(7) 2 ejem

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Teoría de Perturbación del espectro singularmente continuo y operadores de onda.

TESIS PROFESIONAL

que para obtener el Título de

LICENCIADO EN MATEMATICAS

p r e s e n t a :

JUAN HECTOR ARREDONDO RUIZ

México, D. F. 1981

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

INDICE

I N T R O D U C C I O N

Daremos una breve descripción del aspecto físico que subyace en los problemas - matemáticos que presentaremos. Para una descripción detallada ver [6],[9] [10].

La física que corresponde a estos problemas es llamada Teoría de Colisiones, la cual puede ser considerada como una de las ramas más importantes de la Mecánica Cuántica. La Teoría de Colisiones trata con sistemas en estados especiales: los estados de colisión, éstos - ocurren en experimentos de laboratorio o en la misma naturaleza. Existen distintas versiones de experimentos en colisiones, aunque todos ellos tienen ciertos elementos en común: en la naturaleza se da por ejemplo, cuando la luz del sol choca con las partículas de la atmósfera, de ahí el color azul del cielo.

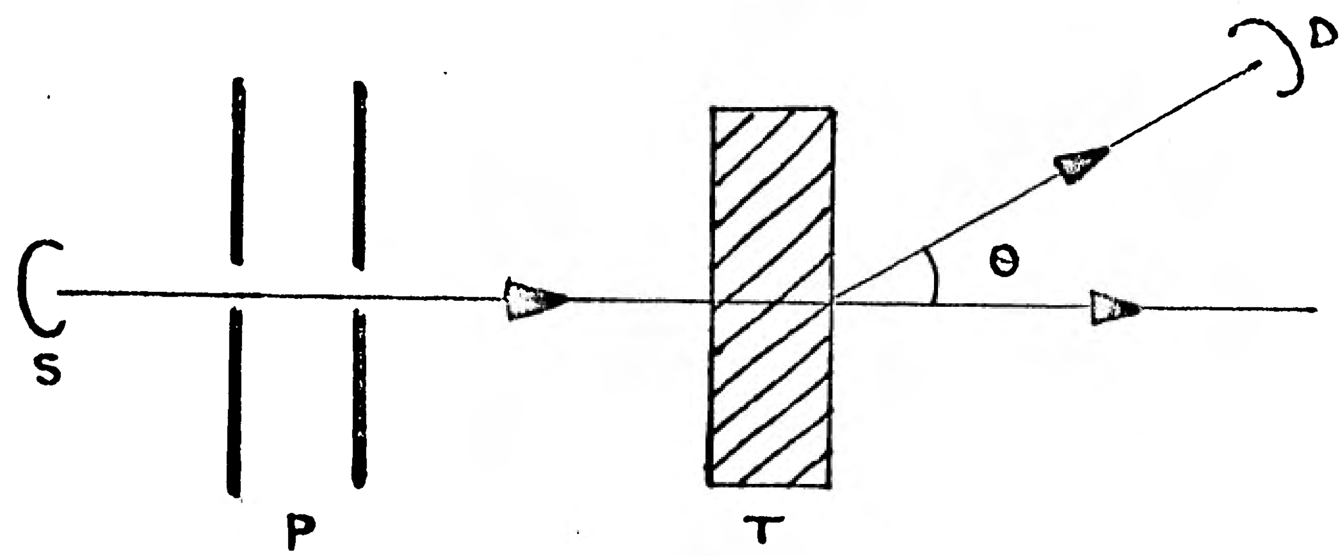


FIGURA I

La figura I representa las partes esenciales que pueden ser identificadas en casi -- cualquier experimento de colisión, éstas son : la fuente S, el mecanismo preparador P, el - blanco T y el detector D.

La fuente S produce las partículas que van a entrar en colisión con las partículas del blanco T. Es importante que la fuente pueda producir partículas bajo condiciones bien - definidas y casi idénticas, puesto que todos los experimentos en colisiones envuelven repetidas mediciones sobre los mismos sistemas. El mecanismo preparador (por ejemplo un polarizador) sirve para definir las condiciones iniciales de las partículas incidentes, usualmente el - momento de la partícula.

El blanco T contiene las partículas que interactuarán con las partículas enviadas -- por la fuente S. Las condiciones del blanco T pueden tener importantes efectos sobre el experimento y deben ser conocidas y consideradas con el fin de relacionas las observaciones a --- las interacciones individuales. Por ejemplo, si el blanco T es grueso, entonces colisiones --- múltiples pueden ocurrir, lo cual afectará la distribución angular de las partículas detectadas de manera significativa. Si el blanco T tiene una estructura cristalina, los efectos de interferencia serán importantes y conducirán a difracción. Si por ejemplo, las partículas del blanco están en movimiento deben ser tomadas en cuenta.

El detector D es usualmente puesto de tal forma que solamente detecte partículas -- que entraron en colisión con el blanco, es decir, el detector no debe responder si el blanco es quitado. Esto en lo práctico no siempre es posible. Es importante también que el detector sea puesto suficientemente lejos del blanco, de tal suerte que la interacción entre el blanco y las partículas que entraron en colisión sea despreciable cuando las partículas sean detectadas.

En todo este proceso se pueden distinguir tres estados en la evolución temporal del - sistema. En el primero, el estado del sistema está preparado en el pasado, durante éste, la - partícula incidente y el blanco se supone que están lo suficientemente lejos entre sí para que la interacción entre ellos no tenga prácticamente efecto sobre la evolución de la partícula.

Esta suposición siempre es hecha en la interpretación de experimentos de colisiones donde - las condiciones iniciales son los valores de un conjunto de cantidades físicas que son las que caracterizan las partículas libres. Por ejemplo, momento, spin, masa, por lo tanto, uno espera que en el pasado el estado del sistema evolucione de acuerdo a las leyes que obedecen las partículas libres.

Durante el segundo estado, las partículas interactúan entre sí y la evolución está gobernada por una ecuación de movimiento para el cual el término de interacción juega un - papel esencial. Es realmente cuando se produce la colisión.

Durante el tercer estado, uno se encuentra en la misma situación que en el primer estado. Después de que la colisión se ha efectuado, las partículas se separan y otra vez la interacción entre ellos no tiene prácticamente efecto alguno en la futura evolución de la partícula. En el futuro el detector observa el nuevo estado de la partícula que produce la colisión. La condición de que los estados que describen colisiones deben ser caracterizables para tiempos largos(tanto negativos como positivos) por las cantidades que caracterizan a las partículas libres, es llamada condición asintótica. Para ser más claros, supongamos que podemos representar las dinámicas como transformaciones actuando sobre los estados. Sean T_t y $T_t^{(o)}$ las transformaciones de interacción y libre respectivamente sobre el "conjunto de estados" Σ . Uno se interesa en la existencia de parejas $\langle \varphi_-, \varphi \rangle \in \Sigma$ tales que

$$\lim_{t \to -\infty} \left(T_t \varphi - T_t^{(o)} \varphi_- \right) = 0 \qquad (1)$$

para alguna cierta noción de convergencia y similarmente para parejas que se aproximen -- entre sí conforme $t \to +\infty$. Uno requiere que bajo esta noción de convergencia, para cada φ debe existir a lo más un φ_- .

La evolución en el tiempo o la dinámica de un sistema cuántico conservativo viene --

dada por un grupo unitario fuertemente continuo a un parámetro (ver definición XVI). Si el vector unitario f representa el estado al tiempo $t=o$, el estado f_t al tiempo t estará dado por

$$f_t = U_t f \qquad (2)$$

Por el lema XXII, se sigue que existe un operador autoadjunto H, tal que $U_t = e^{-itH}$.

Consideremos entonces dos grupos unitarios e^{-iHt} y e^{-itH_o} que corresponden a la dinámica libre. El que $e^{-itH}\varphi$ sea asintoticamente libre cuando $t \to -\infty$ quiere decir que existe un vector φ_+ tal que

$$\lim_{t \to -\infty} \| e^{-itH_o}\varphi_+ - e^{-itH}\varphi \| = 0 \qquad (3)$$

usando la unitariedad de e^{-itH}, (3) es equivalente a que

$$\lim_{t \to -\infty} \| e^{itH} e^{-itH_o}\varphi_+ - \varphi \| = 0 \qquad (4)$$

la cuestión se reduce al problema de probar la existencia de límites fuertes.

En muchos casos, Ho tiene espectro absolutamente continuo, pero en los casos que no es así, necesitamos tomar φ_+ en el subespacio de continuidad de Ho. Por ejemplo, si φ_+ es un eigen valor de Ho, entonces el límite fuerte existiría sí y solo sí φ_+ fuera también un -- eigenvalor. de H y con el mismo eigenvalor.

Por consiguiente es preferible definir las operadores de onda anteponiendo la proyección sobre el espacio de continuidad de Ho. Por razones de conveniencia técnica, los definirémos sobre el subespacio de continuidad absoluta. La teoría de operadores de onda definidos sobre el subespacio de continuidad fue desarrollado por Schechter ⟨7⟩.

Definición: Sean H y Ho operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y sea $P_{ac}(H_o)$ la proyección sobre el subespacio de continuidad absoluta de Ho. Decimos que los operadores de onda generalizados existen si

$$\Omega^{\pm}(H, H_o) := \underset{t \to \mp\infty}{s\text{-}\lim}\ e^{itH} e^{-itH_o} P_{ac}(H_o)$$

existen.

Cuando $\Omega^{\pm}(H, H_o)$ existen, decimos que hay completes asintótica débil

si $\mathrm{Ran}\,\Omega^- = \mathrm{Ran}\,\Omega^+$, Decimos que los operadores de onda son completos si $\mathrm{Ran}\,\Omega^+ = \mathrm{Ran}\,\Omega^- = \mathcal{H}_{ac}(H)$
Finalmente, la condición de completes asintótica significa que $\mathrm{Ran}\,\Omega^+ = \mathrm{Ran}\,\Omega^- = [\mathcal{H}_{pp}(H)]^{\perp}$
Donde P_{pp} es la proyección sobre $\mathcal{H}_{pp}$, el subespacio de eigenvectores de H.

En los siguientes capítulos demostraremos completes asintótica para ciertos operadores de H.

Aparte del método de Enss (<3>, <17>, <20> - <25>, <29>, <57>, <60>, <89>, <73>) que presentaremos, existen ciertos métodos, siendo los más notables: la Teoría de Kato-Birman ([72], [13], <59>, <42>, <68>, <43>, <10>, <9>, <11> <90>, <44>, <16>, <69>, <88>, <54>, <55>) y los métodos estacionarios o independientes del tiempo ([14], <31>, <87>, <61> <62>, <85>, <36>, <67>, <31>, <75>, <78>, <8>, <2>, <39>, <40> <41>, <43>, <52>, <28>, <37>, <92>, <26>, <27>, <70>, <15>, <7>, <66> <12>) A pesar de que la Teoría de Colisiones es básicamente un fenómeno dependiente del tiempo, hasta antes del trabajo de Enss, muy pocos resultados habían sido obtenidos con métodos dependientes del tiempo.

La Teoría de Kato-Birman es un método dependiente del tiempo y su hipótesis principal es que f (H) - f (Ho) defina (en cierto sentido) un operador a traza para ciertas funciones f. Es un método dependiente del tiempo, ya que directamente se demuestra la existencia de los operadores de onda y además que

En cambio, en los métodos estacionarios, la existencia y el hecho que $\mathrm{Ran}\,\Omega^{\pm} = P_{ac}(H)$ se cumplen, son más bien una consecuencia de cierta expansión en autofunciones y del hecho que Ω^+ está muy relacionado a

$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (x + i\varepsilon - H)^{-1}$ y Ω^- a $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (x - i\varepsilon - H)^{-1}$

En contraste con estos métodos, que aún como en la teoría de Kato-Birman es dependiente del tiempo, el método de Enss sigue de cerca el aspecto físico y geométrico del problema. El principio del método es como sigue: uno considera la evolución en el curso del tiempo de un estado de difusión, usualmente de un estado del espectro absolutamente continuo de H. Sea $\varphi(t) = e^{-itH}$ el vector de estado en el tiempo t. Para $|t|$ grande, por ejemplo, t grande y positivo, el vector se encontrará lejos del centro de difusión (en el sentido de la norma) y evolucionará de acuerdo a la evolución libre e^{-itH_0}. En estas condiciones, el vector de estado se concentrará en las trayectorias clásicas engendradas por el Hamiltoniano libre Ho.

Uno puede descomponer aproximadamente $\varphi(t) \sim \varphi_+(t) + \varphi_-(t)$ donde $\varphi_+(t)$ y $\varphi_-(t)$ en las partes saliente y entrante de $\varphi(t)$. Es decir, las partes para las cuales $x \cdot v(k) \geq 0$ y $x \cdot v(k) \leq 0$, donde $v(k)$ es la velocidad clásica.

Uno trata de asegurarse que $x \cdot v(k)$ (respectivamente) $x \cdot v(k) \leq 0$) para x en el soporte de $\varphi_+(t)$ (resp. $\varphi_-(t)$) y k en el soporte de su transformada de Fournier $\hat{\varphi}_+(t)$ (resp. $\hat{\varphi}_-(t)$). En estas condiciones la evolución de $\varphi_+(t)$ en el futuro y de $\varphi_-(t)$ en el pasado está regida por la evolución libre $e^{-isH}\varphi_+(t) \sim e^{-isH_0}\varphi_+(t)$ para $s \geq 0$ y t grande $e^{-isH}\varphi_-(t) \sim e^{-isH_0}\varphi_-(t)$ para $s \leq 0$ y t grande. En consecuencia, uno aproximadamente tiene que

$$\Omega_\pm \varphi_\pm(t) \sim \varphi_\pm(t) \tag{6}$$

y de aquí se muestra que para t grande, $\varphi(t)$ está en $\operatorname{Ran}\Omega^+ + \operatorname{Ran}\Omega^-$ y en consecuencia que $\varphi \in \operatorname{Ran}(\Omega^+ + \Omega^-)$

Para ver que de hecho φ está en cada uno de ellos, por ejemplo en $\operatorname{Ran}\Omega^+$, se recurre al argumento siguiente:

Por definición,

$$\varphi = e^{itH} \sim e^{itH}\varphi_+(t) + e^{itH}\varphi_-(t),$$

donde $\varphi = e^{itH}\varphi(t)$ está aproximadamente en $\operatorname{Ran}\Omega^+$. Para t grande, $\varphi_-(t)$ está lejos del centro difusor, y $e^{itH_0}\varphi_-(t)$ se encuentra aún más. En particular es casi ortogonal a φ. Por consiguiente, $\varphi(t)$ no puede llegar a ser ortogonal a $\varphi_+(t)$. De aquí se desprende que el complemento ortogonal de $\operatorname{Ran}\Omega^+$ en $\operatorname{Ran}\Omega^- + \operatorname{Ran}\Omega^+$ se reduce al vector cero.

Nuestro trabajo está basado en los siguientes artículos: ---- Enss <20> ; Davies <17> ; Perry <60> ; Simon <73> y Ginibre < 29> , en los cuales se encuentran las ideas esenciales del método.

Parte de nuestro trabajo ha sido dar una exposición detallada de estos artículos; teoremas que únicamente se mencionan en los artículos, los hemos --- anexado. Todos los argumentos necesarios para seguir las demostraciones los hemos hecho explícitos. El orden en que hemos expuesto estos artículos ha sido en grado de generalización, también en algunos teoremas hemos dado argumentos distintos y así hemos -- podido debilitar las hipótesis o simplificar las demostraciones.

Por otra parte, los ejemplos expuestos nada más aparecen mencionados en los artículos y nosotros los hemos desarrollado.

En el último capítulo de este trabajo, hemos podido demostrar completes asintótica para la ecuación de Klein-Gordon utilizando el método de Enss.

Finalmente, haremos una descripción de los artículos que presentaremos.

Enss < 20 > basa su demostración en el ahora llamado --- Principio de Descomposición de Enss, el cual contiene básicamente el aspecto geométrico de la demostración. Para ésto, Enss explota la forma explícita del kernel $e^{t\Delta}$ hace uso del teorema de Wiener < 16 > y la "igualdad asintótica de H y Ho" , es - decir, prueba que $\| [\,\phi(H) - \phi(H_0)\,]\, \eta_n \| \to 0$

para un cierto conjunto de ϕ_n y η_n

Davies < 17 > logra debilitar considerablemente la hipótesis y elimina el uso del teorema de Wiener. Da otra versión del Principio de Descomposición de Enss mediante la introducción de la noción de una medida (POV) (Ver preliminares) en lugar de usar la forma explícita del kernel

Perry < 60 > logra el mismo resultado que Davies bajo las mismas hipótesis. Para esto introduce las proyecciones espectrales $P_\pm$ sobre las partes positivas del operador $A = \frac{1}{2}(x \cdot k + k \cdot x)$. Así logra demostrar que

$$(H + i)^{-\alpha} (\Omega^{\pm} - 1)\, g(H_0)\, P_\pm$$

son operadores compactos para $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Aunque para llegar a este resultado utiliza explícitamente que $H_0 = -\Delta$. Por otra parte, como en la nota 22, es fácil ver que este resultado implica el Principio de Descomposición de Enss.

Simon < 73 > considera operadores más generales (Ho vagamente elíptico) y para esto usa una descomposición distinta a la de Enss y la maquinaria de integración por partes sistematizada por Hormander <34> . También usa el teorema de Wiener. Simon considera casos aún más generales, pero cuando Ho es un operador vagamente elíptico, Ginibre < 29> debilita las hipótesis dadas por Simon.

Como Davies < 17> hace notar, su demostración se puede extender a operadores vagamente elípticos. Ginibre utiliza también lo que es una medida POV aunado a algunos argumentos de Compacidad. Las hipótesis de Ginibre < 29 > son aún más débiles que las de Davies < 17 > .

Como hemos dicho ya, Simon < 73> considera casos que los demás autores no consideran, y aunque en el caso en que Ho es vagamente elíptico, Ginibre da hipótesis más débiles que Simon. Siguiendo la demostración de Simon y dando otro fácil argumento se demuestra el teorema dado por Ginibre. Además, la demostración de Simon se puede seguir para considerar casos más generales, por otra parte, las ideas esenciales son para todos los artículos las presentadas por Enss < 20 >

En el último capítulo de este trabajo hemos obtenido completes asintótica para la ecuación de Klein-Gordon, la cual ha sido estudiada en <13> <72>, <45>, <81>, <53>, <72>, <82>, <19>, <32>, <56>, <84> <85>, <81> En < 84 > y < 85> se demuestra que la ecuación de Klein-Gordon es equivalente a una ecuación en $\mathcal{L}_2^2 = \mathcal{L}^2 \oplus \mathcal{L}^2$. Mediante este análisis y el método de Enss se logra demostrar completes asintótica.

PRELIMINARES DE ANALISIS FUNCIONAL

En estas páginas daremos las definiciones y los resultados de Análisis Funcional a los cuales nos referiremos en posteriores capítulos.

Empezaremos por enunciar el teorema espectral. La demostración puede ser encontrada en [1] .

TEOREMA 1 : (Teorema espectral en forma de operador por multiplicación). Sea A un operador autoadjunto sobre un espacio de Hilbert H con dominio D (A). Entonces existe un espacio medible M con medida μ finita, un operador $U : H \to L^2 (M, d\mu)$ y una función F a valores realies medible y finita a.e. tal que

a) $\Psi \in D(A) \iff F(\cdot)(U\Psi)(\cdot) \in L^2(M, d\mu)$

b) Si $\varphi \in U[D(A)]$, entonces $(UAU^{-1}\varphi)(m) \quad F(m)\varphi(m)$

Dado este teorema, podemos definir funciones de un operador autoadjunto de la siguiente forma:

Definición I Dado un operador autoadjunto A definido sobre $\mathcal{H}$ y g una función Borel medible finita a.e. , g(A) es el operador en $\mathcal{H}$ definido por

$$g(A)\varphi := U^{-1} T_g(F)\, U\cdot\varphi \tag{1}$$

donde $T_g(F)$ es el operador de multiplicación en M por la función --- $g(F)(m) = (g \circ F)(m)$ con dominio $\{\Psi \in M \mid g(F)\Psi \in L^2(M, d\mu)\}$

$C_\infty(\mathbb{R})$ es el conjunto de funciones continuas sobre $\mathbb{R}$ que tienden a cero al infinito.

TEOREMA (IIa) (Teorema espectral en forma de cálculo funcional).

Sea A un operador autoadjunto en $\mathcal{H}$. Existe un unico mapeo $\hat{\phi}$ de las funciones de Borel acotadas sobre $\mathbb{R}$ a $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que:

a) $\hat{\phi}$ es un homomorfismo * algebraico. Es decir, $\hat{\phi}$ es lineal y

$$\hat{\phi}(fg) = \hat{\phi}(f)\,\hat{\phi}(g) \qquad \hat{\phi}(\lambda f) = \lambda\hat{\phi}(f)$$

$$\hat{\phi}(\mathbb{I}) = \mathbb{I} \qquad \hat{\phi}(\bar{f}) = \hat{\phi}(f)^*$$

b) $\hat{\phi}$ es continuo, es decir,

$$\|\hat{\phi}(h)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \|h\|_\infty$$

c) Sea $h_n(x)$ una sucesión de funciones borelianas acotadas con $h_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ para cada x y $|h_n(x)| \leq |x|\ \forall n$. Entonces, si $\Psi \in D(A)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \hat{\phi}(h_n)\Psi = A\Psi$

d) $\hat{\phi}(h_n) \to \hat{\phi}(h)$ fuertemente si $h_n(x) \to h(x)$ puntualmente y si $\|h_n\|_\infty$ es uniformemente acotada.

Demostración: Dado el teorema I y la definición I es fácil ver que al menos existe uno. Para ver que es único supongamos que ϕ_1 y ϕ_2 cumplen (a)-(d).

Sea $\mathcal{X}_{\Omega_n}$ la función característica del intervalo $[n,n+1)$ usando (d), se obtiene que

$$s-\lim_{M\to+\infty} \sum_{-M}^{M} \phi_j(\mathcal{X}_{\Omega_n}) = s-\lim_{M\to+\infty} \Phi_j\left(\sum_{-M}^{M} \mathcal{X}_{\Omega_n}\right) = \mathbb{I} \quad \text{para } j=1,2$$

Tomemos $\Psi \in D(A)$. Usando (c)

$$s-\lim_{M\to+\infty} \sum_{-M}^{M} \phi_j(x\,\mathcal{X}_{\Omega_n})\,\Psi = A\Psi. \qquad \text{y entonces,}$$

$$s-\lim_{M\to+\infty} \sum_{-M}^{M} \phi_j\left[(x+i)\,\mathcal{X}_{\Omega_n}\right]\Psi = s-\lim_{M\to+\infty} \sum_{-M}^{M} \phi_j(x\,\mathcal{X}_{\Omega_n})\,\Psi$$

$$+ \; s-\lim_{M\to+\infty} i\sum_{-M}^{M} \phi_j(\mathcal{X}_{\Omega_n})\,\Psi = (A+i)\Psi$$

Entonces, $$\phi_j\left[(x+j)^{-1}\right](A+i)\Psi = \left[s-\lim_{M\to+\infty} \Phi\left[(x+i)^{-1}\right] \sum_{-M}^{M} \phi_j\left[(x+i)\,\mathcal{X}_{\Omega_n}\right]\right]\Psi$$

$$= s-\lim_{M\to+\infty} \sum_{-M}^{M} \phi_j\left[(x+i)^{-1}\right] \Phi_j\left[(x+i)\,\mathcal{X}_{\Omega_n}\right]\Psi$$

Usando (a) $$= s-\lim_{M\to+\infty} \sum_{-M}^{M} \phi_j(\mathcal{X}_{\Omega_n})\,\Psi$$

$$= \Psi$$

En consecuencia, $\phi_j\left[(x+i)^{-1}\right] = (A+i)^{-1}$ para $j = 1,2$.

Similarmente, $\phi_j\left[(x-i)^{-1}\right] = (A-i)^{-1}$. Por el teorema de Stone Weiestrass y b) - se deduce que $\phi_1(f) = \phi_2(f)$ $\forall f \in C_\infty(\mathbb{R})$ y de aquí se desprende que si f es una función continua acotada y que tiene límites en $\pm\infty$ $\phi_1(f) = \phi_2(f)$ ya que $\phi_1(1) = \mathbb{I} = \phi_2(1)$.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fijos. Y tomemos $\{\varepsilon_n\}$ una sucesión de números positivos tales que $\varepsilon_n \to 0$ si $n \to +\infty$. Pongamos $f_n(x) = -\frac{1}{\pi}\left\{\arctan\left(\frac{x-\beta}{\varepsilon_n}\right) - \arctan\left(\frac{x-\alpha}{\varepsilon_n}\right)\right\}$

Por un lado tenemos que $\| f_n \|^*_\infty \leq 1$. Y un simple cálculo muestra que

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \alpha < x < \beta \\ 1/2 & \text{si} \quad x = \alpha \text{ ó } x = \beta \\ 0 & \text{si} \quad x \in [\alpha, \beta] \end{cases}$$

Denotemos por Ω el intervalo (α,β). Usando (d) obtenemos

$$\phi_1\left[1/2\left(\mathcal{X}_{\Omega} + \mathcal{X}_{\bar{\Omega}}\right)\right]\Psi = s-\lim_{n\to+\infty} \phi_1(f_n)\,\Psi$$

$$= s-\lim_{n\to+\infty} \phi_2(f_n)\,\Psi$$

$$= \phi_2\left[1/2\,(x_{\Omega} + x_{\bar{\Omega}})\right]\psi$$

Como α, β son arbitrarios obtenemos que $\phi_1(\chi_{\Omega}) = \phi_2(\chi_{\Omega})$ para $\Omega = (\alpha,\beta)$ $\alpha < \beta$ y por consiguiente si Ω es un subconjunto medible arbitrario $\phi_1(\chi_{\Omega}) = \phi_2(\chi_{\Omega})$. Como las combinaciones lineales finitas de funciones características son densas en L^{∞}, usando (b) se obtiene que $\phi_1 \equiv \phi_2$.

Definición II Sea $\{P_{\Omega} \mid \Omega$ es medible en $\mathbb{R}\}$ una familia de operadores con las siguientes propiedades:

a) Cada P_{Ω} es una proyección ortogonal. Es decir, $P_{\Omega}^2 = P_{\Omega}$ y $P_{\Omega}^* = P_{\Omega}$

b) $P_{\phi} = \bar{0}$, $P_{(-\infty,+\infty)} = \mathbb{1}$

c) Si $\Omega = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Omega_n$ con $\Omega_i \cap \Omega_j = \phi$ con $i \neq j$, entonces

$$P_{\Omega} = s\text{-}\lim_{n\to+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} P_{\Omega_m}$$

d) $P_{\Omega_1} P_{\Omega_2} = P_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$. Decimos que entonces $\{P_{\Omega}\}$ es una -- medida a valores en los proyectores.

Sea ahora Ω un conjunto medible de $\mathbb{R}$ y P_{Ω} el operador $\chi_{\Omega}(A)$ definido por (I), donde χ_{Ω} es la función característica de Ω . De la definición I se verifica directamente que la familia $\{P_{\Omega} \mid \Omega$ medible$\}$ es una medida a valores en los proyectores. Entonces, para φ fijo, φ en $\mathcal{H}$, $\Omega \rightarrow (\varphi, P_{\Omega}\varphi)$ es una medida de Borel, la cual denotaremos por $d(\varphi, P_{\lambda}\varphi)$. Asimismo, la medida compleja - $d(\varphi, P_{\lambda}\psi)$ se define usando la identidad de polarización. Tomemos g una función Borel medible y definamos: $D_g := \{\psi \in \mathcal{H} \mid \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\lambda)|^2\, d(\varphi, P_{\lambda}\varphi)$

Sea $S(x)$ una función simple. Es decir, $S(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{\Omega_j}(x)$ donde χ_{Ω_j} es la función característica del conjunto medible Ω_j . Además, $\Omega_i \cap \Omega_j = \phi$ con $i = j$.

Entonces,

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{\Omega_j}\, d(\varphi, P_\lambda \psi)\right| = \left|\left(\varphi, \sum_{j=1}^{n} c_j P_{\Omega_j} \psi\right)\right| \leq \|\varphi\| \left\|\sum_{j=1}^{n} c_j P_{\Omega_j} \psi\right\|$$

$$= \|\varphi\| \left\{ \sum_j |c_j|^2 \|P_{\Omega_j} \psi\|^2 \right\}^{1/2}$$

$$= \|\varphi\| \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\sum_j c_j \chi_{\Omega_j}\right|^2 d(\psi, P_\lambda \psi)\right\}^{1/2}$$

Usando convergencia dominada obtenemos que para $\psi \in D_g$

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\, d(\varphi, P_\lambda \psi)\right| \leq \|\varphi\| \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\lambda)|^2\, d(\psi, P_\lambda \psi)\right\}^{1/2}$$

Para $\psi \in D_g$ fijo, $\varphi \to \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\, d(\varphi, P_\lambda \psi)$ define una funcional continua (conjugada). Por el lema de Riesz, existe un único elemento $\tilde{g}(A)\psi \in \mathcal{H}$ tal que

$$(\varphi, \tilde{g}(A)\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\, d(\varphi, P_\lambda \psi) \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{H}.$$

Por otro lado, usando (I c) se obtiene que $\underset{n\to+\infty}{\text{s-lim}}\ P_{\Omega_n} = \mathbb{1}$ donde ---

$\Omega_n = \{\lambda \in \mathbb{R} \setminus |g(\lambda)| \leq n\}$. Para cada $\varphi \in \mathcal{H}$, $\varphi_n = P_{\Omega_n}\varphi \to \varphi$ en norma.

Usando (I d) se obtiene. (III)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(\lambda)|^2\, d(\varphi_n, P_\lambda \varphi_n) = \int_{\Omega_n} |g(\lambda)|^2\, d(\varphi, P_\lambda \varphi) \leq n^2 \|\varphi\|^2 < +\infty$$

(III a)

En consecuencia, $\varphi_n \in D_g$. Así, se obtiene que D_g es denso en $\mathcal{H}$.

En consecuencia, el mapeo $\tilde{g}(A) : D_g \to \mathcal{H}$ define un operador lineal densamente definido. Si g es acotada de (II), $D_g = \mathcal{H}$ y $\tilde{g}(A)$ es un operador acotado cuya norma $\|\tilde{g}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \|g\|_\infty$

Supongamos que g es la función característica de Ω. Entonces, $\forall\ \varphi \in \mathcal{H}$,

$$(\varphi, \tilde{g}(A)\varphi) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\, d(\varphi, P_\lambda \varphi) = \int_{\Omega} d(\varphi, P_\lambda \varphi) = (\varphi, P_\Omega \varphi)$$

Para funciones características g(A) coincide con la definición I. Más aún, si g es únicamente acotada, usando (d) del teorema IIa y la densidad de las funciones características en L^∞,

$$(\varphi, \widetilde{g(A)}\,\varphi) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\, d(\varphi, P_\lambda \varphi)$$

(Convergencia dominada)

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(\lambda)\, d(\varphi, P_\lambda \varphi)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (\varphi, \tilde{h}_n(A)\varphi) = \lim_{n\to+\infty} (\varphi, h_n(A)\varphi)$$

$$= (\varphi, g(A)\varphi)$$

donde h_n es una sucesión de funciones simples y $h_n(A)$, $g(A)$ son operadores como en (I) . Por lo tanto, $\widetilde{g(A)} \equiv g(A)$ si g es acotada. (III b)

Si g no es acotada, sea Ω_n como en (III) y (IV)

$$h_n(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in \Omega_n \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega_n \end{cases}$$

De la definición I, se obtiene que Ran $P_{\Omega_n} \subset D(\widetilde{g(A)})$ y de (IIIa) también Ran $P_{\Omega_n} \subset \mathcal{D}_g$, por lo tanto, de (IIIb) para φ Ran P_{Ω_n}, $\psi \in \mathcal{H}$.

$$(\psi, g(A)\varphi) =$$

(Convergencia dominada)

$$= \lim_{n\to+\infty} (\psi, h_n(A)\varphi)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (\psi, \tilde{h}_n(A)\varphi)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(\lambda)\, d(\psi, P_\lambda \varphi)$$

(Convergencia dominada)

$$= (\psi, \widetilde{g(A)}\,\varphi)$$

(IVa)

y de aquí se deduce que $g(A)\varphi = \widetilde{g(A)}\varphi$ para $\varphi \in$ RanP_{Ω_n}.

Asimismo, para $\varphi \in \mathrm{Ran}\, P_{\Omega_n}$

$$\| g(A)\varphi \|^2 = \lim_{n\to+\infty} (h_n(A)\varphi, h_n(A)\varphi)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\varphi, (h_n(A))^* h_n(A)\varphi\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\varphi, |h_n|^2(A)\,\varphi\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\varphi, \widetilde{|h_n|^2}(A)\,\varphi\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |h_n|^2(\lambda)\, d(\varphi, P_\lambda \varphi)$$

$$= \int |g(\lambda)|^2\, d(\varphi, P_\lambda \varphi) \qquad \text{(V)}$$

Sea ahora $\psi \in D(g(A))$. Entonces si $\psi_n := P_{\Omega_n}\psi$ (VI)

$\psi_n \to \psi$ y $g(A)\psi_n \to g(A)\psi$ en norma.

Además, $\|g(A)\psi_n\| \leq \|g(A)\psi\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

En consecuencia, usando (Id) y (V) $\|g(A)\psi\|^2 = \lim_{n\to+\infty} \|g(A)\psi_n\|^2$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |g(\lambda)|^2 d(\psi_n, P_\lambda \psi_n)$$

(Usando (Id) y (VI) $$= \lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega_n} |g(\lambda)|^2 d(\psi, P_\lambda \psi)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |g(\lambda)|^2 d(\psi, P_\lambda \psi)$$

En consecuencia, $D(g(A)) \subset D_g$, Usando el mismo argumento que en — IVa, se deduce que $g(A)\varphi = \tilde{g}(A)\varphi \quad \forall \varphi \in D(g(A))$.

Pero $g(A)$ es unitariamente equivalente a un operador de multiplicación. Entonces —

$g(A)^* = \bar{g}(A)$ y $D(g(A)) = D(\bar{g}(A)) = D(g(A)^*)$.

Como $g(A)\varphi = \tilde{g}(A)\varphi \quad \forall \varphi \in D(g(A))$

$$\Rightarrow D_g \equiv D(\widetilde{\bar{g}}(A)) \subset D(\tilde{g}(A)^*) \subset D(g(A)^*) \equiv D(g(A))$$

En consecuencia $D_g = D(g(A))$. Y por lo tanto $\tilde{g}(A) \equiv g(A)\ \forall$ función borel medible.

TEOREMA II (Teorema espectral en forma de proyectores espectrales).

Existe una correspondencia uno a uno entre las medidas a valores en –

los proyectores y los operadores autoadjuntos. La correspondencia está dada como sigue:

Dada una familia como en la definición (II), $\{P_\Omega \setminus \Omega$ medible$\}$ existe un unico operador autoadjunto A, tal que

a) A cada función medible g, le corresponde un operador g(A) densamente definido, cerrado con dominio D_g, el cual está caracterizado por $D_g = \{ \varphi \in \mathcal{H} \setminus \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\lambda)|^2 d(\varphi, P_\lambda \varphi) < +\infty \}$ y además para $\varphi \in D_g, \psi \in \mathcal{H}$

$$(\psi, g(A)\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\, d(\psi, P_\lambda \varphi), \quad \|g(A)\varphi\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\lambda)|^2 d(\varphi, P_\lambda \varphi)$$

$$g(A)^* = \bar{g}(A)$$

En particular, para $g(\lambda) = \lambda$

$$(\psi, A\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d(\psi, P_\lambda \varphi)$$

b) Si g es acotada, g(A) es precisamente como en el teorema (IIa). Si g no es acotada, g(A) coincide con la definición I.

c) Para f, g medibles $(fg)(A) \supset f(A)\, g(A)$ y $D(f(A)\, g(A)) = D_g \cap D_{fg}$

E inversamente, dado un operador autoadjunto A, existe una familia $\{ P_\Omega \setminus \Omega$ medible $\}$ que cumple la definición II, y por ende se cumple a), b), c).

DEMOSTRACION:

Arriba hemos visto que dado un operador autoadjunto, existe una familia de proyectores que cumplen a), b) y c). Ahora veremos que una familia define un operador autoadjunto. La unicidad de la familia se seguirá entonces de la unicidad del teorema IIa.

Sea $\{P_\Omega\}$ como en la definición II y pongamos $D(A) = \{ \varphi \in \mathcal{H} \setminus \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d(\varphi, P_\lambda \varphi) < +\infty \}$

Puesto que si $\Omega_i \cap \Omega_j = \phi \quad i \neq j$

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{\Omega_i}\, d(\varphi, P_\lambda \psi)\right| = \left|\left(\varphi, \sum_{i=1}^{n} c_i P_{\Omega_i} \psi\right)\right| \leq \|\varphi\| \left\{ \int_{\mathbb{R}} \left|\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{\Omega_i}\right|^2 d(\psi, P_\lambda \psi)\right\}^{1/2}$$

Entonces, para $\psi \in D(A)$ y oara toda $\varphi \in \mathcal{H}$

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \lambda\, d(\varphi, P_\lambda \psi)\right| \leq \|\varphi\| \left\{ \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d(\psi, P_\lambda \psi)\right\}^{1/2}$$

Dado $\psi \in D(A)$ fijo, $\varphi \to \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d(\varphi, P_\lambda \psi)$ define una funcional continua (conjugada). Por lema de Riesz existe un único elemento $A\psi \in \mathcal{H}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda\, d(\varphi, P_\lambda \psi) = (\varphi, A\psi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{H}$$

Por otro lado, usando (Ic) se obtiene que $\underset{n\to+\infty}{\text{s-lim}}\, P_{\Omega_n} = \mathbb{1}$ donde $\Omega_n = (-n, n)$

Entonces, para todo $\varphi \in \mathcal{H}$, $\varphi_n = P_{\Omega_n}\varphi \to \varphi$ en norma.

Usando (Id) se obtiene $\int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d(\varphi_n, P_\lambda \varphi_n) = \int_{\Omega_n} \lambda^2 d(\varphi, P_\lambda \varphi) \leq n^2 \|\varphi\|^2 < +\infty$

En consecuencia, D(A) es denso en $\mathcal{H}$. Obviamente si $\varphi \in D(A)$

$$(\varphi, A\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d(\varphi, P_\lambda \varphi) = \overline{\int_{\mathbb{R}} \lambda\, d(\varphi, P_\lambda \varphi)} = (A\varphi, \varphi).$$

Usando la identidad de polarización se obtiene que $(\varphi, A\psi) = (A\psi, \varphi)\ \forall\, \varphi, \psi \in D(A)$.

En consecuencia, el mapeo $A : D(A) \to \mathcal{H}$ define un operador lineal densamente definido. Además A es simétrico.

Similarmente, $\phi_z(\lambda) = (\lambda - z)^{-1}$ define un operador acotado si $z \notin \mathbb{R}$. Denotemos por $\phi_z(A)$ tal operador.

Tomemos $\varphi \in D(A)$, entonces si Ω es un subconjunto medible,

$$\begin{aligned}(\psi, P_\Omega A\varphi) &= (P_\Omega \psi, A\varphi)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda\, (P_\Omega \psi, P_\lambda \varphi)\end{aligned}$$

(Usando Id) $\quad = \int_{\Omega} \lambda\, (\psi, P_\lambda \varphi)$

En consecuencia, para toda función f medible

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, d(\psi, P_\lambda A\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \lambda f(\lambda)\, d(\psi, P_\lambda \varphi) \tag{VIa}$$

Entonces, para $\varphi \in D(A)$

$$(\psi, \phi_z(A)(A-z)\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_z(\lambda)\, d(\psi, P_\lambda (A-z)\varphi)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_z(\lambda)\,(\lambda - z)\, d(\psi, P_\lambda \varphi)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d(\psi, P_\lambda \varphi) = (\psi, \varphi)$$

$$\Rightarrow \quad \phi_z(A)(A-z)\varphi = \varphi$$

Haciendo un cálculo similar se obtiene que para todo $\varphi \in \mathcal{H}$, $\phi_z(A)\varphi \in D(A)$ y además $(A-z)\phi_z(A)\varphi = \varphi$. Es fácil ver que A es un operador simétrico -- cerrado. Y como A-Z es invertible para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ se obtiene que A es autoadjunto. Finalmente, hagamos notar que la unicidad de la familia $\{ P_\Omega \mid \Omega$ medible $\}$ en el - teorema III implica la unicidad del mapeo $g \to g(A)$

cumpliendo a), b) y c). ▲

Por ejemplo, usando esta unicidad, supongamos que A es un operador en $\mathcal{H}_1$, y U es un mapeo unitario de $\mathcal{H}_1$, sobre $\mathcal{H}_2$ y que B es otro operador autoadjunto, tal que --

$$B = UAU^{-1}$$

Puesto que $(\varphi, B\varphi) = (U^{-1}\varphi, A U^{-1}\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d(U^{-1}\varphi, P_\lambda(A) U^{-1}\varphi)$

de la unicidad se desprende que $d(\varphi, P_\lambda(B)\varphi) = d(U^{-1}\varphi, P_\lambda(A) U^{-1}\varphi)$

y en consecuencia obtenemos que $f(B) = U f(A) U^{-1} \quad \forall f$ Borel medible (VII).

Ahora daremos una variante de este teorema, al cual nos referiremos explícitamente más adelante.

TEOREMA IV Sea A un operador autoadjunto sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Y sea ψ cualquier vector en $\mathcal{H}$, y Q la proyección sobre el -- subespacio cerrado $\overline{\{ g(A)\psi \mid g \in C_\infty(\mathbb{R}) \}}$

entonces $Q\mathcal{H}$ es unitariamente equivalente a $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$ donde $d\mu_\psi = d(\psi, P_\lambda \psi)$, de tal manera que ψ corresponde a la función 1 en $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$ y e^{-itA} es multiplicación por la --- función e^{-itx}.

DEMOSTRACION:

Definamos S por $S\, g(A)\psi \equiv g$ donde $g \in C_\infty(\mathbb{R})$. S es esencialmente - el mapeo inverso dado en la definición I. S está bien definido ya que

$$\| g(A)\psi \|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\lambda)|^2 d(\psi, P_\lambda \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\lambda)|^2 d\mu_\psi$$

En consecuencia, si $f = g$ a.e. con respecto a $d\mu_\psi$, entonces $g(A)\psi = f(A)\psi$. S está entonces bien definido sobre $\{g(A)\psi \mid g \in C_\infty(\mathbb{R})\}$ y preserva normas. Podemos extenderlo a un mapeo unitario de $\overline{\{g(A)\psi \mid g \in C_\infty(\mathbb{R})\}}$ en $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$
Puesto que $C_\infty(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$ (ya que $d\mu_\psi$ es una medida finita), --- $\operatorname{Ran} S = L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$.

Sea $g \in C_\infty(\mathbb{R})$. Entonces, para $\varphi = g(A)\psi$

$$(\psi, e^{-itA}\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda} d(\psi, P_\lambda \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda} d_\lambda \int_{-\infty}^{\lambda} g(\mu)\, d(\psi, P_\mu \psi)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda} g(\lambda)\, d(\psi, P_\lambda \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda} g(\lambda)\, d\mu_\psi$$

Si $\varphi \in \operatorname{Ran} Q\mathcal{H} \equiv \overline{\{g(A)\psi \mid g \in C_\infty(\mathbb{R})\}}$, usando densidad obtenemos que

$$(\psi, e^{-itA}\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda} h(\lambda)\, d\mu_\psi \qquad \text{(VIII)}$$

donde $h(\lambda)$ es la correspondiente función a φ. ▲

Sea $\varphi \in \mathcal{H}$ un vector fijo, A un operador autoadjunto y la familia $\{P_\Omega \mid \Omega \text{ medible}\}$ sus proyectores espectrales. Pongamos $\mu_\varphi(\Omega) = (\varphi, P_\Omega \varphi)$. Descompondremos la medida μ_φ en $\mu_{ac} + \mu_{sing} + \mu_{pp}$. Donde μ_{ac} es una medida absolu--

tamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, μ_{sing} es una medida continua – y singular con respecto a la medida de Lebesgue y μ_{pp} es una medida puramente puntual.

Sea $S_1 := \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_\varphi(\{x\}) \neq 0\}$. Ponemos ---

$$\mu_{pp}(\Omega) := \mu_\varphi(\Omega \cap S_1) \qquad \text{(VIIIa)}$$

Entonces $\mu_{cont} := \mu_\varphi - \mu_{pp}$ es una medida continua. (IX)

Usando el teorema de descomposición de Lebesgue, sabemos que existe un conjunto S_2 tal que si $\mu'_{ac}(\Omega) := \mu_{cont}(\Omega \cap S_2)$ entonces μ'_{ac} es una medida absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. Es decir, si S_0 tiene me-- dida de Lebesgue cero, entonces $\mu_{ac}(S_0) \equiv 0$ y la medida $\mu'_{sing}(\Omega) := \mu_{cont}(\Omega \cap S_2^c)$ es singular con respecto a la medida de Lebesgue. Es decir la medida de Lebesgue de S_2^c es cero.

Si definimos $\mu_{ac}(\Omega) := \mu_{ac}(\Omega \cap S_1^c) \equiv \mu_{cont}(\Omega \cap S_2^c \cap S_1^c)$ (X)

$$\mu_{sing}(\Omega) := \mu'_{sing}(\Omega \cap S_1^c) \equiv \mu_{cont}(\Omega \cap S_2^c \cap S_1^c) \qquad \text{(XI)}$$

μ_{ac} y μ_{sing} siguen teniendo las propiedades de μ'_{ac} y μ'_{sing}, y además μ_{ac}, μ_{sing} – son mutuamente singulares. Entonces, de (VIIIa), (X) y (XI) $\mu_\varphi(\Omega) = \mu_{ac}(\Omega) + \mu_{sing}(\Omega) + \mu_{pp}(\Omega)$.

Las medidas son mutuamente singulares entre sí y ésta descomposición es única.

Sea $B_3 = S_1$, $B_2 = S_2^c \cap S_1^c$ $B_1 = S_2 \cap S_1^c$.

Entonces $\varphi = P_{B_1}\varphi + P_{B_2}\varphi + P_{B_3}\varphi$.

Usando las propiedades de los proyectores espectrales, se deduce que:

$\mu_{P_{B_1}\varphi}$ define una medida absolutamente continua.

Análogamente para $P_{B_2}\varphi$ y $P_{B_3}\varphi$. Como $B_i \cap B_j = \phi$ si $i \neq j$, entonces --- $P_{B_1}\varphi, P_{B_2}\varphi$ y $P_{B_3}\varphi$ son ortogonales entre sí. De aquí se desprende la unicidad de la des-- composición.

DEFINICION IV Sea A un operador autoadjunto en $\mathcal{H}$.

Sea $\mathcal{H}_{pp} = \{ \psi \mid \mu_\psi$ es puramente puntual $\}$

$\mathcal{H}_{ac} = \{ \psi \mid \mu_\psi$ es absolutamente continua $\}$

$\mathcal{H}_{sing} = \{ \psi \mid \mu_\psi$ es singularmente continua $\}$

TEOREMA V $\mathcal{H}_{pp}$, $\mathcal{H}_{ac}$ y $\mathcal{H}_{sing}$ son subespacios cerrados. Además,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sing} \oplus \mathcal{H}_{pp}$$

Cada subespacio es invariante bajo A.

DEMOSTRACION

De la unicidad de la descomposición y del hecho que $P_{B_1}\varphi$, $P_{B_2}\varphi$ y $P_{B_3}\varphi$ son ortogonales se deduce que $\mathcal{H}_{ac}$, $\mathcal{H}_{sing}$ y $\mathcal{H}_{pp}$ son cerrados y que --

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sing} \oplus \mathcal{H}_{pp}$.

Usando (VIa) obtenemos que $(A\varphi, P_\Omega A\varphi) = \|P_\Omega A\varphi\|^2 = \int_\Omega \lambda^2 d(\varphi, P_\lambda \varphi)$

En consecuencia, A deja invariante cada subespacio, es decir, $A \restriction \mathcal{H}_{ac} \subset \mathcal{H}_{ac}$,

$A \restriction \mathcal{H}_{sing} \subset \mathcal{H}_{sing}$ y $A \restriction \mathcal{H}_{pp} \subset \mathcal{H}_{pp}$ ▲

DEFINICION V $\sigma_{pp}(A) := \{\lambda \mid \lambda$ es un eigenvalor de A $\}$

$\sigma_{cont}(A) := \sigma(A \restriction \mathcal{H}_{cont} := \mathcal{H}_{sing} \oplus \mathcal{H}_{ac})$

$\sigma_{ac}(A) := \sigma(A \restriction \mathcal{H}_{ac})$

$\sigma_{sing} := \sigma(A \restriction \mathcal{H}_{sing})$

Estos conjuntos son llamados el espectro puramente puntual, continuo, absolutamente continuo y singularmente continuo, perspectivamente.

LEMA I $\sigma(A) = \overline{\sigma_{pp}(A)} \cup \sigma_{cont}(A)$

Como $\mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sing} \oplus \mathcal{H}_{pp}$ obtenemos que ---

$\sigma_{cont}(A) = \sigma_{ac}(A) \cup \sigma_{sing}(A) \subset \sigma(A)$. Obviamente

$\sigma_{pp}(A) \subset \sigma(A)$.

como $\sigma(A)$ es cerrado, se obtiene que $\sigma_{cont}(A) \cup \overline{\sigma_{pp}}(A) \subset \sigma(A)$

Sea ahora $\lambda \in \sigma_{pp}(A)^c \cap \sigma_{cont}(A)^c$.

$\sigma_{ac} \cup \sigma_{sing}(A) = \sigma_{cont}(A) \subset \sigma(A)$.

Entonces $(A+\lambda) \upharpoonright \mathcal{H}_{ac}$, $(A-\lambda) \upharpoonright \mathcal{H}_{sing}$ son operadores invertibles.

Como $\mathcal{H}_{pp}$ tiene un conjunto denso de eigenvectores de A, entonces de hecho se obtiene que $\overline{\text{Ran } (A-\lambda) \upharpoonright \mathcal{H}_{pp}} = \mathcal{H}_{pp}$.

Además, $(A-\lambda)\varphi \neq 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}_{pp}$ ya que λ no está en $\overline{\sigma_{pp}}$. Entonces $(A-\lambda) \upharpoonright \mathcal{H}_{pp} \to \mathcal{H}_{pp}$ es una biyección. -

Y por el teorema del mapeo inverso se obtiene que $(A-\lambda) \upharpoonright \mathcal{H}_{pp}$ es invertible. En consecuencia $\lambda \in \rho(A)$.

$\Rightarrow \sigma(A) \subset \overline{\sigma_{pp}}(A) \cup \sigma_{cont}(A)$. ▲

Dado A un operador autoadjunto.

DEFINICION VI

Decimos que $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ si y solo si $\overline{\text{Ran } P_{(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)}}$ es de dimensión infinita para toda $\epsilon > 0$.

Decimos que λ está en el espectro discreto de A, $\sigma_{disc}(A)$ si $\lambda \notin \sigma_{ess}(A)$.

LEMA II

$\lambda \in \sigma_{ess}(A) \iff$ al menos una de las siguientes condiciones se siguen:

a) $\lambda \in \sigma_{cont}(A) \equiv \sigma_{sing}(A) \cup \sigma_{ac}(A)$

b) λ es un punto límite de $\sigma_{pp}(A)$

c) λ es un eigenvalor de multiplicidad infinita.

DEMOSTRACION

Si λ cumple cualesquiera de las condiciones a), b) y c) obviamente

$\Rightarrow$) Supongamos que $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$. Como $\sigma_{ess}(A) \subset \sigma(A)$, del lema I, obtenemos que $\lambda \in \overline{\sigma_{pp}} \cup \sigma_{cont}(A)$. De aquí se deduce que λ al menos cumple alguna de a), b) y c).

DEFINICION VII Una forma cuadrática es un mapeo $q: Q(q) \times Q(q) \to \mathbb{C}$, donde Q(q) es un subconjunto denso en $\mathcal{H}$ llamado el dominio de forma, tal que $q(\cdot, \psi)$ es lineal conjugado, es decir, si $\varphi_1, \varphi_2 \in Q(q)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $q(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2, \psi) = \bar{\alpha} q(\varphi_1, \psi) + \bar{\beta} q(\varphi_2, \psi)$ y $q(\varphi, \cdot)$ es lineal.

Decimos que q es simétrica si $q(\varphi, \psi) = \overline{q(\psi, \varphi)}$ Si $q(\varphi, \varphi) \geq 0$ q es llamada positiva. Y si $q(\varphi, \varphi) \geq -M\|\varphi\|^2$ para algún M, q es semiacotada.

Notemos que si q es semiacotada, entonces q es simétrica si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo.

DEFINICION VIII Sea q una forma cuadrática semiacotada. $q(\varphi, \varphi) \geq -M\|\varphi\|^2$

Notemos que como $q(\varphi, \psi) = \overline{q(\psi, \varphi)}$ podemos definir un producto escalar sobre Q(q) :

$$(\varphi, \psi)_{+1} = q(\varphi, \psi) + (M+1)(\varphi, \psi)$$

Decimos que q es cerrada si Q(q) es un espacio de Hilbert con este producto escalar.

Nota I: Es fácil ver que q es cerrado sí y solo sí siempre que $\varphi_n \in Q(q)$, $\varphi_n \to \varphi$ y $q(\varphi_n - \varphi_m, \varphi_n - \varphi_m) \to 0$ cuando $n, m \to +\infty$, entonces $\varphi \in Q(q)$ y $q(\varphi_n - \varphi, \varphi_n - \varphi) \to 0$.

DEFINICION IX Sea A un operador autoadjunto en $\mathcal{H}$. Sea $\{P_\Omega \backslash \Omega$ medible$\}$ sus respectivos proyectores espectrales. Pongamos $Q(q) = \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| \, d(\varphi, P_\lambda \varphi) < +\infty\}$ y para $\varphi, \psi \in Q(q)$ definimos $q(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d(\varphi, P_\lambda \psi)$. Se dice que q es la forma cuadrática asociada con A.

Q (A): = Q (q). Y Q (A) es el dominio de forma A.

A veces escribiremos $q(\varphi, \varphi) = (\varphi, A\varphi)$ a pesar de que aplicar A para algunos $\varphi \in Q(A)$ no tenga sentido.

Supongamos ahora que A es un operador semiacotado. Es decir, $(\varphi, A\varphi) \geq -M \|\varphi\|^2$.

Entonces si $\varphi \in Q(q)$

$$\|\varphi\|^2_{+1} = q(\varphi,\varphi) + (M+1)\|\varphi\|^2 = \int_{-M}^{+\infty} \lambda \, d(\varphi, P_\lambda \varphi) + (M+1)\|\varphi\|^2$$

$$= \|g(A)\varphi\|^2 + \|\varphi\|^2$$

donde $g(\lambda) = (\lambda + M)^{\frac{1}{2}}$. Usando la nota 1 vemos que decir que q es una forma cuadrática cerrada equivale a decir que g (A) es un operador cerrado. Lo cual ya hemos establecido en el teorema II. Y por lo tanto q es una forma cuadrática cerrada.

El siguiente teorema nos dice que en realidad estas son todas las formas cuadráticas cerradas. La demostración puede ser hallada en [11] .

TEOREMA VI Si q es una forma cuadrática cerrada, entonces q es la forma cuadrática asociada a un único operador autoadjunto. Y además el dominio de este operador es denso en la norma de Q (q) ,

LEMA III Sea A un operador autoadjunto positivo y supongamos que $\beta(\varphi, \psi)$ es una forma cuadrática simétrica sobre Q (A) tal que para algún $a < 1$ y $b \in \mathbb{R}$

$$|\beta(\varphi,\varphi)| \leq a(\varphi, A\varphi) + b\|\varphi\|^2 \quad \forall \varphi \in D(A). \quad (XII)$$

Entonces existe un único operador autoadjunto C con

$Q(c) = Q(A)$ y $(\varphi, C\psi) = (\varphi, A\psi) + \beta(\varphi, \psi)$

$\forall\, \varphi, \psi \in Q(c)$. Además c es semiacotado, con cota

$-b$.

Es decir,

$(\varphi, C\varphi) \geq -b\,\|\varphi\|^2$.

Demostración : Definamos una forma $\gamma(\varphi,\psi) = (\varphi, A\psi) + \beta(\varphi,\psi)$

sobre Q (A). Por(XII)

$$\gamma(\varphi,\varphi) \geq (1-a)(\varphi, A\varphi) - b\|\varphi\|^2 \geq -b\|\varphi\|^2$$

Entonces γ es semiacotada por $-b$. Además

$$(1-a)(\varphi, A\varphi) + \|\varphi\|^2 \leq \gamma(\varphi,\varphi) + (b+1)\|\varphi\|^2$$
$$\leq (1+a)(\varphi, A\varphi) + (2b+1)\|\varphi\|^2$$

Por consiguiente, $\|\cdot\|_{+1,A}$ y $\|\cdot\|_{+1,\gamma}$ son dos normas equivalentes sobre Q (A). Puesto que Q (A) es cerrado bajo $\|\cdot\|_{+1,A}$, es cerrado bajo $\|\cdot\|_{+1,\gamma}$

En consecuencia γ es una forma cuadrática cerrada en Q (A) . El lema se sigue ahora de la demostración y el enunciado del teorema VI.

DEFINICION X Sea $P(k)$ una función medible de $\mathbb{R}^\nu$ en $\mathbb{C}$ finita a.e.

$H_0 := P(-i\nabla)$

H_0 es el operador que actua en $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^\nu)$

de la siguiente forma

$\varphi \longrightarrow [P(k)\hat{\varphi}(k)]^{\vee}(x)$

donde $\wedge$, $\vee$ denotan la transformada de Fourier y su inversa. H_0 es un operador lineal con dominio $D(H_0)$

$= \{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}^\nu) \mid P(k)\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^\nu) \}$

Ejemplo I : Tomemos $P(k) = |k|^2 = (k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_\nu^2)$

Como $P(k)$ es una función real, entonces $H_0 = P(-i\nabla)$ es autoadjunto. Por otro lado, definamos para $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$

$\equiv \{ \varphi \mid \varphi$ es infinitamente diferenciable$\}$

es infinitamente diferenciable y a soporte compacto $\}$.

$$-\Delta\varphi := -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\varphi - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\varphi - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2}\varphi \qquad (XIII)$$

Puesto que si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$ entonces $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$

$\Rightarrow \quad D(H_0) \supset C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$.

Más aún, un cálculo nos muestra que

$$H_0\varphi = \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}} \int_{\mathbb{R}^\nu} e^{ixk} |k|^2 \hat{\varphi}(k)\, d^\nu k$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}} \int_{\mathbb{R}^\nu} [(-\Delta e^{ixk})] \hat{\varphi}(k)\, d^\nu k$$

$$= -\Delta\varphi$$

Entonces $D(H_0) \supset D(-\Delta)$ y

$$H_0\varphi = -\Delta\varphi \quad \forall\, \varphi \in D(-\Delta) \qquad (XIV)$$

Ahora queremos ver que H_0 es esencialmente autoadjunto en $C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$. Es decir, que $\overline{H_0 \restriction C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)} = H_0$.

Para ver esto, notemos que si

$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu) \Rightarrow \hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu) \subset D(H_0)$.

$$\therefore \quad \hat{\varphi} = \frac{P(k) \pm i}{(P(k) \pm i)}\hat{\varphi} = (|k|^2 \pm i)\frac{\hat{\varphi}}{(|k|^2 \pm i)}$$

Como $\dfrac{\hat{\varphi}}{|k|^2 \pm i}$ es una función todavía en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$, obtenemos que el operador de multiplicación por $|k|^2$ es esencialmente autoadjunto en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$. Como H_0 es unitariamente equivalente a este operador obtenemos que H_0 es esencialmente equivalente a este operador obtenemos que H_0 es esencialmente autoadjunto en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$. Sea

$$H_1 = H_0 \upharpoonright \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$$

Como antes, si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$

$$H_1 \varphi = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2}\, \varphi$$

Puesto que ya vimos que $\overline{H_1} = H_0$ es suficiente con mostrar que

$$\overline{(-\Delta)} = \overline{H_0 \upharpoonright C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)} \supset H_1 \qquad (XV)$$

Pues en tal caso se obtiene que $\overline{(-\Delta)} \supset \overline{H_1} = H_0$

De (XIV) obtenemos que $-\Delta \subset H_0$

Y en consecuencia $\overline{-\Delta} = H_0$.

Para mostrar (XV), construiremos una sucesión de funciones para cada $u \in \mathcal{D}(H_1)$, tales que $u_n \in C_0^\infty$, $u_n \xrightarrow{\|\ \|} u$

y $-\Delta u_n \xrightarrow{\|\ \|} -\Delta u = H_1 u$

Tal sucesión está dada por ejemplo por

$$u_n(x) = w(x/n)\, u(x) \qquad (XVI)$$

donde $w(x)$ es una función a valores reales y en $C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$, tal que $0 \leq w(x) \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}^\nu$ y $w(x) = 1$ si $|x| \leq 1$

$\Rightarrow u_n \xrightarrow{\|\ \|} u$.

Además, $-\Delta u_n = w(x/n)\,(-\Delta u)(x) - \frac{2}{n}(\text{grad}\, w)(x/n)\cdot$
$(\text{grad}\, u)(x) + \frac{1}{n^2}\,(-\Delta w)(x/n)\, u(x)$
$\overset{\|\ \|}{\longrightarrow} -\Delta u$ ▲

Ejemplo II (Los operadores de Dirac [7], [8])

Denotemos por $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ el espacio de Hilbert de todas las funciones $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x))$ de la variable $x = (x_1, x_2, x_3)$, con producto escalar en $H = L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ dado por

$$(u,v) = \int_{\mathbb{R}^3} u(x)\cdot v(x)\, d^3x = \int_{\mathbb{R}^3} \Big(\sum_{j=1}^{4} \overline{u_j(x)}\, v_j(x) \Big) d^3x$$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 = \beta$ matrices hermitianas en $\mathbb{C}^4$ que satisfacen la relación

$$\alpha_j \alpha_h + \alpha_h \alpha_j = 2\,\delta_{jh}\cdot 1 \qquad j,h = 1,\ldots,4 \qquad (XVII)$$

donde 1 es la matriz identidad en $\mathbb{C}^4$.

Tales matrices existen, aunque no daremos explícitamente su forma.

Definamos $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ como

como

$$Uu = U(u_1, u_2, u_3, u_4) = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3, \hat{u}_4) = \hat{u}$$

Claramente es unitario.

Definamos el operador K por $K\hat{u} := (k\cdot\alpha + \beta)\, U u$

$$= (k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + \beta)\,\hat{u}(k_1, k_2, k_3)$$

$$\mathcal{D}(K) = \{ \hat{u} \in \mathcal{H} \mid (k\cdot\alpha + \beta)\,\hat{u} \in \mathcal{H} \}$$

Puesto que la matriz $k\cdot\alpha+\beta$ es hermitiana y usando (XVII)

obtenemos que

$$|K\hat{u}|^2 = (k\cdot\alpha+\beta)^2\,|\hat{u}(k)|^2 = (|k|^2+1)\,\mathbb{1}\,|\hat{u}(k)|^2$$

donde $\mathbb{1}$ es la matriz identidad en $\mathbb{C}^4$. (XVIIa)

En consecuencia, $\hat{u}\in\mathcal{D}(K)$ si y solo si

$$\|K\hat{u}\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3}(|k|^2+1)\,|\hat{u}(k)|^2\,d^3k < +\infty \qquad \text{(XVIIb)}$$

Sea $\hat{u}$ un vector arbitrario en $\mathcal{H}$.

Pongamos $\hat{\varphi} = (k\cdot\alpha+\beta \pm i)\,\hat{u}/(|k|^2+2)$

Puesto que $(k\cdot\alpha+\beta)^2 = (|k|^2+1)\cdot\mathbb{1}$

es fácil ver que $\hat{\varphi}\in\mathcal{D}(K)$ y además $\hat{u} = (K\mp i)\hat{\varphi}$.

Como $\hat{u}$ es arbitrario, obtenemos que Ran $(K\pm i) = \mathcal{H}$.

En consecuencia, K es autoadjunto .

Definimos

$$H_0 = U^{-1}KU$$

Sea $L = H_0 \restriction [C_0^\infty(\mathbb{R}^3)]^4$

donde $[C_0^\infty(\mathbb{R}^3)]^4$ consiste en las funciones u con componenetes $u_j(x)$ en $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$

Haciendo un cálculo como antes, vemos que

$$Lu = v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$$

donde

$$v_j(x) = i\sum_{l=1}^{3}\sum_{h=1}^{4}(\alpha_l)_{jh}\frac{\partial u_h}{\partial x_l} + \sum_{h=1}^{4}\beta_{jh}u_h(x)$$

Siguiendo los mismos argumentos que en el ejemplo I es posible demostrar que H_0 es esencialmente autoadjunto en $[C_0^\infty(\mathbb{R}^3)]^4$

LEMA IV Sea $H_0 = P(-i\nabla)$ donde P es una función real continua tal que $(\nabla P)(k) \neq 0$ excepto en un conjunto de medida cero, entonces,

$$\sigma(H_0) = \sigma_{ac}(H_0) = \overline{\{P(k) \mid k \in \mathbb{R}^{\nu}\}}$$

DEMOSTRACION: Sea $\{P_\Omega \mid \Omega \text{ medible}\}$ La familia de proyectores asociados a H_0.

Por (VII) y si $\varphi \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{\nu}, d^{\nu}x)$

$$\|P_\Omega \varphi\|^2 = (\varphi, P_\Omega \varphi) = \int_{P^{-1}(\Omega)} |\hat{\varphi}(k)|^2 d^{\nu}k$$

$$= \int_\Omega d\lambda \int_{S_\lambda} \frac{|\varphi(k)|^2}{|(\nabla P)(k)|^2} d\sigma$$

donde $d\sigma$ es el elemento de área de la superficie

$$S_\lambda = \{k \in \mathbb{R}^{\nu} \mid P(k) = \lambda\}$$

(Ver, por ejemplo, [3])

Esto nos dice que $\|P_\Omega \varphi\| = 0$ si la medida de Lebesque de $\Omega \subset \mathbb{R}$ es cero. En consecuencia μ_φ define una medida absolutamente continua para toda $\varphi \in \mathcal{H}$. Y así el espectro de H_0 es absolutamente continuo. ▲

Los 2 siguientes lemas unicamente los usaremos para dedinir operadores autoadjuntos en base a formas cuadráticas

LEMA V Sea $H_0 = -\Delta$, como en el ejemplo I.

Supongamos que $\varphi \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{\nu})$ está en $D(H_0)$.

Entonces

a) Si $\nu \leq 3$ φ, es una función continua y para cualquier $a > 0$, $\exists$ $b > 0$ independiente de φ, tal que

$$\|\varphi\|_\infty \leq a \|H_0\varphi\| + b\|\varphi\| \qquad (XVIII)$$

b) Si $\nu \geq 4$ y $2 \leq q < 2\nu/_{\nu-4}$, entonces $\varphi \in L^q \ (\mathbb{R}^\nu)$

y para cualquier $a > o$, existe $b > o$ que depende en -

q, ν y a, tal que

$$\|\varphi\|_q \leq a \|H_0\varphi\| + b\|\varphi\| \qquad (XIX)$$

DEMOSTRACION

a) Lo demostraremos para $v = 3$. Los mismos argumentos funcionan para v

$v = 1,2$. Supongamos que $\varphi \in \mathcal{D}(H_0)$ entonces $(1+|k|^2)\hat{\varphi}$ y $(1+|k|^2)^{-1}$ están en -

$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$. Por la desigualdad de Scwarz

$$\begin{aligned} \|\hat{\varphi}\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{\varphi}|\, d^3k \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} (1+|k|^2)^{-2}\, d^3k\right)^{1/2} \times \left(\int_{\mathbb{R}^3} (1+|k|^2)^2 |\hat{\varphi}(k)|^2\right)^{1/2} \\ &\leq c\left(\|k^2\hat{\varphi}\|_2 + \|\hat{\varphi}\|_2\right) \qquad (XX) \\ &= c\left(\|H_0\varphi\| + \|\varphi\|\right) \end{aligned}$$

Por otro lado, para cualquier $r > 0$ sea $\hat{\varphi}_r(k) = r^3\hat{\varphi}(rk)$

Entonces,

$$\|\hat{\varphi}_r\|_1 = \|\hat{\varphi}\|_1 \ ;$$

$$\|\hat{\varphi}_r\|_2 = r^{3/2}\|\hat{\varphi}\|_2 \qquad y$$

$$\|k^2\hat{\varphi}_r\|_2 = r^{-1/2}\|k^2\hat{\varphi}\|_2$$

Usando (XX) en $\hat{\varphi}_r$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \|\hat{\varphi}\|_1 = \|\hat{\varphi}_r\|_1 &\leq c\, r^{-1/2}\|k^2\hat{\varphi}\|_2 + c\, r^{3/2}\|\hat{\varphi}\|_2 \\ &= c\, r^{-1/2}\|H_0\varphi\| + c\, r^{3/2}\|\varphi\| \end{aligned}$$

Tomando r suficientemente grande, (XVII) se cumple ya que φ es continua puesto que $\hat{\varphi}$ está en L^1 y $\|\varphi\|_\infty \leq \|\hat{\varphi}\|_1$

b) Por la desigualdad de Hausdorff-Young

$$\|\varphi\|_q \leq (2\pi)^{(\nu/2 - \nu/p)} \|\hat{\varphi}\|_p \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Entonces, es suficiente con demostrar que para $\frac{2\nu}{\nu+4} < p \leq 2$, y $a > 0$ existe b tal que -

$$\|\hat{\varphi}\|_p \leq a \| k^2 \hat{\varphi} \|_2 + b \|\hat{\varphi}\|_2$$

$$\|\hat{\varphi}\|_p = \int_{\mathbb{R}^\nu} (1+k^2)^{-p} |\hat{\varphi}|^p (1+|k|^2)^p \, d^\nu k$$

(Desigualdad de Hölder)

$$\leq \left[\int_{\mathbb{R}^\nu} (1+k^2)^{-pr} \right]^{1/r} \left[\int_{\mathbb{R}^\nu} |\hat{\varphi}|^{ps} (1+k^2)^{ps} \right]^{1/s}$$

$$\left(s = \frac{2}{p} , \; r = \frac{2}{2-p} \right)$$

$$= \| (1+k^2)^{-p} \|_r \; \| (1+k^2) \hat{\varphi} \|_2^p$$

$$\leq \| (1+k^2)^{-p} \|_r \; (\|\varphi\|_2 + \| k^2 \hat{\varphi} \|_2)^p$$

Como

$$\| (1+k^2)^{-p} \|_r^r = \int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu k \; (1+k^2)^{-2p(2-p)^{-1}} < +\infty ,$$

Si y solo si $p > 2\nu/\nu+4$

Obtenemos que $\|\hat{\varphi}\|_p \leq C_1^{1/p} \left[\| k^2 \hat{\varphi} \|_2 + \|\varphi\|_2 \right]$

El mismo método que en a) muestra que la constante $a > 0$ puede ser tomada tan pequeña como se quiera. ▲

DEFINICION XI Una función medible V en $\mathbb{R}^\nu$ es uniformemente localmente en L^p si $\int_C |V(x)|^p \, d^\nu x < +\infty$ $\forall$ cubo unitario.

LEMA VI Sea $p = 2$ si $\nu \leq 3$, $p > 2$ si $\nu = 4$ y $p > \nu/2$ si $\nu \geq 5$.

Entonces cualquier función V a valores reales en $\mathbb{R}^\nu$ - uniformemente localmente en L^p satisface que

$$\| V \varphi \|_2 \leq \epsilon \| H_0 \varphi \|_2 + C_\epsilon \|\varphi\|_2$$

ϵ puede ser tomada tan pequeña como se quiera. Donde $H_0 = -\Delta$.

DEMOSTRACION:

Sea q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$. Por el lema anterior, dado $\epsilon > 0$ existe A_ϵ tal que

$$\|\varphi\|_q^2 \leq \epsilon \| H_0 \varphi \|^2 + A_\epsilon \|\varphi\|^2 \qquad (XXI)$$

Sea C cualquier cubo unitario en $\mathbb{R}^{\nu}$.

