ de todas las Θ-cadenas existentes, las cuales de acuerdo a I y II son los elementos de un subconjunto bien definido de $\mathfrak{U}\mathfrak{U}(M)$, es por lo tanto la más pequeña posible Θ-cadena; por lo tanto ningún subconjunto propio de $\mathfrak{M}$ - puede ser una Θ. cadena más.

Ahora sea A un elemento de $\mathfrak{M}$ tal que todos los otros elementos X de $\mathfrak{M}$ caen dentro de dos clases con respecto a A: 1) elementos U_A que son - partes de A, y 2) elementos V_A que incluyen el conjunto A como una parte, por ejemplo M. Entonces, como ahora mostraremos, cada U_A siempre tiene la propiedad de ser un W_A; es decir, es un subconjunto de $A'=A-\varphi(A)$. De hecho, cada V'_A como no puede ser un U_A y no obstante debe ser un elemento de $\mathfrak{M}$, es ya sea A misma o un V_A y cada intersección de varias V_A - es otra vez un V_A o A. Por otro lado, A', también como cada W'_A, es otra vez un W_A; e igualmente cada intersección de varias W_A, también como la intersección de algún W_A y algún V_A o A, es otra vez un W_A. Así W_A - junto con V_A y A forman una Θ-cadena; por lo tanto ellos agotan la más - pequeña Θ-cadena $\mathfrak{M}$, y cada U_A es realmente un W_A, o sea un subconjunto - de A'.

Pero de esto se sigue inmediatamente que A', también, tiene la misma propiedad que A, a saber, que todos los otros elementos de M son, ya - sea parte de A' o incluyen a A' como una parte.

Si, finalmente, Q es la intersección de varias A,B,C,..que tiene exactamente la propiedad supuesta de A y si X es cualquier otro elemento de $\mathfrak{M}$, entonces solo dos casos son posibles:
ya sea que X incluye uno de los conjuntos A,B,C,... por lo tanto Q, como una parte, ó X esta incluída en la totalidad de los conjuntos A,B,C,.... y con ello también en Q, como un subconjunto, o sea, Q también posee la propiedad arriba mencionada de A. Como finalmente, M incluye todos los

elementos de $\mathfrak{M}$ como subconjuntos y por lo tanto es él mismo un A, los elementos de $\mathfrak{M}$ que están constituidos como A forman una θ·cadena, es decir, $\mathfrak{M}$ mismo, y para dos elementos arbitrarios (distintos) A y B de $\mathfrak{M}$ se cumple la alternativa de que B debe ser ya sea un subconjunto de A' o A un subconjunto de B'.

Ahora sea P un subconjunto arbitrario de $\mathfrak{M}$, y sea P_0 la intersección de todos los elementos de $\mathfrak{M}$ que incluyen P como un subconjunto y al cual al menos el elemento M pertenece. Entonces P_0 también es un elemento de $\mathfrak{M}$, y el elemento distinguido p_0 de P_0 debe ser un elemento de P, puesto que de otro modo $P_0'=P_0-\{p_0\}$ también podría contener todos los elementos de P y podría no obstante ser solamente una parte de P_0. Cualquier otro elemento P_1 de $\mathfrak{M}$ que incluye P como un subconjunto debe entonces incluir P_0 como una parte; o sea P_0, de acuerdo a lo que ha sido justamente probado es un subconjunto de P_1', y el elemento distinguido p_0 de P no puede ser un elemento de P' ya que él no ocurre en P_1', y por lo tanto tampoco, en P_0. Así existe realmente sólo un único elemento P_0 de $\mathfrak{M}$ que incluye a P como un subconjunto y contiene un elemento de P como su elemento distinguido.

Si elegimos para p un conjunto de la forma $\{a\}$, donde a es cualquier elemento de M, se sigue en particular que a cada elemento a de M corresponde un solo elemento A de en el cual a es el elemento distinguido, denotamos a este elemento A por R(a). Si a y b son cualesquiera dos distintos elementos de M, entonces ya sea que R(a) ó R(b) es el elemento P_0 de $\mathfrak{M}$ correspondiendo al conjunto $P=\{a,b\}$, o sea ya sea que R(a) contiene el elemento b ó R(b) el elemento a, pe ro nunca ambos. Si finalmente, a,b, y c son cualesquiera tres (distin tos) elementos de M y si digamos, b es un elemento de $R(a)$ y c un e lemento de $R(b)$, entonces sólo $R(a)$ puede ser el elemento P_e correspondiendo al conjunto $P=\{a,b,c,\}$ o sea, c también es un elemento de $R(a)$. Por lo tanto, si escribimos $a<b$ cuando b es un elemento de $R(a)$ y - $a\neq b$ (decimos entonces que el elemento a "precede al elemento b") la tricotomía

$$a<b, \quad a=b, \quad ó \quad b<a$$

se obtiene para cualquiera dos elementos a y b, y de $a<b$ y $b<c$ se si gue siempre que $a<c$.

El conjunto M, por lo tanto, es "simplemente ordenado" por medio - del conjunto $\mathfrak{M}$, y además es "bien ordenado" en el sentido de Cantor; pues a cada subconjunto P de M le corresponde un "primer elemento" a saber, el elemento distinguido p_e de $P=R(p)$, el cual precede a todos los o--- tros elementos P de P, ya que todos estos P son elementos de p_e.

Si, conversamente, el conjunto M es bien ordenado en cualquier mane ra entonces a cada elemento a de M corresponde un cierto subconjunto $R(a)$ de $\mathfrak{M}$ que contiene además de a, todos los elementos "siguientes a A"; llamémoslo el "residuo" asociado con a, si de un tal residuo $R(a)$ - removemos el primer elemento a, lo que queda es el residuo del "siguien te" elemento a'. Igualmente, el componente común, o intersección, de - varios residuos es siempre un residuo, y finalmente, el conjunto completo M es el residuo $R(e)$ de su primer elemento. Así la totalidad de to dos los residuos en el sentido especificado arriba, forman una Θ-cadena, en la cual para cada residuo el primer elemento es el elemento distingui do.

Si ahora $\mathfrak{U}(M)$ fuera incluído, además de $\mathfrak{M}$, un segundo subconjunto $\mathfrak{M}_s$ constituido como requiere el teorema, entonces $\mathfrak{M}_s$ podría también determinar un buen ordenamiento de $\mathfrak{M}$ con los mismos elementos distinguidos y podría por lo tanto, como una Θ-cadena, incluir la intersección $\mathfrak{M}$ de todas las Θ-cadenas como un componente. Si Z_0 denota al elemento distinguido de un elemento Z de $\mathfrak{M}_s - \mathfrak{M}$, Z_0 podría ser el elemento distinguido de dos elementos de $\mathfrak{M}_s$ a saber, de Z como también $R(Z_0)$ determinado por $\mathfrak{M}$ y esto podría contradecir la propiedad supuesta de $\mathfrak{M}_s$. Por lo tanto, el buen ordenamiento $\dot{\mathfrak{M}}$ es realmente determinado unívocamente por la elección de los elementos distinguidos, y el teorema planteado está probado en su totalidad.

