

© *sigum*.



Facultad de Ciencias

Tests de Matemáticas

La Media y Extrema Razón

Luis Cuevas Barajas



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

LA MEDIA Y EXTREMA RAZÓN

TESIS

DE

MATEMÁTICAS

Luis Cuevas Barajas

TEMA DE ESTA TESIS

PROPOSICION

" EN LAS BOVEDAS SEMIESFERICAS DE ESPESOR CONSTANTE, Y SUJETAS A SU PROPIO PESO, LA LINEA DE ESFUERZOS PARALELOS NULOS CORRESPONDE AL PARALELO CUYO COSENO DE LA COLATITUD ES EL - NUMERO DE ORO" .

EL AUTOR



ἀγεωμέτρητος μηδεις εισιτω

"En el vestíbulo de su casa fijó Platón, cual norma, la -
sentencia: no entre en mi casa quien en geometría no esté ver-
sado".

Texto tomado de la obra *Historiarum Libri*, de Juan Tzet-
zes, escritor bizantino del siglo XI. Las puertas o vestíbulo
a que se refiere serían tal vez las de la Academia.

INTRODUCCIÓN

La presente tesis tuvo su origen en un viaje realizado a las ciudades de Guatemala y Antigua, después del sismo que azotó a la República de Guatemala, a las 3 h. 02 m. 33 s., del día 4 de Febrero de 1976.

Es una experiencia muy triste la vivida por un pueblo, -- que en cuestión de segundos, vió morir 22,778 de sus habitantes y quedar heridos 76,504, entre hombres mujeres y niños, y sin habitación varios miles de personas, así como sufrir e---normes pérdidas en su economía.

Tan pronto como en la Latinoamericana, Seguros, S. A. se supo la noticia de este desastre, y se tuvo conocimiento de -- que dos empleadas de la Afianzadora Guatemalteca, S. A., ha-- bían perdido sus hogares, se organizó una colecta entre los -- empleados, quienes donaron un día de su sueldo para ayudar a-- sus hermanos en desgracia.

Me tocó en suerte llevar esta ayuda, así como también. -- realizar otras actividades relacionadas con la ingeniería ci-- vil. Relato esto, porque me parece que es un acto de solida-- ridad humana, que bien merece ser recordado.

Por tener que visitar los sitios en donde habían estado -- los hogares de las dos personas damnificadas, esta circuns -- tancia me llevó a Mixco, del Departamento de Guatemala, lu -- gar en donde vivía una joven estudiante universitaria, em ---pleada de la empresa guatemalteca, y me tocó ver los grandes -- daños en esta zona, que mostraban la enorme fuerza con la que la Naturaleza había golpeado a esta región.

También recuerdo, que se planteó la posibilidad de traer -- a la Ciudad de México, bajo la protección de personas muy ---solventes, moral y económicamente, algún niño de los natura -- les, cuyos padres hubiesen muerto y estuviese sin protección, y se habló de un hijo de los kakchiqueles, pero según recue -- do el Gobierno Guatemalteco no permitió su salida del país, -- hecho que me pareció loable, pues reflejaba el interés por su población indígena.

Una vez elaborado el informe sobre las dos viviendas, lo -- comuniqué a los Directores de empresa en la Ciudad de México, y me dediqué a visitar los sitios más afectados por el sismo.

Solicité información en la Municipalidad de la Ciudad de Guatemala, que corresponde a nuestro Departamento del Distrito Federal, al Observatorio Meteorológico Nacional, al Colegio de Ingenieros de Guatemala y al Instituto Geográfico Nacional de Guatemala, C. A.

En todos estos sitios fui muy bien atendido y recibí la información que me pudieron dar, que no era mucha, pues todos estaban consternados. Con la cooperación de los geólogos de distintos países, el Sub-comité Técnico de Evaluación Geológica del Comité Nacional de Emergencia, se estableció que la causa del terremoto había sido el movimiento de una falla mayor, que pasa por el valle del río Motagua.

En la Municipalidad me atendió el Sr. Ing. Oscar Asturias Pellecer, quien nombró, para que me mostrara los sitios de -- mayores fallas estructurales, al Sr. Ing. Carlos Valle, del -- Departamento de Control de la Contrucción Urbana, y quien, en ese momento, estaba encargado de restablecer el servicio de -- los mercados de la Ciudad de Guatemala; tarea que era de vi-- tal importancia, él era una persona muy joven; y me recuerdo, que cada vez que salíamos de su oficina, situada en el cuarto piso del edificio de la Municipalidad, lo asaltaba una verdadera multitud de locatarios, pidiéndole, todos a la vez, que les arreglara sus locales, para poder continuar sus actividades comerciales.

En el Observatorio Meteorológico Nacional, me atendió el -- Sub Director, Sr. José Vassaux, un hombre muy amable y labo -- rioso.

En el Colegio de Ingenieros de Guatemala asistí, acciden-- talmente por cierto, a una sesión comida que estaban reali -- zando, en la que informaron la muerte de un miembro muy esti -- mado de ese Colegio, al que su casa se había caído hacia una -- barranca. Presidió la reunión el Sr. Ing. Oscar Martínez Ama -- ya, Presidente de la Junta Directiva del Colegio.

En el Instituto Geográfico Nacional, me atendió el Sr. -- Oscar Daniel Salazar, Geólogo Jefe del Instituto.

Los datos del sismo, que fueron recabados en las distin -- tas dependencias citadas, son los siguientes:

CIUDAD	HORA	DISTANCIA EPICENTRAL	MAGNITUD RICHTER
Guatemala, C.A.	3h. 02m. 33s.	55 a 60 Km. NE.	7.2
México, D. F.	3h. 04m. 14s.	1,170 Km. SE.	7.6
U.S. Coast and Geodetic Survey	3h. 01m. 46s.	15.2° N. Latitud 89.3° O. Longitud	7.5

La profundidad del hipocentro estuvo comprendida entre 29 o - 30 Km.

A continuación, es conveniente definir algunos de los conceptos más importantes en el estudio de los sismos.

MAGNITUD. Richter definió la magnitud de un sismo como el logaritmo de base diez, de la máxima amplitud de onda, expresada en milésimos de milímetro, registrada en un sismógrafo standard, instalado a 100 kilómetros del epicentro.

La magnitud de un sismo es una medida de la energía total desencadenada, por lo tanto, se expresa en unidades de trabajo, en ergios, por ejemplo, y su valor es independiente de -- las coordenadas geográficas del observador.

Un sismógrafo standard es, por ejemplo, uno del modelo -- Wood Anderson, que tiene las siguientes características:

Período amortiguado 0.8 seg.

Amplificación estática 2,800

Amortiguamiento crítico 0.8

Una de la fórmulas, de los profesores Gutenberg y Rich -- ter, que relaciona la magnitud de un sismo con la cantidad de energía liberada durante el sismo, es la siguiente:

$$\log E = 11.4 + 1.5 M$$

E = Energía expresada en ergios.

Por lo que, si tomamos para el temblor de Guatemala, la -- magnitud reportada por el U. S. Coast and Geodetic Survey, --

tenemos: $\log E = 11.4 + 1.5 (7.5)$

$$\log E = 11.4 + 11.25 = 22.65$$

$$E = 10^{23} \text{ ergios}$$

Comparando esta energía con la liberada durante la explosión de una bomba atómica del tipo "nominal", como la lanzada por los norteamericanos durante la Segunda Guerra Mundial, -- sobre la Ciudad de Hiroshima, y que desencadenó una energía -- equivalente a :

$$E_{\text{bomba}} = 8 \times 10^{20} \text{ ergios}$$

tenemos:

$$\frac{E_{\text{sismo}}}{E_{\text{bomba}}} = \frac{10^{23}}{8 \times 10^{20}} = 125$$

O sea, que el sismo liberó en el hipocentro una energía -- equivalente a 125 bombas atómicas. Una conclusión que podemos sacar de todo esto, es que, aún falta mucho para que el hombre aprenda a evitar los temblores, controlando una energía -- tan grande.

INTENSIDAD. La intensidad de un sismo es una medida -- de su poder destructor; y por lo tanto, a diferencia de la -- magnitud, sí es función de las coordenadas geográficas del -- observador, es decir, tiene variaciones de un lugar a otro.

Las escalas más empleadas para clasificar la intensidad -- de un sismo son: la de Rossi-Forel y la de José Mercalli, ésta última clasifica los sismos en doce grados; ambas escalas -- se basan en los daños que localmente causa un sismo y en las -- reacciones subjetivas de los habitantes.

Muchas veces he escuchado a personas que preguntan: ¿Cuál es la equivalencia entre las escalas de Richter y la de Mercalli? Para contestar esta pregunta estableceremos una analogía con la termodinámica, en ella los conceptos físicos a --- comparar serán: el calor y la temperatura; y la pregunta se -- rá: ¿A cuántas calorías equivale un grado centígrado? Inme--- diatamente vemos que se trata de dos conceptos distintos.

Para aclarar este tema, se propone como ya hemos dicho, -- una analogía entre un sismo y un fenómeno calórico, que al -- fin y al cabo, ambos son fenómenos energéticos; y que por lo -- tanto, se puede denominar la analogía termodinámica de un --- sismo.

En la termodinámica tenemos los conceptos físicos de calor y temperatura, el primero, como sabemos, se mide en calorías y el segundo en grados (centígrados, Fahrenheit, Kelvin, Réaumur, etc.), por lo que, podemos construir nuestra analogía entre las dos teorías, como sigue:

SISMOLOGÍA

Magnitud
Energía sísmica, medida en ergios.
Escala de Richter
Intensidad
Escala de Mercalli
Isosistas: líneas que unen puntos de igual intensidad.

TERMODINÁMICA

Calor
Energía térmica, medida en ergios.
Calorías
Temperatura
Termómetro centígrado
Isotermas: líneas que unen puntos de igual temperatura.

Como puede verse, es posible construir un modelo termodinámico de la Tierra, al que aplicándole una fuente de calor, se pueda estudiar su comportamiento, es en esta parte en donde se debe solicitar el auxilio de los matemáticos; para construir lo que usualmente se llama un "modelo matemático" de esta porción de la naturaleza.

Por muchos conceptos este modelo es incompleto, en primer lugar, porque contiene solamente los aspectos cuantitativos y geométricos de la naturaleza, y, además porque, como todos los modelos, es sólo una copia muy imperfecta y no la cosa real.

En la teoría de los modelos, los modelos existentes difieren en su grado de excelencia, son notoriamente exactos en ciertas partes de la física, pero, apenas empiezan a emerger, en forma tímida en la sismología.

Sin embargo, cualquiera que sea el valor del modelo, representa el comienzo de una teoría matemática. En nuestro caso, es ventajosa la analogía, porque desde luego, está más desarrollada la parte matemática de la termodinámica que la de la sismología.

En la propagación del calor por difusión, la cantidad de calor que pasa por la unidad de área a través de una superficie de un cuerpo cualquiera, en un punto P interior, está dado por una de las fórmulas de la termodinámica:

$$Q = -k \frac{dT}{dx}$$

Q = Cantidad de calor que pasa por el área A perpendicular a la dirección x, y medido en el sistema c.g.s. en calorías por segundo.

k = Constante para cada material, llamada constante de conductibilidad térmica o simplemente conductibilidad.

T = Temperatura en el punto P.

dx = Distancia entre la normal a la superficie.

$\frac{dT}{dx}$ = Gradiente de temperatura.

DISTANCIA EPICENTRAL. Los sismógrafos indican en sus diagramas, que un terremoto se propaga como una serie de ondas. Las ondas sísmicas son de tres tipos principales.

- 1.- Las ondas primarias P, que se transmiten por compresión y dilatación, y que viajan a velocidades entre 6 y 12 km/seg.
- 2.- Las ondas secundarias S, que son ondas de corte y alcanzan velocidades entre 4 y 6 km/seg., y que no atraviesan las zonas líquidas del planeta.
- 3.- Las ondas largas L, también llamadas ondas de Raleigh, que son las más lentas, pues viajan con velocidades inferiores a 4 km/seg.

Debido a sus diferentes velocidades y a sus diferentes rutas, los tres grupos de ondas llegan al sismógrafo en tiempos diferentes, como el intervalo entre la llegada de las ondas P y S aumenta proporcionalmente con la distancia, el tiempo:

$$t = (S - P)$$

puede emplearse para conocer la distancia al origen, o sea la distancia al epicentro.

Ejemplo:

Se desea conocer la distancia al epicentro de un temblor cuyo sismograma ha registrado una diferencia de tiempo, entre la llegada de las ondas P y las ondas S, de 24 segundos.

Tomamos la velocidad de las ondas P = 7 km/seg., y la velocidad de las ondas S = 4 km/seg., y si llamamos "x" la distancia epicentral tenemos:

$$\frac{x}{4} - \frac{x}{7} = 24$$

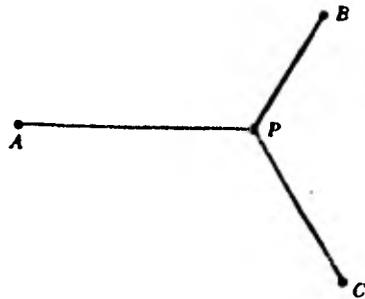
$$x = \frac{24 \times 7 \times 4}{(7 - 4)} = 224 \text{ km.}$$

Ahora, en el mapa se indica el modo de localizar el epicentro, con sismógrafos en tres estaciones. Las distancias se determinan por la diferencia del tiempo transcurrido entre la llegada de las ondas sísmicas primarias P, y las secundarias S, a la estación sismológica.

Este problema de la localización del epicentro de un sismo, tiene relación con el problema de Steiner. A principios del siglo XIX, Jacob Steiner, el famoso profesor de Geometría de la Universidad de Berlín, estudió un problema muy sencillo - pero sumamente instructivo. Tres aldeas, A, B, C, han de ser unidas por un sistema de carreteras de longitud total mínima.

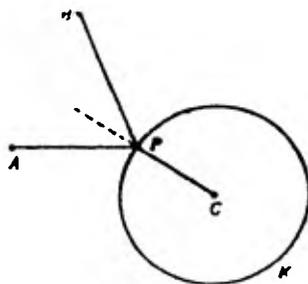
En términos matemáticos, el problema equivale a que se dan tres puntos A, B, C en el plano y se pide un cuarto punto P tal que la suma $(a + b + c)$ sea un mínimo, representando esas letras las distancias de P a A, B y C, respectivamente

La solución del problema es la siguiente: si en el triángulo ABC todos los ángulos son menores de 120° , P es el punto desde el cual cada uno de los tres lados AB, BC, CA subtende un ángulo de 120° . Sin embargo, si un ángulo de ABC, - p. ej., el C, es igual o mayor que 120° , el punto P coincide con el vértice C.



Es fácil obtener esta solución, utilizando los resultados relativos a valores extremos; aplicando el Teorema de Herón, - o de la propiedad extremal de los rayos luminosos. Supongamos que P es el punto buscado. Existen las siguientes posibili-

dades: o P coincide con uno de los vértices A, B, C , o es distinto de ellos. En el primer caso, es evidente que P debe ser el vértice del mayor ángulo C de ABC , puesto que la suma $(CA + CB)$ es menor que cualquier otra suma de otros dos lados del triángulo ABC .



Así pues, para completar la demostración, debemos considerar el segundo caso. Sea K una circunferencia de radio c y centro C . Entonces P debe ser un punto de K , tal que $(PA + PB)$ sea mínimo. Si A y B son exteriores a K , de acuerdo con el Teorema de Herón, PA y PB deben formar ángulos iguales con la circunferencia K , o sea, con el radio PC - que es perpendicular a K . Puesto que el mismo razonamiento se aplica a la posición de P y al círculo de radio " a " y centro A , resulta que los tres ángulos formados por PA, PB, PC son iguales, o sea, que cada uno vale 120° , como habíamos dicho.

En el razonamiento, se ha supuesto que A y B son exteriores a K , lo que queda aún por demostrar. Si al menos uno de los puntos A y B , P . ej., A se encuentra en K o fuera interior. Existe un análisis de todos los casos posibles en el libro: ¿QUÉ ES LA MATEMÁTICA? de Courant y Robbins



Empleamos las distancias calculadas como los radios de -- los círculos dibujados, con centro en las estaciones; con los primeros dos círculos determinamos dos puntos, y con el ter-- cero precisamos finalmente el sitio del epicentro. Es cierto, que este problema se resolvería con mayor propiedad en la --- geometría reimanniana, pero no se ha llegado a tanto adelan -- to en la sismología.

1.6 La falla de San Andrés se prolonga en diene de sie-- rra en el Golfo de California, donde encuentra la Placa de -- Cocos, se convierte en interfase de subducción y define la -- fosa del Pacífico. Allí se originan la mayor parte de los -- temblores que azotan a las Repúblicas de México y Guatemala, -- y que son muy frecuentes e intensos.

Dicen Beno Gutenberg y Charles F. Richter en "Seismicity- of the Earth", Princeton University Press:

"Tratándose de sismos someros, la sismicidad de la costa- del Pacífico, en la zona central de México, es la más alta -- del Hemisferio Occidental".

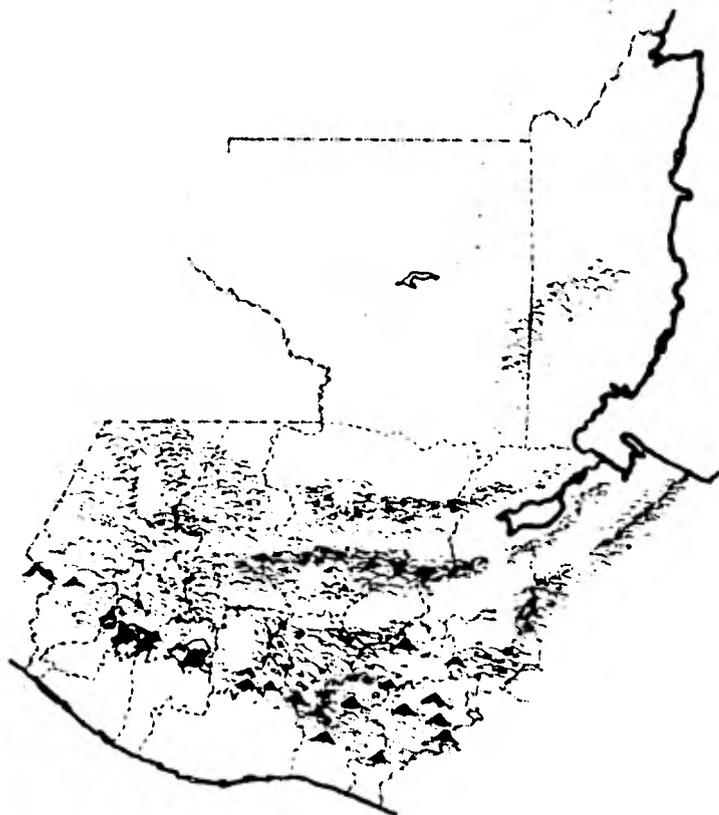
En el estudio de la tectónica de placas de la corteza terrestre, se ve que el encuentro de la Placa de Cocos produce una deformación en la corteza debida a la compresión, que -- lleva al desarrollo de un cinturón orogénico, a lo largo de -- las costas de Guatemala, dando origen a un gran número de -- volcanes. Allí, las lavas extrusionadas de dichos volcanes -- son más ricas en silicio que en basalto, y se cree que se pudieron haber formado por la fusión parcial de la placa oceánica que desciende y de su cubierta superior de sedimentos, a medida que alcanza profundidades de unos 150 kilómetros.

En tales lugares, la temperatura del manto rocoso es lo -- suficientemente alta, como para favorecer la fusión parcial. -- Por lo tanto, el fondo oceánico que baja se funde y en dicho -- proceso se origina una gran actividad volcánica.

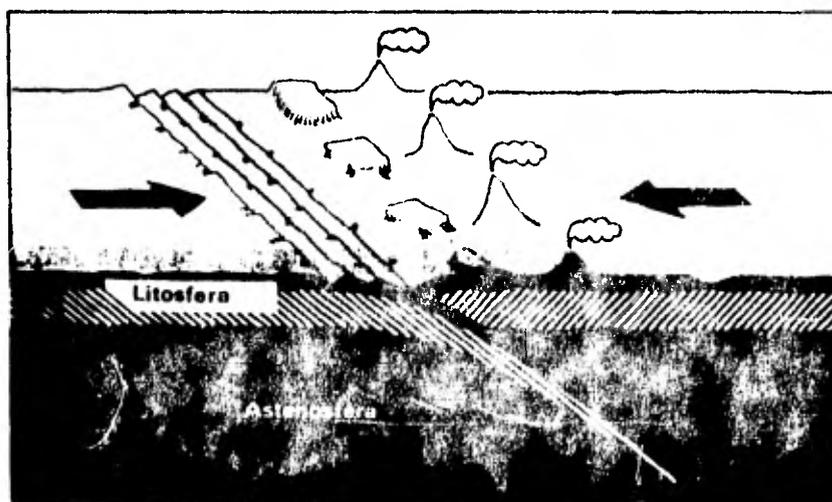
Estos fenómenos tectónicos son la causa de grandes daños -- en esta zona, afortunadamente en la República Mexicana no se -- han tenido que lamentar, hasta ahora, las enormes pérdidas de -- vidas humanas, como esta vez en Guatemala; basta recordar que -- en el sismo del 28 de Julio de 1957, el número de personas -- que perdieron la vida en la Ciudad de México fue de 54; y las -- pérdidas materiales fueron estimadas aproximadamente, en unos -- dos mil millones de pesos de esa época.

En el sismo del 28 de Agosto de 1973, las pérdidas de vi- -- das ascendieron a unas 600 aproximadamente, y es éste el tem- -- blor, del que se tienen noticias, que ha ocasionado más muer- -- tes en México, pero que sin embargo, la cifra es baja compa- -- rada con la de Guatemala.

En el aspecto de pérdidas de vidas debidas a un sismo, -- las cifras máximas las tiene China; el 23 de Febrero de 1556, -- en la provincia de Shensi murieron unas 830,000 personas y, -- más recientemente, el 27 de Julio de 1976, en el noroeste de -- China murieron 655,237 personas a causa de los sismos.

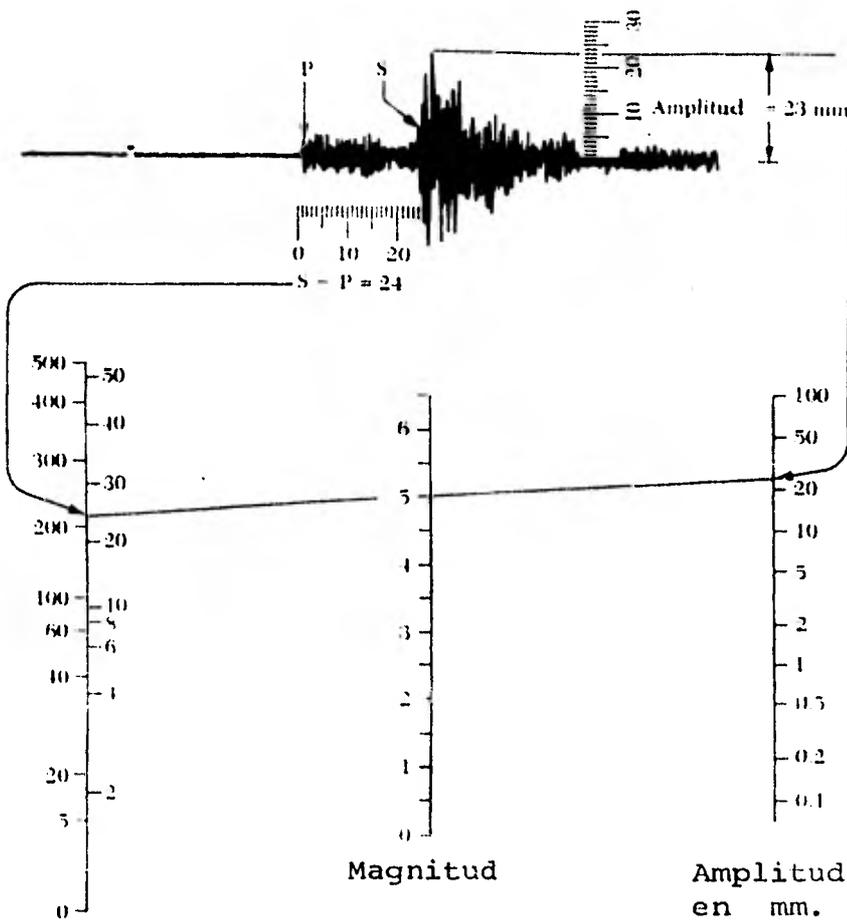


Aspecto físico del territorio de Guatemala, Orografía.



Sección de la corteza terrestre que muestra un margen de placa activa, con la litósfera oceánica hundiéndose bajo el continente, lo que produce un plano inclinado de actividad sísmica y un cinturón orogénico con actividad volcánica sobre el continente.

MAGNITUD DE RICHTER



Distancia (S - P)
 en Km. Tiempo
 en seg.

NOMOGRAMA DE PUNTOS ALINEADOS

1.7 Entre las muchas preguntas que nos planteamos al ver algunas bóvedas con serias cuarteaduras, en varios de los templos de las Ciudades de Guatemala y Antigua, estuvieron las siguientes:

¿Por qué la línea de ruptura de las bóvedas se encuentra, aproximadamente, en un círculo paralelo? y ¿Cómo se localiza su posición?

La respuesta a cada una de estas preguntas nos llevó al estudio de un problema muy interesante, que contiene la proposición que es el tema principal de esta tesis, la cual nos proponemos demostrar y que en su forma original era:

"LA LINEA DE RUPTURA DE LAS BÓVEDAS SEMIESFÉRICAS DE ESPESOR CONSTANTE, CONSTRUIDAS CON MATERIAL HOMOGÉNEO E ISOTRÓPO Y SUJETAS A SU PESO PROPIO, SE LOCALIZA EN EL PARALELO DE LA COLATITUD CUYO COSENO ES EL NÚMERO DE ORO".