Pongamos $\quad \|\varphi\|^{r}_{r,c} \equiv \int_{C} |\varphi(x)|^{r}\, d^{\nu}x$

Sea C' el cubo de lado 3 con el mismo centro que C. Sea $\eta \in C_{0}^{\infty}$ con soporte en C' y que es idénticamente 1 en C. Usando XXI, y el hecho que $H_{0}(\eta\varphi) = \varphi H_{0}\eta + \eta H_{0}\varphi - 2(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\eta)$

$$
\begin{aligned}
\|\varphi\|^{2}_{q,c} &\leq \|\eta\varphi\|^{2}_{q} \leq \varepsilon \|H_{0}(\eta\varphi)\|^{2}_{2} + A_{\varepsilon}\|\eta\varphi\|^{2}_{2} \\
&\leq \varepsilon\left(\|\varphi H_{0}\eta\|_{2} + \|\eta H_{0}\varphi\|_{2} + 2\|\nabla\varphi\cdot\nabla\eta\|_{2}\right)^{2} \\
&\quad + A_{\varepsilon}\|\eta\varphi\|^{2}_{2} \\
&\leq 3\varepsilon\left(\|\varphi H_{0}\eta\|^{2}_{2} + \|\eta H_{0}\varphi\|^{2}_{2} + 2\|(\nabla\varphi\cdot\nabla\eta)\|^{2}_{2}\right. \\
&\quad + A_{\varepsilon}\|\eta\|^{2}_{\infty}\|\varphi\|^{2}_{2,c'} \\
&\leq 3\varepsilon\|H_{0}\varphi\|^{2}_{2,c'} + B\|\nabla\varphi\|^{2}_{2,c'} \\
&\quad + D\|\varphi\|^{2}_{2,c'}
\end{aligned}
$$

(XXII)

Notar que puesto que $\|\eta\|_{\infty}$, $\|\nabla\eta\|_{\infty}$ y $\|\Delta\eta\|_{\infty}$ pueden ser escogidas independientemente de C, (XXII) se satisface con constantes ε, B, D independientes de C. Para -- $\alpha \in \mathbb{Z}^{\nu}$, sea C_{α} el cubo unitario centrado en α y C'_{α} el correspondiente a C'.

Sea $\quad |||V|||^{2} = \sup_{\alpha}\|V\|^{2}_{p,C_{\alpha}}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\|V\varphi\|_{2} &= \sum_{\alpha}\|V\varphi\|^{2}_{2,C_{\alpha}} \\
&\quad \left(\tfrac{2}{p} + \tfrac{2}{q} = 1\right) \\
&\leq \sum_{\alpha}\|V\|^{2}_{p;C_{\alpha}}\|\varphi\|^{2}_{q;C_{\alpha}} \\
&\leq |||V|||^{2}\sum_{\alpha}\left(3\varepsilon\|H_{0}\varphi\|^{2}_{2,C'_{\alpha}} + B\|\nabla\varphi\|^{2}_{2,C'_{\alpha}}\right. \\
&\qquad \left. + D\|\varphi\|^{2}_{2,C'_{\alpha}}\right)
\end{aligned}
$$

$$= |||V|||^2 \sum_\alpha 3^\nu \left(3\varepsilon \|H_0\varphi\|^2_{2,C_\alpha} + B\|\nabla\varphi\|^2_{2,C_\alpha} + D\|\varphi\|^2_{2,C_\alpha} \right)$$

$$= |||V|||^2\, 3^\nu \left(3\varepsilon \|H_0\varphi\|^2_2 + B\|\nabla\varphi\|^2_2 + D\|\varphi\|^2_2 \right)$$

$$\leq |||V|||^2\, 3^\nu \left(4\varepsilon \|H_0\varphi\|^2_2 + (D + \tfrac{1}{4}\varepsilon^{-1}B)\|\varphi\|^2_2 \right)$$

En el último paso hemos utilizado el hecho que

$$\|\nabla\varphi\|^2_2 = \| |k|\, \hat{\varphi} \|^2_2$$

$$= \int_{\mathbb{R}^\nu} 2/\sqrt{\varepsilon}\; k^2\, |\hat{\varphi}(k)|^2\, \sqrt{\varepsilon}/2\; d^\nu k$$

$$(2ab \leq |a|^2 + |b|^2)$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^\nu} \varepsilon\, k^4\, |\hat{\varphi}(k)|^2\, d^\nu k + \int_{\mathbb{R}^\nu} \frac{d^\nu k}{4\varepsilon} |\hat{\varphi}(k)|^2$$

$\blacktriangle$

El siguiente corolario se sigue de los argumentos dados en los dos lemas anteriores.

COROLARIO I Sea $W \in L^2_u$, es decir $\int_C |V(x)|^2 d^\nu x \leq M$ donde C es un cubo unitario en $\mathbb{R}^\nu$.

Sea $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^\nu, d^\nu x)$ y $2N > \nu$, $H_0 = P(-i\nabla)$, con $P(k) = k^{2N}$. Entonces, para $\varphi \in D(H_0)$

a) φ es una función continua y para cualquier $a > 0$, existe $b > 0$, independiente de φ, tal que

$$\|\varphi\|_\infty \leq a\|H_0\varphi\| + b\|\varphi\|$$

b) Dado $\varepsilon > 0$, existe C_ε tal que $\forall\ \varphi \in D(H_0)$

$$\|W\varphi\|_2 \leq \varepsilon\|H_0\varphi\|_2 + C_\varepsilon\|\varphi\|_2$$

c) Sea $|||W|||^2_{u,2} = \sup_\alpha \int_{C_\alpha} |W(x)|^2 d^\nu x < +\infty$ donde C_α es el cubo unitario centrado en $\alpha \in \mathbb{Z}^\nu$. Entonces $\|W(k^{2\nu}+1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C\, |||W|||_{u,2}$ donde c es independiente de W.

COROLARIO II Sea $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^\nu, d^\nu x)$ y W una función en L^s_u con

a) $s = 2$ para $\nu = 1$

b) $s = \frac{2}{2-p}$ para $1 < p < 2$ y $\nu = 2$

c) $s = \nu + \varepsilon$ para $\nu \geq 3$

Entonces, si $H_0 = -\Delta$, $W(H_0 + 1)^{-1/2}$ es un operador acotado.

DEMOSTRACION:

Para $\nu = 1$ se usan los argumentos dados para demostrar el inciso a) del lema V y después se siguen los argumentos del lema VI. La única estimación que difiere es la hecha en (XXII).

Para ver esto, sea $\frac{2}{s} + \frac{2}{q} = 1$, entonces usando la misma notación que en el lema anterior y para $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$

$$\|\varphi\|^2_{q,C} \leq \|\eta\varphi\|^2_{q,C}$$

$$\leq \|H_0^{1/2}(\eta\varphi)\|_2^2 + A_\varepsilon \|\eta\varphi\|_2^2$$

$$= \varepsilon \Big(\sum_j \big(\varphi \frac{\partial}{\partial x_j}\eta, \varphi \frac{\partial}{\partial x_j}\eta\big) + \varepsilon \sum_j \big(\eta \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi, \eta \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\big)$$

$$+ 2\varepsilon \operatorname{Re} \sum_j \big(\eta \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \varphi \frac{\partial}{\partial x_j}\eta\big)$$

$$\leq \varepsilon \nu \|\varphi\|^2_{2,C'} + \varepsilon \|\eta\|_\infty \|\nabla\varphi\|^2_{2,C'} + 2\sum_j \int_{C'} |\varphi \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi| d^\nu x$$

Y entonces, si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$

$$\|W\varphi\|_2^2 \leq \sum_\alpha \|W\|^2_{s,C_\alpha} \|\varphi\|^2_{q,C_\alpha} \leq |||W|||^2_{u,s} \sum_\alpha \|\varphi\|^2_{q,C_\alpha}$$

$$\leq |||W|||^2_{u,s} \sum_\alpha \Big(\varepsilon\nu \|\varphi\|^2_{2,C'_\alpha} + \varepsilon\|\eta\|_\infty \|\nabla\varphi\|_{2,C'_\alpha} + 2\|\eta\|_\infty$$

$$\times \|\frac{\partial}{\partial x_j}\eta\| + \sum_j \int_{C'_\alpha} |\varphi \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi| d^\nu x\Big)$$

$$\leq |||W|||^2_{u,s}\, 3^\nu \left(c\|\varphi\|_2^2 + c'\|\nabla\varphi\|_2^2 + c''\sum_{j=1}^{\nu}\|\varphi\|_2 \|\tfrac{\partial}{\partial x_j}\varphi\|_2 \right)$$

$$\leq |||W|||^2_{u,s}\, 3^\nu \left(C\|\varphi\|_2^2 + C'\|\nabla\varphi\|_2^2 + \nu C''\|(1+|k|^2)^{1/2}\hat{\varphi}\|_2^2 \right)$$

$$\leq |||W|||_{u,s}\, 3^\nu \left(A\|\nabla\varphi\|_2^2 + B\|\varphi\|_2^2 \right.$$

Para $\nu \geq 1$ se aplican los argumentos dados en el inciso b) - del lema V y luego se siguen los argumentos del lema VI utilizando estas estimaciones.

Strichartz [37] da resultados generales para multiplicadores.

Más adelante usaremos una fórmula explícita para e^{-itH_0}, $t\in\mathbb{R}$ el grupo unitario de $H_0 = -\Delta$. Aquí la estableceremos.

Ejemplo III

Primero tomemos $\alpha\in\mathbb{C}$ con $R_e\ \alpha > 0$.

Entonces, $e^{-\lambda^2\alpha}\in L^2(\mathbb{R}^\nu)$. En consecuencia, --

$$(e^{-H_0\alpha}\varphi)(x) := (e^{-\lambda^2\alpha}\hat{\varphi})^{\vee}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}}\int_{\mathbb{R}^\nu} \check{h}(x-y)\varphi(y)\,d^\nu y$$

donde

$$\check{h}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}}\int_{\mathbb{R}^\nu} e^{-\lambda^2\alpha}\, e^{ix\cdot\lambda}\, d^\nu\lambda$$

Usando variable compleja se encuentra que $\check{h}(x) = (2\alpha)^{-\nu/2}\, e^{-x^2/4\alpha}$

Entonces, $$(e^{-H_0\alpha}\varphi)(x) = \left(\frac{1}{4\pi\alpha}\right)^{\nu/2}\int_{\mathbb{R}^\nu} e^{-|x-y|/4\alpha}\varphi(y)\,d^\nu y \qquad \text{(XXIII)}$$

Como $e^{-\varepsilon H_0}\varphi \xrightarrow{L^2} \varphi$ $\varepsilon\downarrow 0$ $\forall\varphi\in L^2(\mathbb{R}^\nu)$ entonces ---

$e^{-i(t-i\varepsilon)H_0}\varphi \xrightarrow{L^2} e^{-itH_0}\varphi$ $\varepsilon\downarrow 0$. Podemos entonces encontrar una subsucesión que converja puntualmente a φ. Ahora supongamos que $\varphi\in L^1\cap L^2$.

Si $e^{-i(t-i\varepsilon_n)H_0}\varphi$ es la sucesión que converge puntualmente a $e^{-itH_0}\varphi$ obtenemos que

$$(e^{-itH_0}\varphi)(x) = \lim_{n\to\infty}(e^{-i(t-i\varepsilon_n)H_0}\varphi)(x)$$

(Usando XXIII) $$= \lim_{n\to+\infty} [4\pi i(t-it_n)] \int_{\mathbb{R}^\nu} e^{-|x-y|^2/4i(t-it_n)} \varphi(y)\, d^\nu y$$

(Usando convergencia dominada ya que $\varphi \in L^1$)

$$= \left(\frac{1}{4\pi i t}\right)^{\nu/2} \int_{\mathbb{R}^\nu} e^{i|x-y|^2/4t} \varphi(y)\, d^\nu y \qquad \text{(XXIIIA)}$$

Si únicamente $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^\nu)$ sea $\chi_R(x)$ la función característica de B_R.

$\chi_R \varphi \in L^1 \cap L^2$. En consecuencia

$$\left(\frac{1}{4\pi i t}\right)^{\nu/2} \int_{\mathbb{R}^\nu} \chi_n e^{i|x-y|^2/4t} \varphi(y)\, d^\nu y \xrightarrow{L^2} e^{-itH_0}\varphi \quad . \qquad \blacktriangle$$

Definimos ahora una medida sobre un conjunto Ω a valores en los operadores positivos.

DEFINICION XII Sea Ω un conjunto con una σ - álgebra $\mathcal{F}$ y sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Una medida (POV) sobre Ω a valores en los operadores positivos se define como el mapeo $A : \mathcal{F} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que

i) A(E) es un operador en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ positivo $\forall\ E \subset \mathcal{F}$.

ii) Si $\{E_n\}$ es una colección numerable y disjunta de conjuntos en $\mathcal{F}$, entonces $A\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} A(E_n)$, donde la serie converge débilmente en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

iii) $A(\Omega) = \mathbb{1}$

Antes de dar un ejemplo de una medida POV necesitaremos dar algunos resultados.

DEFINICION XIII Un operador $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es llamado a traza si $\sum_{n=1}^{+\infty} (|A|\varphi_n, \varphi_n) < +\infty$ donde $\{\varphi_n\}$ es una base ortogonal para $\mathcal{H}$. A esta familia la denotaremos por $\mathcal{F}_1$.

Las propiedades de esta familia, las enunciamos en el siguiente lema. La demostración a esto puede ser hallada en [11].

LEMA VII

Sea $\|\cdot\|_1$ definida en $\tilde{\mathcal{F}}$ por $\|A\|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} (|A|\varphi_n, \varphi_n)$.

Entonces

a) $\tilde{\mathcal{F}}_1$ es un espacio de Banach con esta norma y ---

$\|A\| \leq \|A\|_1$

b) Si $A \in \tilde{\mathcal{F}}_1$, A es compacto.

c) $\|A\|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n$ donde λ_n son los eigenvalores de $|A|$

d) Sea $Com(\mathcal{H}) = \{A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid A \text{ es comp}\}$ entonces -

$\tilde{\mathcal{F}}_1 = [Com(\mathcal{H})]^*$. Es decir, el mapeo $A \to tr(A\,\cdot)$

es un isomorfismo isométrico de $\tilde{\mathcal{F}}_1$ sobre $[Com(\mathcal{H})]^*$

e) $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \tilde{\mathcal{F}}_1^*$. Es decir, el mapeo $B \to tr(B\,\cdot)$ es un iso--

morfismo isométrico de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ sobre $\tilde{\mathcal{F}}_1^*$.

Ejemplo IV

Tomemos $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^\nu, d^\nu x)$ y η en L^2 con $\|\eta\| = 1$

Pongamos

$$\eta_{xy}(q) := e^{iy(q-x)}\eta(q-x) \qquad \text{(XXIV)}$$

Para cada $\mathcal{f} \in \tilde{\mathcal{F}}_1$, definimos $\mathcal{f}(x,y) = (2\pi)^{-\nu} \int_{\mathbb{R}^\nu} \eta_{xy}(q)\,(\mathcal{f}\eta_{xy})(q)\, d^\nu q$

Puesto que $\mathcal{f}$ es un operador de Hilbert-Schmidt, $\mathcal{f}$ es un operador integral. De aquí es posible ver que $\mathcal{f}(x,y)$ es de hecho una función continua.

Si $\mathcal{f}$ es un operador positivo, $\mathcal{f}(x,y) \geq 0$

Definimos la medida POV sobre $\Omega = \mathbb{R}^{2\nu}$ de la siguiente forma: Para cada conjunto de Borel $E \subseteq \mathbb{R}^{2\nu}$ sea G_E el mapeo dado por:

$$G_E\, \mathcal{f} := \int_E \mathcal{f}(x,y)\, d^\nu x\, d^\nu y \qquad \mathcal{f} \in \tilde{\mathcal{F}}_1$$

Para ver que G_E es una funcional continua sobre $\tilde{\mathcal{F}}_1$ recordemos que cualesquier - operador compacto C puede escribirse como $C(\cdot) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n (\psi_n, \cdot)\, \phi_n$,

donde $\{\psi_n\}$, $\{\varphi_n\}$ son vectores ortonormales y además λ_n son los eigenvalores del CL

Entonces, usando b) del lema anterior

$$|G_E \varphi| = \left| \int_E \varphi(x,y)\, d^\nu x\, d^\nu y \right|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_n}{(2\pi)^\nu} \int_E |(\psi_n, \eta_{xy})|\,|(\eta_{xy},\phi_n)|\, d^\nu x\, d^\nu y$$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \left\{ \int_{\mathbb{R}^{2\nu}} |(\psi_n,\eta_{xy})|^2 \frac{d^\nu x\, d^\nu y}{(2\pi)^\nu}\right\}^{1/2} \times \left\{\int_{\mathbb{R}^{2\nu}} |(\eta_{xy},\phi_n)|^2 \frac{d^\nu x\, d^\nu y}{(2\pi)^\nu}\right\}^{1/2}$$

Por otro lado,

$$\frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}}(\eta_{xy},\psi_n) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2} e^{iyx}\int_{\mathbb{R}^\nu} e^{-iyq}\,\bar\eta(q-x)\,\psi_n(q)\,d^\nu q$$

Por el teorema de Plancherel:

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^\nu \int_{\mathbb{R}^{2\nu}} |(\eta_{xy},\psi_n)|^2\, d^\nu x\, d^\nu y = \int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu x \int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu y \left| \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2} \int_{\mathbb{R}^\nu} e^{-iyq}\,\bar\eta(q-x)\,\psi_n(q)\, d^\nu q\right|^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu x \int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu q\, |\bar\eta(q-x)|^2\, |\psi_n(q)|^2 = 1$$

ya que $\|\eta\|_2 = \|\psi_n\|_2 = 1$.

Así, usando c) del lema VII,

$$|G_E\varphi| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n = \|\varphi\|_1 \qquad \text{(XXV)}$$

G_E es una funcional continua para cada $E \subseteq \mathbb{R}^{2\nu}$

Aplicando e) del mismo lema, sabemos que existe un único operador $A(E)\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal - que $\forall\, \varphi \in \mathcal{F}_1$, $G_E\varphi = \mathrm{tr}[\varphi A(E)]$. Ahora veamos que el mapeo $A(\cdot)$ inducido por G_E es una medida POV sobre $\Omega = \mathbb{R}^{2\nu}$. Como $G_E\varphi \geq 0$ si $\varphi \geq 0$, entonces, tomando $\varphi_\psi = (\psi,\cdot)\psi$ obtenemos que

$$0 \leq G_E\varphi = \mathrm{tr}[\varphi A(E)] = (\psi, A(E)\psi)$$

Así $A(E) \geq 0$ y se cumple (i) de la definición de una medida (POV). Para probar (ii) tomemos $\varphi_\psi = (\psi,\cdot)\psi$ y sea $\{E_n\}_{n=1}^{+\infty}$ una colección disjunta de conjuntos, entonces,

$$(\psi, A(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n)\psi) = tr\,[\,\rho_\psi\, A(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n)\,]$$

$$= \int_{\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n} \rho(x,y)\, d^\nu x\, d^\nu y$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{E_n} \rho(x,y)\, d^\nu x\, d^\nu y$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} tr\,[\,\rho_\psi\,(A(E_n)\,]$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (\psi, A(E_n)\psi)$$

Finalmente, sea $C = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n (\psi_n,\cdot)\,\phi_n$ en $\mathcal{T}_1$. Un cálculo muestra que $tr\, C = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n (\psi_n,\phi_n)$

Por otro lado,

$$G_{\mathbb{R}^{2\nu}}\, C = \int_{\mathbb{R}^{2\nu}} d^\nu x\, d^\nu y \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n\, (\psi_n, \eta_{xy})(\eta_{xy}, \phi_n)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{2\nu}} d^\nu x\, d^\nu y\; (\psi_n, \eta_{xy})(\eta_{xy}, \phi_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n (\psi_n, \phi_n) = tr\, C\,.$$

Donde hemos usado que

$$\int_{\mathbb{R}^{2\nu}} d^\nu x\, d^\nu y\; (\varphi_n, \eta_{xy})(\eta_{xy}, \psi_n) = (\varphi_n, \psi_n) \qquad \text{(XXVI)}$$

Esto es cierto ya que

$$\int_{\mathbb{R}^{2\nu}} d^\nu x\, d^\nu y\; |(\varphi, \eta_{xy})|^2 = \|\varphi\|^2$$

Y por la identidad de polarización se obtiene (XXVI). En consecuencia,

$$G_{\mathbb{R}^{2\nu}}\, C = tr\,[c\cdot \mathbb{1}]\,. \quad \Rightarrow \quad A(\mathbb{R}^{2\nu}) = \mathbb{1}$$

Más adelante nos referiremos a esta medida POV dada por η_{xy} mediante el símbolo

$$A(E) = \int_E |\eta_{xy}\rangle\langle\eta_{xy}| \qquad \text{(XXVII)}$$

Supongamos que $E = \mathbb{R}\times B$ donde $B \subseteq \mathbb{R}^\nu$, entonces tomando $\rho_\psi = (\psi,\cdot)\,\psi$

$$(\psi, A(\mathbb{R}^\nu \times B)\psi) = tr\,(\rho_\psi\, A(\mathbb{R}^\nu \times B))$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2} \int_{\mathbb{R}^\nu\times B} d^\nu x\, d^\nu y\; |(\psi, \eta_{xy})|^2$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu} \int_{\mathbb{R}^{\nu}\times B} d^{\nu}x\, d^{\nu}y\, |(\hat{\varphi}, \hat{\eta}_{x,y})|^{2}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{\nu}\times B} d^{\nu}x\, d^{\nu}y \left| \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2} \int_{\mathbb{R}^{\nu}} \overline{\hat{\varphi}(p)}\, e^{-ixp}\, \hat{\eta}(p-y)\, d^{\nu}p \right|^{2}$$

$$= \int_{B} d^{\nu}y \int_{\mathbb{R}^{\nu}} d^{\nu}p\, |\bar{\hat{\varphi}}(p)\, \hat{\eta}(p-y)|^{2} = (\hat{\varphi}, F\{B, k\} * |\hat{\eta}|\ \hat{\varphi}) \qquad (XVIII)$$

Análogamente, vemos que si $E' = B \times \mathbb{R}^{\nu}$

$$(\varphi, A(E')\, \varphi) = (\varphi, A(B \times \mathbb{R}^{\nu})\, \varphi)$$

$$= \int_{E'} d^{\nu}x\, d^{\nu}y \left| \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2} \int_{\mathbb{R}^{\nu}} e^{-iyq}\, \bar{\eta}(q-x)\, \varphi(q)\, dq \right|^{2}$$

$$= \int_{B} d^{\nu}x \int_{\mathbb{R}^{\nu}} d^{\nu}q\, |\bar{\eta}(q-x)|^{2}\, |\varphi(q)|^{2} = (\varphi, F\{B, x\} * |\eta|^{2} \varphi)$$

$A(E')$ es el operador de multiplicación por la función

$$(F\{B, z\} * |\eta|^{2})(x) = \int_{B} d^{\nu}z\, |\eta(x-z)|^{2} \qquad (XXIX)$$

LEMA VIII

Sea $K \subset \mathbb{R}^{\nu}$, K compacto, $\mathcal{U}$ una vecindad de K, $\ell \in \mathbb{N}$, $f \in C^{\ell+1}(\mathcal{U})$, f real con $(\nabla f)(k) \neq 0 \quad \forall k \in K$.

Sea $\omega \geq 0$ y $\psi \in C^{\ell}(K)$, entonces

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{\nu}} d^{\nu}k\, e^{i\omega f(k)}\, \psi(k) \right| \leq C_{\ell}\, (1+\omega)^{-\ell}\, \|\psi\|_{\ell,\infty}$$

La constante C_{ℓ} depende de K pero puede ser tomada uniforme en f si $|\nabla f| \geq a > 0\ \forall k \in K$ y $\|f\|'_{\ell+1,K,\infty} \leq M < +\infty$ para a y M fijos donde $\|f\|'_{\ell+1,K,\infty} := \sum_{2 \leq |\alpha| \leq \ell+1} \sup_{k \in K} |D^{\alpha} f|$

DEMOSTRACION:

Para cada $k \in K$, existe $1 \leq i \leq n$ tal que $\left(\frac{\partial}{\partial k_i} f\right)(k) \neq 0$, y una vecindad de k en la cual $\frac{\partial}{\partial k_i} f$ no se anula. Por compacidad, K se puede cubrir con un número finito S de tales vecindades. Supongamos que $U_1, \dots, U_S$ cubren a K. Sea $\{\theta_r\}_{r=1}^{S}$ un conjunto de funciones tales que cada $\theta_r \in C_0^{\infty}$ y $\operatorname{supp} \theta_r \subset U_r$

con $\sum_r \Theta_r(k) = 1 \quad \forall\, k \in K$. Entonces, $\Psi = \sum_r \Theta_r \Psi$.

Estimamos cada término separadamente.

Supongamos que $\frac{\partial f}{\partial k_i} > 0$ en U_r. Integrando por partes

$$\int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu k \; e^{i\omega f(k)} \psi(k)\, \Theta_r(k) = \int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu k \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial k_i} \right)^{-1} \psi(k) \Theta_r(k) \right\} \left(\frac{-i}{\omega} \right) \times \frac{\partial}{\partial k_i} e^{i\omega f(k)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu k \left(\frac{i}{\omega} \right) e^{i\omega f(k)} \frac{\partial}{\partial k_i} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial k_i} \right)^{-1} \psi(k) \Theta_r(k) \right\}$$

$$\vdots$$

$$= \left(\frac{i}{\omega} \right)^{\ell} \int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu k \; e^{i\omega f(k)} \left\{ \frac{\partial}{\partial k_i} \left(\frac{\partial f}{\partial k_i} \right)^{-1} \right\}^{\ell} [\psi \Theta_r]$$

La función $\left\{ \frac{\partial}{\partial k_i} \left(\frac{\partial f}{\partial k_i} \right)^{-1} \right\}^{\ell} \psi(k)\, \Theta_r(k)$ tiene una suma de términos conteniendo derivadas de Θ_r hasta orden ℓ, por derivadas de $\Psi(k)$ también a lo más de orden ℓ y por factores de la forma $Q(f) \left(\frac{\partial}{\partial k_i} f \right)^{-m}$ donde Q es un polinomio de derivados de orden α para $2 \le |\alpha| \le \ell+1$. Entonces,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu k \; e^{i\omega f(k)} \psi(k) \right| = \left| \int_K d^\nu k \; e^{i\omega f(k)} \psi(k) \left(\sum_r \Theta_r(k) \right) \right|$$

$$\le \sum_r \frac{1}{\omega^\ell} \left| \int_K d^\nu k \; e^{i\omega f(k)} \left\{ \frac{\partial}{\partial k_{i_r}} \left(\frac{\partial f}{\partial k_i} \right)_r^{-1} \right\}^{\ell} \psi \Theta_r \right| \tag{XXX}$$

$$\le C'_\ell\, \omega^{-\ell} \, \|\psi\|_{\ell,\infty} \le C_\ell\, (1+\omega)^{-\ell} \, \|\psi\|_{\ell,\infty}$$

Para mostrar que C_ℓ puede ser tomada uniformamente para las f tales que $\|f\|'_{\ell+1,k,\infty} \le M$ y $|\nabla f| \ge a$, notemos que es suficiente con que podamos escoger un recubrimiento $\{U_r\}$ que nos sirva para todas las f en el conjunto. Para ver esto, puesto que $|\nabla f| \ge a$, existe para cada $k_0 \in K$ un $1 \le i \le n$ tal que

$\left|\frac{\partial f}{\partial k_i}\right| \geq a\nu^{-1/2}$. Sea $\delta > 0$ suficientemente pequeña de tal manera que $a\nu^{-1/2} - \delta M \geq a(2\nu)^{-1/2}$, entonces, $\forall\, k \in K$ con $|k_0 - k| < \delta$, obtenemos

$$\left|\frac{\partial f}{\partial k_i}(k)\right| \geq \left|\frac{\partial f}{\partial k_i}(k_0)\right| - \left|\frac{\partial f}{\partial k_i}(k) - \frac{\partial f}{\partial k_0}(k_0)\right| \geq \left|\frac{\partial f}{\partial k_i}(k)\right| \geq a(2\nu)^{-1/2} .$$

En consecuencia, podemos hallar un recubrimiento de K, $\{U_\gamma\}$ en el que cada f y en cada U_γ existe una derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial k_{i_\gamma}}$ tal que $\left|\frac{\partial f}{\partial k_{i_\gamma}}\right| \geq a' > 0$

Y de aquí se deduce como antes.

DEFINICION XIV $\forall$ compacto $B \subset \mathbb{R}^\nu$ y todo $t \neq 0$ se denota

$$tB = \{ty \mid y \in B\} \quad \text{y}$$

$$d(x,B) := \inf_{y \in B} |x-y| .$$

DEFINICION XV Sea $H_0 = P(-i\nabla)$ como en la definiciónX, con $P(k)$ una función real, denotamos por S al siguiente conjunto :

$S := \{k \in \mathbb{R}^\nu \mid$ $P(k)$ no es C^∞ en ninguna vecindad de k ó $(\nabla P)(k) = 0\}$

LEMA XIX Sea $H_0 = P(-i\nabla)$ y S comoen la definición XV y $K \subset \mathbb{R}^\nu$ un compacto disjunto de S. Sea $\varphi \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^\nu)$ con $\operatorname{supp}\hat{\varphi} \subset C^0(K)$.

$B \equiv \{v \mid$ existe $k \in K$ con $\nabla P(k) = v\}$

Entonces, $\forall\ x \notin tB$, $e^{-itH_0}\varphi$ $\qquad$ γ satisface la mayorización

$$|(e^{-itH_0}\varphi)(x)| \leq C_\ell \left(1 + d(x,tB)\right)^{-\ell} \|\hat{\varphi}\|_{\ell,\infty}$$

C_ℓ depende de K, pero es unifrome en x, t y φ si $d(x/t, B) \geq a > 0$.

DEMOSTRACION: B es compacto y no contiene al origen porque K es disjunto de S. Como

$$(e^{-itH_0}\varphi)(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2} \int_{\mathbb{R}^\nu} e^{ik\cdot x}\, e^{-itP(k)}\, \hat{\varphi}(k)\, d^\nu k$$

podemos aplicar el lema anterior.

Tomamos $w = d(x,tB)$

$$f_x(k) := \frac{k\cdot x - tP(k)}{d(x,tB)}$$

$$(\nabla f_x)(k) = d(x,tB)^{-1}\left(x - t(\nabla P)(k)\right)$$

Entonces $|\nabla f_x| \geq 1 \quad \forall\ k \in K \quad y \quad x \notin tB$.

Para $\ell \geq 1$, $\quad \|f\|'_{\ell+1,K,\infty} = |t|\, d(x,tB)^{-1}\, \|P\|'_{\ell+1,K,\infty}$

$$= d(x/t, B)^{-1}\, \|P\|'_{\ell+1,K,\infty}$$

Aplicando el lema anterior directamente si $d(x/t, B) \geq a > 0$, C_ℓ es uniforme en x, t y φ. ▲

Supongamos que B es un compacto disjunto del origen y que x, t son tales que

$d(x/t, B) \geq a$. Es fácil ver que entonces

$$C_1 (|x|+|t|) \leq d(x,tB) \leq C_2 (|x|+|t|) \qquad (XXXI)$$

Esto lo usaremos en el siguiente lema.

LEMAXX Sea K un compacto disjunto de S. Sea $\mathcal{U}$ una vecindad abierta de $B \equiv \{(\nabla p)(k_0) \mid k_0 \in K\}$ Entonces, $\forall \ \hat{\phi} \in C^\infty(K)$ existe una constante C que depende de K, $\mathcal{U}$ y n tal que

$$|(e^{-itH_0}\phi)(x)| \leq C_n (1+|x-x_0|+|t|)^{-n}$$
$$\times \|(1+|x-x_0|^n)\phi\|_2$$

$$\forall \ x_0 \ \text{y} \ \forall \ x,t \ \text{con} \ (x-x_0)/t \notin \mathcal{U}.$$

DEMOSTRACION : Primero notemos que solo hay que demostrarlo cuando $X_0 = 0$, ya que si

$$|(e^{-itH_0}\phi)(x)| \leq C(1+|x|+|t|)^{-n} \|(1+|x|^n)\phi\|_2$$

$\forall \ \phi$ con $\mathrm{supp}\,\hat{\phi} \subset K$, entonces tomando

$$\phi_{x_0} := \phi(x+x_0)$$

$$\mathrm{supp}\,\hat{\phi}_{x_0} = \mathrm{supp}\,\hat{\phi} \subset K .$$

$\Rightarrow$

$$|(e^{-itH_0}\phi_{x_0})(y)| \leq C(1+|y|+|t|)^{-n} \|(1+|y|^n)\phi_{x_0}\|_2$$
$$= C(1+|y|+|t|)^{-n} \|(1+|x-x_0|^n\phi\|_2$$

Poniendo $y = x - x_0$ y usando el hecho que e^{-itH_0} conmuta con translaciones, se obtine que

$$|(e^{-itH_0}\phi_{x_0})(x-x_0)| = |(e^{-itH_0}\phi)(x)|$$

$$\leq C(1+|x-x_0|+|t|)^{-n} \| (1+|x-x_0|^n)\phi \|$$

Basta entonces demostrarlo para $x_0 = 0$.

Ahora bien, usando(XXX) y (XXXI) obtenemos que si $x/_t \notin \mathbb{O}$

$$|(e^{-itH_0}\phi)(x)| = \left| \int_K (2\pi)^{-\nu/2} e^{-itF(k)} e^{ik\cdot x} \hat{\phi}(k) d^\nu k \right|$$

$$\leq C'(1+|x|+|t|)^{-n} \sum_{|\alpha|\leq n} \int_K |D^\alpha \hat{\phi}| \, d^\nu k$$

(Desigualdad de Schwar)

$$\leq C'(1+|x|+|t|)^{-n} \sum_{|\alpha|\leq n} \left(\int_K d^\nu k\right)^{1/2} \left(\int_K |D^\alpha \hat{\phi}|^2 d^\nu k\right)^{1/2}$$

$$\leq C''(1+|x|+|t|)^{-n} \sum_{|\alpha|\leq n} \| |x|^\alpha \phi \|_2$$

$$\leq C_n(1+|x|+|t|)^{-n} \| (1+|x|^n)\phi \|$$

▲

LEMA XXI Para cualquier $\varphi \in P_{ac}(H_0)$, $e^{-itH_0}\varphi \xrightarrow{\omega} 0$ cuando $t \to \pm\infty$

La demostración puede ser hallada en [2], [12]

DEFINICION XVI Un grupo unitario fuertemente continuo a un parámetro se define como el mapeo $U: \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$

que cumple con las siguientes propiedades

a) continuidad fuerte:

$$\underset{\tau \to 0}{s\text{-}\lim} \left(U_{t+\tau} - U_t \right) = 0.$$

$$\forall \quad t \in \mathbb{R}$$

b) unitariedad:

$$U_t^* = U_t^{-1}$$

c) propiedad del grupo:

$$U_t U_s = U_s U_t = U_{t+s}$$

$$t, s \in \mathbb{R} \qquad y$$

$$U_0 = \mathbb{1} \quad (\text{identidad}).$$

LEMA XXII

(Teorema de Stone) Sea $\{ U_t \}$ como en la definición XVI, entonces existe un único operador autoadjunto (llamado el generador infinitesimal de U_t) $-A$, tal que $D(A) = \{ f \mid \underset{\tau \to 0}{s\text{-}\lim}\ i\tau (U_\tau - \mathbb{1}) f$ existe cuando $\tau \to 0 \}$ y $Af = \underset{\tau \to 0}{s\text{-}\lim}\ i\tau^{-1}(U_\tau - \mathbb{1}) f$

Más aún $U_t : D(A) \to D(A)$ para cada $t \in \mathbb{R}$

Y además $U_t = e^{-itA}$.

DEMOSTRACION:

Ver [11].

CAPITULO 1

SUBORDINACION Y COMPACIDAD

En este capítulo damos algunos resultados generales [29] a dos espacios de Hilbert, los cuales utilizaremos una y otra vez a lo largo de los siguientes-capítulos.

Unicamente en esta sección, Ho y H son dos operadores autoadjuntos en los espacios de Hilbert $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}$ respectivamente. Posteriormente siempre -- consideraremos que $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$.

I denotará un intervalo acotado de $\mathbb{R}$, y si $I = [a, b]$ diremos que I tiende al infinito ($I \to +\infty$) si $a \to -\infty$ y $b \to +\infty$.

Finalmente, J denotará un operador acotado de $\mathcal{H}_0$ en $\mathcal{H}$.
Con esto podemos empezar propiamente nuestro trabajo, dando un lema.

LEMA 1.1.

Sean Ho, H y J como arriba, entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

a) Existen dos funciones localmente acotadas f_o y f, definidas sobre $\mathbb{R}$, tales que $|f_o|, |f| \geq 1$ -- $|f(x)| \to +\infty$ cuando $|x| \to +\infty$ y tales que el operador de $\mathcal{H}_o$ en $\mathcal{H}$

$$f(H)\, J\, f_o(H_o)^{-1} \tag{1.1.}$$

sea acotado.

b) Para todo intervalo I, existe una función f_I localmente acotada definida en $\mathbb{R}$ tal que $|f_I| \geq 1, |f_I(x)| \to +\infty$ cuando $|x| \to +\infty$ y el operador de $\mathcal{H}_o$ en $\mathcal{H}$

$$f_I(H)\, J\, P_o(I) \tag{1.2}$$

es acotado.

c) $\forall$ intervalo acotado I_o,

$$\| P(I^c)\, J\, P_o(I_o) \| \tag{1.3}$$

cuando $I \to +\infty$

DEMOSTRACION

a) => b)

Puesto que $f(H)\, J\, P_o(I) = \{ f(H) J f_o(H_o)^{-1} \} \times \{ f_o(H_o) P_o(I) \}$

El primer factor del segundo miembro es un operador acotado - por la hipótesis (a), mientras que el segundo también si I es un intervalo acotado puesto que f_o es localmente acotada. Podemos tomar $f_I = f$ (independientemente de I).

b) => c) $\forall$ par de intervalos acotados I_o, I

$$P(I^c)\, J\, P_o(I_o) = \{ P(I^c) f_{I_o}(H)^{-1} \} \times \{ f_{I_o}(H) J\, P_o(I_o) \}$$

El primer factor tiende a cero si $I \to +\infty$, mientras que el segundo es un operador acotado que no depende de I .

c) => a) Supongamos que lo demostramos para el caso en que $H_o \geq 0$, $H \geq 0$. Entonces si se cumple (1.3) para H_o y H y si $I_o \subset \mathbb{R}^+$ entonces $P_o'(I_o) = P_o(x \in \mathbb{R}, |x| \in I_o)$ donde P_o' denota la proyección espectral asociada a $|H_o|$. De aquí se obtiene que - $|H_o|$ y $|H|$ cumplen (1.3) y por lo tanto existen funciones f', f_o' que satisfacen (1.1)

Tomando $f = f(x) = f'(|x|)$ obtenemos el resultado para H_o y H .

Consideremos H_o, H y denotemos por $F\{S,x\}$ la función característica de S evaluada en el punto x. Escogeremos funciones de la forma:

$$f_o(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, F\{[n,n+1), x\}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \, F\{[\lambda_n, \lambda_{n+1}), x\}$$

Donde las sucesiones $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{+\infty}$ y $\{\lambda_n\}_{n=0}^{+\infty}$ son sucesiones crecientes de -- números positivos que tienden al infinito cuando $n \to +\infty$ y $a_o = b_o = 1$, $\lambda_o = 1$, a_n y b_n, λ_n serán escogidas convenientemente.

Por cálculo espectral,

$$f(H) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \, P([\lambda_n, \lambda_{n+1}))$$

$$f_o(H_o)^{-1} = \sum_{s=0}^{+\infty} a_s^{-1} \, P_o([s,s+1))$$

Además,

$$f_o(H_o)^{-1} = \sum_{s=0}^{n-1} a_s^{-1} P_o([s,s+1)) + \sum_{s \geq n}^{+\infty} a_s^{-1} P_o([s,s+1))$$

Poniendo

$$A_n := \sum_{s=0}^{n-1} a_s^{-1} P_o([s,s+1)) \qquad A'_n := f_o(H_o)^{-1} - A_n$$

$$\|A_n \varphi\|^2 = \sum_{s<n} a_s^{-2} \|P_o([s,s+1))\varphi\|^2 \leq a_o^{-2} \sum_{s<n} \|P_o([s,s+1))\varphi\|^2 \leq \|\varphi\|^2$$

Ya que $\{a_n\}$ es una sucesión creciente. De este modo, obtenemos también que -- $\|A'_n \varphi\|^2 \leq a_n^{-2} \|\varphi\|^2$. En consecuencia y

$$\|A_n\| = 1 \quad ; \quad \|A'_n\| = a_n^{-1}$$

$$\|f(H) J f_o(H_o)^{-1}\| = \|f(H) J A_n + f(H) J A'_n\|$$

$$\leq \Big\|\sum_{n=0}^{+\infty} b_n P([\lambda_n, \lambda_{n+1})) J P_o([0,n)) A_n\Big\|$$

$$+ \Big\|\sum_{n=0}^{+\infty} b_n P([\lambda_n, \lambda_{n+1})) J A'_n\Big\|$$

$$\leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \left\{ \|P([\lambda_n, +\infty)) J P_o([0,n))\| + a_n^{-1} \|J\| \right\}$$

Entonces $f(H) J f_0(H_0)^{-1}$ será acotada si esta serie converge. Por (1.3) podemos escoger $\{\lambda_n\}$ una sucesión creciente tal que $\| P([\lambda_n, +\infty)) J P_0([0,n)) \| \leq 2^{-n}$ Para tal sucesión $\{\lambda_n\}$ y, por ejemplo, para $a_n = 2^n$ y $b_n = n+1$ la serie converge y $|f|$, $|f_0| \geq 1$, $|f_0(x)| \to +\infty$, $|f(x)| \to +\infty$ cuando $|x| \to \infty$. Esto prueba el lema ▲

DEFINICION 1.1. Sean H_0, H operadores autoadjuntos en los espacios de Hilbert $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}$ respectivamente. J es un operador acotado de $\mathcal{H}_0$ en $\mathcal{H}$. Se dice que H es J-subordinado a Ho si cualesquiera de las tres condiciones del lema 1.1 es satisfecha. Si $J = 1$, simplemente diremos que H es subordinado a Ho. Si H es subordinado a Ho y Ho es subordinado a H diremos que Ho y H son mutuamente subordinados. Finalmente, si H es J-subordinado a Ho y Ho es J^* subordinado a H, diremos que H y Ho son mutuamente subordinados con J.

Ahora damos unos ejemplos de operadores Ho, H que cumplen alguna ó algunas de las condiciones del lema 1.1

Ejemplo 1.1

Sean Ho y H operadores semiacotados, es decir $H_0 \geq -c$, $H \geq -c$ Supongamos que $Q(H) \subset Q(H_0)$. Entonces como $D((H+c)^{1/2}) = Q(H) \subset Q(H_0) = D((H_0+c)^{1/2})$. Tomando $f(x) = f_0(x) = (x+c+1)^{1/2}$ obtenemos que $f_0(H_0) f(H)^{-1}$ es acotado.

Esto último es debido a que como $f_0(H_0)$ es cerrado Ran $f(H)^{-1} = D(f(H)^{+1}) = D((H+c)^{1/2}) \subset Q(H_0)$ y $f(H)^{-1}$ es acotado. Por consiguiente $f_0(H_0) f(H)^{-1}$ es un operador definido en todo el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ cuya gráfica es cerrada, por lo tanto acotado. Entonces Ho está subordinado a H por (1.1). ▲

Ejemplo 1.2

Sea $\mathcal{D}_o = \bigcup_I R_{an} P_o(I)$ donde la unión se toma sobre todos los intervalos acotados. Supongamos que $H \geq -C$ y que además ($H := H_o \dot{+} V$), H está definido como forma cuadrática sobre $\mathcal{D}_o \times \mathcal{D}_o$. Donde V es una forma cuadrática sobre $\mathcal{D}_o \times \mathcal{D}_o$ y donde $P_o(I)\, V\, P_o(I)$ define un operador acotado para todo intervalo acotado I. Tomando $f_I(x) = (x+c+1)^{1/2}$, vemos que

$$\| f_I(H)\, P_o(I)\, \varphi \|^2 = (f_I(H)\, P_o(I)\, \varphi ,\, f_I(H)\, P_o(I)\, \varphi)$$
$$= (P_o(I)\varphi ,\, f_I^2(H)\, P_o(I)\, \varphi)$$
$$= (P_o(I)\varphi ,\, (H_o + c)\, P_o(I)\, \varphi) +$$
$$+ (P_o(I)\varphi ,\, V\, P_o(I)\, \varphi) \leq \|\varphi\|^2 \, \|(H_o+c)P_o(I)\| + \|\varphi\|^2 \, \| P_o(I) V P_o(I$$

De lo cual vemos que $f_I(H)P_o(I)$ es acotado en norma y se cumple (1.2). Entonces H está subordinado a Ho.

Ejemplo 1.3

Ahora damos un caso que cumple las condiciones de los dos ejemplos anteriores. Sea $H_o = P(-i\nabla)$, con $P(k) = \overline{P(k)}$ y continua en $\mathbb{R}^n$. Supongamos además que $P(k) \to +\infty$ cuando $|k| \to +\infty$. Ho es un operador definido sobre $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$

Sea $V = F(-i\nabla)^* \, W F(-i\nabla)$, donde F es continua y es el operador de multiplicación por la función positiva W. Y $W = W_1 + W_2$ con $W_1 \in L^1$, $W_2 \in L^\infty$. Definamos la forma cuadrática $H := H_o \dot{+} V$ sobre $Q(H_o) \cap Q(V) = Q(H)$ Obviamente $Q(H) \subset Q(H_o)$. Más aún, como $P(K) \to \infty$ cuando $|k| \to +\infty$ con P (k) continua se deduce que $P(k) \geq -c$, para algún $c \in \mathbb{R}$ y $\forall\, k \in \mathbb{R}^n$. Entonces, H es semiacotada ya que $V \geq 0$. Consecuentemente, Ho es subordinado a H

Para ver que el dominio de forma de V contiene a $R_{an} P_o(I)$ es suficiente con ver que $P_o(I)\, V\, P_o(I)$ define un operador acotado. Si $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$,

$$(P_0(I)\varphi,\ V P_0(I)\psi) = (P_0(I)\varphi,\ F(-i\nabla)^* W(F-i\nabla) P_0(I)\psi)$$

$$= (F(-i\nabla)P_0(I)\varphi,\ F(-i\nabla)P_0(I)\psi)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu x\,(W_1+W_2)(x)\,\overline{\{F(-i\nabla)P_0(I)\varphi\}}\,\{F(-i\nabla)P_0(I)\psi\}$$

Por otro lado, sea $K = \{k\in\mathbb{R}^\nu \mid P(k)\in I\}$, entonces

$$[F(-i\nabla)P_0(I)\varphi](x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2}\int_K e^{ix\cdot k}\,F(k)\,\hat{\varphi}(k)\,d^\nu k$$

Por la desigualdad de Schwarz

$$|[(F(-i\nabla)P_0(I)\varphi](x)| \le \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2} m_\nu(K)\ \{\sup_{k\in K}|F(k)|\}\ \|\varphi\|$$

donde $m_\nu(K)$ es la medida de Lebesgue de K. K es acotado, ya que $P(k)\to+\infty$ cuando $|k|\to+\infty$.

Obtenemos que

$$|(P_0(I)\varphi,\ VP_0(I)\psi)| \le \left(\int_{\mathbb{R}^\nu}|W_1|\,d^\nu x\right)\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu}\|\chi_K F\|^2$$

$$\times\|\varphi\|\,\|\psi\| + \|W_2\|_\infty\ \|\overline{F(-i\nabla)P_0(I)\varphi}\|\ \|F(-i\nabla)P_0(I)\psi\|$$

$$\le \left\{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu}\|\chi_K F\|^2\,\|W_1\|_{L^1} + \|W_2\|_\infty\, m_\nu(K)\,\{\sup_{k\in K}|F(k)|\}^2\right\}$$

$$\times\|\varphi\|\,\|\psi\|$$

Como F es continua $\sup_{k\in K}|F(k)|<+\infty$. Por lo cual $P_0(I)\,V\,P_0(I)$ es un operador acotado para cada I. Así H y Ho son mutuamente subordinados.

Ejemplo 1.4

Sea Ω una región compacta de $\mathbb{R}^\nu$ y tomemos J una función a valores reales con (1-J) en $C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$ y $J\equiv 0$ en una vecindad de Ω.

Tomemos $\mathcal{H}_0 = L^2(\mathbb{R}^\nu)$, $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^\nu\setminus\Omega)$ y sean $H_0 = -\Delta$ en $\mathcal{H}_0$ y H una extensión autoadjunta de $-\Delta$ restringido a $C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu\setminus\Omega)$. Obviamente J es un operador acotado de $\mathcal{H}_0$ en $\mathcal{H}$.

Sea $A = -\Delta \upharpoonright C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu \setminus \Omega)$ entonces $A \subset \bar{A} \subset H \subset A^*$ y

$$\mathcal{D}(A^*) = \{ \psi \in L^2(\mathbb{R}^\nu \setminus \Omega) \mid -\Delta\psi \in L^2(\mathbb{R}^\nu \setminus \Omega) \}$$

donde $-\Delta\psi$ se entiende en sentido de distribuciones.

Sea I un intervalo acotado y supongamos que $\psi \in \operatorname{Ran} P_0(I)$

Entonces ψ es una función en $C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu \setminus \Omega)$. Usando el mismo argumento del ejemplo I en el capítulo 0, se demuestra que para tal ψ

$$\varphi_n \to J\psi \qquad \text{en } \mathcal{H}$$

$$-\Delta\varphi_n \to (-\Delta) J\psi \qquad \text{en } \mathcal{H}$$

donde $\varphi_n := \omega(x/n) J\psi$ y ω es la misma función en (XVI). Puesto que $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu \setminus \Omega)$ esto implica que $J\psi \in \mathcal{D}(\bar{A}) \subset \mathcal{D}(H)$. En consecuencia, $(H + i\mathbb{1}) J P_0(I)$ es acotado.

Así H es J subordinado a Ho. Más aún, si $\psi \in \mathcal{D}(H_0)$ entonces

$$\psi_n := P_0(I_n)\psi \to \psi \qquad \text{en } \mathcal{H}_0$$

$$-\Delta\psi_n \to -\Delta\psi \qquad \text{en } \mathcal{H}_0$$

donde $I_n = [0,n]$. Por lo tanto $J\psi_n \to J\psi$ en $\mathcal{H}$

$$-\Delta(J\psi_n) \to -\Delta(J\psi) \qquad \text{en } \mathcal{H}.$$

Como antes, se obtiene que $(H + i\mathbb{1}) J (H_0 + i\mathbb{1})^{-1}$ es acotado.

Por otra parte

$$\begin{aligned}(H+i\mathbb{1})^{-1} J - J(H_0+i\mathbb{1})^{-1} &= -(H+i\mathbb{1})^{-1}\left[(H+i\mathbb{1}) J (H_0+i\mathbb{1})^{-1} - J\right] \\ &= -(H+i\mathbb{1})^{-1}\left[(-\Delta J)(H_0+i\mathbb{1})^{-1} + \right. \\ &\qquad \left. 2(\nabla J)\cdot(\nabla(H_0+i\mathbb{1})^{-1}\right]\end{aligned}$$

Usando el lema 1.4 y la proposición 1.1 se deduce que H y H_0 son mutuamente subordinados con J.

Ahora procederemos a demostrar un lema que utilizaremos a lo largo de todo este trabajo.

LEMA 1.2

Sea A un operador compacto de $\mathcal{H}_o$ en $\mathcal{H}$ y supongamos que $\{B_n\}$ es una sucesión de operadores de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$ tal es que $s\text{-}\lim_{n\to+\infty} B_n = 0$ entonces ---

$$\lim_{n\to+\infty} \|B_n A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_o,\mathcal{H})} = 0$$

DEMOSTRACION:

Supongamos que la afirmación es falsa. Tomemos $\varepsilon > 0$ y sea -- $S = \{B_n A \mid \|B_n A\| \geq \varepsilon\}$. Entonces, si S contiene un número infinito de elementos (los cuales seguimos denotando por $\{B_n A\}$) hacemos lo siguiente:

Como $\|B_n A\| = \sup_{\|\varphi\|=1} \|B_n A\varphi\|$, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos hallar $\varphi_n \in \mathcal{H}_o$ tal que $\|\varphi_n\| = 1$ y $\|B_n A\varphi_n\| \geq 1/2\, \|B_n A\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Por otro lado, como A es compacto, existe una subsucesión $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ tal que $A\varphi_{n_k} \to \eta \in \mathcal{H}$

Entonces

$$\varepsilon/2 \leq \|B_{n_k} A\varphi_{n_k}\| \leq \|B_{n_k}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \|A\varphi_{n_k} - \eta\| + \|B_{n_k}\eta\|$$

$$\leq \left[\sup_{n\in\mathbb{N}} \|B_n\|\right] \|A\varphi_{n_k} - \eta\| + \|B_{n_k}\eta\|$$

Por el principio de acotamiento uniforme $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|B_n\| < +\infty$ mientras que $B_{n_k} \xrightarrow{s} 0$, por las hipótesis.

Así obtenemos una contradicción y en consecuencia para cada $\varepsilon > 0$, solo existe un número finito de términos para los cuales $\|B_n A\| \geq \varepsilon$. Esto -- nos dice que $\lim_{n\to+\infty} \|B_n A\| = 0$

Cuando $\mathcal{H}_o = \mathcal{H}$, este lema tiene una reformulación importante para lo que seguirá en los siguientes capítulos.

COROLARIO

Sean A, y $\{B_n\}$ operadores sobre un espacio de -- Hilbert $\mathcal{H}$, tales que A es compacto y B_n^* converge fuertemente a B^*. Entonces $\{AB_n\}$ converge en norma de operadores a AB.

Mediante este lema, veremos ahora que la subordinación entre dos operadores está fuertemente relacionada con ciertas propiedades de compacidad.

PROPOSICION 1.1 Sean $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}$ y J como antes, las condiciones siguientes son equivalentes.

(1) Para algún $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $(H-z_0)^{-1}J - J(H_0-z_0)^{-1}$ es compacto.

(2) Para algún $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ y $\forall$ intervalo acotado I,
(a) $\{(H-z_0)^{-1}J - J(H_0-z_0)^{-1}\} \times P_0(I)$ es compacto.
(b) $P(I)\{(H-z_0)^{-1}J - J(H_0-z_0)\}$ es compacto.

(3) (a) H y H_0 son mutuamente subordinados con J
(b) Para algún $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ y para todo intervalo acotado I, $P(I)\{(H-z_0)^{-1}J - J(H_0-z_0)^{-1}\}P_0(I)$ es compacto.

DEMOSTRACION:

Obviamente $1 \Rightarrow 2$

Es suficiente con demostrar que $2 \Rightarrow 1$ y que 2 (a) es equivalente a que H es J subordinado a H_0 y 3(b), ya que simplemente intercambiando los papeles de H por H_0 y J por J^* se deduce que 2 (b) es equivalente a que H_0 es J^* subordinado a H y 3 (c), lo cual significa que 2 es equivalente a 3 y por tanto quedará demostrada la proposición.

$2 \Rightarrow 1$ Pongamos $R(z) = (H-z)^{-1}$; $R_0(z) = (H_0-z)^{-1}$. par de intervalos acotados I_1, I_2

$$R(z)J - JR_0(z) = P(I_1)\,(R(z)J - JR_0(z)) + P(I_1^c)\,(R(z)J - JR_0(z))\,P_0(I_2)$$
$$+ P(I_1^c)\,(R(z)J - JR_0(z))\,P_0(I_2^c)$$

Los dos primeros términos del segundo miembro son compactos por las hipótesis 2. Entonces,

$$\| R(z)J - JR_0(z) - \{P(I_1)(R(z)J - JR_0(z)) - P(I_1^c)(R(z)J - JR_0(z))P_0(I_2)\}\|$$
$$= \| P(I_1^c)(R(z)J - JR_0(z))\,P_0(I_2^c)\|$$
$$\leq \{\|P(I_1^c)R(z)\| + \|R_0(z)P_0(I_2^c)\|\}\,\|J\|$$

Como $\displaystyle \|P(I_1^c)R(z)\| \leq \sup_{\lambda \in I_1^c} \frac{1}{|\lambda - z|}$ entonces

$\|P(I_1^c)R(z)\| \to 0$ cuando $I_1 \to \infty$ (1.4)

Del mismo modo para $R_0(z)P_0(I_2^c)$. Así, $R(z)J-JR_0(z)$ es el límite en norma de operadores compactos. En consecuencia compacto.

$1(a) \Rightarrow$ H es J subordinado a Ho y 3(b)

De 2 (a) obtenemos trivialmente 3 (b). Para probar que H es J subordinado a Ho, uno sabe que $P(I_1^c)$ tiende fuertemente a cero cuando $I_1 \to +\infty$ y que el operador $C = (R(z)J - JR_0(z))P_0(I_0)(H_0-z)P_0(I_0) = (R(z)J - JR_0(z))(H_0-z)P_0(I_0)$ es compacto, por 2 (a).

Aplicando el lema 1.2 :

$$\|P(I_1^c)C\| \to 0 \quad \text{si} \quad I_1 \to +\infty \tag{1.5}$$

Por consiguiente,

$$\|P(I_1^c)JP_0(I_0)\| = \|P(I_1^c)R(z)J(H_0-z)P_0(I_0) - P(I_1^c)C\|$$

$$\leq \|P(I_1^c)R(z)\|\,\|J\|\,\|(H_0-z)P_0(I_0)\| + \|P(I_1^c)C\| \to 0$$

Cuando $I_1 \to +\infty$ por (1.4) y (1.5). De este modo, vemos que se cumple la condición (1.3)

H es J subordinado a Ho y 3(b) $\Rightarrow$ (2a):

Para toda pareja de intervalos I_1, I_0

$$\|(R(z)J - JR_0(z))P_0(I_0) - P(I_1)(R(z)J-JR_0(z))P_0(I_0)\|$$

$$= \|P(I_1^c)R(z)JP_0(I_0) - \{P(I_1^c)JP_0(I_0)\}R_0(z)\|$$

$$\leq \|P(I_1^c)R(z)\|\,\|JP_0(I_0)\| + \|P(I_1^c)JP_0(I_0)\|\,\|R_0(z)\|$$

El primer término tiende a cero, cuando $I_1 \to +\infty$ por (1.4), mientras que el segundo tiende a cero por (1.3).

3(b) nos dice entonces que $(R(z)J - JR_0(z))P_0(I_0)$ es el límite en norma de operadores compactos, y esto prueba 2 (a) y la proposición. ▲

Nota 1

Con respecto a esta proposición, observemos que las condiciones siguientes son equivalentes:

a) $\forall$ intervalo acotado I, $P(I)\,M$ es compacto.

b) $\forall\ f \in C_\infty(\mathbb{R})$, $f(H)\,M$ es compacto

c) Para algún $\alpha > 0$ y algún $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $(H-z)^{-\alpha}\,M$ es compacto.

d) Para algún $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ con f^{-1} localmente acotada, $f(H)\,M$ es compacto.

En efecto, ya que claramente b) => c) => d).

Por otro lado, si $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ y f^{-1} es localmente acotada entonces, para todo intervalo acotado I, $P(I)\,M = \{f^{-1}(H)\,P(I)\}\,f(H)\,M$ consecuentemente, $P(I)M$ es compacto ya que $f^{-1}(H)\,P(I)$ es acotado. Por lo tanto d) => a)

Finalmente, como toda función f en $C_\infty(\mathbb{R})$ es el límite uniforme de funciones del tipo $F(x) = \sum_j^n a_j\, F\{I_j, x\}$, donde cada I_j es acotado, por cálculo espectral sabemos que $\| \sum_j^n a_{j,n} P(I_{j_n}) - f(H) \| \to 0 \quad n \to +\infty$

Entonces, $f(H)\,M$ es compacto $\forall f \in C_\infty(\mathbb{R})$ si (a) se cumple.

En la proposición 1.1, pudimos entonces reemplazar las condiciones 2(a) y/o 2(b) por cualesquiera de las condiciones (b), (c) ó (d).

Nota 2

En esta misma proposición pusimos en la condición (a) " para algún $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $R(z)J - J R_0(z)$ es compacto", Pero si $R(z)J - JR_0(z)$ es compacto.

$$\begin{aligned}(R(z')J - J R_0(z')) &= R(z')J + (z'-z)\,R(z')\,J\,R_0(z') - J R_0(z') \\ &\quad - (z'-z)\,R(z')\,J\,R_0(z') \\ &= (R(z')J\,[\,1 + (z'-z)R_0(z')\,] - [\,1 + (z'-z)\,R(z')\,] \\ &\quad \times J R_0(z')\end{aligned}$$

$$= R(z')\,J\,[(H_0 - z') + (z' - z)]\,R_0(z')$$

$$- [(H - z') + (z' - z)]\,R(z')\,J\,R_0(z')$$

$$= R(z')\,J(H_0 - z)\,R_0(z) - (H - z)R(z')\,J\,R_0(z')$$

$$= (H - z)\,R(z')\,[R(z)\,J\,(H_0 - z)\,R_0(z') - J\,R_0(z')]$$

$$= (H - z)\,R(z')\,[R(z)J - J R_0(z)]\,(H_0 - z)R_0(z') \tag{1.6}$$

Entonces, $R(z')J - JR_0(z')$ es compacto, ya que $(H-z')R(z)$ es acotado si -- $z, z' \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ Se obtiene entonces que $R(z)J - JR_0(z)$ es compacto -- $\forall\ z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

Antes de poder aplicar la proposición 1.1, daremos un lema -- que nos caracteriza el espectro esencial de un operador autoadjunto A sobre $\mathcal{H}$, en base a las funciones de $C_\infty(\mathbb{R})$.

LEMA 1.3 Sea A un operador autoadjunto sobre $\mathcal{H}$. Entonces la parte del espectro de A en (a,b) es puramente discreta sí y solo sí f (A) es compacto para cada función continua f con sopf $\subset$ (a,b).

DEMOSTRACION

Supongamos que $\operatorname{supp} f \subset (a,b)$ Entonces si f es continua, existen $c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a < c \leq d < b$ y $\operatorname{supp} f \subset [c,d]$. Si A tiene espectro puramente discreto en (a,b) , entonces existen solamente un número finito de puntos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \sigma(A) \cap [c,d]$ puesto que ningún punto en $[c,d]$ es un punto límite de G(A) , ya que estamos suponiendo que A tiene espectro puramente puntual en (a,b). Más aún, el rango de cada proyección espectral $P(\lambda_i)$ es de dimensión finita. Y por lo tanto $f(A) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)P(\lambda_i)$ es un operador de rango finito y en consecuencia también compacto.

Inversamente, supongamos que cada f(A) con sopf $\subset (a,b)$ es compacto. Tomemos $[c,d] \subset (a,b)$ y f una función positiva y continua con $0 \leq f \leq 1$, $f = 1$

si $c < x < d$ y $\operatorname{supp} f \subset (a,b)$. Entonces, si $P([c,d])$ es la proyección espectral del operador A, tenemos que $P([c,d]) f(A) = P([c,d])$. Entonces $P([c,d])$ es una proyección ortogonal compacta. De aquí se sigue que Ran $P([c,d])$ es de dimensión finita. Como Ran $P(K_1) \supset$ Ran $P(K_2)$ si $K_1 \supset K_2$. Entonces, para cada $\lambda \in (c,d)$ y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña tenemos que $\operatorname{Ran} P([c,d]) \supset \operatorname{Ran} P(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)$. Por consiguiente $\dim \operatorname{Ran} P(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon) < +\infty$

Lo cual nos dice que cualquier $\lambda \in (c,d)$ pertenece a la resolvente de A ó al espectro discreto de A. Esto prueba el lema.

NOTA 3

Lo que nos dice este lema es que el espectro esencial de un operador autoadjunto A es el complemento del abierto más grande $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ tal que f(A) sea compacto $\forall f \in C_\infty(\mathbb{R})$ con soporte contenido en $\mathcal{O}$.

LEMA 1.4 Sea f una función en $L^2(\mathbb{R}^\nu) \cap L^\infty(\mathbb{R}^\nu)$ y $Q(k)$ una función positiva que tiende al infinito cuando $|k| \to +\infty$, entonces el operador de $L^2(\mathbb{R}^\nu) = \mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$, definido por

$$[f(Q(k)+i\mathbb{1})]\phi = f(x)\{[Q(k)+i\mathbb{1}]^{-1}\hat{\phi}\}^{\vee}(x) \qquad (1.7)$$

es compacto. Donde $\wedge$ y $\vee$ denotan transformada de Fournier y su inversa de la función entre los paréntesis.

DEMOSTRACION:

Sea B_R la bola en $\mathbb{R}^\nu$ de radio R. Entonces el operador $f(Q(k)+i\mathbb{1})^{-1} F\{B_{n,R}\}$ es de Hilbert Schmidt. Para ver esto, hacemos el siguiente cálculo: Si $\varphi \in \mathcal{H}$

$$\{f\,(Q(k)+i\mathbb{1})^{-1} F\{B_{n,k}\}\varphi\}^{\wedge}(k)$$

$$= \{\hat{f} * [(Q(k)+i\mathbb{1})^{-1} F\{B_{n},k\}\varphi]^{\wedge}\}(k)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^\nu} \hat{f}(k-k')\hat{\varphi}\, F\{B_n,k'\}(Q(k')+i\mathbb{1})^{-1}\, d^\nu k'$$

Entonces el operador $f(Q(k)+i\mathbb{1})^{-1} F\{B_n,k\}$ es unitariamente equivalente al operador -integral $\psi \to \int_{\mathbb{R}^\nu} \hat{f}(k-k') F\{B_n,k'\}(Q(k')+i\mathbb{1})^{-1} \psi(k') d^\nu k'$ cuyo -- kernel es

$$\hat{f}(k-k') F\{B_n,k'\}(Q(k')+i\mathbb{1})^{-1}$$

y como

$$\| \hat{f}(k-k') F\{B_n,k'\}(Q(k')+i\mathbb{1})^{-1} \|^2_{L^2}$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu} d^\nu k\, d^\nu k' \; |\hat{f}(k-k')|^2 \, |F\{B_n,k'\}|^2$$

$$= \|f\|^2 \, \|F\{B_n,k\}\|^2 < +\infty$$

De esta forma se obtiene que $f(Q(k)+i\mathbb{1})^{-1} F\{B_n,k\}$ es de Hilbert Sch-- midt y por lo tanto compacto.

Entonces $\forall \varphi \in \mathcal{H}$, usando el teorema de Plancherel,

$$\|\{f(Q(k)+i\mathbb{1})^{-1} - f(Q(k)+i\mathbb{1})^{-1} F\{B_n,k\}\}\varphi\|$$

$$= \| f(Q(k)+i\mathbb{1})^{-1} F\{B_n^c,k\}\varphi \| \leq \|f\|_\infty \|(Q(k)+i\mathbb{1})^{-1} F\{B_n^c,k\}\varphi\|$$

$$= \|f\|_\infty \|(Q(k)+i\mathbb{1})^{-1} F\{B_n^c,k\}\hat{\varphi}\| \leq \|f\|_\infty \sup_{k\in B_n^c} |(Q(k)+i\mathbb{1})^{-1}| \, \|\varphi\|$$

B_n^c es el complemento en $\mathbb{R}^\nu$ de B_n.

donde B_n^c es el complemento de Bn. Consecuentemente, --

$$\| f(Q(k)+i\varepsilon)^{-1} - f(Q(n)+i\varepsilon)^{-1} F\{B_{n,k}\} \|_{\mathcal{J}(\mathcal{H})} \to 0 \qquad n \to +\infty$$

ya que $Q(k) \to +\infty$ cuando $|k| \to +\infty$. Entonces existe una sucesión de operadores compactos que convergen en norma. Se desprende que el operador definido en (1.7) es compacto. ▲

NOTA 4

Puesto que $P(I)R(z)(HJ - JH_o)R_o(z)P_o(I) =$

$$P(I)R(z)[(H-z)J - J(H_o-z)]R_o(z)P_o(I) = -P(I)[R(z)J - JR_o(z)]P_o(I)$$

Y como $(H-z)P(I)$, $(H_o-z)P_o(I)$ son acotados, obtenemos que

$$(H-z)P(I)(P(I)R(z)[(H-z)J - J(H_o-z)]R_o(z)P_o(I)(H_o-z)P_o(I) =$$
$$= P(I)[HJ - JH_o]P_o(I) .$$

Vemos entonces que la condición 3(c) de la proposición 1.1 es equivalente a la condición " 3(c) $P(I)[HJ - JH_o]P_o(I)$ es compacto $\forall$ intervalo acotado I ".

Generalmente, es fácil verificar esta condición, si se pone la forma cuadrática $HJ - JH_o$ como una suma de términos de la forma $A^* B$, donde A y B son dos operadores tales que $\forall$ intervalo I, AP(I) es acotado y $BP_o(I)$ compacto. Veamos esto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.4

Consideremos Ho y H como en el ejemplo 1,3. Pero supongamos ahora que $V = F(-i\nabla)^* W F(-i\nabla)$ con $W_1 \geq 0$, $W_2 \geq 0$, $W_1 \in L_1$, $W_2 \in L^\infty$ y además W_2 es una función que tiende a cero al infinito.

Factoricemos $V = A^* B$ con $A = B = W^{1/2} F(-i\nabla)$. Como $H_o \geq -C$, entonces

$0 \leq A^* A = V \leq H_o + C + V = H + C$. Por consiguiente AP (I) es acotado $\forall$ I. Ahora veamos que $BP_o(I)$ es compacto: Como $\| \frac{1}{2}(W_1^{1/2} + W_2^{1/2}) F(-i\nabla) P_o(I)\varphi \|$

$\leq \| B P_o(I)\varphi \| = \| W^{1/2} F(-i\nabla) P_o(I)\varphi \| \leq \| \{W_1^{1/2} + W_2^{1/2}\} F(-i\nabla) P_o(I)\varphi \|$

Es suficiente con ver que $W_1^{1/2} F(-i\nabla) P_o(I)$ y $W_2^{1/2} F(-i\nabla) P_o(I)$ son compac tos. Haciendo un cálculo análogo al hecho en la demostración del lema 1.4, vemos que $W_1^{1/2} F(-i\nabla) P_0(I)$ es unitariamente equivalente a un operador de Hilbert -- Schmidt y por lo tanto compacto. Lo mismo es cierto para el operador $F\{B_n, x\} F(-i\nabla) P_0(I)$. Y de aquí que $\| W_2^{1/2} F\{B_n, x\} F(-i\nabla) P_0(I) - W_2^{1/2} F(-i\nabla) P_0(I) \|$

$$\leq \| W_2^{1/2} F\{B_n^c, x\} F(-i\nabla) P_0(I) \| \leq \| W_2^{1/2} F\{B_n^c, x\} \|_\infty \| F(-i\nabla) P_0(I) \| \underset{n \to +\infty}{\to 0}$$

puesto que $W_2 \to 0$ cuando $|X| \to +\infty$. Y así vemos que $W_2^{1/2} F(-i\nabla) P_0(I)$ es compacto y por tanto $B P_0(I)$ es compacto. Entonces se cumplen las condiciones 3(a), (b) de la proposición 1.1. De esto y de la proposición siguiente se desprende que $\sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(H_0)$

PROPOSICION 1.2 Sean Ho, H autoadjuntos y J como antes. Tales que -

1) Para algún (ó para todo) $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $R(z) J - J R_0(z)$ es compacto

2) Para toda $f \in C_\infty(\mathbb{R})$, $(\mathbb{1} - J^* J) f(H_0)$ es compacto.

3) Para todo $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ $f(H)(\mathbb{1} - J J^*)$ es compacto.