Ahora a fin de aplicar nuestro teorema a conjuntos arbitrarios, requerimos solamente ($\mathfrak{T}$) la suposición adicional de que una elección simultánea de elementos distinguidos es en principio siempre posible para un conjunto de conjuntos arbitrario, o, para ser más preciso, que las mismas consecuencias simpre se cumplen si tal elección fuera posible. En esta formulación, con seguridad, el principio tomado como fundamento aparece todavía un tanto manchado con subjetividad y propenso a mala interpretación. Pero puesto que, como mostraré con más detalle en otra parte*, podemos, por medio de principios de teoría de conjuntos elementales e indispensables, reemplazar siempre un conjunto arbitrario T' de conjuntos A',B',C',.... por un conjunto T de conjuntos mutuamente disjuntos A,B,C,.... que sean equivalentes a los conjuntos A',B',C',.... respectivamente, el principio general de elección puede ser reducido al axioma siguiente, cuyo carácter puramente objetivo es inmediatamente evidente.

* E. Zermelo Investigations of the foundations of set theory, 1908 en Van Heijenoort op. cit.

IV. AXIOMA. Un conjunto S que puede ser descompuesto en un conjunto de partes disjuntas $A, B, C, \ldots,$ conteniendo cada una al menos un elemento, posee al menos un subconjunto S teniendo exactamente un elemento en común con cada una de las partes $A, B, C, \ldots,$ consideradas.

Entonces la aplicación de este axioma, justo como en mi nota de 1904, produce el teorema general de que CADA CONJUNTO PUEDE SER BIEN ORDENADO.

La definición de buen ordenamiento que había aparecido en la formulación del teorema y forma la base de nuestra nueva prueba tiene la ventaja de que descansa exclusivamente sobre las nociones elementales de teoría de conjuntos, puesto que la experiencia muestra que, con la presentación usual, los no informados están solamente muy dispuestos a observar algún srntido místico detrás de la relación de Cantor $a<b$ la cual es introducida de repente. Formulamos ahora una vez más nuestra definición explícitamente, como sigue.

DEFINICION. Un conjunto M se dice está bien ordenado si a cualquier elemento a de M le corresponde un subconjunto único $R(a)$ de M, el residuo de a, y a cada subconjunto no vacío P de M contiene uno y sólo un primer elemento, o sea un elemento P_0 tal que su residuo $R(P_0)$ incluye al conjunto P como un subconjunto.

§ 2. DISCUSION DE LAS OBJECIONES A LA PRIMERA PRUEBA.

Desde 1904, la fecha de mi "Prueba de que todo conjunto puede ser bien ordenado", numerosas objeciones le han sido hechas y varias críticas han sido publicadas. Tomo esta oportunidad para discutirlas juntas.

a. OBJECIONES AL PRINCIPIO DE ELECCION

En primer lugar consideramos las objeciones que están directamente en contra del "postulado de elección" formulado arriba y que por tanto - afecta a ambas de mis pruebas de la misma manera. Concedo que ellas son el algún grado justificadas, ya que yo justamente no puedo PROBAR este - postulado, como expresamente enfatizo al final de mi nota,[1] y por lo tanto no puedo llamar a nadie a aceptarlo apodícticamente. De dónde si Borel (1905, 1905 a)[2] y Peano (1906 a)[3] en sus críticas noten la falta de una prueba, ellos han adoptado meramente mi propio punto de vista. Ellos deberán ponerse en deuda conmigo pues ahora por su parte establecen la - improbabilidad que yo afirmé-digámoslo,que este postulado es lógicamente independiente de los otros- corroborando de ese modo mi convicción.

Ahora, en matemáticas IMPROBABILIDAD, como es bien conocido, no es - de ninguna manera equivalente a NO VALIDEZ, ya que, después de todo, no todas las cosas pueden ser probadas, pero cada prueba en turno, presupone principios improbables. Así, en orden de rechazar un tal principio - fundamental, uno podría haber tenido la certeza de que en algún caso particular no cumple o deriva consecuencias contradictorias desde él; pero nadie de mis oponentes ha hecho algún intento por hacer esto.

Hasta el FORMULAIRE de Peano(1897), el cual es un intento por reducir todas las matemáticas a "silogismos" (en el sentido Aristotélico-Escolástico)[4], descansa en un suficiente número de principios improbables; uno de estos es equivalente al principio de elección para un conjunto - singular y puede ser extendido silogísticamente a un número finito arbitrario de conjuntos[5]. Pero el axioma general que siguiendo a otros in-- vestigadores, me ha permitido aplicarlo a conjuntos arbitrarios en este nuevo caso, no está establecido entre los principios de Peano, y Peano - mismo nos asegura que él no podría derivarlo tampoco. El está contento por notar éste hecho, tal cosa acaba al principio para él. La idea de -

que posiblemente su FORMULAIRE puede ser incompleto en lo que a este pun to se refiere precisamente después de todo, como lo sugiere el mismo tex to, y, como no hay autoridades infalibles, en matemáticas, debemos tam-- bién tomar esta posibilidad en cuenta y no rechazarla sin examinación ob jetiva.

Primero, ¿cómo arriba Peano a sus principios fundamentales y cómo - justifica su inclusión en el FORMULAIRE, ya que, después de todo, él no puede probarlos tampoco?

Evidentemente por el análisis de los modos de inferencia que en el curso de la historia han venido a ser reconocido como válidos y por el - señalamiento de que los principios son intuitivamente evidentes y necesa rios para la ciencia -consideraciones que pueden todas ser solicitadas - igualmente bien en favor del disputado principio-. Que este axioma, - aún cuando nunca ha sido formulado en estilo de libro de texto, ha sido usado frecuentemente, y exitosamente hasta que, en los más diversos cam- pos de las matemáticas, especialmente en teoría de conjuntos, por Dede-- kind, Cantor, F. Bernstein, Schoenflies, J. Konig, y otros sea un hecho indisputable, lo cual es corroborado solamente por la oposición que, de un tiempo a otro, algunos puristas lógicos dirigieron en su contra. Tal uso extensivo de un principio puede ser explicado solamente por su PRO-- PIA EVIDENCIA, la cual, seguramente, no debe ser confundida con su proba bilidad. No importa si esta PROPIA EVIDENCIA, sea subjetiva en cierto - grado -es seguramente un origen necesario de los principios matemáticos-, y aún si el no es una herramiente de pruebas matemáticas, y la aserción de Peano (1906 a p. 147) de que no tiene nada que ver con fallas matemá- ticas haciendo justicia a hechos manifiestos. Pero la cuestión que pue- de ser decidida objetivamente, es si el principio es NECESARIO PARA LA -

CIENCIA, quisiera ahora someter a juicio presentando algunos teoremas y problemas elementales y fundamentales que, en mi opinión, no podrían ser tratados todos ellos sin el principio de elección.

1). Si un conjunto M puede ser descompuesto en partes disjuntas A,B,C,..., el conjunto de estas partes es equivalente a un subconjunto de M, o, en otras palabras, el conjunto de sumandos tiene siempre una cardinalidad menor que, o la misma que, la de la suma.

Para probar esto debemos asociar mentalmente con cada una de estas partes uno de sus elementos.[6]

2). Las sumas de conjuntos equivalentes son de nuevo equivalentes, previendo que todos los términos sean mutuamente disjuntos, un teorema sobre el cual el cálculo entero de cardinalidades descansa.

Aquí es necesario considerar un sistema de mapeos que correlacionan SIMULTANEAMENTEA cualesquiera dos sumandos equivalentes con cualquier otro; así de todos los posibles mapeos asociados con cada par de sumandos equivalentes debemos elegir uno solo, y debemos hacer esta elección para cada par.

3). El producto de varias cardinalidades puede ser vacío sólo si un factor es vacío, o sea, el "conjunto conexión" de Cantor[7] de varios conjuntos A,B,C,..., conteniendo cada uno al menos un elemento, debe igualmente contener al menos un elemento. Pero como cada elemento es un conjunto teniendo exactamente un elemento en común con cada uno de los conjuntos A,B,C,..., el teorema es meramente otra expresión del postulado de elección para conjuntos disjuntos. (el axioma en IV, final del § 1 arriba).