Posteriormente le dimos otra forma, por los motivos que se verán más adelante.

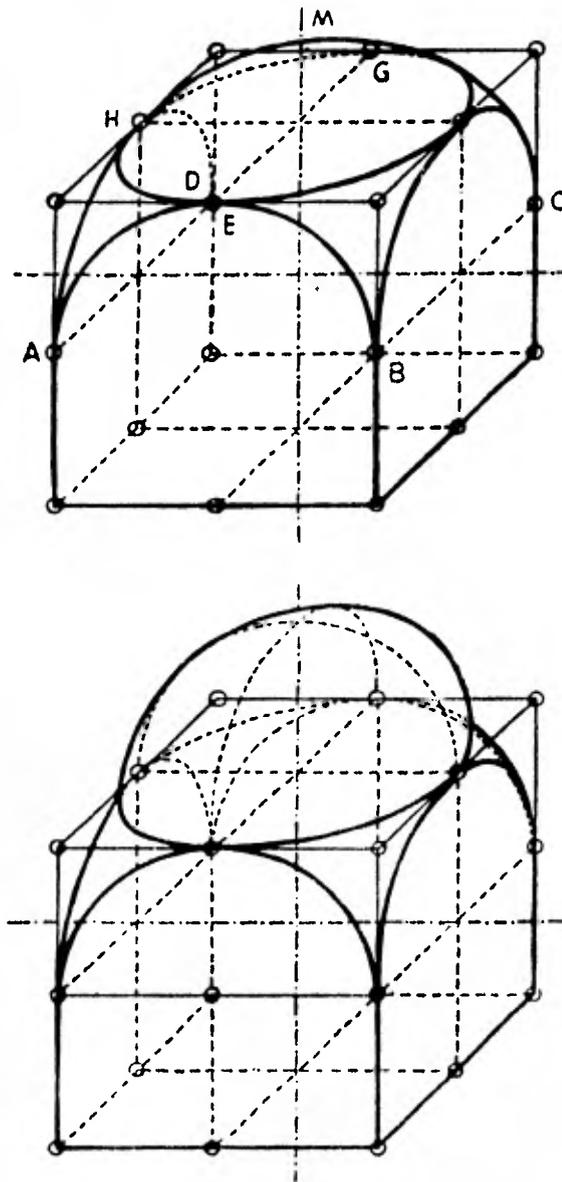
En la Historia de la Arquitectura, el empleo de las bóvedas se remonta hasta la Mesopotamia, de donde después, las tomó la arquitectura bizantina.

La arquitectura mesopotámica se divide para su estudio, en caldea y asiria, Ambas entre los ríos Tigris y Eufrates; las regiones bajas, en donde se desarrolló la arquitectura caldea, son tierras de aluvión, en donde sólo se podía contar, para llevar a cabo sus gigantescas construcciones, con la arcilla del suelo y el betún de sus ricos yacimientos, pues la carencia de piedra y de madera era absoluta; esta circunstancia, los obligó a resolver un problema muy importante para la geometría y la arquitectura de ese tiempo.

¿Cómo pasar de la planta cuadrada a la planta circular? Es decir, ¿Cómo cubrir un espacio cuadrado, sin contar con vigas de madera ni losas de piedra?

Y la solución fue la bóveda, así pues, la bóveda nació como una solución natural, para cubrir un espacio cuadrado, no contando sino con la arcilla del suelo y el calor del fuego del betún, que la transformaba en ladrillos o tabiques, los cuales, de acuerdo con el sistema constructivo empleado por los mesopotámicos, los iban colocando en hileras pegadas con argamasa, y así, se pasaba de la planta cuadrada a la planta circular, a través de las trompas y pechinas; y así, llegamos finalmente a la solución que hoy en día vemos en los apoyos de las cúpulas de nuestros templos.

Paso de la planta cuadrada a la planta circular por medio de pechinas.



Cúpula semiesférica apoyada sobre cuatro pechinas cubriendo una planta cuadrada.

En esta tesis mostramos nuestro total desacuerdo, con las expresiones lanzadas por algunos extremistas que quieren suprimir el estudio de la geometría sintética: "Abajo Euclides" y "Fuera Euclides". Tal paso sería trágico.

La geometría sintética es una parte esencial de las matemáticas, cuya base es la geometría euclidiana; además, la geometría proporciona la interpretación gráfica de la mayor parte del trabajo analítico. Los matemáticos piensan habitualmente en términos de imágenes, y la geometría no sólo --- proporciona imágenes, sino que, a veces, sugiere nuevos teoremas analíticos.

Existe la misma potencia vigorizante en el Euclides original, como en el Cervantes original; y, hay partes que son tan hermosas como en Horacio o Shakespeare; y, aún no se ha escuchado, de los modernos escritores de la literatura inglesa, la locura de: "Abajo Milton", el genial ciego que escribió su poema épico "El Paraíso Perdido", con sólo 8,000 palabras; y aún, en todas las obras de Shakespeare, no aparecen más de 15,000; no obstante que la lengua inglesa actual tenga cerca de 200,000; porque, lo verdaderamente genial estuvo en saber emplear las palabras en forma magistral en sus obras.

Porque, no podemos aceptar que el camino de la ciencia, -- lleve a la eliminación del espíritu.

Muchas de las proposiciones de los Elementos de Euclides pueden atribuirse a géometras anteriores, por ejemplo, (T.I.-47), es el conocido Teorema de Pitágoras, la teoría de las -- proporciones de Eudoxio del Libro V, etc.; pero es posible -- suponer que las que no se puedan adjudicar a otros, fueran -- descubiertas por él mismo, y su número es considerable. Respecto al orden, se puede asegurar que es, en gran parte, obra de Euclides.

Construyó un monumento tan maravilloso por su simetría, -- belleza y claridad internas como el Partenón, pero incomparablemente más complejo y duradero.

"La obra de Euclides permanecerá viva, mucho después de que los libros de texto de hoy se encuentren superados y olvidados. Es uno de los monumentos más nobles de la antigüedad

Sir Thomas L. Heath

I LA MEDIA Y EXTREMA RAZÓN

"La Geometría tiene dos grandes tesoros: uno es el Teorema de Pitágoras; el otro, la división en extrema y media razón.- El primero lo podemos considerar como una regla de oro; la -- segunda la podemos llamar una joya preciosa".

Juan Kepler.

He aquí la definición griega que aparece en Los Elementos de Euclides: D.VI.30.

Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεία
τετμηθεῖσθαι λέγεται, ὅταν ἡ ὥς
ἢ ὅλη πρὸς τὸ μείζον τμήμα,
οὕτως τὸ μείζον πρὸς τὸ ἔλατ-
τον.

Traducción:

"Se dice que una recta está dividida según extrema y media razón, cuando toda (la recta) es a la parte mayor como la mayor (es) a la menor.

I

α'.

1.1 DEFINICIONES.

Όροι.

D.I.1 "Punto es aquello que ya no tiene partes".

α'. Σημείον ἐστίν, οὐ μέρος οὐθέν.

D.I.2 "Línea es longitud y latitud".

β'. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.

D.I.3 "Extremos de líneas son puntos".

γ'. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεία.

D.I.4 "Línea recta es aquella que descansa según igualdad sobre sus puntos".

δ'. Εὐθεία γραμμὴ ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

D.I.5 "Superficie es lo que tiene solamente longitud y latitud".

ε'. Ἐπιφάνεια δὲ ἐστίν, ἧ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

D.I.6 "Extremos de superficies son rectas".

ς'. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.

D.I.7 "Superficie plana es aquella que descansa según igualdad sobre sus rectas".

ζ'. Ἐπίπεδος ἐπιφανεία ἐστίν. ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

D.I.8 "Ángulo plano es la inclinación de dos rectas que, en un plano, se tocan la una a la otra, y que no descansan las dos sobre una recta".

η'. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστίν ἢ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἀπιόμενων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσεις.

- D.I.9 "Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas, el ángulo se llama rectilíneo".
- θ'. *Όταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ᾤσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.*
- D.I.10 "Cuando una recta levantada sobre otra forma ángulos - contiguos iguales el uno al otro, cada uno de los dos ángulos iguales es recto, y la recta levantada se llama perpendicular con respecto a aquella sobre que está levantada
- D.I.11 "Ángulo obtuso es el ángulo mayor que el recto".
- D.I.12 "Agudo, el menor que el recto".
- D.I.13 "Límite es lo que sea extremo de algo".
- D.I.14 "Figura es lo comprendido por un límite o por varios".
- D.I.15 "Círculo es una figura plana circundada por una sola - línea, que se llama periferia, respecto de la cual -- las rectas que sobre ella inciden desde uno de los -- puntos colocados en el interior de la figura son i-- guales entre sí".
- D.I.16 "Tal punto se llama centro del círculo".
- D.I.17 "Diámetro del círculo es una recta cualquiera que se - haga pasar por el centro y cuyas dos partes tengan -- sus extremos en la periferia del círculo. Tal recta - corta el círculo en dos".
- D.I.18 "Semicírculo es la figura comprendida entre el diáme-- tro y la periferia recortada por el diámetro. Centro-- del semicírculo es el mismo que el del círculo".
- D.I.19 "Son figuras rectilíneas las comprendidas por rectas.- Triláteras, las comprendidas por tres; cuadriláteras, las por cuatro; multiláteras, las comprendidas por -- más de cuatro.
- D.I.20 "De entre las figuras triláteras, es triángulo equilá-- tero la que tenga tres lados iguales; isósceles, la - que tenga solamente dos lados iguales; escaleno, la- que tenga los tres lados desiguales".

D.I.21 "Además: entre las figuras triláteras, es triángulo -- rectángulo la que tenga un ángulo recto; obtusángulo, la que tenga un ángulo obtuso; acutángulo, la que --- tenga los tres ángulos agudos".

D.I.22 "De entre las figuras cuadriláteras, el cuadrado es -- figura equilátera y equiangular; el alterolátero es - equiangular, mas no **equilátera**; el rombo es equilátera, mas no rectangular; el romboide es la que tiene - los lados y los ángulos opuestos iguales, sin ser equilátero. Las restantes figuras cuadriláteras llá--- manse trapecios".

D.I.23 "Son rectas paralelas las que, estando en el mismo -- plano y prolongadas al infinito por ambas partes, por ninguna coinciden".



II

1.2 POSTULADOS.

*Αιτήματα.***Postúlase:**

- P.I "Trazar una línea recta de un punto cualquiera a otro - punto cualquiera".
- α' Ηιγίσθω από παντός σημείου επί πάν σημειον εύθειαν γραμμήν άγαγειν.*
- P.II "Prolongar por continuidad en línea recta una recta delimitada".
- β' Και πιπειρασμένην εύθειαν κατά τό συνεχές επ' εύθείας έκβαλειν.*
- P.III "Para cada centro y radio describir su círculo".
- γ' Και παντι κέντρω και διαστήματι κύκλον γράψισθαι.*
- P.IV "Que todos los ángulos rectos son iguales entre sí".
- δ' Και πασα, τας όρθας γωνίας ίσας άλληλαις είναι.*
- P.V "Que, si una recta incidente sobre dos rectas, hace ángulos internos y de la misma parte menores que dos rectos, prolongadas esas dos rectas al infinito coincidirán por la parte en que estén los ángulos menores que dos rectos".
- ε'. Και εάν εις δύο εύθείας εύθεια έμπίπτουσα τας έντός και επί τα αυτά μέρη γωνίας δύο όρθων έλάσσονας ποιῆ, έκβαλλομένης τας δύο εύθείας επ' άπειρον συμπιπτειν. έφ' α μέρη εισιν οι των δύο όρθων έλάσσονες*

III

1.3 NOCIONES COMUNES.

Κοιναι έννοιαι.

N.I "Cosas iguales a una y la misma son iguales entre sí".

α'. Τὰ τῶ αὐτῶ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

N.II "Y si a cosas iguales se añaden otras iguales, las totales son iguales".

β'. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῆ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

N.III "Y si a cosas iguales se quitan otras iguales, las --- restantes son iguales".

γ'. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῆ, τὰ καταλειπόμενά ἐστὶν ἴσα.

N.IV "Y si a cosas desiguales se añaden otras iguales, las totales son desiguales".

[δ'. Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῆ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἀνῖσα.

N.V "Y las cosas dobles que una y la misma son iguales entre sí".

ε'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν.

N.VI "Y las cosas mitades de una y la misma cosa son iguales entre sí".

ς'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν.]

N.VII "Y las cosas congruentes entre sí son iguales entre -- sí".

ξ'. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἀλλήλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν.

N.VIII "Y el todo es mayor que la parte".

η'. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μείζον [ἐστὶν].

N.IX "Y dos rectas no circundan región".

[θ'. Καὶ δύο εὐθεῖαι γωνίον οὐ περιέχουσιν.]

Las Nociones Comunes también se les llama Axiomas; del -- griego **ἀξίωμα**, = Verdad que por su evidencia no necesita demostración.

Derivado del adjetivo "ἄξιος, α, ον: digno, valioso, de esta misma raíz se deriva Axiología o parte de la Filosofía que trata de los valores.

Euclides, como hemos dicho los llama: **Κοινὰ ἔννοια.**

en sus "ELEMENTOS DE GEOMETRIA": **ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ α'.**



Fórmulas Lógicas empleadas implícitamente por Euclides, -
y que se ponen explícitamente.

i).- Inversión Lógica: L. I.

en la forma:

$(P \text{ implica } Q) \text{ implica } ((\text{no } Q) \text{ implica } (\text{no } P))$.

donde P y Q son proposiciones cualesquiera.

ii).- Reducción al absurdo o imposible: L. R.

en las formas:

$((\text{no } P) \text{ implica } P) \text{ implica } P$,

o bien:

$(P \text{ implica } (\text{no } P)) \text{ implica } (\text{no } P)$.

iii).- Silogismo relacional: Syll.R.

en la forma:

$((A = B) \& (B = C) \text{ implica } (A = C))$.

donde "&" es el signo de la operación lógica "y" o unión copulativa; "=" es el signo de la relación de igualdad.

iv).- Silogismo proposicional corriente: Syll.P.

en la forma:

$((P \text{ implica } Q) \& (Q \text{ implica } R)) \text{ implica } (P \text{ implica } R)$.

en donde "&" es el signo de la operación lógica "y" o unión copulativa.

v).- Modus Ponens.

Si es verdadera la proposición: $(P \text{ implica } Q)$ y se sabe, por hipótesis o por demostración, que la proposición P es verdadera, habrá que afirmar que lo es también la Q.

vi).- Indicación simbólica: L. S.

Se notará que el silogismo euclidiano no siempre presenta una forma perfecta, según el rigor lógico clásico.

vii).- Indicación simbólica: L. D.

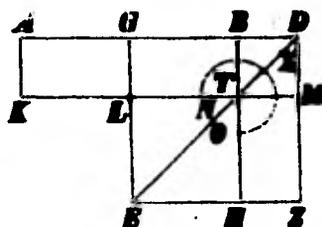
"Regla de sustitución": Euclides la emplea sobre todo bajo la fórmula: "y de parecida manera demostraremos", para indicar que en el proceso demostrativo hecho con ciertas magnitudes pueden sustituirse las otras que -- indica, y con todo, la estructura deductiva permanece la misma.

1.4 TEOREMA II.6 (Teorema Demostrativo).

"Si se divide una línea recta en dos y se le añade en --
recta otra recta cualquiera, el rectángulo comprendido por la
recta entera más la añadida y por la añadida, junto con el --
cuadrado de la línea mitad, es igual al cuadrado de la línea-
compuesta de la línea mitad y de la añadida".

HIPOTESIS: Córtese, pues, en dos por el punto G la recta AB y
añádasele en recta la recta BD.

TESIS : Digo que el rectángulo comprendido por las AD, DB-
junto con el cuadrado de la GB es igual al cuadra-
do de la GD.



DEMOSTRACIÓN: Constrúyase sobre la GD el cuadrado
GEZD. (T.I.46).
Y trácese la DE; (P.I.).
y por el punto B trácese la BH, paralela a cada
una de las EG, DZ y por el punto A trácese la AK
paralela a cada una de las GL, DM. (T.I.30 & 31).
Ahora bien, puesto que la AG es igual a la GB,
será también igual el AL con el GT. (T.I.36).
Más el GT es igual al TZ. (T.I.43).
luego también el AL es igual al TZ. (Syll.R. & N.I.).
Añádase el común GM; (D.I;P.I.).
el AM entero será, entonces, igual al gnomo NXO. (N.I.II.).
Mas el AM está comprendido por las AD, DB, porque
la DM es igual a DB. (D.II.1).
luego también el gnomo NXO será igual al rectángulo
comprendido por las AD, DB. (Syll.P.).
Añádase el común LH. (D.I.).
que es igual al cuadrado de BG (T.I.33;D.II.1).
luego el rectángulo comprendido por las AD, DB,
más el cuadrado de la GB es igual al gnomo
NXO y LH. (N.II.).
Mas el gnomo NXO y el LH entero hacen el cuadrado

GEZD.

(D.II.2;N.VIII).

que es el construído sobre el lado GD.
 luego el rectángulo comprendido por las AD,DB,
 más el cuadrado de GB es igual al cuadrado de
 la GD.

(Syll.P.).

Luego si se divide una línea recta en dos y se le añade en --
 recta otra recta cualquiera, el rectángulo comprendido por la
 recta entera más la añadida y por la añadida, junto el cua --
 drado de la línea mitad, es igual al cuadrado de la línea --
 compuesta por la línea mitad y por la añadida.

Quod erat Demonstrandum.

Este teorema corresponde a la expresión algebraica:

$$(2a + b)b + a^2 = (a + b)^2.$$

o también:

$$(c + d)(c - d) = c^2 - d^2.$$

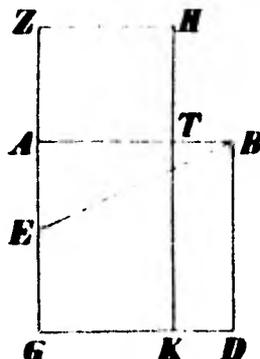


1.5 TEOREMA II.11 (Teorema Constructivo).

"Dividir una recta de modo que el rectángulo comprendido por la recta entera y por una de sus partes, sea igual al -- cuadrado de la parte restante".

HIPOTESIS: Sea AB la recta dada.

TESIS: Hay que dividir la recta AB, de manera que el rectángulo comprendido por la recta entera y por una de sus partes, sea igual al cuadrado de la parte restante.



DEMOSTRACIÓN: Constrúyase sobre la recta AB el cuadrado ABDG. (T.I.46).
 Y córtese la recta AG en dos partes iguales por el punto E. (T.I.10).
 y trácese la recta BE. (P.I.).
 y prolónguese la recta GA hasta el punto Z (P.II.).
 y hágase la recta EZ igual a la recta BE. (T.I.2).
 y descríbase sobre el lado AZ el cuadrado ZT. (T.I.46).
 y prolónguese la recta HT hasta el punto K. (P.II.).
 Digo que la recta AB está cortada por el punto T de manera que el rectángulo comprendido por los lados AB, BT es igual al cuadrado de lado AT (Tesis).
 Porque, puesto que la recta AG está cortada en dos por el punto E.
 y se le ha añadido la ZA.
 el rectángulo comprendido por los lados GZ, ZA, más el cuadrado del lado AE, será igual al cuadrado de lado EZ. (T.II.6).
 Mas el lado EZ es igual al EB.
 luego el comprendido por los lados GZ, ZA, más el cuadrado de lado AE son iguales al cuadrado de lado EB.
 Mas los cuadrados de BA, AE son iguales al cuadra- (Syll.P.).

do de lado AE son iguales al cuadrado da lado EB. (Syll.P.).
 Mas los cuadrados de BA,AE son iguales al cuadra- (T.I.47).
 do de EB, porque el ángulo en A es recto.
 luego el comprendido por los GZ,ZA más el cuadra- (Syll.P.).
 do AE es igual a los cuadrados de BA y de AE. (D.I.P.II.).
 Réstese el cuadrado común AE.
 luego el rectángulo restante, comprendido por (N.III.).
 los lados GZ y ZA es igual al cuadrado del AB.
 y el comprendido por los GZ,AZ es el ZK, por-
 que los lados AZ, ZH son iguales.
 Mas el cuadrado del AB es el AD.
 luego el cuadrado ZK es igual al AD. (Syll.P.).
 Réstese el AK común (D.I.).
 será, por lo tanto, igual al restante ZT con el (N.III.).
 TD.
 Por una parte, el TD es el comprendido por los
 lados AB,BT, porque el lado AB es igual al BD. (D.II.N.II.).
 por otra parte, el ZT es el cuadrado de AT.
 luego el rectángulo comprendido por los lados
 AB,BT es igual al cuadrado TA. (Syll.R.N.II.).

Por tanto: la recta dada AB queda dividida por el punto T de-
 manera que el rectángulo comprendido por los lados AB,BT es-
 igual al cuadrado del lado TA.

Quod erat demonstrandum = Q. E. D.

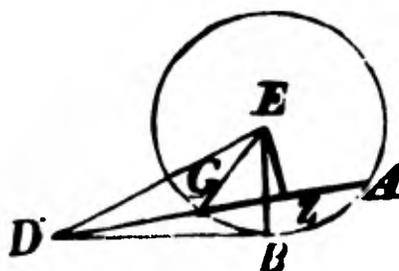
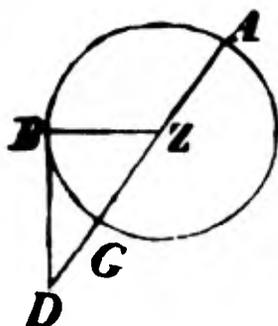


1.6 TEOREMA III.36 (teorema Demostrativo).

"Si se toma un punto fuera de un círculo y desde él se dirigen dos rectas hacia el círculo, y de las cuales una corta al círculo y la otra lo toca, (el rectángulo) comprendido por toda la secante y su parte exterior, tomada entre el punto y la periferia convexa será igual al cuadrado de la tangente".

HIPOTESIS: Tómese pues, un punto exterior D al círculo ABG y desde D diríjase al círculo ABG dos rectas, DGA, - DB, de las cuales la DGA corte al círculo y la DB lo toque.

TESIS : Digo que el rectángulo limitado por AD, DG es igual al cuadrado DB.

**DEMOSTRACIÓN:**

La recta DGA o pasa por el centro o no. (Excl.3o.).

Pase primero por el centro. (Hip.).

y sea Z el centro del círculo ABG, (T.III.1).

y trácese la ZB: (P.I).

luego el ángulo ZBD es recto. (T.III.18).

Y, por haber sido dividida la recta AG en dos partes iguales en Z, y habérsele añadido la GD, el (rectángulo limitado) por AD, DG con el (cuadrado) de ZG es igual al (cuadrado) de ZD; pero ZG es igual a ZB: (T.II.6).

luego el (rectángulo limitado) por AD, DG con el (cuadrado) de ZB es igual al cuadrado de ZD. (D.I.15).

Pero los (cuadrados) de ZB, BD son iguales al (cuadrado) de ZD. (Syll.P.).

luego el (rectángulo limitado) por AD, DG con el (cuadrado) de ZB es igual a los (cuadrados) de ZB, BD. (T.I.47).

de ZB, BD. (Syll.P.).

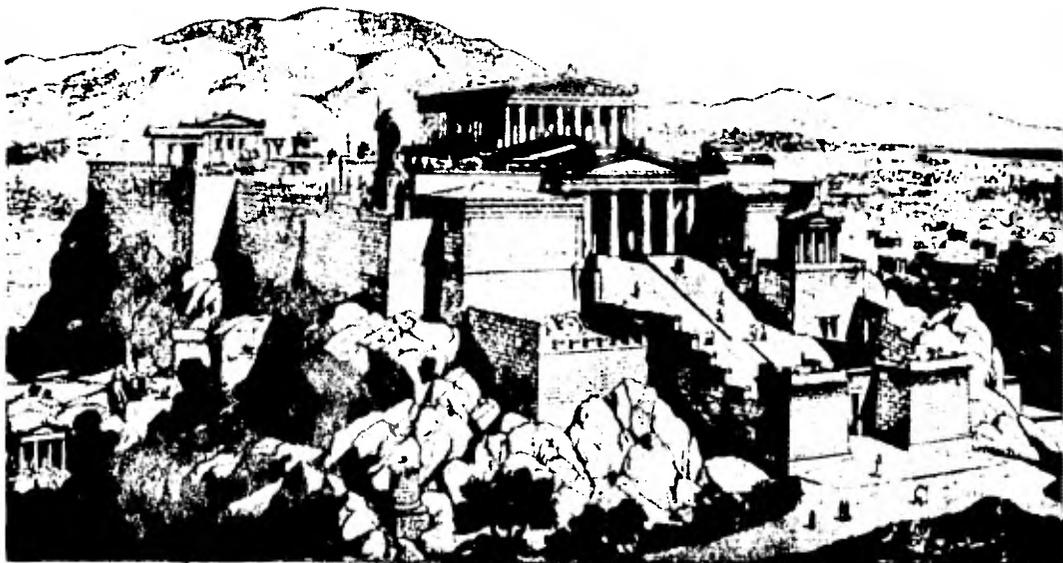
Quitese el (cuadrado) común de ZB: (N.III).
 luego lo restante: el (rectángulo limitado) por
 AD, DG es igual al (cuadrado) de la tangente DB. (N.III).
 Pero la recta DGA no pase por el centro del círculo ABG.
 (Hip.).
 y tómese el centro E, (T.III.1).
 y desde E trácese la perpendicular EZ, a la AG. (T.I.12).
 y constrúyanse las EB, EG, ED: luego es recto el
 ángulo EBD. (T.III.18).
 Y, porque una recta que pasa por el centro EZ
 divide a otra que no pasa por el centro AG en
 ángulos rectos y en dos partes iguales:
 luego AZ es igual a ZG. (T.III.3).
 Y, porque la recta AG ha sido dividida en dos
 partes iguales en el punto Z.
 el rectángulo limitado por AD, DG con el cua-
 drado de ZG es igual al cuadrado de ZD. (T.II.6).
 Añádase el cuadrado común de ZE. (N.III).
 luego el rectángulo limitado por AD, DG con
 los cuadrados de ZD, ZE. (N.III).
 pero el cuadrado de EG es igual a los cuadrados
 de ZG, ZE porque el ángulo EZG es recto. (T.I.47).
 y el cuadrado de ED es igual a los cuadrados de
 DZ, ZE (T.I.47).
 luego el rectángulo limitado por AD, DG con el
 cuadrado de EG es igual al cuadrado de ED. (Syll.P.).
 Pero EG es igual a EB. (D.I.15).
 Luego el rectángulo limitado por AD, DG con el
 cuadrado de EB es igual al cuadrado de ED. (Syll.P.).
 Pero los cuadrados de EB, BD son iguales al
 cuadrado de ED (T.I.47).
 porque el ángulo EBD es recto
 luego el rectángulo limitado por AD, DG con el
 cuadrado de EB, es igual a los cuadrados de EB,
 BD. (Syll.P.).
 Quitese el cuadrado común de EB. (N.III).
 luego el rectángulo restante limitado por AD,
 DG es igual al cuadrado de BD. (N.III).