Entonces 1 y 2 implican que $\sigma_{ess}(H_0) \subset \sigma_{ess}(H)$
1 y 3 implican que $\sigma_{ess}(H) \subset \sigma_{ess}(H_0)$

DEMOSTRACION

Es suficiente con demostrar que la primera aserción es cierta - pues la segunda se demuestra intercambiando los papeles entre H por Ho y J por J^*

Primero veamos que la sola hipótesis 1 implica que $f(H) J - J f(H_0)$ es compacto $\forall f \in C_\infty(\mathbb{R})$. En efecto, sea $\mathfrak{F}$ el conjunto de funciones de $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ tales que $f(H) J - J f(H_0)$ y $f(H_0) J^* - J^* f(H)$ son compactos. Veamos que $\mathfrak{F}$ es - una $*$ álgebra cerrada de funciones complejas. Supongamos que $f_n \in \mathfrak{F}$ y $f_n \to f$ en $C_\infty(\mathbb{R})$. Entonces,

$$\| f(H) J - J f(H_0) - (f_n(H) J - J f_n(H_0)) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H})}$$

$$\leq \|f-f_n\|_\infty \|J\| + \|J\| \|f-f_n\|_\infty \to 0 \quad n \to +\infty$$

Entonces $f(H)J - J f(H_0)$ es compacto. Análogamente para $f(H)J^* - J^* f(H_0)$. $\mathfrak{F}$ es entonces cerrada. Además, si f; $g \in \mathfrak{F}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ trivialmente deducimos --- que $f+g \in \mathfrak{F}$, $\alpha f \in \mathfrak{F}$. De la identidad

$$f(H)\,g(H)\,J - J f(H_0)\,g(H_0) = f(H)\,\{g(H)J - J g(H_0)\} + \{f(H)J - J f(H_0)\} g(H_0)$$

y de una análoga para J^* obtenemos que $fg \in \mathfrak{F}$. Así vemos que $\mathfrak{F}$ es una álgebra.

Denotemos por $\bar{f}$ la función compleja conjugada de f. Puesto que $\bar{f}(H) = f(H)^*$, -- $\bar{f}(H_0) = f(H_0)^*$ obtenemos que para $f \in \mathfrak{F}$

$$\{\bar{f}(H)J - J\bar{f}(H_0)\}^* = -\{f(H_0)J^* - J^* f(H)\} = \text{compacto.}$$

Así $\bar{f}(H)J - J\bar{f}(H_0)$ es compacto porque su adjunto es compacto. Similarmente, ---- $\bar{f}(H_0)J^* - J^* \bar{f}(H)$ es compacto. En consecuencia, $\mathfrak{F}$ es una álgebra compleja – conteniendo las funciones $(\lambda \pm i)^{-1}$ y polinomios de estas funciones por la hipótesis 1 y la nota - 2. Por el teorema de Stone-Weirstrass, $\mathfrak{F} = C_\infty(\mathbb{R})$

Sea ahora $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ con $f(H)$ compacto, como

$$f(H_0) = (\mathbb{1} - J^* J)\, f(H_0) - J^* \left(f(H)J - J f(H_0)\right) + J^* f(H) J .$$

De la hipótesis 2 se desprende que $f(H_0)$ es compacto. Con esto vemos que si $f \in C_c(\mathbb{R})$, $f(H)$ compacto, f (H_0) es compacto. Del lema 1.3 y la nota 3 concluimos que $\sigma_{ess}(H_0) \subset \sigma_{ess}(H)$

NOTA 5.

Por la nota 1, las hipótesis 2 y 3 pueden ser reemplazadas respectivamente por,

" 2' $\forall$ intervalo acotado I, $(\mathbb{1} - J^* J) P_0(I)$ es compacto "

" 3' $\forall$ intervalo acotado I, $P(I)(\mathbb{1} - JJ^*)$ es compacto ".

Terminamos esta parte del capítulo dando una generalización del criterio de Cook.

PROPOSICION 1.3

Sean Ho, H y J como antes.
Supongamos que existe un subespacio $\mathcal{D}$ de $\mathcal{H}_0$ tal-que

1) $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{H}_{0,ac} = \operatorname{Ran} P_{ac}(H_0)$

2) $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ e I_1, I intervalos acotados,
$$\int_{t_1}^{\pm\infty} dt \, \| P(I_1)(HJ - JH_0) e^{\mp itH_0} P_0(I) P_{0,ac}(H_0)\varphi \| < \infty$$

3) H es J subordinado a Ho.

4) $\operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} (\mathbb{1} - J^* J) e^{itH_0} P_{0,ac} = 0$

Entonces los operadores de onda generalizados, definidos por
$$\Omega_\pm (H, H_0; J) := \operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} e^{itH} J e^{-itH_0} P_{0,ac}(H_0)$$
existen y son isometrías.

DEMOSTRACION

Como $e^{itH} J e^{-itH_0}$ es acotado uniformemente, es suficiente con demostrar la convergencia fuerte para un conjunto denso en $\mathcal{H}_{0,ac}$, Por ejemplo,

$\mathcal{D}_1 = \bigcup_I \{ P_0(I) \mathcal{H}_{0,ac}(H_0)\varphi \,;\, \varphi \in \mathcal{D} \}$ Y para φ en $\mathcal{D}$, φ está -- en el rango de $P_0(I)$, entonces

$$e^{itH} J e^{-itH_0} \varphi = e^{itH} J e^{-itH_0} P_0(I)\varphi = P(I_1^c) e^{itH} J e^{-itH_0} P_0(I)\varphi + P(I_1) e^{itH} J e^{-itH_0} P_0(I)\varphi$$

y
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P(I_1) e^{itH} J e^{-itH_0} P_0(I)\varphi &= i H e^{itH} P(I_1) J e^{-itH_0} P_0(I)\varphi \\ &\quad - i e^{itH} P(I_1) J e^{-itH_0} H_0 P_0(I)\varphi \\ &= i e^{itH} [H P(I_1) J e^{-itH_0} P_0(I)\varphi - \\ &\qquad P(I_1) J e^{-itH_0} H_0 P_0(I)\varphi] \\ &= i e^{itH} P(I_1) [HJ - JH_0] e^{-itH_0} P_0(I)\varphi \end{aligned}$$

Para tal φ,

$$\{ e^{itH} J e^{-itH_0} - e^{isH} J e^{-isH_0} \} \varphi = P(I_1^c) e^{itH} J e^{-itH_0} P_0(I)\varphi - P(I_1^c) e^{isH} J e^{-isH_0} P_0(I)\varphi$$

$$+ i \int_s^t e^{-i\tau H} P(I_1) [HJ - JH_0] e^{i\tau H_0} P_0(I)\varphi \, d\tau$$

$$y \quad \| \{ e^{itH} J e^{-itH_0} - e^{isH} J e^{-iH_0 s} \} \varphi \| \leq 2 \| P(I_1^c) J P_0(I) \|$$
$$+ \int_s^t d\tau \, \| P(I_1) [HJ - JH_0] e^{-iH_0\tau} P_0(I) P_{0,ac}\varphi \|$$

Como H es J- subordinado a Ho, dado $\varepsilon > 0$, tomando I_1, suficientemente grande -- sabemos que $\| P(I_1^c) J P_0(I) \| < \varepsilon/4$. Y de la hipótesis 2, podemos tomar To -- suficientemente grande tal que si $|t|, |s| > T_0$ entonces

$$\int_s^t \| P(I_1) [HJ - JH_0] e^{-iH_0\tau} P_0(I) P_{0,ac}\varphi \| < \varepsilon/2$$

Esto prueba que $e^{itH} J e^{-itH_0}\varphi$ es una sucesión de Cauchy cuando

Entonces $\underset{t \to \mp\infty}{s\text{-}\lim} \; e^{itH} J e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)$ existen. La segunda conclusión resulta de que

$$\| e^{itH} J e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)\varphi \|^2 - \| P_{ac}(H_0)\varphi \|^2 =$$

$$= (e^{itH} J e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)\varphi, e^{itH} J e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)\varphi) - (P_{ac}(H_0)\varphi, P_{ac}(H_0)\varphi)$$

$$= (J e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)\varphi, J e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)\varphi) - (e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)\varphi, P_{ac}(H_0) e^{-itH_0}\varphi)$$

$$= (e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)\varphi, J^*J e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)\varphi) - (e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)\varphi, e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)\varphi)$$

$$= (e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)\varphi, (J^*J - 1) e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)\varphi) \to 0 , \; t \to \pm\infty$$

cuando $t \to \pm\infty$ por 4. Esto prueba que $\Omega^{\pm}(H, H_0; J)$ son isometrías. ▲

CAPITULO 2

COMPLETES ASINTOTICA MEDIANTE EL METODO DE ENSS

Ahora procedemos a dar la prueba original presentada por Enss < 20 > para la completud de los operadores de onda y ausencia del espectro singularmente continuo al caso en que el Hamiltoniano libre es $H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$ sobre $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^\nu)$

TEOREMA 1 : Sea $H_0 \equiv -\frac{1}{2}\Delta$ en $H = L^2(\mathbb{R}^\nu)$ y V un operador simétrico tales que:

a) V es un operador H_0 - acotado con cota relativa $a < 1$. Es decir, $D(V) \supset D(H_0)$ y además $\|V\psi\| \leq a\|H_0\psi\| + b\|\psi\| \quad \forall\, \psi \in D(H_0)$

b) La función $h(R)$, definida por

$$h(R) := \| V(H_0 + i)^{-1} F\{B_R^c, x\} \|$$

s

satisface la condición de Enss:

$$\int_0^{+\infty} h(R)\, dR < +\infty \qquad (2.5)$$

Entonces: si $H := H_0 + V$, los operadores de onda

$$\Omega^{\pm} := \underset{t \to \mp\infty}{s\text{-}\lim}\; e^{itH} e^{-itH_0}$$

existen y son completos. Además, el espectro singularmente continuo de H es vacio y $\sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(H_0) = [0, +\infty)$

NOTA 6

Como $D(H) = D(H_0)$, $(H + i\mathbb{1})(H_0 + i\mathbb{1})^{-1}$ es acotodo, ya que su gráfica es cerrada. Asimismo, $(H_0 + i\mathbb{1})^{+1}(H + i\mathbb{1})^{-1}$ es acotado. Entonces H y H_0 son mutuamente subordinados.

NOTA 7

La condición (2.5) es independiente del punto + 1. Es decir, si se cumple para uno, entonces $\forall\ z \in \rho(H_0)$, la función $\| V (H_0 - z)^{-1} F\{B^c_R, x\} \|$ satisface la condición (2.5). Para ver esto, tomemos una función $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\phi(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } |y| \le 1 \\ 1 & \text{si } |y| \geq 2 \end{cases} \qquad \|\phi\|_\infty = 1$$

y definamos $\quad j_{\geq,R}(x) := \phi(x/R)$. $\quad$ (2.5a)

Como $\quad H_0 = P(-i\nabla)$, con $P(k) = |k|^2/2$. Entonces $(H_0+\mathbb{1})^{-1} = (\frac{1}{2}|k|^2+\mathbb{1})^{-1}$. Sea $h_1(R) := \| V(H_0+\mathbb{1})^{-1} j_{\geq,R}\|$

$= \| V(\frac{1}{2}|k|^2+\mathbb{1})^{-1} j_{\geq,R}\|$. Por otro lado, $\| V(\frac{1}{2}|k|^2+\mathbb{1})^{-1} j_{\geq,R}\|$

$= \| V(\frac{1}{2}|k|^2+\mathbb{1})^{-1} j_{\geq,R}\, F\{B_R^c, x\}\| = \| V(\frac{1}{2}|k|^2+\mathbb{1})^{-1} F\{B_R^c, x\}\, j_{\geq,R}\|$

$\leq h(R)$. Entonces $h_1(R) \leq h(R)$. Similarmente,

obtenemos que,

$$h_1(R) \leq h(R) \leq h_1(R/2) \tag{2.6}$$

Sea $[AB-BA] = [A,B]$, poniendo $Q(k) = (\frac{1}{2}|k|^2+\mathbb{1})^{-1}$

$$Q(k)\, j_{\geq,R/2}\, [\tfrac{1}{2}|k|^2, j_{\geq,R}]\, Q(k) = Q(k)\, j_{\geq,R/2}\, (\tfrac{1}{2}|k|^2 j_{\geq,R} - j_{\geq,R}\tfrac{1}{2}|k|^2)\, Q(k)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[Q(k)\, j_{\geq,R/2}\, |k|^2 j_{\geq,R}\, Q(k) - Q(k)\, j_{\geq,R/2}\, j_{\geq,R}\, |k|^2 Q(k)\right]$$

$$= Q(k)\, j_{\geq,R/2}\, (\tfrac{1}{2}|k|^2+\mathbb{1})\, j_{\geq,R}\, Q(k) - Q(k)\, j_{\geq,R/2}\, j_{\geq,R}\, Q(k) - \tfrac{1}{2} Q(k)$$

$$\times\ j_{\geq,R}\, |k|^2 Q(k).$$

$$= Q(k)\, (\tfrac{1}{2}|k|^2+\mathbb{1})\, j_{\geq,R}\, Q(k) - Q(k)\, j_{\geq,R}\, Q(k) - Q(k)\, j_{\geq,R}\, (\tfrac{1}{2}|k|^2+\mathbb{1})\, Q(k)$$

$$+\ Q(k)\, j_{\geq,R}\, Q(k)$$

$$= j_{\geq,R}\, Q(k) - j_{\geq,R}\, Q(k) = [j_{\geq,R}, Q(k)]$$

Ahora bien, si $\quad h_2(R) := \| V j_{\geq,R}\, (\frac{1}{2}|k|^2+\mathbb{1})^{-1}\| = \| V j_{\geq,R}\, (H_0+\mathbb{1})^{-1}\|$

$$|h_2(R) - h_1(R)| = \left|\, \| V j_{\geq,R}\, (\tfrac{1}{2}|k|^2+\mathbb{1})^{-1}\| - \| V (\tfrac{1}{2}|k|^2+\mathbb{1})^{-1} j_{\geq,R}\| \,\right|$$

$$\leq \| V\, [j_{\geq,R}, Q(k)]\| = \| V (\tfrac{1}{2}|k|^2+\mathbb{1})^{-1} j_{\geq,R/2}\, [\tfrac{1}{2}|k|^2, j_{\geq,R}]\, Q(k)\|$$

$$\leq \| V (H_0 + \mathbb{1})^{-1} j_{>, R/2} \| \, \| [\tfrac{1}{2}|k|^2, j_{>,R}] Q(k) \|$$

$$\equiv h_1 (R/2) \, \| [\tfrac{1}{2}|k|^2, j_{>,R}] Q(k) \|$$

Si $\varphi \in C_0^\infty (\mathbb{R}^\nu)$, entonces

$$[\tfrac{1}{2}|k|^2, j_{>,R}] \varphi = \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (j_{>,R} \varphi) - \tfrac{1}{2} j_{>,R} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \varphi$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} \Big[\frac{1}{R^2} \varphi \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \phi \Big|_{y = x/R} \Big] + \sum_{j=1}^{\nu} \tfrac{1}{R} \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \Big) \times \Big(\frac{\partial}{\partial y_j} \phi \Big|_{y = x/R} \Big)$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} \Big\{ \frac{1}{2R} \Big[\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \phi \Big|_{y=x/R} \Big] \varphi + \frac{1}{R} \Big[\frac{\partial}{\partial x_j} \phi \Big|_{y=\frac{x}{R}} \Big] (-ik_j) \varphi \Big\}$$

Como el conjunto $\{ \psi \mid (\tfrac{1}{2}|k|^2 + \mathbb{1})^{-1} \psi \in C_0^\infty (\mathbb{R}^\nu) \}$ es denso en $\mathcal{H} = L^2 (\mathbb{R}^\nu)$ obtenemos que

$$\| [\tfrac{1}{2}|k|^2, j_{>,R}] Q(k) \| \leq C/R \qquad \text{con } C = \text{constante.}$$

Y por lo tanto
$$|h_2(R) - h_1(R)| \leq C/R \, h_1(R/2) \qquad (2.7)$$

Tomemos α suficientemente de tal manera que $C/\alpha < 1 < \alpha/2$

Entonces,

$$\int_\alpha^{+\infty} h_1(R)\, dR \leq \int_\alpha^{+\infty} \frac{C}{R} h_1(R/2)\, dR + \int_\alpha^{+\infty} h_2(R)\, dR$$

$$= C \int_\alpha^{+\infty} h_1(s) s^{-1} ds + \int_\alpha^{+\infty} h_2(R)\, dR + C \int_{\alpha/2}^{\alpha} s^{-1} h_1(s)\, ds$$

$$\leq \frac{C}{\alpha} \int_\alpha^{+\infty} h_1(R)\, dR + \int_{\alpha/2}^{\alpha} s^{-1} h_1(s)\, ds + \int_\alpha^{+\infty} h_2(R)\, dR$$

De aquí, obtenemos que

$$\int_{\alpha}^{+\infty} h_1(R)\,dR \le \frac{c\alpha}{\alpha-c}\int_{\alpha/2}^{\alpha} h_1(R)\,R^{-1}\,dR + \int_{\alpha}^{+\infty} h_2(R)\,dR \qquad (2.8)$$

De (2.7) obtenemos que $\int_1^{+\infty} h_2(R)\,dR < +\infty$ si $\int_0^{+\infty} h_1(R)\,dR < +\infty$

Como $\| V(H_0+\delta)^{-1}\| < +\infty$ y $h_1(0) \geq h_1(R)$, obtenemos de (2.8) que

$$\int_0^{+\infty} h_1(R)\,dR < +\infty \quad \text{si} \quad \int_1^{+\infty} h_2(R)\,dR < +\infty$$

Por lo tanto, de (2.6) obtenemos que

$$\int_0^{+\infty} h(R)\,dR < +\infty \iff \int_0^{+\infty} h_1(R)\,dR < +\infty \iff \int_1^{+\infty} h_2(R)\,dR < +\infty .$$

De la identidad

$$(H_0-z_1)^{-1} - (H_0-z_2)^{-1} = (z_2-z_1)^{-1}(H_0-z_1)^{-1}(H_0-z_2)^{-1},$$

$$\int_1^{+\infty} h_2(R)\,dR < +\infty \iff \int_1^{+\infty} \| V\, j_{\geq R}\,(H_0-z)^{-1}\|\,dR < +\infty$$

$\forall\, z \in \rho(H_0)$

Ahora fijemos $z_0 \in \rho(H_0)$. Utilizando las mismas estimaciones, expuestas atrás, obtenemos que

$$\int_0^{+\infty} \| V(H_0 - Z_0)^{-1} F\{B_R^c, x\} \| dR < +\infty \iff \int_0^{+\infty} \| V(H_0 - Z_0)^{-1} j_{>,R} \| dR < +\infty$$

$$\iff \int_1^{+\infty} \| V j_{>,R} (H_0 - Z_0)^{-1} \| dR < +\infty$$. Y así, se concluye la afirmación.

Antes de demostrar el teorema necesitaremos de algunos lemas.

LEMA 1.2.1 (Teorema de Wiener [16]) Sea μ una medida finita de Baire sobre $\mathbb{R}$ y sea

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} d\mu(x)$$

Entonces,

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |F(t)|^2 dt = \sum_{x \in \mathbb{R}} |\mu(\{x\})|^2$$

DEMOSTRACION Primero recordemos que una medida μ positiva finita de Baire sobre un espacio localmente compacto X existen solo un conjunto numerable de puntos $x \in X$ para los cuales $\mu(\{x\}) \neq 0$. Esto viene del hecho fácil de demostrar que si $E \subset \mathbb{R}^+$, con $\sum_{e \in E} e < +\infty$, entonces E es numerable.

De aquí, usando la σ -aditividad de μ , vemos que $\sum_{x \in X} \mu(\{x\}) \leq \mu(X) < +\infty$, de donde obtenemos que $\sum_{x \in X} \mu(\{x\})^2 < +\infty$

Puesto que la medida $d\mu \otimes d\mu \otimes (2T)^{-1} dt$ sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [-T, T]$ es finita, y las funciones involucradas son acotadas, podemos usar Fobini

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |F(t)|^2 dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} d\mu(x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+iyt} d\mu(y) \right\}$$

$$= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(x) \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(y) \int_{-T}^{T} e^{-i(x-y)t} dt$$

Como $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-i(x-y)t}\,dt = \begin{cases} \operatorname{sen} T(x-y)/T(x-y) & x \neq y \\ 1 & x = y \end{cases}$

aplicando el Teorema de convergencia dominada, puesto que $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-i(x-y)t}\,dt$ está puntualmente dominada por 1 y converge puntualmente a 0 para $y \neq x$ y a 1 para $y = x$

Entonces $\lim\limits_{T\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(y) \left\{ \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-i(x-y)t}\,dt \right\} =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(y) \left\{ \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-i(x-y)t}\,dt \right\} = \mu(\{x\})$$

Entonces, si $H(x,T) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(y) \left\{ \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-i(x-y)t}\,dt \right\}$

vemos que $\lim\limits_{T\to+\infty} H(x,T) = \mu(\{x\})$ para cada $x \in \mathbb{R}$

y además, $|H(T,x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(y) \left\{ \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-i(x-y)t}\,dt \right\} \right.$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-i(x-y)t}\,dt \right| d\mu(y) \leq \mu(\mathbb{R}) .$$

Aplicando de nuevo el teorema de convergencia dominada obtenemos que

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |F(t)|^2 dt = \lim_{T\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(x)\, H(x,T).$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\{x\})\, d\mu(\{x\})$$

$$= \sum_{x\in\mathbb{R}} \mu(\{x\})^2 .$$

donde se utiliza que $\mu(\{x\}) \neq 0$

para un conjunto numerable de puntos, en la última igualdad.

Ahora demostraremos otro lema utilizando este último, pero antes daresmos una definición.

DEFINICION 1.2

Sea A un operador autoadjunto. $P_{cont}(A)$ denota la proyección sobre todos los vectores φ cuya medida espectral no tiene peso en ningún punto. Es decir, $\mu_\varphi(x) = 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$. $P_{cont}(A)$ es la proyección sobre el complemento ortogonal de los eigen vectores de A.

LEMA 1.2.2

Sea A un operadores autoadjunto y sea C un operadore acotado tal que $C(A+i\mathbb{1})^{-1}$ es compacto. Entonces:

a) $\forall\ \varphi \in$ Ran $P_{cont}(A)$

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \| C e^{-itA}\varphi \|^2 dt \to 0 \quad \text{si } T\to+\infty$$

b) Para algún $\varepsilon(T)$ que tiende a cero conforme $T\to+\infty$ tenemos que

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \| C e^{-itA} P_{cont}(A)\varphi \| \leq \varepsilon(T)$$

$$\times \| (A+i\mathbb{1})\varphi \|^2$$

$\varphi \in D(A)$.

c) Se cumple también que

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|Ce^{-itA}\varphi\|\,dt \to 0 \quad T \to +\infty$$

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|Ce^{-itA}P_{cont}(A)\varphi\|\,dt \leq \varepsilon(T)^{1/2}\|(A+i)\varphi\|$$

donde $\varepsilon(T)$ es el mismo que en (b).

NOTA 8 Enla prueba dada por Enss, se usa este lema en forma crucial. Más adelante veremos otras demostraciones en las cuales este lema no juega ningún papel

DEMOSTRACION Como D (A) es denso en H, entonces D (A) es denso subespacio cerrado de $\mathcal{H}$

Por lo que D (A) $\cap$ Ram P_{cont} (A) es denso en Ram P cont (A). Supongamos que (b) es cierta entonces dado $\varphi \in$ Ram P cont (A) y $\varepsilon > 0$, $\exists$ φ_c en D (A) $\cap$ Ran P cont (A) tal que $\|\varphi - \varphi_c\| < \sqrt{3}/\sqrt{4\pi\|C\|}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|Ce^{-itA}\varphi\| \leq \frac{2}{2T}\int_{-T}^{T}\|Ce^{-itA}(\varphi-\varphi_c)\|^2\,dt$$

$$+\frac{2}{2T}\int_{-T}^{T}\|Ce^{-itA}\varphi_c\|^2 \leq 2\|C\|^2\|\varphi-\varphi_c\|^2$$

$$+\frac{2}{2T}\int_{-T}^{T}\|Ce^{-itA}P_{cont}(A)\varphi_c\|^2\,dt \leq$$

$$\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Si tomamos T suficientemente grande para que $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|Ce^{-itA}P_{cont}\varphi_c\|^2 dt < \frac{\varepsilon}{4}$

Esto prueba a).

Para demostrar (c) se utiliza la desigualdad de Schwarz.

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \| C e^{-itA}\varphi \| dt \leq \frac{1}{2T}\left(\int_{-T}^{T} \| C e^{-itA}\varphi \|^2 dt \right)^{1/2} (2T)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \| C e^{-itA}\varphi \|^2 dt \right)^{1/2} \to 0 \quad T \to +\infty$$

La otra partees igual y suponiendo (b)

Para probar (b), notemos que $\| C e^{-itA} P\,\mathrm{cont}\,(A)\varphi \|^2 =$

$$\| C (A+i\mathbb{1})^{-1} e^{-itA} P\,\mathrm{cont}\,(A)\ (A+i\mathbb{1})\varphi \|^2$$

Entonces basta demostrar que

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \| C e^{-itA} P_{cont}(A)\ \varphi \|^2 dt \leq \varepsilon(T)\ \ \|\varphi\|^2$$ donde ahora

C es compacto, y $\varphi \in H$. (2.8a)

Eso demostraremos.

Para cualquier C y T, sea

$$\varepsilon_C(T) = \sup_{\varphi \neq 0} \|\varphi\|^{-2} (2T)^{-1} \int_{-T}^{T} \| C e^{-itA} P_{cont}\ \varphi \|^2 dt$$

Como $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \| C e^{-itA} P\,\mathrm{cont}\,(A)\ \varphi \|^2 dt \leq \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt\ \|C\|^2 \| e^{-itA}$

$P\,\mathrm{cont}\,(A)\ \varphi \|^2 = \|C\|^2\ \|P\,\mathrm{cont}\,(A)\ \varphi \|^2 \leq \|C\|^2 \|\varphi\|^2$

$\Rightarrow \quad \varepsilon_C(T) \leq \|C\|^2$ Y como para 2 elementos a, be H cualesquiera se tiene que $\| a+b \|^2 \leq 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$

$$\Rightarrow \varepsilon_{C+D}(T) \leq \sup_{\|\varphi\| \neq 0} \left\{ \|\varphi\|^{-2} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|(C+D) e^{-itA} P_{cont}(A)\varphi\|^2 dt \right\}$$

$$\leq \sup_{\varphi \neq 0} \left[\|\varphi\|^{-2} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} 2dt \left\{ \|C e^{-itA} P_{cont}(A)\ \varphi \|^2 + \| D e^{-itA}\right.\right.$$

$$P\,\mathrm{cont}(A)\varphi\|^2\}] = 2\sup_{\varphi\neq 0}\left\{\|\varphi\|^{-2}\ \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt\ \|C e^{-itA} P\,\mathrm{cont}(A)\varphi\|^2\right\}$$

$$+\ 2\sup_{\psi\neq 0}\left\{\|\varphi\|^{-2}\ \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|D e^{-itA} P\,\mathrm{cont}(A)\psi\|^2 dt\right\}$$

$$= 2\,\varepsilon_C(T) + 2\,\varepsilon_D(T)$$

Entonces como los operadores de rango finito son densos en la norma de operadores en los operadores compactos, es suficiente demostrar el resultado para la clase de operadores de rango finito. Y vía inducción, es suficiente demostrarlo para un operador de rango 1

Sea entonces C de rango 1.

$$C\varphi = (\psi_1, \varphi)\psi_2 \quad \text{donde} \quad \|\psi_i\| = 1 \quad i = 1,2$$

$$\Rightarrow \quad C e^{-itA} P_{\mathrm{cont}}(A)\varphi = (\psi_1, e^{-itA} P_{\mathrm{cont}}(A)\varphi)\psi_2$$

$$= (P_{\mathrm{cont}}(A)\psi_1, e^{-itA}\varphi)\psi_2$$

P cont (A) conmuta con e^{-itA} $\Rightarrow$

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|C e^{-itA} P_{\mathrm{cont}}(A)\varphi\|^2 dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|(\tilde{\psi}, e^{-itA}\varphi)|^2 dt$$

Donde $\tilde{\psi} \in$ Ran P cont (A)

Sea RanQ $= \overline{\{ g(A)\tilde{\psi} \mid g \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \}}$ usando el teorema IX,

tenemos que $Q\mathcal{H}$ es unitariamente equivalente a $L^2(\mathbb{R}, d\mu_{\tilde{\psi}})$

de tal manera que $\tilde{\psi}$ corresponde a la función 1 en $L^2(\mathbb{R}, d\mu_{\tilde{\psi}})$

y e^{-itA} es multiplicación por e^{-itx}. Sea h (x) la correspondiente función del vector $Q\psi$, $\Rightarrow$ $(\tilde{\psi}, e^{-itA}\psi) = (Q\tilde{\psi}, e^{-itA}\psi) = (\tilde{\psi}, Q e^{-itA}\psi)$

$= (\tilde{\Psi}, e^{-itA} Q\Psi)$. Esto último es debido a que $g(A)\, e^{-itA} = e^{-itA} g(A)$.

Entonces poniendo $d\mu_{\tilde{\Psi}} = d\mu$

$$(\tilde{\Psi}, e^{-itA} Q\Psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\, h(x)\, d\mu =$$

Puesto que $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)|^2 \, d\mu(x) = \| Q\Psi \| \leq \|\Psi\|^2 < +\infty$

de la desigualdad de Schwarz y de que $\mu(\mathbb{R}) = \|\tilde{\Psi}\| = 1$

obtenemos que $h \in L^1(\mathbb{R}, d\mu)$. Usando Fubini

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |(\tilde{\Psi}, e^{-itA} Q\Psi)|^2 dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} h(x)\, d\mu(x) \right\}$$

$$\times \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity}\, \overline{h(y)}\, d\mu(y) \right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, d\mu(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(y)}\, \frac{\operatorname{sen}(T(x-y))}{T(x-y)}\, d\mu(y)$$

$$\leq \left(\int |h(x)|^2 d\mu(x) \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(x) \left| \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(y)\, \overline{h}(y)\, \frac{\operatorname{sen}(T(x-y))}{T(x-y)} \right|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq \|h\|^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(x) \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(y) \left| \frac{\operatorname{sen} T(x-y)}{T(x-y)} \right|^2 \right)^{1/2}$$

$$= \| Q\Psi \|^2 \, \delta(T)$$

Como $\frac{\operatorname{Sen} T(x-y)}{T(x-y)} = H(T,x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} T(x-y)}{T(x-y)} & x \neq y \\ 1 & x = y \end{cases}$

Usando exactamente el mismo argumento que en la prueba del Lema 1.2.1 obtenemos que $\lim_{T\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(x) \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(y) \left| \frac{\operatorname{sen} T(x-y)}{T(x-y)} \right|^2 = \sum_{x\in\mathbb{R}} (\mu(\{x\}))^2$

puesto que $\mu_{\tilde{\psi}}$ es continua. ▲

LEMA 1.2.3 Sea ψ un vector unitario que pertenece a $D(H) \cap$ Ran P cont (H) entonces, existe una sucesión $\{\tau_n\}$ con $\tau_n \to +\infty$ tal que

$$\| F\{B_{13n}, x\} e^{-i\tau_n H} \psi \| \to 0 \quad n \to +\infty \qquad (2.9)$$

$$\int_{-n}^{n} \| F\{B_n, x\} \exp[-iH(t+\tau_n)](H+i\mathbb{1})\psi \| \to 0 \quad (2.$$

DEMOSTRACION: Por el lema 1.14 $F\{B_R, x\}(H_0+\mathbb{1})^{-1} =$

$= F\{B_R, x\}(\frac{1}{2}|k|^2+\mathbb{1})^{-1}$ es compacto para cada $R < +\infty$. De la nota 6, obtenemos que $F\{B_R, x\}(H+i\mathbb{1})^{-1}$ es compacto para cada $R < +\infty$.

Además, como $e^{-itH}(H+i\mathbb{1})$ deja invariante Ran P cont (H) obtenemos que $e^{-itH}(H+i\mathbb{1})\psi \in \operatorname{Ran} P_{cont}(H)$. Poniendo $C = F\{B_n, x\}$ en el lema 1.2.2 obtenemos que

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T d\tau \, \| F\{B_n, x\} \exp[-iH(t+\tau)](H+i\mathbb{1})\psi \| = 0$$

Entonces, usando convergencia dominada,

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T d\tau \int_{-n}^{n} dt \, \| F\{B_n, x\} \exp[-iH(t+\tau)] (H+i\mathbb{1}) \Psi \|$$

$$= \int_{-n}^{n} dt \lim_{T\to+\infty} \int_0^T d\tau \, \| F\{B_n, x\} \exp[-iH(t+\tau)] (H+i\mathbb{1}) \Psi \|$$

$$= 0$$

Asimismo, $\lim_{T\to+\infty} \int_0^T d\tau \, \| F\{B_{13n}, x\} e^{-i\tau H} \Psi \| = 0$

Por consiguiente, $\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T u_n(\tau)\, d\tau = 0$

donde $u_n(\tau) = \| F\{B_{13n}, x\} e^{-i\tau H} \Psi \| + \int_{-n}^{n} dt \, \| F\{B_n, x\} \exp[-iH(t+\tau)]$
$\times (H+i\mathbb{1}) \Psi \|$

Para n fijo, supongamos que $u_n(\tau) \geq \varepsilon \quad \forall \, \tau \geq T_0$. Entonces

$$\frac{1}{T}\int_0^T u_n(\tau)\, d\tau \geq \frac{1}{T}\int_0^{T_0} u_n(\tau)\, d\tau + \frac{1}{T}\int_{T_0}^{T} \varepsilon \, d\tau$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^{T_0} u_n(\tau)\, d\tau + \left(\frac{T-T_0}{T}\right)\varepsilon \to \varepsilon \quad \text{cuando } T\to+\infty$$

. Lo que contradice que el límite debe ser cero. Podemos entonces construir una sucesión $\{\tau_m\}_{m=1}^{+\infty}$ con $\tau_m \to +\infty$ cuando $m\to+\infty$, tal que $u_n(\tau_m) \to 0$ cuando $m \to +\infty$. Podemos consecuentemente encontrar $\{\tau_n\}_{n=1}^{+\infty}$ con $\tau_n \to +\infty$ cuando $n\to+\infty$ tal que $u_n(\tau_n) \to 0$ cuando $n\to+\infty$

Es decir, (2.9) y (2.10) se cumplen ▲

DEFINICION 1.2.2 Para la sucesión $\{\gamma_n\}_{n=1}^{+\infty}$ del lema 1.2.3 definimos

$$\psi_n := e^{-i\gamma_n H} \tag{2.11}$$

LEMA 1.2.4 Sea $\hat{\varphi}$ la trasforma la de Fourier de una función φ que está en $L^1(\mathbb{R}, dt)$, entonces $\lim_{n\to+\infty} \|\{\hat{\varphi}(H)-\hat{\varphi}(H_0)\}\psi_n\| = 0$, donde ψ es un vector en $D(H) \cap \mathrm{Ran}\, P_{cont}(H)$, y la sucesión $\{\psi_n\}$ es como en (2.11).

DEMOSTRACION: Sean η, ϕ dos elementos de H, entonces por el teorema espectral,

$$(\phi, \hat{\varphi}\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\lambda)\, d(\phi, P_\lambda \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} d(\phi, P_\lambda\eta)\left\{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\, e^{-it\lambda}\, dt\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \varphi(t)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda}\, d(\phi, P_\lambda\eta) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \varphi(t)\,(\phi, e^{-itH}\eta)$$

$$= \left(\phi, \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \varphi(t)\, e^{-itH}\eta\right)$$

Hemos usado Fubini, ya que $\varphi \in L^1$ y $d(\phi, P_\lambda\eta)$ es una medida finita.

Entonces, en sentido débil,

$$\hat{\varphi}(H)\phi = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \varphi(t)\, e^{-itH}\phi\,.$$

Análogamente para $\hat{\varphi}(H_0)$.

Por lo tanto,

$$(2\pi)^{1/2}\|\{\hat{\varphi}(H)-\hat{\varphi}(H_0)\}\psi_n\| = \left\|\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \varphi(t)\,[e^{-itH}-e^{-itH_0}]\,\psi_n\right\|$$

$$\leq \int_{-n}^{n} dt\, |\varphi(t)|\, \|[e^{-itH}-e^{-itH_0}]\,\psi_n\| + 2\int_{|t|>n} dt\, |\varphi(t)|$$

El segundo término de ésta desigualdad tiende a cero porque $\varphi \in L^1$.

Para demostrar el lema, es suficiente con ver que el primer término tiende a cero. Éste está acotado por $\sup_{|t|\leq n} \| [e^{itH_0} e^{-itH} - \mathbb{1}] \psi_n \| \, \|\varphi\|_{L^1}$. Solo falta ver entonces que $\sup_{|t|\leq n} \| [e^{itH_0} e^{-itH} - \mathbb{1}] \psi_n \|$ tiende a cero cuando $n \to +\infty$

Como $D(H) = D(H_0)$, por el teorema de Stone, sabemos que $e^{itH_0} e^{-itH}$ es fuertemente diferenciable. Y

$$\frac{d}{dt} \{ e^{itH_0} e^{-itH} - \mathbb{1} \} \psi_n = i e^{itH_0} H_0 \, e^{-itH} \psi_n + e^{itH_0} (-iH) e^{-itH} \psi_n$$

$$= -i \, e^{itH_0} V e^{-itH} \psi_n$$

Entonces,

$$\{ e^{itH_0} e^{-itH} - \mathbb{1} \} \psi_n = -i \int_0^t ds \, e^{iH_0 s} V e^{-iHs} \psi_n .$$

y

$$\sup_{|t|\leq n} \| [e^{itH_0} e^{-itH} - \mathbb{1}] \psi_n \| \leq \sup_{|t|\leq n} \int_0^t ds \, \| e^{iH_0 s} V e^{-iHs} \psi_n \|$$

$$\leq \int_{-n}^{n} ds \, \| V e^{-iHs} \psi_n \| \leq \int_{-n}^{n} ds \Big[\| V(H+i\mathbb{1})^{-1} \| \, \| F\{B_n, x\} e^{-iHs}$$

$$\times (H+i\mathbb{1}) \psi_n \| + \| V (H+i\mathbb{1})^{-1} F\{B_n^c, x\} \| \, \| (H+i\mathbb{1}) e^{-iHs} \psi_n \| \Big]$$

$$= \int_{-n}^{n} ds \, \| V(H+i\mathbb{1})^{-1} \| \, \| F\{B_n, x\} e^{-iHs} (H+i\mathbb{1}) \psi_n \|$$

$$+ 2n \| V(H+i\mathbb{1})^{-1} F\{B_n^c, x\} \| \, \| (H+i\mathbb{1}) \psi \|$$

El primer término tiende a cero por (2.10), mientras que para el segundo notamos que

$$\| V(H+i\mathbb{1})^{-1} F\{B_n^c, x\} \| \leq \| [V(H+i\mathbb{1})^{-1} - V(H_o+i\mathbb{1})^{-1}] F\{B_n^c, x\} \|$$

$$+ \| V(H_o+i\mathbb{1})^{-1} F\{B_n^c, x\} \|$$

$$= \| V(H+i\mathbb{1})^{-1} V(H_o+i\mathbb{1})^{-1} F\{B_n^c, x\} \|$$

$$+ \| V(H_o+i\mathbb{1})^{-1} F\{B_n^c, x\} \|$$

$$\leq \{ \| V(H+i\mathbb{1})^{-1} \| + 1 \} \| V(H_o+i\mathbb{1})^{-1} F\{B_n^c, x\} \|$$

Hemos usado que

$$(H+i\mathbb{1})^{-1} - (H_o+i\mathbb{1})^{-1} = -(H+i\mathbb{1})^{-1} [(H+i\mathbb{1}) - (H_o+i\mathbb{1})] (H_o+i\mathbb{1})^{-1}$$

$$= -(H+i\mathbb{1})^{-1} V (H_o+i\mathbb{1})^{-1}.$$

El cual se deduce de que

$D(H) = D(H_o) \subset D(V)$.

Es suficiente para demostrar el lema que demostremos que

$$n \| V(H_o+i\mathbb{1})^{-1} F\{B_n^c, x\} \| \to 0 \quad n \to +\infty$$

Pongamos $g(R) = \| V(H_o+i\mathbb{1})^{-1} F\{B_R^c, x\} \|$. Por la nota 7 $g(R)$ es una función que cumple la condición (2.5). Más aún, $g(R)$ es monótona decreciente.

Entonces,

$$n g(n) = \int_0^n g(n)\,dR = \int_0^{n/2} g(n)\,dR + \int_{n/2}^{n} g(n)\,dR$$

$$= \frac{2}{n}\int_0^{n^2/4} g(n)\,dR + \int_{n/2}^{n} g(n)\,dR$$

$$= \frac{2}{n}\int_0^{n} g(n)\,dR + \frac{2}{n}\int_n^{n^2/4} g(n)\,dR + \int_{n/2}^{n} g(R)\,dR$$

$$\leq \frac{2}{n}\|g\|_1 + \frac{2}{n}\left(n^2/4 - n\right) g(n) + \int_{n/2}^{+\infty} g(R)\,dR$$

$$= \frac{2}{n}\|g\|_1 + \left(n/2 - 2\right) g(n) + \int_{n/2}^{+\infty} g(R)\,dR$$

Por lo tanto,

$$\left(\frac{n+4}{2}\right) g(n) \leq \frac{2}{n}\|g\|_1 + \int_{n/2}^{+\infty} g(R)\,dR \quad \to 0 \quad n \to +\infty$$

y el lema que da demostrado. ▲

LEMA 1.2.5 $\qquad \sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(H_o) = [0, +\infty)$

DEMOSTRACION: $\qquad$ Como $(H_o + i\mathbb{1})^{-1} - (H + i\mathbb{1})^{-1} = (H + i\mathbb{1})^{-1} V (H_o + i\mathbb{1})^{-1}$,

obtenemos que

$$(H + i\mathbb{1})^{-1} V (H_o + i\mathbb{1})^{-1} F\{B_n, x\} \qquad \text{es compacto.}$$

Entonces,

$$\| [(H_o + i\mathbb{1})^{-1} - (H + i\mathbb{1})^{-1}] - (H + i\mathbb{1})^{-1} V (H_o + i\mathbb{1})^{-1} F\{B_n, x\} \|$$

$$= \| (H + i\mathbb{1})^{-1} V (H_o + i\mathbb{1})^{-1} F\{B_n^c, x\} \| -$$

$$\leq \| V (H_o + i\mathbb{1})^{-1} F\{B_n^c, x\} \| \to 0 \quad n \to +\infty \quad \text{por } (2.5).$$

y de la proposición 1.1.2 obtenemos que $\mathrm{Gess}(H) = \mathrm{Gess}(H_0)$.

Nota 9

La demostracion de la proposición nos muestra que si $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ entonces $f(H) - f(H_0)$ es compacto. Sea $\psi \in D(H) \cap \mathrm{Ran}P_{cont}(H)$ y ψ_n definido por 2.11). Entonces

$$\| [f(H)-f(H_0)] \psi_n \| \leq 2\|f\|_\infty \|F\{B_{13n}, x\}\psi_n\| + \|[f(H)-f(H_0)] \{F\{B^c_{13n}, x\}\|$$

Por (2.9) y el corloario del lema 1.1.2 obtenemos que

$\| [f(H)-f(H_0)] \psi_n \| \to 0 \quad n \to +\infty$. Puesto que si $\varphi \in L^1$ entonces $\hat{\varphi} \in C_\infty(\mathbb{R})$ obtenemos una demostración más directa del lema 1.2.4 ▲

Hasta aquí, hemos considerado elementos ψ que pertenecen al dominio de H y también al subespacio de continuidad de H. En lo que seguirá, solo consideraremos un subconjunto de $D(H) \cap \mathrm{Ran}\, P_{cont}(H)$, el cual sigue siendo denso en Ran P cont (H). El conjunto que tomaremos es:

$$C \equiv \{ \psi \in \mathcal{H}_{cont} \mid P([c,d])\psi = \psi \quad p.a. \quad 0 < c < d < +\infty \} \tag{2.12}$$

Por el lema 1.2.5 Gess (H) = Gess (Ho) y como $\mathcal{G}$ cont $\subset$ Gess (H) obtenemos que

H cont $\equiv$ Ran P cont (H) $\subset$ Ran P $(0,+\infty)$. Entonces C es un subconjunto de D (H) $\cap$ Ran P cont (H) y denso P cont (H).

Antes de seguir adelante daremos algo de notación que se usará. Notemos primero que el cono

$$C'_{0i} = \{ x \in \mathbb{R}^\nu \mid x \cdot e_i \geq |x|/2 \}$$ consta de todos los vectores

$x \in \mathbb{R}^\nu$ que hacen un ángulo menor ó igual a 60° con e_i.

Obviamente, podemos cubrir $\mathbb{R}^\nu$ con un número finito de conjuntos C'_{0i}, para un cierto conjunto de vectores unitarios e_i . Quitando las apropiadas intersecciones podemos tomar conjuntos $C_{0i} \subset C'_{0i}$ de tal manera que los nuevos conjuntos C_{0i} cubran $\mathbb{R}^\nu$ y sean disjuntos entre sí. Entonces, definiendo $C_{ni} := C_{oi} \cap B_n^c$ obtenemos que $\{B_n, C_{ni}\}$ es una descomposición disjunta de $\mathbb{R}^\nu$ en la bola B_n de radio n y en un número finito de conos truncados $C_{ni} \subset \{x \in \mathbb{R}^\nu \mid |x| > n, x \cdot e_i \geq |x|/2\}$, para un conjunto apropiado de vectores e_i los cuales son independiendes de n.

DEFINICION 1.2.3 Si $A \subset \mathbb{R}^\nu$, se define $F_a(A)$ como el operador de multiplicación en x:

$$F_a(C): \psi \longrightarrow F_a(C)(x)\ \psi(x)$$

$$F_a(C)(x) = \int_{\mathbb{R}^\nu} \eta(x-y)\, F\{C, y\}\, d^\nu y \qquad (2.13)$$

donde η es una función en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$ con

$$\int_{\mathbb{R}^\nu} \eta(y)\, dy = 1 \quad \text{y} \quad \text{sop}\, \hat{\eta} \subset \{k \in \mathbb{R}^\nu \mid |k| \leq a\}$$

Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in \mathbb{R}^\nu$,

$$[F_a(B_n)](x) + \sum_j [F_a(C_{nj})](x) = \int_{B_n} \eta(x-y)\, d^\nu y + \sum_j \int_{C_{nj}} \eta(x-y)\, d^\nu y$$

$$= \int_{B_n \cup (\cup_j C_{nj})} \eta(x-y)\, d^\nu y$$

$$= \int_{\mathbb{R}^\nu} \eta(x-y)\, d^\nu y = 1$$

$$(2.14)$$

Sea ahora ψ un elemento en C, definido en (2.12) con $P([c,d])\psi = \psi$ para algún $0 < c < d < +\infty$. Y sean ψ_n definidos por (2.11). Entonces $P([c,d])\psi_n = \psi_n \ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Tomemos ahora $0 < a < b$ tales que

$$73a^2 = c < d = (b-a)^2/4 . \qquad (2.15)$$

Sea φ una función en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ cuya trasformada de Fourier $\hat{\varphi}$ sea 1 para $73a^2 = c \le \omega \le d$

y 0 si $\omega < 72a^2$ ó $\omega > (b-a)^2/2$ (2.15a)

Puesto que $P(I)\,P(J) = 0$ si $I \cap J = \emptyset$, por calculo espectral obtenemos que

$$(\eta, \hat{\varphi}(H)\,\psi_n) = \int_c^d d(\eta, P_\lambda \psi_n) = (\eta, \psi_n)$$

y por lo tanto

$$(\hat{\varphi})(H)\,\psi_n = \psi_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad (2.16)$$

Pongamos $\Phi_n := \hat{\varphi}(H_0)\,\psi_n$ (2.17)

Pues to que $[\hat{\varphi}(H_0)\,\psi_n]^\wedge(k) = \hat{\varphi}(|k|^2/2)\,\hat{\psi}_n(k) = \hat{\Phi}_n(k)$

Entonces, el soporte de $\hat{\Phi}_n(k)$ está contenido en el soporte de $\hat{\varphi}(|k|^2/2)$.

Es decir, $\operatorname{sopp} \hat{\Phi}_n \subset \operatorname{supp} \hat{\varphi}(|k|^2/2) = \{ k \mid 72a^2 \le |k|^2/2 \le (b-a)^2/2 \} = \{ k \mid 12a \le |k| \le b-a$

Vemos por lo tanto, que el soporte de Φ_n está contenido en un disco independientemente de n. Más aún, por (2.16) y (2.17) y el lema 1.2.4 obtenemos que

$$\lim_{n \to +\infty} \| \psi_n - \Phi_n \| = 0 \qquad (2.18)$$

Tomemos, para a cumpliendo (2.15) una función que satisfaga la definición 1.2.3. Entonces

$$\| F_a(B_{12n})\,\psi_n \|^2 = \int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu x \, | \psi_n(x) [F_a(B_{12n})](x) |^2$$

$$= \int_{|x| \le 13n} |\psi_n(x)|^2 |[F_a(B_{12n})](x)|^2 + \int_{|x| \ge 13n} |\psi_n(x) [F_a(B_{12n})(x)]|^2$$

$$\le \int_{|x| < 13n} |\psi_n(x)|^2 \Big\{ \int_{|y| \le 12n} |\xi(x-y)| \Big\}^2$$

$$+ \int_{|x| \geq 13n} |\varphi_n(x)|^2 \cdot \Big\{ \int_{|y| \leq 12n} d^\nu y \, |\xi(x-y)| \Big\}$$

$$\leq \int_{|x| < 13n} |\varphi_n(x)|^2 \Big\{ \int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu y \, |\xi(x-y)| \Big\}^2$$

$$+ \int_{|x| \geq 13n} d^\nu x \, |\varphi_n(x)|^2 \Big\{ \int_{|y| \leq 12n} d^\nu y \, \frac{|x-y|^{\nu+1}}{|x-y|^{\nu+1}} |\xi(x-y)| \Big\}^2$$

$$= \| F\{B_{13n}, x\} \varphi_n \|^2 \, \| \xi \|_1^2$$

$$+ \int_{|x| \geq 13n} d^\nu x \, |\varphi_n(x)|^2 \Big\{ \int_{|y| \leq 12n} |x-y|^{-\nu-1} d^\nu y \Big\}^2 \| x^{\nu+1} \xi \|_\infty^2$$

$$\leq \| F\{B_{13n}, x\} \varphi_n \|^2 \, \| \xi \|_1^2 + \| x^{\nu+1} \xi \|_\infty \times$$

$$\Big\{ \int_{|y| \leq 12n} n^{-\nu-1} d^\nu y \Big\}^2 \int_{|x| \geq 13n} |\varphi_n(x)|^2 d^\nu x$$

$$\leq \| F\{B_{13n}, x\} \varphi_n \|^2 \, \| \xi \|_1^2 + \frac{(12n)^{2\nu}}{n^{2\nu+2}}$$

$$\times \| x^{\nu+1} \xi \|_\infty^2 \, \omega_\nu^2(1) \, \| F\{B_{13n}^c, x\} \varphi_n \|$$

$$\leq \| F\{B_{13n}, x\} \varphi_n \|^2 \, \| \xi \|_1^2 + \frac{(12)^{2\nu} \omega_\nu^2(1)}{n^2}$$

$$\times \| x^{\nu+1} \xi \|_\infty^2 ,$$

donde $\omega_\nu(1)$ es la medida de la bola unitaria en $\mathbb{R}^\nu$. El primer término tiende a cero por (2.9).

$$\Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \| F_u(B_{12n}) \varphi_n \| = 0$$

En consecuencia, de (2.18)

$$\| F_a(B_{12n})\Phi_n\| \le \| F_a(B_{12n})[\Psi_n - \Phi_n]\| + \| F_a(B_{12n})\Psi_n\|$$

$$\le \|f_1\|_1 \|\Psi_n - \Phi_n\| + \| F_a(B_{12n})\Psi_n\| \to 0 \quad n \to +\infty \tag{2.19}$$

Asimismo, usando (2.14)

$$\| \Psi_n - \sum_j F_a(C_{12n;j})\Phi_n\| = \|\Psi_n - \sum_j F_a(C_{12n;j})\tilde{\Phi}_n - F_a(B_{12n})\Phi_n + F_a(B_{12n})\Phi_n\|$$

$$\| \Psi_n - \Phi_n\| + \| F_a(B_{12n})\Phi_n\| \to 0,\ n \to +\infty \tag{2.20}$$

Sea ahora $\chi_j(k)$ una función en $C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$ tal que

$$\operatorname{supp} \chi_j \subset \{ k \mid k \cdot e_j \ge -a,\ 11a \le |k| < b \} \quad y$$

$$\chi_j(k) + \chi_j(-k) = 1 \quad \text{si } 12a \le |k| \le b-a$$

Puesto que

$$\operatorname{supp} \hat{\Phi}_n \subset \operatorname{supp} \hat{\varphi}(|k|^2/2) \subset \{ k \mid 12a \le |k|\ b-a \}$$

tenemos que

$$\{ [\chi_j(k) + \chi_j(-k)]\Phi_n \}(x)$$

$$= \{ [\chi_j(k) + \chi_j(-k)]\hat{\Phi}_n \}^\vee (x)$$

$$= \{ \hat{\Phi}_n \}^\vee (x) \tag{2.21}$$

$$= \Phi_n(x) \quad \forall\ n \in \mathbb{N}\ y\ \forall\ j$$

Definimos finalmente:

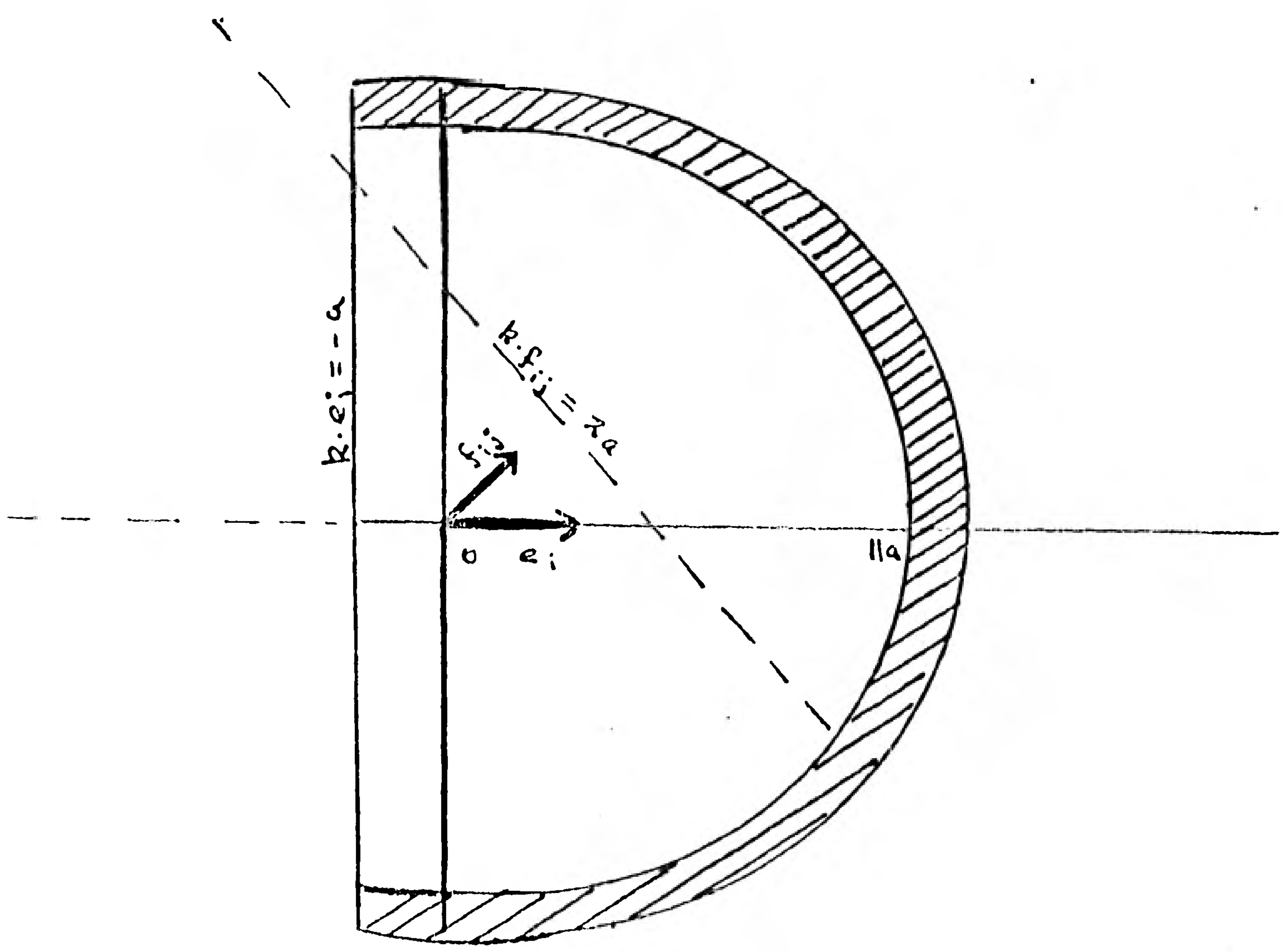
$$\Phi_n(i, out) := F_0(C_{12n,i})\, \chi_i(k)\, \Phi_n \tag{2.22}$$

$$\Phi_n(i, in) := F_a(C_{12n,i})\, \chi_i(-k)\, \Phi_n \tag{2.23}$$

Pongamos $\chi_i(k)$ como la suma finita de funciones ξ_{ij} en $C_0^\infty(\mathbb{R}^v)$. Es decir, $\chi_i(k) = \sum_j \xi_{ij}(k)$.

Por trigonometría, vemos que las ξ_{ij} pueden ser tomadas de tal forma que

supp $\xi_{ij}(k) \subset \{k \mid k \cdot f_{ij} \geq 2a\}$ para un cierto conjunto de vectores unitarios, los cuales hacen un ángulo de 20° con e_i. Para ver esto más claro, tomemos el caso de dos dimensiones, v = 2.



Como pedimos a $\mathcal{X}_i$, el soporte está contenido en la región sombreada de la figura: $11a \leq |k| \leq b$. Y un simple cálculo nos muestra que la recta $k\cdot f_{ij} = 2a$ intersecta a la recta $k\cdot e_i = -a$ en un punto debajo del que donde el círculo de radio $11a$ intersecta a la recta $k\cdot e_i = -a$. Entonces, para 2 dimensiones es suficiente con 2 vectores. Para mayores dimensiones solo va cambiando el número de vectores f_{ij} necesarios.

Entonces sea para cada i,

$$\mathcal{X}_i(k) = \sum_j \xi_{ij}(k) \qquad \operatorname{supp} \xi_{ij} \subset \{ k \mid k\cdot f_{ij} \geq a \} \quad (2.24)$$

Ahora supondremos que f_{ij} coincida con el eje unitario x_1 y demostraremos algunos lemas

LEMA 1.2.6 Sea ξ_{ij} alguna de las funciones que aparecen en (2.24), entonces

$$s-\lim_{r\to+\infty} \sum_{m=0}^{r} (H_0+\mathbb{1}) F_a(C_m) = (H_0+\mathbb{1}) F_a(C_{12n,i})\xi_{ij}\Phi_n$$

donde $C_m := [\, C_{12n,i} \cap \{ y \mid 2n+m \leq y_1 < 2n+m+1 \} \,]$

(2.25)

DEMOSTRACION : Si $x \in C_{12n,i}$, como f_{ij} hace un ángulo de 20° con e_i y $C_{12n,i}$, es un conjunto contenido en un cono de abertura 60° alrededor de e_i, entonces x y f_{ij} a lo más hacen un ángulo de 80°. Por lo que

$$x\cdot f_{ij} = |x|\,|f_{ij}| \cos\theta = |x| \cos\theta \geq (\cos 80^\circ)|x| = |x| \operatorname{sen} 10^\circ$$

$$\geq 12n \operatorname{sen} 10^\circ > 2n \qquad \left(\operatorname{sen} 10^\circ > \tfrac{1}{6} \right)$$

Entonces, si $x \in C_{12n,i}$, $\quad x\cdot f_{ij} = x_1 > 2n$

En consecuencia, por (2.25)

$$C_{12n,i} = \bigcup_{m=0}^{+\infty} C_m$$

$$F_a(C_{12n,i})(x) = F_a\left(\bigcup_{m=0}^{+\infty} C_m\right)(x) = \int_{\bigcup_{m=0} C_m} \eta(x-y)\, d^\nu y$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \int_{C_m} \eta(x-y)\, d^\nu y$$

donde hemos usado que $\eta \in \mathcal{S} \subset L^1$, para aplicar convergencia dominada

Entonces,

$$\left\| F_a(C_{12n,i})\, \xi_{ij} \bar{\Phi}_n - \sum_{m=0}^{r} \int_{C_m} \eta(x-y)\, d^\nu y\ \xi_{ij} \bar{\Phi}_n \right\|^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}^\nu} \left| \int_{C_{12n,i}} \eta(x-y)\, d^\nu y \right|^2 \left| (\xi_{ij} \bar{\Phi}_n)(x) \right|^2 d^\nu x$$

$$= \int_{\mathbb{R}^\nu} \left| \int_{\bigcup_{m=r+1} C_m} \eta(x-y)\, d^\nu y \right|^2 \left| (\xi_{ij} \Phi_n)(x) \right|^2 d^\nu x$$

El integrando de ésta última integral esta dominado puntualmente por $\|\eta\|_1 \left|(\xi_{ij}\Phi_n)(x)\right|^2 \in L^2(\mathbb{R}^\nu)$. Además, $\left| \int_{\bigcup_{m=r+1} C_m} \eta(x-y)\, d^\nu y \right| \to 0$ cuando $r \to \infty$ cuando $r \to +\infty$ para cada $x \in \mathbb{R}^\nu$.

Aplicando nuevamente convergencia dominada, obtenemos que

$$\sum_{m=0}^{r} F_a(C_m)\, \xi_{ij} \Phi_n \to F_a(C_{12n,i})\, \xi_{ij} \Phi_n \text{ en } L^2 \text{ cuando } r \to +\infty \quad (2.26)$$

Por otra parte,

$$\operatorname{supp}\left[F_a(C_m)\,\xi_{ij}\,\Phi_n\right]^{\wedge} = \operatorname{supp}\left[\widehat{F_a(C_m)} * \widehat{\xi_{ij}\Phi_n}\right]$$

$$= \operatorname{supp}\left[\hat{\xi}\,\widehat{F\{C_m,x\}} * \xi_{ij}\,\hat{\Phi}_n\right]$$

$$\subset \operatorname{supp}\hat{\xi} + \operatorname{supp}\hat{\bar{\Phi}}_n$$

$$\subset \{k \mid |k| \leq a\} + \{k \mid 12a \leq |k| \leq b-a\}$$

$$= \{k \mid 11a \leq |k| \leq b\} \qquad (2.27)$$

( )

Tomemos g en $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ con $g(k)=1$ si $|k| \leq b$.

Entonces, $(H_0+\mathbb{1})\,g(k)$ es un operador acotado y

$$[(H_0+\mathbb{1})\,g(k)\,F_a(C_m)\,\xi_{ij}\,\bar{\Phi}_n](x) = \{(1+\tfrac{1}{2}|k|^2)\,g(k)(F_a(C_m)\,\xi_{ij}\,\Phi_n)^{\wedge}\}^{\vee}(x)$$

$$= \{(1+\tfrac{1}{2}|k|^2)\,(F_a(C_m)\,\xi_{ij}\,\bar{\Phi}_n)^{\wedge}\}^{\vee}(x)$$

$$= [(H_0+\mathbb{1})\,F_a(C_m)\,\xi_{ij}\,\Phi_n](x)$$

Más aún, por (2.26) y (2.27) $\operatorname{supp}(F_a(C_{12n,i})\,\xi_{ij}\,\bar{\Phi}_n)^{\wedge} \subset \{k \mid 11a \leq |k| \leq b\}$

y además

$$\underset{r\to+\infty}{\text{s-lim}} \sum_{m=0}^{r} (H_0+\mathbb{1})\,F_a(C_m)\,\xi_{ij}\,\bar{\Phi}_n = \underset{r\to+\infty}{\text{s-lim}}$$

$$\sum_{m=0}^{r} (H_0+\mathbb{1})\,g(k)\,F_a(C_m)\,\xi_{ij}\,\Phi_n = (H_0+\mathbb{1})\,g(k)\,F_a(C_{12n,i})\,\xi_{ij}\,\bar{\Phi}_n$$

$$= (H_0+\mathbb{1})\,F_a(C_{12n,i})\,\xi_{ij}\,\Phi_n$$

Y así obtenemos el resultado . ▲

LEMA 1.2.7 Los operadores $e^{-i(P_1^2/2+\ldots+P_\nu^2/2)t}$ y $F\{y_1<\alpha, x\}$ conmutan entre sí. Es decir,

$$e^{-i(P_1^2/2+\ldots+P_\nu^2/2)t}\, F\{y_1<\alpha, x\}\varphi =$$

$$F\{y_1<\alpha, x\}\, e^{-i(P_1^2/2+\ldots+P_\nu^2/2)t}\varphi$$

$$\forall \quad \varphi\in L^2(\mathbb{R}^\nu)$$

DEMOSTRACION : Tomemos un conjunto denso en $L^2(\mathbb{R}^\nu)$ que además pertenezca a $L^1(\mathbb{R})$: $\{\psi_r\}_{r=0}^{+\infty}$ con $\psi_r\in L^1\cap L^2(\mathbb{R})$

Sabemos que

$$\{\psi_{r_1}(x_1)\,\psi_{r_2}(x_2)\,\ldots\,\psi_{r_\nu}(x_\nu)\}_{r_1=0,\ \ldots,\ r_\nu=0}^{+\infty}$$

estas funciones son densas en $L^2(\mathbb{R}^\nu)$. Como consecuencia de la definición, vemos que para estas funciones los operadores sí conmutan.

Entonces, como además los operadores son continuos obtenemos que los operadores conmutan para todo $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^\nu)$ ▲

Sea $\alpha_m^{(n)}$ el vector $(2n+m,0,\ldots,0)$ Definimos,

$$
\begin{aligned}
F_m(x) &:= (H_0+1)\,F_a(C_m)(x)\\
\varphi_m(x) &:= [(H_0+1)\,F_a(C_m)\,\xi_{ij}\,\Phi_n](x+\alpha_m^{(n)}) \\
&= [F_m\,\xi_{ij}\,\Phi_n](x+\alpha_m^{(n)})
\end{aligned}
\qquad (1.28)
$$

Entonces,

$$\operatorname{supp} \hat{\varphi}_m = \operatorname{supp}\left(F_m\, \xi_{ij}\, \Phi_n\right)^{\wedge} = \operatorname{supp}\left(F_a(C_m)\,\xi_{ij}\,\Phi_n\right)^{\wedge}$$

$$= \operatorname{supp}\left(\hat{\xi}\, \widehat{F\{C_m, x\}} * \widehat{\xi_{ij}\,\Phi_n}\right) \subset \operatorname{supp}\hat{\xi}_1$$

$$+ \operatorname{supp} \xi_{ij}$$

$$\subset \{k \mid |k| \leq a\} + \{k \mid k\cdot f_{ij} = k_1 \geq 2a\}$$

$$\subset \{k \mid k_1 \geq a\}$$

y de (2.26) obtenemos que

$$\operatorname{supp} \hat{\varphi}_m \subset \{k \mid a \leq k_1 \leq b\} \quad \forall\, m,n \in \mathbb{N} \qquad (2.29)$$

Ahora denotemos por φ cualesquiera de las funciones φ_m y definamos:

$$(W_t\varphi)(x) := (2\pi i t)^{-1/2}\, e^{i x_1^2/2t} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + i y_1^2/2t + \tfrac{1}{2}\left(i y_1^2/2t\right)^2\right)$$

$$\times\, e^{-i x_1 y_1/t}\, \varphi(y)\, dy_1 \qquad (2.30)$$

$$y := (y_1, x_\perp)$$
$$x_\perp := (x_2, \dots, x_n)$$

LEMA 1.2.8a

Sea φ cualesquiera de las funciones definidad por (2.28), entonces

a) $(W_t\varphi)(x) = 0$ si $x_1 < at \qquad t > 0$

b) $\| (1+t)(-x_1+2at)^2 \left[\left(e^{-iP_1^2/2t}\varphi\right)(x) - (W_t\varphi)(x\right.$

$= \| (1+t)t^2 \left(-i\frac{\partial}{\partial y_1} + 2a\right)\left\{\left[e^{iy_1^2/2t}\left(1 + iy_1^2/2t + \tfrac{1}{2}(iy_1^2/2t)^2\right)\right\}\right.$

DEMOSTRACION: Más adelante veremos que $x_1^m \varphi \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^\nu)$

Entonces $(W_t \varphi)$ está bien definido.

Si
$$g(k_1, x_\perp) := \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_1 y_1} \varphi(y_1, x_\perp)\, dy_1$$

$$\Rightarrow g(k_1, x_\perp) \in L^2(\mathbb{R}^{\nu-1}, d^{\nu-1}x_\perp)$$

. Así, por Plancherel,

$$\int_{\mathbb{R}^{\nu-1}} d^{\nu-1}x_\perp |g(k_1, x_\perp)|^2 = \int_{\mathbb{R}^{\nu-1}} d^{\nu-1}k_\perp |\hat{g}(k_1, k_\perp)|^2$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{\nu-1}} d^{\nu-1}k_\perp |\hat{\varphi}(k_1, k_\perp)|^2 \equiv 0$$

Si $k_1 \notin [a,b]$ por (2.29) Y por lo tanto,

$$g(k_1, x_\perp) = 0 \quad \text{si} \quad k_1 \notin [a,b] \tag{2.31}$$

Por otra parte, como $x_1^r \varphi \in L^1$,

$$(2\pi i t)^{-1/2} e^{-ix_1^2/2t} (W_t\varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + iy_1^2/_{2t} + 1/2\,(iy_1^2/_{2t})^2\right) e^{-ix_1y_1/t} \varphi(y)\, dy_1$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1y_1/t} \varphi(y)\, dy_1 - it/2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} e^{-ix_1y_1/t} \varphi(y)\, dy_1 - t^2/8 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} e^{-ix_1y_1/t} \varphi(y)\, d$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1y_1/t} \varphi(y)\, dy_1 - it/2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_1y_1/t} \varphi(y)\, dy_1 - t^2/8 \frac{\partial^4}{\partial^4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1y_1/t} \varphi(y)\, dx_1$$

Como la derivación no cambia el soporte de una función, por (2.31) obtenemos que

$(W_t \varphi)(x) = 0$ si $x_1 < at$. Esto prueba (a) del lema.