4). Un conjunto que no es equivalente a cualquiera de sus partes puede ser siempre ordenado en tal manera que cada subconjunto posea un primero como también un último elemento.

Este teorema, sobre el que la teoría de conjuntos FINITOS descansa, es simplemente probado por medio de mi teorema del buen ordenamiento Dedekind[8] (1888) probó un teorema lógicamente equivalente que un conjunto no equivalente a cualquier segmento de su "sucesión numérica" debe tener un componente equivalente a la sucesión numérica completa mapeando simultáneamente un sistema de pares de conjuntos equivalentes, de donde, como en 2) arriba, también por el uso del principio de elección[9]. No conozco de otra prueba.

5). Un conjunto numerable de conjuntos finitos o numerables posee siempre una suma numerable.

Sobre este teorema descansa la teoría de conjontos numerables y de la "segunda clase numérica"; pero solamente puede probarse si ordenamos simultáneamente todos los conjuntos finitos o numerables en cuestión como los números naturales.

6). ¿Existe una "base" para todos los números reales, o sea, un sistema de números reales tal que ninguna relación lineal con un número finito de coeficientes enteros establecida entre ellos y que cualquier otro número real pueda obtenerse de ellos por una relación lineal con un número finito de coeficientes enteros?

7). ¿Hay soluciones discontinuas de la ecuación funcional

$$f(x + y) = f(x) + f(y)?$$

Las últimas dos preguntas fueron respondidas afirmativamente por Hamel (1905) sobre la suposición de que el continuo puede ser bien ordenado.

La teoría de cardinalidades de Cantor, por lo tanto, requiere ciertamente de nuestro postulado, y así mismo la teoría de Dedekind de conjuntos finitos, la cual forma el fundamento de la Aritmética. Que en la teoría de funciones podemos usualmente evitar su uso está explicado por el hecho de que allá como una regla tratamos con conjuntos "completados" ("abgeschbssenen"), para los que pueden ser definidos sin ambiguedad elementos distinguidos sin dificultad. Dónde este no es el caso, por lo tanto especialmente en la teoría de funciones discontinuas en todos lados, el principio es con frecuencia indispensable, como muestra nuestro último ejemplo.

Ahora en tanto que los problemas relativamente simples mencionados aquí quedan inaccesibles a los expedietes de Peano, y mientras que, por otra parte, el principio de elección no puede ser rechazado definitivamente, nadie tiene el derecho a evitar a los representantes de la ciencia productica el continuar usando esta "hipótesis" como uno puede llamarla con todo cuidado y desarrollando sus consecuencias a la mayor extensión, dado que cualquier contradicción posible inherente a un punto de vista dado, puede ser descubierta solamente en tal forma. Necesitamos meramente separar los teoremas que requieren necesariamente el axioma de aquellos que pueden ser probados sin él con objeto de delimitar la totalidad de las matemáticas de Peano como una rama especial, como una ciencia artificialmente mutilada.

Proscribiendo hechos o problemas fundamentales de la ciencia meramente porque ellos no puedan ser tratados por medio de ciertos principios prescritos, podrían ser del mismo modo prohibidos la mayor parte de la teoría de las paralelas en geometría porque el axioma sobre el que esta teoría descansa ha sido mostrado como improbable. De hecho, los principios deben ser juzgados desde el punto de vista de la ciencia, y no la ciencia desde el punto de vista de principios fijos de una vez y para siempre. La geometría existía antes de los Elementos de Euclides, justamente como la aritmética y la teoría de conjuntos antes del FORMULAIRE de Peano, y ambas no dudarán en sobrevivir los mayores intentos por sistematizarlas en forma de texto.

De seguro, queda a Peano una manera simple de probar los teoremas en cuestión, tanto,como muchos otros, desde sus propios principios. Necesita solamente usar la antinomía de RUSSELL, largamente discutida, ya que, como todos saben, cualquier cosa puede ser probada desde premisas contradictorias. En suma los pr'ncipios del FORMULAIRE, los cuales no hacen distinción entre "conjunto" y "clase", no excluyen esta contradicción. Por otro lado, como mostraré rápidamente (1908 a)[10], aquellos que defienden la teoría de conjuntos como una disciplina puramente matemática que no está confinada a las nociones básicas de la lógica tradicional están ciertamente en una posición por evitar, restringiendo adecuadamente sus axiomas, todas las antinomías descubiertas hasta ahora. Así, mientras el dominio de los principios de Peano, como hemos mostrado, es muy estrecho para permitir el desarrollo de nuestra ciencia en su belleza total, es por otro lado muy amplio para excluir contradicciones internas; y, en tanto que las antinomías de este sistema no son eliminadas, uno está difícilmente justificado en buscar en él la fundamentación para la ciencia de las matemáticas.

b). OBJECION CONCERNIENTE A LA DEFINICION NO PREDICATIVA.

El punto de vista mantenido aquí, de que estamos tratando con una ciencia productiva descansando finalmente sobre la intuición, era recientemente exhortado, en oposición a la "logística" de Peano, por Poincaré, también, en una serie de ensayos (1905, 1906, 1906 a)[11]; en éstos él también hace total justicia al principio de elcción, el cual considera un axioma improbable pero indispensable[12]. De cualquier manera, él empuja su ataque hasta -ya que sus oponentes hacen uso principalmente de teoría de conjuntos- identificar la teoría de Conjuntos de Cantor, esta creación original del pensamiento específicamente matemático y de la intuición de un genio con la logística que él combate y niega cualquier derecho a existir, sin considerar por sus logros positivos, únicamente por razón de las antinomías que no han sido resueltas[13].

Si él está interesado sólo en mostrar que en los fundamentos de la aritmética hay "juicios sintéticos a-priori", entre los cuales, cree poder reconocer el principio de inducción matemática sobre todo, podría tener suficiente hasta donde las pruebas de teoría de conjuntos de este principio conciernen, adscribir un carácter sintético a las proposiciones fundamentales sobre las que descanasan estas pruebas; aún los más destacados en la teoría de Conjuntos podrían haber aceptado eso, ya que la distinción entre "sintético" y "analítico" podría entonces ser algo puramente Filosófico y no tocar las matemáticas como tales. En lugar de ello, intentó combatir las pruebas matemáticas con las armas de la lógica formal, venturándose así sobre un territorio sobre el que sus oponentes logísticos son mejores.

Para hacer la concepción de Poincaré clara, la cosa más simple po--

dría ser probablemente elegir un ejemplo de la prueba dada en §1 del presente documento. Allí definí una clase especial de conjuntos, los que llamé Θ-cadenas, y entonces probé que el componente común M de todas estas Θ-cadenas es ella misma una Θ-cadena. Este procedimiento está modelado sobre la teoría de "cadenas" sobre la que Dedekind (1888,§4) basa su teoría de números finitos, y es también usual en otro lugar de la teoría de conjuntos. Pero de acuerdo a Poincaré (1906) una definición es "predicativa" y lógicamente admisible sólo si EXCLUYE todos los objetos que son "dependientes" en la noción definida, o sea, que pueden de alguna manera ser definidos por ella. En conformidad, en el ejemplo citado aquí el conjunto M el cual es el mismo determinado solamente por la totalidad de las Θ-cadenas, debería haber sido excluído de la definición de estas cadenas, y mi definición, que cuenta a M mismo como una Θ-cadena, podría ser "no predicativa" y contener un circulo vicioso. En dos pasajes que son algo similares (1906, pp 314-315) el último refiriéndose a los "γ-conjuntos" de mi prueba de 1904, esto está elaborado expresamente como una critica a mi procedimiento de prueba.