Luego si se toma un punto fuera del círculo y desde él se di-
 rigen dos rectas hacia el círculo, y de las cuales una corta-
 al círculo y la otra lo toca, el rectángulo comprendido por -
 toda la secante y su parte exterior, tomada entre el punto y
 la periferia convexa, será igual al cuadrado de la tangente.

Quod erat demonstrandum.

Este problema tiene que ver con la llamada potencia de un punto, si desde un punto P exterior a una circunferencia, se trazan varias secantes, el producto de cada una por su parte externa es constante e igual al cuadrado de la tangente trazada desde dicho punto P.

A este producto constante se le llama potencia del punto con respecto a la circunferencia.

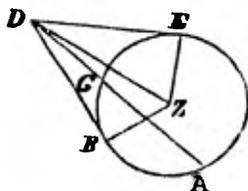


1.7 TEOREMA III.37 (Teorema Demostrativo)

"Si se toma un punto fuera del círculo y desde ese punto se trazan al círculo dos rectas, una de las cuales corta al círculo y la otra sólo lo toca, y el rectángulo limitado por toda la secante y por la parte exterior de la misma, entre el punto y la parte cóncava de la circunferencia, es igual al cuadrado de la que toca, la que toca es tangente al círculo".

HIPOTESIS: Tómese, pues, un punto D exterior al círculo ABG y desde el punto D trácense dos rectas DGA, DB y DGA corte al círculo y DB lo toque, y sea el rectángulo limitado por AD, DG igual al cuadrado de DG.

TESIS: Digo que DB es tangente al círculo ABG.

**DEMOSTRACIÓN:**

Trácense la tangente DE al círculo ABG, (T.III.17).
 y tómese el centro del círculo ABG, que sea Z (T.III.1).
 y trácense las ZE, ZB, ZD: (P.1).
 luego el ángulo ZED es recto. (T.III.18).
 y, porque DE toca al círculo ABG
 y DGA lo corta,
 el rectángulo limitado por AD, DG es igual al
 cuadrado de DE. (T.III.36).
 pero también el rectángulo limitado por AD, DG
 es igual al cuadrado de DB.
 luego los cuadrados de DE y DB son iguales; (Sy 11P.).
 luego DE es igual a DB. (N.III).
 Pero ZE también es igual a ZB. (D.15).
 luego las dos DE, EZ son iguales a las dos
 DE, BZ.
 y la base de los mismos es común ZD:
 luego el ángulo DEZ es igual al ángulo DBZ. (T.I.8).
 Pero JEZ es recto,
 luego también DBZ es recto. (Sy 11P.).
 y ZB prolongada es diámetro, (D.17).
 y la recta que se traza perpendicular en el
 extremo del diámetro es tangente al círculo: (T.III.16 cor.).

luego la DB es tangente al círculo ABG.
Análogamente se demostraría si el centro cayese
sobre la AG.

(L.S.).

Luego, si se toma un punto fuera del círculo y desde ese punto se trazan al círculo dos rectas, una de las cuales corta al círculo y la otra sólo lo toca, y el rectángulo limitado por toda la secante y por la parte exterior de la misma, - entre el punto y la recta cóncava de la circunferencia es igual al cuadrado de la que lo toca, la que toca es tangente - al círculo.

Quod erat demonstrandum.

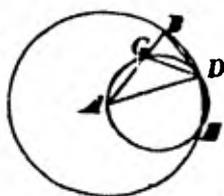


1.8 TEOREMA IV.10 (Teorema Constructivo).

"Construir un triángulo isósceles que tenga cada uno de los ángulos de la base doble del restante".

HIPOTESIS: Sea AB el lado del triángulo isósceles.

TESIS : Hay que construir un triángulo isósceles, que tenga cada uno de los ángulos de la base doble del restante.



DEMOSTRACIÓN: Póngase una recta AB, (P.I).
 y córtese en el punto G, de modo que el rectángulo limitado por las AB, BG sea igual al cuadrado de GA; (T.II.11).
 y con centro en A y radio AB trácese el círculo BDE, (P.III).
 y adáptese en el círculo BDE la recta BD igual a AG, que no es mayor que el diámetro del círculo BDE; (T.IV.1).
 y trácense las AD, DG, (P.I).
 y circunscríbase alrededor del triángulo AGD el círculo AGD. (T.IV.5).
 Y, por ser el rectángulo limitado por AB, BG igual al cuadrado de AG, y AG igual a BD, el rectángulo limitado por AB, BG es igual al cuadrado de BD. (Syll.P.).
 Y, por haberse tomado un punto B exterior al círculo AGD, y desde el B se acercan al círculo AGD dos rectas AB, BG, de las cuales una lo corta y otra lo toca, y el rectángulo limitado por AB, BG es igual al cuadrado de BD.
 la recta BD toca al círculo AGD. (T.III.37).
 Además, por ser BD tangente, y haberse trazado desde el punto de contacto D la DG, el ángulo BDG es igual al DAG puesto en el segmento opuesto del círculo. (T.III.32).
 Y, por ser BDG igual al DAG,

añádase el común GDA: (N.II).
de modo que el BDA completo es igual a los dos
GDA, DAG. (N.II).
Pero el exterior BGD es igual a los GDA, DAG: (T.I.32).
luego el BDA es igual al BGD. (Syll.P.).
Pero el BDA es igual al GBD, (T.I.5).
porque también el lado AD es igual al AB: (T.I.15).
de modo que el DBA es también igual al BGD. (T.I.5).
Luego los tres BDA, DBA, BGD son iguales en-
tre sí. (Syll.P.).
Y, por ser el ángulo DBG igual al BGD,
el lado BD es también igual al lado DG. (T.III.21).
Pero la BD se supone igual a la GA, (T.I.16).
luego la GA es igual a la GD: (Syll.P.).
de modo que también el ángulo GDA es igual al
ángulo DAG; (T.I.5).
luego los GDA, DAG son el doble del DAG. (N.V).
Pero el BGD es igual a los GDA, DAG:
luego el BGD es también doble del DAG. (Syll.P.).
Pero el BGD es igual a cada uno de los
BDA, DBA: (T.III.21).
luego cada uno de los BDA, DBA es doble del
DAB. (Syll.P.).

Luego se ha construido un triángulo isósceles ABD que --
tiene cada uno de los ángulos junto a la base DB doble del --
restante.

Q. E. F.

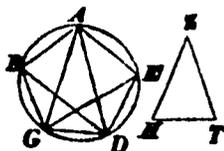


1.9 TEOREMA IV.11 (Teorema Constructivo).

"Inscribir un pentágono equiángulo y equilátero en un círculo dado".

HIPÓTESIS: Sea $ABGDE$ el círculo dado.

TESIS : Se debe inscribir en el círculo $ABGDE$ un pentágono equiángulo y equilátero.



DEMOSTRACION: Constrúyase el triángulo isósceles ZHT que tenga cada uno de los ángulos en H , T , --
doble del ángulo en Z .

(T.IV.10).

e inscribábase en el círculo $ABGDE$ el triángulo AGD equiángulo igual al ZHT ,

(T.IV.2).

de modo que el ángulo GAD sea igual al ángulo en Z , y cada uno de los ángulos en H , T iguales a cada uno de los AGD , GDA ,

y, por tanto, cada uno de los ángulos AGD , GDA es doble del GAD .

Divídase cada uno de los ángulos AGD , GDA en dos partes iguales con cada una de las rectas GE , DB , y trácense las AB , BG , DE , EA .

(T.I.9).

(P.I).

Por ser cada uno de los ángulos AGD , GDA el doble del GAD , y haber sido dividido en dos partes iguales por las rectas GE , DB , los cinco ángulos DAG , AGE , EGD , GDB , BDA son iguales entre sí.

Y los ángulos iguales comprenden arcos iguales: luego los cinco arcos AB , BG , GD , DE , EA son --
iguales entre sí.

(T.III.26).

(Syll.P.).

Pero las rectas iguales subtienden arcos iguales:

(T.III.29).

luego las cinco rectas AB , BG , GD , DE , EA son --
iguales entre sí;

(Syll.P.).

luego el pentágono $ABGDE$ es equilátero.

Digo que también es equiángulo.

(Tesis).

Por ser el arco AB igual al arco DE ,

y añadiendo el arco común BGD,
 todo el arco ABGD es igual al arco EDGB.
 Y el ángulo AED subtiende el arco ABGD.
 Y el ángulo BAE subtiende el arco EDGB:
 luego el ángulo AED es igual al BAE.
 Por la misma razón, cada uno de los ángulos
 ABG, BGD, GDE es igual a cada uno
 de los BAE, AED:
 luego el pentágono ABGDE es equiángulo.
 Pero se demostró que también era equilátero.

(N.II).
 (N.II).
 (Hipótesis).
 (Hipótesis).
 (T.III.27).

(L.S.).

Luego se ha inscrito alrededor de un círculo dado un pentágono equilátero y equiángulo.

Q. E. F.

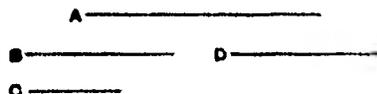


1.10 TEOREMA VI.17 (Teorema Demostrativo).

"Si tres líneas rectas son proporcionales, el rectángulo formado por los extremos es igual al cuadrado construido sobre el medio; y, si el rectángulo formado por los extremos es igual al cuadrado construido sobre el medio, los tres segmentos de recta son proporcionales".

HIPÓTESIS: Sean las tres líneas rectas A, B y C, que son proporcionales, esto es, A es a B como B es a C.

TESIS : Digo que el rectángulo formado por A, C es igual al cuadrado sobre B.



DEMOSTRACIÓN: Hágase D igual a B. (T.I.2).
 Entonces, A es a B como B es a C (D.V.8).
 y B es igual a D, (T.I.2).
 por lo tanto, A es a B como D es a C. (Syll.P.).
 Pero, si cuatro líneas rectas son proporcionales,
 el rectángulo formado por los extremos, es igual
 al rectángulo formado por los medios. (T.VI.16).
 Por consiguiente, el rectángulo A, C es igual al
 rectángulo B, D.
 Pero, el rectángulo B, D es igual al cuadrado
 sobre B, y B es igual a D;
 Por lo tanto, el rectángulo formado por A,C es
 igual al cuadrado sobre B. (N.I).
 Se sigue, que el rectángulo A,C es igual al cua-
 drado sobre B;
 Y, entonces yo digo que, A es a B como B es a C.
 Pero, con la misma construcción,
 como el rectángulo A,C es igual al cuadrado sobre
 B, mientras el cuadrado sobre B es igual al rec-
 tángulo B,D, pero B es igual a D,
 Por consiguiente, el rectángulo A,C es igual al
 rectángulo B,D.
 Pero, si el rectángulo formado por los extremos
 es igual al rectángulo formado por los medios,
 las cuatro líneas rectas son proporcionales. (T.VI.16).
 Por consiguiente, A es a B como D es a C. (T.VI.12).
 Pero, B es igual a D; (T.I.2).
 por lo tanto, A es a B como B es a C. (D.V.8).

Y, si el rectángulo formado por los extremos es igual al cuadrado construido sobre el medio, las tres líneas rectas -- son proporcionales.

Quod erat demonstrandum.

Comentario: (T.VI.17) es, por supuesto, un caso particular de (T.VI.16).



1.11 TEOREMA VI.30 (Teorema Constructivo).

"Dividir una recta finita dada, en extrema y media razón".

HIPÓTESIS: Sea AB la recta finita dada.

TESIS : Se requiere dividir AB en extrema y media razón. -

**DEMOSTRACIÓN:**

Constrúyase sobre AB el cuadrado BC. (T.I.46).

y ahora, aplíquese sobre AC el paralelogramo CD, igual al cuadrado BC y excedido por la -
figura AD, semejante a BC. (T.VI.29).

Como BC es un cuadrado,
entonces AD es también un cuadrado,
y por lo tanto, BC es igual a CD. (Syll.R.).

Substráigase CE de cada uno,
y la parte restante BF es igual a AD.

Pero son también equiangulares,
Por lo tanto, los lados BF, AD entre los án-
gulos iguales son recíprocamente proporcionales. (T.VI.14).

por consiguiente, FE es a ED como AE es a EB.

Pero, FE es igual a AB, y ED es igual a AE.

Por lo tanto, BA es a AE como AE es a EB.

Y, AB es mayor que AE.

Por lo tanto, la línea recta AB ha quedado dividida en -
extrema y media razón por el punto E, y el segmento mayor es-
AE.

Q. E. F.

La demostración de este teorema está relacionado con las-
tres clases de "aplicaciones" de superficies, conocidas ya --
por Pitágoras, y que Euclides trata en los teoremas: T.VI.27,
T.VI.28 y T.VI.29, y cuyos nombres se deben a Apolonio de --
Perga,

Las aplicaciones mencionadas son las siguientes:

PARÁBOLA = Aplicación.

(*παραβολή τῶν χωρίων*),

$$y^2 = px$$

Elipse = Aplicación por defecto.

(*ἔλλειψις*),

$$y^2 = px - (p/d)x^2$$

HIPERBOLA = Aplicación por exceso.

(*ὑπερβολή*),

$$y^2 = px + (p/d)x^2$$

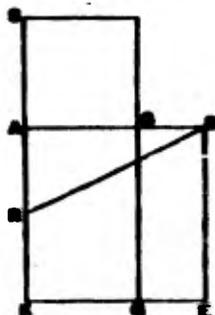


1.12 **TEOREMA XIII.1** (teorema Demostrativo).

"Si una línea recta está dividida en extrema y media razón, el cuadrado construido sobre el segmento mayor añadido a la mitad de la recta entera, es igual al quintuplo del cuadrado construido sobre la mitad de la recta entera".

HIPÓTESIS: Sea AB la línea recta dividida en extrema y media razón por el punto C, AC el segmento mayor; AS la prolongación en línea recta con KA, y sea AR la mitad de AB.

TESIS : Digo que el cuadrado construido sobre RS es el quintuplo del cuadrado sobre RA.

**DEMOSTRACIÓN:**

$$(\text{rect. KS,AS}) = (\text{cuad. AB}), \quad (\text{T.VI.30}).$$

añádase en ambos miembros el (cuad. AR) (N.II).

$$(\text{rect. KS,AS}) + (\text{cuad. AR}) = (\text{cuad. AB}) + (\text{cuad. AR}) \quad (\text{N.II}).$$

$$(\text{rect. KS,AS}) + (\text{cuad. AR}) = (\text{cuad. RS}), \quad (\text{T.II.11}).$$

$$(\text{cuad. AB}) + (\text{cuad. AR}) = (\text{cuad. RB}). \quad (\text{T.I.47}).$$

Pero RB es igual a RS, (T.I.2).

y AR es la mitad de AB, (T.I.10).

$$(\text{cuad. RS}) = (\text{cuad. AB}) + (\text{cuad. AR}), \quad (\text{N.I}).$$

$$(\text{cuad. RS}) = 4(\text{cuad. AR}) + (\text{cuad. AR}), \quad (\text{Syll.R.}).$$

$$(\text{cuad. RS}) = 5(\text{cuad. AR}).$$

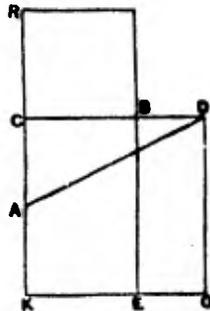
Quod erat demonstrandum.

1.13 TEOREMA XIII.2 (Teorema Demostrativo).

"Si el cuadrado construido sobre una línea recta es el --
quíntuplo del cuadrado sobre un segmento de la misma, y si el
doble de dicho segmento se divide en extrema y media razón, -
entonces el segmento mayor es la parte restante de la recta -
original".

HIPÓTESIS: Si el cuadrado sobre la línea recta AD es el quín-
tuplo del cuadrado sobre el segmento AC, y CD es -
el doble de AC.

TESIS : Digo que, cuando CD está dividida en extrema y me-
dia razón, CB es el segmento mayor.

**DEMOSTRACIÓN:**

Trazar por el punto C la recta AC, (T.I.2).
y en ángulo recto con CB; (T.I.11).
prolongar la recta AC hasta el punto R, (P.II).
de tal manera que CR sea igual a CB. (T.I.2).
Construir el cuadrado sobre CB, (T.I.46).
y además, construir el cuadrado sobre CD, (T.I.46).
Ahora, tenemos el hecho que:
(cuad. AR) = 5(cuad. AC), (Hipótesis).
pero: 5(cuad. AC) = (cuad. AC) + 4(cuad. AC) (Syll.R.).
5(cuad. AC) = (cuad. AC) + (cuad. CD). (T.I.47).
Por consiguiente, (cuad. AR) = (cuad. AD)
o AR = AD
Ahora,
(rect. KR, RC) + (cuad. AC) = (cuad. AR) (T.II.6).
= (cuad. AD),
= (cuad. AC) + (cuad. CD).
Por consiguiente:
(rect. KR, RC) = (cuad. CD),
esto es, (rect. RE) = (cuad. CG) (T.II.11).
Substrayendo la parte común: (rect. CE), (N.III).

y (rect. BG) = (cuad. RB), (T.II.11).
 o (rect. CD,DB) = (cuad. CB), (T.II.11).

por lo tanto, CB es el segmento mayor.

Quod erat demonstrandum.

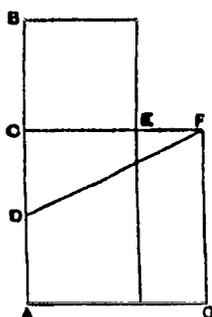


1.14 TEOREMA XIII.3 (Teorema Demostrativo).

"Si una línea recta está dividida en extrema y media razón, el cuadrado construido sobre el segmento menor añadido de la mitad del segmento mayor, es el quíntuplo del cuadrado construido sobre la mitad del segmento mayor".

HIPÓTESIS: Sea AB una línea recta dividida en extrema y media razón por el punto C, AC el segmento mayor y D el punto medio de AC.

TESIS : Digo que el cuadrado sobre BD es el quíntuplo del cuadrado sobre DC.



DEMOSTRACIÓN: Constrúyase el cuadrado CD, (T.I.46).
 constrúyase además, el cuadrado BE, (T.I.46).
 divídase la recta CF en extrema y media razón. (T.VI.30).

Entonces:

$$\begin{aligned} (\text{rect. AB,BC}) + (\text{cuad. CD}) &= (\text{cuad. DB}) && (\text{T.II.11}). \\ &= (\text{cuad. DF}), && (\text{Syll.R.}). \end{aligned}$$

$$(\text{cuad. DF}) = (\text{cuad. DC}) + (\text{cuad. CF}), \quad (\text{T.I.47}).$$

$$\text{pero DB es igual a DF,} \quad (\text{T.I.2}).$$

$$\begin{aligned} (\text{rect. AB,BC}) + (\text{cuad. CD}) &= (\text{cuad. DC}) + (\text{cuad. CF}), \\ &(\text{Syll.R.}). \end{aligned}$$

restando la parte común: (cuad. CD)

$$(\text{rect. AB,BC}) = (\text{cuad. CF}) \quad (\text{N.III}).$$

$$\text{como CF es igual a CA,} \quad (\text{T.I.2}).$$

$$(\text{rect. AB,BC}) = (\text{cuad. CA}) \quad (\text{Syll.R.}).$$

$$\text{y AB está dividida por C en extrema y media razón,} \quad (\text{T.VI.30}).$$

$$\text{y} \quad (\text{cuad. BD}) = (\text{cuad. DF}),$$

$$\quad (\text{cuad. BD}) = (\text{cuad. DC}) + (\text{cuad. CF}), \quad (\text{Syll.R.}).$$

y como D es el punto medio de AC, y AC es igual

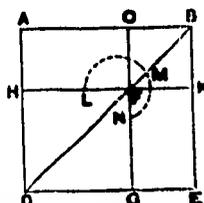
$$\text{a CF,} \quad (\text{cuad. BD}) = (\text{cuad. DC}) + 4(\text{cuad. DC}),$$

$$\text{y} \quad (\text{cuad. BD}) = 5(\text{cuad. DC}).$$

Quod erat demonstrandum.

1.15 TEOREMA. XIII. 4 (Teorema Demostrativo)

" Si una línea recta se divide en extrema y media razón el cuadrado sobre la recta entera y el cuadrado sobre el segmento menor juntos, son el triple del cuadrado construido sobre el segmento mayor".



HIPÓTESIS: Sea AB la línea recta dada, y dividida en extrema y media razón por el punto C, y sea AC el segmento mayor.

TESIS: Digo que los cuadrados sobre AB y BC son el triple del cuadrado sobre CA.

DEMOSTRACION:

$$(\text{cuad. AB}) + (\text{cuad. BC}) = 2 (\text{rect. AB, BC}) + (\text{cuad. AC}). \quad (\text{T. II 7}).$$

$$(\text{rect. AB, BC}) = (\text{cuad. AC}) \quad (\text{T. II. 11}).$$

$$2 (\text{cuad. AC}) + (\text{cuad. AC}) = 3 (\text{cuad. AC}) \quad (\text{N. I}).$$

$$(\text{cuad. AB}) + (\text{cuad. BC}) = 3 (\text{cuad. AC})$$

Q. E. D.

La forma algebraica del (T. II.7) es:

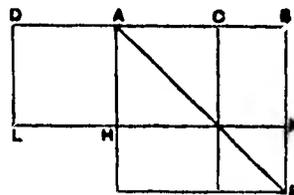
$$(a + b)^2 + a^2 = 2(a + b)a + b^2.$$

1.16 TEOREMA XIII.5 (Teorema Demostrativo).

"Si una línea recta está dividida en extrema y media razón, y se le añade una línea recta igual al segmento mayor, - la línea entera estará a su vez dividida en extrema y media razón, y la línea recta original es el segmento mayor".

HIPÓTESIS: Sea la línea recta AB dividida en extrema y media razón por el punto C, y sea AC el segmento mayor, - y AD igual a AC.

TESIS : Digo que la línea recta DB ha quedado dividida en extrema y media razón por el punto A, y la línea recta original AB es ahora el segmento mayor.



DEMOSTRACIÓN:

$$BA : AC = AC : CB,$$

$$AC : AB = CB : AC.$$

$$(AB + AC) : AB = (BC + CA) : AC,$$

$$DB : BA = BA : AD.$$

Quod erat demonstrandum.

1.17 TEOREMA XIII.6 (Teorema Demostrativo).

"Si una línea recta racional se divide en extrema y media razón, cada uno de los segmentos son líneas rectas irracionales llamadas apotemas".

HIPÓTESIS: Sea AB una línea recta racional, dividida en extrema y media razón por el punto C, y sea AC el segmento mayor.

TESIS : Digo que cada una de las líneas AC, CB son líneas rectas irracionales llamadas apotemas.

**DEMOSTRACIÓN:**

Prolonguemos la recta BA, (P.II).
 y tracemos la recta AD igual a la mitad de BA. (T.I.10).
 Como la línea recta AB está dividida en extrema y media razón, (T.VI.30).
 y el segmento mayor AC se añade al AD, que es la mitad de AB, entonces el cuadrado sobre CD es el quíntuplo del cuadrado sobre DA. (T.XIII.1).
 Por lo tanto, el cuadrado sobre CD tiene al cuadrado sobre DA, la misma relación de un número a otro número; y por consiguiente, el cuadrado sobre CD es conmensurable con el cuadrado sobre DA. (T.X.6).
 Pero el cuadrado sobre DA es racional, entonces DA es racional, porque es la mitad de AB que es racional; por lo tanto, el cuadrado sobre CD es también racional; (D.X.4).
 y por consiguiente CD es también racional.
 Y, como el cuadrado sobre CD no tiene al cuadrado sobre DA, la relación del cuadrado de un número al cuadrado de otro número, por lo tanto, CD es inconmensurable en longitud con DA; (T.X.9).
 y por consiguiente, CD, DA son líneas rectas conmensurables solamente al cuadrado;
 por lo tanto, AC es una apotema. (T.X.73).
 De nuevo, como AB está dividida en extrema y media razón,
 y AC es el segmento mayor,

por consiguiente, el rectángulo AB, BC es igual al cuadrado sobre AC . (D.VI.3 y T.VI.17).

Por lo tanto, si se aplica el cuadrado sobre la apotema AC , a la recta racional AB , se obtiene un ancho igual a BC .