Para demostrar (b) del lema, sabemos que por (XXIII a)

$$\left(e^{-iP_1^2 t/2} \varphi\right) = (2\pi i t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i|x_1 - y_1|^2/2t} \varphi(y_1, x_\perp)\, dy_1$$

Para $\varphi \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^\nu)$

Por lo que

$$(e^{-iP_1^2 t/2}\varphi)(x) - (W_t\varphi)(x) =$$

$$= (2\pi i t)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i|x_1-y_1|^2/2t}\varphi(y)\,dy_1 - (2\pi i t)^{-1/2} e^{ix_1^2/2t}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+iy_1^2/2t+\tfrac{1}{2}(iy_1^2/2t)^2 e^{-ix_1y_1/t}\varphi(y)\,dy_1$$

$$= (2\pi i t)^{-1/2} e^{ix_1^2/2t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1y_1/t}\left[e^{iy_1^2/2t} - (1+iy_1^2/2t+\tfrac{1}{2}(iy_1^2/2t)^2\right]\varphi(y)\,dy_1$$

$$= (it)^{-1/2} e^{ix_1^2/2t}\,\hat{G}_t^{1}(x_1/t, x_\perp)$$

donde $\wedge_1$ denota la transformada de Fourier con respecto a y_1, de la función

$$G_t(y_1, x_\perp) = \left[e^{iy_1^2/2t} - (1+iy_1^2/2t+\tfrac{1}{2}(iy_1^2/2t)^2)\right]\varphi(y_1, x_\perp)$$

Entonces,

$$\|(1+t)(-x_1+2at)^2\left[(e^{-iP_1^2 t/2}\varphi)(x) - (W_t\varphi)(x)\right]\|^2$$

$$= (1+t^2)^2\int_{\mathbb{R}^{\nu-1}} dx_\perp^{\nu-1}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1\,(-x_1+2at)^4\,|t|^{-1}\,|\hat{G}_t^1(x_1/t, x_\perp)|^2$$

$$= t^4(1+t)^2\int_{\mathbb{R}^{\nu-1}} d^{\nu-1}x_\perp\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1\,(-x_1/t+2a)^4\,|t|\,|\hat{G}_t^1(x_1/t, x_\perp)|^2$$

(Poniendo $x_1/t = z_1$, $x_\perp = z_\perp$ $t > 0$)

$$= t^4(1+t^{\bullet})^2\int_{\mathbb{R}^{\nu-1}} d^{\nu-1}z_\perp\int_{-\infty}^{+\infty} dz_1\,(-z_1+2a)^4\,|\hat{G}_t^1(z)|^2$$

$$= t^4(1+t)^2\int_{\mathbb{R}^{\nu-1}} d^{\nu-1}z_\perp\,\|(-z_1+2a)^2\,\hat{G}_t^1(z_1, z_\perp)\|^2_{L^2(\mathbb{R}, dz_1)}$$

$$= t^4 (1+t)^2 \int_{\mathbb{R}^{\nu-1}} d^{\nu-1} z_\perp \, \| [(-z_1 + 2a)^2 \hat{G}_t^{1} (z_1, z_\perp)]^{\vee_1} \|_{L^2(\mathbb{R}, dy_1)}$$

$$= t^4 (1+t)^2 \int_{\mathbb{R}^{\nu-1}} d^{\nu-1} z_\perp \, \| \left(-i \frac{\partial}{\partial y_1} + 2a\right)^2 G_t(y_1, z_\perp) \|_{L^2(\mathbb{R}, dy_1)}$$

$$= t^4 (1+t)^2 \int_{\mathbb{R}^{\nu-1}} d^{\nu-1} z_\perp \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \, \left| \left(-i \frac{\partial}{\partial y_1} + 2a\right)^2 G_t(y_1, z_\perp) \right|^2$$

$$= t^4 (1+t)^2 \int_{\mathbb{R}^{\nu}} d^\nu y \, \left| \left(-i \frac{\partial}{\partial y_1} + 2a\right)^2 G_t(y) \right|^2$$

$$= \| (1+t) t^2 \left(-i \frac{\partial}{\partial y_1} + 2a\right)^2 \left\{ \left[e^{i y_1^2/2t} - \left(1 + i y_1^2/2t + \tfrac{1}{2}(i y_1^2/2t)\right) \right] \varphi(y) \right\} \|^2$$

donde hemos usado que

$$\widehat{(-i z_1 f(z))}(k) = \frac{\partial}{\partial k_1} \hat{f}(k)$$

▲

Esto demuestra el lema .

LEMA 1.2.9 Sea φ como antes, entonces $\forall \quad t > 0$

$$\| (1+t)(-x_1 + 2at)^2 \, [(e^{-i P_1^2/2t} \varphi)(x) - (W_t \varphi)(x)] \|$$

$$\le \| P(|y_1|) \{ |\varphi| + |\tfrac{\partial \varphi}{\partial y_1}| + \tfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} | \} \|$$ donde P es un polinomio de grado 6 y cuyos coeficientes dependen unicamente de a.

DEMOSTRACION : Del lema 1.2.8

$$\| (1+t)(-x_1 + 2at)^2 \, [(e^{-i P_1^2/2t} \varphi)(x) - (W_t \varphi)(x)] \|$$

$$= \| (1+t) t^2 \left(-i \frac{\partial}{\partial y_1} + 2a\right)^2 \left\{ \left[e^{i y_1^2/2t} - \left(1 + i y_1^2/2t + \tfrac{1}{2}(i y_1^2/2t)^2\right) \right] \varphi \right\} \|$$

Entonces, si

$$E(y_1,t) = e^{iy_1^2/2t} - \left(1 + iy_1^2/2t + \tfrac{1}{2}\left(iy_1^2/2t\right)^2\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(iy_1^2/2t\right)^n - \left(1 + iy_1^2/2t + \tfrac{1}{2}\left(iy_1^2/2t\right)\right)$$

$$= \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(iy_1^2/2t\right)^n$$

Entonces $\left|\left(-i\frac{\partial}{\partial y_1} + 2a\right)^2 E(y_1,t)\,\varphi\right|$

$$= \left|\varphi\left(-i\frac{\partial}{\partial y_1} + 2a\right)E - \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\left(4ai + 2\frac{\partial}{\partial y_1}\right)E - E\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\varphi\right|$$

$$\leq \left(|\varphi| + \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right| + \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}\right|\right)\left((1+2a)^2|E| + 2(1+2a)\left|\frac{\partial E}{\partial y_1}\right| + \left|\frac{\partial^2 E}{\partial y_1^2}\right|\right) \qquad (2.32)$$

Además,

$$|E| = \left|e^{iy_1^2/2t} - \left(1 + iy_1^2/2t + \tfrac{1}{2}\left(iy_1^2/2t\right)^2\right)\right|$$

$$\leq \left|\cos y_1^2/2t - \left(1 + \tfrac{1}{2}\left(iy_1^2/2t\right)^2\right)\right| + \left|\operatorname{sen} y_1^2/2t - y_1^2/2t\right|$$

$$\leq \frac{1}{3!}\left(y_1^2/2t\right) + \frac{1}{3!}\left(y_1^2/2t\right)^3$$

Por el teorema de Taylor

$$\left|\frac{\partial E}{\partial y_1}\right| = \left|\frac{iy_1}{t}\left[e^{iy_1^2/2t} - (1 + iy_1^2/2t)\right]\right|$$

$$\leq |y_1/t|\,|\cos y_1^2/2t - 1| + |y_1/t|\,|\operatorname{sen}(y_1^2/2t) - y_1^2/2t|$$

$$\leq |y_1/t|\left(y_1^2/2t\right)^2 + |y_1/t|\left(y_1^2/2t\right)^2$$

Por el teorema de Taylor

Asimismo, por el mismo teorema y usando el hecho que $|e^{ix} - 1| \leq |x|$

$$\left|\frac{\partial^2 E}{\partial y_1^2}\right| = \left|\frac{i}{t}\left[e^{iy_1^2/2t} - (1 + iy_1^2/2t)\right] + (iy_1^2/2t)^2\right|\,|e^{iy_1^2/2t} - 1|$$

$$\leq \frac{1}{t}\left(\left(y_1^2/2t\right)^2 + \left(y_1^2/2t\right)^2\right) + y_1^4/2t^3$$

Y por lo tanto, para $t \geq 1$

$$(1+t)t^2\left\{(1+2a)^2|E| + 2(1+2a)\left|\frac{\partial E}{\partial y_1}\right| + \left|\frac{\partial^2 E}{\partial y_1^2}\right|\right\} \leq P_1(|y_1|)$$

donde P_1, es un polinomio de grado 6 cuyos coeficientes depende a unicamente.

Ahora, en lugar de usar el teorema de Taylor, usamos que $|e^{ix} - 1| \leq |x|$

entonces

$$|E| \leq y_1^2/t + y_1^4/8t^2$$

$$\left|\frac{\partial E}{\partial y_1}\right| \leq y_1^3/2t^2 + y_1^2/2t$$

$$\left|\frac{\partial^2 E}{\partial y_1^2}\right| \leq y_1^2/2t^2 + y_1^2/t + y_1^2/4t^2 \qquad 0 < t < 1$$

Enconsecuencia, $\forall \quad t > 0$

$$(1+t)t^2 \left\{ (1+2a)^2 \, |E| + 2(1+2a) \left| \frac{\partial E}{\partial y_1} \right| + \left| \frac{\partial^2 E}{\partial y_1^2} \right| \right\} \leq P(y_1)$$

donde P es un polinomio de grado 6 cuyos coeficientes depende de a unicamente. De (2.32)

y lema 1.2.8 obtenemos el resultado. ▲

LEMA 1.2.10 Si P es el polinomio del lema 1.2.9 entonces $\forall m, n$ se tiene que

$$\left\| P(y_1) \left\{ |\varphi_m| + \left| \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} \right| + \left| \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial y_1^2} \right| \right\} \right\| \leq A$$

donde A es una constante independiente de n y m. Y donde φ_m está definida por (2.28).

DEMOSTRACION : De (2.28), y como $(H_o + \Omega)$ conmuta con traslaciones,

$$\varphi_m(x) = (H_o+\Omega)[F_a(C_m)\,\xi_{ij}\,\Phi_n](x+\alpha_m^{(n)})$$

$$= (H_o+\Omega)\,\mathcal{G}_m(x)$$

Donde $\mathcal{G}_m(x) = F_a(C_m)(x+\alpha_m^{(n)})(\xi_{ij}\,\Phi_n)(x+\alpha_m^{(n)})$

Pongamos $\mathcal{G}_{1m}(x) := F_a(C_m)(x) \qquad \mathcal{G}_{2n} := (\xi_{ij}\,\Phi_n)(x)$

Como tanto $\mathcal{G}_{1m}$ como $\mathcal{G}_{2n}$ son diferenciables, y como para tales funciones,

$$H_o(fg) = gH_of - \nabla f \cdot \nabla g + fH_og$$

entonces,

$$\varphi_m = (H_o+\Omega)(\mathcal{G}_{1m}\,\mathcal{G}_{2n}) = \mathcal{G}_{1m}(H_o\,\mathcal{G}_{2n}) + \mathcal{G}_{2n}(H_o\mathcal{G}_{1m})$$

$$- \Delta\,\mathcal{G}_{1m} \cdot \nabla\,\mathcal{G}_{2n} + \mathcal{G}_{1m}\,\mathcal{G}_{2n}$$

Y de aquí notamos que tanto φ_m, $\frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1}$ como $\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial y_1^2}$ son una suma de funciones del tipo $g_{1m} g_{2n}$ donde g_{2n} es independiente de m y es de hecho cierta derivada parcial de $\mathcal{J}_{2n}$ de orden menor o igual a 4, y gim sigue siendo la convolución con la función característica de Cm concierta función en $\mathcal{S}$ (que es de hecho cierta derivada parcial de ζ de orden menor o igual a 4).

Entonces, basta hacer una estimación para rfunciones del tipo $g_{1m} g_{2n}$ donde g_{2n} es una cierta derivada parcial de

$$(\xi_{ij}\ \bar{\Phi} n) \quad \text{y} \quad g_{1m}(x) = \int_{C_m} g_1(x-y) \quad \text{con} \quad g_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$$

Para ver esto, demostraremos que $P(|y_1|)\, g_{1m}(x+\alpha_m^{(n)})$ es una función en L^∞. Recordando que P es un polinomio a coeficientes positivos, tenemos que

$$|P(|y_1|)\, g_{1m}(y+\alpha_m^{(n)})| = P(|y_1|)\left|\int_{C_m} g_1(y+\alpha_m - z)\, d^\nu z\right|$$

$$\leq P(|y_1|)\int_{C_m} |g_1(y+\alpha_m^{(n)} - z)|\, d^\nu z$$

Haciendo $\alpha_m^{(n)} - z = z'$ Y recordando que

$$C_m = \{ C_{12n,i} \cap \{ 2n+m \leq y_1 \leq 2n+m+1 \} \}$$

$$\Rightarrow \quad P(|y_1|)\int_{C_m} |g_1(y+\alpha_m^{(n)} - z)|\, d^\nu z$$

$$\leq P(|y_1|)\int_{0 \leq z'_1 \leq 1} |g_1(y-z')|\, d^\nu z'$$

$$= \int_{0 \leq z_1 \leq 1} P(|y_1 - z_1 + z_1|)\, |g_1(y-z)|\, d^\nu z$$

$$\leq \int_{0 \leq z_1 \leq 1} P(|y_1 - z_1| + |z_1|)\, |g_1(y-z)|\, d^\nu z$$

$$\leq \int_{0\leq z_1\leq 1} P(|y_1-z_1|+1)\,|g_1(y-z)|\,d^\nu z$$

$$\leq \int_{0\leq z_1\leq 1} \frac{P(|y_1-z_1|+1)\,(1+|y-z|^{\nu+1})\,|g_1(y-z)|\,d^\nu z}{(1+|y-z|^{\nu+1})}$$

$$\leq \int_{0\leq z_1\leq 1} \frac{C_{\nu+1}}{(1+|y-z|^{\nu+1})}\,d^\nu z$$

$$\leq C_{\nu+1}\,\|(1+|z|^{\nu+1})^{-1}\|_{L} \equiv A_1 = \text{constante}$$

Como g_{2n} es a lo más una derivada parcial de orden 4 de $\xi_{ij}\Phi_n$

$$\|P(|y_1|)\,g_{1m}\,g_{2n}\| \leq \|P(|y_1|)\,g_{1m}\|_\infty \|g_{2n}\|$$

$$\leq 4\,\|P(|y_1|)g_{1m}\|\;\|\,|k|^4/4\,(\xi_{ij}\Phi_n)^\wedge\|$$

$$\leq 4A_1\,\|(1+|k^2/2|)^2\,\xi_{ij}\,\hat{\Phi}_n\|$$

$$\leq 4A_1\,\|(1+|k|^2/)^2\,\xi_{ij}\|_\infty\;\|\varphi\|\,\|\hat{\varphi}\|_\infty\quad\forall n,m$$

donde hemos usado (2 . 17).

Haciendo una estimación para cada término, análogamente, obtenemos la afirmación del lema.

▲

LEMA 1.2.11 Si φ_m es como antes entonces $\forall\; t>0$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|F\{y_1<-n-m+at\}\,e^{-iP_1^2 t/2}\,\varphi_m\| \leq \frac{c}{(1+t)(n-1+at)^{1}}$$

c = constante independiente de n y m y t.

DEMOSTRACION : Usando el lema 1.2.8 (b) obtenemos que

$$\|F\{y_1<-n-m+at,\;x\}\,e^{-iP_1^2 t/2}\varphi_m\|$$

$$= \| F\{y_1 < -n-m+at, x\} [e^{-iP_1^2 t/2}\varphi_m - (W_t\varphi_m)] \|$$

$$= \| F\{y_1 < -n-m+at, x\} [e^{-iP_1^2 t/2}\varphi_m - (W_t\varphi_m)] \|$$

$$= \| \frac{(1+t)(-x_1+2at)^2}{(1+t)(-x_1+2at)^2} F\{y_1 < -n-m+at, x\} [e^{-iP_1^2 t/2}\varphi_m - (W_t\varphi_m)] \|$$

$$\leq \| (1+t)(-x_1+2at)^2 F\{y_1 < -n-m+at, x\} [e^{-iP_1^2 t/2}\varphi_m - (W_t\varphi_m)] \| \times \frac{1}{(1+t)(n+m+t)^2}$$

$$\leq \frac{A}{(1+t)(n+m+t)^2}$$

Donde A es el mismo que en el lema 1.2.10, usando primero el lema 1.2.9 y elhecho que $y_1 \leq -n-m+at$ implica $-y_1+2at \geq n+m+at$

Entonces,

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \| F\{y_1 < -n-m+at, x\} e^{-iP_1^2 t/2}\varphi_m \| \leq A \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+t)(n+m+at)^2}$$

$$= A \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+t)(n+m+at)^{1/2}} \cdot \frac{1}{(n+m+at)^{1/2+1}}$$

$$\leq A \frac{1}{(1+t)(n-1+at)^{1/2}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m^{1/2+1}} \leq \frac{C}{(1+t)(n-1+at)^{1/2}} \qquad (2.33)$$

Y así obtenemos el lema ▲

LEMA 1.2.12

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} dt \, \| F\{B_{n+at}, x\} e^{-itH_0}(H_0+1)\Phi_n(i,out) \| = 0 \qquad (2.34)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{0} dt \, \| F\{B_{n-at}, x\} e^{-itH_0}(H_0+1)\Phi_n(i,in) \| = 0 \qquad (2.35)$$

donde $\Phi_n(i, {}^{out}_{in})$ están definidos por (2.22) y (2.23).

dEMOSTRACION : Por (2. 24) es suficiente con demostrar que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} dt \, \| F\{B_{n+at}, x\} e^{-itH_0}(H_0+\mathbb{1}) F_a(C_{12n,i}) \xi_{ij}(R) \Phi_n \| = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{0} dt \, \| F\{B_{n-at}, x\} e^{-itH_0}(H_0+\mathbb{1}) F_a(C_{12n,i}) \xi_{ij}(-R) \Phi_n \| = 0$$

La demostración la haremos para $F_a(C_{12n,i})\, \xi_{ij}(R) \Phi_n$.

Para demostrar (2.35) Sólo hay que cambiar unos signos en los lemas anteriores. Y notado que si en (1.28) se sustituye $\xi_{ij}(R)$ por $\xi_{ij}(-R)$ entonces $(W_t \varphi_m)=0$ si $x_1 < -at$ y $t < 0$.

Ahora bien, obviamente la bola de radio $n+at$ está contenida en la región $x\cdot f_{ij} \leq n+at$ Entonces es suficiente con demostrar que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \| F\{y\cdot f_{ij} < n+at, x\} e^{-itH_0}(H_0+\mathbb{1}) F_a(C_{12n,i}) \xi_{ij} \Phi_n \| dt = 0$$

Primero haremos una rotación de los ejes de tal manera que f_{ij} sea el eje$x1$. Esto puede puesto que,

$$\| F\{y\cdot f_{ij} < n+at, x\} e^{-itH_0}(H_0+\mathbb{1}) F_a(C_{12n,i}) \xi_{ij} \Phi_n \|^2$$

$$= \int_{x\cdot f_{ij} < n+at} | e^{-itH_0}(H_0+\mathbb{1}) F_a(C_{12n,i}) \xi_{ij} \Phi_n |^2(x)\, d^\nu x$$

$$= \int_{z_1 < n+at} | e^{-itH_0}(H_0+\mathbb{1}) F_a(C_{12n,i}) \xi_{ij} \Phi_n |^2 (R_{ij}^{-1} z)\, d^\nu z$$

donde R_{ij} es la rotación que lleva ξ_{ij} a z_1 ; y notando que det $R_{ij} = \pm 1$

puesto que $R^*_{ij} = R^{-1}_{ij}$

Y además,

$$\left(e^{-itH_0}(H_0+1)\psi\right)(R^{-1}_{ij}z) = \left[e^{-i|k|^2/2\cdot t}(|k|^2/2+1)\hat{\psi}\right]^{\vee}(R^{-1}_{ij}z)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2}\int_{\mathbb{R}^\nu} e^{i(R^{-1}_{ij}z,\,k)}\, e^{-i|k|^2t/2}\,(|k|^2/2+1)\hat{\psi}\, d^\nu k$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2}\int_{\mathbb{R}^\nu} e^{i(z,\,R_{ij}k)}\, e^{-i|k|^2t/2}\,(|k|^2/2+1)\hat{\psi}(k)\, d^\nu k$$

(Poniendo $R_{ij}k = y \Rightarrow |R_{ij}k| = |y|$)

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2}\int_{\mathbb{R}^\nu} e^{iz\cdot y}\, e^{-i|y|^2t/2}\,(|y|^2/2+1)\hat{\psi}(R^{-1}_{ij}y)\, d^\nu y$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2}\int_{\mathbb{R}^\nu} e^{iz\cdot y}\, e^{-i|y|^2t/2}\,(|y|^2/2+1)\,\widehat{\psi\circ R^{-1}_{ij}}(y)\, d^\nu y$$

$$= \left[e^{-itH_0}(H_0+1)(\psi\circ R^{-1}_{ij})\right](z)$$

Entonces, para $\psi = F_a(C_{12n,i1})\,\xi_{ij}\,\Phi_n$

vemos que

$$F_a(C_{12n,i})(R_{ij}^{-1}x) = \int_{C_{12n,i}} \xi(R_{ij}^{-1}x - y)\, d^\nu y$$

$$= \int_{R_{ij}(C_{12n,i})} \xi(R_{ij}^{-1}(x-z))\, d^\nu z$$

Y por lo tanto $F_a(C_{12n,i})(R_{ij}^{-1}x)$ sigue siendo la convolución de 2 funciones, que tienen las mismas propiedades que $F_a(C_{12n,i})$. Es decir, $F_a(C_{12n,i}) \circ R_{ij}^{-1}$ es la convolución de $\xi \circ R_{ij}^{-1}$ con la función característica del como truncada $C_{12n,i}$ nada más que cotado. Además, $\mathrm{supp}\ \widehat{\xi \circ R_{ij}^{-1}}$

$$= \mathrm{supp}\ \hat{\xi} \circ R_{ij}^{-1} \subset \{ k \mid |k| \leq a \}$$

por ser R_{ij} una rotación. Y $\xi \circ R_{ij}^{-1}$ sigue siendo una función en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$

Finalmente, para $\xi_{ij} \Phi_n$ obtenemos que

$$(\xi_{ij} \Phi_n)(R_{ij}^{-1} z) = [(\xi_{ij} \circ R_{ij}^{-1}) \times (\Phi_n \circ R_{ij}^{-1})](z)$$

haciendo las mismas cambios de Variables.

Y obviamente,

$$F_a(C_{12n,i}) \circ (R_{ij}^{-1}), \quad \xi_{ij} \circ R_{ij}^{-1} \quad y \quad \Phi_n \circ R_{ij}^{-1}$$

Tienen exactamente las propiedades que pedimos para $F_a(C_{12n,i})$, ξ_{ij} y Φ_n nada más que ahora con respecto a los nuevos ejes.

De Φ_n no hemos utilizado en los lemas anteriores más que supp $\hat{\Phi}_n \subset \{ k \mid 2a \le |k| \le b-a \}$. De ξ_{ij}

no utilizamos más que $\xi_{ij} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$ y supp $\xi_{ij} \subset \{ k \mid k \cdot \xi_{ij} \geq 2a \}$

Y del operador $F_a(C_{12n,i})$ no utilizamos más que fuera la convolución de una función en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$ con soporte de su trasformada de Fourier contenida en la bola de radio a.

La cual queda invariante bajo una rotación.

Para simplificar la notación, seguiremos denotando estas nuevas funciones con los mismo símbolos.

Y al cono truncado $R_{ij} C_{12n,i}$ lo seguiresmos denotando por $C_{12n,i}$

Entonces, basta demostrar que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \| F\{ y, < n+at, x \} e^{-itH_0} (H_0 + 1\!\!1) F_a(C_{12n,i}) \xi_{ij} \Phi_n \| = 0$$

Y ahora, usando el lema 1.2.6

$$\int_0^{+\infty} \| F\{ y, < n+at, x \} e^{-itH_0} (H_0 + 1\!\!1) F_a(C_{12n,i}) \xi_{ij} \Phi_n \| dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \| F\{ y, < n+at, x \} e^{-itH_0} (H_0 + 1\!\!1) \{ \sum_{m=0}^{+\infty} F_a(C_m) \xi_{ij} \Phi_n \} \| dt$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \left[\sum_{m=0}^{+\infty} \| F\{ y, < n+at, x \} e^{-itH_0} F_m \xi_{ij} \Phi_n \| \right] dt$$

donde Fm está definido en (2.28)

Por otro lado, para cada n y m $\in \mathbb{N}$ definamos $\alpha_m^{(n)}$ el vector $(2n+m, 0, \ldots, 0)$

que esta en $\mathbb{R}^\nu$, entonces

$$\| F\{y, < n+at, x\} e^{-itH_0} F_m \xi_{ij} \Phi_n \|^2 = \int_{\mathbb{R}^\nu} F\{y, < n+at, x\} |(e^{-itH_0} F_m \xi_{ij} \Phi_n)(x)|^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}^\nu} F\{y, < n+at, x+\alpha_m^{(n)}\} |(e^{-itH_0} F_m \xi_{ij} \Phi_n)(x+\alpha_m^{(n)})|^2 d^\nu x$$

$$= \int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu x \, F\{y, < n-\alpha_m^{(n)} + at, x\} |(e^{-itH_0} F_m \xi_{ij} \Phi_n)(x+\alpha_m^{(n)})|^2 d^\nu x$$

$$= \int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu x \, F\{y, < -n-m+at, x\} |(e^{-itH_0} F_m \xi_{ij} \Phi_n)(x+\alpha_m^{(n)})|$$

$$= \int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu x \, F\{y, < -n-m+at, x\} |(e^{-itH_0} \varphi_m)(x)|^2 d^\nu x$$

Donde φ_m está definido por (2 . 28) Para llegar a está ultima igualdad hemos usado que e^{-itH_0} conmuta con traslaciones.

Y ahora, usando el lema 1.2.7 obtenemos que

$$\int d^\nu x \cdot F\{y, < -n-m+at, x\} |(e^{-itH_0} \varphi_m)(x)|^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu x \, F\{y, < -n-m+at, x\} |(e^{-it(P_2^2/2 + \dots + P_\nu^2/2)} e^{-itP_1^2/2} \varphi_m)(x)|^2$$

$$= \| F\{y_1 < -n-m+at, x\} e^{-itP_\perp^2} e^{-itP_i^2/2} \varphi_m \|^2$$

$$= \| e^{-itP_\perp^2/2} F\{y_1 < -n-m+at, x\} e^{-itP_i^2/2} \varphi_m \|^2$$

$$= \| F\{y_1 < -n-m+at, x\} e^{-itP_i^2/2} \varphi_m \|^2$$

Finalmente, de esto último y el lema 1.2.11 obtenemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} dt \| F\{y_1 < n+at, x\} e^{-itH_0} (H_0+1) \xi_{ij} \Phi_n \| \leq \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{C\, dt}{(1+t)(n-1+a}$$

$$= 0$$

Y así se obtiene el lema ▲

LEMA 1.2.13 $\lim_{n\to+\infty} \left[\sup_{t>0} \| F\{B_{n+at} x\} e^{\mp itH_0} \Phi_n (i, {}^{out}_{in}) \| \right.$

DEMOSTRACION : Este lema se deduce de los siguientes hechos:

Notemos que $\Phi_n(i, {}^{out}_{in})$ tienen las mismas propiedades utilizadas en los lemas anteriores. Es decir, podemos sustituir (H_0+1) por 1, sin que perdamos las propiedades de $(H_0+1)\ \Phi_n(i, {}^{out}_{in})$ utilizadas en los lemas 1.2.6 - 1.2.12

Por (2 . 24), es suficiente con demostrar que para cada i, j

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\sup_{t>0} \| F\{y \cdot f_{ij} < n+at, x\} e^{\mp itH_0} F_a(C_{12n,i}) \xi_{ij} (\pm k) \phi_n \| \right]$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\sup_{t>0}\|F\{B_{n(at)},x\}\, e^{\mp itH_0}\, \xi_{ij}(\pm k)\,\Phi_n\|\right]=0$$

Y así se concluye la demostración . ▲

LEMA 1.2.14 Sea $\varphi\in\mathcal{H}$, entonces los operadores de onda $s-\lim_{t\to\mp\infty} e^{itH}e^{-itH_0}$ existen.

DEMOSTRACION : Puesto que $e^{itH}e^{-itH_0}$ es uniformemente acotado para $t\in\mathbb{R}$, es suficiente con demostrar que $s-\lim_{t\to\mp\infty} e^{itH}e^{-itH_0}$ existen en un conjunto denso de $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R}^\circ)$. Por ejemplo,

$$\{\varphi\in\mathcal{H}\mid \hat{\varphi}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^\circ) \text{ y } \operatorname{supp}\hat{\varphi}\subset\{k\mid 0<\delta\le|k|\}\}$$

y .

Para φ de está forma, tenemos que, $\varphi\in D(H_0)=D(H)$

. Entonces, $e^{itH}e^{-itH_0}\varphi$ es fuertemente diferenciable, Y por lo tanto, $\frac{d}{dt}e^{itH}e^{-itH_0}\varphi$

$$= i\,e^{itH}\,V\,e^{-itH_0}\varphi$$

Entonces, para $|t|>|s|$

Y usando el mismo argumento que en el lema 1.2.12 para cambiar de ejes, quedamos reducidos a demostrar que

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\sup_{t>0} \| F\{ y_1 < n \pm at, x\} e^{\mp itH_0} F_a(C_{12n,i}) \xi_{ij}(\pm k) \Phi_n \| \right]$$

Y ahora usando el lema 1.2.7 obtenemos que para $\pm t > 0$

$$\| F\{ y_1 < n \pm at, x\} e^{\mp itH_0} F_a(C_{12n,i}) \xi_{ij}(\pm k) \Phi_n \|$$

$$= \| F\{ y_1 < n \pm at, x\} e^{\mp itP_1^2/2} F_a(C_{12n,i}) \xi_{ij}(\pm k) \Phi_n \|$$

$$\leq \sum_{m=0}^{+\infty} \| F\{ y_1 < n \pm at, x\} e^{-itP_1^2/2} F_a(C_m) \xi_{ij}(\pm k) \Phi_n \|$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \| F\{ y_1 < -n-m \pm at, x\} e^{-itP_1^2/2} \varphi'_{m\pm} \|$$

Donde $\varphi'_{m\pm}(x) := F_a(C_m)(x + a_m^{(n)}) (\xi_{ij}(\pm k) \Phi_n)(x + a_m^{(n)})$

Y por un lema análogo al lema 1.2.11 para las funciones $\varphi'_{m\pm}$ obtenemos que para $t > 0$

$$\| F\{ B_{n \pm at}, x\} e^{\mp itH_0} \xi_{ij}(\pm k) \Phi_n \| \leq \frac{C'}{(1+t)(n-1+at)^{1/2}}$$

$$\| e^{itH} e^{-itH_0}\varphi - e^{isH} e^{-isH_0}\varphi \| = \| \int_s^t e^{i\tau H} V e^{-i\tau H_0}\varphi \, d\tau \|$$

$$\leq \int_{|s|}^{|t|} \| e^{i\tau H} V e^{-i\tau H_0}\varphi \| \, d\tau$$

$$= \int_{|s|}^{|t|} \| V e^{-i\tau H_0}\varphi \| \, d\tau$$

Entonces, para ver que $s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0}$ existen es suficiente con demostrar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \| V e^{-it H_0} \varphi \| \, dt < +\infty$$

Entonces, si $\operatorname{Supp} \hat{\varphi} \subset \{ k \mid |k| \geq \delta \}$ tomemos

$$\| V e^{-itH_0} \varphi \| \leq \| V (H_0 + \mathbb{1})^{-1} \| \, \| F\{ |y| \leq \delta |t|/2 , x \} e^{-itH_0} (H_0+\mathbb{1}) \varphi$$

$$+ \| V (H_0+\mathbb{1})^{-1} F\{ B^c_{\delta|t|/2} , x \} \| \, \| (H_0 + \mathbb{1}) \varphi \|$$

$$= \| V (H_0 + \mathbb{1})^{-1} \| \, \| F\{ |y| \leq \delta |t|/2 , x \} e^{-itH_0} (H_0+\mathbb{1}) \varphi \|$$

$$+ \| (H_0 + \mathbb{1}) \varphi \| \, h(\delta |t|/2)$$

donde h es la función que satisface (2.5). Entonces, el primer término está en L^1 por el lema (XIX) Mientras que el segundo está también por (2.5).

Y esto concluye la demostración. ▲

LEMA 1.2.15 $$\lim_{n\to+\infty} \|(\Omega^- - 1)\,\Phi_n(i,out)\| = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \|(\Omega^+ - 1)\,\Phi_n(i,in)\| = 0$$

DEMOSTRACION : Como $\Phi_n(i,out) \in D(H_0) = D(H)$, entonces

$$\frac{d}{dt}\, e^{itH} e^{-itH_0}\,\Phi_n(i,out) = i\, e^{itH}\, V\, e^{-itH_0}\,\Phi_n(i,out)$$. Y

$$\|(\Omega^- - 1)\,\Phi_n(i,out)\| = \|i\int_0^{+\infty} dt\, e^{itH}\, V\, e^{-itH_0}\,\Phi_n(i,out)\|$$

$$\leq \int_0^{+\infty} dt\, \|V e^{-itH_0}\,\Phi_n(i,out)\|$$

$$\leq \int_0^{+\infty} dt\, \|V(H_0+1)^{-1}\|\, \|F\{B_{n+at}, X\}\, e^{-itH_0}(H_0+1)\,\Phi_n(i,out)\|$$

$$+ \int_0^{+\infty} dt\, \|V(H_0+1)^{-1} F\{B^c_{n+at}, X\}\|\, \|e^{-itH_0}(H_0+1)\,\Phi_n(i,out)\|$$

$$= \|V(H_0+1)^{-1}\| \int_0^{+\infty} dt\, \|F\{B_{n+at}, X\}\, e^{-itH_0}(H_0+1)\,\Phi_n(i,out)\|$$

$$+ \|(H_0+1)\,\Phi_n(i,out)\| \int_0^{+\infty} dt\, h(n+at) \to 0 \quad n\to+\infty$$

El primer término tiene a cero por el lema 1.2.12 mientra que el segundo por (2.5). Para $\Phi_n(i, in)$ se hace de manera análoga. ▲

Finalmente damos el ssiguiente lema que nos permitirá demostrar el teorema enunciado. Este lema es simplemente una recopilación de lo antes hecho.

LEMA 1.2.16 (El Principio de Descomposición de Enss).

Sea ψ un vector en el subespacio de continuidad de H, tal que para algún $0 < c < d < +\infty$ $P([c,d])\psi = \psi$. Entonces, existe una suceción $\{\tau_n\}$ con $\tau_n \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$ tal que si $\psi_n := e^{-i\tau_n H}\psi$, es posible descomponer con

$$\psi_n = \psi_{n,\omega} + \psi_{n,in} + \psi_{n,out}$$

a) $\|\psi_{n,\omega}\| \to 0 \quad n \to +\infty$

b) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|(H_0 + 1)\psi_{n,\substack{in\\out}}\| < +\infty$

c) $\|(\Omega^- - 1)\psi_{n,out}\| \to 0 \quad \|(\Omega^+ - 1)\psi_{n,in}\| \to 0$

$n \to +\infty$

d) $\left[\sup_{t>0} \|F\{B_{n\,a\,t},\chi\} e^{\mp itH_0}\psi_{n\,\substack{out\\in}}\|\right] \to 0 \quad n \to +\infty$

para algún $a > 0$, el cual depende de c y d solamente.

DEMOSTRACION : Sea ψ un vector como en las hipótesis. Tomemos τ_n la sucección de la definición 1.2.2. Tomemos a de tal forma que se cumpla (2.15). Y tomemos φ una función en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$ que cumpla (2.15a). Si Φ_n está definido por (2.17), ponemos $\psi_{n,\omega} := \psi_n - \sum_i F_a(C_{12n,i})\Phi_n$

Por (2.20)

obtenemos la afirmación (a) del lema. Y definimos

$$\Psi_{n,out} := \sum_i F_a(C_{12n,i})\, \chi_i(k)\, \Phi_n$$

$$\Psi_{n,in} := \sum_i F_a(C_{12n,i})\, \chi_i(-k)\, \Phi_n$$

Por (2.21) obtenemos que

$$\Psi_{n,w} + \Psi_{n,in} + \Psi_{n,out} = \Psi_n - \sum_i F_a(C_{12n,i})\, \Phi_n + \sum_i F_a(C_{12n,i})\, [\chi_i(k) + \chi_i(-k)]$$

$$= \Psi_n$$

Para demostrar b) de este lema, recordemos que en la demostración del lema 1.2.6 Se vio que

$$\text{supp } F_a(C_{12n,i})\, \xi_{ij}(\pm k)\, \Phi_n \subset \{ k \mid \| a \le |k| \le b \}$$

Y por (2.24), obtenemos que $\text{sop } \widehat{\Psi_{n,\substack{out\\in}}} \subset \{ k \mid \| a \le |k| \le b \}$

Entonces,

$$\| (H_0 + 1)\, \Psi_{n,\substack{out\\in}} \| \le (1 + b^2/2)\, \| \Psi_{n,\substack{out\\in}} \|$$

$$\le \sum_{i,j} (1 + b^2/2)\, \| \xi \|_1\, \| \xi_{ij} \|_\infty\, \| \varphi \|$$

$$< +\infty$$

c) y d) son una consecuencia inmediata de los lemas 1.2.15 y 1.2.13, respectivamente. Esto prueba el lema ▲

Por último, damos la demostración del teorema 1.

DEMOSTRACION : Ahora demostraremos la completud de los operadores de onda.

Vemos que Ran $\Omega^- = \mathcal{H}_{cont}(H)$. La demostración para Ω^+ es similar.

Supongamos que $\psi' \in$ Ran P cont $(H) \equiv \mathcal{H}$ cont (H),

con ψ' ortogonal al rango de Ω^-. Si ψ' no es el vector cero, necesariamente existen $0 < c < d < +\infty$ tales que si $\psi := P([c,d])\psi'$, entonces $\psi \neq 0$ y además $P([c,d])\psi = \psi \in$ Ran P cont (H) $\cap (\text{Ran}\ \Omega^-)^{\perp}$

Entonces, podemos aplicar el lema 1.2.15 Y por lo tanto

$$\|\psi\|^2 = \| e^{-i\tau_n H}\psi \| = \|\psi_n\|^2$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (\psi_n, \psi_n - \Omega^+\psi_{n,in} - \Omega^-\psi_{n,out})$$

$$+ \lim_{n\to+\infty} (\psi_n, \Omega^+\psi_{n,in} + \Omega^-\psi_{n,out})$$

$$\leq \lim_{n\to+\infty} \|\psi_n\| \; \|\psi_n - \Omega^+\psi_{n,in} - \Omega^-\psi_{n,out}\|$$

$$+ \lim_{n\to+\infty} (\psi_n, \Omega^+\psi_{n,in}) + \lim_{n\to+\infty} (\psi_n, \Omega^-\psi_{n,out})$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \|\psi\| \; \|\psi_n - \Omega^+\psi_{n,in} - \Omega^-\psi_{n,out}\|$$

$$+ \lim_{n\to+\infty} \left[(\psi_n, \Omega^+\psi_{n,in}) + (\psi_n, \Omega^-\psi_{n,out}) \right]$$

El tercer término es idénticamente igual a cero debido a que $\psi \in (R_{an}\,\Omega^-)^{\perp}$

y porque $e^{i\tau_n H}\,\Omega^- = \Omega^-\,e^{i\tau_n H_0}$

El primer término está mayorizado por

$$\|\psi\| \left\{ \|\psi_{n,\omega}\| + \|(1-\Omega^+)\psi_{n,in}\| + \|(1-\Omega^-)\psi_{n,out}\| \right.$$

el cual tiende a cero por a) y c) del lema 1.2.15.

Para el segundo término, hacemos lo siguiente:

Usando nuevamente que $e^{i\tau H}\,\Omega^{\pm} = \Omega^{\pm}\,e^{-i\tau H_0}$

$$|((\Omega^+)^*\psi_n, \psi_{n,in})| = |((\Omega^+)^*\,e^{-i\tau_n H}\psi, \psi_{n,in})|$$

$$= |(e^{-i\tau_n H_0}(\Omega^+)^*\psi, \psi_{n,in})|$$

$$= |((\Omega^+)^*\psi, e^{i\tau_n H_0}\psi_{n,in})|$$

$$\leq |(F\{B^c_{n+u\tau_n},x\}(\Omega^+)^*\psi, e^{i\tau_n H_0}\psi_{n,in})|$$

$$+ |((\Omega^+)^*\psi, F\{B_{n+u\tau_n},x\}\,e^{i\tau_n H_0}\psi_{n,in})|$$

$$\leq \|F\{B^c_{n+u\tau_n},x\}(\Omega^+)^*\psi\|\,\|\psi_{n,in}\|$$

$$+ \|(\Omega^+)^*\psi\|\,\|F\{B_{n+u\tau_n},x\}\,e^{i\tau_n H_0}\psi_{n,in}\|$$

Entonces, conforme $n \to +\infty$ el primer término obviamente decrece puesto que $\sup_n \|\varphi_{n,i,n}\| < +\infty$

Para el segundo término sólo hay que aplicar el lema 1.2.15 d.

Así obtenemos que $\Psi \equiv \bar{0}$, lo cual es una contradicción.

Entonces Ran $\Omega^- = \mathcal{H}_{cont}(H) = \operatorname{Ran} P_{cont}(H)$. Por otro lado, por teoría general sabemos que Ran $\Omega^- \subset \mathcal{H}_{ac}(H)$. Como además, Ran $P_{ac}(H) \oplus \operatorname{Ran} P_{sc}(H)$

$$\equiv \mathcal{H}_{ac}(H) \oplus \mathcal{H}_{sc}(H) = \mathcal{H}_{cont}(H) \equiv \operatorname{Ran} P_{cont}(H)$$

se desprende que Ran $\Omega^- = \mathcal{H}_{ac}(H)$ y Ran $P_{sc}(H) = \bar{0}$. Para Ω^+ se hace de manera análoga. Esto prueba la completud de los operadores de onda y la ausencia de espectros singularmente continuo. Esto, junto con los lemas 1.2.14 y 1.2.5 demuestran todas las afirmaciones del Teorema 1.

Aquí termina la demostración del teorema y del capítulo 2.

En los siguientes capítulos iremos considerando casos en los cuales ya no está más definido como un operador simétrico.

CAPITULO III

COMPLETES ASINTOTICA

A) RESULTADOS DE DAVIES

B) RESULTADOS DE PERRY

En este capítulo, demostraremos los teoremas ya vistos en el capítulo anterior con algunas modificaciones (Davies <17>) :

i) Se elimina el uso del Teorema de Wiener y del lema 1.2.2

ii) Se da otra prueba del Principio de Descomposición de Enss

iii) Se debilitan las hipótesis sobre H-Ho.

Más adelante daremos otra prueba completamente distinta de este teorema bajo las mismas hipótesis.

TEOREMA 2.1

Sea H un operador autoadjunto y $H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$ definidos de $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^\nu)$ en $\mathcal{H}$, tales que

a) H y Ho son mutuamente subordinados

b) La función monótona decreciente y acotada h, definida por

$$h(R) := \| (H+i)^{-\alpha} V (H_0+i)^{-\beta} F\{ |x| \geq R \} \|$$

es tal que cumple (1.5), para ciertos $\alpha, \beta \geq 1$.
(Por $(H+i\mathbb{1})^{-\alpha} V (H_0+i\mathbb{1})^{-\beta}$ entendemos al operador acotado $(H+i\mathbb{1})^{-\alpha+1}(H_0+i\mathbb{1})^{-\beta} - (H+i\mathbb{1})^{-\alpha}(H_0+i\mathbb{1})^{-\beta+1}$).
Entonces, H no tiene espectro singularmente continuo, $\sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(H_0) = [0,+\infty)$, los operadores de onda existen y son completos. El espectro puntual de H se puede acumular solamente en el origen.

Nota 10

Queremos comparar las hipótesis de este teorema con las hipótesis del teorema 1. Por la nota 6, los operadores considerados en este teorema son mutuamente subordinados. Tomando $\alpha = \beta = 1$, vemos que esos operadores cumplen la hipótesis b) de este teorema, notando que para esos operadores $(H+i\mathbb{1})^{-1} - (H_0+i\mathbb{1})^{-1} = -(H+i\mathbb{1})^{-1} V (H_0+i\mathbb{1})^{-1}$ y recordando lo dicho en la nota 7. Entonces este teorema cubre los casos del teorema 1.

Por otro lado, las ideas utilizadas para la demostración del teorema 2.1 son esencialmente las de Enss.

Empezaremos por dar un lema que utilizaremos repetidamente en esta sección:

LEMA 2.1.1 Si $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ es una sucesión de vectores en $\mathcal{H}$ tal que $(H+i\mathbb{1})^{-\gamma}\varphi_n$ converge en norma para algún $\gamma > 0$ y si $\|F(H)\varphi_n\|$ está uniformemente acotado, para alguna función F tal que $|F| \geq 1$ y $|F(x)| \to +\infty$ cuando $|x| \to +\infty$, entonces la sucesión $\{\varphi_n\}$ converge en norma.

DEMOSTRACION:

Pongamos $\varphi_{n,m} = \varphi_n - \varphi_m$

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|^2 = \|\varphi_{n,m}\|^2 = \left(F(H)^{-1}\varphi_{n,m}, [F(H)^{-1}]^{*}\varphi_{n,m} \right)$$

$$= \left(F(H)^{-1}\varphi_{n,m}, \bar{F}(H)\varphi_{n,m} \right)$$

$$\leq \|F(H)^{-1}\varphi_{n,m}\| \; \|\bar{F}(H)\varphi_{n,m}\|$$

Puesto que $\|\tilde{F}(H)\varphi_{n,m}\| = \|F(H)\varphi_{n,m}\| \leq 2M \quad \forall\ n,m$ y para cierta $M < +\infty$, es suficiente con ver que $\|F(H)^{-1}\varphi_{n,m}\|$

Sea $\varepsilon > 0$, y tomemos C_ε tal que $1 \leq C_\varepsilon |F(\lambda)|^2 |\lambda + i|^{-2\gamma} + \varepsilon |F(\lambda)|^2 \quad \forall \lambda$.

Como $|F(\lambda)| \to +\infty$ y $|F(\lambda)| \geq 1$, siempre es posible encontrar C_ε.

Por lo tanto, $\dfrac{1}{|F(\lambda)|^2} \leq \dfrac{C_\varepsilon}{|\lambda+i|^{2\gamma}} + \varepsilon$ y por cálculo espectral

$$\|F(H)^{-1}\varphi_{n,m}\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^{-2}\, d(\varphi_{n,m}, P_\lambda \varphi_{n,m})$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C_\varepsilon}{|\lambda+i|^{2\gamma}}\, d(\varphi_{n,m}, P_\lambda \varphi_{n,m}) + \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} d(\varphi_{n,m}, P_\lambda \varphi_{n,m})$$

$$\leq C_\varepsilon \|(H+i\mathbb{1})^{-\gamma}\varphi_{n,m}\|^2 + 2\varepsilon M$$

Como $(H+i\mathbb{1})^{-\gamma}\varphi_{n,m} \to 0 \quad n \to +\infty$ obtenemos que $\varphi_{n,m} = \varphi_n - \varphi_m$ tiende a cero cuando $n,m \to +\infty$. Por lo que $\{\varphi_n\}$ converge.

LEMA 2.1.2 $\qquad G_{ess}(H) = G_{ess}(H_0)$

DEMOSTRACION

Por la proposición 1.1.2 es suficiente demostrar que $(H+i\mathbb{1})^{-1} - (H_0+i\mathbb{1})^{-1}$ es compacto. Para ver esto, notemos que del lema 1.1.4, $F\{B_{R,x}\}(H_0+i\mathbb{1})^{-1}$ es compacto para $R < +\infty$. Entonces, $F\{B_{R,x}\}P_0(I)$ es compacto para todo intervalo acotado I. Como $(H+i\mathbb{1})^{-\alpha} V (H_0+i\mathbb{1})^{-\beta}$ es acotado, concluimos que $(H+i\mathbb{1})^{-\alpha} V (H_0+i\mathbb{1})^{-\beta} F\{B_{R,x}\} P_0(I)$ es compacto.

Entonces, por la hipótesis b) del teorema 2.1,

$$\|(H+i\mathbb{1})^{-\alpha} V (H_0+i\mathbb{1})^{-\beta} P_0(I) - (H+i\mathbb{1})^{-\alpha} V (H_0+i\mathbb{1})^{-\beta} F\{B_{R,x}\} P_0(I)\|$$

$$\leq \|(H+i\mathbb{1})^{-\alpha} V (H_0+i\mathbb{1})^{-\beta} F\{B_R^c, x\}\| \to 0 \quad R \to +\infty$$

Se desprende de aquí que $(H+i\mathbb{1})^{-\alpha} V (H_o+i\mathbb{1})^{-\beta}$ es compacto. Y de la ---
identidad

$$P(I)(H-H_o)P_o(I) = (H+i\mathbb{1})^{\alpha} P(I)(H+i\mathbb{1})^{-\alpha}(H-H_o)(H_o+i\mathbb{1})^{-\beta}$$
$$P_o(I)(H_o+i\mathbb{1})^{\beta} = (H+i\mathbb{1})^{\alpha} P(I)\{(H+i\mathbb{1})^{-\alpha} V (H_o+i\mathbb{1})^{-\beta} P_o(I)\}$$
$$(H_o+i\mathbb{1})^{\beta} P_o(I)$$

Por lo tanto $P(I)(H-H_o)P_o(I)$ es compacto $\forall$ intervalo acotado I. Por-
La nota 4, se deduce que $P(I)[(H+i\mathbb{1})^{-1}-(H_o+i\mathbb{1})^{-1}]P_o(I)$ es compacto.
Además, por la hipótesis a) del teorema 2.1, H y Ho son mutuamente subordinados. Por
esto y la proposición 1.1.1 se obtiene que

$$(H+i\mathbb{1})^{-1}-(H_o+i\mathbb{1})^{-1} \quad \text{es compacto} \qquad (3.1)$$

Antes de enunciar el siguiente lema, recordemos que como H y Ho son mutuamente su---
bordinados existen dos parejas de funciones tales que cada una de ellas son mayores o ---
iguales que 1, tienden al infinito cuando $|x| \to +\infty$, son localmente acotadas y ade-
más $\|F_1(H)G_1(H_o)^{-1}\| + \|G_2(H_o)F_2(H)^{-1}\| < +\infty$

Unicamente por simplificar la notación, supondremos que $F = F_1 \equiv F_2$, $G = G_1 \equiv G_2$

LEMA 2.1.3 $\quad \Omega^{\pm} := \underset{t \to \mp\infty}{s\text{-}\lim}\ e^{itH} e^{-itH_o}$ existen.

DEMOSTRACION

Puesto que $\|e^{itH}e^{-itH_o}\| = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, es suficien-
te con demostrar que el límite existe para un conjunto denso de vectores en $\mathcal{H}$. Por --
ejemplo, $\mathcal{D} := \{\varphi \mid \hat{\varphi} \in C_o^{\infty}$, $\operatorname{supp}\hat{\varphi} \subset [k|c \le k \le c^{-1}$ para algún $0 < c < 1]\}$

Solo hacemos el caso cuando $t \to -\infty$. Para el otro caso solo hay que cambiar los sig-
nos.

Si $\varphi \in \mathcal{D}$, sean F y G las funciones que cumplen la hipótesis a) del teorema 2.1.

Entonces, $\|F(H)\, e^{itH}\, e^{-itH_0}\varphi\| \leq \|F(H)\, e^{itH_0}\varphi\| \leq \|F(H)\, G(H_0)^{-1}\|\, \|G(H_0)\varphi\|$

Por el lema 2.1.1, solo tenemos que demostrar que $(H+i\mathbb{1})^{-\alpha}\, e^{itH}\, e^{-itH_0}\varphi$ converge cuando $t \to -\infty$. Fijóndonos que $\varphi \in D(H_0)$ y que $(H+i\mathbb{1})^{-\alpha} e^{itH} e^{-itH_0}\varphi = e^{itH}(H+i\mathbb{1})^{-\alpha} e^{-itH_0}\varphi$ la derivada en sentido fuerte existe.

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}(H+i\mathbb{1})^{-\alpha}\, e^{itH} e^{-itH_0}\varphi = \frac{d}{dt}\, e^{itH}(H+i\mathbb{1})^{-\alpha} e^{-itH_0}\varphi$$

$$= i\, e^{itH}\, H(H+i\mathbb{1})^{-\alpha} e^{-itH_0}\varphi - i\, e^{itH}(H+i\mathbb{1})^{-\alpha} H_0\, e^{-itH_0}\varphi$$

$$= i\, e^{itH}\left[H(H+i\mathbb{1})^{-\alpha} - (H+i\mathbb{1})^{-\alpha} H_0\right] e^{-itH_0}\varphi$$

$$= i\, e^{itH}\left[H(H+i\mathbb{1})^{-\alpha}(H_0+i\mathbb{1})^{-\beta} - (H+i\mathbb{1})^{-\alpha} H_0 (H_0+i\mathbb{1})^{-\beta}\right] \times (H_0+i\mathbb{1})^{\beta} e^{-itH_0}\varphi$$

$$= i\, e^{itH}\left[(H+i\mathbb{1})^{-\alpha+1}(H_0+i\mathbb{1})^{-\beta} - (H+i\mathbb{1})^{-\alpha}(H_0+i\mathbb{1})^{-\beta+1}\right] \times (H_0+i\mathbb{1})^{\beta} e^{-itH_0}\varphi$$

$$= i\, e^{itH}(H+i\mathbb{1})^{-\alpha}\, V (H_0+i\mathbb{1})^{-\beta}\, e^{-itH_0}(H_0+i\mathbb{1})^{\beta}\varphi$$

Para ver que $(H+i\mathbb{1})^{-\alpha} e^{itH} e^{-itH_0}\varphi$ es de Cauchy, solo hay que demostrar que $\|(H+i\mathbb{1})^{-\alpha} e^{itH} e^{-itH_0} - (H+i\mathbb{1})^{-\alpha} e^{isH} e^{-isH_0}\| \leq \int_{-\infty}^{0} \|(H+i\mathbb{1})^{-\alpha} V (H_0+i\mathbb{1})^{-\beta} e^{-itH_0} g\|\, dt$

con $g = (H_0+i\mathbb{1})^{\beta}\varphi$, el cual sigue siendo un elemento de $\mathcal{D}$.

Si $\operatorname{supp}\hat{g} \subset \{ k \mid 0<c \leq |k| \leq c^{-1}\}$, entonces

$$\|(H+i\mathbb{1})^{-\alpha} V (H_0+i\mathbb{1})^{-\beta} e^{-itH_0} g\| \leq \|(H+i\mathbb{1})^{-\alpha} V (H_0+i\mathbb{1})^{-\beta} F\{B_{c|t|/2}, x\} e^{-itH_0} g\|$$

$$+ \|(H+i\mathbb{1})^{-\alpha} V (H_0+i\mathbb{1})^{-\beta} F\{B^c_{c|t|/2}, x\} e^{-itH_0} g\|$$

$$\leq \|(H+i\mathbb{1})^{-\alpha} V (H_0+i\mathbb{1})^{-\beta}\|\, \|F\{B_{c|t|/2}, x\} e^{-itH_0} g\|$$

$$+ \|(H+i\mathbb{1})^{-\alpha} V (H_0+i\mathbb{1})^{-\beta} F\{B^c_{c|t|/2}, x\}\|\, \|g\|$$

$$= h(0)\,\| F\{B_{c|t|/2}, x\}\, e^{-itH_0} g\| + h(c|t|/2)\,\|g\|$$

El segundo término está en L^1, por la hipótesis b) y el primero por lema (xx)

Como en la demostración del teorema 1, el resultado básico - para lograr la prueba del teorema 2.1, es el principio de descomposición de Enss. Antes de enunciar y de dar éste, necesitaremos de algunas definiciones.

Tomemos funciones continuas Φ a soporte compacto y disjunto del origen con $0 \leq \Phi \leq 1$, de la siguiente forma:

$$\Phi_c(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \text{ y } 3c \leq \sqrt{2x} \leq (3c)^{-1} \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ ó } 2c \geq \sqrt{2x},\ (2c)^{-1} \leq \sqrt{2x} \end{cases} \tag{3.2}$$

Para algún $0 < c < 1/3$

LEMA 2.1.4

Si $\|\varphi_n\| = 1$, $\varphi_n \xrightarrow{w} 0$ y $\Phi_c(H)\varphi_n = \varphi_n$ Para alguna función Φ_c, entonces existe una subsucesión $n(m) \to +\infty$ tal que

$$\| F\{B_{2cm}, x\}\varphi_{n(m)}\| \to 0 \tag{3.3}$$

$$\| F\{ |z| \leq 2c \text{ ó } |z| \geq (2c)^{-1}, k\}\varphi_{n(m)}\| \to 0 \tag{3.4}$$

DEMOSTRACION

Por el lema 1.1.4, para cada $m \in \mathbb{N}$, $F\{B_{2mc}, x\}\, F(H_0)^{-1}$ es compacto. Y puesto que $F(H_0)^{+1} G(H)^{-1}$ y $G(H)\,\Phi_c(H)$ son operadores - acotados, entonces

$$F\{B_{2mc}, x\}\,\Phi_c(H)$$

es compacto. Por otra parte, $\varphi_n \xrightarrow{w} 0$. Por lo tanto, para m fijo,

$$\| F\{B_{2mc}, x\}\varphi_n\| = \| F\{B_{2mc}\}\,\Phi_c(H)\varphi_n\| \to 0 \quad n \to +\infty$$

Podemos consecuentemente encontrar $\varphi_{n(m)}$ con $n(m) \to +\infty$ cuando $m \to +\infty$ tal que $\| F\{B_{2mc}, x\}\varphi_{n(m)}\| \to 0$ cuando $m \to +\infty$

Ahora bien, por (3.2) y de la demostración de la proposición 1.1.2, sabemos que $\Phi_c(H) - \Phi_c(H_0)$ es compacto. Entonces, como $\varphi_{n(m)} \xrightarrow{w} 0$ cuando $m \to \infty$, obtenemos que

$$\| F\{ |k| \le 2c \text{ ó } |k| \ge (2c)^{-1}, k \} \varphi_{n(m)} \|$$

$$= \| F\{ |k| \le 2c \text{ ó } |k| \ge (2c)^{-1}, k \} \Phi_c(H) \varphi_{n(m)} \|$$

$$= \| F\{ |k| \le 2c \text{ ó } |k| \ge (2c)^{-1}, k \} [\Phi_c(H) - \Phi_c(H_0)] \varphi_{n(m)} \|$$

$$\le \| (\Phi_c(H) - \Phi_c(H_0)) \varphi_{n(m)} \| \to 0$$

donde hemos usado que $\operatorname{supp} \Phi_c(|k|^2/2) \subset \{ k \mid 2c \le |k| \le (2c)^{-1} \}$

Y así se concluye la demostración del lema. ▲

Sea ahora η una función en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$ tal que $\|\eta\| = 1$

$$\hat{\eta} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu) \text{ con } \operatorname{supp} \hat{\eta} \subset \{ k \mid |k| \le c/8 \} \tag{3.5}$$

DEFINAMOS

$$\eta_{xk}(q) = e^{ik(q-x)} \eta(q-x) \tag{3.6}$$

Sea $A(\cdot)$ la medida POV sobre $\Omega = \mathbb{R}^{2\nu}$ dada por η_{xk} :

$$A(E) = (2\pi)^{-\nu} \int_E |\eta_{xk}\rangle\langle \eta_{xk}| \, dx\, dk \tag{3.7}$$

(ver Ejemplo IV)

LEMA 2.1.5 Sea $\mathbb{R}^\nu \times C = \{ (x,k) \mid |k| \le c \text{ ó } |k| \ge c^{-1} \}$ (3.8)

y $B_{mc} \times \mathbb{R}^\nu = \{ (x,k) \mid |x| \le cm \}$ (3.9)

Entonces,

$$\| A(\mathbb{R}^\nu \times C) \varphi_{n(m)} \| \to 0 \quad m \to +\infty \tag{3.10}$$

$$\| A(B_{mc} \times \mathbb{R}^\nu) \| \to 0 \quad m \to +\infty \tag{3.11}$$

donde $A(\cdot)$ es el operador definido por (3.7)

DEMOSTRACION

Para demostrar (3.10), sabemos que por (XXVIII)

$$[A(\mathbb{R}^\nu \times C)\psi]^\wedge(k) = \int_C d^\nu z \; |\hat{\eta}(k-z)|^2 \, \hat{\psi}(k \tag{3.12}$$

Además para cada $k \in \mathbb{R}^\nu$,

$$\int_C |\hat{\eta}(k-z)| \, d^\nu z \leq \|\eta\|^2 = 1$$

y por (3.5) y (3.8) obtenemos que

$$\operatorname{supp} \int_C |\hat{\eta}(k-z)|^2 d^\nu z \subset \operatorname{supp} \hat{\eta} + \operatorname{supp} F\{C, k\} \subset \{k \mid |k| \leq 2c \text{ ó } |k| \geq$$

Y en consecuencia, para cada $k \in \mathbb{R}^\nu$,

$$\int_C |\hat{\eta}(k-z)|^2 d^\nu z \leq F\{|z| \leq 2c \text{ ó } |z| \geq 2c^{-1}, k\} \tag{3.13}$$

Por (3.12) y (3.4)

$$\|(A(\mathbb{R}^\nu \times C)\varphi_{n(m)}\| = \|[A(\mathbb{R}^\nu \times C)\varphi]^\wedge\|$$

$$\leq \|F\{|z| \leq 2c \text{ ó } |z| \geq (2c)^{-1}, k\} \, \hat{\varphi}_{n(m)}\|$$

Y así obtenemos (3.10).

Por otra parte, por (XXIX)

$$[A(B_{mc} \times \mathbb{R}^\nu)\psi](x) = \int_{B_{mc}} |\eta(x-y)|^2 d^\nu y \; \psi(x) \tag{3.14}$$

Como $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$, entonces, si $x \geq 2cm$

$$\int_{B_{mc}} |\eta(x-y)|^2 d^\nu y = \int_{B_{mc}} \frac{|x-y| \, |\eta(x-y)|^2}{|x-y|} d^\nu y$$

$$\leq \frac{1}{cm} \int_{B_{mc}} |x-y| \, |\eta(x-y)|^2 d^\nu y$$

$$\leq \frac{1}{cm} \| |x| \, |\eta|^2 \|_1$$

Y por lo tanto, para cada $x \in \mathbb{R}^\nu$

$$\int_{B^\circ_{mc}} |\eta(x-y)|^2 d^\nu y \leq F\{B_{2mc}, x\} + K/m$$, donde K constante.

De (3.14) y (3.3) obtenemos (3.11)

$$\| A(B_{mc} \times \mathbb{R}^\nu) \varphi_{n(m)} \| \leq \| F\{B_{2mc}, x\} \varphi_{n(m)} \| + \frac{K}{m} \|\varphi_{n(m)}\| .$$

$$= \| F\{B_{2mc}, x\} \varphi_{n(m)} \| + K/m \to 0 \quad m \to +\infty$$

Sea

$$E_m = \{ (x,k) \mid |x| \geq mc \ y \ c \leq |k| \leq c^{-1} \ y \ x\cdot k \geq 0 \} \tag{3.15}$$

$$F_m = \{ (x,k) \mid |x| \geq mc , \ c \leq |k| \leq c^{-1} \ y \ x\cdot k \leq 0 \} . \tag{3.16}$$

Para tales conjuntos demostraremos el siguiente lema.

LEMA 2.1.6 Sean $A(E_m)$ y $A(F_m)$ los operadores definidos por (3.7). Entonces existe una constante K tal que

$$\| (H_0 + i\mathbb{1})^\beta A(E_m) \| \leq K \tag{3.17}$$

$$\| (H_0 + i\mathbb{1})^\beta A(F_m) \| \leq K \tag{3.18}$$

DEMOSTRACION

Tomemos $\phi \in D(H_0^\beta)$, entonces

$$| (\phi, (H_0 + i\mathbb{1})^\beta A(E_m) \psi) | = | ((H_0 - i\mathbb{1})^\beta \phi , A(E_m) \psi) |$$

$$= \left| \left(\frac{1}{2\pi}\right)^\nu \int_{E_m} d^\nu x \, d^\nu k \ \langle (H_0 - i\mathbb{1})^\beta \phi, \eta_{xk} \rangle \langle \eta_{xk}, \psi \rangle \right|$$

$$\leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^\nu \int_{E_m} d^\nu x \, d^\nu k \ | \langle \phi, (H_0 + i\mathbb{1})^\beta \eta_{xk} \rangle \langle \eta_{xk}, \psi \rangle |$$

$$\leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2} \Big\{ \int_{E_m} d^\nu x \, d^\nu k \ | \langle \hat{\phi} , [(H_0 + i\mathbb{1})^\beta \eta_{xk}]^\wedge \rangle |^2$$

$$\times \|\psi\|$$

Por otra parte, como $[(H_0+i\mathbb{1})^{\beta}\eta_{xk}]^{\wedge}(p) = (p^2/2+i1)^{\beta} e^{-ix\cdot p}\,\hat{\eta}(p-k)$

$\Longrightarrow$

$$(\hat{\phi}, [(H_0+i\mathbb{1})^{\beta}\eta_{xk}]^{\wedge}) = \int_{\mathbb{R}^{\nu}} d^{\nu}p\, \bar{\hat{\phi}}(p)\, e^{-ixp}(p^2/2+i\mathbb{1})^{\beta}\hat{\eta}(p-k) \qquad (3.19)$$

Por (3.15), vemos que $E_m \subset \{ (x,k) \mid c \leq |k| \leq c^{-1} \}$

Por (3.12), obtenemos que

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu}\int_{E_m} |\langle \hat{\phi}, [(H_0+i\mathbb{1})^{\beta}\eta_{xk}]^{\wedge}\rangle|^2 d^{\nu}x\, d^{\nu}k \equiv \int_{E_m} d^{\nu}x\, d^{\nu}k \left| \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2}\int_{\mathbb{R}^{\nu}} d^{\nu}p\right.$$

$$\left. e^{-ix\cdot p}\,\bar{\hat{\phi}}(p)\,(p^2/2+i1)^{\beta}\hat{\eta}(p-k)\right|^2.$$

(Por Plancherel)

$$= \int_{c\leq|k|\leq c^{-1}} d^{\nu}k \int_{\mathbb{R}^{\nu}} d^{\nu}p\, |\bar{\hat{\phi}}(p)|^2\, |(p^2/2+i1)|^{2\beta}\, |\hat{\eta}(p-k)|^2 \qquad (3.20)$$

Por (3.5), la región de integración en la variable p está contenida en

$R \equiv \{ p \mid |p| \leq c^{-1} + c/8 \}$. Entonces, (3.20) es menor o igual que

$$\sup_{p\in R} |(p^2+i1)|^{2\beta}\, \|\hat{\eta}\|^2\, \|\hat{\phi}\|^2$$

Entonces, para $K = \{ \sup_{p\in R} |(p^2/2+i1)|^{2\beta} \}$ se tiene que $|\langle \phi, (H_0+i\mathbb{1})^{\beta} A(E_m)\psi\rangle| \leq K\|\psi\|\,\|\phi\|$

Y esto prueba (3.17) . Notando que solamente utilizamos en la demostración el hecho que

$E_m \subset \{(x,k) \mid c \leq |k| \leq c^{-1}\}$ obtenemos que para la misma constante se cumple (3.18) . ▲

LEMA 2.1.7 a) $\forall\, n\in\mathbb{N}\ \exists\ C_n$ tal que

$$\| F\{ B_{\frac{m+t}{8}c,\,x}\}\, e^{-itH_0}\,(H_0+i\mathbb{1})^{\beta} A(E_m) \| \leq C_n\,(m+t)^{-n} \quad \forall\ t\geq 0 \ \text{y}\ m\geq 1 \qquad (3.21)$$

b) $\forall\ n\in\mathbb{N}$, C_n' tal que

$$\| F\{ B_{\frac{m+|t|}{8}}, x \} e^{-itH_0} (H_0+i\mathbb{1})^{\beta} A(F_m) \|$$

$$\leq C'_n (m+|t|)^{-n} \quad \forall\, t \leq 0,\ m \geq 1 \qquad (3.22)$$

DEMOSTRACION

La prueba la haremos para (3.21) Para demostrar (3.22) las estimaciones se hacen igual.

Tomemos $\varphi \in D(H_0^{\beta})$, $\psi \in \mathcal{H}$. Entonces

$$\langle \varphi, (H_0+i\mathbb{1})^{\beta} A(E_m)\psi) = ((H_0 - i\mathbb{1})^{\beta}\varphi, A(E_m)\psi)$$

$$= \int_{E_m} \langle (H_0-i\mathbb{1})^{\beta}\varphi, \eta_{xk} \rangle \langle \eta_{xk}, \psi \rangle\, d^{\nu}x\, d^{\nu}k$$

$$= \int_{E_m} \langle \varphi, (H_0+i\mathbb{1})^{\beta}\eta_{xk} \rangle \langle \eta_{xk}, \psi \rangle\, d^{\nu}x\, d^{\nu}k$$

Por otra parte, notemos que

$$[(H_0+i\mathbb{1})^{\beta}\eta_{xk}](p) = \sum_s C_s\, k^s\, e^{ikp} e^{-ikx} \eta_s(p-x)$$

donde η_s es una función en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{\nu})$, y $|s| \leq 2\beta$.

Ahora sea $\phi \in \mathcal{H}$, entonces

$$\left| \int_{E_m} \langle \phi, (H_0+i\mathbb{1})^{\beta}\eta_{xk} \rangle \langle \eta_{xk}, \psi \rangle\, d^{\nu}k\, d^{\nu}x \right| \leq \sum_s |C_s| \int_{E_m} |k|^{|s|}$$

$$|\langle \phi, e^{ikp}\eta_s(p-x)\rangle| \, |\langle \eta_{xk}, \psi\rangle|\, d^{\nu}x\, d^{\nu}k$$

(Usando (3.15))

$$\leq C^{-2\beta} \sum_s |C_s| \int_{E_m} |\langle \phi, e^{ikp}\eta_s(p-x)\rangle| \, |\langle \eta_{xk}, \psi\rangle|\, d^{\nu}x\, d^{\nu}k$$

$$\leq C^{-2\beta} \sum_s |C_s| \left\{ \int_{E_m} |(\phi, e^{ikp}\eta_s(p-x))|^2 d^{\nu}x\, d^{\nu}k \right\}^{1/2} \left\{ \int_{E_m} |(\eta_{xk}, \psi)|^2 d^{\nu}x\, d^{\nu}k \right\}^{1/2}$$

(Plancherel)

$$\leq C^{-2\beta} \sum_s |C_s| \, \|\phi\| \, \|\eta_s\| \, \|\psi\| \leq K' \|\phi\| \, \|\psi\|$$

Por lo tanto, usando densidad, obtenemos que $\forall\, m \in \mathbb{N}$, $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$.

$$(\varphi, (H_0 + i\Delta)^\beta A(E_m)\psi) = \int_{E_m} d^\nu x\, (\varphi, (H_0 + i\Delta)^\beta \eta_{xk})(\eta_{xk}, \psi) \qquad (3.23)$$

Ahira bien, tomemos $\quad B_m(t) = F\{ B_{\frac{m+t}{8}c}, y \} e^{-itH_0} (H_0 + i\Delta)^\beta$

Entonces, por (3.23)

$$\| B_m(t) A(E_m)\varphi \|^2 = (e^{itH_0} B_m(t) A(E_m)\varphi, (H_0 + i\Delta)^\beta A(E_m)\varphi)$$

$$= \int_{E_m} \langle e^{itH_0} B_m(t) A(E_m)\varphi, (H_0 + i\Delta)^\beta \eta_{xk} \rangle \langle \eta_{xk}, \varphi \rangle d^\nu x d^\nu k$$

$$= \int_{E_m} \langle B_m(t) A(E_m)\varphi, B_m(t)\eta_{xk} \rangle \langle \eta_{xk}, \varphi \rangle d^\nu x\, d^\nu k$$

$$\leq \| B_m(t) A(E_m) \| \, \|\varphi\|^2 \int_{E_m} \| B_m(t)\eta_{xk} \| d^\nu x\, d^\nu k$$

(Usando (3.17))

$$\leq K \|\varphi\|^2 \int_{E_m} \| B_m(t)\eta_{xk} \| d^\nu x\, d^\nu k \qquad (3.24)$$

Entonces,

$$\| F\{ B_{\frac{m+t}{8}c}, y \} e^{-itH_0} (H_0 + i\Delta)^\beta A(E_m) \| \leq K^{1/2} \left\{ \int_{E_m} \| B_m(t)\eta_{xk} \| d^\nu x d^\nu k \right\} \qquad (3.25)$$

$$\int_{E_m} \| B_m(t)\eta_{xk} \| d^\nu x\, d^\nu k = \int_{E_m} \left\{ \int_{\mathbb{R}^\nu} |(B_m(t)\eta_{xk})(y)|^2 d^\nu y \right\}^{1/2}$$

$$= \int_{E_m} d^\nu x\, d^\nu k \left\{ \int_{|y| \leq \frac{m+t}{8}c} |(e^{-itH_0}(H_0 + i\Delta)^\beta \eta_{xk})(y)|^2 d^\nu y \right\}^{1/2}$$

$$\leq \int_{E_m} d^\nu x\, d^\nu k\, (m+t)^{\nu/2} \sup_{|y| \leq \frac{m+t}{8}c} |(e^{-itH_0}(H_0 + i\Delta)^\beta \eta_{xk})(y)| \qquad (3.26)$$

Ahora queremos aplicar el lema (XX). Primero vemos que

$$[(H_0+i\mathbb{1})^{\beta}\eta_{xk}(y)](y) = e^{-ikx}[(H_0+i\mathbb{1})^{\beta}e^{iky}\eta(y-x)] = e^{-ikx}\sum_s c_s k^s e^{iky}\eta_s(y-x),$$

donde η_s es una función en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$ y $|s|\le 2\beta$. En consecuencia, usando (3.15)

$\forall\ n\in\mathbb{N}$ y $\forall\ (x,k)\in E_m$

$$\|\,|y-x|^n(H_0+i\mathbb{1})^{\beta}\eta_{xk}\| \le \sum_s |c_s|\,|k|^s\,\|\,|y-x|^n\eta_s(y-x)\|$$

$$\le \sum_s |c_s|\,c^{-2\beta}\,\|\,|y-x|^n\eta_s(y-x)\|$$

$$\le C'_\gamma \tag{3.27}$$

ya que η_s es una función en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$.