Ahora, por un lado, las pruebas que tienen esta forma lógica no están confinadas de ningún modo a la teoría de conjuntos; exactamente la misma clase puede encontrarse en Análisis dónde el máximo o el mínimo de un conjunto "completado" previamente definido de números Z es usado para inferencias posteriores. Esto sucede, por ejemplo, en la bien conocida prueba Cauchy del teorema fundamental del álgebra, y hasta ahora no se le ha ocurrido a nadie considerar esto como algo ilógico. Por otro lado, es precisamente la forma de la llamada definición, ser predicativa, que contiene algo circular; pues, a menos que tengamos la noción, no podemos conocer del todo qué objetos puedan ser alguna vez determinados --

por ella y puedan por lo tanto ser excluídos. En verdad, seguramente, la cuestión de si un objeto arbitrario es sometido a una definición, debe ser decidible independientemente de la noción todavía a ser definida, por medio de un criterio OBJETIVO. Pero, tal criterio está dado, como es de hecho el caso en cualquier parte de los ejemplos trazados de mis pruebas, nada puede impedir alguno de los objetos subsumidos bajo la definición de tener además de una relación especial a la misma noción y así estar determinadas por, o distinguidas de, las restantes-digamos, como componente común o mínimo.- Después de todo, un objeto no es creado por una "determinación" tal; más bien, cada objeto puede ser determinado en una amplia variedad de maneras, y estas diferentes determinaciones no producen nociones idénticas pero si equivalentes, o sea, nociones que tienen la misma extensión. De hecho, la existencia de nociones equivalentes parece ser lo que Poincaré ha omitido de su crítica, como enfatiza Peano[14] especialmente en esta conexión. Una definición puede muy bien basarse sobre nociones que son equivalentes a alguna por ser definida; en suma, en cada definición definiens y definiendum son nociones equivalentes, y la observancia estricta de la demanda de Poincaré podría hacerse a cada definición, por lo tanto a la totalidad de la ciencia, imposible.

NOTAS DE ZERMELO.

1) "Este principio lógico no puede, seguramente, ser reducido a uno más simple ..." (Prueba de 1904 p. 516, 1904 Math Ann. 59)

2) Borel 1905 "Quelques Remarques sur les principes de la théorie des Ensembles", Mathematishe Ann. 60, p. 194-195.

1905 a "cinq lettres sur la théorie des ensembles." Bull. de la so-- cieté Mathématique de France 33, 261-273.

3) Peano 1906 a Additione, Revista de mathematica 8, 143-157

4) Ver Peano 1906 a, p. 147

5) Ver Peano 1906 a, p. 14-147 Esta prueba, incidentalmente, puede ser llevada a cabo sólo por inducción matemática; de donde es obligatorio sólo si definimos los números finitos a la manera de Peano por medio de su tipo de orden. Si por otro lado tomamos como base la defini-- ción de Dedekind de conjunto finito como aquél que no es equivalente a cualquiera de sus partes, ninguna prueba es posible aún para conjuntos - finitos, ya que la reducción de las dos definiciones la una a la otra, - como mostraremos adelante (ejemplo 4), requiere otra vez el principio de elección. En este sentido, por lo tanto, la observación de Poincaré en 1906, p. 313 está justificada. (ver nota 11).

6) Que un particular principio de inferencia está usado aquí fue - probablemente establecido por Beppo Levi (1902) en conexión con una prueba de F. Bernstein. De acuerdo a éste (1905 p. 193) de cualquier forma, la "hipótesis" de que una elección es posible está llamada a ser "dispensable" en todos los casos similares, por instancia también en mi prueba,

si uno emplea la noción "equivalencia multivaluada" que él introduce. - De acuerdo a él (1904) dos conjuntos M y N se dicen estar en relación de equivalencia multivaluada si un conjunto completo A de mapeos 1-1 φ, ψ, χ,..., "entre los que ninguno está distinguido", está dado por ellos en cambio de uno solo. Por lo que una noción puramente relacional tal - como "distinguido" se usa aquí, sin determinación suplementaria o definición, como una característica absoluta, y el intento por diferenciar entre equivalencia multivaluada y ordinaria es no realizable lógicamente. En los ejemplos considerados, no obstante, no estamos interesados totalmente en la "multiplicidad", es decir, la CARDINALIDAD del conjunto A de mapeos, sino meramente con la cuestión de si AL MENOS UN tal mapeo φ - existe, una cuestión que no puede ser evadida aquí por definición alguna y puede ser establecida sólo por medio de un axioma.

7) Ver Zermelo 1908 a "Investigations of the Foundations of Set - theory" en Heijenoort p. 204.

8) Dedkind 1888 "Was sind und was sollen die Zahlen?"

9) Este hecho, que era frecuentemente omitido, es expresamente reconocido también por Hessenberg (1906).

10) op. cit. Zermelo 1908 a.

11) H. Poincaré 1905, 1906, 1906 a. (ver bibliografía de la presente tesis)

12) Ver Poincaré 1906 págs. 311-313 especialmente 313: "De donde éste es un juicio sintético a priori, sin el que la teoría de carcinales - podría ser imposible, para números finitos como para infinitos".

13) Ver Poincaré 1906 p. 316 "No hay infinito actual; los cantorianos lo han olvidado, y han caído en contradicciones.

CINCO CARTAS SOBRE LA TEORIA DE LOS CONJUNTOS

I. CARTA DEL SR. HADAMARD AL SR. BOREL.

He leído con interés los argumentos que opones (2o. cuaderno del Tomo LX de los Anales Matemáticos) a la demostración del Sr. - Zermelo aparecida en el tomo precedente. Sin embargo, no participo de tu opinión a ese respecto. No admito, en principio, la semejanza que estableces entre el hecho que sirve de punto de partida al Sr. Zermelo y el razonamiento que consistirá en numerar los elementos del conjunto los unos después de los otros, numeración que prosigue transfinitamente. Hay, en efecto, una diferencia fundamental entre los dos casos: el razonamiento que ha sido citado en último lugar comporta una serie de elecciones sucesivas donde cada una depende de las precedentes; es por ello que su asignación transfinita es inadmisible. Yo no veo ninguna analogía por establecer, sobre el punto de vista que nos ocupa, entre las elecciones en --- cuestión y aquellas de las que nos habla el Sr. Zermelo, las cuales son independientes unas de las otras.

Esto es por otra parte, en el caso de un infinito no numerable de elecciones donde recusas esta manera de proceder; pero, a mi vez, no veo diferencia, bajo esta consideración, entre el caso de un infinito no numerable y el que se refiere a un infinito numerable. La diferencia sería manifiesta si aquí hubiera una dependencia cualquiera entre las elecciones en cuestión, porque aquí --

faltaría entonces tomar en consideración el orden en el cual se les operaría: me parece, una vez más, desvanecerse completamente en el caso de las elecciones independientes.