Pero si se aplica el cuadrado sobre una apotema, a una línea recta racional, se obtiene como ancho una primera apotama; (T.X.97).

y, por consiguiente, CB es una primera apotema.

Y, se prueba también que CA es una apotema.

Por lo tanto, si una línea recta racional se divide en - extrema y media razón, cada uno de los segmentos es una lí -- nea recta irracional llamadas apotemas.

Quod erat demonstrandum.

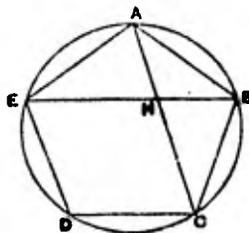


1.18 TEOREMA XIII.8 (Teorema Demostrativo).

"Si en un pentágono equilátero y equiángulo se trazan las diagonales desde dos vértices consecutivos, éstas se cortan entre sí en extrema y media razón, y sus segmentos mayores -- son iguales a los lados del pentágono".

HIPÓTESIS: Sea el pentágono ABCDE, equilátero y equiángulo, y las diagonales AC, BE trazadas desde dos vértices consecutivos, se cortan entre sí en el punto H.

TESIS : Digo que cada una se corta entre sí en extrema y media razón, y que los segmentos mayores son iguales a los lados del pentágono.



DEMOSTRACIÓN: Para probar este teorema tenemos que probar primero que: $(EH = EA)$ & $(EA = AB)$. (Syll.R.). Segundo que los triángulos AEP y HAB son semejantes.

Primero: $EB = AC$,
 y, $(\text{áng. } BAC = \text{áng. } ABE)$,
 por lo tanto, $(\text{áng. } AHE) = 2(\text{áng. } BAC)$,
 $(\text{áng. } AHE) = (\text{áng. } EAC)$,
 por lo que, $EH = EA$,
 y, $EH = AB$.

Segundo: En los triángulos AEB y HAB, tenemos:

$$\begin{aligned} (\text{áng. } BAH) &= (\text{áng. } EBA) \\ (\text{áng. } BAH) &= (\text{áng. } AEB), \end{aligned}$$

el ángulo ABE es común, por lo tanto, el tercer ángulo es igual,

$$\text{y } (\text{áng. } AHB) = (\text{áng. } EAB),$$

y los triángulos AEB y HAB son semejantes.

Ahora, como los triángulos son semejantes se tiene:

$$EB : BA = BA : BH,$$

$$\begin{aligned} \text{o } (\text{rect. } EB, BH) &= (\text{cuad. } BA), \\ (\text{rect. } EB, BH) &= (\text{cuad. } EH), \end{aligned}$$

de tal manera que, EB ha quedado dividida en extrema y media razón por el punto H. De igual manera, CA está dividida en extrema y media razón por el punto H.

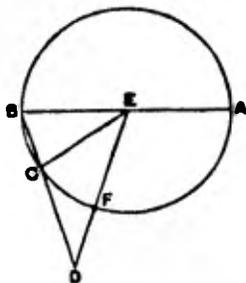
Q. E. D.

1.19 TEOREMA XIII.9 (Teorema Demostrativo).

"Si se suman los lados de un exágono y el de un decágono-
regulares e inscritos en el mismo círculo, la recta entera --
queda dividida en extrema y media razón, y el segmento mayor-
es el lado del exágono".

HIPÓTESIS: Sea ABC el círculo dado; de las figuras inscritas-
en el círculo ABC, sea BC el lado del decágono, CD
el del exágono, dibujados ambos en una línea rec-
ta;

TESIS : Digo que la recta entera BD queda dividida en ex-
trema y media razón, y CD es el segmento mayor.



DEMOSTRACION:

BC es el lado del decágono regular inscrito en el círculo; CD
es el lado del exágono regular inscrito en el mismo círculo,-
y, por lo tanto, igual al radio BE o EC.

Por consiguiente, para probar este teorema, solamente debemos
demostrar que los triángulos EBC y DBE son semejantes.
Como BC es el lado de un decágono regular,

	(arc. BCA) = 5(arc. BC),
de modo que:	(arc. CFA) = 4(arc. BC),
mientras que:	(áng. CEA) = 4(áng. BEC).
Pero	(áng. CEA) = 2(áng. ECB).
Por lo tanto,	(áng. ECB) = 2(áng. BEC).
Pero	CD = CE,
y	(áng. CDE) = (áng. CED),
de manera que	(áng. ECB) = 2(áng. CDE).
Se sigue de	(áng. ECB) = 2(áng. BEC),
que	(áng. BEC) = (áng. CDE).
Ahora, en los triángulos EBC y DBE,	(áng. BEC) = (áng. BDE),
y	(áng. EBC) es común,

por lo tanto, los triángulos EBC y DBE son semejantes;

y
$$DB : BE = EB : BC,$$

o
$$\begin{aligned} (\text{rect. } DB, BC) &= (\text{cuad. } EB), \\ (\text{rect. } DB, BC) &= (\text{cuad. } CD), \end{aligned}$$

y DB queda dividida en extrema y media razón.

Quod erat demonstrandum.

Para encontrar algebraicamente el lado del decágono regular en función del radio, si "x" es el lado requerido; tenemos:

$$(r + x)x = r^2.$$

y, por lo tanto,
$$x = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1).$$



Las dos construcciones del Libro XIII: (T.XIII.16) y ---- (T.XIII.17), del icosaedro y del dodecaedro, son interesantísimas y aprovecharemos sus principales propiedades para la -- demostración del Teorema de Aristeo, Ἀρισταῖος, que aparece en el llamado Libro XIV, escrito por Hypsicles, Ὑψικλῆς, quien vivió probablemente en el siglo II después de J. C. y -- que es autor de un trabajo astronómico: "DE ASCENSIONIBUS".

1.20

PROPOSICION 2 Y LEMA.

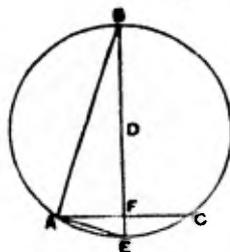
"El mismo círculo inscribe el pentágono del dodecaedro y el triángulo del icosaedro, inscritos en la misma esfera".

Esta proposición fue probada por Aristeo en su obra titulada: "COMPARACIÓN DE LAS CINCO FIGURAS". Aparece primero un lema, que es una proposición que hay que demostrar antes de -- establecer el teorema.

"Si un pentágono equilátero y equiángulo se inscribe -- en un círculo, la suma de los cuadrados sobre la recta que -- subtiende dos lados y sobre el lado del pentágono, es igual -- al quíntuplo del cuadrado del radio".

HIPÓTESIS: Sea ABCE el círculo, AB la recta que subtiende dos lados del pentágono, AC el lado del pentágono y DE el radio del círculo.

TESIS : Digo que: $AB^2 + AC^2 = 5DE^2$.



DEMOSTRACIÓN: $BE = 2DE$ (D.I.17).
Elevando al cuadrado ambos miembros

$$BE^2 = 4DE^2$$

$$BE^2 + DE^2 = 5DE^2 \quad (N.II).$$

$$BE^2 = BA^2 + AE^2. \quad (T.I.47).$$

$$BA^2 + AE^2 + DE^2 = 4DE^2 + DE^2 = 5DE^2. \quad (N.II).$$

Por lo tanto, $AE^2 + DE^2 = AC^2$. (T.XIII.10).
 $BA^2 + AC^2 = 5DE^2$.

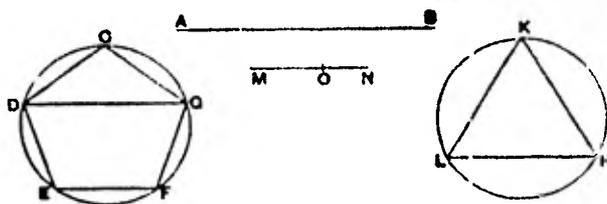
Quod erat demonstrandum.

1.21 EL TEOREMA DE ARISTEO. (Demostración)

"El mismo círculo circunscribe el pentágono del dodecaedro y el triángulo del icosaedro, inscritos en la misma esfera".

HIPÓTESIS: Sea AB el diámetro de la esfera en donde se deben inscribir un dodecaedro y un icosaedro.
 Sea CDEFG un pentágono del dodecaedro y KLM un triángulo del icosaedro.

TESIS : Digo que los radios de los círculos que los circunscriben son iguales.



DEMOSTRACIÓN:

Uniendo DG; DG es el lado del cubo inscrito en la esfera.

(T.XIII.17).

$$AB^2 = 3DG^2.$$

(T.XIII.15).

Tómese una línea recta MN tal que:

$$AB^2 = 5MN^2.$$

Ahora, el cuadrado del diámetro de la esfera es el quintuplo del cuadrado del radio del círculo en el cual se inscribe el icosaedro. Por lo tanto, MN es igual al radio del círculo que pasa por los cinco vértices del

(T.XIII.16).

icosaedro, los cuales forman un pentágono.

(T.XIII.16).

Córtese MN en extrema y media - razón por el punto O, y sea MO- el segmento mayor.

(T.III.9 y 5 , inversos).

$$MO : MN = CG : DG.$$

$$MO^2 : MN^2 = CG^2 : DG^2.$$

$$(MO^2 + MN^2) : MN^2 = (CG^2 + DG^2) : DG^2.$$

$$5 (MO^2 + MN^2) : 5MN^2 = 3 (CG^2 + DG^2) : 3DG^2.$$

$$MO^2 + MN^2 = HK^2.$$

$$5MO^2 + 5MN^2 = 5KL^2$$

(T.XIII.16).

El lado del pentágono base de los triángulos del icosaedro, es igual al lado de los triángulos .

$$5HK^2 = 5(3R_i)$$

(T.XIII.12).

$$(CG^2 + DG^2) = 5FC^2.$$

(Lema).

$$3 (CG^2 + DG^2) = 3(5R_d^2)$$

$$\frac{5 (3R_i)}{5 MN^2} = \frac{3(5R_d^2)}{3DG^2}$$

$$\frac{R_i^2}{R^2} = \frac{(5MN^2)}{(3DG^2)} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1$$

$$R_i^2 = R_d^2$$

De donde,

$$R_{\text{icosaedro}} = R_{\text{dodecaedro}}$$

Quod erat demonstrandum.

1.22

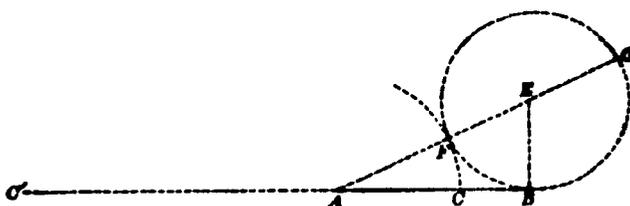
TEOREMA CONSTRUCTIVO.

Definición: Una línea recta está dividida armónicamente, cuando está dividida interior y exteriormente en la misma razón.

"Dividir armónicamente una línea recta dada".

HIPÓTESIS: Sea AB la recta dada.

TESIS : Se requiere encontrar los puntos C y C', que dividan la recta AB, interior y exteriormente en la misma razón.



DEMOSTRACIÓN:

Trácese por el punto B la perpendicular, (T.I.11).
sobre la perpendicular trazar la recta BE,
mitad de AB. (T.I.10).

Haciendo centro en el punto E, trácese
una circunferencia de radio EB. (P.III).

Trácese la secante AFEG. (P.II).

Hágase $AC = AF$, (T.I.2).

prolónguese BA. (P.II).

Hágase $AC' = AG$. (T.I.2).

Constrúyanse

$$AG : AB = AB : AF \quad (T.III.36).$$

$$AG - AB \text{ y } AB - AF \quad (T.I.3).$$

$$(AG - AB) : AB = (AB - AF) : AF ;$$

$$(AG - FG) : AB = (AB - AC) : AC ;$$

$$AC : AB = CB : AC ;$$

$$AB : AC = AC : CB ;$$

Quod erat demonstrandum.

$$\begin{aligned}
 AG : AB &= AB : AF ; \\
 AB : AG &= AF : AB ; \\
 (AB + AG) : AG &= (AF + AB) : AB ; \\
 (AB + AC') : AC' &= (AF + FG) : AB ; \\
 C'B : AC' &= AC' : AB ; \\
 AB : AC' &= AC' : C'B .
 \end{aligned}$$

Y la recta AB ha quedado dividida armónicamente en media-
y extrema razón por los puntos C y C'.

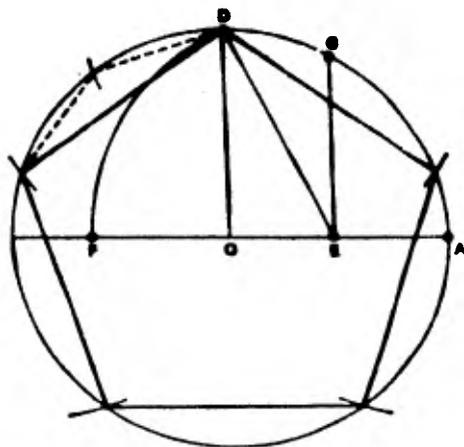
Quod erat demonstrandum.

La doble solución en la división armónica de la recta AB
corresponde al doble signo del radical en la solución:



1.23 CONSTRUCCIÓN DEL PENTÁGONO REGULAR.

Alberto Durero, nos da también una construcción teórica--mente exacta para trazar un pentágono regular, está tomada de la obra de Ptolomeo sobre la astronomía, que se conoce con el nombre del Almagesto.



Por el punto O y con un radio OA, trazar el círculo. (P.III).

Dividir la recta OA en dos partes iguales. (T.I.10).

Por el punto O trazar la perpendicular a la recta OA. (T.I.11).

Por el punto D, donde la perpendicular por O corta a la circunferencia, trazar el segmento de recta DE. (P.I).

Trazar la recta EF igual a la ED. (T.I.2).

OF es el lado del decágono regular inscrito en el círculo. (T.IV.10).

El lado del pentágono regular, el del exágono y el del decágono, también regulares e inscritos en el mismo círculo cumplen el Teorema de Pitágoras, es decir:

$$FD^2 = FO^2 + OD^2. \quad (T.XIII.10).$$

FD es el lado del pentágono inscrito en el círculo de radio - OA.

Q. E. F.

Al libro titulado "Sintaxis Matemática"

Μαθηματικῆς Συντάξεως βιβλία ιγ,

Se le llamó a menudo "Megale Sintaxis" ("La Gran Colección"), e inclusive "Magiste Sintaxis" ("La Grandísima Colección").

ἡ μεγίστη),

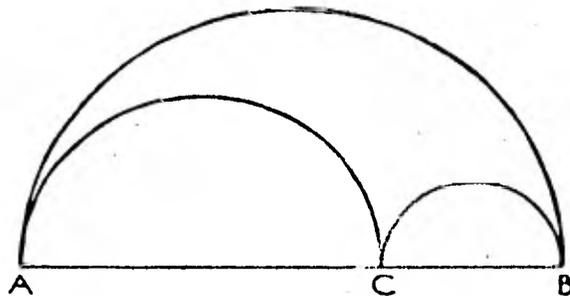
De la importancia de la tradición árabe es símbolo el título: **EL ALMAGESTO**, que es la obra más importante de Ptolomeo y que consta de trece libros.

1.24 LA ARBELOS O CUCHILLA DEL ZAPATERO.

Esta famosa figura geométrica que, según se cree, fue estudiada por vez primera por Arquímedes y que es conocida como "la arbelos"

En griego significa "la cuchilla del zapatero", pues recuerda la forma de la hoja de una cuchilla utilizada por los remendones de la antigüedad.

ἄρβηλος.



Se trata de la región limitada por los semicírculos de -- diámetros AB, AC y CB. C puede ser cualquiera de los puntos -- de AB, pero si C divide a AB en la razón áurea, se verifican -- muchas propiedades sorprendentes que Bankoff analiza en su -- artículo "The Golden Arbelos". (Scripta Mathematica, vol. 21. No. 1, March, 1955, pp. 70-76.

1.25

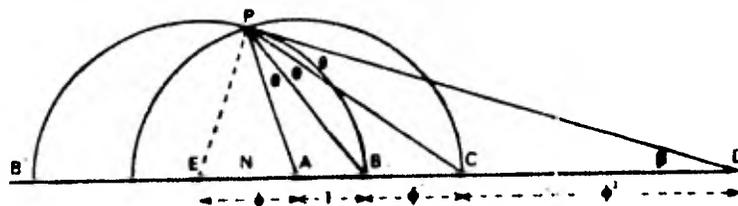
LA TRISECCIÓN DE UN ÁNGULO.

La trisección de un ángulo cualquiera, fue uno de los -- tres problemas clásicos que los griegos no pudieron resolver con la regla y el compás; los otros dos fueron: la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo.

Pues bien, podemos plantearnos el siguiente problema: Demostrar que las trisección de un ángulo 3θ dividen a un -- segmento de recta, en tres segmentos de longitudes iguales a tres números de la sucesión de Fibonacci, U_n, U_{n+1}, U_{n+3} .

Cuando "n" tiende al infinito: $\lim \frac{U_{n+1}}{U_n} \rightarrow \phi$

$$\text{y } \lim \frac{U_{n+3}}{U_n} \rightarrow \phi^3$$



Trazando la figura en la que :

$$AB = 1, \quad BC = \phi, \quad CD = \phi^3 = (2\phi + 1).$$

Elegimos on punto P tal que:

$$(\text{áng. APB}) = (\text{áng. BPC}) = (\text{áng. CPD}) = \theta.$$

PB es la bisectriz del (áng. APC); entonces se tiene que, -- por un bien conocido teorema de la geometría elemental, el lugar geométrico de los puntos "P" tales que:

$$PC : PA = BC : BA = \phi : 1.$$

es una circunferencia que tiene BB' como diámetro, entonces B' divide externamente a AC , en la misma razón en que B -- la divide internamente. Es fácil probar que E es el centro de esta circunferencia de radio:

$$EB = \phi + 1 = AC.$$

De nuevo, como PC es la bisectriz del (áng. BPD), el lugar geométrico de los puntos P que cumplen la condición:

$$PD : PB = CD : CB = \phi^3 : \phi = (\phi + 1) : 1$$

es una circunferencia de radio $(\phi + 1)$ y centro en el punto A, que pasa por C.

Entonces: $AC = (\phi + 1)$

Estas dos circunferencias de radios iguales a $(\phi + 1)$, se intersecan arriba de la línea B'D en el punto P. Este punto P es el punto buscado. (Las dos circunferencias se cortan también en otro punto P' por abajo de la línea B'D, y el segmento de recta PP' es parte del eje radical de las dos circunferencias).

De la figura se obtiene que el.

$$\cos PAE = \frac{\phi}{2(\phi + 1)} \quad (\text{T. XII.9})$$

o sea que

$$\text{áng PAE} = 72^\circ$$

como

$$CP^2 = PN^2 + NC^2. \quad (\text{T. I.47}).$$

$$CP = CE = CD = (2\phi + 1) = \phi^3$$

$$y \quad (\text{áng. PAE}) = (\text{áng. APD}) + (\text{áng. APD}) \quad (\text{T. I.16}).$$

$$3\theta + \theta = 4\theta = (\text{áng. PAE}).$$

Por lo tanto: $\theta = 18^\circ$.

con lo que se obtiene la trisección de un ángulo $3\theta = 54^\circ$.



II

EL PRINCIPIO DE LA MÍNIMA ACCIÓN.

La mínima acción estudiada por Maupertius y por Leibniz, -- para quienes estos principios de máximos y mínimos tuvieron -- una significación fundamental filosófica y teológica.

Dios, creó el mejor de los mundos posibles, y en medio de una armonía preestablecida, realizó lo máximo con los medios-mínimos y resolvió cada problema de la manera más ahorrativa-**posible**, como el arquitecto perfecto del universo.

Es verdad, que más tarde, se ha puesto de manifiesto que a **todos** estos principios extremales, corresponden sistemas de ecuaciones diferenciales equivalentes, las ecuaciones llamadas de Lagrange, que de suyo no comportan ningún carácter -- teológico.

Uno de los principios más generales que gobiernan los estados de equilibrio, es el criterio de Dirichlet, tomado de -- la mecánica racional:

"Para que el equilibrio de un sistema cerrado sea estable -- basta que su energía potencial pase por un mínimo".

Un principio más general que el criterio de Dirichlet, es el de Poincaré y Planck, que no sólo no ha sido desmentido -- por la física einsteniana, sino que permanece consagrado bajo el nombre de "principio de acción estacionaria", como ley -- dominante, y relación invariable por excelencia del universo físico.

Es el "principio de la mínima acción", cuyo enunciado clásico es el siguiente:

"Para pasar en el intervalo de tiempo $(t_1 - t_0)$ de un estado a otro, un sistema de cuerpos debe tomar un camino tal -- que el valor medio de la "acción" (diferencia entre las energías cinética y potencial del sistema), durante el tiempo-considerado, sea lo más pequeño posible".

Su expresión analítica más sencilla es:

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta(E_c - E_p)] \cdot dt = 0.$$

Una función toma el valor mínimo o máximo, cuando se anula su incremento diferencial, lo que también se escribe así:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (E_c - E_p) \cdot dt = 0.$$

Es muy natural que los matemáticos se interesen por cuestiones de este tipo. En la vida diaria se presentan constantemente problemas de máximos y mínimos, de lo "óptimo" y lo "pésimo". Muchas cuestiones de importancia práctica se plantearon de este modo; por ejemplo: ¿qué forma ha de tener una nave para presentar una resistencia mínima al agua? ¿Cuál ha de ser la forma del ala de un avión para presentar la mínima resistencia al aire?

Habiéndose iniciado en el siglo XVII, la teoría general de los valores extremos - máximos y mínimos - se ha convertido en uno de los principios sistemáticos integrantes de la ciencia. Los primeros pasos de Pedro de Fermat en su cálculo diferencial, estuvieron animados por el deseo de estudiar las cuestiones de máximos y mínimos por medio de métodos generales.

En el siglo siguiente, se amplió el campo de aplicación de estos métodos mediante la invención del cálculo de variaciones. Era cada vez más evidente que las leyes físicas de la Naturaleza encontraban su expresión más adecuada en el principio de mínimo, el cual proporciona un acceso natural a una solución más o menos completa de problemas particulares.

Una de las realizaciones más notables de la matemática contemporánea es la teoría de los valores estacionarios, generalización del concepto de valores extremos, que combina el análisis con la topología.

Algunas propiedades de máximo y mínimo eran ya conocidas de los griegos, aunque a menudo se enunciaban los resultados sin un serio intento de dar la demostración.

Por ejemplo: Un segmento rectilíneo es la línea más corta entre dos puntos. Un arco de círculo máximo es la curva más corta que une dos puntos de una superficie esférica. Entre todas las curvas planas cerradas y de la misma longitud, la circunferencia encierra el área mayor; entre todas las superficies cerradas de igual área, la esfera encierra el mayor volumen.

Los principios enunciados anteriormente, son leyes muy generales de la mecánica racional, en la teoría de las estructuras los podemos visualizar, si recordamos el Principio de Castigliano del "trabajo mínimo de deformación".

Según dicho principio: "En un sistema elástico, estáticamente indeterminado, de todos los estados de fuerza internos,

que cumplen con las condiciones de equilibrio, cumple también con las condiciones de deformación, aquél que hace mínimo el trabajo de deformación acumulado en el sistema".

Haremos también uso de las siguientes hipótesis fundamentales, en las que se basa la teoría de las estructuras:

- i).- Principio de superposición: "Se pueden sumar efectos debidos a distintas causas, que actúan en instantes diferentes".
- ii).- Hipótesis de Bernouilli Navier: "Las secciones planas y perpendiculares a la fibra neutra antes de la deformación, permanecen planas y perpendiculares a la fibra neutra después de la deformación".
- iii).- Ley de Hooke: "En un cuerpo perfectamente elástico, -- los esfuerzos varían en forma lineal con las deformaciones".



HOOKE

2.1 CUBIERTAS LAMINARES O CASCARONES.

Necesitamos en primer lugar, una definición del concepto de cascarón. Esto resulta sumamente importante, porque en arquitectura se da el nombre de cascarón a algo muy diferente de lo que se conoce con esa denominación en la vida diaria.

Los elementos constructivos utilizados en la mayoría de las estructuras son barras; éstas se caracterizan por la diferencia de sus dimensiones en dos direcciones, es decir, las de la sección transversal son pequeñas con respecto a la de la tercera dirección, o sea con la longitud del eje. En correspondencia con esto, también llamaremos a las barras vigas planas o piezas elásticas unidimensionales.

Junto con las vigas, se encuentran las estructuras por tanto superficiales bidimensionales, de las cuales hablamos cuando la dimensión en una dirección perpendicular a una superficie es pequeña frente a la extensión de esta superficie.

Si la superficie es un plano, la consideraremos placa o lámina. En cambio, si la superficie tiene una curvatura diferente de cero, es un cascarón. Por consiguiente, un cascarón es una estructura portante superficial, con curvaturas diferentes de cero.

Los cascarones se utilizan en la arquitectura, principalmente para la construcción de cúpulas, bóvedas, navas y depósitos. Desde la cúpula de la Catedral de San Pedro en Roma, hasta las cubiertas de los planetarios construidos en los últimos años, se pueden denominar cascarones.

Casi todos los depósitos, como tanques para agua, aceites - gasolina y los silos para contener granos, etc., se pueden considerar como construcciones laminares.

El término cascarón se aplica normalmente a construcciones laminares, para las cuales:

$$(R/t)_{\text{mín.}}$$

sea mayor de 20; y, prácticamente todas las cubiertas laminares que se construyen hoy en día, tienen relaciones altas, como 1,000 o más.

Técnicamente es mejor emplear los radios de curvatura mínimos, en las construcciones con cubiertas laminares.

Se presenta a continuación, ejemplos comparativos de cascarones.

La tabla siguiente expresa algunas características notables de cuatro cubiertas laminares:

T A B L A .