Además, $\operatorname{supp}[(H_0+i\mathbb{1})^{\beta}\eta_{xk}(y)]^{\wedge} = \operatorname{supp}[(p^2/2+i1)^{\beta}e^{-ix\cdot p}\hat{\eta}(p-k)]$

$$= \operatorname{supp}\hat{\eta}(p-k) \subseteq \{p\,|\,|p-k|\le c/8\}$$

En consecuencia, si $p\in \operatorname{supp}\hat{\eta}(p-k)$ y $(x,k)\in E_m$

$$|y-x-kt| \geq |x+kt| - |y| = \{|x|^2+2(x,k)t+|k|^2t^2\}^{1/2} - |y|$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\{|x|+|k|\,|t|\} - |y|$$

$$\geq \frac{1}{4}|x| + \frac{1}{4}|x| + \frac{1}{2}c\,t - |y|$$

$$\geq \frac{1}{4}|x| + \left[\frac{1}{4}mc + \frac{1}{2}ct\right] - |y|$$

$$\Rightarrow |y-x-pt| \geq \frac{1}{4}|x| + \left[\frac{1}{4}mc + \frac{3}{8}t\right] - |y|$$

Entonces, para $|y|\le \frac{m+t}{8}c$, $t\ge 0$, $m\ge 1$ y $(x,k)\in E_m$ se cumplen las hipótesis del lema (XX) y por lo tanto para cada $n\in\mathbb{N}$, $(x,k)\in E_m$, $t\ge 0$ $m\ge 1$

$$|(e^{-itH_0}(H_0+i\mathbb{1})^{\beta}\eta_{xk}(y))| \le C''_\gamma(|x|+|t|)^{-r}$$

$$\le C'''_\gamma |x|^{-r/2}(m+|t|)^{-r/2}$$

Sustituyendo esta desigualdad en (3.26) para $\gamma = \nu + 4n$, y de (3.25) obtenemos -- (3.21) . ▲

LEMA 2.1.8

$$\int_0^{+\infty} \| (H+i\mathbb{1})^{-\alpha} V e^{-itH_0} A(E_m) \| dt \to 0 \quad (3.28)$$

cuando $m \to +\infty$

$$\int_0^{+\infty} \| (H+i\mathbb{1})^{-\alpha} V e^{itH_0} A(F_m) \| dt \to 0 \quad (3.29)$$

cuando $m \to +\infty$

DEMOSTRACION

$$\| (H+i\mathbb{1})^{-\alpha} V e^{-itH_0} A(E_m) \| \leq \| (H+i\mathbb{1})^{-\alpha} V (H_0+i\mathbb{1})^{-\beta}$$

$$\times F\{ B_{\frac{m+t}{8}c}, y \} e^{-itH_0} (H_0+i\mathbb{1})^{\beta} A(E_m) \|$$

$$+ \| (H+i\mathbb{1})^{-\alpha} V (H_0+i\mathbb{1})^{-\beta} . F\{ B^c_{\frac{m+t}{8}}, y \} e^{-itH_0} (H_0+i\mathbb{1})^{\beta} A(E_n) \|$$

$$\leq 2 \| F\{ B_{\frac{m+t}{8}c}, y \} e^{-itH_0} (H_0+i\mathbb{1})^{\beta} A(E_m) \|$$

$$+ \; K \; h\left(\frac{m+t}{8}c\right) .$$

donde K es el mismo que en (3.17) . El primer término tiende a cero en L^1 si usamos --- (3.21) para n =2. El segundo término también por la hipótesis b) de este teorema. Para - probar (3.29), se hace análogamente. ▲

Ahora enunciaremos y demostraremos el principio de descompo sición de Enss con el cual demostraremos el Teorema 2.1.

LEMA 2.1.9 (PRINCIPIO DE DESCOMPOSICION DE ENSS)

Si $\|\varphi_n\| = 1$, $\Phi_c(H)\varphi_n = \varphi_n$ y $\varphi_n \xrightarrow{w} 0$, entonces existe una subsucesión $n(m) \to +\infty$ y una descomposición

$$\varphi_{n(m)} = \varphi_m^{in} + \varphi_m^{out} + \varphi_m^{\omega} \qquad (3.29a)$$

tal que

a) $\| G(H_0)\varphi_m^{in} \| \leq a \quad \| G(H_0)\varphi_m^{out} \| \leq a$ (3.30)

b) $\|\varphi_m^{\omega}\| \to 0 \quad m \to +\infty$ (3.31)

c) $\int_0^{+\infty} \| (H+i\mathbb{1})^{-\alpha} V e^{-itH_0} \varphi_m^{out} \| \to 0$ (3.32)

d) $\int_0^{+\infty} \| (H+i\mathbb{1})^{-\alpha} V e^{itH_0} \varphi_m^{in} \| \to 0$ (3.33)

Si $\varphi_n = e^{-iHn}$ entonces,

$$\| \varphi_m^{in} \| \to 0 \quad m \to +\infty \qquad (3.34)$$

DEMOSTRACION

Tomemos $\varphi_{n(m)}$ la subsucesión del lema 2.1.4. Y definamos,

$$\varphi_m^{out} := A(E_m)\varphi_{n(m)} \qquad (3.35)$$

$$\varphi_m^{in} := A(F_m)\varphi_{n(m)} \qquad (3.36)$$

$$\varphi_m^{\omega} := \varphi_{n(m)} - A(E_m)\varphi_{n(m)} - A(F_m)\varphi_{n(m)}$$

Donde E_m y F_m están definidos en (3.15) y (3.16).

Por ser $A(\cdot)$ una medida a valores en los operadores positivos obtenemos que $\varphi_m^{\omega} = \varphi_{n(m)} - A(E_m)\varphi_{n(m)} - A(F_m)\varphi_{n(m)}$

$$= A\left[(E_m \cup F_m)^c\right]\varphi_{n(m)} = A\left[\{(x;k) \in \mathbb{R}^{2\nu} \mid |x| \leq mc,\ |k| \leq c \text{ ó } |k| \geq c^{-1}\}\right] \varphi_{n(m)}$$

$$A\,[B_{mc} \times C]\,\varphi_{n(m)}$$

Entonces $\|\varphi_m^{\omega}\|^2 = \|A[B_m \times C]\varphi_{n(m)}\|^2 \leq \|A^{1/2}[B_m \times C]\|^2$

$$\|A^{1/2}[B_m \times C]\varphi_{n(m)}\|^2 \leq \|A[B_m \times C]\|\,(\varphi_{n(m)}, A[B_m \times C]\varphi_{n(m)})$$

$$\leq (\varphi_{n(m)}, A[B_m \times \mathbb{R}^{\nu}]\,\varphi_{n(m)}) \to 0 \qquad m \to +\infty$$

Por (3.11) . Para obtener (3.30), notemos que por (3.12)

$$A(E_m) \leq A\,[\{(x,k) \mid |k| \leq c^{-1}\}] \leq F\{B_{2c^{-1}}, k\}$$

y puesto que

$$|(\varphi, A(E_m)F\{B^c_{2c^{-1}}, k\}\varphi)|$$

$$\leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu} \int_{E_m} d^{\nu}x\, d^{\nu}k\, |\langle\varphi, \eta_{xk}\rangle\langle\eta_{xk}, F\{B^c_{2c^{-1}}, k\}\varphi\rangle|$$

$$\leq \|\varphi\| \left\{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu} \int_{E_m} |\langle[F\{B^c_{2c^{-1}}, k\}\varphi]^{\wedge}, \widehat{\eta_{xk}}\rangle|^2 d^{\nu}x\, d^{\nu}k\right\}^{1/2}$$

Y como $\widehat{\eta_{xk}}(p) = e^{-ix\cdot p}\,\hat{\eta}(p-k)$, entonces,

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu} \int_{E_m} |\langle[F\{B^c_{2c^{-1}}, k\}\varphi]^{\wedge}, \hat{\eta}_{xk}\rangle|^2 d^{\nu}x\, d^{\nu}k$$

$$= \int_{E_m} d^{\nu}x\, d^{\nu}k\, \left|\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2} \int_{\mathbb{R}^{\nu}} d^{\nu}p\, e^{-ixp}\, F\{B^c_{2c^{-1}}, p\}\, \overline{\hat{\varphi}(p)}\,\hat{\eta}(p-k)\right|^2$$

$$\leq \int_{c \leq |k| \leq c^{-1}} d^{\nu}k \int_{\mathbb{R}^{\nu}} d^{\nu}p\, F\{B^c_{2c^{-1}}, p\}\, |\hat{\varphi}(p)|^2\, |\hat{\eta}(p-k)|^2$$

$$= \int_{c \leq |k| \leq c^{-1}} d^{\nu}k \int_{|p| \geq 2c^{-1}} d^{\nu}p\, |\hat{\varphi}(p)|^2\, |\hat{\eta}(p-k)|^2 \equiv 0$$

Esto último se debe a (3.5). Por lo tanto, $F\{B^c_{2c'}, R\} A(E_m) \equiv 0$

y $F\{B_{2c'}, R\} A(E_m) = A(E_m)$. Entonces

$$\| G(H_o) \varphi^{out}_m \| = \| G(H_o) F\{B_{2c'}, R\} A(E_m) \varphi_{n(m)} \|$$

$$\leq \| G(H_o) F\{B_{2c'}, R\} \|_\infty \| A(E_m) \varphi_{n(m)} \|$$

$$\leq \| G(H_o) F\{B_{2c'}, R\} \|_\infty$$

y análogamente para φ^{in}_m , entonces se cumple (3.30) para $a \geq \| G(H_o) F\{B_{2c'}, R\} \|_\infty$

(3.31) y (3.32) son una consecuencia inmediata del lema 2.1.8 y de ---

(3.35) y (3.36).

Finalmente, si $\varphi_{n(m)} = e^{-iHn(m)} \varphi$ con ------

$\Phi_c(H) \varphi = \varphi$,

$$\| A(F_m) e^{-iHn(m)} \varphi \| \leq \| A(F_m) e^{-iH_o(n(m))} \varphi \| + \| A(F_m) \{ e^{-iHn(m)} - e^{-iH_o n(m)} \} \varphi \| \leq \| A(F_m) e^{-iH_o n(m)} F\{ B_{\frac{m+n(m)}{8}c}, y \} \|$$

$$+ \| A(F_m) \| \, \| F\{ B^c_{\frac{m+n(m)}{8}c}, y \} \varphi \| + \| A(F_m) \{ e^{-iHn(m)} - e^{-iH_o n(m)} \} \varphi \| = \| F\{ B_{\frac{m+n(m)}{8}c}, y \} e^{iH_o n(m)} A(F_m) \|$$

$$+ \| A(F_m) \| \, \| F\{ B^c_{\frac{m+n(m)}{8}c}, y \} \varphi \| +$$

$$\| A(F_m) \{ e^{-iHn(m)} - e^{-iH_o n(m)} \} \varphi \|$$

El primer término decrece por (3.22) . El segundo obviamente decrece ya que $\| A(F_m) \| \leq 1$. Mientras que el tercer término está dominado por

$$\| (H-i\delta)^{\alpha} \varphi \| \int_0^{+\infty} \| A(F_m) e^{-itH_o} V (H-i\delta)^{-\alpha} \| dt$$

$$= \| (H-i\delta)^{\alpha} \varphi \| \int_0^{+\infty} \| (H+i\delta)^{-\alpha} V e^{+itH_o} A(F_m) \| dt \to 0 \quad m \to +\infty$$

por el lema 2.1.8 . Para ver esto último, notemos que $\varphi \in D(H)$, entonces,

$$A(F_m) \{ e^{-iHn(m)} - e^{-iH_on(m)} \} \varphi = A(F_m) e^{-iH_on(m)} \{ e^{iH_on(m)} e^{-iHn(m)} - 1 \} \varphi$$

$$= A(F_m) e^{-iH_on(m)} \{ e^{iH_on(m)} e^{-iHn(m)} - 1 \} \varphi = A(F_m)(H_o-i\delta)^{\beta} e^{-iH_on(m)}$$

$$\times \{ e^{iH_on(m)} (H_o-i\delta)^{-\beta} e^{-iHn(m)} - (H_o-i\delta)^{-\beta} \} \varphi = A(F_m) (H_o-i\delta)^{\beta} e^{-iH_on(m)}$$

$$\times \int_0^{n(m)} \frac{d}{ds} \{ e^{iH_os} (H_o-i\delta)^{-\beta} e^{-iHs} - (H_o-i\delta)^{-\beta} \} \varphi \, ds = i A(F_m) (H_o-i\delta)^{\beta} e^{-iH_on(m)}$$

$$\times \int_0^{n(m)} e^{iH_os} [H_o (H_o-i\delta)^{-\beta} - (H_o-i\delta)^{-\beta} H] e^{-iHs} \varphi \, ds = i A(F_m) (H_o-i\delta)^{\beta}$$

$$\times e^{-iH_on(m)} \int_0^{n(m)} e^{iH_os} \{ (H_o-i\delta)^{-\beta+1} (H-i\delta)^{-\alpha} - (H_o+i\delta)^{-\beta} (H-i\delta)^{-\alpha+1} \} e^{-iHs} (H-i\delta)^{\alpha} \varphi \, ds$$

Del lema 2.1.6, sabemos que el operador $A(F_m)(H_o-i\delta)^{\beta}$ tiene una extensión a un operador acotado y por lo tanto, podemos introducirlo dentro de la integral.

$$\Rightarrow \qquad \| A(F_m) \{ e^{-iHn(m)} - e^{-iH_on(m)} \} \varphi \|$$

$$= \| \int_0^{n(m)} [(H_o+i\delta)^{\beta} A(F_m)]^{*} e^{-iH_o(n(m)-s)} \{ (H_o-i\delta)^{-\beta} (H-i\delta)^{-\alpha+1} - (H_o-i\delta)^{-\beta+1} (H-i\delta)^{-\alpha} \}$$

$$\times e^{-iHs} (H-i\delta)^{\alpha} \varphi \, ds \|$$

$$\leq \int_0^{n(m)} \| [(H_o+i\delta)^{\beta} A(F_m)]^{*} e^{-iH_o(n(m)-s)} \{ (H_o-i\delta)^{-\beta} (H-i\delta)^{-\alpha+1} - (H_o-i\delta)^{-\beta+1} \} \| ds$$

$$\times \| (H-i\delta)^{\alpha} \varphi \|$$

$$= \| (H-i\delta)^{\alpha} \varphi \| \int_0^{n(m)} \| [(H_o+i\delta)^{\beta} A(F_m)]^{*} \{ (H+i\delta)^{-\alpha} V (H_o+i\delta)^{-\beta} \}^{*} \| ds$$

$$= \| (H-i\delta)^{\alpha} \varphi \| \int_0^{n(m)} \| (H+i\delta)^{-\alpha} V (H_o+i\delta)^{-\beta} e^{iH_os} [H_o+i\delta]^{\beta} A(F_m) \| ds$$

$= \| (H-$

$$= \|(H-i\ell)^{\alpha}\varphi\| \int_0^{+\infty} \|(H+i\ell)^{-\alpha} V e^{iH_0 s} A(F_m)\| ds ,$$

Y con esto se demuestra el lema.

Solo nos resta probar el teorema 2.1. La demostración se sigue del lema precedente. △

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 2.1

Sean $P_{sc}(I)$ y $P_{p.p}(I)$ las proyecciones espectrales asociadas a los subespacios singularmente continuo y puramente puntual del intervalo I del operador H. Por el teorema espectral si $\sigma_{sc}(H) \neq \phi$ (vacío), entonces $+\infty =$ $\dim \operatorname{Ran} P_{sc}(I) =$. Y además, si existiera un punto de acumulación de los eigenvalores que no fuera el origen ó un eigenvalor de multiplicidad infinita, podríamos encontrar I disjunto del origen tal que $\dim \operatorname{Ran} P_{p.p}(H) = +\infty$. Tomando $\Phi_c \equiv 1$ sobre I , obtendríamos que el subespacio $\mathcal{L} = \{ f \in \mathcal{H}_{ac}(H)^{\perp} \mid \Phi_c(H) f = f \}$ tendría dimensión infinita. En consecuencia, es suficiente con demostrar que $\mathcal{L}$ es de dimensión finita para todas las Φ_c . Y esto lo haremos por contradicción. Tomemos una base ortonormal para $\mathcal{L}$. Esta base satisface las hipótesis del lema precedente. Sea $\{\varphi_n\}$ tal base. Como

$$\frac{d}{dt} (H+i\ell)^{-\alpha} (e^{itH} e^{-itH_0} - 1) = e^{itH} (H+i\ell)^{-\alpha} V e^{-itH_0}$$

donde la derivada es en sentido fuerte y para $\varphi \in D(H_0)$. Entonces, por (3.17) --- $\varphi_m^{out} \in D(H_0)$ y en consecuencia

$$\|(H+i\ell)^{-\alpha} (\Omega_- - 1) \varphi_m^{out}\| = \| \int_0^{+\infty} e^{itH} (H+i\ell)^{-\alpha} V e^{-itH_0} \varphi_m^{out} dt \|$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \|(H+i\ell)^{-\alpha} V e^{-itH_0} \varphi_m^{out}\| dt \longrightarrow +\infty \qquad \text{por } (3.32)$$

Análogamente, $\| (H+i\mathbb{1})^{-\alpha} (\Omega_+ - \mathbb{1}) \varphi_m^{in} \| \to 0 \quad m \to +\infty$

Y ( )

$$\| (H+i\mathbb{1})^{-\alpha} \{ \Omega^- \varphi_m^{out} + \Omega_+ \varphi_m^{in} \} - (H+i\mathbb{1})^{-\alpha} \varphi_{n(m)} \|$$

$$\leq \| (H+i\mathbb{1})^{-\alpha} (\Omega^+ - \mathbb{1}) \varphi_m^{in} \| + \| (H+i\mathbb{1})^{-\alpha} (\Omega^- - \mathbb{1}) \varphi_m^{out} \| + \| \psi_m^{\omega} \| \to 0$$

Pero por otro lado $(H+i\mathbb{1})^{-\alpha} \{ \Omega^+ \varphi_m^{in} + \Omega^- \varphi_m^{out} \} \in \mathcal{H}_{ac}(H)$ y

$(H+i\mathbb{1})^{-\alpha} \varphi_{n(m)} \in \mathcal{H}_{ac}(H)^{\perp}$. En consecuencia

$$\| (H+i\mathbb{1})^{-\alpha} \{ \Omega^- \varphi_m^{out} + \Omega^+ \varphi_m^{in} \} - (H+i\mathbb{1})^{-\alpha} \varphi_{n(m)} \|$$

$$\geq \| (H+i\mathbb{1})^{-\alpha} \varphi_{n(m)} \| = \| (H+i\mathbb{1})^{-\alpha} \Phi_c(H) \varphi_{n(m)} \|$$

$$= \left\{ \int_{3c}^{(3c)^{-1}} \frac{|\Phi_c(\lambda)|^2}{|\lambda^2+1|^{\alpha}} \, d(\varphi_{n(m)}, P_\lambda \varphi_{n(m)}) \right\}^{1/2}$$

$$\geq \left\{ \int_{3c}^{(3c)^{-1}} \frac{1}{|\lambda^2+1|^{\alpha}} \, d(\varphi_{n(m)}, P_\lambda \varphi_{n(m)}) \right\}^{1/2} \geq |(3c)^{-1} + i\mathbb{1})|^{-\alpha}$$

Y así obtenemos una contradicción. Esto prueba que H no tiene espectro singularmente - continuo y que los eigenvalores so pueden acumular únicamente en el origen.

Para probar que los operadores de onda son completes, es su-- ficiente con probar que $W_{out}^{\pm} := \underset{t \to \mp\infty}{s\text{-}\lim} \, e^{-itH_0} e^{itH} P_{ac}(H)$ existen.

Probaremos que $W^+ f$ existen para un conjunto denso de -- vectores en $\mathcal{H}_{ac}(H)$. Por ejemplo $\{ f \in \mathcal{H}_{ac}(H) \mid \Phi_c(H) f = f \}$

Sea $\varphi_n = e^{-itH n} \frac{\varphi}{\|\varphi\|}$ con $\Phi_c(H)\varphi = \varphi$. Por el lema (XX)) $\varphi_n \xrightarrow{\omega} 0$.

Entonces, φ_n satisface las condiciones del lema precedente. Además para s, $t \geq n$,

$t = n + t_1, \quad s = n + s_1$

$$\| e^{itH_0} e^{-itH} \varphi - e^{isH_0} e^{-isH} \varphi \| = \| e^{iH_0(n+t_1)} e^{-iH(n+t_1)} \varphi - e^{iH_0(n+s_1)} e^{-iH(n+s_1)} \varphi \|$$

$$\leq \| e^{iH_0(n+t_1)} e^{-iH(n+t_1)} \varphi - e^{iH_0 n} e^{-iHn} \varphi \|$$

$$+ \| e^{iH_0(n+s_1)} e^{-iH(n+s_1)} \varphi - e^{iH_0 n} e^{-iHn} \varphi \|$$

$$\leq 2 \sup_{0 \leq t < +\infty} \| e^{iH_0(n+t)} e^{-iH(n+t)} \varphi - e^{iH_0 n} e^{-iHn} \varphi \|$$

$$= 2 \sup_{0 \leq t < +\infty} \| e^{itH_0} e^{-itH} \varphi_{n(m)} - \varphi_{n(m)} \| \, \|\varphi\|$$

$$= 2 \sup_{0 \leq t < +\infty} \| e^{-itH} \varphi_{n(m)} - e^{-itH_0} \varphi_{n(m)} \| \, \|\varphi\|$$

$$\leq 4 \|\varphi\| \, \|\varphi_m^{in}\| + 4 \|\varphi_m^{w}\| \, \|\varphi\|$$

$$+ 2 \sup_{0 \leq t < +\infty} \| e^{-itH} \varphi_m^{out} - e^{-itH_0} \varphi_m^{out} \|$$

Los dos primeros términos tienden a cero por (3.34) y (3.31) . Para el tercero, hacemos-lo siguiente:

De (3.30)

$$\| F(H) \{ e^{-itH} - e^{-itH_0} \} \varphi_m^{out} \| \leq \| F(H) e^{-itH} \varphi_m^{out} \| + \| F(H) e^{-itH_0} \varphi_m^{out} \|$$

$$= \| F(H) \varphi_m^{out} \| + \| F(H) G(H_0)^{-1} \| \, \| G(H_0) e^{-itH_0} \varphi_m^{out} \|$$

$$\leq 2 \| F(H) G(H_0)^{-1} \| \, \| G(H_0) \varphi_m^{out} \|$$

$$\leq 2 \| F(H) G(H_0)^{-1} \| \, a$$

Del lema 2.1.1 , es suficiente con demostrar que

$$\lim_{m \to +\infty} \sup_{0 \le t < +\infty} \| (H+i\mathbb{1})^{\alpha} \{ e^{-itH} - e^{-itH_0} \} \varphi_m^{out} \| = 0$$

y como

$$(H+i\mathbb{1})^{-\alpha} \{ e^{-itH} - e^{-itH_0} \} \varphi_m^{out} = -(H+i\mathbb{1})^{-\alpha} e^{-itH} \{ e^{itH} e^{-itH_0} - \mathbb{1} \} \varphi_m^{out}$$

$$= -i e^{-itH} \int_0^t \frac{d}{ds} \{ e^{iHs} (H+i\mathbb{1})^{-\alpha} e^{-iH_0 s} - (H+i\mathbb{1})^{-\alpha} \} \varphi_m^{out} = -i e^{-itH} \int_0^t (H+i\mathbb{1})^{-\alpha} e^{iHs} V e^{-iH_0 s} \varphi_m^{out} \, ds$$

donde hemos usado que $\varphi_m^{out} \in D(H_0)$.

$$\Rightarrow \| (H+i\mathbb{1})^{-\alpha} \{ e^{-itH} - e^{-itH_0} \} \varphi_m^{out} \| \le \int_0^t \| (H+i\mathbb{1})^{-\alpha} V e^{-iH_0 s} \varphi_m^{out} \| ds$$

$$\to 0$$

cuando m $\to \infty$ por (3.32) . Y con esto se prueba que W_{out}^{+} existe. Para W_{out}^{-} también es cierto cambiando los signos. Con ésto terminamos la demostración del teore-- ma 2.1

RESULTADOS DE PERRY

En esta sección presentaremos otra demostración del Teorema 2.1, bajo las mismas hipótesis. En primer lugar, se introducen las proyecciones espectrales P_- y P_+ asociadas con el operador $A = \frac{1}{2}(x \cdot k + k \cdot x)$. En lugar de usar el principio de descomposición, se hace uso de algunos argumentos de compacidad (Perry <6> , Mourre <5>).

TEOREMA 2.2

Sean $H_o = -\frac{1}{2}\Delta$ y H operadores autoadjuntos tales que:

a) $(H+iM)^{-1} - (H_o+iM)^{-1}$ es compacto.

b) Existen $\alpha, \beta > 1$ tales que la función h definida por $h(R) := \| (H+iM)^{-\alpha} V (H_o+iM)^{-\beta} F\{B_R^c \ni x\} \|$ satisface (2,5) (La condición de Enss). Entonces, los operadores de onda $\Omega^{\pm}(H, H_o)$ existen y son completos. H no tiene espectro singularmente continuo y el 0 es el único punto de acumulación posible de eigenvalores.

NOTA 12

Para ver la equivalencia de las hipótesis de este teorema con el de la sección anterior, vemos que la hipótesis b) del teorema 2.2, es la misma que la hipótesis b) del teorema 2.1. Para ver que la hipótesis a) de este teorema implica la del teorema 2.1 , sólo hay que recordar la proposición 1.1.1. Y por (3.1) , obtenemos la equivalencia de las proposiciones.

NOTA 13

Debido a la equivalencia de las hipótesis entonces $\Omega^{\pm}$ los operadores de onda existen. Esto lo asumiremos de antemano.

NOTA 13a

La hipótesis a) nos dice que $\sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(H_o) = [0, +\infty)$

En los teoremas anteriores , el resultado básico para demostrar los es el Principio de Descomposición de Enss. Ahora, el resultado básico será el siguiente lema:

LEMA 2.2.1 Sean P_+ y P_- las proyecciones espectrales sobre las partes positivas y negativas del operador $A = \frac{1}{2}(x\cdot k + k\cdot x)$. Entonces

$$(H+i\mathbb{1})^{-\alpha}(\Omega^{\mp} - \mathbb{1})\, g(H_0)\, P_{\pm}$$

son operadores compactos si $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$

Este lema lo demostraremos más adelante.

LEMA 2.2.2 Sean H y Ho dos operadores autoadjuntos tales que $(H+i\mathbb{1})^{-1}J - J(H_0+i\mathbb{1})^{-1}$ es compacto entonces para cada $t\in\mathbb{R}$, $(e^{itH}J\,e^{-itH_0} - J)\,P_0(I)$ es compacto donde I es un intervalo acotado.

DEMOSTRACION

Primero notemos que

$$\| (e^{itH}J\,e^{-itH_0} - J)\, P_0(I)\varphi \| = \| (J\,e^{-itH_0} - e^{-itH}J)\, P_0(I)\varphi \|$$

Entonces es suficiente con ver que $(e^{-itH}J - J\,e^{-itH_0})\,P_0(I)$ es compacto.

Tomemos $g_{I_1}(x)$ una función en $C_\infty(\mathbb{R})$ con $\|g_{I_1}\|_\infty \leq 1$ y tal que $g_{I_1} \equiv 1$ sobre $I_1 \supset I$. Entonces

$$\| (e^{-itH}J - J\,e^{-itH_0})\,P_0(I) - \{ e^{-itH} g_{I_1}(H)\,J - J\,e^{-itH_0} g_{I_1}(H_0) \}\,P_0(I) \|$$

$$= \| e^{-itH} (\mathbb{1} - g_{I_1}(H))\, J P_0(I) \|$$

$$= \| e^{-itH} (\mathbb{1} - g_{I_1}(H))\, [P(I_1) + P(I_1^c)]\, J\, P_0(I) \|$$

$$= \| e^{-itH} (\mathbb{1} - g_{I_1}(H))\, P(I_1^c)\, J\, P_0(I) \| \leq \| P(I_1^c)\, J\, P_0(I) \|$$

Por la proposición 1.1.2 $e^{-itH} g_{I_1}(H)\,J - J\,e^{-itH_0} g_{I_1}(H_0)$ es compacto y además H es J subordinado a Ho, por lo que $\| P(I_1^c)\, J\, P_0(I) \| \to 0$ cuando $I_1 \to +\infty$. Y así se demuestra el lema. $\blacktriangle$

NOTA 14

La misma hipótesis del lema implica que Ho es J^* subordinado a H y además que $e^{-itH_0} g(H_0) J^* - J^* e^{-itH} g(H)$ compacto para $g \in C_\infty$, por lo que se obtiene un resultado similar para J^*. Así obtenemos que $(e^{itH_0} J^* e^{-itH} - J^*) P(\Omega)$ es compacto.

LEMA 2.2.3 (TRANSFORMADA DE MELLIN)

Definamos $\#$ un mapeo sobre $C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu \setminus 0)$ como:

$$\# : C_0^\infty \to L^2(\mathbb{R} \times S^{\nu-1}, d\lambda\, d\tilde{\omega}) \quad \text{por}$$

$$\Phi^\#(\lambda, \omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} \frac{dr}{r}\, r^{\nu/2 - i\lambda}\, \tilde{\Phi}(r, \tilde{\omega}) \quad \text{entonces:}$$

a) $\#$ se extiende a un mapeo unitario de $L^2(\mathbb{R}^\nu, d^\nu p)$ a $L^2(\mathbb{R} \times S^{\nu-1}, d\lambda\, d\tilde{\omega})$

b) Para $\phi \in D(A)$ $\quad (A = 1/2\,(x \cdot k + k \cdot x))$

$$(A\phi)^\# = r\, \phi^\#(r, \tilde{\omega})$$

DEMOSTRACION

Sea $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu \setminus 0)$ entonces poniendo $r = e^t$

$$\phi^\#(\lambda, \tilde{\omega}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} \frac{dr}{r}\, r^{\nu/2}\, r^{-i\lambda}\, \tilde{\phi}(r, \tilde{\omega}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{\nu t/2} e^{-it\lambda} \tilde{\phi}(e^t, \tilde{\omega})$$

$$= [e^{\nu t/2} \tilde{\phi}(e^t, \tilde{\omega})]^\wedge(\lambda)$$

donde $\wedge$ denota la transformada de Fourier con respecto a la variable t.

Entonces, para $\phi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu \setminus 0)$

$$(\phi^\#, \psi^\#)_{L^2(\mathbb{R} \times S^{\nu-1}, d\lambda d\tilde{\omega})} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{S^{\nu-1}} d\tilde{\omega}\, \overline{\phi^\#(\lambda, \tilde{\omega})}\, \psi^\#(\lambda, \tilde{\omega})$$

$$= \int_{S^{\nu-1}} d\tilde{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, \overline{[e^{\nu t/2} \tilde{\phi}(e^t, \tilde{\omega})]^\wedge(\lambda)}\, [e^{\nu t/2} \tilde{\psi}(e^t, \tilde{\omega})]^\wedge(\lambda)$$

$$= \int_{S^{\nu-1}} d\tilde{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \overline{e^{\nu t/2} \tilde{\phi}(e^t, \tilde{\omega})}\, e^{\nu t/2} \tilde{\psi}(e^t, \tilde{\omega}) = \int_{S^{\nu-1}} d\tilde{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{\nu t}\, \overline{\tilde{\phi}(r, \tilde{\omega})}\, \tilde{\psi}(r, \tilde{\omega})$$

$$= \int_{S^{\nu-1}} d\tilde{\omega} \int_0^{+\infty} \frac{dr}{r}\, r^\nu\, \overline{\tilde{\phi}(r, \tilde{\omega})}\, \tilde{\psi}(r, \tilde{\omega}) = \int_0^{+\infty} r^{\nu-1} dr \int_{S^{\nu-1}} d\tilde{\omega}\, \overline{\tilde{\phi}(r, \tilde{\omega})}\, \tilde{\psi}(r, \tilde{\omega})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu x \quad \overline{\phi(x)}\, \psi(x) = (\phi, \psi)$$

Y entonces $\#$ se extiende a un mapeo unitario de $L^2(\mathbb{R}^\nu, d^\nu x)$ a $L^2(\mathbb{R} \times S^{\nu-1}; d\lambda\, d\omega)$

Esto prueba a).

Como $A = \frac{1}{2}(x \cdot k + k \cdot x)$, si $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu \setminus 0)$

$$A\phi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} x_j k_j \phi + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} k_j x_j \phi$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} x_j \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j} \phi\right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j}\right) x_j \phi$$

$$= -i \sum_{j=1}^{\nu} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \phi - i\, \nu/2\, \phi$$

Y en coordenadas polares, esto último se escribe como

$$-i\, r \frac{\partial}{\partial r} \tilde{\phi}(r, \tilde{\omega}) - i\, \nu/2\, \tilde{\phi}(r, \tilde{\omega})$$

En consecuencia, para $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu \setminus 0)$

$$(A\phi)^\#(\lambda, \tilde{\omega}) = -i \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} \frac{dr}{r}\, r^{\nu/2} r^{-i\lambda}\, r \frac{\partial}{\partial r} \tilde{\phi}(r, \tilde{\omega})$$

$$-\frac{i\nu}{2(2\pi)^{1/2}} \int_0^{+\infty} \frac{dr}{r}\, \tilde{\phi}(r, \tilde{\omega})\, r^{\nu/2} r^{-i\lambda} =$$

$$= -i \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \tilde{\phi}(r, \tilde{\omega})\, r^{\nu/2} r^{-i\lambda} \Big|_0^{+\infty} + i \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} dr\, (\nu/2 - i\lambda)\, r^{\nu/2 - 1} r^{-i\lambda} \tilde{\phi}(r,$$

$$-\frac{i}{2(2\pi)^{1/2}} \int_0^{+\infty} \frac{dr}{r}\, r^{\nu/2} r^{-i\lambda} \tilde{\phi}(r, \tilde{\omega})$$

$$= \frac{\lambda}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{+\infty} \frac{dr}{r}\, r^{\nu/2} r^{-i\lambda} \tilde{\phi}(r, \tilde{\omega}) \equiv \lambda\, \phi^\#(\lambda, \tilde{\omega})$$

Por lo tanto, $$(A\phi)^{\#} = \lambda\phi^{\#}(\lambda,\tilde{\omega}) \qquad (3.37)$$

para $\phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{\nu}\setminus 0)$. Pero además A es esencialmente autoadjunto en $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{\nu}\setminus 0)$

Y como $\#$ es un mapeo unitario, obtenemos que (3.37) es cierto para todo ϕ en D(A).

LEMA 2.2.4

Sea $g \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{+})$ con soporte contenido en el intervalo $[a^2/2, b^2/2]$. Tomemos $\delta = a/2$. Entonces si $|x| < \delta|t|$, para toda N existe C_N tal que

a) para $t > 0$,

$$\| P_- K_{x,t} \|_2 \leq C_{N,g}(1+|t|)^{-N+1/2} \qquad (3.38)$$

b) para $t < 0$,

$$\| P_+ K_{x,t} \|_2 \leq C_{N,g}(1+|t|)^{-N+1/2} \qquad (3.39)$$

donde

$$K_{x,t}(p) := e^{ip^2 t/2} e^{-ip\cdot x} \bar{g}(p^2/2) \qquad (3.40)$$

y P_+, P_- son las proyecciones espectrales asociadas al operador A sobre las partes positivas y negativas.

DEMOSTRACION

Puesto que por el teorema espectral, $(\varphi, A\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d(\varphi, P_\lambda \varphi)$

Y por el lema anterior $(\varphi, A\varphi) = (\varphi^{\#}, (A\varphi)^{\#}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d\lambda \int_{S^{\nu-1}} d\omega\, |\tilde{\varphi}(\lambda,\omega)|^2$

entonces vemos de aquí que el mapeo unitario $\#$ diagonaliza al operador A. En consecuencia, tenemos que

$$\| P_- k_{x,t} \| = \| F\{\mathbb{R}^-,\lambda\} K^{\#}_{x,t} \|_{L^2(\mathbb{R}\times S^{\nu-1},\, d\lambda\, d\omega)}$$

y donde

$$K^{\#}_{x,t}(\lambda,\tilde{\omega}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_0^{\infty} \frac{dr}{r}\, r^{\nu/2} e^{itr^2/2} e^{-ip\cdot x} e^{-i\lambda \log r} g(r^2/2)$$

Ahora aplicaremos el lema (XVIII). En este caso, K = soporte de $g \subset \mathbb{R}^+$

$\omega = |\lambda| + |t|$. Y las funciones en consideración son

$$f_\lambda = \frac{t r^2/2 - p \cdot x - \lambda \log r}{|\lambda| + |t|}$$

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial r}(r, \omega) = \left(t r - \lambda / r - \frac{\partial}{\partial r} p \cdot x\right)\left(|\lambda| + |t|\right)^{-1}$$

Y puesto que $p = r(\omega_1, \dots, \omega_\nu)$, con $(\omega_1, \dots, \omega_\nu)$ un vector unitario en la dirección de p, entonces $\frac{\partial f_\lambda}{\partial r} = \frac{t r - \lambda / r - \hat{p} \cdot x}{|\lambda| + |t|}$ donde $\hat{p}$ es un vector unitario en la dirección de p. Entonces, para $t > 0$, $\lambda < 0$ $|x| < a/_2 |t|$,

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial r} \geq \frac{t r - \lambda / r - |\hat{p} \cdot x|}{|\lambda| + |t|} \geq \frac{t r - \lambda / r - a/_2 t}{|\lambda| + |t|}$$

$$= \frac{t(r - a/_2) - \lambda / r}{|\lambda| + |t|}$$

$$\left(\operatorname{supp} g(r^2/2) \subset [a, b]\right)$$

$$\geq \min(a/_2, b^{-1})$$

Y para $\alpha \geq 2$, $\left|\frac{\partial^\alpha}{\partial r^\alpha} f_\lambda\right|$ es independiente de $\hat{p} = \omega$ y x, por lo que

$$\| f_\lambda \|'_{N+1, \infty, K} \leq C''_N$$

De esta forma, vemos que se cumplen las hipótesis del lema (XVIII) y por lo tanto para $\lambda < 0$, $t > 0$, todo $\omega \in S^{\nu-1}$, cada $n \in \mathbb{N}$

$$|K^{\#}_{x,t}(\lambda, \omega)| \leq C'_N (1 + |\lambda| + |t|)^{-N} \| r^{\nu/2-1} g(r^2/2) \|_{N, \infty} \leq C_{N,g} (1 + |\lambda| + |t|)^{-N}$$

Integrando esta desigualdad obtenemos la estimación en (3.38)

Para obtener (3.39) se procede en forma similar. ▲

LEMA 2.2.5 Sea $g \in C_0^\infty$ como en el lema anterior. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ y $t \in (0, \pm\infty)$

$$\| F\{ B_{a/2|t|}, x \} e^{-itH_0} g(H_0) P_\pm \| \leq C'_{N,g} (1+|t|)^{-N}$$

DEMOSTRACION

Usando que $\widehat{P_\pm \psi} = P_\mp \hat{\psi}$, y (3.40)

$$| (e^{-itH_0} g(H_0) P_\pm \psi)(x) |$$

$$= \left| \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2} \int d^\nu p \, e^{ip\cdot x} e^{-p^2 t/2} g(p^2/2) \widehat{P_\pm \psi}(p) \right|$$

$$= \left| \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2} \int d^\nu p \, e^{ip\cdot x} e^{-p^2 t/2} g(p^2/2) P_\mp \hat{\psi}(p) \right|$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2} | (K_{x,t}, P_\mp \hat{\psi}) | = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2} | (P_\mp K_{x,t}, \hat{\psi}) |$$

$$\leq \| P_\mp K_{x,t} \| \, \| \psi \|$$

Entonces, por (3.38) y (3.39) si $\pm t > 0$

$$\| F\{ B_{a/2|t|}, x \} e^{-itH_0} g(H_0) P_\pm \psi \|^2$$

$$= \int_{|x| < a/2|t|} | e^{-itH_0} g(H_0) P_\pm \psi |^2 d^\nu x$$

$$\leq \|\psi\|^2 \int_{|x| < a/2|t|} \| P_\mp K_{x,t} \|^2 d^\nu x$$

$$\leq \|\psi\|^2 C^2_{N,g} \int_{|x| < a/2|t|} (1 + |t|)^{-2N+1} d^\nu x$$

$$\leq \|\psi\|^2 C^2_{N,g} (a/2 |t|)^\nu (1 + |t|)^{-2N+1}$$

Tomando N suficientemente grande, obtenemos la afirmación del lema. ▲

Con ésto ya podemos demostrar el lema 2.2.1,

DEMOSTRACION

En sentido fuerte,

$$\frac{d}{dt}\,(H+i\mathbb{1})^{-\alpha}\,(e^{itH}e^{-itH_0}-\mathbb{1})\,g(H_0)\,P_\pm$$

$$= i\,e^{itH}\left[(H+i\mathbb{1})^{-\alpha}H-(H+i\mathbb{1})^{-\alpha}H_0\right]e^{-itH_0}g(H_0)\,P_\pm$$

$$= i\,e^{itH}\left[(H+i\mathbb{1})^{-\alpha}V(H_0+i\mathbb{1})^{-\beta}\right]e^{-itH_0}(H_0+i\mathbb{1})^{\beta}g(H_0)\,P_\pm$$

Entonces,

$$(H+i\mathbb{1})^{-\alpha}(e^{itH}e^{-itH_0}-\mathbb{1})\,g(H_0)\,P_\pm$$

$$= i\int_0^t ds\; e^{isH}\left[(H+i\mathbb{1})^{-\alpha}V(H_0+i\mathbb{1})^{-\beta}\right]e^{-isH_0}(H_0+i\mathbb{1})^{\beta}g(H_0)\,P_\pm$$

Como g es a soporte compacto, del lema 2.2.2 y de la hipótesis (a) del teorema 2.2 se desprende que $(H+i\mathbb{1})^{-\alpha}\;(e^{itH}e^{-itH_0}-\mathbb{1})g(H_0)P_\pm$ son operadores compactos. Por lo tanto, sólo nos resta ver que

$$\|(H+i\mathbb{1})^{-\alpha}V(H_0+i\mathbb{1})^{-\beta}e^{-isH_0}(H_0+i\mathbb{1})^{\beta}g(H_0)\,P_\pm\|\in L^1(0,\pm\infty)$$

Esta última expresión es menor o igual a

$$\|(H+i\mathbb{1})^{-\alpha}V(H_0+i\mathbb{1})^{-\beta}\|\;\|F\{B_{a/2|t|},x\}e^{-isH_0}(H_0+i\mathbb{1})^{\beta}g(H_0)P_\pm\|$$

$$+\;\|(H+i\mathbb{1})^{-\alpha}V(H_0+i\mathbb{1})^{-\beta}F\{B^{c}_{a/2|t|},x\}\|\;\|(H_0+i\mathbb{1})^{\beta}g(H_0)P_\pm\|$$

El segundo término está en L^1 por la hipótesis b) del teorema. Mientras que el primero por el lema 2.2.5.

Con esto podemos demostrar el teorema.

Ahora demostraremos el teorema 2.2.

DEMOSTRACION

Veamos primero que H no tiene espectro singularmente continuo. Sea $I = [a,b]$ y sea $P_{sc}(I)$ la proyección sobre la parte singularmente continua en I. Entonces, usando que $P_+ + P_- = \mathbb{1}$

$$g(H_0)(H-i\mathbb{1})^{-\alpha} P_{sc}(I) = (P_+ + P_-)\, g(H_0)(H-i\mathbb{1})^{-\alpha} P_{sc}(I)$$

$$= P_+ (g(H_0)(\mathbb{1} - (\Omega^-)^*)(H-i\mathbb{1})^{-\alpha} P_{sc}(I)$$

$$+ P_- g(H_0)(\mathbb{1} - (\Omega^+)^*)(H-i\mathbb{1})^{-\alpha} P_{sc}(I)$$

$$+ P_+ g(H_0)(\Omega^-)^*(H-i\mathbb{1})^{-\alpha} P_{sc}(I)$$

$$+ P_- g(H_0)(\Omega^+)^*(H-i\mathbb{1})^{-\alpha} P_{sc}(I)$$

Los dos primeros son compactos por el lema 2.2.1 , mientras que los otros dos son idénticamente nulos, ya que $(\Omega^{\pm})^* P_{sc}(I) \equiv 0$ por ser $\Omega^{\pm}$ isometrías parciales con rango contenido en $\mathcal{H}_{ac}(H)$.

$\Rightarrow$

$$g(H_0)(H-i\mathbb{1})^{-\alpha} P_{sc}(I) \text{ es compacto} \qquad (3.41)$$

Ahora escojamos g de tal manera que

$$g(x)(x-i)^{-\alpha} = 1 \quad \text{para } x \in I \quad \Rightarrow$$

$$P_{sc}(I) = g(H)(H-i\mathbb{1})^{-\alpha} P_{sc}(I)$$

$$= \{g(H) - g(H_0)\}(H-i\mathbb{1})^{-\alpha} P_{sc}(I) + g(H_0)(H-i\mathbb{1})^{-\alpha} P_{sc}(I)$$

Por (3.41) y la proposición 1.1.1, obtenemos que $P_{s.c.}(I)$ es compacto. Por ser $P_{s.c}(I)$ una proyección compacta, obtenemos que $\dim \operatorname{Ran} P_{sc}(I) < +\infty$

Y por lo tanto $\operatorname{Ran} P_{sc}(I) = \bar{0}$ ya que $\sigma_{ess}(H) \supset \sigma_{sc}(H)$

Ahora probamos que $\operatorname{Ran} \Omega^- = \mathcal{H}_{ac}(H)$

Sea $\phi' \in \mathcal{H}_{ac}(H)$ con $\phi' \in (\operatorname{Ran} \Omega^-)^{\perp}$ De la proposición 1.1.2 -

$\sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(H_0) = [0, +\infty)$, entonces podemos encontrar $\phi \in (\mathrm{Ran}\,\Omega^-)^{\perp} \cap \mathcal{H}_{ac}(H)$ tal que $g(H)\phi = \phi$ para $g \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^+)$. Entonces, los vectores $\phi_t = e^{-itH}$ convergen débilmente a cero por el lema (XXI)

$$\|\phi\|^2 = \|\phi_t\|^2 = (\phi_t, \phi_t) = ((H+i\mathbb{1})^{\alpha}\phi_t, (H+i\mathbb{1})^{-\alpha}\phi_t)$$

$$= ((H+i\mathbb{1})^{\alpha}\phi_t, (H+i\mathbb{1})^{-\alpha} g(H)\phi_t)$$

Por otro lado,

$$(H+i\mathbb{1})^{-\alpha} g(H)\phi_t - (H+i\mathbb{1})^{-\alpha}\Omega^+ g(H_0) P_- \phi_t - (H+i\mathbb{1})^{-\alpha}$$

$$\times\, \Omega^- g(H_0) P_+ \phi_t = (H+i\mathbb{1})^{-\alpha}\{g(H)-g(H_0)\} P_- \phi_t$$

$$-(H+i\mathbb{1})^{-\alpha}(\mathbb{1}-\Omega^+) g(H_0) P_- \phi_t + (H+i\mathbb{1})^{-\alpha}\{g(H)-g(H_0)\}$$

$$\times P_+ \phi_t - (H+i\mathbb{1})^{-\alpha}(\mathbb{1}-\Omega^-) g(H_0) P_+ \phi_t$$

Por el lema 2.2.1 y la proposición 1.1.1, cada término es - compacto, por consiguiente, como $\phi_t = e^{-itH}\phi \xrightarrow{w} 0$

$\Longrightarrow$

$$\|\phi\| = \|\phi_t\|^2 = \lim_{t\to+\infty} ((H+i\mathbb{1})^{\alpha}\phi_t, (H+i\mathbb{1})^{-\alpha}\Omega^+ g(H_0) P_- \phi_t)$$

$$+ \lim_{t\to+\infty} ((H+i\mathbb{1})^{\alpha}\phi_t, (H+i\mathbb{1})^{-\alpha}\Omega^- g(H_0) P_+ \phi_t)$$

$$= \lim_{t\to+\infty} (\phi_t, \Omega^+ g(H_0) P_- \phi_t) + (\phi_t, \Omega^- g(H_0) P_+ \phi_t)$$

$$(\phi_t \in (\mathrm{Ran}\,\Omega^-)^{\perp})$$

$$= \lim_{t\to+\infty} (P_- g(H_0) e^{-itH_0}(\Omega^+)^* \phi, \phi_t)$$

(3. 40)

donde hemos usado que $e^{-itH_0}(\Omega^+)^* = (\Omega^+)^* e^{-itH}$

Ahora vemos que $\underset{t\to+\infty}{s-\lim} P_- g(H_0) e^{-itH_0} = 0$

Como g es a soporte compacto, $\operatorname{supp} \subset [a^2/2, b^2/2]$ para ciertos a, b > 0.

Por el lema 2.2.5

$$\begin{aligned}\| P_- g(H_0) e^{-itH_0} \psi \| &\leq \| P_- g(H_0) e^{-itH_0} F\{B_{a|t|/2}, x\} \psi \| \\ &+ \| P_- g(H_0) e^{-itH_0} F\{B^c_{a|t|/2}, x\} \psi \| \\ &\leq \|\psi\| C_{N,g} (1+t)^{-N} + \| P_- g(H_0) \| \\ &\times \| F\{B^c_{a|t|/2}, x\} \psi \| \quad \to 0\end{aligned}$$

cuando $t \to +\infty$

En consecuencia (3.42) es cero y por lo tanto $\phi = 0$ .Esto demuestra que $\operatorname{Ran} \Omega^{-} = \mathcal{H}_{ac}(H)$. Para demostrarlo para Ω^{+} se hace de manera análoga.

Finalmente, demostraremos que H tiende al O como su único posible punto de acumulación. Como $\sigma_{ess}(H) = [0, +\infty)$ solo tenemos que ver si algún $\lambda > 0$, es punto de acumulación de eigenvalores. Tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, obtenemos que $I = [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon] \subset (0, +\infty)$

Denotando por $P_{p.p}(I)$ la proyección sobre la parte puntual en I , vemos que $\dim \operatorname{Ran} P_{p.p}(I) < +\infty$. Para ver ésto, sólo tenemos que seguir paso por paso la demostración hecha anteriormente para ver que $\sigma_{sc}(H) = \phi$.

Esto prueba el enunciado del Teorema 2.2. ▲

En los capítulos siguientes se verán otra clase de operadores para los cuales todavía se pueden aplicar estos métodos.

CAPITULO IV

COMPLETES ASINTOTICA

A) RESULTADOS DE SIMON

B) RESULTADOS DE GINIBRE

Ahora consideraremos casos más generales para los cuales el teorema sigue siendo cierto. Anteriormente solo presentamos el caso cuando Ho $= -\frac{1}{2}\Delta$. En seguida daremos las propiedades que deberá cumplir Ho (Simon <73>).

DEFINICION 3.1.1 Sea Ho $= P(-i\nabla)$ (ver preliminares) con P una función continua de $\mathbb{R}^{\nu}$ en $\mathbb{R}$. k_0 Es llamado un punto singular de P, si P no es C^{∞} en ninguna vecindad de k_0. k_0 es llamado un punto crítico si no es un punto singular y $(\nabla P)(k_0) = 0$ Los valores de P en los puntos singulares (puntos críticos) son llamados valores singulares (respectivamente valores críticos). La familia de puntos singulares, puntoscríticos, valores críticos Será denotado por Sp, Cp, Sv, Cv respectivamente.

DEFINICION 3.1.2 Una función continua P de $\mathbb{R}^{\nu}$ en $\mathbb{R}$ es llamada vagamente elíptica si

i) $S_\nu \cup C_\nu$ es numerable

ii) $|P(k)| \to +\infty$ cuando $k \to +\infty$

iii) $\bar{P} = P$

Nota 15 Notar que $C_p \cup S_p$ es cerrado ya que su complemento es abierto. Además $S_\nu \cup C_\nu$ es cerrado. Para ver esto último, tomemos I un intervalo compacto. Entonces, $(S_\nu \cup C_\nu) \cap I = P[(S_p \cup C_p) \cap P^{-1}(I)]$ y como $|P| \to +\infty$ cuando $|k| \to +\infty$, se tiene que $P^{-1}(I)$ es acotado y por consiguiente compacto ya que P es continua. Entonces, $(S_p \cup C_p) \cap P^{-1}(I)$ es compacto. Y de aquí se ve que $(S_\nu \cup C_\nu) \cap I$ es compacto para cada intervalo compacto. Por consiguiente $S_\nu \cup C_\nu$ es cerrado.

Nota 16 La condición (i) nos asegura que $H_o = P(-i\nabla)$ no tiene espectro singularmente continuo. Esto se ve del hecho que en $\sigma(H_o) \cap (S_\nu \cup C_\nu)^c$, H_o tiene unicamente espectro absolutamente continuo (lema IV). Y por ser numerable, se desprende que Ho no tiene espectro singularmente continuo. Más aún, como

$$\sigma(H_o) = \overline{\{P(k) \mid k \in \mathbb{R}^\nu\}} = \sigma(H_o) \cap \overline{(S_\nu \cup C_\nu)^c}$$ se obtiene que

$$\sigma_{ac}(H_o) = \sigma(H_o) \tag{4.1}$$

Nota 17 Notese que sin embargo, Ho puede tener vectores propios de multiplicidad infinita: Si, por ejemplo, $P(k) = \mu$ = constante, para un abierto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^\nu$, entonces $\mathcal{O} \subset C_p$ y Ho tiene a μ como eigen valor y a $L^2(\mathcal{O})$ como eigen vectores del eigen valor μ, sin qje necesariamente se dejen de cumplir las demás hipótesis.

DEFINICION 3.1.3

Un operador simétrico V, y uno autoadjunto H es una perturbación regular de H_o si

i) Para alguna N, $D(V) \supset D(|k|^{2N})$ y

$$h(R) := \| V (|k|^{2N} + 1)^{-1} F\{B_R^c, x\} \| \quad (4.1a)$$

Satisface la condición de Enss (2.5).

ii) H es una extensión autoadjunta $(H_o + V) \upharpoonright D(H_o) \cap D(|k|^{2N})$

iii) $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$, $\exists$ una función positiva $Q(k)$ que tiende al infinito si $|k| \to +\infty$; tal que $Q(k)\, P([a,b])$ es acotado.

Ahora daremos el enunciado del teorema.

TEOREMA 3.1

Sea $H_o = P(-i\nabla)$ con P vagamente elíptico Sea $H = H_o + V$ entonces,

a) $\underset{t \to \mp\infty}{\text{s-lim}}\; e^{itH} e^{-itH_o} P_{ac}(H_o)$ existen.

b) H no tiene espectro singularmente continuo

c) Ran $\Omega^{\pm} = \mathcal{H}_{ac}(H)$

d) Los posibles puntos límites (finitos) para el aspectro puntual de H estan en $S_v \cup C_v$. Cualquier eigen valor que no está en $S_v \cup C_v$ tiene multiplicidad finita.

e) $\sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(H_o) = \overline{\{P(k) \mid k \in \mathbb{R}^v\}}$

Nota 18

Como $-\frac{1}{2}\Delta = P(-i\nabla)$ con $P = \frac{|k|^2}{2}$, $-\frac{1}{2}\Delta$ es un caso particular de un operador vagamente elíptico.

Nota 19

Por ii)

$$(H+i1)(H_o+i1)^{-1}(|k|^{2N}+1)^{-1} = (H_o+V+i1)(H_o+i1)^{-1}(|k|^{2N}+1)^{-1}$$

$$= (|k|^{2N}+1)^{-1} + V(|k|^{2N}+1)^{-1}(H_o+i1)^{-1}$$

El segundo término es acotado por i). En consecuencia,

$$(H+i\mathbb{1})\, P_0(I) = (H+i\mathbb{1})(H_0+i\mathbb{1})^{-1}(|R|^{2N}+1)^{-1} \times (H_0+i\mathbb{1})(R^{2N}+1)\, P_0(I)$$

es acotado si I es acotado.

Esto nos dice que H es subordinado a Ho. Ahora de iii) obtenemos que Ho es subordinado a H.

Por el lema 1.1.4 $F\{B_R, x\}(H_0+i\mathbb{1})^{-1}$ es compacto, y por i), obtenemos que $V(|R|^{2N}+1)^{-1} F\{B_R, x\}(H_0+i\mathbb{1})^{-1}$ es compacto. Mientras que por ii) se concluye que $V(R^{2N}+1)^{-1}(H_0+i\mathbb{1})^{-1}$ es compacto. Como $(H-H_0)(R^{2N}+1)^{-1}(H_0+i\mathbb{1})^{-1} = V(R^{2N}+1)^{-1}(H_0+i\mathbb{1})^{-1}$ es compacto, se deduce que $P(I)(H-H_0)P_0(I)$ es compacto para cada intervalo I acotado. Por la nota 4, y la proposición 1.1.1. se obtiene que $(H+i\mathbb{1})^{-1}-(H_0+i\mathbb{1})^{-1}$ es compacto. (4.2)

Aunque la afirmación (e) del teorema se sigue de a) - d), (4.2) demuestra que Gess (H) = Gess (Ho), usando la proposición 1.1.2.

Nota 20 La hipotesis del teorema 1 cumplen i), ii), ii para N = 1. La misma afirmación de la nota 7 sigue siendo válida para $h(R) \equiv \| V(R^{2N}+1) \times F\{B_R^c, x\}\|$ Para ver esto se siguen paso a paso los argumentos dados en esa nota.

Para demostrar los incisos b) - d) del teorema, solo necesitamos del siguiente lema.

LEMA 3.1.1 (Principio de descomposición de Enss). Supongamos que H es una perturbación regular de Ho, entonces si φ_n es una sucesión de vectores unitarios con

a) $\| F\{B_n, x\}\varphi_n\| \to 0$ si $n \to +\infty$ (4.2a)

b) Para $[a,b]$ disjunto de $S_+ \cup C_+$

$$P([a,b])\varphi_n = \varphi_n$$

Entonces uno puede descomponer

$$\varphi_n = \varphi_{n,in} + \varphi_{n,out} + \varphi_{n,\infty}$$ tales que

1) $\|\varphi_{n,in}\| \to 0 \quad n\to+\infty$ (4. 3)

2) $\|(\Omega^+ - 1\!\!1)\varphi_{n,in}\| \to 0 \quad n\to+\infty$

$\|(\Omega^- - 1\!\!1)\varphi_{n,out} \to 0 \quad n\to+\infty$ (4. 4)

3) $\sup_n \|(H_0+i1\!\!1)\varphi_{n,\substack{in\\out}}\| < +\infty$

(4.5)

4) $\lim_{m\to+\infty}\left[\sup_{t<0}\|F\{B_{\delta n,x}\}e^{\mp itH_0}\varphi_{n,\substack{in\\out}}\|\right]=0$

para algún $\delta>0$ que depende de a y b (4.6)
unicamente

Por ahora supondremos este lema y demostraremos (b) - (d) del teorema.

DEMOSTRACION : Sea $\varphi' \in \mathcal{H}_{sc}(H)$ con $\varphi' \neq 0$.

Como $S_\nu \cup C_\nu$ es cerrado entonces $\mathbb{R}\setminus S_\nu\cup C_\nu$ es abierto. Por lo que $\mathbb{R}\setminus S_\nu\cup C_\nu = \bigcup_{i=1}^{+\infty}(a_i,b_i)$ donde los (a_i , b_i) son dijuntos entre sí. Como $S_\nu\cup C_\nu$ es numerable y $d(\varphi', P'_\lambda\,\varphi')$ es una medida continua, obtenemos que

$$0 \neq \|\varphi'\|^2 = \sum_{j=1}^{+\infty}\|P([a_j,b_j])\varphi'\|^2 + \|P(S_\nu\cup C_\nu)\varphi'\|^2$$

$$= \sum_{j=1}^{+\infty}\|P([a_j,b_j])\varphi'\|^2$$

Entonces, para algún entero m, $\|P([a_m,b_m])\varphi'\| \neq 0$

Usando otra vez la continuidad de $d(P,\varphi',\varphi')$. vemos que necesariamente $\exists\ [a,b]\subset(a_m,b_m)$ tal que $P([a,b])\varphi' \neq 0$. Y de aquí podemos encontrar φ con $\|\varphi\| = 1$ tal que $P([a,b])\varphi = \varphi$. Por otro lado, para cada $R < +\infty$, $F\{B_R, x\}(Q(k) + i\mathbb{1})^{-1}$ es compacto

Y por la hipótesis (iii) del teorema $(Q(k) + i\mathbb{1})^{+1} P([a,b])$ es acotado. Entonces,

$$F\{B_R, x\}\ P([a,b]) \quad \text{es compacto} \tag{4.6a}$$

es compacto. Por (2.8a)

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt\ \| F\{B_R, x\} P([a,b]) e^{-itH}\varphi\|^2 = 0$$

Tomando $R = n$, como lo hicimos anteriormente en el lema 1.2.3 podemos encontrar una sucesión $\tau_n \to +\infty$ si $n \to +\infty$, tal que

$$\| F\{B_n, x\} e^{-i\tau_n H}\varphi\| \leq \frac{1}{n} \tag{4.7}$$

y tomamos $\quad \varphi_n := e^{-i\tau_n H}\varphi$ (4.8)

Para estas φ_n se cumple el lema 3.1.1. Por (4.3) y (4.4)

$$\|\varphi_n - \Omega^+\varphi_{n,in} - \Omega^-\varphi_{n,out}\| \leq \underbrace{\|\varphi_{n,\infty}\| + \|(1-\Omega^+)\varphi_{n,out}\| + \|(1-\Omega^-)\varphi_{n,in}\|}_{\to 0} \tag{4.9}$$

Y usando que $e^{i\tau H}$ es unitario y la propiedad de entrelazamiento,

$$\|\varphi - \Omega^+(e^{i\tau_n H_0}\varphi_{n,in}) - \Omega^-(e^{i\tau_n H_0}\varphi_{n,out})\|$$

$$= \|\varphi - e^{i\tau_n H_0}\{\Omega^+\varphi_{n,in} + \Omega^-\varphi_{n,out}\}\|$$

$$= \|\varphi_n - \Omega^+\varphi_{n,in} - \Omega^-\varphi_{n,out}\| \to 0$$

por (4.9)

De aquí obtenemos que φ es el límite de una sucesión de vectores en Ran $\Omega^{\pm}$. Por teoría general sabesmo que $\mathcal{H}_a(H) \supset \text{Ran } \Omega^{\pm}$. En consecuencia φ es el límite de una sucesión de vectores del subespacio cerrado $\mathcal{H}_{ac}(H)$. En consecuencia $\varphi \in \mathcal{H}_{ac}(H) \cap$.
Como $\mathcal{H}_{ac}(H) \cap \mathcal{H}_{sc}(H) = \bar{0}$ obtenemos una cont5radición. Así, $\mathcal{H}_{sc}(H) = \bar{0}$
Esto prueba (b) del teorema.

Ahora supongamos que $0 \neq \varphi' \in \mathcal{H}_{ac}(H) \cap (\text{Ran}\, \Omega^-)^{\perp}$. Usando los mismos argumentos llegamos a que existen $\varphi_n := e^{-i\tau_n H}$ que cumplen el lema 3.1.1. Entonces cumplen también (4.9) y

$$|(\varphi_n, \Omega^+\varphi_{n,in})| = |((\Omega^+)^* e^{-i\tau_n H}\varphi, \varphi_{n,in})|$$

(Propiedad de entrelazamiento)

$$= |(e^{-i\tau_n H_0}(\Omega^+)^*\varphi, \varphi_{n,in})|$$

$$\leq |(F\{B^c_{\delta n}, x\}(\Omega^+)^*\varphi, e^{i\tau_n H_0}\varphi_{n,in})| \qquad (4.10)$$

$$+ |((\Omega^+)^*\varphi, F\{B_{\delta n}, x\} e^{i\tau_n H_0}\varphi_{n,in})|$$

$$\leq \|F\{B^c_{\delta n}, x\}(\Omega^+)^*\varphi\| \{\sup_n \|\varphi_{n,in}\|\}$$

$$+ \|(\Omega^+)^*\varphi\| \, \|F\{B_{\delta n}, x\} e^{i\tau_n H_0}\varphi_{n,in}\|$$

El primer término tiende a cero por (4.5) mientras que el segundo por (4.6). Entonces, por (4.9),

$$\|\varphi\|^2 = \lim_n \|\varphi_n\|^2 = \lim_n(\varphi_n, \varphi_n - \Omega^+\varphi_{n,in} - \Omega^-\varphi_{n,out})$$

$$+ \lim_n(\varphi_n, \Omega^+\varphi_{n,in}) + \lim_n(\varphi_n, \Omega^-\varphi_{n,out})$$

$$= \lim_n (\varphi_n, \Omega^+\varphi_{n,in}) + \lim_n (\varphi_n, \Omega^-\varphi_{n,out})$$

El primer término tiende a cero por (4.10) mientras que el 2º es identicamente cero ya que $\varphi_n \in (\mathrm{Ran}\,\Omega^-)^\perp$. Esto prueba que Ran $\Omega^- = \mathcal{H}_{ac}(H)$. Para Ran Ω^+ se hace similarmente. Esto prueba (c) del teorema.

A continuación demostramos (d)

Supongamos los contrario. Podemos encontrar una familia ortonormal,

$H\varphi_n = E_n \varphi_n$ y $E_n \to E \notin (S_\nu \cup C_\nu)$. Quitando un número finito de ellos, podemos suponer que cada En $\subset [a, b]$ y $[a,b] \cap (S_\nu \cup C_\nu) = \phi$

Por (4.6a), para $R < +\infty$ $\quad F\{B_R, x\}\, P([a,b])\,(H+i\mathbb{1})^{-1}$ es compacto.

(4.11)

$\Rightarrow$

$$\|F\{B_R, x\}\varphi_n\| = \|F\{B_R, x\}(H+i\mathbb{1})^{-1}(H+i\mathbb{1})^{+1} P([a,b])\varphi_n\|$$

$$= \|F\{B_R, x\}(H+i\mathbb{1})^{-1} P([a,b])\,(H+i\mathbb{1})\,\varphi_n\|$$

$$= |E_n+i|\;\|F\{B_R, x\}\,(H+i\mathbb{1})^{-1} P([a,b]\,\varphi_n\|$$

$$\to 0 \qquad n \to +\infty$$

puesto que $\varphi_n \xrightarrow{w} 0$, $E < +\infty$ y (4.11)

Como antes, pasando a una subsucesión (la cual seguimos denotando por φ_n) el lema 3.1.1 se aplica y por tanto de (4.9), $\|\varphi_n - \Omega^+\varphi_{n,in} - \Omega^-\varphi_{n,out}\| \to 0 \quad n \to +\infty$

Pero por otro lado, cada φ_n está en el subespacio paramente puntual de H, entonces cada φ_n es ortogonal a $\mathcal{H}_{ac}(H)$,

$\Rightarrow$

$$\|\varphi_n - \Omega^+ \varphi_{n,in} - \Omega^- \varphi_{n,out}\|^2 = \|\varphi_n\|^2 + \|\Omega^+\varphi_{n,in} + \Omega^-\varphi_{n,out}\| \geq 1$$

Y así obtenemos una contradicción. Esto prueba (d). La afirmación (a) del teorema es independiente de la descomposición de Enss y la demostraremos ahora.