Lo que es cierto, es que el Sr. Zermelo no da ningún medio de ejecutar efectivamente la operación de la que habla, y que permanece dudoso que alguién pueda, en consecuencia, indicar ese medio. El habrá estado seguramente mas interesado en resolver el problema bajo esta forma; pero la cuestión así planteada (determinación efectiva de la correspondencia buscada) no es nada distinta de aquella que nosotros examinamos (¿ Tal correspondencia existe?): Hay totalmente entre ellas la diferencia, fundamental, que existe entre lo que el Sr. Tannery[1] llama una correspondencia que puede ser definida y una correspondencia que puede ser descrita. Numerosas cuestiones importantes de los matemáticos cambiarían totalmente de sentido, y de soluciones, si se substituyera la segunda palabra por la primera. Tu empleas correspondencias de las que constatas la existencia sin poder sin embargo describirlas en tu importante razonamiento relativo a las series que admiten su círculo de convergencia como cortadura: si se limitará a las series enteras cuya ley de formación puede ser descrita, la antigua opinión (a saber, que las series enteras admiten su círculo de convergencia como cortadura son la excepción), debería, en mi opinión, ser considerada como la verdadera. Esto es, además, una pura cuestión de sentimiento, pues la noción de correspondencia "que puede ser descrita" está, para retomar tu expresión, "fuera de las matemáticas"; ella nos traslada al dominio de la psicología y es relativa a una propiedad de nuestro espíritu, es una cuestión de esta naturaleza como aquella de saber si la correspondencia empleada por el Sr. Zermelo podrá alguna vez ser indicada de hecho.

En cuanto a la existencia de esta correspondencia, me parece también adecuada a la posibilidad de tomar un elemento en un conjunto dado cualquiera como la proposición siguiente:

A. Dado un número X, existen números Y que no están ligados a X por ninguna ecuación algebraica de coeficientes enteros, esto es:

B. Existen funciones Y de X tales que, para algun valor de X, Y no tenga ni un valor algebraico, ni un valor ligado a X por una ecuación algebraica de coeficientes enteros.

Se podrá además, sin duda, formar tales funciones. Pero lo que yo pretendo es que esto no es en absoluto necesario para afirmar la exactitud del teorema B; y creo que muchos matemáticos no se tomarían más que yo esta molestia si hubieran de emplear el teorema en cuestión.

J. HADAMARD.

II. CARTA DEL SR. BAIRE AL SR. HADAMARD.

Borel me comunica la carta donde usted le expone su manera de ver el gran debate levantado por la nota de Zermelo. Le pido me permita dirigirle algunas reflexiones que ello me sugiere.

Yo soy, como usted sabe, de la opinión de Borel, en términos generales, y si me desvió será para ir mas lejos que él.

Suponemos que se hace un esfuerzo para intentar aplicar el método de Zermelo al conjunto M de sucesiones de enteros positivos. Se toma en M un elemento distinguido m, quedando el conjunto M - m, del que se toma un elemento distinguido como m_2; etc. - Estas elecciones sucesivas dependen cada una de las que le preceden. Pero, dice usted al igual que el Sr. Zermelo que las elecciones son independientes las unas de las otras, porque admite como punto de partida <u>una elección del elemento distinguido hecho en</u> TODAS <u>las partes de M</u>. Esto no me parece satisfactorio: esto es, para mi, disimular la dificultad <u>ocultándola en una dificultad más grande</u>.

La expresión <u>conjunto dado</u> está empleada a cada instante: ¿tiene un sentido? No siempre, según yo. En cuanto se habla de infinito (incluso numerable, y es aquí donde estoy tentado a ser más radical que Borel), la asimilación, <u>conciente o inconciente</u> con una bolsa de canicas que se toma de mano a mano, debe desaparecer completamente, y nosotros estamos, según me parece, en lo <u>virtual</u>, es decir que nosotros hacemos convenciones que nos permiten ulteriormente, un objeto estando definինido <u>por una nueva convención</u>, afirmar ciertas propiedades de este objeto. Pero creer que se ha ido más lejos no me parece legítimo. En particular, esto acerca de que un conjunto que este dado (estaremos de acuerdo para decir, por ejemplo, que nos damos el conjunto de sucesiones de enteros positivos), es falso para mi considerar a las partes de este conjunto como dadas. Como mayor razón rechazo que tenga algún sentido el hecho de concebir una elección hecha en cada parte de un conjunto.

El Sr. Zermelo dice: "concebimos que para todo conjunto parcial de M corresponde uno de sus elementos." Es esta una concepción que no tiene nada de contradictoria, de acuerdo. También, todo lo que demuestra para mí, es que nosotros no percebimos contradicción en concebir que, en todo conjunto que se nos definiera, los elementos tienen entre ellos relaciones de posición identicas a aquellas que tienen los elementos de los conjuntos bien ordenados. Para decir después de esto que se ha establecido que todo conjunto puede ser puesto bajo una forma de un conjunto bien ordenado, hace falta dar a las palabras una extensión extraordinaria y, yo agregaría, tramposa.

En lo que precede, no he llegado sino bastante incompletamente a exponer mi pensamiento. He dicho mi manera de ver sobre la frase que tuvo a bien transcribir Borel en su nota. Para mi el progreso, en este orden de ideas, consistiría en delimitar el dominio de eso que es definible. Y, a fin de cuentas, a pesar de las apariencias, todo debe llevarse hasta el fin.

R. BAIRE.

III. CARTA DE M. LEBESGUE A M. BOREL.

Usted me pide mi opinión sobre la nota de el Sr. Zermelo (Math, Annalen, t. LIX) sobre las objeciones que usted le - ha hecho (MATH. ANNALEN t. LX) y sobre la carta del M, --- HADAMARD que usted me comunica; hela aquí. Discúlpeme, voy a intentar ser claro.

En principio estoy de acuerdo con usted en esto: el Sr. Zermelo ha demostrado muy ingeniosamente que sabe resolver - el problema A:

A. Poner un conjunto M bajo la forma bien ordenada, toda vez que se sabe resolver el problema B:

B. Hacer corresponder a cada conjunto M' -- formado con elementos de M un elemento particular m' de M'.

Desgraciadamente el problema B no es fácil de resolver, como parece, como para los conjuntos que se sabe bien ordenar; en consecuencia no se tiene una solución general del problema A.

Dudo mucho que se pueda dar una solución general a este problema, al menos si se admite, con el Sr. Cantor, que de-- finir un conjunto M es nombrar una propiedad P apartando a - ciertos elementos de un conjunto N precedentemente definido y caracterizando, por definición, los elementos de M. - En efecto, con esta definición, no se sabe nada sobre los - elementos de M sino esto: Poseen todos las propiedades --- desconocidas de los elementos de N y estas son las únicas que tienen la propiedad P desconocida. Nada dentro de ésto permite distinguir dos elementos de M, aún menos clasificarlas como haría falta para resolver A.

Esta objeción, hecha A PRIORI para todo ensayo de solución de A, cae evidentemente si se particuliza N o P; la objeción cae, por ejemplo, si N es el conjunto de los números. Todo lo que aquí puede esperar hacerse en general, es indicar unos problemas, tales que B, cuya resolución entraña la de A y posible en ciertos casos, particulares, pero que se reen--- cuentran frecuentemente.

De ahí el interés, a mi parecer, del razonamiento del Sr. Zermelo.

Creo que el Sr. Hadamard es más fiel que usted al pensamiento del Sr. Zermelo interpretando la nota de este autor como un ensayo, no como resolución efectiva de A, sino como demostración de existencia de la solución. La pregunta retorna poco novedosamente a esta: ¿Se puede demostrar la existencia de un ser matemático sin definirlo?.

Evidentemente es un asunto de convención; pero creo que no se le puede enfrentar sólidamente <u>sino admitiendo que no se - demuestra la existencia de un ser sino definiendolo</u>.