	Claro L (m)	Espesor t (cm)	L/t
San Pedro, en Roma.	40	300	13
Huevo de gallina.	0.04	0.04	100
Mercado de Smithfield.	68	7.5	900
Cúpula Schott en Jena.	40	6	667

Un resultado muy conocido de la teoría de los arcos planos, dice que: sólo es posible el equilibrio sin flexión, si el eje del arco tiene una forma determinada, que depende de las cargas. A esta forma especial, la llamamos línea de presiones para la carga correspondiente.

La teoría de la línea de presiones para arcos macizos con gran peso propio, es de considerable importancia. Si, en ese caso, se le da la forma al eje del arco según la línea de presiones, para un valor medio de las diferentes cargas que entran en consideración, se obtiene entonces un aprovechamiento máximo del material; ya que entonces el arco, en general, no necesita soportar momentos flexionantes.

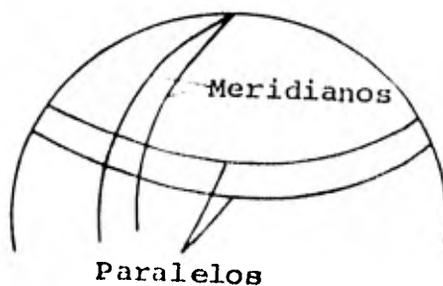
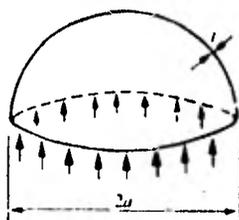
Si un arco y un cascarón se comportan en forma parecida, aunque este parecido no sea más que básico, entonces las conclusiones obtenidas significan que, para cada elemento de cascarón, en la teoría de la membrana, en la que sólo se aceptan esfuerzos de tracción y de compresión simples; las condiciones de equilibrio pueden cumplirse solamente con una forma determinada de la superficie media; si la carga es dada y si está dada la superficie media, sólo con una determinada forma de carga. El lugar de la línea de presiones lo ocuparía ahora la "superficie de presiones".

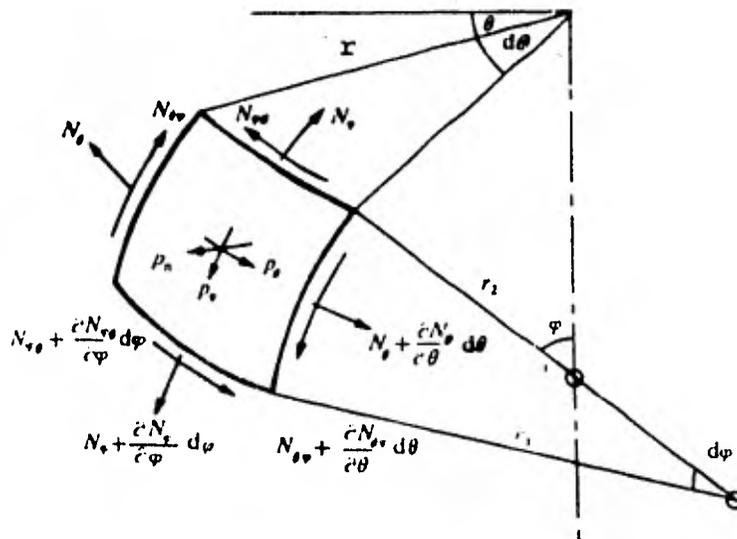
La teoría de la membrana sólo sería aplicable en casos -- muy especiales, ya que, como hemos dicho, se basa en la no -- consideración de las fuerzas cortantes, los momentos flexio-- nantes y los momentos de torsión.

2.2 EQUILIBRIO DEL ELEMENTO DE CASCARÓN.

Queremos estudiar el equilibrio de un elemento aislado -- del cascarón, cuando sólo actúan las fuerzas de la teoría de la membrana. Cortamos dicho elemento mediante secciones per-- pendiculares a la superficie media, a lo largo de dos meri-- dianos y dos paralelos vecinos, similares a las coordenadas -- geográficas en la superficie terrestre.

Las fuerzas normales que actúan en los bordes, resultan -- simplemente de multiplicar los esfuerzos normales por las -- longitudes de los lados correspondientes.





$$ds_{\phi} = r_1 d\phi,$$

$$ds_{\theta} = (r_2 \text{ sen } \phi) d\theta,$$

Si tomamos momentos con relación a un eje normal a la cubierta, resulta, omitiendo los términos de orden superior:

$$N_{\phi\theta} r d\theta d\phi - N_{\theta\phi} d\phi r d\theta = 0$$

Si dividimos entre el elemento de superficie: $r d\theta d\phi$,

resulta:

$$N_{\phi\theta} = N_{\theta\phi}$$

Por consiguiente, los dos esfuerzos tangenciales son iguales entre sí, una conclusión similar a la conocida ley de la igualdad de las tensiones diagonales correspondientes o Ley de Cauchy.

Consideraremos ahora, las tres ecuaciones del equilibrio de las fuerzas que actúan en el elemento de cascarón, en la dirección ϕ , suponiendo el equilibrio de las fuerzas, se obtiene la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (r N_{\phi}) d\theta d\phi + r_1 \frac{\partial N_{\theta\phi}}{\partial \theta} d\theta d\phi - (N_{\theta} r_1 \cos \phi) d\theta d\phi + p_{\phi} (r d\theta)(r_1 d\phi) = 0,$$

esto es:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (r_2 N_\phi \sin \phi) + r_1 \frac{\partial N_{\theta\phi}}{\partial \theta} - r_1 N_\theta \cos \phi = -p_\phi r_1 r_2 \sin \phi.$$

En forma similar, establecemos la ecuación del equilibrio de las fuerzas en la dirección θ , y se tiene:

$$r_1 \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \phi} (r_2 N_{\theta\phi} \sin \phi) + r_1 N_{\theta\phi} \cos \phi = -p_\theta r_1 r_2 \sin \phi,$$

Y, finalmente, estableciendo el equilibrio en la dirección radial, tenemos:

$$\frac{N_\phi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} = p_n.$$

Para simplificar estas fórmulas generales, vamos a estudiar el caso particular, en el cual la forma del cascarón de revolución es una semiesfera de espesor constante, y que se encuentra sometida a su propio peso.

En vista de la simetría en la forma geométrica del cascarón semiesférico, y de la simetría axial de la carga, en las ecuaciones del equilibrio podemos emplear la derivada total, en lugar de las derivadas parciales, porque el esfuerzo paralelo N_θ no varía a lo largo del mismo.

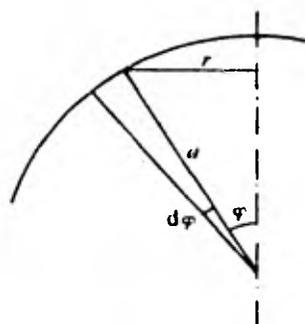
Los puntos alrededor de un meridiano se identifican por medio del ángulo ϕ , o sea la colatitud, (complemento de la latitud), como en el sistema de las coordenadas geográficas.

Un elemento del cascarón puede ser identificado por sus dos coordenadas: la longitud θ y la colatitud ϕ .

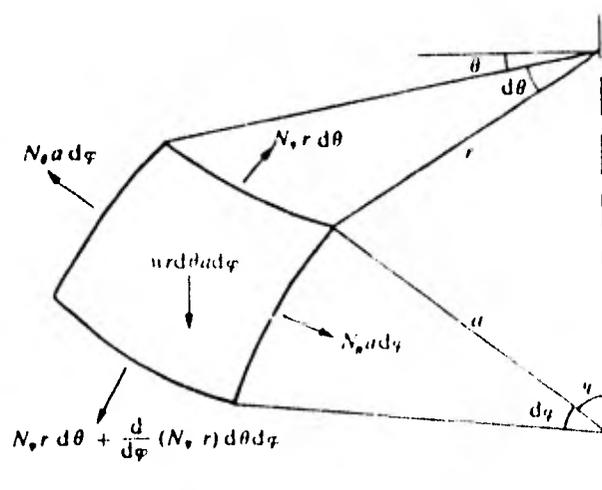
Si la cubierta laminar está sujeta únicamente a su peso propio w , su componente vertical será la fuerza:

$$w r d\theta a d\phi.$$

Y los esfuerzos normales resultantes serán:



$$\bullet \quad a \operatorname{sen} \phi = r.$$



$$N_{\theta} \quad \text{Y} \quad N_{\phi}$$

Para el problema particular de carga axial simétrica, el esfuerzo cortante resultante $N_{\phi\theta}$ es nulo en cualquier punto de la cubierta, como ya lo hemos demostrado anteriormente.

En la arista superior, sobre un círculo paralelo, actúa una fuerza total:

$$N_{\phi} r d\theta.$$

Como el ángulo ϕ se incrementa en $d\phi$, el valor de N_{ϕ} cambia, y el incremento en la dirección ϕ será:

$$\frac{d}{d\phi} (N_{\phi} r) d\theta d\phi.$$

Las dos fuerzas N_{θ} a $d\phi$ están en un plano horizontal, y forman entre sí un ángulo $d\theta$; su resultante tiene una magnitud de:

$$N_{\theta} a d\phi d\theta.$$

Y sus componentes son:

en la dirección normal: $N_{\theta} a d\phi d\theta \sin \phi$

y en la dirección tangencial al meridiano:

$$N_{\theta} a d\phi d\theta \cos \phi$$

Estableciendo la ecuación del equilibrio en la dirección-tangencial, se tiene:

$$\frac{d}{d\phi} (N_{\phi} r) d\theta d\phi - N_{\theta} a d\phi d\theta \cos \phi = -\omega a r d\theta d\phi \sin \phi,$$

Introduciendo ahora la ecuación:

$$r = a \sin \phi,$$

$$\frac{d}{d\phi} (N_{\phi} \sin \phi) - N_{\theta} \cos \phi = -\omega a \sin^2 \phi.$$

Estableciendo ahora el equilibrio de las fuerzas normales del elemento del cascarón tenemos:

$$(N_{\phi} r d\theta) d\phi + N_{\theta} a d\phi d\theta \sin \phi = -\omega a r d\theta d\phi \cos \phi,$$

$$0 \quad N_{\phi} + N_{\theta} = -\omega a \cos \phi.$$

Ecuación de las fuerzas normales, que es típica de la teoría de los cascarones, relaciona los esfuerzos resultantes directamente, sin contener derivadas.

Si se elimina N_θ entre las dos ecuaciones,

$$\frac{d}{d\phi} (N_\phi \sin \phi) + N_\phi \cos \phi = -wa,$$

$$\text{i.e.} \quad \frac{1}{\sin \phi} \frac{d}{d\phi} (N_\phi \sin^2 \phi) = -wa$$

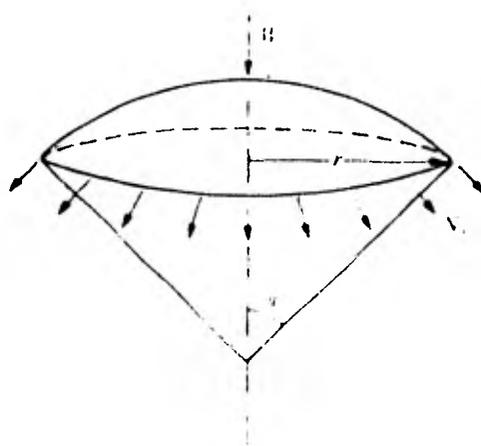
$$\text{o} \quad N_\phi = \frac{wa(\cos \phi + C)}{\sin^2 \phi},$$

en donde C es una constante de integración.

Si el esfuerzo resultante N_ϕ debe permanecer finito en la cúspide cuando $\phi = 0$, entonces la constante C debe tener el valor de -1 .

Y,

$$N_\phi = - \frac{wa}{1 + \cos \phi}.$$



Se puede proceder en forma alternativa, estableciendo el equilibrio del casquete esférico de la cubierta; si el peso de dicho casquete es W , entonces tenemos la siguiente ex --

presión para el equilibrio de las fuerzas verticales:

$$(N_{\phi}) (2\pi r) \sin \phi + W = 0,$$

y

$$W = 2\pi \omega a^2 (1 - \cos \phi),$$

De estas ecuaciones obtenemos directamente:

$$N_{\phi} = - \frac{\omega a}{1 + \cos \phi}.$$

Entonces, la solución completa de los esfuerzos de la cubierta semiesférica de espesor constante y sujeta a su propio peso es:

$$N_{\phi} = - \frac{\omega a}{1 + \cos \phi},$$

$$N_{\theta} = \omega a \left[\frac{1}{1 + \cos \phi} - \cos \phi \right].$$

Si los esfuerzos resultantes N_{ϕ} y N_{θ} , los dibujamos en una gráfica, en cuyas abscisas representamos el ángulo ϕ de 0° a 90° ; y, en las ordenadas representamos los esfuerzos de tracción y compresión, de $+wa$ a $-wa$, tenemos:

Los valores de N_{ϕ} se incrementan con el valor de ϕ ,

de $N_{\phi} = - (wa)/2$, de compresión en la cúspide, para $\phi = 0^{\circ}$;

a $N_{\phi} = - (wa)$, de compresión para $\phi = 90^{\circ}$.

El valor de N_{θ} es también negativo para $\phi = 0^{\circ}$,

y tiene un valor: $N_{\theta} = - (wa)/2$ en compresión, sin embargo,

se anula cuando:

$$\frac{1}{1 + \cos \phi} - \cos \phi = 0$$

Para un ángulo $\phi = 51^\circ 50'$, que corresponde a la solución de la ecuación trigonométrica:

$$\cos^2\phi + \cos\phi - 1 = 0$$

Después se hace positivo, es decir, a partir de:

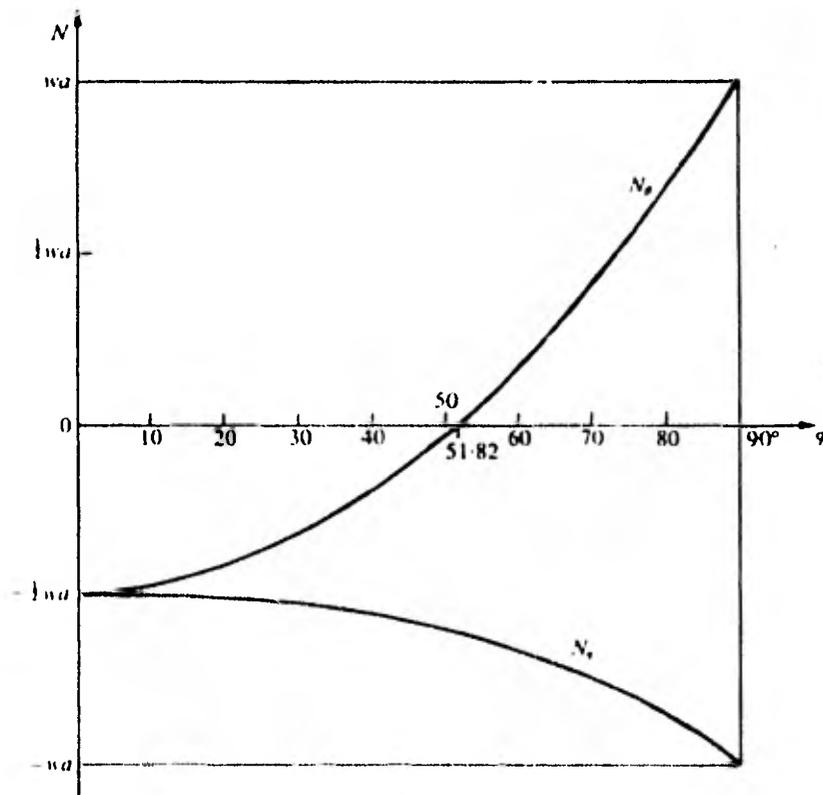
$$\phi = 51^\circ 50',$$

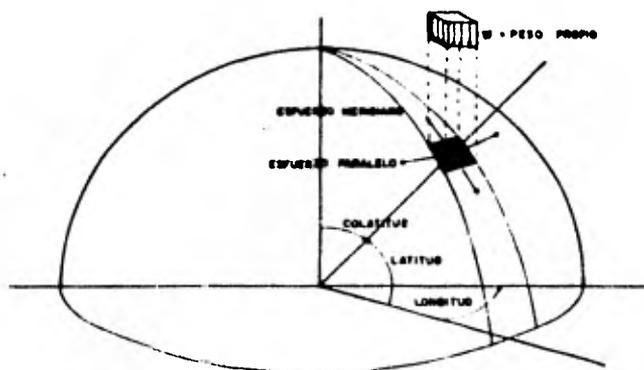
cambia a esfuerzos de tracción en la dirección perpendicular al meridiano, hasta el valor de $N = + (wa)$, para $\phi = 90^\circ$.

La solución numérica de la ecuación: $\cos^2\phi + \cos\phi = 1$.

es $\cos\phi = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, i.e. $\phi = 51.8^\circ$.)

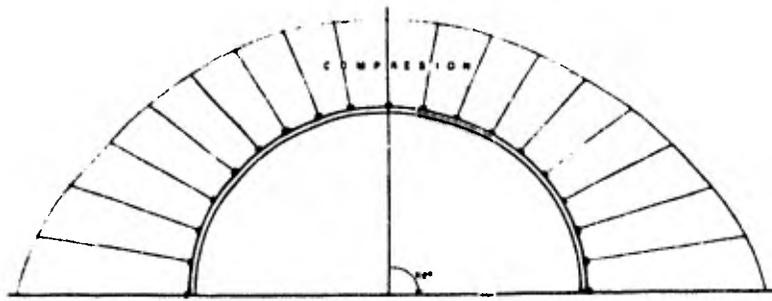
Que, como vemos, corresponde al paralelo de esfuerzo nulo.



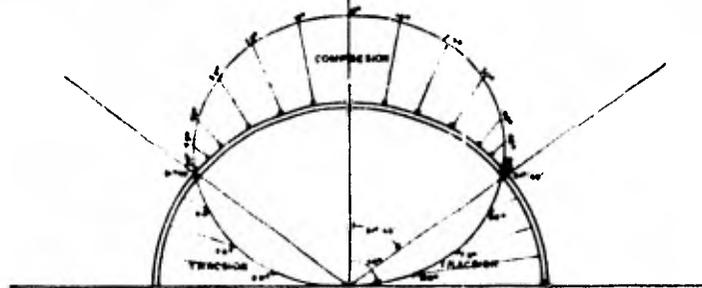


ANGULO	COSENO	$\frac{1}{1 + \cos \phi}$	$\frac{1}{1 - \cos \phi}$	ESFUERZO MERIDIANO	ESFUERZO PARALELO
0°	1.0000	- 0.5000	- 0.5000	- 0.5000 WR	- 0.5000 WR
10°	0.9848	- 0.5030	- 0.4802	- 0.5030 WR	- 0.4802 WR
20°	0.9397	- 0.5169	- 0.4242	- 0.5169 WR	- 0.4242 WR
30°	0.8660	- 0.5389	- 0.3501	- 0.5389 WR	- 0.3501 WR
40°	0.7660	- 0.5662	- 0.1998	- 0.5662 WR	- 0.1998 WR
45°	0.7071	- 0.5866	- 0.1213	- 0.5866 WR	- 0.1213 WR
50°	0.6428	- 0.6067	- 0.0341	- 0.6067 WR	- 0.0341 WR
2° 45'	0.6180	- 0.6180	0.0000	- 0.6180 WR	0.0000 WR
60°	0.5000	- 0.6667	0.1667	- 0.6667 WR	0.1667 WR
70°	0.3420	- 0.7431	0.4031	- 0.7431 WR	0.4031 WR
80°	0.1736	- 0.8320	0.8784	- 0.8320 WR	0.8784 WR
90°	0.0000	- 1.0000	1.0000	- 1.0000 WR	1.0000 WR

GRAFICA DE ESFUERZO
MERIDIANO



GRAFICA DE ESFUERZO
PARALELO

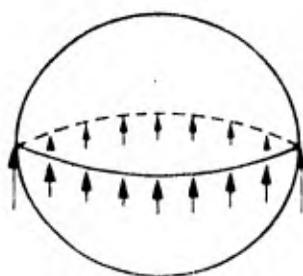


Cuando obtuvimos las ecuaciones generales del equilibrio de una cubierta de revolución, nos resultaron dos ecuaciones diferenciales y una ecuación algebraica. Este resultado es de suma importancia, porque expresa que las condiciones del equilibrio en el elemento de la cubierta, en general, se satisfacen para cualquier forma de la cubierta, y cualquier carga, mediante el estado de esfuerzos de membrana.

Un cascarón se comporta, en principio, de distinta manera que un arco, debido a que las fuerzas actuantes no necesitan ser transmitidas hacia los apoyos en una sola dirección, o sea en la dirección meridiana, como ocurre en el arco, sino que también puede repartirse convenientemente en dirección paralela. Esto origina la capacidad portante espacial, que es característica para el comportamiento estático del cascarón, y que al mismo tiempo, representa la razón del aprovechamiento del material, sumamente ventajoso, en la construcción de las cubiertas laminares.

Por consiguiente, no tiene sentido hablar en los cascarones de superficies de presión, ya que, toda la cubierta siempre es una superficie de presiones.

Un estudio más completo de este tema, nos llevó a estudiar el cascarón esférico completo, sujeto a su peso propio; en este caso consideramos un aro horizontal de apoyo en el ecuador, y, por supuesto, este soporte introduce discontinuidades en los valores del esfuerzo N_{ϕ} .



$2wa$ /unidad de longitud

Dividimos la solución en dos partes:

En la región: $0 < \phi < 90^{\circ}$

cuyas soluciones son:

$$N_{\phi} = - \frac{wa}{1 + \cos \phi} ,$$

$$N_{\theta} = wa \left[\frac{1}{1 + \cos \phi} - \cos \phi \right] .$$

Y en la región: $90^{\circ} < \phi < 180^{\circ}$,

En donde para valuar la constante de integración C , hacemos el argumento previo, de que el valor de N_{ϕ} debe permanecer finito bajo la línea de apoyo.

Por lo que, obtenemos para C un valor igual a $+1$, y los esfuerzos resultantes son:

$$N_{\phi} = \frac{wa}{1 - \cos \phi} ,$$

$$N_{\theta} = -wa \left[\frac{1}{1 - \cos \phi} + \cos \phi \right] .$$

Y se obtienen los siguientes valores:

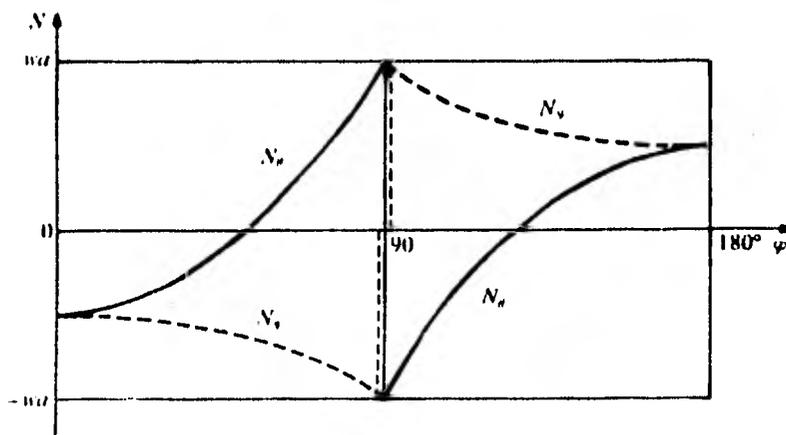
Para $\phi = 90^{\circ}$ $N_{\phi} = - (wa)$ compresión y $+ (wa)$ tracción.-

$N_{\theta} = + (wa)$ tracción y $- (wa)$ compresión

Para $\phi = 180^{\circ}$ $N_{\phi} = + (wa)/2$ tracción.

$N_{\theta} = + (wa)/2$ tracción.

La gráfica que muestra el comportamiento de los esfuerzos meridiano N_{ϕ} y paralelo N_{θ} , en el cascarón esférico completo y sujeto a su peso propio, es la siguiente.



$$N_x + N_y = 0 \text{ a } \phi = 90^\circ;$$

También, en este caso, el esfuerzo paralelo N se anula para la condición:

$$\cos^2 \phi - \cos \phi - 1 = 0$$

esta ecuación tiene dos raíces, una de las cuales es el número de oro.

Observamos que las raíces cumplen con la condición:

$$\phi \phi' = -1.$$

La forma final que dimos a la proposición, tema de esta tesis, en la que se muestra su independencia con el material-emporado en la construcción de las bóvedas; para evitar los- posibles contraejemplos que se pudieran formular, es la si- siguiente:

"EN LAS BÓVEDAS SEMIESFÉRICAS DE ESPESOR CONSTANTE, Y SUJETAS A SU PROPIO PESO, LA LÍNEA DE ESFUERZOS PARALELOS NULOS - CORRESPONDE AL PARALELO CUYO COSENO DE LA COLATITUD ES EL - NÚMERO DE ORO".

Es conveniente aclarar, que las dos formas presentadas -- para la deducción del esfuerzo paralelo N_{θ} , no fueron las empleadas originalmente.

En la forma primitiva, la deducción es más complicada pero la relación con el número de oro se ve más directamente; - porque se obtiene de la derivación con respecto al ángulo " ϕ " de la expresión:

$$N_{\theta} = \frac{d}{d\phi}(N_{\phi} a \cos \phi) = a \cdot w \frac{d}{d\phi} \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{1 + \cos \phi} \right) =$$

$$N_{\theta} = \frac{(1 + \cos \phi)(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) + \sin^2 \phi \cos \phi}{(1 + \cos \phi)^2} a \cdot w =$$

$$N_{\theta} = \frac{(1 + \cos \phi)(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) + \cos \phi (1 - \cos^2 \phi)}{(1 + \cos \phi)^2} a \cdot w =$$

$$\frac{(1 + \cos \phi)(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) + \cos \phi (1 + \cos \phi)(1 - \cos \phi)}{(1 + \cos \phi)^2} a \cdot w$$

$$N_{\theta} = \frac{\cos^2 \phi - \sin^2 \phi + \cos \phi - \cos^2 \phi}{1 + \cos \phi} a \cdot w$$

$$N_{\theta} = \frac{\cos^2 \phi + \cos \phi - 1}{1 + \cos \phi} a \cdot w$$

En el numerador se encuentra la expresión cuadrática característica cuya solución es el número de oro; y por el hecho de haber igualado a cero el valor de la primera derivada, se está en presencia de un problema de máximo o mínimo.