Por el criterio de $C\infty k$ es suficiente con probar que para un conjunto denso de vectores en $P_{ac}(H_0)$, la norma de la derivada en sentido fuerte de $e^{itH}e^{-itH_0}$ está en $L^1(\mathbb{R}, dt)$. Por ejemplo, tomamos $\{\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu) \mid \operatorname{supp}\hat{\phi} \cap (C_p \cup S_p) = \phi\}$

Este conjunto es denso en Ran $P_{ac}(H_0)$, ya que Ran $P_{ac}(H_0) = L^2(\mathbb{R}^\nu \setminus S_p \cup C_p)^\wedge$

Entonces, para tales ϕ, $\phi \in D(H_0) \cap D(|k|^{2N} + 1) \subset D(H_0) \cap D(V) \subset D(H)$

Entonces,

$e^{itH}e^{-itH_0}$ es derivable en sentido fuerte. $\frac{d}{dt} e^{itH}e^{-itH_0}\phi = i e^{itH} V e^{-itH_0}\phi$

$\Rightarrow$

$$\|\frac{d}{dt} e^{itH}e^{-itH_0}\| = \|V e^{-itH_0}\phi\| = \|V(k^{2N}+1)^{-1}(k^{2N}+1)e^{-itH_0}\phi\|$$

$$\leq \|V(k^{2N}+1)^{-1} F\{B^c_{\delta|t|},x\} e^{-itH_0}(k^{2N}+1)\phi\|$$

$$+ \|V(k^{2N}+1)^{-1} F\{B_{\delta|t|},x\} e^{-itH_0}(k^{2N}+1)\phi\|$$

$$\leq \|V(k^{2N}+1)^{-1} F\{B^c_{\delta|t|},x\}\| \; \|(k^{2N}+1)\phi\|$$

$$+ \|V(k^{2N}+1)^{-1}\| \; \|F\{B_{\delta|t|},x\} e^{-itH_0}(k^{2N}+1)\phi\|$$

$$= \|V(k^{2N}+1)^{-1}\| \; \|F\{B_{\delta|t|},x\} e^{-itH_0}(k^{2N}+1)\phi\|$$

$$+ h(\delta|t|) \; \|(k^{2N}+1)\phi\|$$

El segundo término está en $L^1(\mathbb{R}, dt)$ por (4.1a). Para el primer término aplicaremos el lema (XX). Se toma $K = \operatorname{supp} \hat{\phi}$, en elcual (∇P) no se anula ya que es disjunto de $C_p \cup S_p$. Tomando $0 < \delta = 1/2 \left[\inf_{k \in K} |\nabla P(k)|\right]$ entonces para $|x| \leq \delta |t|$ se aplica ellema. Y como anteriormente hemos visto, se obtiene que

$$\| F\{ B_{\delta |t|}, x \} e^{-it H_0}(\mathbb{R}^{2\nu}+1)\,\alpha \| \in L^1(\mathbb{R}, dt)$$

Y así quedademostrado el teorema enunciado. Solo nos resta verificar el lema 3.1.1

Para esto necesitamos un poco más de definiciones, α denotará un vector en $\mathbb{R}^\nu$ cuyas coordenadas son enteras

$\chi_\alpha :=$ función característica del cubo unitario con centro en α (4.12)

Para una función $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$, sea

$$f_\alpha(x) = (f * \chi_\alpha)(x) \qquad (4.13)$$

Entonces, si

$$\int_{\mathbb{R}^\nu} f \, d^\nu x = 1 \qquad (4.14)$$

$$\sum_\alpha f_\alpha(x) = \sum_\alpha \int_{\mathbb{R}^\nu} \chi_\alpha(y) f(x-y)\, d^\nu y = \int_{\mathbb{R}^\nu} \Big[\sum_\alpha f(x-y)\, \chi_\alpha(y)\Big] d^\nu y = 1 \qquad (4.15)$$

LEMA 3.1.2

Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$, $f \geq 0$ que satisface (4.14) . Para cada $\alpha \in \mathbb{Z}^\nu$, sea g_α una sucesión de funciones tales que $\sup_\alpha \| (1-\Delta)^\nu g_\alpha \|_2 < +\infty$ Definamos para $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$, eloperador $(Th)(x) = \sum_\alpha g_\alpha(k) f_\alpha(x) h(x)$
Entonces, $\|Th\| \leq c\|h\|$. Y por lo tanto este operador se puede extender a un operador acotado de

DEMOSTRACION :

$$\|T h\|^2 = \sum_{\alpha,\beta} \left(g_\alpha(k) f_\alpha(x) h(x),\ g_\beta(k) f_\beta(x) h(x) \right)$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} \left(f_\alpha(x) h(x),\ \bar{g}_\alpha\, g_\beta(k) f_\beta(x) h(x) \right) \qquad (4.16)$$

Y $\quad \bar{g}_\alpha(k)\, g_\beta(k)\, f_\beta(x)\, h(x) = \left[\bar{g}_\alpha(k)\, g_\beta(k) (f_\beta(x)\, h(x))^\wedge \right]^\vee$

$$= \left([\bar{g}_\alpha\, g_\beta]^\vee * f_\beta(x)\, h(x) \right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^\nu} (\bar{g}_\alpha\, g_\beta(k))^\vee (x-y)\, f_\beta(y)\, h(y)\, d^\nu y \qquad (4.17)$$

Y $\quad (\bar{g}_\alpha\, g_\beta)^\vee(z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2} \int_{\mathbb{R}^\nu} e^{ik\cdot z}\, \bar{g}_\alpha(k)\, g_\beta(k)\, d^\nu k$

$\Rightarrow$

$$(1+|z|^2)^\nu\, |(\bar{g}_\alpha\, g_\beta)^\vee(z)| = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2} \left| \int_{\mathbb{R}^\nu} (1+|z|^2)^\nu e^{ik\cdot z} (\bar{g}_\alpha\, g_\beta)(k)\, d^\nu k \right|$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2} \left| \int_{\mathbb{R}^\nu} e^{ik\cdot z} (1-\Delta)^\nu\, \bar{g}_\alpha\, g_\beta(k)\, d^\nu k \right|$$

$$\leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2} \| (1-\Delta)^\nu\, \bar{g}_\alpha\, g_\beta \|_{L^1} \qquad (4.18)$$

Y puesto que

$$(1-\Delta)^\nu\, \bar{g}_\alpha\, g_\beta = \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial k_1^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial k_\nu^2}\right)^\nu \bar{g}_\alpha\, g_\beta$$

$$= \sum_{i,j} C_{\nu_i,\mu_j} \left(\frac{\partial^{\nu_i}}{\partial k^{\nu_i}}\, \bar{g}_\alpha \right) \left(\frac{\partial^{\mu_j}}{\partial k^{\mu_j}}\, g_\beta \right)$$

donde C_{ν_i,μ_j} son constantes y $|\nu_i| + |\mu_j| \leq 2\nu \quad \forall\ i,j$

Por lo que, si $\nu_i = (\nu_i^{(1)}, \nu_i^{(2)}, \ldots, \nu_i^{(\nu)})$

$$\left\| \frac{\partial^{\nu_i}}{\partial k^{\nu_i}} g_\alpha \right\|_2 = \| x_1^{\nu_i(1)} x_2^{\nu_i(2)} \cdots x_\nu^{\nu_i(\nu)} \check{g_\alpha} \|_2$$

$$\leq \| (1+|x|^2)^\nu \hat{g}_\alpha \|_2 = \| (1-\Delta)^\nu g_\alpha \| .$$

Análogamente para g_β

$\Rightarrow$

$$\| (1-\Delta)^\nu \bar{g}_\alpha g_\beta \| \leq C \| (1-\Delta)^\nu g_\alpha \|_2 \| (1-\Delta)^\nu g_\beta \|_2$$

$$\leq C \{ \sup_\alpha \| (1-\Delta)^\nu g_\alpha \|^2 \} \qquad (4.19)$$

De (4.18) y (4.19) si

$H_{\alpha\beta}(z) := (\bar{g}_\alpha g_\beta)^\vee (z)$ entonces,

$$| H_{\alpha\beta}(z) | \leq C_1 (1+|z|^2)^{-\nu}$$

$\Rightarrow$

$$\| T h \|^2 = \sum_{\alpha,\beta} \langle f_\alpha(x) h(x) , \int_{\mathbb{R}^\nu} H_{\alpha\beta}(x-y) f_\beta(y) h(y) \, d^\nu y \rangle$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} \int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu x \int_{\mathbb{R}^\nu} \overline{f_\alpha(x) h(x)} \; H_{\alpha\beta}(x-y) f_\beta(y) h(y)$$

$$\leq \sum_{\alpha,\beta} \int_{\mathbb{R}^{2\nu}} d^\nu x \, d^\nu y \; | H_{\alpha\beta}(x-y) | | f_\alpha(x) | f_\beta(y) | | h(x) h(y) |$$

$$\leq C_1 \sum_{\alpha,\beta} \int_{\mathbb{R}^{2\nu}} d^\nu x \, d^\nu y \; (1+|x-y|^2)^{-\nu} f_\alpha(x) f_\beta(y) |h(x)| |h(y)| \qquad (4.20)$$

Usando (4.15*)

$$= C_1 \int_{\mathbb{R}^{2\nu}} d^\nu x \, d^\nu y \, (1+|x-y|^2)^{-\nu} |h(x)| \, |h(y)|$$

$$\leq C_1 \left\{ \int_{\mathbb{R}^{2\nu}} d^\nu x \, d^\nu y \, |h(x)|^2 (1+|x-y|^2)^{-\nu} \right\}^{1/2}$$

$$\times \left\{ \int_{\mathbb{R}^{2\nu}} d^\nu x \, d^\nu y \, |h(y)|^2 (1+|x-y|^2)^{-\nu} \right\}^{1/2}$$

$$= C_1 \int_{\mathbb{R}^{2\nu}} d^\nu x \, d^\nu y \, |h(x)|^2 (1+|x-y|^2)^{-\nu}$$

$$= C_1 \, \| (1+|z|^2)^{-\nu} \|_{L^1} \, \|h\|^2$$

$$\Rightarrow \|Th\| \leq C \|h\|$$

Ahora ya podemos demostrar el principio de Descomposición de Enss.

Demostración del lema 3.1.1:

Tomamos $(a', b') \cap (S_\nu \cup C_\nu) = \phi$ y $[a, b] \subset (a', b')$

Sea $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ que vale 1 en (a, b) y cero fuera de (a', b') con $0 \leq \Phi \leq 1$.

Sea $j_{\geq R}$ la función definida por (2.5a). Entonces, $\underset{n \to +\infty}{s\text{-}\lim} \; j_{\geq n/2} = 0$

De (4.2) y la proposición 1.1.1 se obtiene que $\Phi(H) - \Phi(H_0)$ es compacto.(4.21)

Y por el corolario al lema 1.1.2 obtenemos que

$$\| [\Phi(H) - \Phi(H_0)] \, j_{\geq n/2} \, \varphi_n \| \to 0 \quad n \to +\infty \qquad (4.22)$$

De la hipótesis (a) del lema 3.1.1 y del hecho que para cada $x \in \mathbb{R}^\nu$, $1 - j_{\geq n/2} \leq F\{B_n, x\}$

se desprende que

$$\| (1-j_{r,n/2}) \varphi_n \| \leq \| F\{B_n, x\} \varphi_n \| \to 0 \quad n \to +\infty \qquad (4.23)$$

Como $\Phi(H)\varphi_n = \varphi_n$, de (4.22) y(4.23)

$$\| [\Phi(H) - \Phi(H_0)] \varphi_n \| = \| (1-\Phi(H_0)) \varphi_n \| \to 0 \quad n \to +\infty \qquad (4.24)$$

Como Φ tiene su soporte fuera de los valores singulares de P y puesto que $|P| \to +\infty$ cuando $|k| \to \infty$, entonces $\Phi(P(k)) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$.

Además,

$$\Phi(H)\varphi_n = \varphi_n$$

$$\Rightarrow$$

$$\| F\{B_n, x\} \Phi(H_0) \varphi_n \| \leq \| F\{B_n, x\} [\Phi(H) - \Phi(H_0)] \varphi_n \|$$

$$+ \| F\{B_n, x\} \Phi(H) \varphi_n \|$$

$$\to 0 \quad n \to +\infty \quad \text{por } (4.24) \text{ y } (4.2a)$$

Entonces

$$\| F\{B_{n/2}, x\} \Phi(H_0) \varphi_n \| \to 0 \quad n \to +\infty \qquad (4.25)$$

Sea $L = P^{-1}[a', b']$. L es disjunto de $C_p \cup S_p$ y compacto porque $|P| \to +\infty$. Podemos por lo tanto encontrar un abierto K_0 y $\varepsilon > 0$,

tal que $L + \bar{B}_\varepsilon \subset K_0 \subset \bar{K}_0 \subset (\mathbb{R}^\nu \setminus S_p \cup C_p)$ (4.26)

Sea $f \geq 0$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$ con $\operatorname{supp} \hat{f} \subset B_\varepsilon$, $\int_{\mathbb{R}^\nu} f(x)\, d^\nu x = 1$

Ponemos

$$\varphi_{n,\omega} := \varphi_n - \Phi(H_0)\varphi_n + \sum_{|\alpha| \leq 1/3 n} f_\alpha(x) \Phi(H_0) \varphi_n \qquad (4.27)$$

$$\Rightarrow$$

$$\int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu x \, \Big| \sum_{|\alpha| \le 1/3 n} f_\alpha(x) \, \Phi(H_0) \varphi_n \Big|^2$$

$$= \int_{|x| \le n/2} d^\nu x \, \big| (\Phi(H_0) \varphi_n)(x) \big|^2 \, \Big| \sum_{|\alpha| \le 1/3 n} f_\alpha(x) \Big|^2$$

$$+ \int_{|x| \ge n/2} \big| (\Phi(H_0) \varphi_n)(x) \big|^2 \, \Big| \sum_{|\alpha| \le 1/3 n} f_\alpha(x) \Big|^2$$

usando (4.15)

$$\le \int_{|x| \le n/2} \big| (\Phi(H_0) \varphi_n)(x) \big|^2 + \int_{|x| \ge n/2} d^\nu x \, \big| (\Phi(H_0) \varphi_n)(x) \big|^2$$

$$\times \Big| \int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu y \, f(x-y) \sum_{|\alpha| \le 1/3 n} \chi_\alpha(y) \Big|^2$$

$$\left(|x| \ge n/2 \, , \; |\alpha| \le 1/3 \, n \quad \Rightarrow \quad |y| \le 1/3 \, n + \sqrt{\nu}/2 \, , \; |x-y| \ge 1/6 \, n - \sqrt{\nu}/2 \right)$$

$$\le \| F\{B_{n/2}, x\} \, \Phi(H_0) \varphi_n \|^2 + \int_{|x| \ge n/2} d^\nu x \, \big| (\Phi(H_0) \varphi_n) \big|^2 \left\{ \int_{|y| \ge n/6 - \sqrt{\nu}/2} f(y) \, d^\nu y \right\}^2$$

$$\le \| F\{B_{n/2}, x\} \, \Phi(H_0) \varphi_n \|^2 + \| \Phi(P(k)) \|_\infty^2 \left\{ \int_{|y| \ge n/6 - \sqrt{\nu}/2} f(y) \, d^\nu y \right\}^2$$

Por (4.25) el primer término tiende a cero, mientras que el segundo también ya que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu) \subset L^1$. Está estimación y (4.24), implica que, $\|\varphi_{n,\omega}\| \to 0 \quad n \to +\infty$. Lo cual es la afirmación (4.13) del lema. Prosiguiendo, sea

$v(k) = (\nabla P)(k)$. Puesto que $\bar{K}_0$ es acotado, disjunto de C_P, $\{v(k) \mid k \in \bar{K}_0\}$ es un conjunto contenido en un abierto $\mathcal{O} = \{v \mid A < |v| < B\}$ para algún $A > 0$. Tomemos $\psi(k) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$ con $\psi(k) = 1 \quad \forall\ k \in K_0$ y $\operatorname{supp} \psi \subset (\mathbb{R}^\nu \setminus C_P \cup S_P)$ Y sean G_{in}, G_{out} funciones en $C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$ tales que

$$G_{in}(v) + G_{out}(v) = 1 \qquad v \in \mathcal{O} \tag{4.28}$$

$G_{in}(v) = 0$ si $v \in \mathcal{O}$ y el ángulo entre v y $(1, 0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^\nu$ es menor que 45° (4.29)

$G_{out}(v) = 0$ si $v \in \mathcal{O}$ y el ángulo entre v, y $(-1, 0, \ldots, 0)$ es menor que 45°. (4.30)

Finalmente, para $\alpha \in \mathbb{Z}^\nu$, sea R_α la rotación que lleva α a $(|\alpha|, 0, \ldots, 0, \ldots, 0)$

Ponemos

$$g_\alpha^{in}(k) = \psi(k)\, G_{in}(R_\alpha v(k)) \tag{4.31}$$

$$g_\alpha^{out}(k) = \psi(k)\, G_{out}(R_\alpha v(k)) \tag{4.32}$$

Si $R_\alpha = (a_{ij}^{(\alpha)})$, es fácil ver que los derivadas de g_α^{in} son una sumade productos de derivadas de $\psi(k)$, G_{in}, de P y por los términos $a_{ij}^{(\alpha)}$. Pero.

$$|a_{ij}^{(\alpha)}| = |(R_\alpha e_i, e_j)| \leq \|R_\alpha e_i\| \|e_j\| \leq \|R_\alpha\| = 1$$

por ser R_α una rotación. En consecuencia, las derivadas de g_α^{in} estan acotadas por derivadas de ψ, G_{in} y P independientemente de α. Notar que como K_0 es disjunto de S_P las derivadas de P están bien definidas. El mismo argumento es válido para derivadas de g_α^{out}. Y por lo tanto,

$$\sup_\alpha \|(1 - \Delta)^\nu g_\alpha^{in}\| < +\infty, \quad \sup_\alpha \|(1 - \Delta)^\nu g_\alpha^{out}\| < +\infty \tag{4.33}$$

Ponemos

$$\varphi_{n,in} = \sum_{|\alpha| > 1/3 n} g_\alpha^{in}(k)\, f_\alpha(x)\, \bar{\Phi}(H_0)\, \varphi_n \qquad (4.34)$$

$$\varphi_{n,out} = \sum_{|\alpha| > 1/3 n} g_\alpha^{out}(k)\, f_\alpha(x)\, \bar{\Phi}(H_0)\, \varphi_n \qquad (4.35)$$

Usando (4.20), y el lema 3.1.2

$$\| \varphi_{n,in} \| = \| \sum_{|\alpha| > 1/3 n} g_\alpha^{in}(k) f_\alpha(x) \bar{\Phi}(H_0) \varphi_n \| \leq C_1 \| (1+|x|^2)^{-\nu} \|_{L^1} \| \bar{\Phi}(H_0) \varphi_n \|$$

$\leq C_1 \| (1+|x|^2)^{-\nu} \|_{L^1}$. Y análogamente para $\varphi_{n,out}$.

Esto prueba (4.5)

De (4.13) y (4.26)

$$\operatorname{supp} \hat{f}_\alpha = \operatorname{supp} \widehat{f * \chi_\alpha} = \operatorname{supp} \hat{f}_\alpha \hat{\chi}_\alpha \subset B_\varepsilon \quad (4.36)$$

Y de (4.25a)

$$\operatorname{supp} [f_\alpha \Phi(H_0) \varphi_n]^\wedge = \operatorname{supp} [\hat{f}_\alpha * \widehat{\Phi(H_0) \varphi_n}]$$

$$\subset \operatorname{supp} \hat{f}_\alpha + \operatorname{supp} \Phi(H_0) \varphi_n \subset B_\varepsilon + L \subset K_0 \qquad (4.37)$$

De (4.27), (4.31) y (4.32)

$$(g_\alpha^{in} + g_\alpha^{out}) [f_\alpha \Phi(H_0) \varphi_n]^\wedge = [f_\alpha \Phi(H_0) \varphi_n]^\wedge \qquad (4.38)$$

Y de (4.34), (4.35) obtenemos que

$$(\varphi_{n,in} + \varphi_{n,out}) = \sum_{|\alpha| > 1/3 n} f_\alpha \Phi(H_0) \varphi_n$$

De (4.28) y (4.15) se obtiene que

$$\varphi_n = \varphi_{n,w} + \varphi_{n,in} + \varphi_{n,out}$$

Para demostrar lo que falta, utilizaremos el lema (XX)

Tomamos $K = \overline{K_0}$

Ahora bien, $|\alpha + vt - x| \geq |\alpha + vt| - |x|$ y

$$|\alpha + vt|^2 = |\alpha|^2 + |vt|^2 + 2t\,(v, \alpha)$$

$$= |\alpha|^2 + |vt|^2 + 2t\,|v|\,|\alpha| \cos\xi$$

donde ξ es el ángulo entre v y α.

Las estimaciones las haremos para $\varphi_{n,in}$ para demostrar (4.4) y ((4.6)

para $\varphi_{n,out}$ se procede en la misma forma considerando nada más el signo. Pongamos

Pongamos $\varphi_{n,in;a} = g_\alpha^{in}(k)\, f_\alpha(x)\, \bar{\Phi}(H_0)\, \varphi_n$ (4.3a)

Entonces, tomamos $t < 0$.

$$|\alpha + vt|^2 = |\alpha|^2 + 2t\,|v|\,|\alpha| \cos\xi$$

$\vdots$

Si $\cos\xi \leq 0$ y como $t < 0$ obtenemos que

$$|\alpha + vt| \geq \frac{1}{2}\left(|\alpha| + |vt|\right)$$

Si $\cos\xi > 0$

$$|\alpha + vt|^2 = |\alpha|^2 + |vt|^2 + 2t\,|v|\,|\alpha| \cos\xi$$

$$= |\alpha|^2 + |vt|^2 - 2\,|vt|\,|\alpha| \cos\xi$$

$$= |\alpha|^2 + |vt|^2 - 2\left[|vt|(\cos\xi)^{1/2}\right]\left[|\alpha|\,(\cos\xi)^{1/2}\right]$$

$$\geq |\alpha|^2 + |vt|^2 - |vt|^2\cos\xi - |\alpha|^2(\cos\xi)$$

$$= (1 - \cos\xi)(|\alpha|^2 + |vt|^2)$$

$$\geq (1 - \cos \pi/4)\,(|\alpha|^2 + |vt|^2) \qquad (4.4b)$$

Está última desigualdad es debida a (4.29)

Y por lo tanto, si $v \in \{ \omega \mid \omega \in \operatorname{supp} g_\alpha^{in} \cap \mathcal{O} \}$, $t < 0$

$|\alpha + vt| \geq \frac{1}{2} (1 - \cos \pi/4)^{1/2} (|\alpha| + A'|t|)$. En consecuencia, tomando

$0 < \delta < \min \{ \frac{1}{6} (1 - \cos \pi/4)^{1/2}, A/2 (1 - \cos \pi/4)^{1/2} \}$, tenemos que $\forall x$

con $|x| \leq \delta (n + |t|), t < 0$ y $\forall \alpha$ con $|\alpha| > \frac{1}{3} n$

$|\alpha + vt - x| \geq |\alpha + vt| - |x| \geq C' (|\alpha| + |t|)$. Entonces podemos

aplicar el lema (x x) y obtener que por (4.39)

$\forall m \in N$ y $\forall x$ con $|x| \leq \delta(n + |t|)$, $t < 0$ y $\forall \alpha$ con $|\alpha| > \frac{1}{3} n$

$$| (e^{-itH_0} \varphi_{n, in; \alpha})(x) | \leq C'_m (1 + |\alpha| + |t|)^{-m} \| (1 + |x - \alpha|^m) \varphi_{n, in; \alpha} \|$$

Además, $\| |x - \alpha|^m g_\alpha^{in} f_\alpha \Phi(H_0) \varphi_n \| = \| D^m H_\alpha^{in} F_\alpha \|$

donde $H_\alpha^{in}(k) = g_\alpha^{in}(k)$, $F_\alpha(k) = e^{ik \cdot \alpha} [f_\alpha \Phi(H_0) \varphi_n]^\wedge (k)$

Como

$$D^m H_\alpha^{in} F_\alpha = \sum_{|\mu|, |\beta| \leq m} C'_{\mu, \beta} (D^{|\mu|} H_\alpha^{in}) (D^{|\beta|} F_\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad \| D^m H_\alpha^{in} F_\alpha \| \leq \sum_{|\mu|, |\beta| \leq m} \| D^{|\mu|} H_\alpha^{in} (D^{|\beta|} F_\alpha) \|$$

$$\leq \sum_{|\mu|,|\beta|\leq m} C'_{\mu,\beta} \, \| D^{|\mu|} H_\alpha^{in} \|_\infty \, \| D^{|\beta|} F_\alpha \|$$

$$= \sum_{|\mu|,|\beta|\leq m} C'_{\mu,\beta} \, \| D^{|\mu|} g_\alpha^{in} \|_\infty \, \| |x_1-\alpha_1|^{\beta_1} \cdots |x_\nu-\alpha_\nu|^{\beta_\nu} f_\alpha \Phi(H_0) \varphi_n \|$$

$$\leq \sum_{|\mu|,|\beta|\leq m} C'_{\mu,\beta} \, (\sqrt{\nu})^{|\beta|} \, \| D^{|\mu|} g_\alpha^{in} \|_\infty \, \| |x-\alpha|^{|\beta|} f_\alpha \|_\infty \, \| \Phi(P(R)) \|$$

Como vimos antes en (4.33), está uniformemente acotado en α.

Mientras que, si Δ_α es el cubo unitario centrado en α, de (4.12) y (4.13)

$$\left| \, |x-\alpha|^{|\beta|} f_\alpha(x) \right| = \int_{\Delta_\alpha} |x-\alpha|^{|\beta|} f(x-y) \, d^\nu y$$

$$= \int_{\Delta_0} |x-\alpha|^{|\beta|} f(x-\alpha-z) \, d^\nu z$$

$$\leq \int_{\Delta_0} (|z| + |x-\alpha-z|)^{|\beta|} f(x-\alpha-z) \, d^\nu z$$

$$\leq \nu^{|\beta|/2} / \lambda^{|\beta|} \int_{\Delta_0} (1 + |x-\alpha-z|)^{|\beta|} f(x-\alpha-z) \, d^\nu z$$

$$\leq \nu^{|\beta|/2} / \lambda^{|\beta|} \, \| (1+|z|)^{|\beta|} f \|_1$$

Y como $f \in \mathcal{S}$ esto último es finito.

Finalmente obtenemos que para cada $m \in \mathbb{N}$, $\exists \, C'_m$ tal que

$$\left| \left(e^{-itH_0} \varphi_{n,in,\alpha} \right)(x) \right| \leq C'_m \left(1 + |x| + |t| \right)^{-m} \qquad (4.41)$$

$\forall\, x$ con $|x| \leq \delta(n+|t|)$, $\forall\, t<0$ y $\forall\, \alpha$ con $|\alpha| > n/3$

$\Rightarrow$

$$\| F\{ B_{\delta(n+|t|)}, x \} e^{-itH_0} \varphi_{n,in} \|$$

$$\leq \sum_{|\alpha| > \frac{1}{3}n} \| F\{ B_{\delta(n+|t|)}, x\} e^{-itH_0} \varphi_{n,in,\alpha} \|$$

$$\leq \sum_{|\alpha| > \frac{1}{3}n} \left\{ \int_{|x| \leq \delta(n+|t|)} C^2_{m+\nu} (1+|\alpha|+|t|)^{-2m-2\nu} d\nu_x \right\}^{1/2}$$

$$\leq \sum_{|\alpha| > \frac{1}{3}n} \frac{C_{m+\nu}\, \omega_\nu(1)\, \delta^{\nu/2} (n+|t|)^{\nu/2}}{(1+|\alpha|+|t|)^{m+\nu}}$$

$$\leq \sum_{|\alpha| > \frac{1}{3}n} C'_{m+\nu} (1+|\alpha|+|t|)^{-(m+\nu/2)}$$

$$\leq \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{\frac{1}{3}(n+s) \leq |\alpha| < \frac{1}{3}(n+s+1)} C'_{m+\nu} (1+\tfrac{1}{3}(n+s)+|t|)^{-(m+\nu/2)}$$

$$\leq \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{\frac{1}{3}(n+s) \leq |\alpha| < \frac{1}{3}(n+s+1)} 3^{m+\nu/2} C'_{m+\nu} (1+(n+s)+|t|)^{-m-\nu/2}$$

(El número de puntos enteros en la bola de radio r no excede $2^\nu r^\nu$)

$$\leq \sum_{s=0}^{+\infty} 3^{m+\nu/2} C'_{m+\nu} \quad 2^\nu [\tfrac{1}{3}(n+s+1)]^\nu (1+(n+s)+|t|)^{-m-\nu/2}$$

$$\leq \sum_{s=0}^{+\infty} C' (1+n+s+|t|)^{-m+\nu/2}$$

$$\leq \sum_{s=0}^{+\infty} C' (1+n\,s+|t|)^{-m+\nu/2+2} (1+s)^{-2}$$

$$\leq C'' (1+n+|t|)^{-m+\nu/2+2} \sum_{s=1}^{+\infty} s^{-2}$$

$$\leq C''' (1+n+|t|)^{-m+\nu/2+2}$$

Como m es arbitrario, entonces

$$\| F\{ B_{\delta(n+|t|)}, x\} e^{-itH_0} \varphi_{n,in} \| \leq C_m (1+n+|t|)^{-m} \qquad (4.42)$$

Con esto obtenemos inmediatamente (4.6) para $\varphi_{n,in}$

Por (4.31), sabemos que $\operatorname{supp} \hat{g}_\alpha^{in}$ está contenido en un compacto independientemente, de α. En consecuencia, de (4.34) y del lema 3.1.2

$$(|R|^{2N}+1)\,\varphi_{n,in} = \sum_{|\alpha|>1/3 n} (R^{2N}+1)\, g_\alpha^{in} f_\alpha \Phi(H_0)\varphi_n$$

Ahora notemos que $(|R|^{2N}+1) g_\alpha^{in}$ tiene las mismas propiedades de g_α^{in} utilizadas en cada una de las estimaciones precedentes. Por lo tanto, podemos llegar a una estimación como en (4.42) para $(R^{2N}+1)^{+1}\varphi_{n,in}$. Es decir,

$$\| F\{ B_{\delta(n+|t|)}, x\} e^{-itH_0} (|R|^{2N}+1)\varphi_{n,in} \| \leq C'_m (1+n+|t|)^{-m} \qquad (4.43)$$

Y de aquí obtenemos, usando que $\varphi_{n,in} \in D(H_0) \cap D(|R|^{2N}) \subset D(H)$ y que $P_{ac}(H_0)\varphi_{n,in} = \varphi_{n,in}$ ya que $\operatorname{supp} \hat{\varphi}_{n,in} \subset \mathbb{R}^\nu \setminus S_p \cup C_p$:

$$\| (\Omega^+ - 1)\varphi_{n,in} \| = \| i \int_{-\infty}^{0} e^{itH} V e^{-itH_0} \varphi_{n,in}\, dt \|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{0} \| V e^{-itH_0} \varphi_{n,in} \| dt$$

$$\leq \int_{-\infty}^{0} \| V (|k|^{2N}+1)^{-1} F\{B_{\delta(n+|t|)},x\} e^{-itH_0} (k^{2N}+1) \varphi_{n,in} \| dt$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} \| V (|k|^{2N}+1)^{-1} F\{B^c_{\delta(n+|t|)},x\} e^{-itH_0} (k^{2N}+1) \varphi_{n,in} \| dt$$

$$\leq \| V (k^{2N}+1)^{-1} \| \int_{-\infty}^{0} \| F\{B_{\delta(n+|t|)},x\} e^{-itH_0} (k^{2N}+1) \varphi_{n,in} \| dt$$

$$+ \left\{ \sup_{k\in K_0} |k^{2N}+1| \right\} \left\{ \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_{n,in}\| \right\} \frac{1}{\delta} \int_{\delta n}^{+\infty} h(R)\, dR$$

El primer término tiende a cero por (4.43). Mientras que el segundo por (4.1a) Esto prueba (4.4) para $\varphi_{n,in}$. Y con esto se concluye la demostración del lema y elteorema 3.1

En la siguiente sección se debilitarán las hipótesis sobre V.

S

En esta sección presentamos la demostración del mismo teorema solo que en lugar de usar el principio de descomposición se usan algunos argumentos de compacidad y además se debilitan las hipótesis sobre V. (Ginibre <29>

TEOREMA 3.2

Sean H y Ho dos operadores autoadjuntos tales que

a) $H_0 = P(-i\nabla)$ con P vagamente elíptico.

b) $(H+i\mathbb{1})^{-1} - (H_0+i\mathbb{1})^{-1}$ es compacto (112)

c) Existe una función $g\in C^{\infty}$, tal que para todo intervalo acotado I, la función $h_I(R)$, definida por

$$h_I(R) := \| P(I)\, V g(k)^{-1} F\{B^c_R,x\} \|$$

$$\in L^1(\mathbb{R}^+, dR)$$

Entonces, los operadores $\Omega^{\pm}$ existen y son completos. El espectro singularmente continuo de H es vacío y el espectro puramente puntual de H en $\mathbb{R}\setminus S_\nu \cup C_\nu$ consta de valores propios de multiplicidad finita pudiendose acumular solamente en $S_\nu \cup C_\nu$.

Nota 21 Por (4.2) y tomando $g(k) = k^{2N}+1$ vemos que las hipótesis del teorema 3.1 satisfacen las de éste teorema. Asimismo, usando (3.1) y tomando $g(k) = (k^2+1)^{\beta}$ se cumplen las hipótesis del teorema 2.1.

Más adelante demostraremos la existencia de los operadores de onda.

El resultado básico es el siguiente

LEMA 3.2.1 Sea I un intervalo compacto disjunto de $S_\nu \cup C_\nu$.

Entonces existen 2 operadores acotados (que dependen de I) R_+ y R_- tales que

a) $(\Omega^{\pm} - 1)R_{\pm}$ son compactos (114)

b) $R_0 \, P(I)$ es compacto (115)
donde $R_0 = (1 - R_+ - R_-)$

c) $s - \lim\limits_{t \to \mp\infty} R_{\pm}^{*} \, e^{itH} P_{ac}(H) = 0$ (115 b)

Este lema lo demostraremos posteriormente. Usandolo podemos demostrar el teorema:

Demostración del teorema 3.2 Sea $I \cap (S_\nu \cup C_\nu) = \emptyset$, con I compacto. Entonces si demostramos que $\dim \operatorname{Ran} P(I)\, \mathcal{H}_{ac}(H)^{\perp} < +\infty$ esto nos dirá que $\sigma_{sc}(H) \cap I = \emptyset$ (vacío) y que además el espectro puramente puntual en I consta de valores propios de multiplicidad finita pudiendose acumular solamente fuera de I y que además en $\mathbb{R}\setminus S_\nu \cup C_\nu$, H no tiene espectro singularmente continuo. Y usando que $S_\nu \cup C_\nu$ es numerable obtenemos que $\sigma_{sc}(H) = \emptyset$.

Por lo tanto, es suficiente con demostrar que es de dimensión finita (115a). Supongamos lo contrario . Y sea $\{\varphi_n\}$ una base de este espacio. Entonces $\varphi_n \xrightarrow{w} 0$

Pongamos $\psi_n := (1-\Omega^+) R_+ \varphi_n + (1\!\!1-\Omega^-) R_- \varphi_n + R_0 P(I)\varphi_n$ (116)

De (114) y (115) obtenemos que $\psi_n \to 0$ en norma, y además

$$\varphi_n = \psi_n + \Omega^+ R_+ \varphi_n + \Omega^- R_- \varphi_n \qquad (117)$$

Por otra parte, sabemos que $\operatorname{Ran} \Omega^\pm \subset \mathcal{H}_{ac}(H)$. En consecuencia, $\varphi_n - \psi_n \in \mathcal{H}_{ac}(H)$. Mientras que por hipótesis $\varphi_n \in \mathcal{H}_{ac}(H)^\perp$

$\Rightarrow$

$$0 \equiv (\varphi_n - \psi_n, \varphi_n) = \|\varphi_n\|^2 - (\psi_n, \varphi_n) = 1 - (\psi_n, \varphi_n)$$

$\longrightarrow$ 1 cuando $n \to +\infty$

ya que $\psi_n \longrightarrow 0$ en norma. Esta contradicción prueba (115a)

Para probar que $\operatorname{Ran} \Omega^\pm = \mathcal{H}_{ac}(H)$, supongamos que existe $0 \neq \varphi' \in (\operatorname{Ran} \Omega^+)^\perp \cap \mathcal{H}_{ac}(H)$. Entonces existe un intervalo compacto I disjunto de $S_v \cup C_v$ tal que $\varphi = P(I)\,\varphi' \neq 0$. Por lo tanto, de (114) y (115)

$$0 \neq \|\varphi\|^2 = \|e^{itH}\varphi\|^2 = (e^{itH}\varphi, \Omega^+ R_+ e^{itH}\varphi) + (e^{itH}\varphi, R_- e^{itH}\varphi)$$

$$+ (e^{itH}\varphi, (1\!\!1 - \Omega^+) e^{itH}\varphi + R_0\, e^{itH}\varphi)$$

El primer término es idénticamente nulo para toda $t \in \mathbb{R}$ ya que $\varphi \in (\operatorname{Ran} \Omega^+)^\perp$ y $e^{-itH}\Omega^+ = \Omega^+ e^{-itH_0}$. El segundo tiende a cero por (115b). Mientras que el tercero también, debido a (114) y (115) y el lema (XXI) .

Esto prueba que $\operatorname{Ran} \Omega^+ = \mathcal{H}_{ac}(H)$. Similarmente se obtiene para Ω^-

Lo unico que nos falta haces es demostrar que los operadores de onda existe y probar el lema 3.2.1

Nota 22 Sea $\mathrm{Ran}\,\Omega^+ + \mathrm{Ran}\,\Omega^- \equiv \{ \psi \mid \psi = \psi_1 + \psi_2 ,$ $\psi_1 \in \mathrm{Ran}\,\Omega^+$ y $\psi_2 \in \mathrm{Ran}\,\Omega^- \}$

Tomemos $\varphi \in \mathrm{Ran}\, P(I)\, \mathcal{H}_{ac}(H)$, I compacto. Pongamos $\psi(t) := (1 - \Omega^+) R_+ e^{-itH}\varphi + (1 - \Omega^-) R_- e^{-itH}\varphi + R_0 e^{-itH}\varphi$

Usando que $e^{-itH}\Omega^\pm = \Omega^\pm e^{-itH_0}$,

$$\varphi = e^{-itH} P(I) \left[\Omega^+ R_+ e^{itH}\varphi + \Omega^- R_- e^{itH}\varphi + \psi(t) \right]$$

$$= P(I) \left[\Omega^+ e^{-itH_0} R_+ e^{itH}\varphi + \Omega^- e^{-itH_0} R_- e^{itH}\varphi \right]$$

$$+ P(I)\, e^{-itH} \psi(t)$$

Y puesto que $e^{itH}\varphi \xrightarrow{w} 0$ cuando $t \to \pm\infty$

$$\| P(I)\, e^{-itH} \psi(t) \| \leq \| (1 - \Omega^+) R_+ e^{itH}\varphi \| + \| (1 - \Omega^-) R_- e^{itH}\varphi \|$$

$$+ \| R_0\, e^{itH}\varphi \| \to 0$$

cuando $t \to \pm\infty$

Entonces φ es el límite de una sucesión de vectores en $P(I)\, [\mathrm{Ran}\,\Omega^+ + \mathrm{Ran}\,\Omega^-]$

Esto nos muestra que suponiendo solamente (114) y (115) obtenemos que

$$\mathrm{Ran}\ \Omega^{+} + \mathrm{Ran}\ \Omega^{-} = \mathcal{H}_{ac}(H)$$

LEMA 3.2.2 Sea I un intervalo compacto. Sean $P_\pm$ 2 operadores acotados tales que $P_+ + P_- = 1$. Sea $f \in C_c(\mathbb{R})$ con soporte compacto $I_0 \supset I$ tal que $f = 1$ sobre I y $0 \leq f \leq 1$. Sean $R_\pm = f(H_0) P_\pm f(H_0)$

Entonces $R_0 P(I)$ e·

es compacto, donde

$$R_0 = 1 - R_+ - R_-$$

DEMOSTRACION : Por (112) y la proposición 1.1.1 $f^2(H) - f^2(H_0)$ es compacto. En consecuencia,

$$R_0 P(I) \equiv (1 - f(H_0) P_+ f(H_0) - f(H_0) P_- f(H_0)) P(I)$$

$$= \left(f^2(H) - f(H_0)(P_+ + P_-) f(H_0) \right) P(I)$$

$$= [f^2(H) - f^2(H_0)] P(I) \quad \text{compacto.}$$

Antes de construir los operadores R_+ y R_- que cumplen con el lema 3.2.1 probaremos la existencia de los operadores de onda

LEMA 3.2.3 Los operadores de onda existen

$$\Omega^{\pm} = \operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} e^{itH} e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)$$

DEMOSTRACION : Por la proposición 1.5 y como H es subordinado de Ho es suficiente con demostrar que para cada Λ_1 y para toda φ un subconjunto denso $\mathcal{D}$, la integral

$$\int_{\pm}^{\pm\infty} \| P(I_1) V e^{-itH_0} \varphi \| dt < +\infty \qquad (118b)$$

Sea $\mathcal{D} = \bigcup_I \{ \psi \mid \hat{\varphi} \in C_0^\infty(P^{-1}(I)) \}$, donde I es un intervalo compacto disjunto de $S_0 \cup C_0$.

Pongamos $K = P^{-1}(I)$. $B = (\nabla P)(K)$ .K es un compacto disjunto de S y B no contiene el origen. Sea $d(0, B) = \inf_{x \in B} |x| = 2b > 0$

Es claro que para x, t tales que $|x| \leq bt$, entonces $d(x/t, B) = \inf_{y \in B} |x/t - y| \geq b$. Tomando $\varphi \in \mathcal{D}$ tal que $\varphi = P_0(I)\varphi$ abtenemos que por el lema (XIX)

$$\int_{\pm 1}^{\pm\infty} \| P(I_1) V e^{-itH_0} \varphi \| dt$$

$$\leq \int_{\pm 1}^{\pm\infty} dt \, \| P(I_1) V g(R)^{-1} F\{B^c_{b|t|}, x\} g(R) e^{-itH_0} \varphi \|$$

$$+ \int_{\pm 1}^{\pm\infty} dt \, \| P(I_1) V g(R)^{-1} F\{B_{b|t|}, x\} g(R) e^{-itH_0} \varphi \|$$

$$\leq \| g(R) P_0(I) \| \, \|\varphi\| \int_{\pm 1}^{\pm\infty} h_{I_1}(b|t|) dt$$

$$+ \| P(I_1) V g(R)^{-1} \| \int_{\pm 1}^{\pm\infty} dt \left\{ \int_{|x| \leq b|t|} d^\nu x \, | e^{-itH_0} g(R) \varphi |^2 \right\}^{1/2}$$

$$\leq \| g(R) P_0(I) \| \, \|\varphi\| \int_{\pm 1}^{\pm\infty} h_{I_1}(b|t|) dt$$

$$+\, h_{I_1}(0) \int_{\mp 1}^{\mp\infty} dt \left\{ \int_{|x|\le b|t|} d^\nu x \left[\sup_{|x|\le b|t|} C_\ell \, d(x,tB)^{-\ell} \, \| g(k)\hat{\varphi} \|_{\ell,\infty} \right]^2 \right\}^{1/2}$$

$$\le \| g(k) P_0(I) \| \, \|\varphi\| \int_{\mp 1}^{\mp\infty} h_{I_1}(b|t|)\, dt$$

$$+\, C_\ell \, \omega_\nu(1)^{1/2} \, \| g(k)\hat{\varphi} \|_{\ell,\infty} \int_{\mp 1}^{\mp\infty} (b|t|)^{\nu/2} \sup_{|x|\le b|t|} d(x,tB)^{-\ell} \, dt$$

$$\le \| g(k) P_0(I) \| \, \|\varphi\| \int_{\mp 1}^{\mp\infty} h_{I_1}(b|t|)\, dt$$

$$+\, C_\ell \, \omega_\nu(1)^{1/2} \, \| g(k)\hat{\varphi} \|_{\ell,\infty} \int_{\mp 1}^{\mp\infty} dt \, (b|t|)^{\nu/2-\ell}$$

La primera integral es convergente por (113). Mientras que la segunda es convergente si tomamos $\ell \geq [\nu/2]+2$ en el lema (XIX). Esto demuestra la proposición.

LEMA 3.2.4

Sea I un intervalo compacto disjunto de $S_\nu \cup C_\nu$. Entonces existen dos operadores positivos acotados $P_\pm$ y una función $f \in C_0^\infty$ con $f = 1$ en I y $b > 0$ tales que Las funciones $m_{b\pm}(t)$ definidas por

$$m_{b\mp}(t) := \| F\{B_{b|t|}\} e^{\mp itH_0} g(H) f(H_0) P_\pm \| \in L^1 \quad (118a)$$

Además, $P_+ + P_- = 1$ (119)

$$y \quad m_{b_\pm}(t) \to 0 \quad \text{cuando } t \to +\infty \tag{120}$$

DEMOSTRACION : Tomemos $I_0 \supset I$ con $I_0 \cap (S_0 \cup C_0) = \phi$ y una función $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $f \equiv 1$ en I y $\operatorname{supp} f \subset I_0$ (121)

Sea $K_0 = P^{-1}(I_0)$ y $B_0 \equiv \{ v \mid \exists\, k \in K_0$ con $(\nabla P)(k) = v \}$ (121 a)

Ko es compacto y disjunto de $(S_p \cup C_p)$ y en consecuencia Bo es compacto y no contiene al origen.

Sea $b := \frac{1}{5}\, d(\vec{0}, B_0)$ (122)

$$ao := d(K_0, S_p \cup C_p) = \inf_{\substack{k \in K_0 \\ k' \in S_0 \cup C_0}} |k - k'| \tag{123}$$

Denotaremos por $B(q; r)$ la bola cerrada con centro en q y radio r. Para $q \in K_0$ y $a' < a_0$ definimos

$$D(q,a) := (\nabla P)(B(q; a')) := \{ v \mid \exists\, k \in B(q;a), (\nabla P)(k) = v \}$$

Por (123) ∇P está bien definido en $K_0 \cap B(q; a')$. Además, $D(q,a)$ es compacto y contiene a $(\nabla P)(q)$. Y

$$\sup_{q \in K_0} \sup_{|k-q| \le a'} |(\nabla P)(q) - (\nabla P)(k)| \le a' \sup_{q \in K_0} \sup_{|k-q| \le a'} \sum_{|\alpha| \le 2} |D^\alpha P|$$

$$\equiv a' \sup_{k \in K_{a'}} \sum_{|\alpha| \le 2} |(D^\alpha P)(k)|$$

(123a)

donde $$K_{a'} = \bigcup_{q \in K_0} B(q, a') \equiv \{ k \mid d(k, K_0) \le a' \} \tag{124}$$

Tomamos ahora a suficientemente pequeña, de tal manera que

$$a \sup_{k \in K_a} \sum_{|\alpha| \le 2} |D^\alpha P(k)| < b \quad y \quad a < a_0 \tag{125}$$

Para esta selección de a

$$D(q,a) \not\subset B((\nabla P)(q),b) \text{ para cada } q \in K_0 \qquad (126)$$

Sea $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{\nu})$ tal que $\operatorname{supp} \hat{\eta} \subset \{k \mid |k| \leq a\}$ (127)

Sea $A(\cdot)$ la medida (POV) sobre $\Omega = \mathbb{R}^{2\nu}$ dada por

$$\eta_{xk}(q) := e^{ik(q-x)}\,\eta(q-x) \qquad (128)$$

$$A(E) := (2\pi)^{-\nu} \int_E |\eta_{xk}\rangle\langle\eta_{xk}|\, dx\,dk \qquad (129)$$

Y definimos

$$P_+ := A(k \notin C_p \cup S_p \text{ y } x\cdot(\nabla P)(k) > 0) + \tfrac{1}{2} A(k \in S_p \cup C_p) \qquad (130)$$

$$P_- := A(k \notin S_p \cup C_p \text{ y } x\cdot(\nabla P)(k) \leq 0) + \tfrac{1}{2} A(k \in S_p \cup C_p) \qquad (131)$$

Por ser $A(\cdot)$ una medida (POV) obtenemos que $P_{\pm}$ son positivos y su suma es la identidad.

Demostraremos la mayorización para $m_{b_+}(t)$

Por (XXVIII)

$$[(A(\mathbb{R}^{\nu} \times (S_p \cup C_p))\psi]^{\wedge}(k) = \left\{ \int_{S_p \cup C_p} d^{\nu}z\, |\hat{\eta}(k-z)|^2 \right\} \hat{\psi}(k) \qquad (132)$$

y

$$f(H_0)\psi = \overbrace{f(P(k))\hat{\psi}} \qquad (133)$$

En consecuencia

$$[f(H_0)A(\mathbb{R}^{\nu} \times (S_p \cup C_p))\psi]^{\wedge} = f(P(k)) \left\{ \int_{C_p \cup S_p} |\hat{\eta}(k-z)|^2 d^{\nu}z \right\} \hat{\psi}(k)$$

Y por (121), $\text{supp}\ f(P(k)) \subset K_0$. Mientras que por (123),(125) y (127) se obtiene que

$$f(H_0)\, A(\mathbb{R}^\nu \times S_p \cup C_p) \equiv 0$$

En consecuencia, de (130)

$$f(H_0)\, P_{\pm} \equiv f(H_0)\, A(k \notin S_p \cup C_p,\ x\cdot(\nabla P)(k) \gtrless 0) \tag{134}$$

Pongamos $$M = \{ k \notin S_p \cup C_p,\ x\cdot(\nabla P)(k) \gtrless 0 \} \tag{135}$$

$$B(t) = F\{B_{b(t)}, x\}\, e^{+itH_0}\, g(k)\, f(H_0)$$

Entonces,

$$\|B(t)\, A(M)\varphi\|^2 = (B^*(t)B(t)\, A(M)\varphi,\ A(M)\varphi)$$

$$= \int_M \overline{\langle \eta_{xk},\ B^*(t)\, B(t)\, A(M)\varphi \rangle} \langle \eta_{xk}, \varphi\rangle\, d^\nu x\, d^\nu k$$

$$= \int_M \langle B(t)\, A(M)\varphi,\ B(t)\eta_{xk}\rangle \langle \eta_{xk}, \varphi\rangle\, d^\nu x\, d^\nu k$$

$(\|\eta\| = 1)$

$$\leq \|\varphi\| \left\{ \int_M |\langle B(t)\, A(M)\varphi,\ B(t)\eta_{xk}\rangle|^2\, d^\nu x\, d^\nu k \right\}^{1/2}$$

$$\leq \|\varphi\| \left\{ \int_M \|B(t)\eta_{xk}\|^2 \cdot \|B(t)\, A(M)\varphi\|^2 \right\}^{1/2}$$

$$\leq \|g(k) f(H_0)\| \, \|\varphi\|^2 \left\{ \int_M d^\nu x \, d^\nu k \left[\int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu y \, |(B(t)\eta_{xk})(y)|^2 \right] \right\}^{1/2}$$

$$\leq \|g(k) f(H_0)\| \, \|\varphi\|^2 \, w_\nu^{1/2}(t) \, (b(t))^{\nu/2} \left\{ \int_M d^\nu x \, d^\nu k \left[\sup_{|y| \leq b(t)} |(B(t)\eta_{xk})(y)|^2 \right] \right\}^{1/2}$$

(135a)

En consecuencia, solo tenemos que mayorizar

$$\left\{ \int_M d^\nu x \, d^\nu k \left[\sup_{|y| \leq b(t)} |(e^{itH_0} g(k) f(H_0) \eta_{xk})(y)|^2 \right] \right\}^{1/2} \qquad (136)$$

Como $\eta_{xk}(q) = e^{ik(q-x)} \eta(q-x)$ es una traslación es x de la función, $e^{ikq}\eta(q)$ y como cualquier operador conmuta con traslaciones, (136) es igual a

$$\left\{ \int_M d^\nu x \, d^\nu k \left[\sup_{|y| \leq b(t)} |(e^{itH_0} g(k) f(H_0) \hat{\tau}_k \eta)(y-x)|^2 \right] \right\}^{1/2}$$

(137)

donde $(\hat{\tau}_k \eta)(y) = e^{iky} \eta(y)$. Y

$$\operatorname{supp} [f(H_0) \hat{\tau}_k \eta]^\wedge (z) = \operatorname{supp} f(p(z)) \, \widehat{e^{iky} \eta(y)}$$

$$= \operatorname{supp} f(p(z)) \, \hat{\eta}(z-k)$$

(De (121) y (127))

$$\subset K_0 \cap B(k; a) \qquad (137a)$$

Entonces, de (124)

$$\left[f(H_0)\, \gamma_k\, \eta \right]^{\wedge}_{(z)} \equiv 0 \qquad \text{si} \quad k \notin K_a \tag{138}$$

Y de (123a) y (125) , la imagen de ∇P sobre $K_0 \cap B(k;a)$ está contenida en

$$B_0 \cap B((\nabla P)(k); b) \quad \text{para} \quad k \in K_a \tag{139}$$

Por otro lado, para k fijo, cuando $|y| \leq b|t|$ y

$$x \cdot (\nabla P)(k) \leq 0 \quad , \quad t \geq 0$$

$$y - x/t \cdot (\nabla P)(k) = y/t \cdot (\nabla P)(k) - x/t \cdot (\nabla P)(k)$$

$$\leq y/t \cdot \nabla P(k) \leq$$

$$\leq b\, |(\nabla P)(k)| \tag{140}$$

Y para $z \in K_0 \cap B(k;a)$, $k \in K_a$ de (139)

$$|(\nabla P)(k)| \geq |(\nabla P)(z)| - |(\nabla P)(k) - (\nabla P)(z)|$$

Usando (122)

$$\geq 5b - b = 4b$$

Poniendo $u_t = y - x/t =$ obtenemos

$$|u_t - (\nabla P)(k)|^2 = |u_t|^2 - 2(u_t, \nabla P(k)) + |(\nabla P)(k)|^2$$

Usando (140)

$$\geq |\nabla P(k)|^2 - 2b|\nabla P(k)|$$

$$> 4b^2 \tag{141}$$

Entonces, para $q \in B((\nabla P)(k); b)$

$$|u_t - q| \geq |u_t - (\nabla P)(k)| - |(\nabla P)(k) - q|$$

$$\geq 2b - b$$

De lo cual obtenemos que

$$d(u_t, B_0 \cap B((\nabla P)(k); b)) \geq d(u_t, B((\nabla P)(k); b)) \geq b$$

para todo $k \in K_a$, $(x, k) \in M$ y $|y| \leq b|t|$

Aplicando el lema (XI X) obtenemos una constante C'_ℓ independiente de y, x, t y k

tal que

$$\left\{ \int_M d^\nu x \, d^\nu k \left[\sup_{|y| \leq b|t|} |(e^{itH_0} g(k) f(H_0) \hat{\tau}_q \eta)(y-x)| \right]^2 \right\}^{1/2}$$

$$\leq C'_\ell \left\{ \int_M d^\nu x \, d^\nu k \quad d(y-x, tB((\nabla P)(k); b))^{-2\ell} \| g(k) f(H_0) \hat{\tau}_q \eta \|_{\ell,\infty} \right\}^{1/2}$$

y de (138) y (141) vemos que la región de integración en la varible k está contenida en Ka y en la variable x está contenida en la región

$$|u_t - (\nabla P)(k)| \geq 2b$$

Para k fijo, $k \in K_a$, haciendo $s = b^{-1}(u_t - (\nabla P)(k))$

$$d(y-x, tB((\nabla P)(k); b)) = |t| \, d(u_t, B((\nabla P)(k), b))$$

$$= |t| (|u_t - (\nabla P)(k)| - b|$$

$$= |t| b (|s| - 1)$$

Por lo que (142) es igual que

$$C'_\ell \left\{ \int_{K_a} d^\nu k \, \| [g(k)\, f(H_0)\, \hat{\tau}_k\, \eta]^\wedge \|^2_{\ell,\infty} \int d^\nu x \, d(y-x, tB(\nabla P(k)\cdot, b))^{-2\ell} \right\}^{1/2}$$

$$= C'_\ell \left\{ \int_{K_a} d^\nu k \, \| [g(k)\, f(H_0)\, \tau_k\, \eta]^\wedge \|^2_{\ell,\infty} \right\}^{1/2} \left\{ \int_{r \geq 2} dr \, (r-1)^{-2\ell}\, r^{\nu-1} \right\}^{1/2} (b|t|)^{\nu/2-}$$

Como Ka es compacto la integral con respecto a la variable k es convergente. De (135a) obtenemos que

$$\| F\{B_{b|t|}, x\}\, e^{-itH_0}\, g(k)\, f(H_0)\, P_- \| \leq C_\ell (b|t|)^{\nu-\ell} \qquad (142a)$$

Tomando $\ell \geq \nu + 2$ y notando que

$$\| F\{B_{b|t|}, x\}\, e^{-itH_0}\, g(k)\, f(H_0)\, P_- \| \leq \| g(k)\, f(H_0) \| \quad \forall\, t \geq 0$$

Obtenemos (118a) y (120) para $m_{b_+}(t)$.

Para $m_{b_-}(t)$ se procede similarmente.

Con esto ya podemos demostrar el lema 3.2.1

DEMOSTRACION :

Sea I un intervalo compacto disjunto de $S_\nu \cup C_\nu$ y tomemos $I_0 \supset I$ con I_0 también disjunto de $S_\nu \cup C_\nu$. Sea $f \in C_0^\infty$ con $f \equiv 1$ sobre I y $\operatorname{supp} f \subset I_0$ Y sean $P_\pm$ los operadores del lema 3.2.4. Pongamos $R_\mp = f(H_0)P_\pm f(H_0)$ Por el lema 3.2.2 se concluye que (115) se cumple.

Puesto que $f \equiv 1$ en I, obtenemos que

$$\| (\Omega^\mp - 1) R_\mp (e^{\pm itH} e^{\mp itH_0} - 1) P_{ac}(H_0) R_= \|$$

$$= \| (\Omega^\mp - 1) P_0(I) R_= - (e^{\pm itH} e^{\mp itH_0} - 1) P_0(I) R_= \|$$

$$= \| P(I_1) \{ (\Omega^\mp - 1) P_0(I) R_= - (e^{\pm itH} e^{\mp itH_0} - 1) P_0(I) R_= \} \|$$

$$+ \| P(I_1^c) \{ (\Omega^\mp - 1) P_0(I) R_= - (e^{\pm itH} e^{\mp itH_0} - 1) P_0(I) R_= \} \|$$

$$\leq 4 \| P(I_1^c) P_0(I) \| + \| P(I_1) \{ (\Omega^\mp - 1) - (e^{\pm itH} e^{\mp itH_0} - 1) \} P_0(I) R_= \|$$

$$\leq 4 \| P(I_1^c) P_0(I) \| + \| i \int_t^{+\infty} [P(I_1) e^{\pm isH} V e^{\mp isH_0} P_0(I) R_=] ds \|$$

$$\leq 4 \| P(I_1^c) P_0(I) \| + \int_t^{+\infty} ds \, \| P(I_1) V e^{\mp isH_0} P_0(I) f(H_0) P_= \|$$

Tomando por ejemplo, una sucesión $\{ I_1^{(k)} \}_{k=1}^{+\infty}$, de intervalos acotados tales que (H es subordinado a Ho)

$$\| P (I_1^{(k)^c}) P_o (I) \| \leq 1/2^n \quad \text{y} \quad \{ t_n \}_{n=1}^{+\infty} \quad \text{tal que}$$

$$\int_{t_n}^{+\infty} \| P(I_1^{(n)}) V e^{\mp i t H_o} P_o(I) f(H_o) P_{\pm} \| \leq 1/2^n \qquad (143)$$

Oobtendremos que

$$\| (\Omega^{\mp} - 1) R_{\mp} - (e^{\pm i t_n H} e^{\mp i t_n H_o} - 1) R_{\mp} \| \to 0 \text{ cuando } t_n \to +\infty$$

Por el lema 2.2.2 se concluye (114). Para que se cumpla (143) es suficiente con que veamos que para cada intervalo I_1 acotado :

$$\int_0^{+\infty} dt \, \| P (I_1) V e^{\mp i t H_o} P_o (I) f(H_o) P_{\pm} \| < +\infty \qquad (143a)$$

$$\int_0^{+\infty} \| P (I_1) V e^{\mp i t H_o} P_o(I) f(H_o) P_{\pm} \| \leq$$

$$\int_0^{+\infty} dt \, \| P (I_1) V g(k)^{-1} F\{ B_{b(t)}, X \} e^{\mp i t H_o} P_o (I) g(k) f(H_o) P_{\pm} \|$$

$$+ \int_0^{+\infty} dt \, \| P(I_1) V g(k)^{-1} F\{ B^c_{b(t)}, X \} e^{\mp i t H_o} P_o(I) g(k) f(H_o) P_{\pm} \|$$

$$\leq \| P (I_1) V g(k)^{-1} \| \int_0^{+\infty} m \, b_{\mp}(t) \, dt$$

$$+ \| g(k) f(H_o) \| \int_0^{+\infty} h_{I_1}(b(t)) \, dt$$

La primera integral es finita por el lema 3.24 . Mientras que la segunda por (113). Finalmente, para $\varphi \in P_{ac}(H)$

$$\| R^*_{\mp} e^{\mp itH} \varphi \| \leq \| R^*_{\mp} (1 - (\Omega^{\mp})^*) e^{\pm itH} \varphi \| + \| R^*_{\mp} (\Omega^{\mp})^* e^{\pm itH} \varphi \|$$

(Usando que $e^{itH_0} (\Omega^{\pm})^* = (\Omega^{\pm})^* e^{itH}$)

$$= \| R^*_{\mp} (1 - (\Omega^{\mp})^*) e^{\pm itH} \varphi \| + \| R^*_{\mp} e^{\pm itH_0} (\Omega^{\mp})^* \varphi \|$$

$$\leq \| R^*_{\mp} (1 - (\Omega^{\mp})^*) e^{\pm itH} \varphi \|$$

$$+ \| R^*_{\mp} e^{\pm itH_0} g(R) F\{B_{b|t|}, X\} \{ g(R)^{-1} (\Omega^{\mp})^* \varphi \|$$

$$+ \| R^*_{\mp} e^{\pm itH_0} g(R) F\{B^c_{b|t|}, X\} g(R)^{-1} (\Omega^{\mp})^* \varphi \|$$

$$\leq \| R^*_{\mp} e^{\pm itH_0} g(R) \| \, \| F\{B^c_{b|t|}, X\} g(R)^{-1} (\Omega^{\mp})^* \varphi \|$$

$$+ \| F\{B_{b|t|}, X\} e^{\pm itH_0} g(R) f(H_0) P_{\mp} \| \, \| \varphi \|$$

$$+ \| R^*_{\mp} (1 - (\Omega^{\mp})^*) e^{\pm itH} \varphi \|$$

El primer término obviamente decrece cuando $t \to +\infty$

El segundo por (120). Mientras que el tercero por (114) y debido a que $e^{\pm itH} \varphi \xrightarrow{w} 0$

Con esto se demuestra el lema 3.2.4 ▲

Con esto termina la demostración del teorema.

Nota 22 El lema 3.2.1 implica el principio de descomposición de Enss. Pues sea φ_n una sucesión de vectores unitarios con $P(I)\varphi_n = \varphi_n$ y $\varphi_n \xrightarrow{w} 0$. Poniendo

$$\varphi_n = (\mathbb{1} - \Omega^+) R_+ \varphi_n + (\mathbb{1} - \Omega^-) R_- \varphi_n + R_0 \varphi_n$$

y definiendo

$$\varphi_{n,in} := R_+ \varphi_n$$

$$\varphi_{n,out} := R_- \varphi_n$$

$$\varphi_{n,w} := R_0 \varphi_n$$

obtenemos que

$$\varphi_n = \varphi_{n,w} + \varphi_{n,in} + \varphi_{n,out}$$

a) $\|\varphi_{n,w}\| \to 0 \quad n \to +\infty$

b) $\|(\mathbb{1} - \Omega^{\pm})\varphi_{n,\substack{in\\out}}\| \to 0 \quad n \to +\infty$

c) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|(H_0 + i\mathbb{1})\varphi_{n,\substack{in\\out}}\| < +\infty$

d) $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \|F\{B_{b|t|}\}(x)\, e^{\mp itH_0}\, g(k)\, \varphi_{n,\substack{out\\in}}\|$ donde b depende unicamente del intervalo I.

(d es una consecuencia de 120)

El siguiente teorema es una consecuencia del teorema 3.2

TEOREMA 3.3 Sea Ho un operador autoadjunto y V una forma cuadrática positiva tales que

a) $H_0 = P(-i\nabla)$ con P vagamente elîptica y $P \geq 0$.

b) $H = H_0 \dotplus V$ es una forma cuadrática cerrada sobre

$$Q(H_0) \cap Q(V) \quad \text{con} \quad Q(H_0) \cap D(\mathbb{R}^{2N})$$

como un núcleo de forma. $Q(V) \supset D(\mathbb{R}^{2N})$

c) $V = W^* U$ Es decir, U Y W son operadores de $D(\mathbb{R}^{2N})$ a $\mathcal{H}$ a H. tales que

$$(\phi, V\psi) = (W\phi, U\psi)$$

d) $W(H+1)^{-1/2}$ es acotado

e) La función $h(R)$ definida por

$$h(R) := \| U(\mathbb{R}^{2N}+1)^{-1} F\{B_R^c, x\} \| \in L^1$$

y es acotada.

Entonces, las concluciones del teorema 3.2 se cumplen.

DEMOSTRACION : Solo tenemos que ver silas hipótesis del teorema 3.2 se cumplen. Primero notemos que por c) $(\phi, V\psi) = (W\phi, V\psi)$ para $\phi, \psi \in D(\mathbb{R}^{2N})$ Mientras que por b) $Q(H_0) \cap D(\mathbb{R}^{2N})$ es un núclęo de forma para H. Por la cual dado $\phi \in Q(H)$ existe una sucesión $\phi_n \in Q(H_0) \cap D(\mathbb{R}^{2N})$ tal que

$$\phi_n \to \phi \quad \text{en norma. y} \quad H^{1/2}\phi_n \to H^{1/2}\phi \qquad (144)$$

Entonces, de b)

$$\| H^{1/2}(\phi - \phi_n)\|^2 = \| H_0^{1/2}(\phi - \phi_n)\|^2 + (V(\phi - \phi_n), \phi - \phi_n) \to 0 \qquad (144a)$$

Como $V \geq 0$,esto implica que

$$(\phi - \phi_n , V (\phi - \phi_n)) \to 0 \qquad n \to +\infty$$

En consecuencia, si $\psi \in Q(H)$ por b)

$$| (\phi , V \psi) - (\phi_n , V \psi) | = | (H^{1/2} (\phi - \phi_n) , H^{1/2} \psi) - (H_0^{1/2} (\phi - \phi_n) , H_0^{1/2} \psi) |$$

$$\leq \| H^{1/2} (\phi - \phi_n) \| \; \| H^{1/2} \psi \| + \| H_0^{1/2} (\phi - \phi_n) \| \; \| H_0^{1/2} \psi \|$$

$$\to 0$$

por (144a)

Finalmente, si $\psi \in Q(H) \cap D(k^{2N})$, por c)

$$(\phi , V \psi) = \lim_{n \to +\infty} (\phi_n , V \psi) = \lim_{n \to +\infty} (W \phi_n , U \psi) = (W \phi , U \psi)$$

La última igualdad se debe a (144) y d)

Por lo tanto, para $\phi \in Q(H)$, $\psi \in D(k^{2N}) \cap Q(H)$

$$(\phi , V \psi) = (W \phi , U \psi) \tag{145}$$

Sean φ y η dos vectores cualesquiera, entonces

$$< \varphi , [W (H + 1)^{-1}]^* [U (H_0 + 1)^{-1} (k^{2N} + 1)^{-1}] \eta >$$

$$= < W (H + 1)^{-1} \varphi , U (H_0 + 1)^{-1} (k^{2N} + 1)^{-1} \eta >$$

(Usando (145))

$$= \langle (H+1)^{-1}\varphi, V(H_0+1)^{-1}(R^{2N}+1)^{-1}\eta \rangle$$

$$= \langle H^{1/2}(H+1)^{-1}\varphi, H^{1/2}(H_0+1)^{-1}(R^{2N}+1)^{-1}\eta \rangle - \langle H_0^{1/2}(H_0+1)^{-1}\varphi,$$

$$\times H_0^{1/2}(H_0+1)^{-1}(R^{2N}+1)^{-1}\eta \rangle$$

$$= \langle H(H+1)^{-1}\varphi, (H_0+1)^{-1}(R^{2N}+1)^{-1}\eta \rangle - \langle (H+1)^{-1}\varphi, H_0(H_0+1)^{-1}$$

$$\times (R^{2N}+1)^{-1}\eta \rangle$$

$$= \langle \varphi, (H_0+1)^{-1}(R^{2N}+1)^{-1}\eta \rangle - \langle (H+1)^{-1}\varphi, (R^{2N}+1)^{-1}\eta \rangle$$

$$= \langle \varphi, [(H_0+1)^{-1} - (H+1)^{-1}](R^{2N}+1)^{-1}\eta \rangle$$

En consecuencia,

$$[W(H+1)^{-1}]^{*}[U(H_0+1)^{-1}(R^{2N}+1)^{-1}] = [(H_0+1)^{-1} - (H+1)^{-1}] \times (R^{2N}+1)^{-1} \qquad (146)$$

Ahora bien,

$F\{B_{R,x}\}(H_0+1)^{-1}$ es compacto. Y por c) obtenemos que

$U(H_0+1)^{-1}(R^{2N}+1)^{-1} = U(R^{2N}+1)^{-1}(H_0+1)^{-1}$ es compacto.

Usando , d) y (146) obtenemos que

$$[(H_0+1)^{-1} - (H+1)^{-1}](R^{2N}+1)^{-1} \quad \text{es compacto} \qquad (147)$$

Y para cada intervalo acotado I,

$$[(H_0+1)^{-1} - (H+1)^{-1}]P_0(I) = [(H_0+1)^{-1} - (H+1)^{-1}](R^{2N}+1)^{-1}(R^{2N}+1)P_0(I)$$

es compacto (148)

Esto demuestra que H es subordinado a Ho, por la proposición 1.1.1 . Y por otro lado, de b)

sabemos que $Q(H) \supseteq Q(H_0) \cap Q(W) \subset Q(H_0)$. Entonces

$$(H_0+1)^{1/2}(H+1)^{-1/2} \text{ es acotado.} \qquad (149)$$

De (146) y (149) yla proposición 1.1.1 obtenemos que

$$(H+1)^{-1}-(H_0+1)^{-1} \qquad (150)$$

es compacto .

Si I es un intervalo compacto.

$$\int_0^{+\infty} \| P(I)\, V\, (R^{2N}+1)^{-1} F\{B_R^c, x\} \| \, dR$$

$$= \int_0^{+\infty} \| (H+1)^{1/2} P(I) (H+1)^{-1/2}\, V\, (R^{2N}+1)^{-1} F\{B_R^c, x\} \| \, dR$$

(151)

Aquí existe un pequeño detalle. En (145) demostramosque para

$$\varphi \in Q(H), \quad \psi \in D(R^{2N}) \cap Q(H)$$

Si esto mismo fuera cierto para $\varphi \in Q(H)$, $\psi \in D(R^{2N})$, entonces podríamos estimar

(151) Como

$$\| (H+1)^{+1/2} P(I) \| \; \| (H+1)^{-1/2} W^* \| \int_0^{+\infty} \| U (R^{2N}+1)^{-1} F\{B_R^c, x\} \| \, dR$$

Y entonces estaríamos hechos. A pesar de que está estimación en general no es cierta, la hipótesis(f) junto con (145) son suficientes para que las estimaciones hechas en la demostración del teorema 3.2 sigan siendo válidas en este caso. Para ver esto solo tenemos que hacer notar que las únicas estimaciones que difieren son para demostrar la existencia de los operadores de onda y la demostración del lema 3.2.1 . Todo lo demás sigue siendo cierto para este caso d -

bido a (150). El único cambio en la demostración del lema 3.2.1 es para probar (143a), mientras que el del lema 3.2.3 es para probar (118b). Probaremos (118 b) para este caso, ya que para probar (143 a) se usa el mismo argumento.

Sean I_1, $\bar{I}$ intervalos compactos. Y sea $\varphi \in \mathcal{D}$ con $P_0(\bar{I})\varphi = \varphi$. Ahora notemos que $\mathrm{Ran}\; P_0(\bar{I}) \subset D(H_0^{1/2}) \cap D(k^{2N}) \equiv Q(H) \cap D(k^{2N})$

Entonces de (145),

$$\int_{\pm 1}^{\pm\infty} \| P(I_1) V e^{-itH_0} \varphi \| \, dt$$

$$= \int_{\pm 1}^{\pm\infty} dt \, \| P(I_1) V P_0(\bar{I}) e^{-itH_0} \varphi \|$$

$$= \int_{\pm 1}^{\pm\infty} dt \, \| P(I_1) W^* U P_0(\bar{I}) e^{-itH_0} \varphi \|$$

$$\leq \| W P(I_1) \| \int_{\pm 1}^{\pm\infty} dt \, \| U (k^{2N}+1)^{-1} F\{ B_{b|t|} x \} (k^{2N}+1) e^{-itH_0} \varphi \|$$

$$+ \| W P(I_1) \|$$

$$\int_{\pm 1}^{\pm\infty} dt \, \| U (k^{2N}+1)^{-1} F\{ B^{c}_{b|t|} x \} (k^{2N}+1) e^{-itH_0} \varphi \| \qquad (151')$$

De aquí se siguen los mismos argumentos que antes.

SECCION 2

Como aplicación de estos teoremas, damos unos ejemplos en los que se cumplen las hipótesis de los teoremas anteriores,

Ejemplo 4.1

Sea $H_o = -\Delta$, $H = -\Delta + V$ tal que $V \geq 0$, con $\sup_\alpha (1+|\alpha|)^{2+\varepsilon} \left[\int_{\Delta_\alpha} |V(x)|\, dx \right] < +\infty$

Sea $H =$ Ho $\dot{+}$ V definido como suma de forma cuadráticas sobre $Q(H) = Q(H_o) \cap Q(V)$
Entonces se cumplen las hipótesis del teorema 3.

Como C_0^∞ (x - space) es núcleo de forma para Q (H), entonces $Q(H_o) \cap \mathcal{D}(k^{2N})$ es un núcleo de forma para toda $N \in \mathbb{N}$. Tomemos $2N > \nu$ y $U = W = |V|^{1/2}$
Así se cumplen b y c. Como $Q(H) = \mathcal{D}(H^{1/2}) \cong Q(H_o) \cap \mathcal{D}(V^{1/2}) \subset \mathcal{D}(W)$
Finalmente, para ver e) se cumple, solo hay que usar las notas 7 y 20 que nos aseguran que la condición e) esequivalente a que

$$\int_1^{+\infty} \| U j_{\geq R} (k^{2N}+1)^{-1} \| dR < +\infty$$

Por otro lado usando el corolario 1 obtenemos que

$$\| U j_{\geq R} (k^{2N}+1)^{-1} \| \leq c \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^\nu} \left\{ \int_{\Delta_\alpha} | U j_{\geq R} |^2 d^\nu x \right\}^{1/2}$$

$$= c \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^\nu} \left\{ \int_{\Delta_\alpha} |V(x)| \, | j_{\geq R}(x) |^2 \, d^\nu x \right\}^{1/2}$$

$$(0 \leq j_{\geq R} \leq 1 ; \quad j_{\geq R}(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| \leq R)$$

$$\leq C \sup_{|\alpha| \geq R - \sqrt{\nu}/2} \frac{(1+|\alpha|)^{1+\varepsilon/2}}{(1+|\alpha|)^{1+\varepsilon/2}} \left\{ \int_{\Delta_\alpha} |V(x)| \, d^\nu x \right\}^{1/2}$$

$$\leq \frac{C}{(1+R-\sqrt{\nu}/2)} \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^\nu} \left\{ (1+|\alpha|)^{2+\varepsilon} \int_{\Delta_\alpha} |V(x)| \, d^\nu x \right\}^{1/2}$$

$$\leq C' / (1+R-\sqrt{\nu}/2)^{1+\varepsilon/2}$$

Así se obtiene que;

$$\int_1^{+\infty} \| U j_{\geq R} (k^{2N}+1)^{-1} \| \, dR < +\infty$$

y en consecuencia

e) se cumple. Entonces, todas las concluciones del teorema 3.3 se cumplen para H, Ho.