Para que este punto de vista, próximo del de Kronecker y - del Sr. Drach, no hay sino distinguir entre A y el problema C:

C: ¿ <u>Todo conjunto puede ser bien ordenado</u> ?

Yo no tendría nada más que decir si la convención que he iniciado fuera universalmente admitida; pero debo reconocer que se la emplea a menudo, y que yo mismo he empleado frecuentemen te la palabra <u>existencia</u> en otros sentidos. Por ejemplo, cuan- do se interpreta un razonamiento bien conocido del Sr. Cantor que dice: <u>Existe un infinito no numerable de números</u>, no se dá sin embargo el medio de nombrar tal infinidad. Se muestra sola mente, usted lo ha dicho antes que yo, que, cada vez que se -- tenga una infinidad no numerable de números, podrá definirse - un número que no forme parte de esta infinidad. (La palabra - <u>DEFINIR</u> tiene todo el tiempo el sentido de: <u>Nombrar una propie- dad característica de lo definido</u>). Una existencia de esta na- turaleza puede ser utilizada en un razonamiento y de la manera siguiente: Una propiedad es verdadera, si, la negación, condu- ce a admitir que se pueden ordenar todos los números en suce-- ción numerable. Yo creo que ella no puede intervenir de esta - manera.

El Sr. Zermelo utiliza la <u>EXISTENCIA</u> de una <u>CORRESPONDENCIA</u> entre los subconjuntos de M y algunos de sus elementos. Usted verá que, cuando incluso la existencia de estas correspondencias estuviera fuera de duda, siguiendo la manera como esta existencia hubiera sido probada, no sería evidente que se tuviera derecho a utilizar esta existencia como lo hace el Sr. Zermelo.

Yo llego al razonamiento que usted enuncia así: "Es posible en un conjunto particular M' elegir ad libitum el elemento distinguido m'; esta elección pudiendo ser hecha para cada uno de los conjuntos M', puede ser hecha para el conjunto de estos conjuntos", y del cual parece resultar la existencia de las correspondencias.

En principio, M' estando dado ¿es evidente que puede elegirse m'? esto sería evidente si M' existiera, en el sentido casi KRONECKERIANO que he dicho, puesto que decir que M' existe será entonces afirmar que se saben nombrar algunos de sus elementos.

Pero extendemos el sentido de la palabra EXISTIR. El conjunto de correspondencias entre los subconjuntos M' y los elementos distinguidos m' existe ciertamente para los Sres. HADAMARD y Zermelo; este último representa incluso el número de sus elementos con un producto transfinito. Sin embargo, ¿se sabe elegir un elemento de ? No, evidentemente, puesto que sería dar de B, para M, una solución determinada.

Es verdad que yo empleo la palabra elegir en el sentido de nombrar y que es suficiente quizás para el razonamiento del Sr. ZERMELO dónde elegir significa pensar en. Pero hace -

falta, sin embargo, subrayar que no se indica aquí lo que se piensa y que es no obstante necesario al razonamiento de Sr. Zermelo que se piense en una correspondencia determinada siempre idéntica. El Sr. Hadamard cree, me parece, que no es necesario demostrar que se puede determinar un elemento (y solo uno); es de ésto, a mi juicio, que vienen las diferencias de apreciación.

Para hacerle sentir mejor la dificultad que veo, le recuerdo que, en mi tesis, he demostrado la existencia (en sentido no Kroneckeriano y quizás difícil de precisar) de conjuntos medibles no medibles B, pero me queda la duda de que jamás se pueda nombrar uno. En estas condiciones ¿habría yo tenido el derecho de fundar un razonamiento sobre esta hipótesis: Yo supongo elegido un conjunto medible no medible B, es entonces que dudaría que alguien pueda alguna vez darme uno?

Así veo ya una dificultad en esto "En un M' determinado podría elegir un m' determinado", puesto que existen algunos conjuntos (el conjunto C por ejemplo, que se podría considerar como un conjunto M' proveniente de un conjunto más general) en los cuales es imposible quizás elegir un elemento. Seguidamente hay la dificultad que usted señala, relativa a la infinidad de elecciones, lo que hace que, si se quiere considerar el razonamiento del Sr. Zermelo como hecho general, hace falta admitir que se habla de una infinidad de elecciones, infinidad de potencia probablemente más grande; no se da además ni la ley de esta infinidad, ni la ley de una de las elecciones; no se sabe si es posible nombrar una ley definitoria de un conjunto de elecciones teniendo la potencia del conjunto de las M'; no se sabe si es posible, siendo dado un M', nombrar un m'.

En resumen, cuando examino de cerca el razonamiento del - Sr. Zermelo, como numerosos razonamientos generales sobre los conjuntos, yo lo encuentro muy poco Kroneckeriano para atribuirle un sentido (En tanto que teorema de existencia de la solución de C solamente, por supuesto).

Usted hace alusión a este razonamiento "Para bien ordenar un conjunto basta con elegir un elemento, luego otro, etc." - Es cierto que este razonamiento presenta dificultades enormes, más grandes aún, al menos en apariencia, que el del Sr. Zermelo; y estoy tentado a creer con el Sr. Hadamard que hay algún progreso al haber reemplazado una infinidad de elecciones sucesivas dependiendo las unas de las otras por una infinidad, no ordenada, de elecciones independientes. No hay quizás aquí sino una ilusión y la simplificación aparente tiende solamente al reemplazo de una infinidad ordenada de elecciones por una infinidad no ordenada, pero de potencia mayor. De manera - que el hecho puede reducirse a una sola dificultad, planteada al principio del razonamiento del Sr. Zermelo, todas las dificultades del razonamiento simplista que usted cita prueba quizás simplemente que esa única dificultad es muy grande. En todo caso no me parece que desaparezca porque se trata de un -- conjunto no ordenado de elecciones independientes. Por ejemplo, sí creo en la existencia de funciones Y (x) tales que, cualesquiera sea x, entonces Y no este jamás ligada a x por una ecuación algebráica de coeficientes enteros, es porque yo creo, junto con Hadamard, que es posible construirla; pero esto no es, para mi, la consecuencia inmediata de la existencia, cualquiera que sea x, de números Y que no esten ligados x por alguna ecuación de coeficientes enteros(2).

Estoy plenamente de acuerdo con el Sr. Hadamard cuando el declara que la dificultad que hay al hablar de una infinidad de elecciones sin dar la ley es muy grave, se trate o no de una infinidad numerable. Cuando se dice, como en el razonamiento que usted critica, "Esta elección puede hacerse para cada uno de los conjuntos M', y quizás hacerse para el conjunto de estos conjuntos", no se dice nada si no se explican los términos empleados. Hacer una elección, esto puede ser escribir o nombrar al elemento escogido; hacer una infinidad de elecciones, esto no puede ser escribir o nombrar los elementos escogidos, uno por uno: la vida es demasiado corta. Hace falta decir entonces que es lo que se hace. Se entiende por ello, en general, que es dar la ley que define los elementos elegidos, pero esta ley es para mí, como para HADAMARD, tan indispensable, en tanto trata de una infinidad numerable o no.