Otro resultado interesante, se obtiene al considerar una carga uniformemente repartida actuando sobre el cascarón semiesférico, en lugar del peso propio, entonces el ángulo de colatitud correspondiente a la línea de ruptura es de 45° .

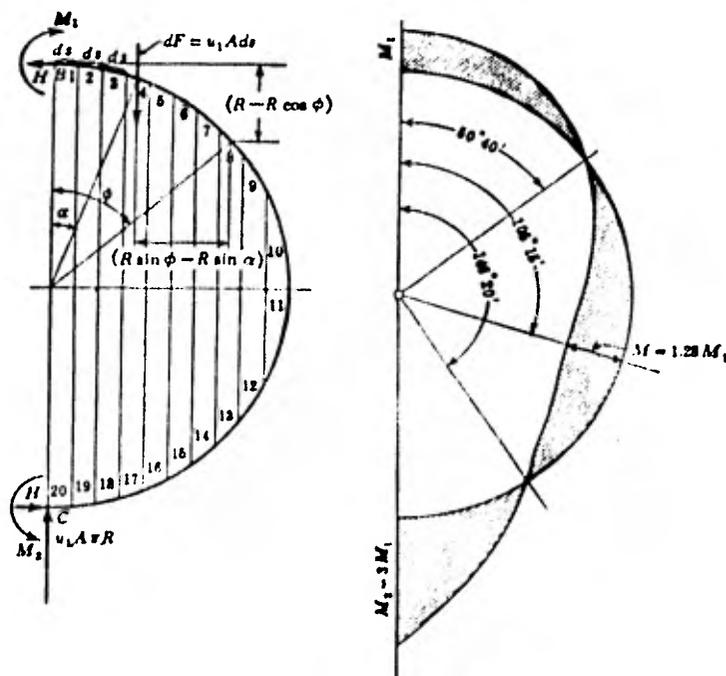
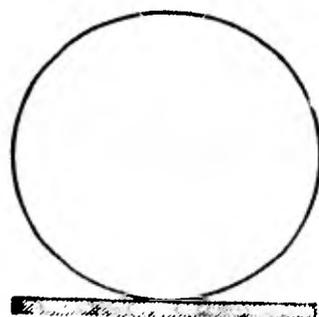
Me dejé llevar por el entusiasmo, pues al ver este extraordinario resultado, me propuse el estudio de una rueda, --- (cambié el nombre primitivo de anillo, para que no se confundiera con la estructura algebraica que lleva ese nombre); cuyas dimensiones transversales fueran pequeñas, comparadas con el radio de curvatura, que descansa sobre un apoyo rígido, y sujeta únicamente a su propio peso.

La intuición me decía que, el punto de inflexión de la elástica, o sea el punto de momento flexionante nulo, debería encontrarse en un ángulo de colatitud $\phi = 51^\circ 49'$, igual al ángulo de ruptura de las bóvedas. Sin embargo, al resolver -- este problema, la ecuación resultante que hace nulo el momento flexionante es:

$$M = u_1 AR^2 (1 - \phi \operatorname{sen} \phi - \cos \phi/2) = 0.$$

- M = Momento flexionante
 u_1 = Peso unitario de la rueda.
 A = Área de la sección transversal.
 R = Radio de la rueda.
 ϕ = Ángulo de colatitud.

El ángulo ϕ que satisface esta ecuación es de: $50^\circ 40'$, que es diferente al anterior.



Pero rara vez se obtiene un descubrimiento significativo o una visión esclarecedora, si se hace uso de un procedimiento exclusivamente axiomático. El pensamiento constructivo, guiado por la intuición, es la verdadera fuente de la dinámica matemática.

A pesar de que la forma axiomática es un ideal, es una peligrosa falacia creer que la axiomática constituye la esencia de la matemática. La intuición constructiva de los matemáticos da a esta ciencia un elemento no deductivo e irracional, que la hace comparable con la música y el arte.

Desde los días de Euclides, la geometría ha sido el prototipo de una disciplina axiomatizada. Durante siglos, el sistema de axiomas de Euclides ha sido objeto de estudio intensivo. Pero sólo recientemente ha sido puesto de manifiesto que sus postulados debían ser modificados y completados si se deseaba que toda la geometría elemental fuera deducible de ellos.

El tratamiento axiomático no ha sido solamente aplicado a las matemáticas, sino que se ha empleado en la mecánica, - de ésta ha pasado a otras partes de la física y de ahí a las otras ciencias de la naturaleza; y a veces hasta los filósofos como, por ejemplo, Spinoza en su "Ethica, more geometrico demonstrata", trató de presentar sus argumentos en forma de -- teoremas deducidos de definiciones y axiomas.

En la matemática moderna, después de un alejamiento de la tradición euclidiana durante los siglos XVII y XVIII, hubo una creciente penetración del método axiomático en todos los campos. Hay como una ley del desenvolvimiento de las ciencias que las hace pasar, en un orden irreversible y cada una a su vez, según el rango que ocupa en la jerarquía científica, por cuatro etapas sucesivas: descriptiva, inductiva, deductiva y axiomática. Uno de los resultados más recientes, ha sido la - creación de una nueva disciplina: la lógica matemática.

Sin embargo, al tratar con la naturaleza, ningún fenómeno físico se puede expresar, en forma absoluta, por una fórmula matemática; o bien, citando a Bertrand Russell: "...la verdad matemática es analítica, las matemáticas no describen la realidad física". Y finalmente, resumimos este punto de vista -- con las palabras de Albert Einstein: "En la medida en que se - refieren a la realidad, las leyes de las matemáticas no son - verdaderas, y en la medida en que son verdaderas, no se refieren a la realidad".

LA EXTREMA Y MEDIA RAZÓN.

"Creo que de esta proporción geométrica se sirvió el Creador, como la idea, por medio de la que introdujo la generación continua de objetos semejantes, a partir de objetos semejantes".

JUAN KEPLER.

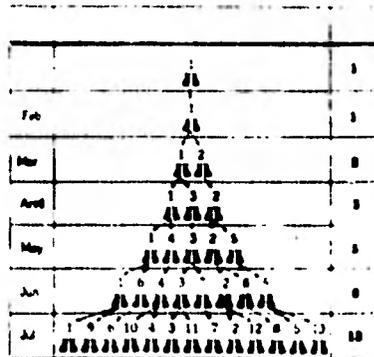
III LOS NÚMEROS DE FIBONACCI.

En 1202, Leonardo de Pisa, apodado Fibonacci, ("hijo de buen carácter"), encontró esta célebre sucesión de enteros. - La sucesión de Fibonacci, tiene un largo historial y propiedades sorprendentes; por ejemplo, el número de segmentos de la superficie de una piña, es un número de Fibonacci; también la disposición de las ramas y las hojas de algunos árboles, - están íntimamente relacionadas con la sucesión de Fibonacci.



LEONARDO DE PISA.

Fibonacci planteó el siguiente problema: Supongamos que tenemos una pareja de conejos, (pareja significa macho y hembra), y también hizo la suposición de que los conejos viven sempiternamente, y de que cada mes cada pareja concibe una nueva pareja, que a su vez es productiva a la edad de dos meses. En el primer mes, el experimento se inicia con una pareja de recién nacidos, por lo que apuntamos el número 1. En el segundo mes hay todavía una sola pareja, por lo que apuntamos 1 de nuevo. En el tercer mes, nace una pareja, por lo que apuntamos el número 2. En el cuarto mes, tenemos 3 parejas; en el quinto mes 5 parejas, y así sucesivamente.



Sea F_n el número de parejas de conejos en el n ésimo mes. Los primeros valores y sus relaciones sucesivas se pueden tabular de la manera siguiente:

n	:	1	2	3	4	5	6	7	8
F_n	:	1	1	2	3	5	8	13	21
$F_{(n+1)}/F_n$:	1	2	1.5	1.667	1.600	1.625	1.615	1.619

Los números de Fibonacci forman una sucesión de enteros--positivos, dada por una ley de recurrencia, o sea, una ley --que recurre al término anterior para formar el siguiente:

$$F_0 = 0 ; \quad F_1 = 1 ; \quad F_{(n+2)} = F_{(n+1)} + F_n ; \text{ con } n \text{ mayor o igual a } 0.$$

No es difícil convencerse, de que el número de parejas --después de n meses es $F_{(n+2)}$.

Una propiedad interesante es que F_n y $F_{(n+1)}$ son ---primos entre sí. De hecho se tiene la siguiente ecuación:

$$F_{(n-1)} \cdot F_{(n+1)} - F_n^2 = (-1)^n. \quad (A).$$

Esta ecuación se puede demostrar, si demostramos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{(n+1)} & F_n \\ F_n & F_{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (B).$$

Ya que si obtenemos el determinante de ambos miembros, -- obtendremos la ecuación (A).

La demostración la hacemos por inducción sobre n .

Primero probamos que para $n = 1$, la ecuación (B) se cumple -- trivialmente.

Segundo, suponemos que la ecuación (B) vale para n .

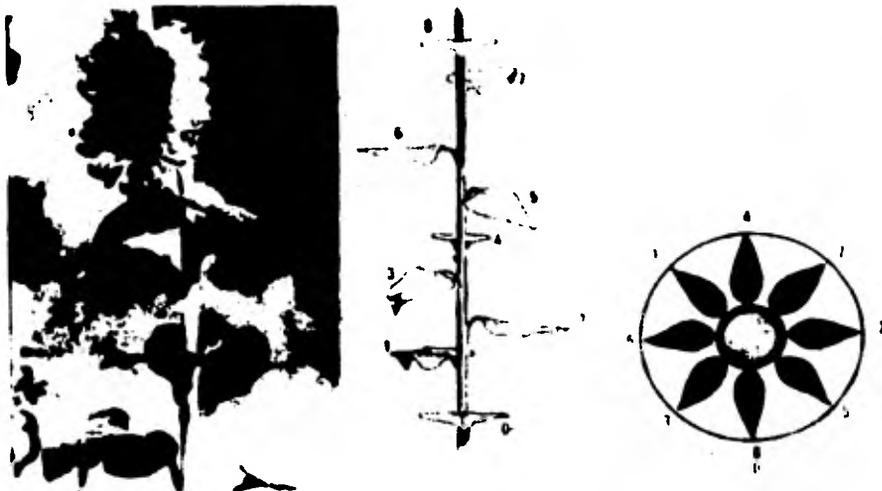
Tercero, si logramos demostrar que (B) vale para $(n + 1)$, entonces podemos concluir que (B) vale para toda n .

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{(n+1)} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} F_{(n+1)} & F_n \\ F_n & F_{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} F_{(n+1)} + F_n & F_{(n+1)} \\ F_n + F_{(n-1)} & F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{(n+2)} & F_{(n+1)} \\ F_{(n+1)} & F_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.1

NÚMERO, PLANTA, SOL.

Los primeros números de la serie de Fibonacci se encuentran también en la Naturaleza. En efecto, si numeramos la -- disposición de las hojas en un tallo, esta disposición es casi regular.



El ángulo que forman dos hojas sucesivas, expresado en -- fracción de giro, puede obtenerse del modo siguiente:

Partamos de una hoja determinada, que numeraremos con el -- cero y giremos en forma de hélice alrededor del tallo, hasta -- que la hoja número q esté exactamente encima de la hoja -- -- cero. Si hemos efectuado p vueltas, el ángulo buscado es e -- -- xactamente (p/q) .

Pues bien, la fracción (p/q) es en general, la misma re -- -- lación de los números sucesivos en la serie de Fibonacci o su -- -- inversa. Esto se debe, por una parte, a que la insolación ha -- -- de ser máxima y la sombra mínima para todas las hojas conse -- -- cutivas; y (p/q) debe estar próximo a una kaésima parte de -- -- vuelta; y por otra parte, a que las fracciones de Fibonacci, -- -- son las fracciones más simples próximas a ϕ .

La relación entre los números sucesivos de la sucesión de -- -- Fibonacci tales como:

$(0/1), (1/1), (1/2), (2/3), (3/5), (5/8), (8/13), (13/21), \dots$

y así sucesivamente, se encuentran en algunas espirales natu -- --

rales, en flores, conchas, en la fruta del pino, las piñas y otras plantas que tienen el crecimiento de las hojas en forma de espiral.

Una propiedad interesante, de los términos consecutivos - de la sucesión de Fibonacci, es la siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n-1)}{F_n} = \phi.$$

Comprobación:
Calculemos el límite $\frac{F(n-1)}{F_n}$, cuando n tiende a infinito

Sea L el límite requerido:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n-1)}{F_n}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F(n+1)}$$

$$L^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n-1)}{F_n} \cdot \frac{F_n}{F(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n-1)}{F(n+1)}$$

Por una propiedad de los límites, se tiene que el límite de una suma es igual a la suma de los límites.

$$L^2 + L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n-1)}{F(n+1)} + \frac{F_n}{F(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n-1) + F_n}{F(n+1)}$$

Pero por una de las propiedades de la sucesión de Fibonacci:

$$F(n+1) = F_n + F(n-1).$$

$$L^2 + L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n+1)}{F(n+1)} = 1.$$

$$L^2 + L = 1.$$

Entonces:

$$L^2 + L - 1 = 0.$$

Las dos raíces de esta ecuación cuadrática son:

$$L_1 = (-1 + \sqrt{5})/2 = 0.618\dots$$

$$L_2 = (-1 - \sqrt{5})/2 = -1.618.$$

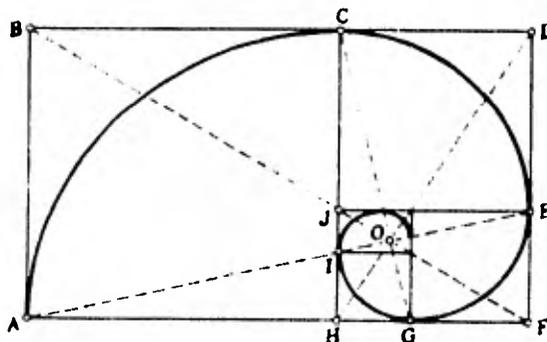
Soluciones que se encuentran en Euclides: en T.II.11 para la solución de la ecuación de segundo grado; en T.IV.10 y T.IV.11, en las construcciones auxiliares para las construcciones del decágono y del pentágono regulares; así como también en la localización de la línea de ruptura de algunas bóvedas, con las características geométricas y las cargas estudiadas.

La proporción áurea, como vimos, surge en conexión con el pentágono regular, y por lo tanto, la serie de Fibonacci representa también un papel en todo lo relacionado con los pentágonos regulares o los pentágonos estrellados, y que tanto intriguaron a los pitagóricos, a Fra Luca Pacioli y a numerosos artistas y arquitectos desde entonces.

La propiedad aditiva simple de la proporción áurea, es única; y es por esto, que los artistas le consideran tanta importancia en el diseño de sus obras.

3.2

LA ESPIRAL ÁUREA.



La relación $\phi = 1 + (1/\phi)$ nos señala que el rectángulo-áureo ABDF, se puede descomponer en dos partes: el cuadrado ABCH y un rectángulo áureo menor. Del rectángulo pequeño ---CDFH podemos quitar nuevamente otro cuadrado, de modo que -- tengamos un rectángulo aún menor, y continuar el proceso indefinidamente.

Puesto que el rectángulo HJEF es homotético al ABDF, el vértice J del primero queda en la diagonal BF del segundo. De hecho, las rectas AE, BF, CG y DH contienen entre todas los vértices de todos los rectángulos.

Para obtener CDFH a partir de ABDF podemos emplear una rotación dilatativa de centro O, el punto de intersección de BF y DH. Esta semejanza, que transforma cada uno de los puntos A, C, E, G, I, ... en el siguiente, y cada uno de los puntos B, D, F, H, J, ... en el siguiente, es el producto de un cuarto de giro negativo alrededor de O y una dilatación.

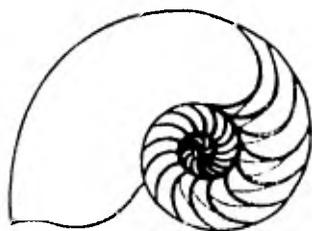
Por lo tanto, DH es perpendicular a BF. La semejanza - inversa, que transforma cada rectángulo en el siguiente mayor que él, es el producto de un cuarto de giro positivo alrededor de O y otra dilatación.

Puesto que:

$$\frac{OB}{OD} = \frac{BC}{CD} = \phi .$$

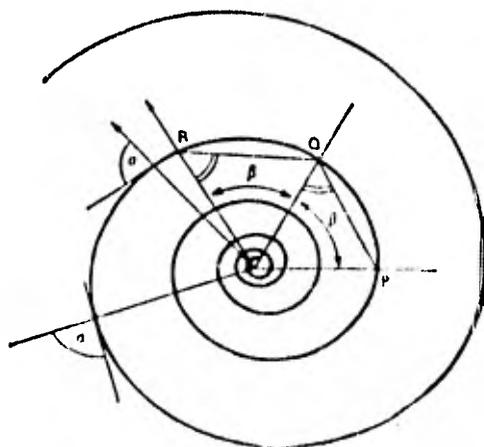
OC biseca el ángulo recto BOD. Así pues, tenemos que -- las rectas CG, AE pasan por el punto O y bisecan los ángulos entre BF y DH.

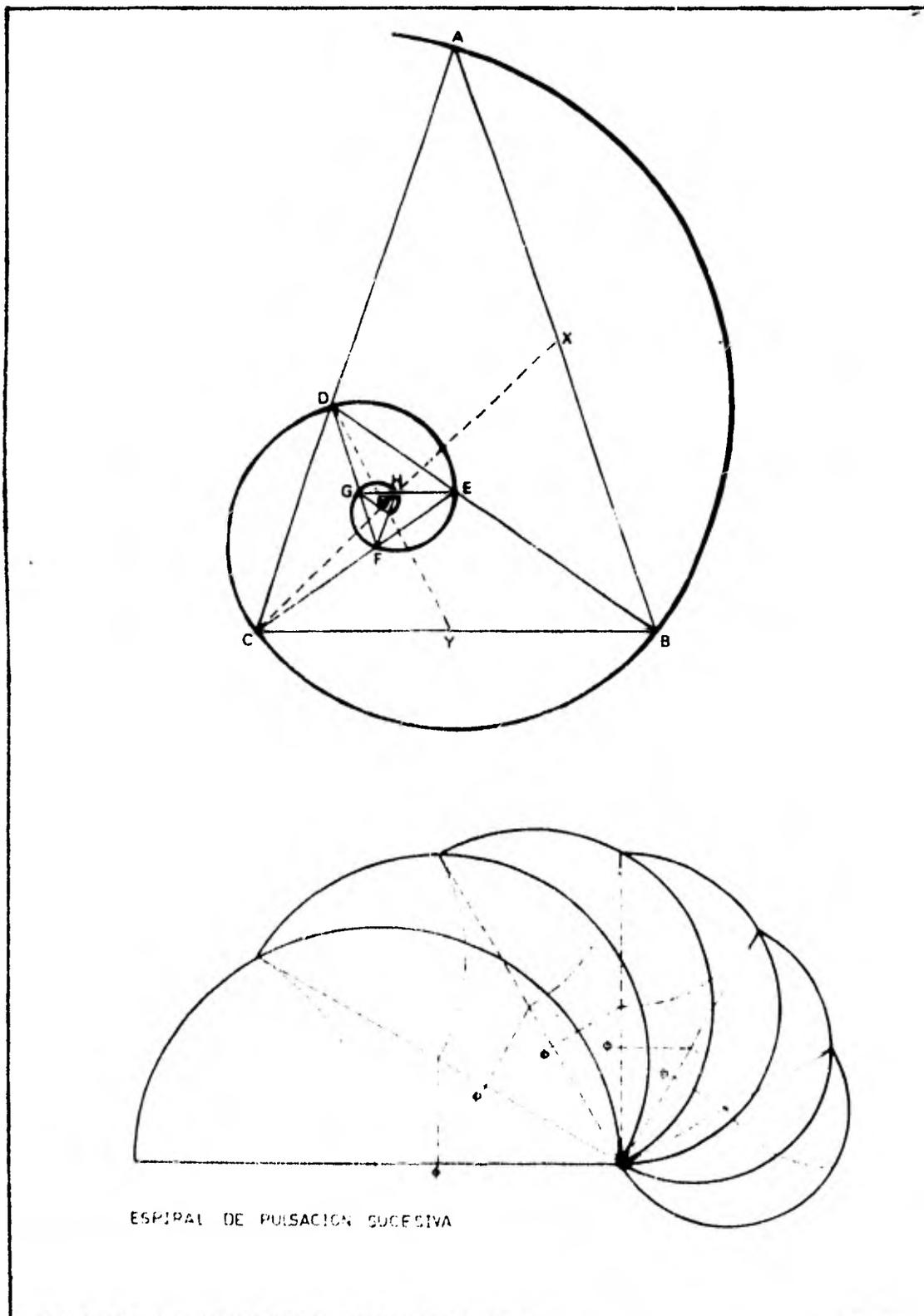
Ciertas conchas fósiles tienen formas que se parecen mucho a la espiral equiangular, como la concha del Nautilus na-carino, que pertenece a los cefalópodos y son moluscos mari-nos, que tuvieron su máximo desarrollo durante los períodos -ordovícico y silúrico del paleozoico, hace aproximadamente --unos 425 millones de años; y actualmente presentan formas muy evolucionadas.

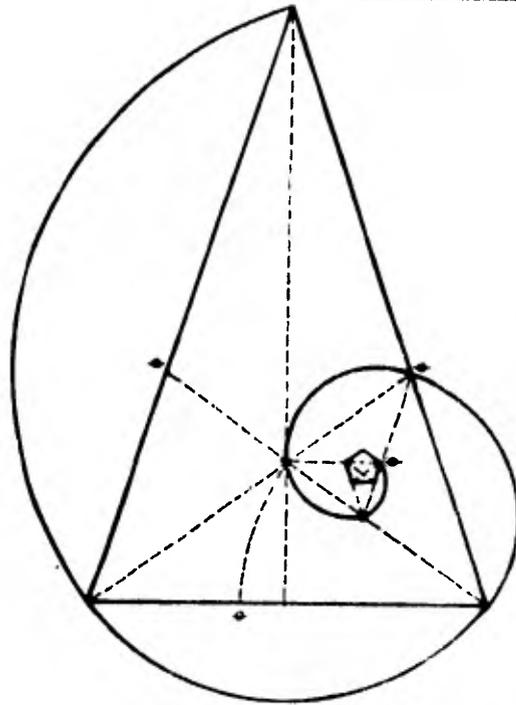


La espiral equiangular puede definirse como el lugar geométrico de un punto P que se mueve en un plano tal que la -tangente en P forma un ángulo fijo α con el radio trazado hacia afuera. Por medio de procedimientos del cálculo diferencial, se obtiene con bastante facilidad la ecuación de la cur-va.

$$r = ae^{\theta \cot \alpha}$$

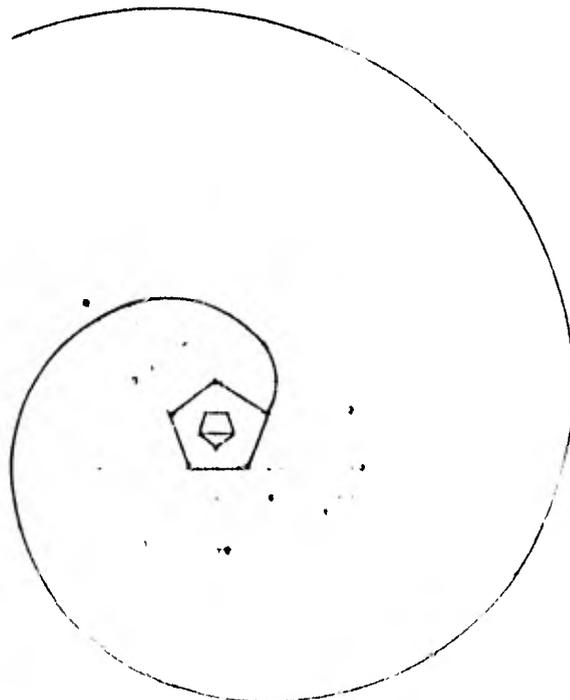






Espiral generada en el triángulo "sublime".

Espiral del pentágono regular.



3.3

LOS DETERMINANTES DE LOS NÚMEROS DE LA SUCESIÓN DE FIBONACCI.

Es interesante comprobar que los determinantes formados - con los números de la sucesión de Fibonacci, tienen valor cero. Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 13 & 21 & 34 \\ 55 & 89 & 144 \end{bmatrix} = 0.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 8 & 13 & 21 & 34 \\ 55 & 89 & 144 & 233 \\ 377 & 610 & 987 & 1597 \end{bmatrix} = 0$$

Esto se sigue de la ley para formar los elementos de la - sucesión:

$$F_{(n-1)} + F_n = F_{(n+1)}.$$

La adición de los elementos de dos columnas adyacentes, -- forman los elementos de la columna siguiente; y, por una propiedad de los determinantes, éstos valen cero.

Aquí empleamos 2 propiedades muy importantes del algoritmo de los determinantes:

- i).- Si los elementos de una columna o un renglón cualquiera, constan de la suma de dos términos, el determinante puede expresarse como la suma de otros dos determinantes.
- ii).- Si dos columnas o dos renglones de un determinante son iguales, el determinante es igual a cero.