Ejemplo 4.2 Sea $H_o = -\Delta$, $H = -\Delta + V$ con $V \geq 0$ tal que
$$\sup_\alpha (1+|\alpha|)^{1+\varepsilon} \left[\int_{\Delta_\alpha} |V(x)|^p \, d^\nu x \right] < +\infty$$
con

i) $p = 1$ para $\nu = 1$

ii) $p > 1$ para $\nu = 2$

iii) $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\varepsilon}$ para $\nu \geq \varepsilon$

Sea $2N > \nu$

Como en el ejemplo anterior, se cumple la condición b) del teorema 3.3 Pongamos

$\tilde{V} = (1+|x|)^{1+\varepsilon} V$. Definimos entonces $U = |\tilde{V}|^{p/2} (1+|x|)^{-1-\varepsilon}$

$$W = |\tilde{V}|^{p/s}$$

donde $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{s}$

En consecuencia, $(1+|x|)^{1+\varepsilon} U \in L^2_{\mu}$

y como en el ejemplo anterior se cumple la condición e)

del teorema 3.3 y un simple calculo muestra que $W \in L^s_u$

donde $s = 2$ para $\nu = 1$

$s = \frac{2}{2-p}$ Para $\nu = 2$

$s = \nu + \varepsilon$, $\nu \geq 3$

Del corolario II obtenemos que

$\| W (H_0 + 1)^{-1/2} \| < +\infty$ y en consecuencia $W(H+1)^{-1/2}$ es un operador acotado. Y entonces se cumplen todas las hipótesis

del teorema 3.3

Podemos resumir estos dos ejemplos en elsiguiente

TEOREMA 3.4 Sea $H = -\Delta + V$ definido como suma de formas cuadráticas. Supongamos que $V = V_1 + V_2$ con $V_i \geq 0$ y

a) $\sup_\alpha (1+|\alpha|)^{2+\varepsilon} \left[\int_{\Delta_\alpha} |V_1(x)| \, d^\nu x \right] < +\infty$

b) $\sup_\alpha (1+|\alpha|)^{1+\varepsilon} \left[\int_{\Delta_\alpha} |V_2(x)|^p \, d^\nu x \right] < +\infty$

donde

. Entonces H, Ho cumplen las concluciones del teorema 3.3.

Ejemplo 4.3 De hecho el teorema anterior sigue siendo cierto si unicamente suponemos que

$0 \leq (1+|x|)^{1+\varepsilon} V \in L^1_u$

Siguiendo a Davies <17>, notemos que e^{-tH_0} es un operador que preserva positividad. Es decir, si $\varphi \in L^2$ y $\varphi(x) \geq 0$ puntualmente, entonces $(e^{-tH_0}\varphi)(x) \geq 0$ puntualmente. Esto se ve del hecho que

$$(e^{-tH_0}\varphi)(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2} \int h(x-y)\, \varphi(y)\, d^\nu y$$

donde

$$h(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu/2} \int_{\mathbb{R}^\nu} e^{-t|k|^2} e^{ix\cdot k}\, d^\nu k$$

$$= \frac{2^\nu}{(2\pi)^{\nu/2}} \left(\int_0^{+\infty} e^{-tk_1^2} \cos x_1 k_1\, dk_1\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-tk_2^2} \cos x_2 k_2\, dk_2\right.$$

$$\left. \times \dots \times \int_0^{\infty} e^{-tk_\nu^2} \cos x_\nu \cdot k_\nu\, dk_\nu \right) \geq 0$$

Supongamos que $\varphi \geq 0$. Entonces, puesto que $|e^{-sV}| \leq 1$ ya que $V(x) \geq 0$, obtenemos que

$$e^{-sH_0}(1 - e^{-sV})\varphi \geq 0$$

$\Rightarrow$

$$0 \leq (e^{-sH_0} e^{-sV})\varphi \leq e^{-sH_0}\varphi$$

$$\Rightarrow \quad (e^{-sH_0} e^{-sV})^2 \varphi \leq (e^{-sH_0} e^{-sV})\, e^{-sH_0}\varphi$$

$$\leq e^{-2sH_0}\varphi$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq (e^{-t/n\, H_0} e^{-t/n\, V})^n \varphi \leq e^{-tH_0}\varphi$$

Usando que

$$\operatorname*{s-lim}_{n \to \infty} (e^{-t/n\, H_0} e^{-t/n\, V})^n = e^{-tH}$$

(Para esto ver) ([8])

Obtenemos por un lado que e^{-tH} preserva positividad y por otro lado se concluye que

$$0 \leq e^{-tH}\varphi \leq e^{-tH_0}\varphi$$

Además, como en general

$$(A+1)^{-1} = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, e^{-tA}\, dt \qquad A \geq 0$$

para

Obtenemos que $(H+1)^{-1}$ y $(H_0+1)^{-1}$

preservan positividad y

$$0 \leq (H+1)^{-1}\varphi \leq (H_0+1)^{-1}\varphi \qquad (151\ a)$$

Sea ahora A un operador en $H = L^2(\mathbb{R}^\nu)$ que preserva positividad y pongamos

$$\varphi_+ = \max\{\varphi, 0\}$$

$$\varphi_- = -\min\{\varphi, 0\}$$

$$\varphi_+ ,\ \varphi_- \geq 0$$

Puntualmente

$$|\varphi(x)| = \varphi_+(x) + \varphi_-(x)$$

$$|\varphi(x)| = \varphi_+(x) - \varphi_-(x)$$

Entonces $|(A\varphi)(x)| = |A(\varphi_+)(x) - (A\varphi_-)(x)|$

$$\leq (A\varphi_+)(x) + (A\varphi_-)(x)$$

$$= (A|\varphi|)(x)$$

Usando esto, (151a) y el hecho que $V(x) \geq 0$ obtenemos que para α, β, enteros

$$\| (H+1)^{-\alpha} V (H_0+1)^{-\beta} F\{B_R^c, x\} \|$$

$$= \sup_{\|\psi\|=1} \| (H+1)^{-\alpha} V (H_0+1)^{-\beta} F\{B_R^c, x\} \psi \|$$

$$\leq \sup_{\|\psi\|=1} \| (H_0+1)^{-\alpha} V (H_0+1)^{-\beta} F\{B_R^c, x\} \psi \|$$

Usando las notas 7 y 20 obtenemos que

$$\int_0^{+\infty} \| (H_0+1)^{-\alpha} V (H_0+1)^{-\beta} F\{B_R^c, x\} \| \, dR < +\infty$$

si y solo si

$$\int_1^{+\infty} \| (H_0+1)^{-\alpha} V j_{\geq R} (H_0+1)^{-\beta} \| \, dR$$

Tomemos $\alpha = \beta = N$, tal que $2N > \nu$

Como

$$\|A^* A\| = \|A\|^2$$

$$\Rightarrow \| (H_0+1)^{-\beta} V j_{\geq R} (H_0+1)^{-\beta} \|$$

$$= \| V^{1/2} (j_{\geq R})^{1/2} (H_0+1)^{-\beta} \|$$

$$\leq C \| V^{1/2} (j_{\geq R})^{1/2} (k^{2N}+1)^{-1} \|$$

(Usando el corolario I)

$$\leq c' \sup_{|\alpha| \geq R - \sqrt{\nu}/2} \int_{\Delta \alpha} |V(x)| \, d^\nu x$$

Y como en el ejemplo 4.1

Obtenemos que esto último está en $L^1(\mathbb{R}^+, dR)$

Además, H y Ho son mutuamente subordinados. De este modo se cumplen las hipótesis del teorema 2.1 tomando $\alpha = \beta = N$. Y así se verifica lo afirmado.

Ejemplo 4.4

Sea $H_o = -\Delta$ $\quad H = -\Delta + V$ (definido como suma de formas cuadráticas) donde $V \equiv \mu$ una medida finita en $\mathbb{R}$, tal que $\sup_{\alpha} \int_{\alpha}^{\alpha+1} (1+|x|)^{2+\varepsilon} d\mu < +\infty$, entonces H y Ho cumplen las hipótesis del teorema.

Para ver esto, notemos que $Q(V)$

$$\equiv \{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}) \mid \int |\varphi|^2 d\mu(x) < +\infty \}$$

Usando el Corolario II se desprende que

$$\| V^{1/2} \varphi \|_2^2 = \int |\varphi|^2 d\mu(x) \leq \| \varphi \|_\infty^2 \, \mu(\mathbb{R})$$

$$\leq \varepsilon \, \mu(\mathbb{R}) \, \| H_0^{1/2} \varphi \|_2^2 + C_\varepsilon \, \mu(\mathbb{R}) \, \| \varphi \|_2^2 \qquad (151b)$$

Entonces $Q(V) \supset Q(H_o)$ y $Q(H_o) \cap Q(V) = Q(H_o) = Q(H)$

Usando que $Ho^{\frac{1}{2}}$ es escencialmente autoadjunto en $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ y (151b) se obtiene que $\mathcal{S}_0^{\infty}(\mathbb{R}\text{-space}) \subset Q(H_0) \cap D(\mathbb{R}^{2N})$ es un núcleo de forma para cada $N \in \mathbb{N}$. Así se cumple b). Tomamos $N = 1$

Entonces,

de (151b), $(1-\Delta)^{-1/2}\mu(1-\Delta)^{-1/2} \equiv A$ define un operador acotado, ya que

$$\|(1-\Delta)^{-1/2}\mu(1-\Delta)^{-1/2}\varphi\|^2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |((1+\mathbb{k}^2)^{-1/2}\varphi)(x)|^2 \, d\mu(x)$$

$$\leq C\|\varphi\|^2$$

Se toma $\quad U = W = A^{1/2}(1-\Delta)^{1/2}$

Entonces

$$D(U) = D(W) \supset D(\mathbb{R}^2)$$

y

$$W^*U = (1-\Delta)^{1/2}A(1-\Delta)^{1/2} = \mu \equiv V$$

Como $Q(H) = Q(Ho)$

$W(H+1)^{-1/2}$ es acotado. Así se cumple c) y d).

Finalmente, como en el ejemplo 4.1 para que se cumpla e) es suficiente con verificar que

$$\int_1^{+\infty} \|U j_{\geq R}(\mathbb{k}^2+1)^{-1}\| \, dR < +\infty \tag{151c}$$

Y como

$$\|U j_{\geq R}(\mathbb{k}^2+1)^{-1}\varphi\|^2 = (j_{\geq R}(\mathbb{k}^2+1)^{-1}\varphi, U^2 j_{\geq R}(\mathbb{k}^2+1)^{-1}\varphi)$$

$$= (j_{\geq R}(\mathbb{k}^2+1)^{-1}\varphi, \mu j_{\geq R}(\mathbb{k}^2+1)^{-1}\varphi)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \left((1-\Delta)^{-1} \varphi \right)(x) \right|^2 j^2_{\geq R}(x)\, d\mu(x)$$

Usando el lema (Va) y el hecho que

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{Z}} \int_{\alpha}^{\alpha+1} (1+|x|)^{2+\varepsilon}\, d\mu(x) < +\infty$$

se obtiene (151c)

Ejemplo 4.6 (Operadores de Dirac). Existen bastantes trabajos acerca de teoría de Colisiones para las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac (<19>, <32>, <56>, <63>, <80>, <86>, <91>, <72>, <45>, <81>, <53>, <19>, <56>, <64>, <85>)

Sea Ho $= k \cdot \alpha + m\beta$ Como en el ejemplo II.

Tomemos $V \equiv V_{ij}$ una matriz 4 x 4 con V_{ij} operadores de multiplicación de tal forma que $H = Ho + V$ sea autoadjunto en D (Ho)

Y supongamos además que existe N tal que (151d)

$$\| V_{ij} \, (1+R^{2N})^{-1} \, F\{B^{c}_{R}, \lambda\} \| \in L^1(R^+, dR)$$

para $i,j = 1, \ldots, 4$

entonces las conclusiones del teorema 3.1 son ciertas para Hy Ho.

Como en la demostración del teorema 3.1 es suficiente con probar el principio de descomposición de Enss para H y Ho. Primero veamos que Ho es también un sistema vagamente elíptico. Esto viene del hecho que K (Ver ejemplo II) es la suma directa de 4 operadores, siendo de ellos isomorfos al operador de multiplicación por $(1 + |k|^2)^{\frac{1}{2}}$ y 2, isomorfos al operador de multiplicación por $(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}$. Para ver esto, se introduce, para cada k fija, una nueva base ortonormal de $\mathbb{C}^4$ que consista de los eigen vectores de la matriz hermitiana $k\cdot\alpha + m\beta$. De (XVIIa), los únicos eigen vectores de esta matriz son $\pm (k^2+m^2)^{1/2}$ y es sabido que existen 2 eigen vectores para cada signo, formando un conjunto ortonormal para (para cada k fija).

Sea $u_+(k)$, $u_-(k)$, $v_+(k)$ y $v_-(k)$ los eigen vectores.

Entonces cualquier vector $\hat{\varphi}(k) = (\hat{\varphi}, \ldots, \hat{\varphi}_4$

se puede escribir de la forma

$$\hat{\varphi}(k) = \alpha_1(k)\,u_+(k) + \alpha_2(k)\,u_-(k) + \alpha_3(k)\,v_+(k) + \alpha_4\,v_-(k)$$

Como son ortonormales en $\mathbb{C}^4$ se deduce que

$$|\hat{\varphi}(k)|^2 = \sum_{i=1}^{4} |\alpha_i(k)|^2 = \sum_{i=1}^{4} |\hat{\varphi}_i(k)|^2 \qquad *$$

Más aún, se puede demostrar que los eigen vectores son analíticos en k. Entonces, si

$$\mathcal{U}_+ = \{ \varphi \mid \hat{\varphi}(k) = \alpha_1(k)\,u_+(k) + \alpha_2(k)\,v_+(k) \quad \sum_{i=1}^{2} \int |\alpha_i(k)|^2 d^3k < +\infty \}$$

$$\mathcal{U}_- = \{ \varphi \mid \hat{\varphi}(k) = \beta_1(k)\,u_-(k) + \beta_2(k)\,v_-(k) \quad \sum_{i=1}^{2} \int |\beta_i(k)|^2 d^3k < +\infty \}$$

cualquier vector $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ se puede escribir como

$\hat{\varphi} = \varphi_+ + \varphi_-$

$$\varphi_+ \in \mathcal{U}_+ , \quad \varphi_- \in \mathcal{U}_-$$

Como u_+, v_+, v_-, u_- son ortonormales en $\mathbb{C}^4$ se deduce que φ_+, φ_- son ortogonales en $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$. Usando (XVIIb) y $*$ se ve que $\psi \in D(K)$ si y solo si φ_+, φ_- estan en $D(K)$ y además

$$(H_0\psi)^\wedge(k) = (k^2+m^2)^{1/2}\varphi_+ - (k^2+m^2)^{1/2}\varphi_- \qquad * *$$

Entonces, como en el elam (IV), Ho tiene espectro absolutamente continuo. Asimismo como H y Ho tienen el mismo dominio, son mutuamente subordinados. Además,

$$\| V (1+|k|^{2N})^{-1} F\{B_R^c, x\} \|$$

$$\leq \sup_{i,j} \| V_{ij} (1+|k|^{2N})^{-1} F\{B_R^c, x\} \|$$

En consecuencia, como antes

$$(H+i\mathbb{1})^{-1} - (H_0+i\mathbb{1})^{-1} \qquad \text{es compacto.}$$

Usando $* *$ y esto último se puede copiar la demostración del principio de descomposición de Enss, del teorema 3.1

Por el corolario I vemos que (151d) se cumplirá si y solo si

$$\int_0^{+\infty} \sup_{|n| \geq R} \left[\int_{\Delta_n} |V_{ij}(x)|^2 \, d^\nu x \right] dR < +\infty$$

Ejemplo 4.7

Sea W una función de $\mathbb{R}^{\nu}$ en $\mathbb{R}^{\nu}$ y W^2 el operador de multiplicación en $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{\nu})$ por la función:

$$\sum_{j=1}^{\nu} W_j^2 \qquad \text{con} \qquad W = (W_1, \ldots, W_{\nu})$$

Sea $\mathcal{H}_0 = L^2(\mathbb{R}^{\nu}, \mathbb{C}^{\nu})$ como en el ejemplo II. Podemos considerar a W un operador de multiplicación de H en Ho como

$$W\varphi := (W_1\varphi, \ldots, W_{\nu}\varphi) \tag{151e}$$

Supongamos además que

$$4W^2 \leq a^2 (H_0 + 2b) \qquad H_0 = -\Delta \tag{151f}$$

(donde la desigualdad es en el sentido usual de operadores) entonces si definimos

$$\langle \varphi, V\varphi \rangle := -\langle \nabla\varphi, W\varphi \rangle_{\mathcal{H}_0} - \langle W\varphi, \nabla\varphi \rangle_{\mathcal{H}_0}$$

$$= -2\,\mathrm{Re}\,\langle \nabla\varphi, W\varphi \rangle_{\mathcal{H}_0}$$

V es una forma cuadrática sobre Q (Ho) con cota relativa a. Para ver esto, estimamos

$$|\langle \varphi, V\varphi \rangle| := 2|\mathrm{Re}\,\langle \nabla\varphi, W\varphi \rangle_{\mathcal{H}_0}|$$

$$\leq 2\|\nabla\varphi\|_{\mathcal{H}_0} \|W\varphi\|_{\mathcal{H}_0}$$

$$\leq a \{\langle \varphi, H_0\varphi \rangle_{\mathcal{H}} \langle \varphi, (H_0 + 2b)\varphi \rangle_{\mathcal{H}}\}^{1/2}$$

$$\leq a \langle \varphi, (H_0 + b)\varphi \rangle_{\mathcal{H}} \tag{151g}$$

Si a es menor que 1 podemos definir $H = Ho + V$ como suma de formas, utilizando el lema III

Tomemos $\nu = 3$ y supongamos que $(1+|x|)W_i^2 \in L^2_u$ $i = 1,2,3$.

Usando el lema VI obtenemos que W_i^2 es relativamente acotado con respecto a $Ho = -\Delta$ con cota relativa cero. Es decir, $\forall\ \varepsilon > 0$

$$\| W_i^2 \varphi \|_2 \leq \varepsilon \| H_0 \varphi \|_2 + C_\varepsilon \| \varphi \|_2$$

Como esto implica que $\forall\ \varepsilon' > 0$

$$(\varphi, |W_i|^2 \varphi) \leq \varepsilon' (\varphi, H_0 \varphi) + C'_\varepsilon \|\varphi\|^2$$

$$i = 1, 2, 3$$

se cumple entonces (151f) para $a < 1$

Entonces, definimos $H = Ho + V$ como suma de formas cuadráticas.

Para ver que H y Ho cumplen las hipótesis del teorema 3.3 b) se cumple ya que

$Q(H) = Q(Ho)$ y $Q(Ho) \cap D(k^2) = D(Ho)$

es un núcleo de forma para Q (Ho) y en consecuencia para Q (H) ya que V es relativamente acotada con cota cero.

Puesto que $Q(H) = Q(Ho)$ entonces

$$(\phi, V\psi) = -2 R_e (\nabla \varphi, W\varphi) \qquad (151\ h)$$

y en consecuencia (145) se cumple .

Usando el lema VI, se desprende que

$$\int_1^{+\infty} \| W_i\, j_{\nu,R} (k^2+1)^{-1} \| dR < +\infty \qquad (151\ i)$$

$i = 1, 2, 3$

ya que $(1+|x|)^{1+\epsilon} W_i$ también está en L^2_{u} (ver ejemplo 4.1).

(Además para I_1 e I intervalos acotados

$$\| P(I_1)\, V\, P_0(I)\,\varphi \| = \| P(I_1)\,[H - H_0]\, P_0(I)\,\varphi \|$$

$$= \sup_{\|\psi\|=1} |\langle \psi, P(I)[H - H_0] P_0(I)\,\varphi\rangle|$$

$$= \sup_{\|\psi\|=1} |\langle \psi, P(I_1) H P_0(I)\varphi\rangle - \langle \psi, P(I) H_0 P_0(I)\varphi\rangle|$$

$$= \sup_{\|\psi\|=1} |\langle P(I_1)\psi, H P(I_1) P_0(I)\varphi\rangle - \langle P(I_1)\psi, H_0 P_0(I)\varphi\rangle|$$

$$= \sup_{\|\psi\|=1} |\langle P(I_1)\psi, V P_0(I)\varphi\rangle$$

$$\leq \| \nabla P(I_1) \| \, \| W (P_0(I)\varphi \|$$

Como $Q(H_0) = Q(H)$

$$\| \nabla P(I_1) \|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)} < +\infty$$

Usando (151 i) obtenemos (151 ').

Por consiguiente, la demostración del teorema 3.3 es válida para este caso.

Se pueden tomar potenciales W que oscilen bastante. Por ejemplo,

$$W_i = \frac{x_i}{(1+|x|)^{3/2}} \cos(e^{|x|})$$

CAPITULO V

En este capítulo presentaremos el caso cuando Ho ya no es de la forma $H_o = P(-i\nabla)$, pero aún tiene una expansión en autofunciones. Seguiremos la demostración del teorema 3.1 e iremos dando los cambios necesarios para los casos que presentaremos (Simon <73>).

TEOREMA 4.1 Sean W y V funciones a valores reales sobre $\mathbb{R}$ con

a) $W(x+1) = W(x)$

b) $\int_0^1 |W(x)|\, dx < +\infty$

c) $\sup\limits_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} [(1+|x|)^{1+\varepsilon} |V(x)|]^2 < +\infty$

Sean $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V + W$ y $H_o = -\frac{d^2}{dx^2} + W$, definidos como suma de formas cuadráticas. Entonces, H y Ho obedecen las conclusiones del teorema 3.1.

DEMOSTRACION

El corolario II muestra que si $\varphi \in Q\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)$

$$\| |V|^{1/2}\varphi \|_2 \leq \varepsilon \| (-\Delta)^{1/2}\varphi \|_2 + C_\varepsilon \|\varphi\|_2$$

$$\| |W|^{1/2}\varphi \|_2 \leq \varepsilon \| (-\Delta)^{1/2}\varphi \|_2 + C'_\varepsilon \|\varphi\|_2 \qquad (152)$$

En consecuencia, del lema III, definimos H y Ho como los -- operadores asociados a las formas cuadráticas definidas sobre $Q\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)$ por ----

$$(\varphi, H\varphi) = (\varphi, -\Delta\varphi) + (\varphi, V\varphi) + (\varphi, W\varphi)$$

$$(\varphi, H_o\varphi) = (\varphi, -\Delta\varphi) + (\varphi, W\varphi)$$

La demostración está basada en la expansión en autofunciones de Ho $= -\frac{d^2}{dx^2} + W$. Listamos las propiedades de exta expansión. La demostración puede ser hallada en [13]

Sea $H_o = -\frac{d^2}{dx^2} + W$ cumpliendo a) y b) entonces existen funciones $\Phi_n(x,k)$, $-\infty < x < +\infty$, $-\pi \leq k \leq \pi$ y $\varepsilon_n(k)$ con las siguientes propiedades:

i) $\Phi_n(x,k) = e^{ikx}\, u_n(x,k)$ con $u_n(x+1,k) = u_n(x,k)$

ii) $\varepsilon_n(k)$ y $f(x)\, u_n(x,k)$ para $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ son analíticas en k para $k \in (0,\pi)$ y $(-\pi, 0)$ ($f u_n$ analítica como una función en L^2); son continuas en $[-\pi,\pi]$

iii) $\varepsilon_1(k) \leq \varepsilon_2(k) \leq \ldots \leq \varepsilon_n(k) \to +\infty$, con desigualdad estricta -- para $k \neq 0, \pm\pi$. $\varepsilon_n(k) = \varepsilon_n(-k)$

iv) Para $g \in L^1 \cap L^2$, $g_n^+(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\Phi_n(x,k)}\, g(x)\, dx$ cumple --

$$\sum_n \int_{-\pi}^{\pi} |g_n^+(k)|^2\, dk = \|g\|_2^2$$

v) Para $a_1, a_2, \ldots, a_n \in C_0^\infty\left[(-\pi,0)\cup(0,\pi)\right]$

$$a^b(x) = \sum_n \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(x,k)\, a_n(k)\, dk$$

cumple

$$\| a^b \|_2^2 = \sum_n \int_{-\pi}^{\pi} |a_n(k)|^2 \, dk$$

vi) b y t se extienden a operadores unitarios entre $L^2(\mathbb{R}, dx)$ y $\bigoplus_1^{+\infty} L^2(-\pi,\pi)$ y

son inversos el uno del otro.

vii) Para $g \in D(H_0)$

$$(H_0 g)^t_n(k) = \varepsilon_n(k) \; g^t_n(k)$$

Sea $-\Delta = -\frac{d^2}{dx^2} = k^2$, entonces

$$\| V \, F\{B_R^c, x\} (H_0 + i\mathbb{1})^{-1} \|$$

$$\leq \| V (F\{B_R^c, x\} (-\Delta + \mathbb{1})^{-1/2} \| \, \| (-\Delta + \mathbb{1})(H_0 + i\mathbb{1})^{-1/2} \|$$

$$\leq C \| V F\{B_R^c, x\} (k^2+1)^{-1/2} \|$$

Entonces, como en el ejemplo 3.1

$$\int_0^{+\infty} \| V F\{B_R^c, x\} (k^2+1)^{-1/2} \| \, dR < +\infty$$

En consecuencia, si

$$h(R) := \| V \, F(|x| \geq R)(H_0 + i\mathbb{1})^{-1} \| \tag{153}$$

$$\int_0^{+\infty} h(R) \, dR < +\infty \tag{154}$$

Notar que $h(R)$ es una función monótona decreciente.

Como $Q(H) = Q(H_0) = Q(-\frac{d^2}{dx^2})$, obtenemos que H y H_0 son mutuamente subordinados (155)

Del corolario II sabemos que

$V(k^2+1)^{-1/2}$ es acotado (156)

En consecuencia, $V(H + i\mathbb{1})^{-1}$ es un operador acotado. De este modo, -- $(H + i\mathbb{1})^{-1} V \, F\{B_R, x\} (H_0 + i\mathbb{1})^{-1}$, es un operador compacto debido a (155).

Entonces

$$\| (H+i\mathbb{1})^{-1} V (H_0+i\mathbb{1})^{-1} - (H+i\mathbb{1})^{-1} V F(|x|\leq R)(H_0+i\mathbb{1})^{-1} \| \leq h(R)$$
$$\to 0 \quad R\to +\infty$$

En consecuencia,

$$(H+i\mathbb{1})^{-1} - (H_0+i\mathbb{1})^{-1} \qquad \text{es compacto} \qquad (157)$$

Usando la proposición 4.3, para demostrar la existencia de los operadores, es suficiente con ver que para un conjunto denso $\mathcal{D}$ en $\operatorname{Ran} P_{ac}(H_0)$

$$\int_{\pm 1}^{\pm\infty} dt \, \| P(I_1)(H-H_0) \, P_0(I) \, e^{-itH_0} \varphi \| < +\infty$$

donde I_1, I son intervalos acotados y $\varphi \in \mathcal{D}$. Más adelante diremos quién es $\mathcal{D}$.

$$\int_{\pm 1}^{\pm\infty} dt \, \| P(I_1)(H-H_0) \, P_0(I) \, e^{-itH_0} \varphi \|$$

$$= \int_{\pm 1}^{\pm\infty} dt \, \| P(I_1) V P_0(I) e^{-itH_0} \varphi \|$$

$$\leq \int_{\pm 1}^{\pm\infty} dt \, \| P(I_1) V F\{ B^c_{\delta|t|}, x \} (H_0+i\mathbb{1})^{-1} \| \, \| (H_0+i\mathbb{1}) P_0(I) \varphi \|$$
$$+ \int_{\pm 1}^{\pm\infty} dt \, \| P(I_1) V F\{ B_{\delta|t|}, x\} e^{-itH_0} P_0(I) \varphi \|$$

$$\leq \| (H_0+i\mathbb{1}) P_0(I) \varphi \| \int_{\pm 1}^{\pm\infty} dt \, h(\delta|t|) + \| P(I_1) V \| \int_{\pm 1}^{\pm\infty} dt \| F\{ B_{\delta|t|}, x\} e^{-itH_0} P_0(I) \varphi \|$$

Entonces, es suficiente con demostrar que

$$\int_{\pm 1}^{\pm\infty} dt \, \| F\{ B_{\delta|t|}, x\} e^{-itH_0} P_0(I) \varphi \| < +\infty \qquad (158)$$

para algún $\delta > 0$.

Ahora se definen los valores críticos de Ho como los valores - $\mathcal{E}_n(0)$, $\mathcal{E}_n(\pm\pi)$ y el valor $\mathcal{E}_n(k_0)$ para cualquier n, ko con $\left(\frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial k}\right)(k_0) = 0$. Puesto que los $\mathcal{E}_n$ son analíticos y $\mathcal{E}_n \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$, los valores críticos son discretos en $\mathbb{R}$, es decir, su único punto límite es $+\infty$

Fijemos n y un intervalo $[a, b]$ en $(0,\pi)$ ó $(-\pi,0)$ que no contenga ningún punto crítico para $\mathcal{E}_n$. Sea $\mathcal{O}$ un abierto conteniendo el conjunto de velocidades $\left\{ \frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial k} \mid k \in [a,b] \right\}$. Si $\eta \in C_0^\infty(a,b)$ y $\psi(x) = \int_a^b \eta(k)\, \phi_n(x,k)\, dk$ con $x/t \notin \mathcal{O}$

Usando vii) , obtenemos que

$$\left(e^{-itH_0}\psi\right)^+_n(k) = e^{-i\mathcal{E}_n(k)t}\, \psi^+_n(k)$$

Y usando vi) y v) , obtenemos que

$$\left(e^{-itH_0}\psi\right)(x) = \int_a^b e^{-i\mathcal{E}_n(k)t}\, \phi_n(x,k)\, \eta(k)\, dk$$

(Usando i))

$$= \int_a^b \eta(k)\, u_n(x,k)\, e^{-i\mathcal{E}_n(k)t}\, e^{ik\cdot x}\, dk$$

$$= \int_a^b \eta(k)\, u_n(x,k) \left[-i\left(t\frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial k} - x\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial k}\right]^N e^{-i\mathcal{E}_n(k)t}\, e^{ikx}\, dk$$

Siguiendo los mismos argumentos que en el lema (XIX) , obtenemos que

$$\left|\left(e^{-itH_0}\psi\right)(x)\right| \le \left|\int_a^b dk\; e^{-i\mathcal{E}_n(k)t}\, e^{ikx} \left[i\left(x - t\frac{d\mathcal{E}_n}{dk}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial k}\right]^N \eta(k)\, u_n(x,k)\right|$$

$$\le C'_N \left(1+|x|+|t|\right)^{-N} \sum_{l=0}^{N} \int_a^b \left|\frac{d^{N-l}}{dk^{N-l}}\eta(k)\right| \left|\frac{\partial^l}{\partial k^l} u_n(x,k)\right|$$

$$\leq C'_N (1+|x|+|t|)^{-N} \sum_{\ell=0} \left(\int_a^b dk \left| \frac{d^{N-\ell}}{dk^{N-\ell}} \eta(k) \right|^2 \right)^{1/2} \left(\int_a^b \left| \frac{\partial^\ell}{\partial k^\ell} u_n \right|^2 dk \right)$$

$$\leq C_N (1+|x|+|t|)^{-N} \left\| \left(1 - \frac{d^2}{dk^2}\right)^N \eta \right\|_2 \qquad (159)$$

(.)

En la última desigualdad hemos usado el hecho que -----

$\frac{\partial^\ell}{\partial k^\ell} u_n(x,k)$ es una función periódica en x.

En consecuencia, para todo $-\infty < x < +\infty$

$$\int_a^b \left| \frac{\partial^\ell}{\partial k^\ell} u_n(x,k) \right|^2 dk \leq \sup_{y\in(0,1)} \int_a^b \left| \frac{\partial^\ell}{\partial k^\ell} u_n(y,k) \right|^2 dk < +\infty$$

Usando que los vectores de la forma $\psi(x) = \int_a^b \eta(x)\phi_n(x,k)\,dk$ con $[a, b]$ disjunto de los valores críticos, son densos en $\operatorname{Ran} P_{ac}(H_0)$ de (159) obtenemos (158) y por lo tanto los operadores de onda existen.

Sea ahora j una función sobre $(-\pi, \pi)$ que es definida -- positiva en el grupo. Es decir

$$\int_{-\pi}^{\pi} \bar{\eta}(k)\,(\eta * j)(k)\,dk \geq 0 \qquad (160)$$

y además,

$$\sum_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{imk} j(k)\,dk \qquad (161)$$

Sea $j_m(k) = e^{imk} j(k)$, definimos .

$$(A_m\psi)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (\eta * j_m)(k)\,\phi_n(x,k)$$

donde ψ es la forma $\psi = \int_a^b \eta(k)\,\phi_n(x,k)\,dk$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, para tales ψ tenemos que

$$(\psi, A_m\psi) = (\psi^{\dagger}, (A_m\psi)^{\dagger})$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \bar{\eta}(k)\,(\eta * j_m)(k)\,dk \qquad (162)$$

Como j_m cumple también (160) obtenemos que cada A_m es positivo .

Tomando $\eta(k) = \sum_{n=1}^{N} c_n e^{ink}$ con $N < +\infty$

y usando (161) y (162) se obtiene que

$$(\psi, \sum_{m\in\mathbb{Z}} A_m \psi) = (\psi, \psi) \tag{163}$$

En consecuencia, $\sum_m A_m\psi = \psi$ para un conjunto denso de vectores y por lo tanto para todo ψ ya que los Am son positivos.

Además, usando (159) y los mismos argumentos para -- trasladar que en el lema XX se concluye que si $x - m/_t \notin \mathcal{O}$

$$|(e^{-itH_0}(A_m\psi))(x)| \leq C'_\ell (1 + |x-m| + |t|)^{-\ell} \|(1-\tfrac{d^2}{dk^2})^\ell j * \eta\|_2$$

$$\leq C_\ell (1 + |x-m| + |t|)^{-\ell} \|\psi\|_2 \tag{164}$$

si $\quad \mathrm{supp}\,\eta + \mathrm{supp}\,j \subset [a,b] \pmod{2\pi}$ (165)

Como antes, para probar el teorema, es suficiente con --- probar el principio de Descomposición de Enss.

Tomemos $[a, b]$ que no contenga valores críticos . Y sea $\psi \in \mathrm{Ran}\, P_{[a,b]}(H_0)$. Usando la propiedad iii) de las propiedades de la expansión en autofunciones, se deduce que ψ es una suma finita de términos de la forma $\int_{\alpha_n}^{\beta_n} \eta_n(k)\, \phi_n(x,k)\, dk$

Tomando j_n cumpliendo (160) y (161) y además $\mathrm{supp}\,\eta_n + \mathrm{supp}\,j_n \subset [\alpha_n, \beta_n]$ y utilizando los Am - en lugar de los $f_\alpha = \int_{\Delta_\alpha} f(x-y)\, d^\nu y$ y (159) y (164) se pueden seguir los - mismos argumentos que en el teorema 3.1 y llegar a estimaciones como en (4.42) y (4.43) donde en (4.43) aparece $(H_0 + i\mathbb{1})$ por $(k^{2\nu} + 1)$.

Como solamente tenemos que (153) se cumple en lugar de la condición (2.5) (de Enss) no podemos seguir los mismos argumentos que antes para demostrar que

$$\| (\Omega^{\pm} - 1) \varphi_{n, \substack{in \\ out}} \| \to 0 \quad n \to +\infty \qquad (166)$$

Para ver esto, hay que proceder de manera un poco distinta.

Sea I un intervalo compacto, entonces

$$\| P(I) (\Omega^{+} - 1) \varphi_{n,in} \| = \| i \int_{-\infty}^{0} dt \, P(I) e^{itH} V e^{-itH_0} P_{ac}(H_0) \varphi_{n,in} \|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{0} \| P(I) V e^{-itH_0} \varphi_{n,in} \| dt$$

$$\leq \int_{-\infty}^{0} dt \, \| P(I) V F\{B^c_{\delta(n+|t|)}, x\} (H_0 + i1)^{-1} \|$$

$$\times \| (H_0 + i1) \varphi_{n,in} \|$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} dt \, \| P(I) V F\{B_{\delta(n+|t|)}, x\} e^{-itH_0} \varphi_{n,in} \|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{0} dt \, \| P(I) V F\{B^c_{\delta(n+|t|)}, x\} (H_0 + i1)^{-1} \|$$

$$\left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} \| (H_0 + i1) \varphi_{n,in} \| \right\}$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} dt \, \| F\{B_{\delta(n+|t|)}, x\} e^{-itH_0} \varphi_{n,in} \| dt$$

$$\times \| P(I) V \|$$

Usando (153) y la estimación análoga a (4.42) se obtiene

$$\lim_{n \to +\infty} \| P(I) (\Omega^t - 1) \varphi_{n, \substack{in \\ out}} \| = 0$$

para todo intervalo compacto I

Como H es subordinado a Ho, del lema 1.1 se concluye que

$$\| P(I^c) \; P_0(I_1) \| \to 0 \qquad I \to +\infty$$

Utilizando esto, se puede entonces demostrar (166). Y así se concluye la demostración del Principio de Descomposición de Enss.

Notar por otra parte que no es necesario usar una estimación como en (4.43). Pero esto fue posible a que

$$\| P(I) V \| < +\infty \qquad \text{para cada intervalo acotado I} .$$

CAPITULO VI

EXTENSION DEL TRABAJO DE ENSS

EL METODO DE KUPSCH-SANDHAS

Y EL METODO DE ENSS

En esta sección se discuten situaciones cuando alguna región acotada del espacio de configuración se comporta mal debido a obstáculos o a grandes singularidades del potencial (Simon <73>).

TEOREMA VI.1 Sea $H_0 = P(-i\nabla)$ con P vagamente elíptico . Sea H un operador autoadjunto tal que

a) J es un operador de multiplicación por una función en $C^{\infty}(\mathbb{R}^{\nu})$

b) Para algún $R_0 < +\infty$

$$J\, F\{B_R^c, x\} = F\{B_R^c, x\} \quad \text{si} \quad R \geq R_0$$

c) $F\{B_R, x\}(H+i)^{-1}$ es compacto para cada $R < +\infty$

d) Para cada $z \notin \sigma(H_0)$ la función

$$h(R) := \| Q(H_0 - z)^{-1} F\{B_R^c, x\} \|$$

satisface la condición de Enss (2.5), donde

$$Q = (HJ - JH_0)$$

Entonces las conclusiones del teorema 3.1 se cumplen para (H, Ho)

DEMOSTRACION

Notemos primero que como $(H\, J - J\, H_0)(H_0 - z)^{-1}$

es acotado, entonces $H\, J\, (H_0 - z)^{-1}$ es acotado.

Así, $J : D(H_0) \to D(H)$

$$(167)$$

Así, H es J subordinado a Ho.

Usando d) y la proposición 1.3 , se obtiene que

$$\tilde{\Omega}^{\pm} := \underset{t \to \mp\infty}{s\text{-}\lim}\; e^{itH}\, J\, e^{-itH_0}\, P_{ac}(H_0) \qquad (168)$$

existen.

Escribiendo,

$$(1 - J)(H_0 + i\mathbb{1})^{-1} = (\mathbb{1} - J)\, F\{B_R, x\}\, (H_0 + i\mathbb{1})^{-1} + (1 - J)\, F\{B_R^c, x\}\, (H_0 + i\mathbb{1})^{-1}$$

y usando b) y el lema 1.4, obtenemos que

$$(1 - J)(H_0 + i\mathbb{1})^{-1} \quad \text{es compacto} \qquad (169)$$

Puesto que $\operatorname{Ran} P_{ac}(\hat{H}_0) = L^2(\mathbb{R}^\nu \setminus C_p \cup S_p)$, las funciones --

$$\psi = (H_0 + i\mathbb{1})\,\phi \quad \text{con} \quad \hat{\phi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu \setminus C_p \cup S_p)$$

son densas en $\operatorname{Ran} P_{ac}(H_0)$

Entonces,

$$\underset{t \to \mp\infty}{s\text{-}\lim}\; e^{itH}(\mathbb{1} - J)\, e^{-itH_0}\, \psi = \underset{t \to \mp\infty}{s\text{-}\lim}\; e^{itH}(1 - J)(H_0 + i\mathbb{1})^{-1} e^{-itH} \times (H_0 + i\mathbb{1})\phi =$$

donde hemos usado (169) y el lema XXI.

Usando densidad, se deduce que

$$\underset{t \to \mp\infty}{s\text{-}\lim}\; e^{itH}(1 - J)\, e^{-itH_0}\, P_{ac}(H_0) = 0$$

Y de aquí,

$$\Omega^{\pm} := \underset{t \to \mp\infty}{s\text{-}\lim} \; e^{itH} J e^{-itH_0} P_{ac}(H_0) = \tilde{\Omega}^{\pm} \qquad (170)$$

Como antes, es suficiente con probar el principio de Descomposición de Enss.

Usando c) y el lema 1.4

$[(H+i\mathbb{1})^{-1} - (H_0+i\mathbb{1})^{-1}]\, F\{B_R^c, x\}$ es compacto si $R < +\infty$

Entonces,

$$\| [(H+i\mathbb{1})^{-1} - (H_0+i\mathbb{1})^{-1}]\, F\{B_R^c, x\} \|$$

(Usando b))

$$= \| [(H+i\mathbb{1})^{-1} J - (H_0+i\mathbb{1})^{-1}]\, F\{B_R^c, x\} \|$$

$$\leq \| [(H+i\mathbb{1})^{-1} J - J(H_0+i\mathbb{1})^{-1}]\, F\{B_R^c, x\} \|$$

$$+ \| (\mathbb{1} - J)(H_0+i\mathbb{1})^{-1}\, F\{B_R^c, x\} \|$$

$$\leq \| Q (H_0+i\mathbb{1})^{-1}\, F\{B_R^c, x\} \|$$

$$+ \| (\mathbb{1} - J)(H_0+i\mathbb{1})^{-1}\, F\{B_R^c, x\} \|$$

$$\to 0 \quad R \to +\infty$$

El primer término tiende a cero por d), mientras que el segundo por (169) y el lema 1.2 .

En consecuencia, $(H+i\mathbb{1})^{-1} - (H_0+i\mathbb{1})^{-1}$ es compacto (171)

Copiando los argumentos del principio de descomposición de-

Enss del teorema 3,1 , llegamos a estimaciones como en (4.42) y (4.43) donde en ---- (4.43) aparece ($H_0 + i\mathbb{1}$) en lugar de ($\mathbb{R}^{2N} + 1$).

Para demostrar (4.4) en este caso para $\varphi_{n,in}$, proce-- demos así:

$$\| P(I)(\Omega^+ - \mathbb{1}) \varphi_{n,in} \|$$

(Usando (170))

$$\| P(I)(\tilde{\Omega}^+ - \mathbb{1}) \varphi_{n,in} \|$$

$$= \| \int_{-\infty}^{0} e^{itH} P(I) [HJ - JH_0] e^{-itH_0} \varphi_{n,in} \, dt \|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{0} \| P(I) Q (H_0 - z_0)^{-1} F\{ B^c_{S(n+|t|)}, x \} \| dt$$

$$\times \| (H_0 - z_0) \varphi_{n,in} \|$$

$$+ \| P(I) Q (H_0 - z_0)^{-1} \|$$

$$\times \int_{-\infty}^{0} dt \, \| F\{ B_{S(n+|t|)}, x\} e^{-itH_0} (H_0 - z_0) \varphi_{n,in} \|$$

$$\to 0 \quad n \to +\infty$$

Y puesto que

$$\| P(I_1^c) P_0(I) \| \to 0 \qquad I_1 \to +\infty$$

se deduce que

$$\| (\Omega^{\mp} - \mathbb{1}) \varphi_{n,in}^{out} \|$$

Así el teorema se sigue.

Siguiendo exactamente los mismos argumentos , se obtiene que el siguiente teorema también es cierto.

TEOREMA VI.2

Sea $Ho = P(i\nabla)$ con P vagamente elíptico y J un operador acotado y H un operador autoadjunto, tales que

a) H es J subordinado a Ho

b) $(1-J)(H_0+i1)^{-1}$ es compacto

c) $(H+i1)^{-1}-(H_0+i1)^{-1}$ es compacto

d) Existe una función $g \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{+})$, tal que para cada intervalo acotado I, la función $h_I(R)$

$$= \| P(I)\, Q\, g(R)^{-1} F\{B^c_R, x\} \|$$

satisface (2.5)

Entonces las conclusiones del teorema 3.1 son ciertas para (H, Ho).

Ejemplo 6.1

Sea $Ho = -\Delta$, $H = -\Delta + V$ definido como suma de formas. Donde $V = V_+ - V_-$ con $V_+ \geq 0$, $V_+ \in L^1_{loc}$ y donde V_- es $-\Delta$ - acotado en sentido de formas, con cota menor que 1. Además, supongamos que

$W := F\{B^c_{R_0}, x\}\, V$ satisface $\| W (H_0-z)^{-1} F\{B^c_R, x\}\|$

para algún $z \notin \sigma(H_0)$, entonces tomando como J al operador de multiplicación por una función C^{∞} que es igual a 0 (resp. 1) para $|x| \leq 3/2\, R_0$ (resp. $\geq 2R_0$)

es fácil de verificar las hipótesis del teorema 6.1 :

Obviamente la conclusión b) se cumple.

Como $Q(H) = Q(H_0) \cap Q(V)$ entonces

$(H_0+i1)^{1/2}(H+i1)^{-1/2}$ es acotado y por tanto (c) se cumple.

Por la construcción de H, sabemos que $D(H) \supset D(H_0) \cap D(V)$

(Ver lema III).

Puesto que $(H_0-z)\, J\, (H_0-z)^{-1}$ es acotado,

$F\{B^c_{R_0}, x\}\, V\, (H_0-z)^{-1}$ es acotado y como $F\{B_{R_0}, x\}\, V J\, (H_0-z)^{-1} = 0$

obtenemos que $\mathrm{Ran}\; J\, (H_0-z)^{-1} \subset D(H)$

Puesto que $\quad Q(H_0-z)^{-1} = (H-z)\,J\,(H_0-z)^{-1} - J\;,$

y $\quad F\{B_{R_0}, x\}\,(H-z)\,J\,(H_0-z)^{-1} - F\{B_{R_0}, x\}\,J \equiv 0$

además,

$$F\{B^c_{R_0}, x\}\,Q(H_0-z)^{-1}\,F\{B^c_R, x\}$$

$$= F\{B^c_{R_0}, x\}\{(H-z)\,J\,(H_0-z)^{-1} - J\}\,F\{B^c_R, x\}$$

$$- F\{B^c_{R_0}, x\}\,V\,(H_0-z)^{-1}\,F\{B^c_R, x\} +$$

$$F\{B^c_{R_0}, x\}\,V\,(H_0-z)^{-1}\,F\{B^c_R, x\}$$

$$= F\{B^c_{R_0}, x\}\{(H-z)(J-\mathbb{1})(H_0-z)^{-1} - (J-\mathbb{1})\}\,F\{B^c_R, x\}$$

$$+ F\{B^c_{R_0}, x\}\,V\,(H_0-z)^{-1}\,F\{B^c_R, x\}\mathbb{1}$$

$$\equiv 0 + F\{B^c_{R_0}, x\}\,V\,(H_0-z)^{-1}\,F\{B^c_R, x\}$$

$\blacktriangle$

Por lo tanto (d) se cumple

Ejemplo 6,2

Sea Ω una región cerrada acotada en $\mathbb{R}^\nu$ y sea H alguna extensión autoadjunta. Tomemos cualquier base $\phi_1, \dots, \phi_n$ en $L^2(\Omega)$. Y sea $H := H_1 \oplus \sum_n (\phi_n, \cdot)\,\phi_n$ en $L^2(\mathbb{R}^\nu) = L^2(\mathbb{R}^\nu \setminus \Omega) \oplus L^2(\Omega)$ Denotemos por J al operador de multiplicación con $(\mathbb{1} - J) \in C_0^\infty$ y $J \equiv 0$ en alguna vecindad de Ω

Todas las hipótesis del teorema 6.1 son obviamente satisfe--- chas con la excepción de la hipótesis c) . Esta se cumplirá dependiendo de las condiciones a la frontera sobre H_1 .

Para las condiciones de Dirichlet , se cumple la hipótesis c) ([13]); para las condiciones de Neumann, se cumplirán, si por ejemplo, Ω obedece la condición del segmento ([5]). De cualquier forma, si se cumple, entonces H, como operador sobre $L^2(\mathbb{R}^\nu \setminus \Omega)$, tendrá espectro singularmente vacío.

Ejemplo 6.3

Consideremos una función acotada V periódica en $\mathbb{R}$ y sea W igual a V (respectivamente 0) para $x > 0$ (respectivamente < 0).

Pongamos

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + W$$

$$H_0^l = -\frac{d^2}{dx^2} +$$

$$H_0^r = -\frac{d^2}{dx^2} + V$$

entonces se demuestra que:

TEOREMA

a) $\Omega^{\pm}_{l,r} = \underset{t \to \mp\infty}{s\text{-}\lim}\, e^{itH} J_{l,r}\, e^{-itH_0^{(l,r)}} P_{ac}(H_0^{(l,r)})$

existen. Donde J_l es el operador de multiplicación por una función $C^\infty(\mathbb{R})$ tal que es 0 (resp. 1) para $x > 1$ (resp $x < -1$) y $J_r = 1 - J_l$

b) Las afirmaciones b), d) del teorema 3.1 se siguen cumpliendo para H.

c) $\sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(H_0^r) = \sigma_{ess}(H_0^l)$

d) $\operatorname{Ran} \Omega^+_l \oplus \operatorname{Ran} \Omega^+_r = \operatorname{Ran} \Omega^+_r \oplus \operatorname{Ran} \Omega^-_r$
$= \mathcal{H}_{ac}(H)$

Para ver esto, es suficiente con ver que la siguiente variante del principio de Descomposición de Enss se cumple:

LEMA

Sea una sucesión de vectores unitarios que cumplen las hipótesis del principio de Descomposición de Enss, entonces

Se puede descomponer $\varphi_n = \varphi_{n,in} + \varphi_{n,out} + \varphi_{n,\omega}$ tal que

(1) $\|\varphi_{n,\omega}\| \to 0$

(2) $\|(\Omega^{+}_{\ell,r} - 1)\varphi_{n,in}\| \to 0$ y $\|(\Omega^{+}_{r} - 1)\varphi_{n,out}\| \to 0$

(3) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_{n,\substack{in\\out}}\| < +\infty$

DEMOSTRACION DEL LEMA

Puesto que $D(H) = D(H_0^r) = D(H_0^\ell) = D(-\frac{d^2}{dx^2})$ y como J_r, J_ℓ son funciones C^∞ entonces $J_{\ell,r} : D(H_0^\ell) \to D(H_0^\ell)$

En consecuencia, H y Ho son mutuamente subordinados con J . (De hecho son mutuamente subordinados con $J_{\ell,r}$ entre sí). Además, usando las notas (7) y (20) y el corolario I se obtiene que la función h (R)

$$= \| [H J_{\ell,r} - J_{\ell,r} H_0^{(\ell,r)}] (R^2+1)^{-1} F\{B_R^c, x\} \|$$

es una función en $L^\infty \cap L^1$.

De la proposición 1.3, se obtiene a) del teorema. Más aún, como antes, obtenemos que

$$P(I) [H J_{\ell,r} - J_{\ell,r} H_0^{(\ell,r)}] P_0(I) \quad \text{es compacto .}$$

En consecuencia,

$$(H+i\beta)^{-1} J_{\ell,r} - J_{\ell,r} (H_0^{(\ell,r)}+i\beta)^{-1} \quad \text{es compacto}$$

Esto prueba c). Y además, $\phi(H) J_{\ell,r} - J_{\ell,r} \phi(H_0^{(\ell,r)})$ es compacto si $\phi \in C_\infty(\mathbb{R})$.

Puesto que $J_r + J_\ell = 1$, entonces --

$\Phi(H) - \Phi(H_0^\ell) J_\ell - \Phi(H_0^r) J_r$ es compacto.

Usando que J_ℓ es 0 para $x > 1$ y del hecho que

$$\| F\{ B_{n,x} \} \varphi_n \| \to 0 \quad n \to +\infty$$

obtenemos que

$$\| F(x > -n) \Phi(H_0^\ell) J_\ell \varphi_n \| \to 0 \quad n \to +\infty$$

Y como antes (Ver lema 3.1.1)

$$\| \sum_{\alpha \geq -1/3 n} f_\alpha \bar{\Phi}(H_0) J_\ell \varphi_n \| \to 0 \quad n \to +\infty$$

Se define entonces

$$\varphi_{n,in} = \sum_{\alpha < -1/3 n} f_\alpha \bar{\Phi}(H_0) J_\ell \varphi_n$$

$$\varphi_{n,in;\alpha} := f_\alpha \bar{\Phi}(H_0) J_\ell \varphi_n$$

Puesto que para α y t negativos

$|\alpha + vt| \doteq (|\alpha| + |vt|)$, entonces se pueden aplicar los lemas de fase estación ariza --

(lema XX) y obtener estimaciones como en (4.41) y (4.43). Y de aquí se obtiene

$$\| (\Omega_\ell^+ - 1) \varphi_{n,in} \| \to 0 \quad n \to +\infty$$

Similarmente, para $\bar{\Phi}(H_0^r)$

$$\| F(x < n) \Phi(H_0^r) J_r \varphi_n \| \to 0 \quad n \to +\infty$$

Usando los argumentos anteriores y la expansión en autofunciones (Ver teorema 4.1)-

para $H_0^\ell + V = H_0^r$ se concluye que

$$\| (\Omega_r^- - 1) \varphi_{n,out} \| \to 0 \quad n \to +\infty$$

▲

CAPITULO VII

EXTENSION DEL TRABAJO DE ENSS

CAMPOS ELECTRICOS

En este capítulo se presenta el caso para $H = H_0 + V$,

$$H_0 = -\Delta - x_1 \qquad (7.1)$$

con x_1 la primera componente de x, en $\mathbb{R}^\nu$. Ho es la energía de una partícula de carga 1 en un campo eléctrico $E = (1, 0, \ldots, 0)$. Por ciertos métodos, se demostró ya la existencia (< 5 >, < 4 >) y completud (< 33 >) de $\Omega^{\pm}(H, H_0)$, así como la ausencia de espectro singularmente continuo (< 33 >). Mediante el método de Enss se presenta otra demostración (Simon < 73 >).

Antes daremos algunos lemas que nos dicen ciertas propiedades de Ho.

LEMA VII. 1 Ho es esencialmente autoadjunto en $C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$ y

$$e^{-itH_0} = e^{-it^3/3}\, e^{itx_1}\, e^{-ip_\perp^2 t}\, e^{-i(p^2 t + t^2 p)} \qquad (7.2)$$

donde $\quad p = -i \dfrac{\partial}{\partial x_1}$

$$p_\perp^2 = -\Delta - p^2$$

DEMOSTRACION

Si $\quad g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$

$$e^{-ip^3/3}(-x_1)\, e^{ip^3/3} g = \left[e^{-ip^3/3}\left(-i \frac{\partial}{\partial p}\right) e^{ip^3/3} \hat{g} \right]^\vee$$

$$= \left[e^{-ip^3/3} \left(p^2 e^{ip^3/3} \hat{g} - i e^{ip^3/3} \frac{\partial}{\partial p} \hat{g} \right) \right]^\vee$$

$$= (p^2 \hat{g})^\vee + \left(-i \frac{\partial}{\partial p} \hat{g}\right)^\vee$$

$$= p^2 g - x_1 g$$

Puesto que $\quad p_\perp^2 \quad$ conmuta con $\quad e^{\pm ip^3/3} \quad$ obtenemos que

$$e^{-ip^3/3}(p_\perp^2 - x_1)\, e^{ip^3/3} g = p_\perp^2 g + e^{-ip^3/3}(-x_1) e^{ip^3/3} g$$

$$= p_\perp^2 g + p^2 g - x_1 g$$

$$= (-\Delta - x_1)\, g \qquad (7.3)$$

Si $\mathcal{F}_\perp$ es la transformada de Fournier con respecto a las coordenadas $(q_2, \dots, q_\nu) = q_\perp$

$$(\mathcal{F}_\perp)^{-1}(q_\perp^2 - x_1)\, \mathcal{F}_\perp g = (\mathcal{F}_\perp)^{-1} q_\perp^2\, \mathcal{F}_\perp g - x_1 g$$

$$= p_\perp^2 g - x_1 g \qquad (7.4)$$

El operador definido en $C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu) \subset L^2(\mathbb{R}^\nu, d^\nu x)$

$P_\perp^2 - x_1$, es unitariamente equivalente al operador de multiplicación por $q_\perp^2 - x_1$

definido en $C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu) \subset L^2(\mathbb{R}^\nu, dx_1\, dq_\perp)$

Sea $B = (\tilde{\mathcal{F}}_\perp)^{-1} (q_\perp^2 - x_1) \tilde{\mathcal{F}}_\perp$

De (7.3) y (7.4)

$$H_0 \upharpoonright C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu) = e^{-ip^3/3} B\, e^{ip^3/3} \upharpoonright C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$$

Puesto que $q_\perp^2 - x_1$ es una extensión autoadjunta de $q_\perp^2 - x_1 \upharpoonright C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$

entonces $e^{-ip^3/3} B\, e^{ip^3/3}$ es una extensión autoadjunta de $H_0 \upharpoonright C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$

Si A es otra extensión autoadjunta de $H_0 \upharpoonright C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$ entonces ------

$e^{ip^3/3} \tilde{\mathcal{F}}_\perp A (\tilde{\mathcal{F}}_\perp)^{-1} e^{-ip^3/3}$ es una extensión autoadjunta de ----

$q_\perp^2 - x_1$. Como C_0^∞ es un núcleo para $q_\perp^2 - x_1$, se concluye que --

$$e^{ip^3/3} \tilde{\mathcal{F}}_\perp A (\tilde{\mathcal{F}}_\perp)^{-1} e^{-ip^3/3} = q_\perp^2 - x_1 \qquad 6$$

$$A = e^{-ip^3/3} B\, e^{ip^3/3}$$

Por lo cual, $H_0 \upharpoonright C_0^\infty$ tiene una única extensión autoadjunto. Esto es, Ho es esencialmente autoadjunto en $C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$

De (VII), tomando $F_t(\lambda) = e^{-it\lambda}$

$$\begin{aligned}
e^{-itH_0} &= e^{-ip^3/3} (\tilde{\mathcal{F}}_\perp)^{-1} e^{-it(q_\perp^2 - x_1)} \tilde{\mathcal{F}}_\perp e^{ip^3/3} \\
&= e^{-ip^3/3} (\tilde{\mathcal{F}}_\perp)^{-1} e^{-itq_\perp^2} e^{itx} \tilde{\mathcal{F}}_\perp e^{ip^3/3} \\
&= e^{-ip^3/3} e^{-itp_\perp^2} e^{itx_1} e^{ip^3/3} \\
&= e^{-itP_\perp^2} e^{-ip^3/3} e^{itx_1} e^{ip^3/3}
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$e^{-itx_1} e^{-ip^3/3} e^{itx_1} f = e^{-itx_1} \left[e^{-ip^3/3} (e^{itx_1} f)^{\wedge} \right]^{\vee}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^\nu} e^{i[x_1(p-t)+x_2 p_2+\dots+x_\nu p_\nu]} \times e^{-ip^3/3} \hat{f}(p-t, p_2, \dots, p_\nu) d^\nu p$$

$$= e^{-i(p+t)^3/3} f$$

Y por lo tanto,

$$e^{-itH_0} = e^{-itp_1^2} e^{itx_1} e^{-i(p+t)^3/3} e^{ip^3/3}$$

$$= e^{-itp_1^2} e^{itx_1} e^{-ip^3/3} e^{-ip^2 t} e^{-it^2 p} e^{-it^3/3} e^{ip^3/3}$$

$$= e^{-it^3/3} e^{itx_1} e^{-itp_1^2} e^{-i(p^2 t + t^2 p)}$$

LEMA VII.2 Supongamos que $V = V_1 + V_2$ con V_2 acotado — y $V_1 x_1 - \Delta$ acotado con cota a. Entonces V es — Ho-acotado con cota relativa a.

DEMOSTRACION

Por el lema VII.1 $\{f \mid (H_0+ib)^{-1} f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)\}$ es denso en $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^\nu)$. Entonces,

$$(-\Delta+ib)^{-1} x_1 (H_0+ib)^{-1} f = (-\Delta+ib)^{-1} [(-\Delta - H_0)] (H_0+ib)^{-1} f$$

$$= \left((-\Delta+ib)^{-1} - (H_0+ib)^{-1} \right) f$$

Por densidad, se obtiene que ésta última igualdad es válida para toda $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^\nu)$

En consecuencia,

$$V_1 (H_0+ib)^{-1} = V_1 (-\Delta+ib)^{-1} + V_1 (-\Delta+ib)^{-1} x_1 (H_0+ib)^{-1}$$

$$= V_1 (-\Delta+ib)^{-1} + V_1 x_1 (-\Delta+ib)^{-1} (H_0+ib)^{-1}$$

$$+ 2i\, V_1 (-\Delta+ib)^{-1} p\, (-\Delta+ib)^{-1} (H_0+ib)^{-1}$$

Para ver esta última igualdad, se hace notar que $V_1 (-\Delta+ib)^{-1} p (-\Delta+ib)^{-1}$ es un operador acotado, ya que V_1 es $-\Delta$-acotado. Y para el conjunto denso —

si $\{ f \mid (-\Delta+ib)^{-1} f \in C_0^\infty \}$

$$2i \; V_1(-\Delta+ib)^{-1} p\, (-\Delta+ib)^{-1} f = V_1(-\Delta+ib)^{-1} x_1 f - V_1 x_1 (-\Delta+ib)^{-1} f$$

Es fácil ver que en general:

Cota relativa de V con respecto a (H_o) es igual a

$$\lim_{b\to+\infty} \| V(H_o+ib)^{-1} \|$$

Entonces,

$$\lim_{b\to+\infty} \| V(H_o+ib)^{-1} \| \leq \| V_2 \|_\infty \; \overline{\lim_{b\to+\infty}} \| (H_o+ib)^{-1} \|$$

$$+ \overline{\lim_{b\to+\infty}} \| V_1(-\Delta+ib)^{-1} \| + \overline{\lim_{b\to+\infty}} \frac{1}{b} \| V_1 x_1 (-\Delta+ib)^{-1} \|$$

$$+ 2\, \overline{\lim_{b\to+\infty}} \| V_1(-\Delta+ib)^{-1} p\, (-\Delta+ib) \| \frac{1}{b}$$

Usando que $\| A+B \| \geq \| A \| - \| B \|$

se obtiene que $\lim\limits_{b\to+\infty} \| V(H_o+ib)^{-1} \| = a$

TEOREMA VII.1

Sea Ho $= -\frac{d^2}{dx^2} - x$ en $L^2(\mathbb{R})$ y V un operador simétrico y Ho acotado con cota relativa menor que 1.

$$h(R) := \| V(H_o+iK)^{-1} F(x>R) \|$$

Supongamos que

$$\int_0^{+\infty} h(R^2)\, dR \qquad (7.5)$$

Entonces, $H = H_o + V$, Ho cumplen las conclusiones del teorema 3.1 con d) reemplazado por vacío y $\sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(H_o) = \mathbb{R}$

Nota 1

En el lema 1 se vió que Ho es unitariamente equivalente a --

multiplicación por $q_1^2 \cdot x_1$. Entonces, del lema IV se deduce que $\sigma(H_0) = \sigma_{ac}(H_0)$ $= \sigma_{ess}(H_0) = \mathbb{R}$

Así, $\mathcal{B}_v \cup \mathcal{C}_v = \emptyset$ (vacío)

Por otro lado, notar que ahora se pide

$h(R) = \| V(H_0 + i\mathbb{1})^{-1} F(x > R) \|$ y no $h(R) = \| V(H_0 + i\mathbb{1})^{-1}$ $F\{B_R^c, x\} \|$

Además,

$$\int_0^{+\infty} h(R^2)\, dR < +\infty \quad y \text{ no } \quad \int_0^{+\infty} h(R)\, dR < +\infty$$

Nota 2

El lema 1 nos dice que Ho es un operador que no cambia el soporte de una función en un conjunto denso de $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^v)$

Se pueden seguir entonces los argumentos de la nota 7 del capítulo 2 y ver que (7.5) es equivalente a

$$\int_1^{+\infty} \| V\, F(x_1 > R^2)(H_0 + i\mathbb{1})^{-1} \|\, dR < +\infty \quad (7.5)$$

Los siguientes lemas nos proveen de los argumentos necesarios para poder seguir la demostración del Principio de Descomposición de Enss.

LEMA VII. 3 (1- DIMENSION)

Supongamos que $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ y $\hat{\phi}$ tiene soporte en $(-1, +\infty)$. Entonces $\forall$ M y $t \geq 0$

$|(e^{-itH_0}\phi)(x)| \leq C_M (1 + |x - a - x_{crit}(t)| + |t|)^{-M} \times$ $\| (1 - \frac{d^2}{dx^2})(1 + (x-a))^{M/2} \phi \|$ en la región $x < a + x_{crit}(t) \equiv a + t^2 - 3|t|$

DEMOSTRACION

Supongamos que $a = 0$. Sea $\Phi(x,t) = e^{it^3/3} e^{-itx}$ $(e^{-itH_0}\phi)(x)$

Por el lema VII.1

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-if(k,x,t))\ \hat{\phi}(k)\, dk$$

En la región

$$x < x_{crit}, \quad k > -1, \quad t > 0 \qquad (\text{resp. } x < x_{crit},\ k < 1,\ t < 0)$$

$\dfrac{\partial f}{\partial k}$ no se anula ya que

$$\frac{\partial f}{\partial k} = 2kt + t^2 - x > -2t + t^2 - x = |x_{crit}^{(t)} - x| + |t| \tag{7.7}$$

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+\infty} \left[\left(\frac{i}{f'}\frac{\partial}{\partial k}\right)^m \exp(-if(k,x,t))\right] \hat{\phi}(k)\, dk$$

$$= \frac{(-i)^m}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-1}^{+\infty} \exp(-if(k,x,t))\left(\frac{i}{f'}\frac{\partial}{\partial k}\right)^m \hat{\phi}(k)\, dk$$

Además,

$$\frac{\partial^m}{\partial k^m}\left(\frac{1}{f'}\right) = (-1)^m \frac{(2t)^m \cdot m!}{(f')^{m+1}} \Rightarrow \left|\frac{\partial^m}{\partial k^m}\left(\frac{1}{f'}\right)^n\right| \le \frac{C_{m,n}}{|f'|^n}$$

Y puesto que en la región considerada, $|f'| > |t|$, se obtiene que

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial k^m}\left(\frac{1}{f'}\right)\right| \le \frac{C_m}{|f'|}$$

Entonces, si

$$\psi(x,t) = \left(1 + |x - x_{crit}^{(t)}| + |t|\right)^M \phi(x,t)$$

$$|\psi(x,t)| \le \left(1 + |x - x_{crit}| + |t|\right)^M \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+\infty} \left|\left(\frac{1}{f'}\frac{\partial}{\partial k}\right)^M \hat{\phi}(k)\right| dk$$

(Usando 7.7)

$$\le \sum_{\alpha=0}^{M} C_\alpha \int_{-}^{+\infty} dk\ \frac{\left(1 + |x - x_{crit}| + |t|\right)^M}{|f'|^M}\left|\left(\frac{d}{dk}\right)^\alpha \hat{\phi}(k)\right|$$

$$\le C \sum_{\alpha=0} \int_{-1}^{+\infty} \left|\left(\frac{d}{dk}\right)^\alpha \hat{\phi}(k)\right| dk$$

$$= C \sum_{\alpha=0}^{M} \| (\tfrac{d}{dk})^{\alpha} \hat{\phi} \|_1 \leq C \sum_{\alpha=0}^{M} \| (1+k^2)^{-1} \|_2$$

$$\times \| (1+k^2) (\tfrac{d}{dk})^{\alpha} \hat{\phi} \|_2 \leq C' \| (1+k^2) \left(1 - \tfrac{d^2}{dk^2} \right)^{M/2} \hat{\phi} \|$$

Usando el mismo argumento que en el lema XX, obtenemos - el caso cuando $a \neq 0$, ya que si $(U_a \varphi)(x) = \varphi(x-a)$ y $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{\nu})$, --- entonces $U_a H_0 U_a^{-1} \varphi = H_0 \varphi + a \varphi$

Puesto que Ho es esencialmente autoadjunto en C_0^{∞}, entonces esto último es cierto para todo $\varphi \in D(H_0)$. En consecuencia,

$$U_a e^{-itH_0} U_a^{-1} \varphi = U_a e^{-itH_0} U_a^{-1} \varphi = e^{-it(a+H_0)} e^{-ita} e^{-itH_0} \varphi$$

De aquí se sigue el argumento del lema XX para demostrar el caso $a \neq 0$. ▲

LEMA VII.4 (ν - DIMENSIONES)

a) Supongamos que $g \in C^{\infty}$ con todas sus derivadas en L^{∞} y supongamos que $\operatorname{supp} g \subset \{x \mid x_1 < 0\}$. Entonces $p_j\, g\, (H_0 + i\mathbb{1})^{-1}$ es un operador acotado.

b) Si g está definido en a), entonces $|x|^{1/2} g\, (H_0 + i\mathbb{1})^{-1}$ es acotado.

c) En una dimensión, $F(x_1 < a)(H_0 + i\mathbb{1})^{-1}$ es compacto para cualesquiera a . En v-dimensiones, - $F(x_1 < a)\, F(|x_\perp| < b)$ es compacto -- donde $x_\perp = x - (x_1, 0, \ldots, 0)$

d) Si $g \in C_0^{\infty}$ tiene soporte en $\{x \mid x_1 < 0\}$, entonces $p^2 g\, (H_0 + i\mathbb{1})^{-1}$ es acotado.