Posiblemente sin embargo, estoy aún de acuerdo con usted sobre este punto ya que, si no establezco diferencias teóricas entre los dos infinitos, desde el punto de vista práctico, estoy haciendo una gran diferencia entre ellos. Aún cuando entiendo hablar de una ley definiendo una infinidad transfinita de elecciones, desconfio demasiado, ya que no he visto jamás leyes semejantes, mientras que conozco leyes definiendo una infinidad numerable de elecciones. Pero esto no es una empresa de rutina y, reflexionando, veo en ocasiones, dificultades muy graves, a mi parecer, en razonamientos dónde no intervienen sino una infinidad numerable de cosas, sino en los razonamientos dónde hay una transinfinitud. Por ejemplo, si yo no considero como establecido por el razonamiento clásico que todo conjunto de potencia superior al numerable contiene un conjunto cuya potencia es aquella del conjunto de los números transfinitos de la clase II del Sr. CANTOR, no atribuyo más valor al método por el cual se demuestra que un conjunto no finito contiene un conjunto numerable. Sea que dudo mucho que se nombre jamás un conjunto que no sea ni finito, ni infinito, que la imposibilidad de un conjunto tal no me parece demostrado. Pero ya le he hablado de estas cuestiones.

H. LEBESGUE.

IV. CARTA DEL SR. HADAMARD AL SR. BOREL.

La cuestión me parece del todo clara ahora, después de la carta del Sr. LEBESGUE. Conforme se profundiza, la discusión tiende a centrarse sobre la distinción, expuesta en el artículo del Sr. TANNERY, entre lo que está determinado y lo que puede ser descrito.

Lebesgue, Baire, y tú, adoptan sobre este punto la manera de ver de Kronecker que yo creía hasta aquí le era exclusiva.

Usted responde negativamente a la cuestión planteada por el Sr. Lebesgue. ¿Se puede demostrar la existencia de un ser matemático sin definirlo? yo aquí respondo afirmativamente.. Tomo para mí, antes dicha, la respuesta que Lebesgue hace el-mismo a su objeción relativa al conjunto

Que ello nos sea imposible, al menos actualmente, nombrar un elemento de este conjunto, en ello convengo. Esa es la -- cuestión para usted; más no lo es para mí. No hay sino solo- un punto sobre el cual me parece que Lebesgue no sea lógico consigo mismo. Es cuando él se reconoce o no se reconoce el derecho de utilizar una existencia, siguiendo la manera como ella ha sido demostrada. Para mí, las Existencias de las que él habla son hechos como los otros. Si no, no tienen lugar.

La cuestión se plantea del mismo modo frente a Baire, No- quisiera plantearla, como él lo hace, a la manera del Sr. --- Hilbert, sobre el terreno de lo no contradictorio, que me parece recogido de la Psicología y hacer entrar en el asunto a- las propiedades de nuestros cerebros. Yo no entiendo incluso como Zermelo puede haber Demostrado que nosotros no percibi-- mos contradicción, etc. Esto no se demuestra esto se constata:

se ha percibido allí o no se le ha percibido.

Descartado este punto, el problema principal, el de saber que el conjunto puede ser ordenado, no tiene evidentemente para Baire (no más que para Lebesgue y tú) el mismo sentido que para mí. Diré más bien: La ordenación es posible? (y ni siquiera se puede decir se puede ordenar, por miedo a tener que pensar en lo que es Se puede): Baire dirá: Podemos nosotros ordenar? cuestión totalmente subjetiva a mi parecer.

Estas son entonces dos concepciones de las matemáticas, - dos mentalidades que estan presentes. No veo, en todo lo que hasta aquí se ha dicho, algún motivo para cambiar la mía. No pretendo imponerla cuando mucho haré valer en su favor los argumentos que he indicado en la Revue générale des Sciences -- (30 Marz.1905) a saber:

I) Creo que el debate es en el fondo el mismo que se ha elevado entre Riemann y sus predecesores, sobre la noción misma de función. La Ley que exige Lebesgue me parece recordar - mucho la expresión[3] analítica que reclamaban a toda costa los adversarios de Riemann. E incluso una expresión analítica mucho más bizarra. No solamente la Numerabilidad de las elecciones me parece que cambia la cuestión, sino además la unicidad. No veo cómo tendríamos el derecho de decir: "Para cada valor de X existe un número que satisface a...... sea y este número......", dado que, porque "El matrimonio es muy bello de la X y la Y", no podemos decir: "Para cada valor de X existen una infinidad de números que satisfacen a ...... sea y uno de estos números......".

2) Las elecciones arbitrarias de Tannery conducen a unos números , que no seríamos incapaces de definir. No concibo que estos números no existan.

En cuanto a los razonamientos presentados por el Sr. Bernstein (Math. Annalen, LX p. 187), y, por consiguiente, a sus objeciones a las demostraciones del Sr. Zermelo, no los consideraré, por mi parte como probatorios. Esta opinión es además independiente de la cuestión que discutimos actualmente.

El Sr. Bernstein parte de la paradoja del Sr. Burali-Forti (circolo matemático di palermo 1879) relativo al conjunto W de todos los números ordinales. Para escapar a la contradicción -- puesta en evidencia por el Sr. Burali-Forti, el supone al número ordinal W tal que sea imposible agregarle 1. Esta opinión - es para mí, inadmisible, así como los argumentos imaginados a - su favor por el Sr. Bernstein. El orden establecido (después de la teoría del Sr. Cantor) entre los elementos de W y el elemento suplementario (es en este orden que se ataca al autor) es -- una pura convención, que se está siempre en libertad de hacer y en la cual las propiedades de W, cualesquiera que estas sean -- no tendrán ningún obstáculo.

La solución es otra. Es la existencia misma del conjunto W lo que implica contradicción. En su definición, la definición -

general de la palabra conjunto está incorrectamente aplicada. No se tiene el derecho de formar un conjunto sino con objetos previamente existentes y es fácil ver que la definición de W supone lo contrario.

Misma observación para el conjunto de todos los conjuntos. (Hilbert, congreso de Heidelberg).

Retomamos la cuestión primera. He aquí aún desde este punto de vista, no un argumento pues creo que nosotros dormiremos eternamente sobre nuestras posiciones sino una consecuencia de tus principios.

CANTOR ha considerado el conjunto de todas las funciones que, en el intervalo (0,1), no toman sino los valores 0,1. Este conjunto tiene para mi, un sentido claro y su potencia es , como lo enuncia Cantor. Del mismo modo el conjunto de todas las funciones de X tiene para mi un sentido, y veo claramente que su potencia es .

Que sentido tiene todo esto para tí? me parece evidente que esto no puede tener alguno. Pues para toda función tu impones una condición suplementaria que no tiene ningún sentido matemático: La de ser descriptible para nosotros.

O antes bien, he aquí lo que ella significa: no se debe considerar, desde tu punto de vista, sino las funciones definibles en un número finito de palabras. Pero sobre esta cuenta, los dos conjuntos así formados son numerables, por tanto todos los conjuntos posibles, además.

J. HADAMARD.

V. CARTA DEL SR. BOREL AL SR. HADAMARD.

... Yo quisiera primeramente indicarte un interesante señalamiento hecho por el Sr. Lebesgue en la sesión de la Sociedad el 4 de mayo: Cómo el Sr. Zermelo puede estar seguro que para los diversos puntos de su razonamiento hable de la misma elección del elemento distinguido, puesto que él no la caracteriza para nada por ella misma (no se trata incluso aquí de un contradictor posible; se trata de ser coherente consigo -- mismo).

En cuanto a tu nueva objeción, he aquí cual es mi situación sobre su consideración.

Yo no quiero escribir de los alephs pero consiento sin embargo, hacer unos razonamientos equivalentes a los que tú hablas, sin hacerme apenas siquiera ilusión sobre su valor intrínseco, pero viéndolos como pudiendo guiar otros razonamientos más serios. Como ejemplo práctico, puedo citarte la nota III, que he insertado al final de mi último Librito (Lecciones sobre las funciones de variables reales, etc. redactadas por Maurice Fréchet); el razonamiento que allí está -----

empleado es manifiestamente sugirido por el razonamiento de - Cantor, que he relacionado en mis primeras <u>Lecciones sobre la teoría de las funciones</u>(4), pág. 107.