3.4

LOS NÚMEROS DE FIBONACCI Y LOS COEFICIENTES DEL BINOMIO DE

NEWTON

Triángulo de Pascal.

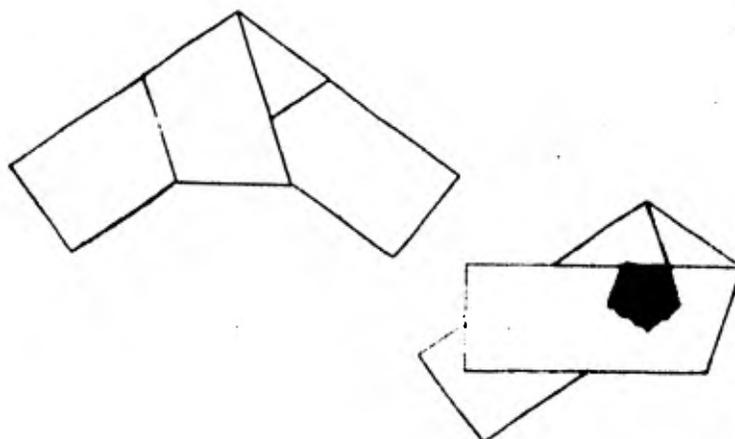
				1					1.												
				1	—	1			2.												
				1	—	2	—	1	3.												
				1	—	3	—	3	—	1	5.										
				1	—	4	—	6	—	4	—	1	8.								
				1	—	5	—	10	—	10	—	5	—	1	13.						
				1	—	6	—	15	—	20	—	15	—	6	—	1	21.				
				1	—	7	—	21	—	35	—	35	—	21	—	7	—	1	34.		
				1	—	8	—	28	—	56	—	70	—	56	—	28	—	8	—	1	55.

Los números de la sucesión de Fibonacci pueden obtenerse de los coeficientes binomiales, arreglados en el llamado triángulo de Pascal.

De las líneas diagonales que unen los números del arreglo triangular, se obtienen los miembros de la sucesión. Se puede probar que la suma de los números que se encuentran sobre una diagonal dada, es un número de Fibonacci; basta con demostrar que la suma de todos los números que constituyen la $(n-2)$ é -sima diagonal, y la $(n-1)$ é -sima diagonal del triángulo de --Pascal, es igual a la suma de los números que se encuentran - en la n é -sima diagonal.

3.5

EL NUDO ÁUREO.



Se puede elaborar la figura de un pentágono regular y sus diagonales con bastante limpieza, si se hace un nudo sencillo con una tira de papel y se aplatana cuidadosamente; esta circunstancia, nos hace pensar que en su elaboración se encuentra presente el principio de "la mínima acción" de la mecánica racional.

3.6

LENGUAJE DE PROGRAMACIÓN Y ALGORITMO PARA LA OBTENCIÓN DE LA SUCESIÓN DE FIBONACCI.

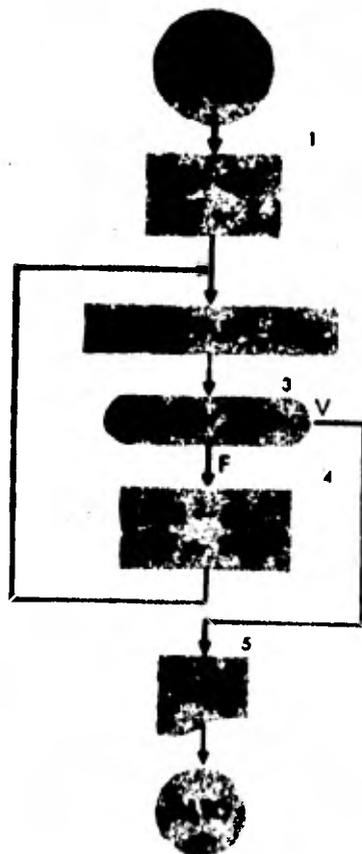
BASIC, es un lenguaje de programación por computadora, -- que significa: Código Simbólico de Instrucciones del Principiante para Todo Propósito; en el idioma inglés: Beginner's - All purpose Symbolic Instruction Code.

Utiliza palabras inglesas y expresiones algebraicas; originalmente fue creado por los profesores John G. Kemeny y -- Thomas E. Kurtz, del Colegio Darmouth, alrededor de 1963.

Los perfeccionamientos posteriores han dado por resultado características adicionales, de modo que el lenguaje empleado actualmente se le llama Basic Extendido, en inglés Extended - Basic. Ordinariamente Basic se usa en un sistema de computadora de tiempo compartido. El aspecto general de un programa en lenguaje BASIC es el siguiente:

La secuencia de Fibonacci: 0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, . etc., se genera comenzando con el número 0 y 1, calculando --

cada número de la misma, como la suma de sus dos miembros --
precedentes. En la figura se presenta un diagrama de flujo --
que muestra la manera de obtener los términos de esa secuen--
cia, que no excedan de 1,000; con los enunciados correspon --
dientes en lenguaje BASIC.



```
10 LET N = 0
```

```
15 LET L = 1
```

```
20 LET S = L + N
```

```
30 IF S > 1000 THEN 50
```

```
40 LET N = L
```

```
45 LET L = S
```

```
49 GØ TØ 20
```

```
50 PRINT S
```

```
99 END
```

Bajo el aspecto exclusivamente algebraico, existen también varias formas de expresar el número " ϕ ", que demuestra inmediatamente su notable posición en la serie de los números.

Una, está expresada como un límite de raíces cuadradas; y la otra, como un límite de fracciones continuas. Límites de iteración. Con frecuencia, los términos de una sucesión son de tal naturaleza que se deduce $a_{(n+1)}$ de a_n mediante el mismo procedimiento por el cual se calculó a_n a partir de $a_{(n-1)}$

Repetiendo el proceso indefinidamente, se obtiene toda la sucesión partiendo de un término inicial dado.

$$\phi = \limite \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}$$

$$\phi = 1 + \limite \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

$$\frac{1}{\phi} = \limite \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

El algoritmo de Euclides para el cálculo del máximo común divisor de dos enteros, conduce de un modo natural de representación de las fracciones continuas y a casos interesantes de pasos al límite.

Sin embargo, para los números irracionales, el algoritmo no termina después de un número finito de pasos, sino que conduce a una sucesión de fracciones de longitud creciente, cada una de las cuales representa un número racional.

3.7

A LA

DIVINA PROPORCIÓN

A tí, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura
que claramente acata la clausura
viva en la malla de la ley divina.

A tí, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de medida
que el universo armónico origina.

A tí, mar de los sueños angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.

Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A tí, divina proporción de oro.

RAFAEL ALBERTI.



3.8 FRA LUCA PACIOLI DI BORGO, POR JACOPO DE BARBARI.

(Museo Nacional de Nápoles).

Texto tomado del Capítulo III de "LA DIVINA PROPORCIÓN", - de Fra Luca Pacioli.

"TERMINADO EL PROEMIO, CORRESPONDE ACLARAR A CONTINUACION LO QUE POR EL NOMBRE MATEMÁTICO SE DEBE ENTENDER".

"Este vocablo "matemático", ¡oh excelso Duque! deriva del griego

μαθηματικός, que en nuestro idioma es como decir- "disciplinable", y, para nuestro propósito, por ciencias y -- disciplinas matemáticas se entienden la aritmética, geometría - astronomía, música, perspectiva, arquitectura y cosmografía - y cualquier obra dependiente de éstas..."

En el capítulo VII, dice:

"DEL PRIMER EFECTO DE UNA LÍNEA DIVIDIDA SEGÚN NUESTRA - PROPORCIÓN". Cuando una línea recta se divide según la propor

ción que tiene el medio y dos extremos (que así, con otro -- nombre, llaman los sabios a nuestra exquisita proporción), si a su parte mayor se agrega la mitad de toda la línea así proporcionalmente dividida, se seguirá necesariamente que el --- cuadrado de su conjunto siempre es quíntuplo (es decir, cinco veces mayor) del cuadrado de dicha mitad del total".

Este "Primer Efecto" corresponde a Euclides T.XIII.1.

CAPÍTULO VIII.

"COMO SE ENTIENDE LA CANTIDAD DIVIDIDA SEGÚN LA PROPOR -- CIÓN QUE TIENE EL MEDIO Y DOS EXTREMOS". "Debemos saber que, considerándolo bien, esto de la división de una cantidad se-- según la proporción que tiene el medio y dos extremos quiere -- decir: hacer de aquella cantidad dos partes desiguales tales-- que el producto de la menor por toda esa cantidad indivisa -- sea cuanto el cuadrado de la parte mayor, como por la tercera definición del sexto declara nuestro filósofo.

Pero, puesto el caso de que resultara molesto dividir dicha cantidad "según la proporción que tiene el medio y dos -- extremos", y se quisiera, en cambio, hacer dos partes tales -- que el producto de una parte por toda dicha cantidad sea i--- gual al cuadrado de la otra parte, quien entiende bien y sea experto en el arte deberá reducir la proposición a dicha proporción nuestra, pues de otra manera no puede interpretarse".

CAPÍTULO XXII.

"DE SU DECIMOTERCERO DIGNÍSIMO EFECTO". Por su décimoter-- cero efecto no es poco de admirar que sin su ayuda no se puede nunca formar el pentágono, es decir, la figura de 5 lados-- iguales, mencionada arriba, en el noveno efecto, y que además mencionaremos luego.

Ese pentágono, como se dirá, no es posible formarlo, ni -- imaginar el cuerpo más noble entre todos los cuerpos regula -- res, llamado dodecaedro, es decir, cuerpo de doce pentágonos-- equiláteros y equiángulos, con otro nombre llamado cuerpo de doce bases pentagonales, cuya forma atribuye Platón, como se dirá, a la quinta esencia, es decir, al cielo, por convenient-- ísimas razones.

De ahí que nuestro filósofo, en el cuarto libro, por la -- décima, nos enseña a hacer un triángulo de tal condición: es

decir, que uno de sus dos ángulos que están en la base sea --
doble del otro,..."

Este "Décimotercero Dignísimo Efecto" corresponde a Eu --
clides T.IV.10.

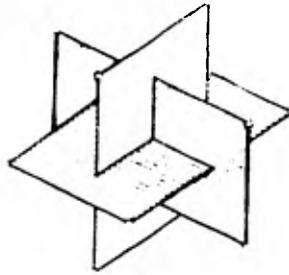
Hay muchas propiedades interesantes de los sólidos platón--
nicos, en las que interviene el número " ϕ ". Por ejemplo: -
Las caras que rodean uno de los vértices del icosaedro perte--
necen a una pirámide cuya base es un pentágono regular. Dos -
aristas opuestas cualesquiera del icosaedro pertenecen a un -
rectángulo, cuyos lados mayores son diagonales de los pentá--
gonos dichos.

Puesto que, la diagonal de un pentágono es " ϕ " veces -
su lado, el rectángulo es áureo, y sus lados están en la ra--
zón de $\phi : 1$. (Euclides T.XIII.8).

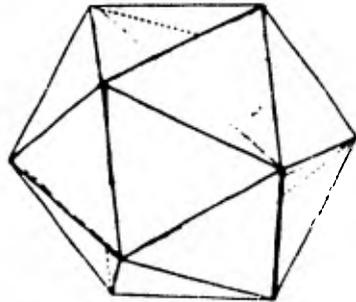
De hecho, los doce vértices del icosaedro, son los doce -
vértices de tres rectángulos áureos que están en planos per--
pendiculares entre sí.

Este modelo se puede construir por medio de tres tarjetas
postales ordinarias (que son rectángulos casi áureos). Se ---
corta en la mitad de cada tarjeta una ranura paralela a los -
lados mayores, e igual en longitud a un lado menor. Por razo--
nes de tipo práctico, en una de las tarjetas la ranura ha de--
llegar hasta el borde. Entonces será fácil colocar las tarje--
tas de manera que cada una pase por la mitad de las otras.

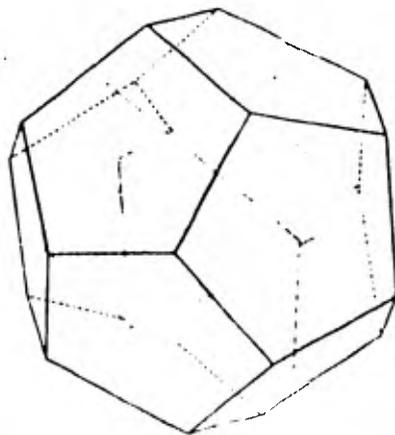
También se puede ver, que las esquinas de los mismos rec--
tángulos, coinciden con los centros de los pentágonos que ---
forman las caras del dodecaedro.



ρ ϕ



Είκοσεδρον επίπεδων στερεόν



Δωδεκάεδρον επίπεδων στερεόν

IV 4.1 LA PROPORCIÓN ÁUREA EN EL ARTE.

He de confesar ante todo que soy profano en cuestiones de arte; y si esta parte de la tesis fue tratada con un espíritu crítico, fue sobre todo, porque las fuentes de información -- fueron generalmente escritos de historiadores del arte y arquitectos, quienes dan a los conceptos subjetivos de belleza y armonía, una significación muy amplia y distinta en cada autor.

En lo personal, el contenido de una obra de arte me atrae más que sus cualidades formales y técnicas, a las que el artista concede, en cambio, máxima importancia; las obras de arte ejercen en mí una poderosa acción, sobre todo las musicales, literarias, escultóricas y arquitectónicas.

En consecuencia, me he sentido impulsado a considerar algunas de aquellas obras, que más profunda impresión me causaban, y que tienen relación con el tema central de este trabajo: la proporción áurea.

Con cierta hostilidad estudié el tema de la gran pirámide de Keops o Jeops, en el Valle de Gizeh, en Egipto, sobre todo - porque hay egiptólogos y charlatanes que ven a esta milenaria construcción como "el gran todo", que contiene una lista de relaciones astronómicas, cosmogónicas, místicas, relaciones del número π , y, no faltará quienes encuentren a los números "e" o "i".

e = 2.7182818... (base de los logaritmos naturales)

i = unidad imaginaria.

Ya que, en distintas épocas, se ha desatado una epidemia de piramidología.

Para nosotros, esta grandiosa construcción es simplemente un monumento funerario, y la única de las "Siete Maravillas" de la Antigüedad que ha llegado hasta nosotros.

¿Será posible que los constructores egipcios hubiesen conocido la media y extrema razón, y la hubiesen aplicado en la construcción de la pirámide? Como dice André Pochan en su libro titulado "El Enigma de la Gran Pirámide", ¿o será una simple coincidencia fortuita?

El papiro Rhind o papiro de Ahmés, no contiene ningún problema relativo a la pendiente de la pirámide de Keops; así

que decidí documentarme en autores modernos, que supuestamente, no tuvieran ideas preconcebidas sobre las dimensiones de la pirámide, y que, únicamente se concretaran a citar las dimensiones primitivas que ésta había tenido, ya que, incuestionablemente la erosión y el desgaste sufridos por sus dimensiones a través de los siglos, habrían alterado esta relación, en el caso de haber existido.

Los autores y sus obras son, en un orden arbitrario, que se estableció según la autoridad histórica que se les concedió a cada uno en este trabajo:

En primer lugar considero a Sir Banister Fletcher y su libro: "A HISTORY OF ARCHITECTURE ON THE COMPARATIVE METHOD", que es, sin lugar a dudas, una obra magníficamente documentada en la historia de la arquitectura mundial, desde la más remota antigüedad hasta los tiempos modernos.

Y así, nos dice en la página 33 de la obra citada:

"The Great Pyramid of Cheops (Khufu), near Cairo, Cheops was the son of Seneferu, and the Second King of the Fourth Dynasty. His pyramid, largest of the three on this site, was originally 480 ft. (146 m.) high and 756 ft square on plane, with an area of about 13 acres, or more than twice that of S. Peter, Rome.

The four sides, which, as in all periods with only a minor exception, face the cardinal points, are nearly equilateral triangles and make an angle of $51^{\circ} 52'$ with the ground.

There are three separate internal chambers, due to changes of plan in the course of building. The subterranean chamber and the so-called "Queen Chamber" are discarded projects, abandoned in turn in favour of the "King's Chamber" where the granite sarcophagus is located".

Este mismo autor, al describir la Pirámide de Micerinos dice:

"The Pyramid of Mykerinos (Menkoura) (Fourth Dynasty) is much smaller than its two predecessors at Gizeh (356 ft square and 218 ft high, with sides sloping at 51°).

Much of the casing is preserved, and mainly Tura limestone but includes sixteen base courses in granite".

El segundo autor es John Mansbridge, quien en su libro - "HISTORIA GRÁFICA DE LA ARQUITECTURA", en la página 17, escribe:

Pirámides. La Gran Pirámide de Gizeh. Tumba del Faraón -- Keops. Dinastía IV.

Construida con piedra local sobre un núcleo de roca con bloques de revestimiento de piedra caliza de Tura. Construida con cerca de 2 300 000 bloques de piedra, cada uno de 2-1/2 toneladas aproximadamente.

Es probable que por un período de 20 años, 100 000 hombres fueron alistados anualmente, durante los tres meses de inundaciones del Nilo (Julio a Octubre), para transportar - piedra. También fueron utilizados cerca de 4 000 albañiles - y ayudantes".

Su altura 144 m., lados 227 m. y 226 m., Área 52 400 m² y un ángulo de las caras con el suelo de 51° 50' ".

El tercer autor es René Poirier, y su libro: "LA EPOPEYA DE LAS GRANDES CONSTRUCCIONES, De la Torre de Babel a la Ciudad del Átomo". En la página 51 tiene los siguientes datos:

"Algunas Dimensiones, Volúmenes y Pesos Comparados de las Tres Pirámides del Grupo de Gizeh".

(Únicamente transcribimos los datos de la pirámide de Jeops).

Lado de la base antigua. (en metros)	230
Lado de la base actual.	227
Altura antigua.	146
Altura actual.	137
Antigua longitud de una mediana de la cara.	186
Longitud actual de una mediana de la cara.	173
Antigua superficie de la base (en metros cuadrados).	53 000
Volumen antiguo (en metros cúbicos).	2 580 000

Peso teórico (densidad, 2.5) en toneladas.

6 250 000.

De acuerdo con estas medidas el ángulo del talud que forman las caras de la pirámide con el piso, cumple la siguiente relación trigonométrica:

$$\cos A = \frac{115}{186} = 0.618\dots$$

Que corresponde a un ángulo:

$$A = 51^\circ 50'.$$

Ahora bien, este ángulo es, como ya hemos visto, la solución de la ecuación trigonométrica:

$$\cos^2 \phi + \cos \phi - 1 = 0$$

Que en su forma más general se expresa como:

$$x^2 + x - 1 = 0$$

o sus variantes:

$$x + 1 - 1/x = 0$$

$$1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0$$

Conclusión: el coseno del ángulo del talud de la cara de la pirámide con el piso, coincide con el número de oro.

Aquí debemos prevenirnos contra las exageraciones concernientes a los avances alcanzados por el conocimiento matemático egipcio en la antigüedad; pues toda clase de ciencia avanzada ha sido atribuida a los constructores de las pirámides, de 3,000 años antes de J. C. y aún en años más remotos.

Desgraciadamente, mientras no se encuentre un documento, que, con una gran autoridad histórica, nos muestre que los arquitectos egipcios hicieron un uso consciente de la proporción áurea, aplicada a la relación entre el cateto adyacente y la hipotenusa del talud de la cara de la pirámide, debemos concluir que esto se debe a una simple casualidad.

Y, por supuesto, que estas relaciones sólo pudieran expresarse en forma geométrica, ya que nuestra actual notación trigonométrica se remonta solamente a Leonardo Euler, en el siglo XVIII.

Quizá sea este el edificio más venerable de toda la historia de la humanidad, y sobre el que más se haya escrito. Con mirada apasionada y escrutadora se han acercado a él: arqueólogos, historiadores del arte, arquitectos, geómetras, teóricos y ensayistas, sin incluir en esta cita, los múltiples escritores y poetas que han ensalzado sus inefables bellezas.

No podemos aquí, ni mucho menos, hacer una exégesis de todo ello. Nos vamos a reducir a una muy breve y prudente descripción de las proporciones de su fachada principal, y su relación, muchas veces citada en la literatura especializada, con la proporción áurea.

El Partenón, erigido en la Acrópolis de Atenas en tiempos de Pericles, por los arquitectos Ictinos y Calícrates, y teniendo como escultor a Fidias, es el clásico representante del orden dórico, y es un templo amphipróstilo, periptero y octástilo; y de él se dice, que su fachada principal está inscrita, casi exactamente, dentro de un rectángulo áureo.

Se llaman amphipróstilos los templos que tienen dos porticos, uno al frente y el otro al fondo; peripteros cuando tienen dos hileras de columnas, una en el costado derecho y otra en el izquierdo; y octástilos, cuando tienen ocho columnas en el pórtico.

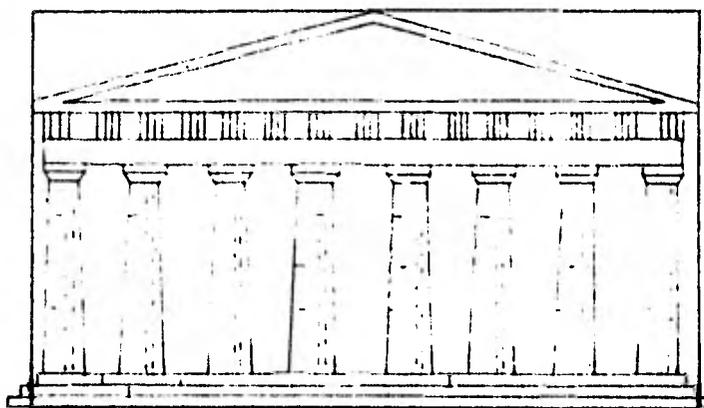
Es ésta una de las creaciones artísticas más acabadas e impresionantes, que casi escapa a nuestra comprensión. La admiramos y nos sentimos subyugados por ella, pero no sabemos qué es lo que se nos presenta.

Su fachada, sin incluir la acrótera, que es un remate ornamental sobre el frontispicio, deja fuera del rectángulo dorado, sólo una pequeña parte de los escalones del crepidoma. Los griegos nos legaron la media y extrema razón, que es el fundamento para el trazo del rectángulo áureo; pero en la arquitectura, no sabemos que implantaran cánones o módulos en sus trazos, como posteriormente lo hicieron los romanos, al copiar las obras griegas; en Grecia, había una gran libertad en las creaciones de sus artistas, pero eso sí, éstos tenían un gusto exquisito.

Las plantas de sus templos eran generalmente, más alarga-

das que un rectángulo áureo; así pues, estimo que es sólo casual, el que la fachada de este templo maravilloso, esté inscrita aproximadamente en un rectángulo dorado.

ARQUITECTURA GRIEGA



FRONTISPICIO DEL PARTENON

4.3

EL RECTÁNGULO DE ORO.

Vamos ahora a obtener el rectángulo de oro. Primero trazamos un cuadrado cuyos lados midan 2 unidades, en seguida, - conectamos el punto medio de uno de los lados del cuadrado -- con alguno de los vértices opuestos. Entonces:

$$(CE)^2 = (EB)^2 + (BC)^2 \quad (\text{T.I.47}).$$

$$(CE)^2 = 1 + 4 = 5$$

$$CE = \sqrt{5}$$

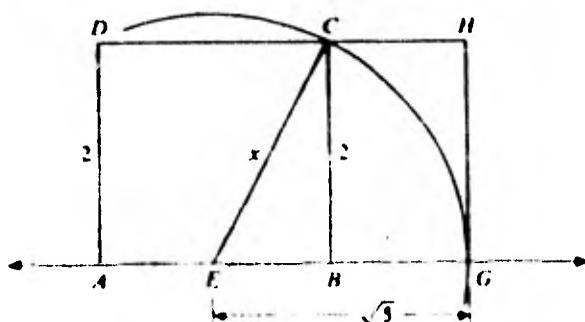
Usando el punto E como centro y CE como radio, trazamos un arco de circunferencia, que corta a la recta AB en el -- punto G:

$$CE = EG \quad (\text{D.I.15}).$$

El rectángulo AGHD es una figura geométrica con la propor-- ción divina, y la relación de la anchura de este rectángulo a su longitud es:

$$\frac{2}{(1 + \sqrt{5})} = 0.618\dots$$

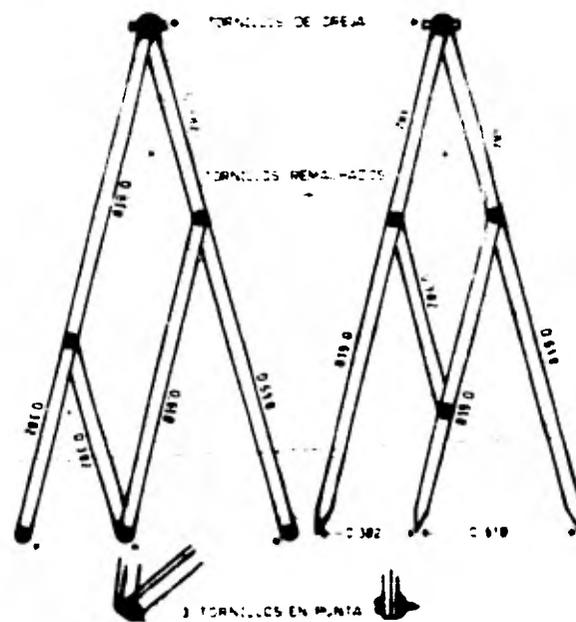
que es la sección de oro o " ϕ ", y el rectángulo AGHD es llamado el rectángulo de oro.



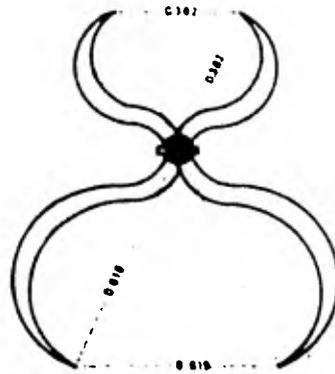
La Universidad Nacional Autónoma de México, ha publicado en 1978, un libro escrito por el Sr. Santos Balmori, que lleva por título:

Ø **ÁUREA MESURA**, la composición en las artes plásticas, - en donde se hace un amplio estudio de esta proporción, en los trazos en esculturas y pinturas; también se muestra la construcción de varios compases para el trazo directo de la proporción áurea; lo que muestra una inquietud actual en las Artes Plásticas por el estudio de este tema.

COMPASES EN TRES PUNTAS, EN Ø

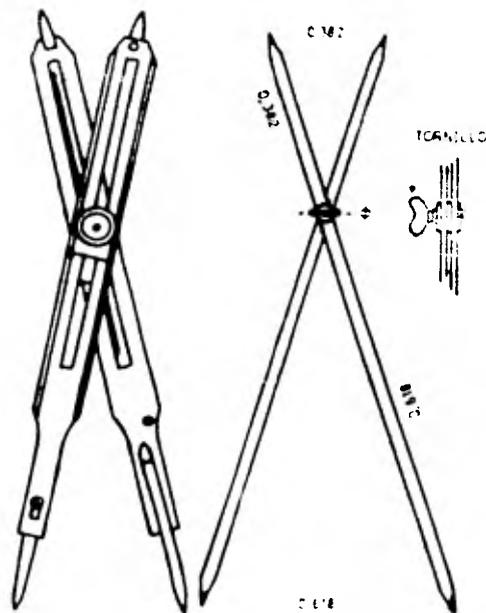


COMPÁS PARA VOLUMEN O ESPESOR



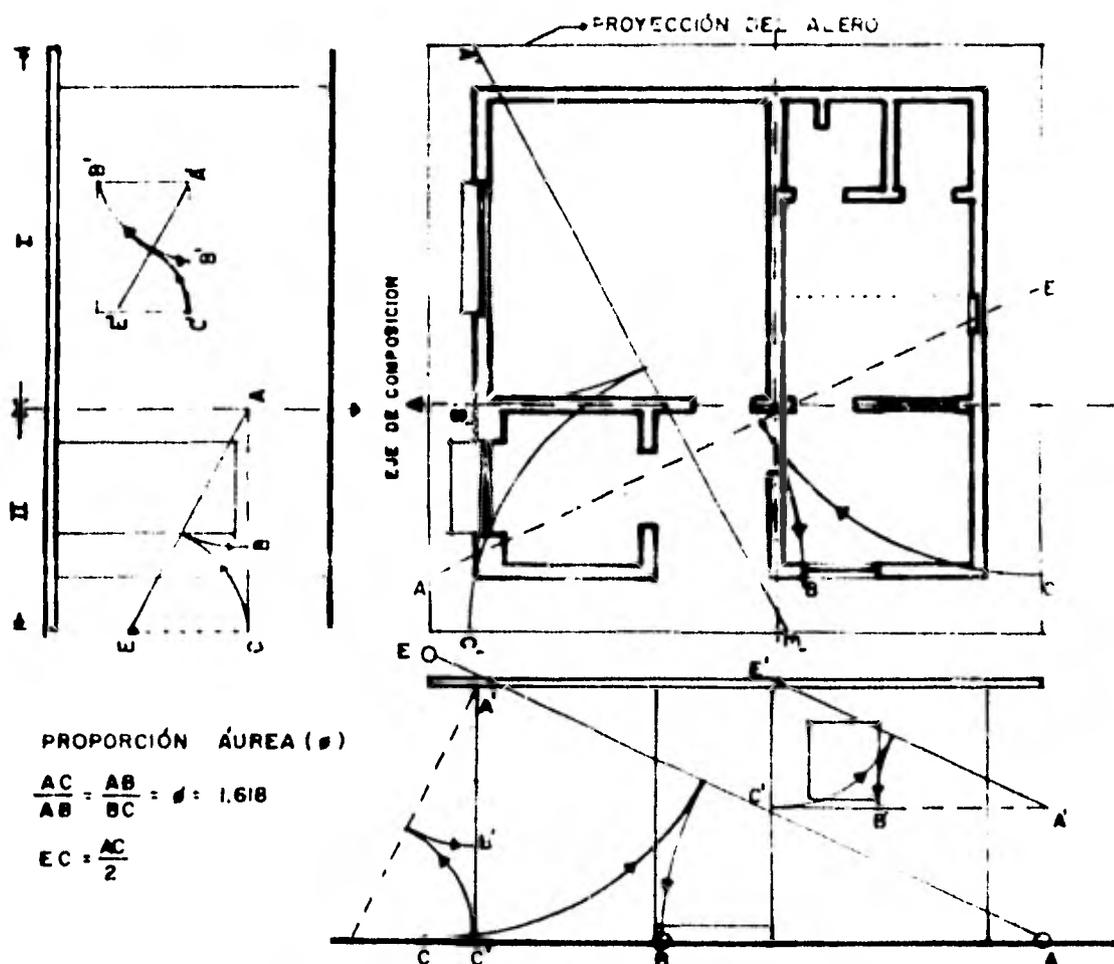
COMPÁS DE ANÁLISIS

COMPÁS DE 4 PUNTOS



Recientemente, en la pequeña construcción de la casa del portero, en la Granja Snitri de Popotla, el Sr. Arquitecto -- José Villagrán García, emplea la proporción áurea en el diseño de esta vivienda.

(Cuaderno de Arquitectura No. 7 del Instituto Nacional de Bellas Artes).



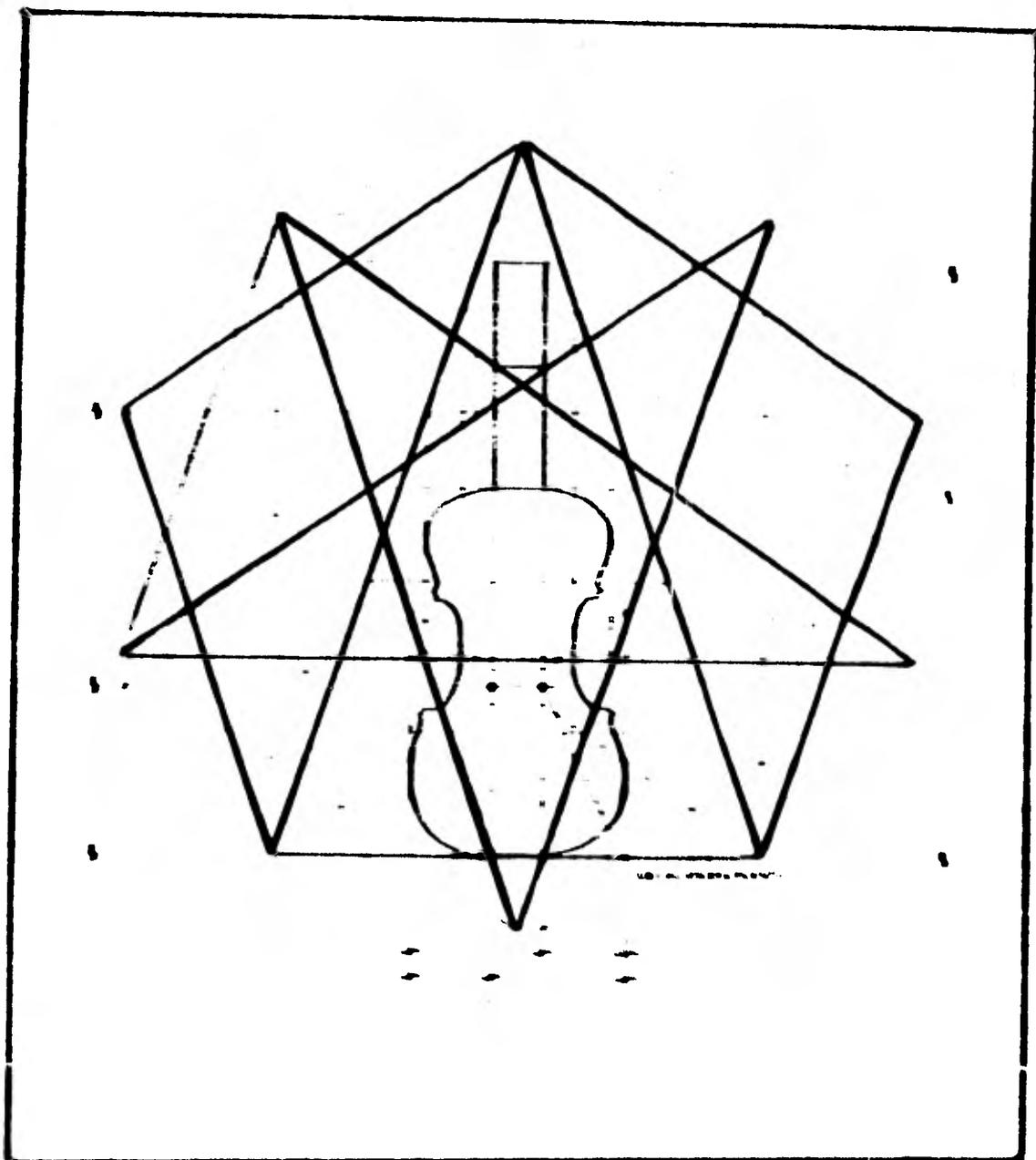
En diferentes creaciones artísticas, principalmente en el Renacimiento, y aún en los tiempos modernos, muchos artistas hicieron, y continúan haciendo, un uso consciente de la proporción áurea en sus obras.

Los humanistas del Renacimiento eran neoplatónicos y consideraban la obra de Platón como la máxima realización de la cultura clásica; y, en general, se creía que los rectángulos más hermosos y mejor proporcionados, eran aquellos cuyos lados cumplían con la proporción áurea.

Algunos dicen, que fue Leonardo da Vinci, uno de los más grandes genios de todos los tiempos, quien le da el nombre de sección áurea, y de allí la denominación de sección dorada; asimismo, dió las proporciones ideales de la figura humana en términos de la sección de oro, según lo muestra en un famoso dibujo tomado de sus Cuadernos.



Los maestros de Cremona en Italia, también emplearon la -
proporción áurea para el trazo de sus violines. Como se mues-
tra en la figura siguiente.



En el artículo "La Geometría y la Piedra del Sol", el --
Sr. Arquitecto Carlos Chanfón Olmos, dice en el Párrafo 1 , -
LA SECCIÓN ÁUREA.

"...Resulta pues interesante comprobar su existencia en -
el diseño de la Piedra del Sol..."

"Sería difícil fundamentar alguna hipótesis explicativa, -
incluidas las tesis difusionistas, para explicar la presencia
de " ϕ " en este diseño Mexica..."

(Revista de Churubusco 1978).



Sir Theodore A. Cook, en su libro "THE CURVES OF LIFE", publicado en Londres, en 1914, hace una descripción de varias pinturas famosas, como "El Nacimiento de Venus", del pintor Sandro Botticelli, en donde la púdica dama es, naturalmente, una Venus bellísima; y en "El Caballero Sonriente", de Frans Hals, hace también intervenir el número de oro, al estudiar las proporciones de los cuerpos humanos que aparecen en los cuadros. Ha elegido ciertos aspectos de su forma para mostrar, que las distancias entre ellos, corresponden a la proporción áurea.

Cabría discutir con Sir Theodore acerca de su preferencia en la elección de ciertos puntos más que otros. Leonardo da Vinci, eligió el ombligo como un punto clave y Sir Theodore - siguió su ejemplo.



Los arquitectos del Renacimiento ya conocían la proporción áurea, ya citada en relación con la construcción del pentágono regular, Euclides T.IV.11, pero no se sirvieron de ella en forma eficaz como instrumento de proporción. Sin embargo, manifestaron gran interés por ella, y Piero de la Francesca y Fra Luca Pacioli, en sus estudios sobre los cinco sólidos regulares o sólidos platónicos, demostraron que habían aprendido todo lo que Euclides podía haberles enseñado.

Sabemos que Fra Luca Pacioli se refería a la proporción áurea como "la divina proportione", y se cree que el término "proporción áurea" se originó en Alemania durante la primera mitad del siglo XIX.

También Le Corbusier, cuyo sistema de proyección arquitectónica se sirve de una escala, el Modulor, inventada por él mismo y que asegura la repetición de formas similares. El Modulor consiste en dos escalas, la roja y la azul. Las dimensiones de la escala azul son el doble de las de la roja, y las divisiones de cada escala se basan en la proporción áurea

Ya que hemos mostrado cierto entusiasmo por la proporción áurea, debemos subrayar aquí, que por cada entusiasta ha habido también un crítico severo. John Ruskin, en su libro *Arte primitivo y pintores modernos*, dijo:

"...la determinación de lo que son proporciones correctas o incorrectas es tanto cuestión de sentimiento y experiencia como lo es la apreciación de una buena composición musical".

Tres años más tarde, en *Las Siete Lámparas de la Arquitectura*, Ruskin menosprecia el empleo de las proporciones en la arquitectura, comparándolo a la "disposición de los platos en la mesa, de los adornos de un vestido". Ruskin fue un escritor con mucha influencia en Inglaterra.

¿Es verdad que un rectángulo cuyos lados están conformes a la proporción áurea, es más hermoso que un rectángulo cuyos lados guardan la proporción de 2:1, por ejemplo, o la de 3:2, o la de 5:7? Se han llevado a cabo experimentos para decidir esta pregunta, y se ha llegado a conclusiones no del todo convincentes, aunque tal vez algo inclinadas en favor de la proporción áurea. Pero, ¿puede un rectángulo, por sí solo, ser extraordinariamente hermoso o bien feo en extremo?

El secreto de las proporciones no parece residir en las formas en sí, sino en la relación que existe entre ellas. En las teorías de la estética, que naturalmente tratan sobre lo

que se ve, provocan fuertes pasiones en personas aparentemente apacibles. En cualquier biblioteca, en la sección dedicada a la arquitectura, cabe leer libros en los que se ataca la -- proporción áurea como instrumento arquitectónico, y, algunos de ellos están escritos con razonamientos perfectamente sensatos.

Hay algunas veces que se menciona como un fenómeno psicológico la atracción que los seres humanos sienten por esta -- proporción; desafortunadamente, hoy estamos menos seguros con respecto a lo que queremos decir cuando hablamos de un fenómeno puramente psicológico. De todos modos, a mí habría de -- resultarme muy difícil aceptar como verdadera semejante condición. Así pues, creemos que es imposible ponerse de acuerdo sobre lo que constituye la belleza y la elegancia en las matemáticas.



Alberto Durero, creía haber hallado una progresión geométrica entre las medidas comprendidas, entre cuello y cadera, cadera y rodilla, y rodilla y tobillo; de manera que, para la mayoría de los seres humanos se tenía:

$$(\text{Cuello a cadera})(\text{rodilla a tobillo}) = (\text{cadera a rodilla})^2.$$

Algunos autores, como el astrónomo Harlow Shapley, consideran al hombre como una media universal, así en su libro "DE ESTRELLAS Y HOMBRES", dice:

"Espacio: Nos resulta más fácil colocarnos en la categoría de tamaños. Ocurre que el hombre es casi exactamente tantas veces que un átomo de hidrógeno, como tantas veces menor que el Sol. Geométricamente, como lo expresamos, estamos en el término medio de la serie de los cuerpos materiales, esto es:

$$\frac{\text{estrella}}{\text{hombre}} = \frac{\text{hombre}}{\text{átomo}}$$

y esto es aproximadamente cierto, lo mismo si hacemos la medición en gramos de peso o en centímetros de diámetro".



Deseo expresar mi gratitud, a todos los maestros de la -- Facultad de Ciencias de la UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE -- MÉXICO, recordando estas sabias palabras:

"SI HE PODIDO VER UN POCO MÁS LEJOS QUE ALGUNOS OTROS, HA SIDO PORQUE ESTUVE PARADO SOBRE LOS HOMBROS DE GIGANTES".

Así se expresó Sir Isaac Newton, autor de uno de los libros científicos más grande de todos los tiempos: su

"Philosophiae Naturalis Principia Mathematica".

O más comunmente, su "Principia".

Así reconoció él su deuda a los grandes hombres de ciencia que le precedieron; y nosotros, los hombres de esta época, hemos heredado un legado científico mucho mayor que el heredado por Sir Isaac Newton.

También deseo agradecer a mi esposa Teresita y a mis hijos, quienes con su apoyo y comprensión, hicieron posible la realización de esta tesis.

A	α	1	Ι	ι	10	Ρ	ρ	100	α	1000
B	β	2	K	κ	20	Σ	σ	200	β	2000
Γ	γ	3	Λ	λ	30	T	τ	300	γ	3000
Δ	δ	4	M	μ	40	Υ	υ	400	δ	4000
E	ε	5	N	ν	50	Φ	φ	500	ε	5000
Z	ζ	6	Ξ	ξ	60	Χ	χ	600	ζ	6000
H	η	7	Ο	ο	70	Ψ	ψ	700	η	7000
Θ	θ	8	Π	π	80	Ω	ω	800	θ	8000
Φ	φ	9	Q	q	90	Α	α	900	φ	9000
σ, σ α: 0										

BIBLIOGRAFÍA.

- 1.- EUCLIDES. Elementos de Geometría. Libros I y II, precedidos de "Los Fundamentos de la Geometría" por el Dr. David Hilbert. Introducción y notas del Dr. Juan David García Bacca. Universidad Nacional - Autónoma de México, 1944.
- 2.- EUCLIDES. Elementos de Geometría. Libros III, IV y V. En la versión, prólogo y notas del Dr. José Álvarez Laso, C. M. F. Universidad Nacional Autónoma de México, 1956. Estas dos obras pertenecen a la BIBLIOTHECA SCRIPTORUM GRECORUM ET ROMANORUM MEXICANA.
- 3.- EUCLID'S ELEMENTS. THE THIRTEEN BOOKS OF. Translated from the Text of Heiberg. With Introduction and Commentary by Sir Thomas L. Heath. Volumes I, II y III. Dover Publications, Inc. New York. 1956.
- 4.- GREEK MATHEMATICS. By Sir Thomas L. Heath. Dover Publications, Inc. New York. 1963.
- 5.- A CONCISE HISTORY OF MATHEMATICS. By Dirk J. Struik. Dover Publications, Inc. New York. 1967.
- 6.- FUNDAMENTOS DE GEOMETRÍA. H. S. M. Coxeter, F.R.S. Editorial Limusa - Wiley, S. A. México. 1971.
- 7.- A HISTORY OF MATHEMATICS. By Carl B. Boyer. John Wiley & Sons, Inc. New York. 1968.
- 8.- MATEMÁTICAS EPISODIOS HISTÓRICOS, Desde Babilonia hasta Ptolomeo. Por Asger Aaboe. Randon House. The L. W. Singer Company. Editorial Norma. Colombia.-- 1964.
- 9.- LA GEOMETRÍA EN EL ARTE. Dan Padoe. Editorial Gustavo Gili, S. A. Barcelona, España. 1976.
- 10.- ÁUREA MESURA ϕ . La Composición en las Artes Plásticas.-- Por Santos Balmori. Universidad Nacional Autónoma de México. 1978.

- 11.- LA DIVINA PROPORCIÓN. Por Luca Pacioli. Editorial Losada Buenos Aires, 1959.
- 12.- THE DIVINE PROPORTION. A Study in Mathematical Beauty.-- by H. E. Huntley. Dover Publications, Inc. New York, 1970.
- 13.- THE CURVES OF LIFE. By Theodore Andrea Cook. Dover Publications, Inc. New York, 1979.
- 14.- ¿QUÉ ES LA MATEMÁTICA? Por Richard Courant y Herbert Robbins. Aguilar, S. A. de Ediciones. Madrid, --- 1967.
- 15.- ECUACIONES DIFERENCIALES. Por H. B. Phillips. Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana. México, - 1945.
- 16.- LOS NÚMEROS DE FIBONACCI. N. N. Varobyob. Editorial Limmusa. México, 1973.
- 17.- MATHEMATICAL PUZZLES & DIVERSIONS. By Martin Gardner. -- A Fireside Book Published By Simon and Schuter. New York, 1961.
- 18.- ESTÉTICA DE LAS PROPORCIONES EN LA NATURALEZA Y EN LAS ARTES. Por Matila C. Ghyka. Editorial Poseidon. Buenos Aires, 1977.
- 19.- EL NÚMERO DE ORO I LOS RITMOS. Por Matila C. Ghyka. Editorial Poseidon. Buenos Aires, 1968.
- 20.- EL NÚMERO DE ORO II LOS RITOS. Por Matila C. Ghyka. Editorial Poseidon. Buenos Aires, 1968.
- 21.- ELEMENTARY SEISMOLOGY. By Charles F. Richter. W. H. --- Freeman and Company. San Francisco, 1958.
- 22.- EARTHQUAKES A PRIMER. By Bruce A. Bolt. W. H. Freeman -- and Company. San Francisco, 1978.
- 23.- THEORY OF PLATES AND SHELLS. By S. Timoshenko. Mc. Graw-Hill Book Company, Inc. New York and London, -- 1040.
- 24.- ESTÁTICA ELEMENTAL DE LAS CÁSCARAS. Por Alf Pfluger. Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1964.

- 25.- **EQUILIBRIUM OF SHELL STRUCTURES.** By Jacques Heyman. Oxford Engineering Series. Clarendon Press. Oxford, 1977.
- 26.- **CONCEPTOS MATEMATICOS, Un Enfoque Histórico.** Por Margaret F. Willerding. Serie Complementos de Matemáticas. C. E. C. S. A. México, 1971.
- 27.- **HISTORY OF MATHEMATICS.** Volumes I, II. By David Eugene Smith. Dover Publications, Inc. New York, 1958.
- 28.- **A HISTORY OF ARCHITECTURE ON THE COMPARATIVE METHOD.** By Sir Banister Fletcher. University of London. The Athlone Press, 1967.
- 29.- **HISTORIA GRÁFICA DE LA ARQUITECTURA.** Por John Mansbridge Editorial Victor Lerú. Argentina, 1969.
- 30.- **LA EPOPEYA DE LAS GRANDES CONSTRUCCIONES,** De la Torre de Babel a la Ciudad del Átomo. Por René Poirier. - Editorial Labor, S. A. Barcelona, 1965
- 31.- **REVISTA MATEMÁTICA.** Número III. Los Elementos de Euclides. Por Dirk Jan Struik. Sociedad Matemática Mexicana, Enero de 1958.
- 32.- **REVISTA MATEMATICA. MATEMÁTICAS Y ENSEÑANZA.** La Geometría y el Método Axiomático. Por Eugenio Filloy. Números 7 y 8.
- 33.- **CIENCIA ANTIGUA Y CIVILIZACIÓN MODERNA.** Por George Sarton. Breviario No. 155. Fondo de Cultura Económica. México, 1960.
- 34.- **LOS NÚMEROS Y SUS MISTERIOS.** Por André Warusfel. Ediciones Martínez Roca, S. A. Barcelona, 1968.
- 35.- **THE THEORY OF EQUILIBRIUM OF ELASTIC SYSTEM AND ITS APPLICATIONS.** By Carlo Alberto Pio Castigliano. - Dover Publications, Inc., New York, 1966.
- 36.- **ELASTIC ENERGY THEORY.** By J. A. Van Den Broek, PH. D. -- John Wiley and Son, Inc. London: Chapman & Hall, Limited. New York, 1956.
- 37.- **GEOMETRÍA PLANA Y DEL ESPACIO.** Por Jorge Wentworth y David Eugenio Smith. Ginn y Compañía. Boston, 1915

C O N T E N I D O

CAPÍTULO	PÁGINA
INTRODUCCIÓN	1
I LA MEDIA Y EXTREMA RAZÓN	16
1.1 Definiciones	17
1.2 Postulados	20
1.3 Nociones Comunes o Axiomas	21
1.4 Teorema II.6	24
1.5 Teorema II.11	26
1.6 Teorema III.36	28
1.7 Teorema III.37	31
1.8 Teorema IV.10	33
1.9 Teorema IV.11	35
1.10 Teorema VI.17	37
1.11 Teorema VI.30	39
1.12 Teorema XIII.1	41
1.13 Teorema XIII.2	42
1.14 Teorema XIII.3	44
1.15 Teorema XIII.4	45
1.16 Teorema XIII.5	46
1.17 Teorema XIII.6	47
1.18 Teorema XIII.8	49
1.19 Teorema XIII.9	50
1.20 Proposición 2 y Lema	52
1.21 Teorema de Aristeo (Demostración)	53
1.22 Teorema Constructivo	55
1.23 Construcción del Pentágono Regular	57
1.24 La Arbelos o Cuchilla del Zapatero	58
1.25 La Trisección de un Ángulo	59
II EL PRINCIPIO DE LA MÍNIMA ACCIÓN	61
2.1 Cubiertas Laminares o Cascarones	64
2.2 Equilibrio del Elemento de Cascarón	66
III LOS NÚMEROS DE FIBONACCI	82
3.1 Número, Planta, Sol	85
3.2 La Espiral Áurea	88
3.3 Los Determinantes de los Números de Fibonacci	92
3.4 Los Números de Fibonacci y el Binomio de Newton	93

CAPÍTULO	PAGINA
3.5 El Nudo Áureo	94
3.6 Lenguaje de Programación BASIC	94
3.7 A la Divina Proporción	97
3.8 Fra Luca Pacioli di Borgo	98
IV LA PROPORCIÓN ÁUREA EN EL ARTE	102
4.1 La Gran Pirámide de Keops	102
4.2 El Partenón de Atenas	106
4.3 El Rectángulo Áureo	108
BIBLIOGRAFÍA	120
CONTENIDO	123