La forma que adopto en esa NOTA <u>III</u> no es todavía absolutamente satisfactoria, como lo indico al final de la última - página de mi Libro; pero el razonamiento análogo del Sr. Lebesgue en su Memoria aparecida en el <u>JOURNAL DE JORDAN</u> (1905) es, creo, totalmente reprochable en el sentido de que él conduce a un resultado preciso, explicable por medio de un número finito de palabras; el tiene sin embargo, su origen en el de Cantor.

Puede pedirse cual es el valor real de estos razonamientos que no veo como válidos absolutamente y que sin embargo, conducen ulteriormente a resultados efectivos. Parece en efecto que, si ellos están desprovistos de todo valor, no podrán conducir a nada, pues serían conjuntos de palabras carentes de sentido. Creo que sería así muy severo y que ellos tienen un valor análogo a las de ciertas teórias de Física matemática, por los cuales nosotros no pretendemos explicar la realidad, sino tener una guía que nos permita, por analogía, descubrir fenómenos nuevos que quedan en seguida por verificar. Habría un trabajo considerable por hacer para saber cual es el sentido real y preciso que se le puede atribuir a los razonamientos de este género; este trabajo es inútil o al menos fuera de proporción con su utilidad; las relaciones con lo concreto de estos razonamientos demasiado abstractos aparecen luego -- que la necesidad se hace sentir de ellos mismos.

Estaría de acuerdo contigo sobre el hecho de que es con-- tradictorio hablar del conjunto de todos los conjuntos, lue-- go, por el razonamiento de la pág. 107 citado más arriba se - puede formar un conjunto de potencia más grande, pero creo -- que ésta contradicción tiende a eso que se introduce en los - conjuntos no definidos realmente.

E. BOREL.

N O T A S D E L A S

C A R T A S .

1) Revue Générale des Sciences t. VIII, 1897, p. 133 y sigs.

2) Corrigiendo los ensayos, agrego que haciendo el razonamiento, por el cual se legitíma ordinariamente el enunciado A del -- Sr. Hadamard, legitíma simultáneamente al enunciado B. Y, a mi parecer, esto es porque legitíma B como legitíma A.

3) Creo deber insistir un poco sobre el punto de vista que si - hace falta decir todo mi pensamiento, me parece formar el -- fondo mismo del debate. Me parece que el progreso verdaderamente esencial de las matemáticas, a partir de la invención misma del cálculo infinitesimal, ha consistido en la anexión sucesiva de nociones que, unas por los griegos, otras por -- los geómetras del renacimiento o los predecesores de Riemann estaban "fuera de las matemáticas" porque era imposible describirlas.

4) En las notas I y II de este librito hago constantemente razonamientos del tipo de aquellos que tú me refutas el derecho de hacer; estoy además a cada instante lleno de escrúpulos y cada una de estas dos notas termina con una frase muy reestrictiva .

1.- Abreu, J.L.

On Intuitionism and Constructivism.

2.- Baire, Borel, Lebesgue, Hadamard.

Cinq lettres sur la théorie des ensembles. Bulletin de la Societé - Mathematique de France. Tomo 33. 1903-1905.

3.- Boldrighini, C ; Marcheti, F.

El problema de los fundamentos y la formalización de Hilbert.

4.- Bourbaki, N.

Elementos de historia de las matemáticas.

5.- Cantor, G.

Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers. Ed. Dover.

6.- Cocho, F.

" Una alternativa a la crisis matemática de los fundamentos ". Programa de Ciencia y Sociedad. Facultad de Ciencias UNAM. 1979.

7.- Cohen, P. J.

Settheory and the continum hipotesis. Ed. W.A. Benjamin. 1966.

8.- Dauben, J.W.

G. Cantor and Pope Leo XIII. Journal of the history of idea. 38.(1977).

9.- Enderton, H.

Elementos of Set Theory. Academic Press. 1977.

10.- Eves, Howard.

Estudio de las geometrias. UTEHA. 1963.

11.- Fraenkel, A.

Abstract Set Theory. North Holland.

12.- Fraenkel, A ; Barhillel

Foundations of Set Theory. North Holland. 1959.

13.- Fraenkel, A.

Set Theory and Logic. Ed. UNAM.

14.- Garciadiego, D. A.

La Teoría de Conjuntos sus orígenes, desarrollo y consecuencias. UNAM. 1977.

15.- Gödel, K.

¿ What is Cantor's continuum problem ?. Ann. Math. 1947.

16- Hadamard, J.

The psychology of invention in the Mathematical Field. Ed. Dover. 1954.

17.- Hilbert, D.

Sobre los problemas futuros de las matemáticas. Traducción F. Cocho Prog. de C. y S. UNAM. Comunicaciones Internas Depto. Mats. No. 7. 1980.

18.- Hilbert, D.

Los fundamentos de la Geometría. Traducción F. Cocho. Prog. de C. y S. 1978.

19.- Israel, G.

Un aspecto ideológico de la matemática contemporánea: el bourbakismo. De donato editore Italia, 1977.

20.- Jourdain, P. E.

" A proof that any agragate can be well ordered ". Acta Math. 43. 1922.

21.- Klein, F.

El programa de Erlangen 1872. Traducción de F. Cocho. Prog. de C. y S. UNAM. 1978.

22.- Korner, S.

Kant. Alianza Universidad. 1977.

23.- Ladriere, J.

Limitaciones Internas de los Formalismos. Ed. Tecnos. 1969.

24.- Moore, G. H.

La axiomatización de Zermelo de la Teoría de Conjuntos. Journal of -- Symbolic Logic. Vol. 7. No. 3. 1978.

25.- Poincaré, H.

Ciencia y Método. Ed. Espasa-Calpe.

26.- Poincaré, H.

" La logique et L'intuition Daus la Science Mathématique et daus -- L'enseignement ". L'enseignement mathematique. 1899, p. 157-162.

27.- Poincaré, H.

Del papel de la intuición y la lógica en matemáticas. Traducción F. Cocho. Prog. C. yS. UNAM. 1980. Comunicación Interna Depto. Mats. No. 7. 1980.

28.- Poincaré, H.

Las matemáticas y la lógica. Revista de Metafísica y Moral. No. 3. 1906.

29.- Poincaré, H.

El valor de la Ciencia. Ed. Espasa-Calpe.

30.- Poincaré, H.

Ultimos Pensamientos. Ed. Espasa-Calpe.

31.- Reid, C.

Hilbert. Ed. Springer Verlag. 1972.

32.- Russell, B.

Autobiografía. Ed. Aguilar. 1968.

33.- Struik, D.J.

A concise history of mathematics. Ed. Dover.

34.- Torres Alcaraz, C.

La filosofía formalista de la matemática. Tesis Prof. 1978. UNAM.

35.- Ursini, S.; Cocho, F.

" El nacimiento de la Teoría de Conjuntos y la obra de Cantor ." 1977.

36.- Van Heijenoort.

" From Frege to Gödel. Source Book of Mathematical Logic ."

Harvard Univ. Press. 1967.

37.- Zermelo, E.

" 1904 Proof that every set can be well-ordered." Math. Ann. 59.

p. 514-516.

38.- Zermelo, E.

" 1908 A new Proof the possibility of a well-ordering ." Ibid. pp. 107-128.