DEMOSTRACION

a) Por el lema VII.1

$$\{ \phi \mid \phi = (H_0 + i\mathbb{1}) \varphi,\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{\nu}) \}$$ es denso

Entonces, es suficiente con ver que para tales

$$\| p_j\, g (H_0 + i\mathbb{1})^{-1} \phi \| \leq D \| \phi \|$$

Puesto que $\operatorname{supp} g \subset \{ x \mid x_1 < 0 \}$

$$\Rightarrow \quad -gx_i g \geq 0$$

Así,

$$\sum_j \| P_j g(H_0+i1)^{-1}\phi\|^2 = \sum_j < P_j g(H_0+i1)^{-1}, P_j g(H_0+i1)^{-1}\phi>$$

$$= \sum_j <(H_0+i1)^{-1}\phi, g P_j^2 g (H_0+i1)^{-1}\phi>$$

$$= <(H_0+i1)^{-1}\phi, g(-\Delta)g(H_0+i1)^{-1}\phi>$$

$$\leq <(H_0+i1)^{-1}\phi, g(H_0)g(H_0+i1)^{-1}\phi> \quad (7.8)$$

Por otro lado,

$$[H_0, g]\varphi = H_0(g\varphi) - gH_0\varphi$$

$$= (-\Delta g\varphi) + g\Delta\varphi$$

$$= \varphi(-\Delta g) - 2(\nabla g, \nabla\varphi) + g(-\Delta\varphi) + g\Delta\varphi$$

$$= \varphi(-\Delta g) - 2(\nabla g, \nabla\varphi)$$

$$= (\Delta g)\varphi - 2(\nabla g, \nabla\varphi) - 2\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\{\varphi \frac{\partial}{\partial x_j} g\}$$

$$= \varphi(\Delta g) - 2\sum_j P_j \varphi\{i \frac{\partial}{\partial x_j} g\}$$

Entonces, (7.8) es igual a

$$<(H_0+i1)^{-1}\phi, g[H_0, g](H_0+i1)^{-1}\phi> + <(H_0+i1)^{-1}\phi, g^2 H_0(H_0+i1)^{-1}\phi>$$

$$= -2i < P_j g(H_0+i1)^{-1}\phi, \frac{\partial}{\partial x_j} g(H_0+i1)^{-1}\phi>$$

$$+ <(H_0+i1)^{-1}\phi, g(\Delta g)(H_0+i1)^{-1}\phi>$$

$$+ \langle (H_0 + i1)^{-1} \phi , g^2 H_0 (H_0 + i1)^{-1} \phi \rangle$$

El primer término está acotado por

$$2 \sum_{j=1}^{\nu} \| \frac{\partial}{\partial x_j} g \|_\infty \|\phi\| \| P_j g (H_0 + i1)^{-1} \phi \| \leq C \|\phi\| \sum_{j=1}^{\nu} \| P_j g (H_0 + i1)^{-1} \phi \|$$

El segundo término está acotado por

$$\sum_{j=1}^{\nu} \| g \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} g \|_\infty \| (H_0 + i1)^{-1} \phi \| \| (H_0 (H_0 + i1)^{-1} \phi \|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\nu} \| g \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} g \|_\infty \|\phi\|^2$$

El tercero por

$$\| g \|_\infty^2 \| \phi \|^2$$

Por lo tanto, (7.8)" es menor ó igual que

$$C_1 \|\phi\| \sum_{j=1}^{\nu} \| P_j g (H_0 + i1)^{-1} \phi \| + C_2 \|\phi\|^2$$

$$= C_1 \varepsilon^{-1/2} \|\phi\| \varepsilon^{1/2} \sum_{j=1}^{\nu} \| P_j g (H_0 + i1)^{-1} \phi \| + C_2 \|\phi\|^2$$

$$\leq C_1/2\varepsilon \|\phi\|^2 + \varepsilon C_1/2 \sum_{j=1}^{\nu} \| P_j g (H_0 + i1)^{-1} \phi \|^2 + C_2 \|\phi\|^2$$

$$\leq \left(C_1/2\varepsilon + C_2 \right) \|\phi\|^2 + \varepsilon C_1 \nu/2 \sum_{j=1}^{\nu} \| P_j g (H_0 + i1)^{-1} \phi \|^2 \qquad (7.9)$$

Tomando $\varepsilon C_1 \nu = 1$, obtenemos que

$$\sum_{j=1}^{\nu} \| P_j (H_0 + i1)^{-1} \phi \|^2 \leq 2 \left(C_1/2\varepsilon + C_2 \right) \|\phi\|^2$$

Esto prueba a).

Para probar b), sea ϕ como antes

$$\| |x_1|^{1/2} g (H_0 + i1)^{-1} \phi \|^2$$

$$= \langle (H_0 + i1)^{-1}\phi\, g(x_1) g\, (H_0 + i1)^{-1}\phi \rangle$$

$$\left(\operatorname{supp} g \subset \{ x \mid x_1 < 0 \} \right)$$

$$= -\langle (H_0 + i1)^{-1}\phi,\ g(x_1)\, g\, (H_0 + i1)^{-1}\phi \rangle$$

$$\leq \langle (H_0 + 1i)^{-1}\phi,\ g\, H_0\, g\, (H_0 + 1)^{-1}\phi \rangle$$

(Usando (7.9)) $\leq C_1' \|\phi\|^2 + C_2' \sum_{j=1}^{\nu} \| p_j\, g\, (H_0 + i1)^{-1} \phi \|^2$

$$\leq d \|\phi\|^2$$

Esto último por el inciso a).

c) Por el lema VII.2

$$(H_0 + i1)^{-1} = (-\Delta + i1)^{-1} + x_1 (-\Delta + i1)^{-1} (H_0 + i1)^{-1}$$
$$+ 2i\, (-\Delta + i1)^{-1}\, p\, (-\Delta + i1)^{-1}\, (H_0 + i1)^{-1}$$

Por el lema 1.4 , en una dimensión obtenemos que

$F(-n < x_1 < a)\, (H_0 + i1)^{-1}$ es compacto.

Para más dimensiones, obtenemos que

$F(-n < x_1 < a)\, F(|x_\perp| < b)\, (H_0 + i1)^{-1}$ es compacto.

Entonces, es suficiente con ver que

$$\| F(x_1 < -n)\, (H_0 + i1)^{-1} \| \to 0 \quad n \to +\infty$$

y

$$\| F(x_1 < -n)\, (H_0 + i1)^{-1} \| = \| F(x_1 < -n)\, |x_1|^{-1/2}\, |x_1|^{1/2} (H_0 + i1) \|$$

$$\leq \| F(x_1 < -n)\, |x_1|^{-1/2} \|\ \| g\, |x_1|^{1/2}\, (H_0 + i1)^{-1} \|$$

$$\leq \| \, |x_1|^{1/2} g\, (H_0 + i1)^{-1} \| \; n^{-1/2} \to 0 \quad n \to +\infty$$

d) Tomemos ϕ como en a). Puesto que

$$(-\Delta\, g\, (H_0 + i1)^{-1}\phi) = [-\Delta, g]\, (H_0 + i1)^{-1}\phi + g\, H_0\, (H_0 + i1)^{-1}\phi$$

$$+ g x_1 (H_0 + i 1)^{-1} \phi$$

$$= 2i \sum_{j=1}^{\nu} P_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} g\right) (H_0 + i 1)^{-1} \phi$$

$$- 2 (\Delta g) (H_0 + i 1)^{-1} \phi$$

$$+ g (H_0) (H_0 + i 1)^{-1} \phi + g x_1 (H_0 + i 1)^{-1} \phi$$

El primer término $\sum_{j=1} P_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} g\right) (H_0 + i 1)^{-1}$ es acotado ya que $\frac{\partial}{\partial x_j} g$ cumple las propiedades de a). El segundo y el tercer término son obviamente acotados y el último es acotado ya que $g x_1 \in C_0^{\infty}$.

LEMA VII.5 Considérese Ho en 1-dimensión. Sea $f \in C_0^{\infty}$, $f \geq 0$, con $\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) dy = 1$

Sea $\int_{\alpha}^{\alpha+1} f(x-y) dy = f_{\alpha}(x)$

Sean $\eta_{\pm}(k)$ dos funciones C^{∞} con $\eta_{+}(k) + \eta_{-}(k) = 1$

$$\operatorname{supp} \eta_{+} \subset [-1, +\infty)$$

Sea $\Phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$. Para $\alpha > 0$ y m un entero par

$$\| (1+k^2)(1+(x-\alpha)^m) \eta_{+}(k) f_{\alpha}(x) \Phi(H_0) \| \leq C_m (1+\alpha)$$

con Cm independiente de α.

DEMOSTRACION

Supongamos que $\operatorname{supp} \phi \subset (a,b)$. Puesto que

$$\| (H_0 + \alpha + i) \Phi(H_0) \varphi \|^2 \leq \| \phi \|_{\infty}^2 \int_a^b | (\lambda + \alpha)^2 + 1 | \, d(\varphi, P_\lambda \varphi)$$

$$\leq C'^2 \| \phi \|_{\infty}^2 (1+\alpha)^2 = C^2 (1+\alpha)^2$$

Entonces es suficiente con probar que

$$\|(1+p^2)(1+(x-\alpha)^m)\eta_+(p) f_\alpha(x)(H_0+\alpha+i)^{-1}\| \leq C_m \quad (7.10)$$

Ya vimos que si U_α^{-1} es el operador de transformación $(U_\alpha^{-1}\varphi)(x) = (H_0-\alpha)(U_\alpha^{-1}\varphi)$ entonces

$\Longrightarrow$

$$\|(1+p^2)(1+(x-\alpha)^m)\eta_+(p) f_\alpha(x)(H_0+i+\alpha)^{-1}\varphi\|$$

$$= \|U_\alpha^{-1}(1+p^2)(1+(x-\alpha)^m)\eta_+(p) f_\alpha(x)(H_0+i+\alpha)^{-1}\varphi\|$$

$$= \|(1+p^2)U_\alpha^{-1}(1+(x-\alpha)^m)(\eta_+(p) f_\alpha(x)(H_0+i+\alpha)^{-1}\varphi\|$$

$$= \|(1+p^2)(1+x^m)\eta_+(p) f_\alpha(x+\alpha)(H_0+i\alpha)^{-1}(U_\alpha^{-1}\varphi)\|$$

De la definición de f_α vemos que el lado izquierdo de -- (7.10) es independiente de α .

Por lo tanto, como f es a soporte a compacto podemos tomar - α_0 suficientemente negativo tal que $\operatorname{supp} f_{\alpha_0} \subset (-\infty, 0)$. Además -- como $(H_0+i+\alpha)(H_0+i\alpha)^{-1}$ es acotado, nos reducimos a mostrar que

$$\|(1+p^2)(1+x^m)\eta_+(p) g(x)(H_0+i\alpha)^{-1}\| < +\infty \quad (7.11)$$

donde $g \in C_0^\infty$ con $\operatorname{supp} g \subset (-\infty, 0)$

Ahora, usando que en el conjunto denso

$$\{\phi \mid \phi = (H_0+i\alpha)\varphi, \ \varphi \in C_0^\infty\}$$

$$x\eta_+(p) = \eta_+(p)x + i\left(\frac{d}{dp}\eta_+\right)$$

e inducción, podemos poner el operador

$$(1+x^m)\eta_+ g(x)(H_0+i\alpha)^{-1}$$

como una suma de términos de la forma

$$\left(\frac{d^\beta}{dp^\beta}\eta_+(p)\right) x^\alpha g(x)(H_0+i\lambda)^{-1}$$

con $0 \le \beta, \alpha \le m$. Y por consiguiente, el operador en (7.11) es una suma -- de términos de la forma $\left(\frac{d^\beta}{dp^\beta}\eta_+(p)\right)\cdot p^2 x^\alpha g(x)\,(H_0+i\lambda)^{-1}$

Por el lema VII. 4 d) obtenemos lo afirmado.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA VII.1

Por el lema VII. 4 c), es suficiente con probar el Principio de Descomposición de Enss bajo las hipótesis $\|F(x<n)\varphi_n\| \to 0 \quad n \to +\infty$

y $P([a,b])\varphi_n = \varphi_n$

Sea $\{\varphi_n\}$ tal sucesión. Como antes, $\Phi(H)-\Phi(H_0)$ es compacto .

Sea $\Phi \equiv 1$ en (a, b) con $\operatorname{supp}\Phi \subset (a-1, b+1)$

Definimos $\varphi^{(1)}_{n,\omega} := \varphi_n - \Phi(H_0)\varphi_n$ el cual tiende a cero en - norma cuando $n \to +\infty$

Asimismo,

$$\|F(x<n)\,\Phi(H_0)\varphi_n\| \le \|\varphi^{(1)}_{n,\omega}\| + \|F(x<-n)\varphi_n\| \qquad (7.12)$$
$$\to 0 \quad n \to +\infty$$

Tomemos $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ con $\int f(y)\,dy = 1$, $f \geq 0$

y $\operatorname{supp} f \subset (-1, 1)$. Sea $f_\alpha(x) = \int_\alpha^{\alpha+1} f(x-y)\,dy$

y sean η_+, η_- como en el lema VII. 5

Pongamos

$$\Phi^{(2)}_{n,\omega} = \sum_{\alpha \le n-2} f_\alpha(x)\,\Phi(H_0)\varphi_n$$

$$\Phi_{n,\substack{in\\out}} = \sum_{\alpha \geq n-1} \eta_{\mp}(P)\, f_\alpha(x)\, \Phi(H_0)\varphi_n$$

$$\| \Phi_{n,\omega}^{(2)} \|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big| \sum_{\alpha \leq n-2} \int_\alpha^{\alpha+1} f(x-y)\,dy \Big|^2 |\Phi(H_0)\varphi_n(x)|^2$$

$$= \int_{x \leq n-1} dx \Big| \sum_{\alpha \leq n-2} \int_\alpha^{\alpha+1} f(x-y)\,dy \Big|^2 |\Phi(H_0)\varphi_n(x)|^2$$

$$\leq \int_{x \leq n-1} |\varphi(H_0)\varphi_n|^2 d^{*}x$$

$$\leq \| F(x < n)\, \varphi(H_0)\, \varphi_n \|^2 \to 0. \quad n \to +\infty$$

por (7.12).

Por los lemas VII.3 y VII.5, para $2x < n-1+t^2-3|t|$, $\alpha \geq n-1$, $\pm t > 0$

$$\left| \left(e^{-itH_0} \varphi_{n,\substack{in\\out},\alpha} \right)(x) \right| \leq \frac{C}{(1+t^2+\alpha+|x|)^M} \quad (1+\alpha)$$

Entonces, como antes,

$$\| F(x < \tfrac{1}{2}(n-1+t^2-3|t|)\, e^{-itH_0} \varphi_{n,\substack{in\\out}} \| \leq C' (1+|t|+n)^{-M}$$

para $\mp t > 0$

Usando (que H es subordinado a H_0 $((H+i\mathbb{1})^{-1}-(H_0+i\mathbb{1})^{-1}$ = compacto) y la fómula (7.6) se puede usar el mismo argumento que en el Cap. V para demostrar que

$$\| (\Omega^{\mp} - \mathbb{1})\, \varphi_{n,\substack{in\\out}} \| \to 0 \qquad n \to +\infty$$

Para mayores dimensiones tenemos

TEOREMA VII.2 . Sea $H_0 = -\Delta - x_1$ en, $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^\nu)$ y sea V simétrico H_0 acotado con cota relativa menor que 1. Tomemos $H = H_0 + V$. Supongamos que $h(R)$

$$= \| V(H_0+i\mathbb{1})^{-1} F(x_1 > R) \|$$

Y

$$K(R) = \| V (H_0 + i \mathbb{1})^{-1} F(|x_1| > R) \| \qquad (7.13)$$

$\to 0 \quad R \to \infty$

Entonces, todas las conclusiones del teorema 3.1 son ciertas con $S_v U c_v$ reemplaza por $\emptyset$ en d) y

$$\sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(H_0)$$

DEMOSTRACION

Ponemos $F_n = F(x_1 < n) F(|x_1| < R_n)$, donde la sucesión Rn será tomada convenientemente, más adelante. Puesto que $F_n (H_0 + i)^{-1}$ es compacto por 4 (c), sólo necesitamos una versión del principio de descomposición bajo las hipótesis

$$\| F_n \varphi_n \| \to 0 \quad n \to +\infty \qquad P([a,b])\varphi_n = \varphi_n \qquad (7.13a)$$

Sea $f_\alpha(x_1)$ como antes. Descomponemos

$$\varphi_n = \varphi_{n,\omega}^{(1)} + \varphi_{n,in}^{(0)} + \varphi_{n,out}^{(0)} + \varphi_{n,in}^{>} + \varphi_{n,out}^{>} + \varphi_{n,\omega}^{(2)}$$

$$\varphi_{n,\omega}^{(1)} := \varphi_n - \Phi(H_0)\varphi_n$$

$$\varphi_{n,in}^{(0)} := \sum_{|\alpha| \leq n-2} \eta_-(p) f_\alpha(x_1) \Phi(H_0) \varphi_n$$

$$\varphi_{n,out}^{(0)} := \sum_{|\alpha| \leq n-2} \eta_+(p) f_\alpha(x_1) \Phi(H_0) \varphi_n$$

$$\varphi_{n,in}^{>} := \sum_{\alpha \geq n-1} \eta_-(p) f_\alpha(x_1) \Phi(H_0) \varphi_n$$

$$\varphi_{n,out}^{>} := \sum_{\alpha \geq n-1} \eta_+(p) f_\alpha(x_1) \Phi(H_0) \varphi_n$$

Para analizar esta descomposición, necesitamos extender un poco el lema VII.3

LEMA VII.3 a Supongamos que $\phi \in L^2(\mathbb{R}^\nu)$ y $\hat{\phi}$ tiene soporte en $\{x \mid x_1 \in (-1,+\infty)\}$ (resp. $(-\infty,+1)$). Entonces $\forall M$ y $t \geq$ (resp. $t < 0$)

$$\left\{\int dx_\perp \left| (e^{-itH_0}\phi)(x_1,x_\perp)\right|^2\right\}^{1/2}$$

$$\leq C_M (1+|x_1-a-x_{crit}|+|t|)^{-M}$$

$$\times \left\| \left(1-\frac{d^2}{dx_1^2}\right)(1+(x_1-a)^{M/2})\phi\right\|_2$$

en la región

$$x_1 < a + x_{crit} \equiv a + t^2 - 3|t|$$

DEMOSTRACION

$$\| (e^{-itH_0}\phi)(x_1,x_\perp)\|_{L^2(\mathbb{R}^{\nu-1}, d^{\nu-1}x_\perp)}$$

(usando el lema 1 de este capítulo)

$$= \left\{\int d^{\nu-1}x_\perp \left| (e^{itP_\perp^2} e^{it^3/3} e^{-ix_1t} e^{-itH_0})(x_1,x_\perp)\right|^2\right\}^{1/2}$$

(Usando lema VII.3)

$$\leq C_M (1+|x_1-a-x_{crit}|+|t|)^{-M}$$

$$\left\{\int d^{\nu-1}x_\perp \left\| \left(1-\frac{d^2}{dx_1^2}\right)(1+(x_1-a)^{M/2})\phi\right\|^2_{L^2(\mathbb{R},dx_1)}\right\}^{1/2}$$

$$= C_M (1+|x_1-a-x_{crit}|+|t|)^{-M}$$

$$\left\| \left(1-\frac{d^2}{dx_1^2}\right)(1+(x_1-a))^{M/2}\phi\right\|_2$$

En consecuencia, usando este lema obtenemos como antes

$$\| F(x_1 < \tfrac{1}{2}(n-1+t^2-3|t|))\, e^{-itH_0}\varphi_{n,\,\substack{in\\out}} \| \leq C_M (1+n+|t|)^{-M} \quad (\text{VII.9})$$

Del lema VII.4 b)

$$|x_1|^{1/2} F(x_1 < -1)\,(H_0 + i\,1)^{-1}$$ es acotado, entonces ---

$$\| F(x_1 < -n+2)\ \varphi(H_0)\| \leq c\ \| F(x_1 < -n+2)\ |x_1|^{-1/2}\|$$

Usando el V.II.3a y el lema VII.5

$$\left\{ \int dx_\perp\ \left| \left(e^{-itH_0}\, \varphi^{(0)}_{n,\,\substack{in\\out}} \right)(x_1, x_\perp) \right|^2 \right\}^{1/2}$$

$$\leq\ C_M\,(1 + |x_1 - y_c(n,t)| + |t|)^{-M}$$

$$\text{donde}\quad x_1 < t^2 - 3|t| + n^2 + 1 + n \equiv y_c(n,t) \qquad (7.14)$$

En consecuencia, si $|t| > n$ y $x_1 < n + \frac{1}{2}t^2$, el lado izquierdo de (7.10) está dominado por

$$C'_M\,(1 + n^2 + |t| + |x_1|)^{-M+1/2} \qquad (7.15)$$

Para obtener (7.15) simplemente se consideran los casos $|x_1| \leq n + t^2 + 1$ y $|x_1| \geq n + t^2 + 1$

De (7.15) se obtiene que

$$\int_{\pm n}^{\pm\infty} dt\ \| F(x_1 < n + \tfrac{1}{2}t^2)\ e^{-itH_0}\ \varphi^{(0)}_{n,\,\substack{out\\in}}\| \to 0 \qquad (7.16)$$

Ahora bien, puesto que entonces

$$P_\perp^2 < P^2 + P_\perp^2 = (H_0 + x_1)$$

$$(P^2 + P_\perp^2)\ \varphi^{(0)}_{n,\,\substack{in\\out}} = \sum_{|\alpha| \leq n-1} P^2\,\eta_\pm(P)\, f_\alpha(x_1)\ \Phi(H_0)\,\varphi_n$$

$$+ \sum_{|\alpha| \leq n-1} \eta_\pm(P)\, f_\alpha(x_1)\ e^{-iP^3/3}\ P_\perp^2\ \varphi(P_\perp^2 - x_1)$$

$$\therefore\ P^2\,\varphi_{n,\,\substack{in\\out}} + \sum_{|\alpha| \leq n-1} \eta_\pm(P)\, f_\alpha\, H_0\, \Phi(H_0)\,\varphi_n$$

$$+ \sum_{|\alpha| \leq n-1} \eta_\pm\, f_\alpha(x_1)\ x_1\ \Phi(H_0)\,\varphi_n$$

$$- \sum_{|\alpha| \leq n-1} P^2 \eta_\pm f_\alpha \Phi(H_0) \varphi_n$$

$$+ 2 \sum_{|\alpha| \leq n-1} \eta_\pm \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f \right)_\alpha \Phi(H_0) \varphi_n$$

$$- i \sum_{|\alpha| \leq n-1} P \eta_\pm \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_\alpha \Phi(H_0) \varphi_n \qquad (7.17)$$

Para ver esto último se usa

$$[e^{-iP^3/3}, x_1] = -P^2 e^{-iP^3/3}$$

$$[f_\alpha, P] = i \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_\alpha$$

De (7.17) y recordando que f_α tiene su soporte conte-- nido en $|x_1| < n$ si $|\alpha| \leq n-2$, entonces

$$(\varphi^{(0)}_{n, \substack{in \\ out}}, P_\perp^2 \varphi^{(0)}_{n, \substack{in \\ out}}) < (\varphi^{(0)}_{n}, (H_0 + x_1) \varphi^{(0)}_{n, \substack{in \\ out}}) \qquad (7.18)$$

$\leq n + C$. Tomemos g una función en C_0^∞, en el espacio - $P_\perp$ que es 1 si $|P_\perp| < 1$ y o si $|P_\perp| > 2$. Pongamos,

$$G_n(P_\perp) := g(P_\perp / n^2)$$

$$\varphi^{(1)}_{n, \substack{in \\ out}} := G_n(P_\perp) \varphi_{n, \substack{in \\ out}} \qquad (7.19)$$

$$\varphi^{(2)}_{n, \substack{in \\ out}} := \varphi^{(0)}_{n, \substack{in \\ out}} - \varphi^{(1)}_{n, \substack{in \\ out}}$$

Por (7.18), tenemos que

$$\| \varphi^{(2)}_{n, \substack{in \\ out}} \|^2 \leq \| |P_\perp|^{-1} [1 - G_n(P_\perp)] \|^2 \| P_\perp \varphi^{(0)}_{n, \substack{in \\ out}} \| \leq \frac{c_1}{n^3} \qquad (7.20)$$

Usando esto,

$$\int_0^n \| F(x_1 < n + \tfrac{1}{2} t^2) e^{\mp i t H_0} \varphi^{(2)}_{n, \substack{in \\ out}} \| \leq n \cdot n^{-3/2} \to 0 \qquad (7.21)$$

Además

$$\| F(|x_1| < \tfrac{1}{2} R_n) \varphi^{(1)}_{n, \substack{in \\ out}} \| \to 0 \qquad (7.22)$$

por (7.13a) y (7.20).

Puesto que $\tilde{\varphi}_{n,\substack{in\\out}} := \varphi^{(0)}_{n,\substack{in\\out}} - F(|x_\perp| < 1/2 R_n)\, G_n(P_\perp)\, \varphi^{(0)}_{n,\substack{in\\out}}$

tiene las mismas propiedades que $\varphi^{(0)}_{n,\substack{in\\out}}$, (7.16) sigue siendo válido para ---- $\tilde{\varphi}^{(0)}_{n,\substack{in\\out}}$.

Redifiniendo las partes $\varphi_{n,\omega}$, $\varphi_{n,in}$ y $\varphi_{n,out}$ ponemos $F(|x_\perp| < 1/2 R_n)\, \varphi^{(1)}_{n,\substack{in\\out}}$ en el pedazo $\varphi_{n,\omega}$.

Notemos ahora que $\tilde{\varphi}^{(0)}_{n,\substack{in\\out}}$ cumplen tanto (para $R_{n}/_{n^2} \to 0$) (7.16) como (7.21). Las partes $\varphi_{n,\substack{in\\out}}$ se tratan ahora como en el caso 1-dimensional -- para probar que

$$\| (\Omega^{\pm} - 1)\, \varphi_{n,\substack{in\\out}} \| \to 0 \quad n \to +\infty$$

Con esto se termina la demostración del teorema. ▲

C A P I T U L O VIII

EXTERNSION DEL TRABAJO DE ENSS

OPERADORES DE SCHRODINGER CON ABSORCION

En este capítulo se consideran los operadores $H = H_0 + V$, $H_0 = -\Delta$, donde V ya no es un operador simétrico, sino que unicamente $\mathrm{Im}\,(\phi, V\phi) \leq 0$. Bajo ciertas circunstancias, $B_t = e^{-itH}$ para $t \geq 0$ define un grupo de contracciones y se analizará el comportamiento de $B_t\phi$. Tales operadores aparecen al estudiar modelos ópticos en física nuclear. Antes de dar el enunciado del teorema, se empieza con algo de teoría general.

LEMA 8.1 Sea iH el generador de un semigrupo de contracciónes en un espacio de Hilbert, $\mathcal{H}$
Entonces, $-iH^*$ es también el generador de un semigrupo. De hecho, si B_t (respectivamente C_t) es el semigrupo generado por iH (respectivamente $-iH^*$), entonces $C_t = B^*_t$.

DEMOSTRACION Sea $C_t = B^*_t$. Entonces C_t es un semigrupo de contracción, por lo que existe $-iJ$ cerrado y a dominio denso tal que

$$(iJ + 1)^{-1} = -\int_0^{+\infty} e^{-t} C_t \, dt \quad \text{en sentido fuerte}$$

$\Rightarrow$

$$\left[(-iJ + 1)^{-1}\right]^* = -\left[\int_0^{+\infty} e^{-t} C_t \, dt\right]^*.$$

$$= -\int_0^{\infty} e^{-t} C_t^* \, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t} B_t \, dt$$

$$= (+iH + 1)^{-1}$$

Por lo tanto, $\left[(-iJ + 1)^{-1}\right] = (iJ^* + 1)^{-1} = (iH + 1)^{-1}$

Así, $J = H^*$

LEMA 8.2 Sea iH el generador de un semigrupo de contracción en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Supongamos que $H\phi = E\phi$, $E \in \mathbb{R}$. Entonces $H^*\phi = E\phi$. En particular:

a) Si $H\phi = E\phi$, $H\psi = \lambda\psi$, $E \neq \lambda$ y al menos alguno de E y λ real, entonces $(\phi, \psi) = 0$

b) Si $\mathcal{H}_b =$ subespacio generado por los eigenvectores de H con eigenvalores reales entonces $\mathcal{H}_b$ y $\mathcal{H}_b^{\perp}$ son subespacios invariantes para H.

DEMOSTRACION

a) Puesto que $H\phi = E\phi$, entonces

$$(-iH + 1)^{-1}\phi = \frac{1}{iE + 1}\phi = -\int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-itE} \phi \, dt = -\int_0^{\infty} e^{-t} e^{-itH} \phi \, dt$$

Y por lo tanto, para cualquier funcional $\ell_\psi(\cdot) = (\psi, \cdot)$, obtenemos que

$$\ell_\psi((H + i1)^{-1}\phi) = -\int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-itE}(\psi, \phi)\, dt = -\int_0^{+\infty} e^{-t}(\psi, e^{-itH}\phi)$$

Como la transformada de Laplace es inyectiva sobre las funciones acotadas, obtenemos que $\forall \psi \in \mathcal{H}$

$$(\psi, e^{-itH} \phi) = (\psi, e^{-itE} \phi)$$

$$\Rightarrow \quad B_t \phi = e^{-itH} \phi = e^{-itE} \phi \quad ; \; (\phi, B_t^* B_t \phi) = \| B_t \phi \|^2 = \| e^{-itE} \phi \|^2 = \| \phi \|^2$$

La desigualdad de Schwarz nos asegura que $|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\| \, \|\psi\|$. Y -- además nos dice que la igualdad se cumple solamente cuando φ, ψ son paralelos. Entonces

$$B_t^* B_t \phi = \phi$$

$$\Rightarrow \quad B^* B_t \phi = B_t^* (e^{-itE} \phi) = e^{-itE} B_t^* \phi = \phi$$

$\Rightarrow \quad B_t^* \phi = e^{itE} \phi$. Del lema anterior, B_t^* está generado por $-iH^*$. Usando lo mismo que antes, se obtiene que $H^* \phi = E \phi$

b) Supongamos que $\varphi \in D(H) \cap \mathcal{H}_b^{\perp}$, entonces $\forall \; \psi \in \mathcal{H}_b$, $(H\varphi, \psi) = (\varphi, H^* \psi) = 0$ ya que $H^* \psi \in \mathcal{H}_b$, por el inciso a). Así, $H\varphi \in \mathcal{H}_b^{\perp}$. Análogamente se cumple para H^* .

LEMA 8.3 Sean H y $\mathcal{H}_b$ como en el lema 8.2. Supongamos -- que C es un operador compacto con $C(H+i\mathbb{1})^{-1}$ es compacto. Entonces,

$$\frac{1}{T} \int_0^T \| C e^{-itH} \phi \|^2 \, dt \to 0 \quad T \to +\infty$$

para cualquier $\phi \in \mathcal{H}_b^{\perp}$.

DEMOSTRACION Puesto que $D(H)$ es denso en $\mathcal{H}$ y puesto --- que $e^{-itH}\phi$ es derivable si y solo si $\phi \in D(H)$, entonces $D(H) \cap \mathcal{H}_b^{\perp}$ es denso en $\mathcal{H}_b^{\perp}$. Por lo tanto, basta demostrarlo cuando- $\phi \in D(H)$. Entonces $C e^{-itH} \phi = C(H-i)^{-1} e^{-itH} (H-i)\phi$

Puesto que $(H-i)\phi \in \mathcal{H}_b^{\perp}$, nos podemos reducir al caso cuando C es compacto. Y por el mismo argumento que en el lema 1.2.2, es suficiente con demostrarlo cuando C es un operador de rango 1 y $\phi \in \mathcal{H}_b^{\perp}$.

Sea $C\varphi = (\psi_1, \varphi)\psi_2$ y P_b la proyección ortogonal sobre $\mathcal{H}_b^{\perp}$.

Entonces, puesto que e^{-itH} deja invariante $\mathcal{H}_b^{\perp}$,

$$\| C e^{-itH}\phi \|^2 = \| C P_b e^{-itH}\phi \|^2$$

$$= \| [(CP_b)^*(CP_b)]^{1/2} e^{-itH}\phi \|^2$$

$$= \langle e^{-itH}\phi, (CP_b)^*(CP_b) e^{-itH}\phi \rangle$$

$$= \langle e^{-itH}\phi, ((P_b\psi_1), e^{-itH}\phi) P_b\psi_1 \rangle = |\langle P_b\psi_1, e^{-itH}\phi\rangle|^2$$

$$= \| C' e^{-itH}\phi \|^2$$

donde

$$C'(\cdot) = (P_b\psi_1, \cdot) P_b\psi_1$$

Y por lo tanto, nos basta demostrar el teorema suponiendo que C es una proyección de rango 1 y $\mathcal{H}_b = \{0\}$. Para este caso definamos un semigrupo de contracción $\mathcal{B}_t$ sobre, $\mathcal{J}_2$, los operadores de Hilbert Schmidt sobre $\mathcal{H}$, por

$$\mathcal{B}_t(A) := B_t^* A B_t$$

Puesto que

$$\| \mathcal{B}_t(A) \|_2 = \| B_t^* A B_t \|_2 \leq \| B_t \| \, \| A B_t \|_2$$

$$\leq \| A B_t \|_2 = \| B_t^* A^* \|_2 \leq \| A^* \|_2$$

$$= \| A \|_2$$

Así, $\mathcal{B}$ es efectivamente un semigrupo de contracción (Continuidad se prueba similarmente). Ahora queremos demostrar que si $\mathcal{B}_t(A) = A \ \forall t$ entonces $A = 0$. Si existiera tal A, puesto que

$$\mathcal{B}_t(A^*) = [\mathcal{B}_t(A)]^* \tag{8.1}$$

tendríamos

$$\mathcal{B}_t(A \pm A^*) = A \pm A^* \tag{8.2}$$

Lo cual querría decir que existe un operador autoadjunto $A = A^* \neq 0$ tal que. $\mathcal{B}_t(A) = A$

Por consiguiente solo necesitamos probar la aseveración para $A = A^*$.

Por ser A un operador autoadjunto y compacto el espectro de A consiste de -- eigenvalores discretos de multiplicidad finita. Es decir, si λ es un eigenvalor, de A, entonces $\{\eta \mid A\eta = \lambda\eta\}$ tiene dimensión finita. Además, por -- ser autoadjunto, $\sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| = \|A\|$

Como $\sigma(A)$ es discreto, necesariamente existe $\phi \in \mathcal{H}$ tal que

$$A\phi = + \|A\| \phi \tag{8.3}$$

$$\left(\text{Si } A\phi = -\|A\|\phi, \text{ tomamos } B = -A \right)$$

Entonces si $\mathcal{B}_t(A) = A$

$$\|A\| \, \|B_t\phi\|^2 \leq \|A\| \, \|\phi\|^2 = \langle \phi, \|A\|\phi \rangle = \langle B_t\phi, AB_t\phi \rangle$$

$$\leq \|AB_t\phi\| \, \|B_t\phi\| \leq \|A\| \|B_t\phi\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \langle B_t\phi, AB_t\phi \rangle = \|AB_t\phi\| \, \|B_t\phi\|$$

$$= \|A\| \, \|B_t\phi\|^2$$

Por la desigualdad de Schwarz, sabemos que solo hay igualdad cuando los vectores son - paralelos. En consecuencia,

$$AB_t\phi = \pm\|A\| B_t\phi \quad \text{y} \quad \|B_t\phi\| = \|\phi\|$$

Lo cual nos dice que si $V = \{\eta \mid A\eta = \|A\|\eta\}$

entonces

$$B_t : V \to V \tag{8.4}$$

En primer lugar, por ser V de dimensión finita, $B_t \upharpoonright V$ tiene espectro puramente puntual. Y por ser $B_t \upharpoonright V$ una isometría obtenemos que el valor absoluto de los eigenvalores es $1\!\!1$ y además que el subespacio generado por los eigenvectores es V.
Entonces, los eigenvalores son de la forma $e^{-it\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Así, λ es un eigenvalor de H con el mismo eigenvector. Entonces $V \subset \mathcal{U}_b$ el cual hemos asumido que es $\{0\}$. Por lo tanto $\|A\| = 0$.
Puesto que $tr\, A^* B = tr\, B A^*$

$$(\mathcal{B}_t(A), C)_{\tilde{\mathcal{F}}_2} = tr\, C^* \mathcal{B}_t(A)$$

$$= t(C^* B_t^* A B_t) = tr\, (B_t C^* B_t^* A)$$

$$= (A, B_t C B_t^*)_{\mathcal{F}_2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}_t^*(C) = B_t C B_t^*$$

Similarmente, obtenemos que $\mathcal{B}_t^*(A) = A \quad \forall \ t \in \mathbb{R}^+$ no

no tiene soluciones no triviales. Entonces,

$\cup_t \operatorname{Ran}(\mathcal{B}_t - 1\!\!1)$ es denso en $\mathcal{F}_2$ ya que si

$C \in [\bigcup_t \operatorname{Ran}(\mathcal{B}_t - 1\!\!1)]^\perp$ entonces $\mathcal{B}_t^*(C) = C \quad \forall \ t \in \mathbb{R}^+$. Y por lo antes visto, $C = 0$. Sea ahora t fijo, y

$$A = \mathcal{B}_t(C) - C \tag{8.5}$$

$$\mathcal{B}_s(A) = \mathcal{B}_s\, \mathcal{B}_t(C) - \mathcal{B}_s(C) = \mathcal{B}_{s+t}(C) - \mathcal{B}_s(C) \tag{8.6}$$

Si $T \geq t$

$$\left\| \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{B}_s(A)\, ds \right\| = \left\| \frac{1}{T} \int_T^{T+t} \mathcal{B}_s(C)\, ds \right.$$

$$\left. - \frac{1}{T} \int_0^t \mathcal{B}_s(C)\, ds \right\|$$

$$\leq \frac{1}{T}\left[\int_T^{T+t} \|\mathcal{B}_s(C)\| ds + \int_0^t \|\mathcal{B}_s(C)\| ds\right.$$

$$\leq \frac{2t}{T}\|C\| \leq \frac{2t}{T}\|C\|_2 \qquad \text{cuando } T \to +\infty$$

Usando la densidad de $\bigcup_t \mathrm{Ran}(\mathcal{B}_t - 1)$ se deduce que

$$\lim_{T\to+\infty} \left\| \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{B}_s(A)\,ds \right\| \to 0 \quad \forall\, A \ \mathcal{F}_2$$

Sea $A = (\eta, \cdot)\,\eta$ y $Q = (\phi, \cdot)\,\phi$

y sea $\{\varphi_n\}$ una base ortonormal de $\mathcal{U}$ tal que $\phi = \alpha\,\varphi_1$,

Usando que $Q^* = Q$

$$\operatorname{tr}\left(Q^* \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{B}_s(A)\,ds\right) = \operatorname{tr}\left(Q\frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{B}_s(A)\,ds\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{B}_s(A)\,ds\,\varphi_n ,\ Q\varphi_n\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{B}_s(A)\varphi_1\,ds,\ Q\varphi_1\right) \leq \left\|\frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{B}_s(A)\,ds\right\| \|Q\|$$

$$\to 0 \quad \text{si } T \to +\infty$$

Por otro lado,

$$\left(\frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{B}_s(A)\,ds\,\varphi_1,\ Q\varphi_1\right) = \frac{1}{T}\int_0^T \langle \mathcal{B}_s(A)\varphi_1, Q\varphi_1\rangle\, ds$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \langle (\eta, B_s\varphi_1)\, B_s^*\eta,\ (\phi,\varphi_1)\,\phi \rangle\, ds$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \langle \overline{(\phi,\varphi_1)}\,(\eta, B_s\varphi_1)\,\eta,\ B_s\phi\rangle\, ds$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \langle (\eta, B_s\phi)\,\eta,\ B_s\phi\rangle\, ds$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T |(\eta, B_s\phi)|^2\, ds \quad \to 0 \quad T \to +\infty$$

Por (8.6) $\clubsuit$

LEMA 8.4 Sean H, $\mathcal{H}_b$ como antes, entonces $\{ (H-i)^{-2} H\phi \mid \phi \in D(H) \cap \mathcal{H}_b^{\perp} \}$ es denso en $\mathcal{H}_b^{\perp}$.

DEMOSTRACION Sea $\eta \in \mathcal{H}_b^{\perp}$ y ortogonal a todos los vectores de la forma arriba mencionada. Viendo que $(-i\lambda)(H-i\lambda)^{-1} = 1\!\!1 - H(H-i\lambda)^{-1}$

(8.7)

y además que $\| (H)(H-i\lambda)^{-1}\phi \| \leq \| (iH+\lambda)^{-1} \| \, \| H\phi \| \leq \frac{1}{\lambda} \| H\phi \|$

$\to 0$ $\lambda \to +\infty$ para $\phi \in D(H)$.

Se deduce que

$$\underset{\lambda \to +\infty}{s\text{-}\lim}\ (-i\lambda)(H-i\lambda)^{-1} = 1\!\!1 \qquad (8.8)$$

Entonces, para $\phi \in D(H) \cap \mathcal{H}_b^{\perp}$

$$(\eta, H\phi) = \underset{\lambda \to +\infty}{s\text{-}\lim}\ \left(\eta,\ (-i\lambda)^2 (H-i1\!\!1)^{-2} H \left[(H-i1\!\!1)(H-i\lambda)^{-1} \right]^2 \phi \right) = 0$$

Ya que $(H-i1\!\!1)(H-i\lambda)^{-1}$ deja invariante $\mathcal{H}_b^{\perp}$. Puesto que -- cualquier vector ϕ que está en $D(H)$ se escribe de la forma $\phi_1 + \phi_2$ con $\phi_1 \in \bar{\mathcal{H}}_b \cap D(H)$, $\phi_2 \in \mathcal{H}_b^{\perp} \cap D(H)$ y recordando que H deja -- invariante tanto $\bar{\mathcal{H}}_b$ como $\mathcal{H}_b^{\perp}$ se desprende que

$$(\eta, H\phi) = 0 \qquad \forall\ \phi \in D(H)$$

$$\Rightarrow \quad H^{*}\eta = 0 \quad , \quad \eta \in \overline{\mathcal{U}_b}$$

$$\therefore \quad \eta = 0$$

$\triangle$

Ahora ya es posible demostrar el siguiente teorema

TEOREMA 8.1 Sea $Ho = -\Delta$ y sea V un operador en $L^2(\mathbb{R}^\nu)$ tales que

a) $\| V\phi \| \leq a \| H_0\phi \| + b \|\phi\|$ $a < 1$

b) $\mathrm{Im}\,(\phi, V\phi) \leq 0$ para todo $\phi \in D(H_0)$

c) La condición de Enss (2, 5) se cumple para

$h\ (R) := \| V (H_0 - i)^{-1} F\{ B_R^c, x \} \|$

Sea $H = H_0 + V$ y $B_t = e^{-itH}$. Entonces

a) $\Omega^{\pm} := \underset{t \to -\infty}{s\text{-}\lim}\ B_{-t}\, e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)$ existen-

b) Para todo $\phi \in \mathcal{U}_b^{\perp}$,

$W := \underset{t \to +\infty}{s\text{-}\lim}\ e^{itH_0} B_t$ existe

c) Los unicos posibles puntos límites de los eigenvalores reales de H están en $S_\nu \cup C_\nu$ y cualesquiera de ellos tiene multiplicidad finita.

Nota 7.1 Bajo las hipótesis a) y b) $iH = i(H_0 + V)$, es el generador de un semigrupo de contracción. Ver, por ejemplo, [12].

Nota No se dice nada acerca de Ram Ω^{+}, pero por la relación de entrelazamiento:

$$B_s\, \Omega^{+} = \Omega^{+}\, e^{-isH_0}$$

Entonces $(\Omega^{+})^{*} B_s^{*} = e^{isH_0} (\Omega^{+})^{*}$

De aquí se deduce que si

$$H^* \phi = E\phi \ , \qquad |\langle (\Omega^+)^* \phi, e^{isH_0} (\Omega^+)^* \phi \rangle| = e^{-s(I_m E)} \|(\Omega^+)^* \phi\|^2$$

Por lo tanto, si Ho es un operador absolutamente continuo, del lema XXI se deducirá que

$$\overline{\operatorname{Ran} \Omega^+} \subset \mathcal{U}_b^{\perp}$$

Demostración del teorema

Sea $\Omega_t = B_{-t} e^{-itH_0} \quad (t < 0)$ (8.7)

Existencia de Ω^+ se hace como antes. Esto prueba el inciso a).

Para probar b) sea $\phi \in \mathcal{U}_b^{\perp} \cap D(H)$ y sea $\eta = (H - i)^{-2} H\phi$

Probaremos que $W\eta$ existe, y del lema 8.4, se sigue que W existirá para todo $\mathcal{U}_b^{\perp}$. Usando el lema 8.3 y en la misma forma que antes podemos encontrar $t_n \to +\infty$ tal que

$$\| F\{B_{n,x}\} \eta_n \| \to 0 \quad ; \quad \eta_n := e^{-it_n H} \eta \tag{8.8}$$

$$\| F\{B_{n,x}\} \phi_n \| \to 0 \quad ; \quad \phi_n := e^{-it_n H} \phi \tag{8.9}$$

Supongamos que podemos encontrar una función $\epsilon(M)$ que tiende a 0 cuando $M \to +\infty$ y para cada M una descomposición

$$\eta_n = \eta^{(1)}_{n,M,\omega} + \eta^{(2)}_{n,M,\omega} + \eta_{n,M,out} + \eta_{n,M,in} \tag{8.10}$$

con

$$\| \eta^{(1)}_{n,M,\omega} \| \to 0 \qquad \| \eta^{(2)}_{n,M,\omega} \| \le \epsilon(M)$$

$$\| \eta_{n,M,in} \| \to 0 \qquad \int_0^{+\infty} \| V e^{-itH_0} \eta_{n,M,out} \| \, dt \to 0$$

(Todos los límites son para M fijo)

Entonces, si ponemos

$$\alpha_n = \sup_{t>0} \| (B_t - e^{-itH_0}) \eta_n \| \tag{8.11}$$

$$d_n \leq \sup_{t>0} \left\{ \|(B_t - e^{-itH_0})\, \eta^{(1)}_{n,M,\omega}\| + \|(B_t - e^{-itH_0})\, \eta^{(2)}_{n,M,\omega}\| \right.$$

$$\left. + \|(B_t - e^{-itH_0})\, \eta_{n,M,in}\| + \|(B_t - e^{-itH_0})\, \eta_{n,M,out}\| \right\}$$

$$\leq 2 \left\{ \|\eta^{(1)}_{n,M,\omega}\| + \|\eta^{(2)}_{n,M,\omega}\| + \|\eta_{n,M,in}\| \right\}$$

$$+ \sup_{t>0} \|(B_t - e^{-itH_0})\, \eta_{n,M,out}\|$$

El primero y el tercer término tienden a cero. El segundo está acotado por $\epsilon(M)$ y

$$\sup_{t>0} \|(B_t - e^{-itH_0})\, \eta_{n,M,out}\| = \sup_{t>0} \left\| \int_0^t \frac{d}{du} \left(B_{t-u}\, e^{-iuH_0}\, \eta_{out}\right) \right\|$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \|V e^{-isH_0}\, \eta_{n,M,out}\|\, ds \to 0$$

En consecuencia

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\; d_n \leq 2\, \epsilon(M)$$

Tomando $M \to +\infty$, se obtiene $\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$

Por otro lado, para $t, s > t_n$

$$\| e^{itH_0} B_t \eta - e^{isH_0} B_s \eta \| = \| e^{itH_0} B_{t-t_n}\, \eta_n - e^{isH_0} B_{s-t_n} \eta_n \|$$

$$= \| e^{i(t-t_n)H_0} B_{t-t_n}\, \eta_n - e^{i(s-t_n)H_0} B_{s-t_n}\, \eta_n \|$$

$$\leq \| e^{i(t-t_n)H_0} B_{(t-t_n)}\, \eta_n - \eta_n \| + \| e^{i(s-t_n)H_0} B_{s-t_n} \eta_n - \eta_n \|$$

$$= \| B_{t-t_n} \eta_n - e^{-i(t-t_n)H_0}\, \eta_n \| + \| B_{(s-t_n)} \eta_n - e^{-i(s-t_n)H_0}\, \eta_n \|$$

$$\leq 2 d_n$$

Por consiguiente la sucesión $e^{itH_0} B_t \eta$ es de Cauchy. Así, la descomposición (8.10) implica la conclusión b).

Ahora, para probar (8.10) sea

$$\phi(x) = (x-i)^{-2} x = i(x-i)^{-2} + (x-i)^{-1} \tag{8.12}$$

$\psi_M(x)$ una función C^∞ que es 0 si $|x| > M$ ó $|x| < M^{-1}$ y que es 1 si $|x| > 2M^{-1}$ ó $|x| < \frac{1}{2}M$ y además $\|\psi_M\|_\infty \leq 1$

En consecuencia,

$$\epsilon_1(M) := \|(1-\psi_M)\phi\|_\infty \to 0 \quad \text{si } M \to +\infty \tag{8.13}$$

ya que ϕ se anula en 0 y en infinito. Sean

$$f_{\alpha,M}(x) \quad , \quad g^{in}_{\alpha,M}(k) \quad , \quad g^{out}_{\alpha,M}(k)$$

funciones como en el teorema 3.1 para descomponer funciones a soporte en $M^{-1} < k^2 < M$ con $P(k) = |k|^2$. Sea

$$\eta^{(1)}_{n,M,\omega} := [\phi(H) - \phi(H_0)]\varphi_n + \sum_{|\alpha| \leq 1/2} f_{\alpha,M}(x)\, \psi_M(H_0)\, \Phi(H_0)\, \varphi_n$$

$$\eta^{(2)}_{n,M,\omega} := (1 - \psi_M)(H_0)\, \Phi(H_0)\, \varphi_n$$

$$\eta_{n,M,ex} := \sum_{|\alpha| \leq 1/2} g^{ex}_{\alpha,M}(k)\, f_{\alpha,M}\, \psi_M(H_0)\, \Phi(H_0)\, \varphi_n$$

donde $ex =$ in ó out

Entonces,

$$\eta^{(1)}_{n,M,\omega}+\eta^{(2)}_{n,M,\omega}+\eta_{n,M,in}+\eta_{n,M,out}=\Phi(H)\phi_n=\eta_n$$

Como antes, $\Phi(H)-\Phi(H_0)$ es compacto,

ya que Φ es un polinomio de $(x-i)^{-1}$.

Entonces, $\|\eta^{(1)}_{n,M,\omega}\|\to 0 \qquad n\to+\infty$

De (8.13)

$$\|\eta^{(2)}_{n,M,\omega}\|\leq \epsilon_1(M)\|\phi\|\equiv\epsilon(M)$$

Los mismos argumentos que antes, muestran que

$$\int_0^{+\infty}\|Ve^{-itH_0}\eta_{n,M,out}\|dt\to 0 \quad n\to+\infty$$

Lo unico que falta es ver que

$$\|\eta_{n,M,in}\|\to 0 \qquad n\to+\infty$$

Para esto, sea An el operador

$$\sum_{|K|>\frac{1}{2}n} g^{in}_{d,M}f_{d,M}\Phi(H_0)\varphi_M(H_0)$$

El hecho que $A_n\phi_n$ tienda a cero se deduce básicamente como en la demostración de (3.34), junto con el hecho que

$$\|(B_{-t}-e^{-itH_0})A_n\|=\|\int_{-t}^{0}\frac{d}{du}B_{u-t}e^{-iuH_0}A_n\|\,du$$

$$\leq\int_{-\infty}^{0}\|Ve^{-iuH_0}A_n\|du\to 0 \qquad (8.14$$

Esta prueba b) del teorema

Para la prueba de c), supongamos que es falsa, la conclusión. Por el lema 8.2 podemos - encontrar una sucesión ortonormal con $H\eta_n=H^{*}\eta_n=E_n\eta_n$ y $E_n\to E\neq 0$. Poniendo $(E_n-i)^{+2}E_n^{-1}\eta_n=\phi_n$, se obtiene una descomposición de la- forma (8.10) con todas esas propiedades excepto que en lugar de demostrarse que ---

$\|\eta_{M,in}\| \to 0$ se prueba que

$$\int_0^{+\infty} \|V e^{-iuH_0} \eta_{n,M,in}\| \, du \to 0 \tag{8.15}$$

Con lo cual se obtiene que

$$\sup_{t<0} \|(B_{-t} - e^{-itH_0}) \eta_{n,M,in}\| \to 0 \quad n \to +\infty \tag{8.16}$$

Dada esta descomposición, escribimos

$$\langle \eta_n, \eta_n \rangle = \langle \eta_n, \eta^{(1)}_{n,M,\omega} \rangle + \langle \eta_n, \eta^{(2)}_{n,M,\omega} \rangle + \langle \eta_n, \eta_{n,M,out} \rangle$$
$$+ \langle \eta_n, \eta_{n,M,in} \rangle$$

El primer término tiende a cero, el segundo es menor o igual que $\epsilon(M)$. Mientras que para el tercero

$$|\langle \eta_n, \eta_{n,M,out} \rangle = |\langle e^{itE_n} \eta_n, \eta_{n,M,out} \rangle|$$

$$(H\eta_n = H^* \eta_n = E_n \eta_n)$$

$$= |\langle B^*_t \eta_n, \eta_{n,M,out} \rangle|$$

$$= |\langle \eta_n, B_t \eta_{n,M,out} \rangle|$$

Usando el lema XXI obtenemos que

$$|\langle \eta_n, \eta_{n,M,out} \rangle| = \lim_{t \to +\infty} |\langle \eta_n, (B_t - e^{-itH_0}) \eta_{n,M,out} \rangle|$$

$$\leq \sup_{t \geq 0} \|(B_t - e^{-itH_0}) \eta_{n,M,out}\|$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \|V e^{-itH_0} \eta_{n,M,out}\| dt \to 0 \quad n \to +\infty$$

Similarmente, usando que

$$|\langle \eta_n, \eta_{n,M,in} \rangle| = |\langle B^*_t \eta_n, \eta_{n,M,in} \rangle|$$

obtenemos finalmente

$$\lim_{n \to +\infty} \langle \eta_n, \eta_n \rangle \leq \mathcal{E}(M)$$

lo cual viola la suposición de que las η_n son ortonormales para M suficientemente grande. $\triangle$

CAPITULO IX

LA ECUACION DE KLEIN-GORDON Y EL METODO DE ENSS

LA ECUACION DE KLEIN-GORDON

La ecuación de Klein-Gordon es la ecuación diferencial parcial:

$$(i\frac{\partial}{\partial t} - b_0)^2 \, \Psi(x,t) = \left[\sum_{j=1}^{n} (D_j - b_j)^2 + m^2 + q_s(x) \right] \Psi(x,t)$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \; t \in \mathbb{R}, \; D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad (9.1)$$

$b_j(x)$, $0 \leq j \leq n$ y $q_s(x)$ son funciones reales y m es una constante positiva - Esta ecuación describe una partícula relativista de spin cero y masa m en la presencia -- de un potencial eléctrico $b_0(x)$, un potencial magnético $b_i(x)$, $1 \leq i \leq n$, y $q_s(x)$ un potencial escalar.

Siguiendo el procedimiento usual podemos pasar (9.1) a una -- ecuación equivalente la cual es de primer orden en el tiempo:

Sea $f_1(x,t) = \varphi(x,t)$, $f_2(x,t) = i\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,t)$, $f = \binom{f_1}{f_2}$.

Entonces (1) es equivalente a la ecuación

$$i\frac{\partial}{\partial t}f = hf \qquad (9.2)$$

$$h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ L & Q \end{bmatrix}, \quad D(h) = C_0^{\infty\,12} := C_0^{\infty} \oplus C_0^{\infty}$$

$$L = \sum_{j=1}^{3}(D_j - b_j)^2 + m^2 + q(x) \qquad q(x) = q_0 - b_0^2$$

$$Q = 2b_0(x) \qquad (9.3)$$

Ahora, se asocia con L una forma sesquilinear definida por

$$(f,g)_E = \sum_{j=1}^{3}\langle (D_j - b_j)f_1, (D_j - b_j)g_1\rangle + \langle (m^2+q)f_1, g_1\rangle + \langle h, g\rangle \quad (9.4)$$

$$(f,g) \in C_0^{\infty,2}$$

Haciendo un cálculo directo, se verifica que h es simétrico en esta forma, es decir,

$$(hf, g)_E = (f, hg)_E \qquad f, g \in C_0^{\infty,2} \qquad (9.5)$$

Cuando $b_j(x) \equiv 0$, $q_3(x) \equiv 0$, la forma sesquilinear se reduce a

$$(f,g)_0 = \sum_{j=1}^{3}(D_j f_1, D_j g_1) + m^2(f_1, g_1) + (f_2, g_2) \qquad (9.6)$$

Sea $\mathcal{H}_0$ la cerradura de $C_0^{\infty,2}$ con esta norma. Claramente $(\cdot,\cdot)_0$ es equivalente con la norma $H_1 \oplus L^2$ donde $\mathcal{H}_s$, $s \in \mathbb{R}$ es el espacio de Sobolev de orden s. Es decir, la cerradura de C_0^{∞} con la norma ---
$\|f\|_s = \|(1+\xi^2)^{s/2}\hat{f}\|_{L^2}$ En este caso, (2) se reduce a

$$i\frac{\partial}{\partial t}f = \mathcal{H}_0 f, \qquad \mathcal{H}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Delta + m^2 & 0 \end{bmatrix} \qquad (9.7)$$

Ahora veamos que Ho define un operador vagamente elíptico:

Denotemos $L_2^2 := L^2 \oplus L^2$. Sea U_0 el operador de $\mathcal{H}_1 \oplus L^2$ to L_2^2

$$U_0 := \frac{1}{2^{1/2}}\begin{pmatrix} (K^2+m^2)^{1/2} & 1 \\ (K^2+m^2) & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\|U_0\{f_1,f_2\}\|^2_{L^2_2} = \frac{1}{2}\|(k^2+m^2)^{1/2}f_1+f_2\|^2+\frac{1}{2}\|(k^2+m^2)^{1/2}f_1-f_2\|^2$$
$$= \|(k^2+m^2)^{1/2}f_1\|^2+\|f_2\|^2$$
$$= \|\{f_1,f_2\}\|^2_{\mathcal{H}_0}$$

En consecuencia, Ψ_0 es unitario. Además, si $\Psi=(\Psi_1,\Psi_2)\in\mathcal{L}^2_2$ entonces $U_0\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Psi_1\\\Psi_2\end{pmatrix}$ donde

$$\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\Psi_1+\Psi_2}{2(k^2+m^2)^{1/2}}\\ \dfrac{\Psi_1-\Psi_2}{2}\end{pmatrix} \tag{9.7a}$$

Por lo tanto $(f_1, f_2)\in\mathcal{H}_0$ y así U_0 es una isometría de $\mathcal{H}_0$ sobre L^2_2.

Definamos el operador en L^2_2, $\hat{\mathcal{H}}_0$ por

$$\hat{\mathcal{H}}_0=\begin{bmatrix}(k^2+m^2)^{1/2} & 0\\ 0 & -(k^2+m^2)^{1/2}\end{bmatrix} \tag{9.8}$$

Se obtiene fácilmente que Ho es autoadjunto en

$$D(\hat{\mathcal{H}}_0)=\{\Psi\in L^2_2 \mid \|(1+k^2)^{1/2}\hat{\Psi}_j\|<+\infty\ j=1,2\}$$
$$\equiv \mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_1$$

Más aún, $\hat{H}$o es esencialmente autoadjunto en $C_0^{\infty,2}=C_0^{\infty}\oplus C_0^{\infty}$

(Ver ejemplo II)

Un simple cálculo nos muestra que

$$U_0^{-1}=\frac{1}{2^{1/2}}\begin{pmatrix}(k^2+m^2)^{-1/2} & (k^2+m^2)^{-1/2}\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

y para $\Psi\in C_0^{\infty,2}$

$$U_0^{-1}\hat{\mathcal{H}}_0U_0\Psi=\mathcal{H}_0\Psi \tag{9.9}$$

En consecuencia, Ho es autoadjunto con dominio $\mathcal{H}_2\otimes\mathcal{H}_1$ y esencialmente autoadjunto en $C_0^{\infty,2}$. Como en el lema IV, Ho tiene espectro absolutamente continuo. Así, Ho es un operador vagamente elíptico. Ahora bien para la forma sesquilinear en (9.4) , supondremos que L tiene una extensión autoadjunta , la cual es mayor igual que $\varepsilon > 0$. Denotaremos por $\mathcal{H}_E$ la cerradura de $C_0^{\infty}, {}^2$ en la norma heredada por la forma sesquilinear en (9.4). Seguiremos denotando por L a esta extensión autoadjunta. Puesto que L $L \geq \varepsilon$, como vimos anteriormente, se deduce que el operador

$$Uf = \frac{1}{2^{1/2}} \begin{bmatrix} L^{1/2} & 1 \\ L^{-1/2} & -1 \end{bmatrix} f, \quad f \in \mathcal{H}_E$$

es unitario de $\mathcal{H}_E = D(L^{1/2}) \otimes L^2$ sobre L^2_2

Haciendo una discusión análoga a la hecha para Ho, se demuestra que bajo el mapeo U, tenemos que

$$\mathcal{H} = U^{-1} \hat{\mathcal{H}} U \tag{9.10}$$

donde $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_1 + \hat{Q}$ es un operador autoadjunto en L^2_2 .

$$\hat{\mathcal{H}}_1 = \begin{pmatrix} L^{1/2} & 0 \\ 0 & -L^{1/2} \end{pmatrix}$$

$$\hat{Q} = 2b_0 \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta forma la ecuación de Klein-Gordon es equivalente a la ecuación

$$i \frac{d}{dt} \psi = \hat{\mathcal{H}} \psi, \quad \psi \in L^2_2$$

Mientras que la ecuación de Klein-Gordon no perturbada es equivalente a la ecuación

$$i \frac{d}{dt} \psi = \hat{\mathcal{H}}_0 \psi, \qquad \psi \in L^2_2$$

La ventaja de esta nueva presentación es que ambas ecuaciones están dadas en el mismo espacio de Hilbert L^2_2 . Además la interpretación física es clara en estas representaciones, en la cual existe un operador de posición y una densidad de probabilidad definida positiva. Esta representación ha sido estudiada por primra vez en $\langle 84 \rangle$ y $\langle 85 \rangle$, dónde también se desarrolla la teoría espectral y la teoría de colisiones tanto en las representaciones originales (en $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}_E$)- como en las representaciones en L^2_2 .

Usando este análisis, el resultado para la ecuación de Klein-Gordon se deduce similarmente como antes, pero hay que hacer algunos cambios.

TEOREMA 9.1 Sea $\hat{H}o$ y $\hat{H}$ como en (9.8) y (9.10) y $\hat{J}$ un operador de L^2_2 en L^2_2 tal que

a) $[(\hat{\mathcal{H}} + i1)^{-1}\hat{J} - \hat{J}(\mathcal{H}_0 + i1)^{-1}]$ es compacto.

b) $[\hat{J} - 1]$ es compacto

c) Para todo intervalo acotado I , y alguna $n \in \mathbb{N}$ la condición de Enss se cumple para

$$h_I(R) := \| \hat{P}(I)[\hat{\mathcal{H}}\hat{J} - \hat{J}\hat{\mathcal{H}}_0](\hat{\mathcal{H}}_0 + i1)^{-n} F\{B^c_R\}\|$$

Entonces

a) Los operadores de onda generalizados existen y además,

$$\tilde{\Omega}^{\pm} := \underset{t \to \mp\infty}{s\text{-}\lim}\, e^{it\hat{\mathcal{H}}}\hat{J}e^{-it\hat{\mathcal{H}}_0}$$

$$= \underset{t \to \mp\infty}{s\text{-}\lim}\, e^{it\hat{\mathcal{H}}}e^{-it\hat{\mathcal{H}}_0}$$

$$= \Omega^{\pm}_0$$

b) $\operatorname{Ran} \Omega^{\pm} = \mathcal{H}_{ac}(\hat{\mathcal{H}})$

c) Los únicos posibles puntos límites (finitos) para $\hat{H}$ son $\pm$ m . Cualquier eigenvalor distinto de $\pm$ m tiene multiplicidad finita

d) $\sigma_{sc}(\hat{\mathcal{H}}) = \emptyset$ (vacío)

e) $\sigma_{ess}(\hat{\mathcal{H}}) = \sigma_{ess}(\hat{\mathcal{H}}_0) = (-\infty, m] \cup [m, \infty$

DEMOSTRACION

Existencia de $\tilde{\Omega}^{\pm}$ se sigue de la proposición 1.3. --

Usando la hipótesis b) y el lema XXI se obtiene la conclusión a) del teorema. Para probar lo demás, sólo tenemos que lograr la descomposición de Enss, Para esto, seguiremos la descomposición hecha para la demostración del teorema 3.1.

Usando las hipótesis a) y b) se deduce que

$$\phi(\hat{H}) - \phi(\hat{H}_0) \quad \forall \quad \phi \in C_{00}(\mathbb{R}).$$

Siguiendo los mismos argumentos dados en la demostración -- del Principio de Descomposición de Enss del teorema 3.1, podemos descomponer para - cada sucesión cumpliendo

$$\| F\{ B_n, x\} \Psi_n \| \to 0 \quad n \to +\infty \quad \hat{P}[a,b] \Psi_n = \Psi_n \tag{9.11}$$

$$\Psi_n = \Psi_{n,w} + \Psi_{n,in} + \Psi_{n,out} \tag{9.12}$$

tal que

a) $\| \Psi_{n,w} \| \to 0 \quad n \to +\infty$ (9.13)

b) $\sup_n \| (\hat{H}_0 + i\mathbb{1}) \Psi_{n,\substack{in\\out}} \| < +\infty$ (9.14)

c) $\lim_{n \to +\infty} \left[\sup_{t<0} \| F\{ B_{\delta n}, x\} e^{\mp it\hat{H}_0} \Psi_{n,\substack{in\\out}} \| \right] = 0$ (9.15)

para algún $\delta > 0$ que depende de a y b únicamente.

d) Para cada m , existe una constante Cm que depende únicamente - de m tal que

$$\| F\{ B_\delta(n + |t|), x\} e^{\mp it\hat{H}_0} (\hat{H}_0 + i\mathbb{1})^{n} \Psi_{n,\substack{in\\out}} \| \leq C_m (1 + n + |t|)^{-m}$$

$$\forall \quad t < 0. \tag{9.16}$$

Usando (9.15 y la hipótesis c) se demuestra que

$$\| (\Omega^{\pm} - \hat{J}) \Psi_{n,\substack{in\\out}} \| \to 0 \quad n \to +\infty$$

Y por la conclusión a) obtenemos que

$$\| (\Omega^{\pm} - \hat{J}) \Psi_{n, \, in/out} \| \to 0 \quad n \to +\infty \qquad (9.17)$$

Usando esto último , (9.10) y la hipótesis b) , obtenemos que

$$\| \Psi_n - \Omega^{+} \Psi_{n\, in} - \Omega^{-} \Psi_{n\, ,out} \| \to 0 \quad n \to +\infty \qquad (9.18)$$

De esta forma se ve que la descomposición hecha tiene las mismas propiedades que antes. El teorema se sigue entonces. Δ

Usando la unitariedad de U y U_0 y (9.9) y (9.10) obtenemos que las hipótesis del teorema son equivalentes a las condiciones:

a) $(\mathcal{H}_{E} + i \mathbb{1})^{-1} U^{-1} \hat{J} U_0 - U^{-1} \hat{J} U_0 (\mathcal{H}_0 + i \mathbb{1})^{-1}$ es compacto.

b) $(\hat{\Gamma} - \mathbb{1})$ es compacto.

c) Para todo intervalo compacto I , y alguna $n \in \mathbb{N}$, la condición de Enss (2.5) se cumple para $h_I(R) : \| P(I) [\mathcal{H} U^{-1} \hat{J} U_0 - U^{-1} \hat{J} U_0 - \mathcal{H}_0] (\mathcal{H}_0 + i \mathbb{1})^{-n} U_0^{-1} F\{B_R^c, x\} \|$

Y obtenemos completez asintótica para $\Omega^{\pm} := \text{s-}\lim\limits_{t \to \pm\infty} e^{it\mathcal{H}} U^{-1} \hat{J} U_0 e^{-it\mathcal{H}_0}$

Bajo ciertas condiciones, ⟨84⟩, ⟨85⟩ $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}_E$ coinciden como conjunto de funciones (aunque con distinto producto escalar). Si tomamos J el operador de identificación de $\mathcal{H}_0$ sobre $\mathcal{H}_E$.

Y Ponemos $\hat{J} = U J U_0^{-1}$ la función $h_I(R)$ toma la forma

$$\| P(I) [\mathcal{H} J - J \mathcal{H}_0] (\mathcal{H}_0 + i \mathbb{1})^{-n} U_0^{-1} F\{ B_R^c, x \} \|$$

Así, $h_I(R)$ se transforma en una expresión más fácil de controlar. De aquí vemos la conveniencia de tomar $\hat{J}$'s distintas de la identidad.

REFERENCIAS

Libros

[1] Amrein, W.O. Non-Relativistic Quantum Mechanics Volumen 2, D. Reidel Publishing Company, 1981.

[2] Amrein, W.O. ; Jauch Josef M. y Sinha Kalyan B. Scattering Theory in Quantum Mechanics W.A.Benjamin Inc 1977.

[3] Courant, Richard and John Fritz. Introduction to Calculus and Analysis Volumen 2 Wiley - interscience Publication 1974.

[4] Davies E.B. Quantum Theory for Open Systems Academc Press 1978.

[5] Deift, P. Classical Scattering Teory with a trace condition. Princeton Series yn Physics. Princeton Univ. Press, por aparecer.

[6] EMCH, G.G. Algebraic Methods in Statistical Physics and Quantum Field Theory. Wiley - Interscience Publication 1972.

[7] Kato, Tosio. Perturbation Theory for Linear Operators. Segunda edición . Springer Verlag 1976.

[8] ________. Topics in Functional Analysis . Essays Dedicated to M.G. Krein on the ocasion of His 70th Birthday. Edited by I. Gohberg M. Kac. Academic Press, 1978. pp. 185-195.

[9] Mackey , G.W. Mathemathical foundations of Quantum Mechanics, W.A. Benjamin Publications, 1969.

[10] Piron, C. Foundations or Quantum Mechanics W. A. Benjamin, 1969,

[11] Reed, Michael and Simon, Barry. Methods of Modern Mathematical Physics Volume I Academic Press, 1975.

[12] ________________. Methods of Modern Mathemalical Pysics Volume II Academic Press. 1975.

[13] ________________. Methods of Modern Mathematical Physics Volume iii Academic Press, 1979.

[14] ________________. Methods of Modern Mathematical Physics Volume IV Academic Press , 1978.

[15] Rudin, Walter. Real And Complex Analysis. McGraw - Hill Publishing Co. Ltd., 1978

[16] Wiener, N. The Fourier Integral and Certain of its Applivation. Cambridge University Press, London., 1979.

Artículos

⟨1⟩ Agmon, S. Spectral properties of Schrodinger operators and sacttering theory. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. II, 2 pp. 151 - 218 (1975).

⟨2⟩ Alsholm, P. and G. Schmidt: Spectral and Scattering theory for Schrodinger operators, Arch. Rational Mech. Anal. 40 pp. 281 - 311 (1971).

⟨3⟩ Amrein, W.O., D.B. Pearson, M. Wollenberg: Evanescence of states and asyimptotic completeness, Helvetica Physica Acta. 50 pp. 335 (1980).

⟨4⟩ Amrein, W. and V. Georgrscu: Bound states and sacttering theory in quantum mechanics, Helvetica. Phys, Acta 46 pp633 - 658 (1973).

⟨5⟩ Avron, J. E. and I. W. Herbst: Spectral and scattering theory of Schrodinger operators related to the Stark effect, Comm. Math. Phys. 52 pp. 239 - 254 (1977).

⟨6⟩ Avron, J and B. Simon: Schrodinger operators with magnetic fields, I. General Interactions. Duke Math. J. 45 pp. 847 - 884 (1978).

⟨7⟩ Basdevant, J.L. and B. W. Lee: Padé aproximation and bound states: Exponential potential, Nuclear Phys. B 13 pp. 182 - 188 (1969).

⟨8⟩ Bertero, M., G Talenti y G. A. Viano: Eigenfunction expansions associated with Schrodinger two-particle operators. Nuovo Cimento A 62 pp. 27-87 (1969).

⟨9⟩ Branges de L. Perturbation of self adjoint transformations, Amer. J. Math. 84 pp. 543-580 (1962).

⟨10⟩ Birman, M. Acritetion for the esistence of wave operators. Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. 27 pp. 883-906 (1963).

⟨11⟩ ________. A local criterion for the exintence of mave operators, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. 32 pp. 914-942 (1968)(Traducción al inglés: Math-USSR-Izv. 2 pp. 879-906(1968).).

⟨12⟩ Birman, M. y S.B. Entina: Stationary approach in the abatract theory of scattering. Dokl. Akad. Nauk. SSSR. 155 pp. 506-508 (1964).

⟨13⟩ Chadam, J. M. The asymptotic behavior of the Klein-Gordon equation with external potential I, II. J. Math. Annl. Appl. 31 pp. 334-348 (1978).

⟨14⟩ ____________. Pacific J. Math. 31 pp. 19-31 (1969).

⟨15⟩ Chisholm, J.R. Solution of linear integral equations using Padé approximants and the Jost function, Nuovo Cimento . A 61 pp. 747-754 (1969).

⟨16⟩ Chandler, C. y A. Gibson: Invariance principle for scattering theory with long range potentials. Indiana Univ. Math. J. 25 pp. 443-460 (1976).

⟨17⟩ Davies, E.B. On Enss' approach to scattering theory . Duke Math. J. 47 PP. 171-185 1980.

⟨18⟩ Dirac, P. A. M. The principles of Quantum Mechanics. Oxford Press, London 1935.

⟨19⟩ Eckardt, K.J. On the existence of wave operators for Dirac operators. Math. Z. 139 pp. 193-206 (1974).

⟨20⟩ Enss, V. Asymptoric completeness for quantum mechanical potential scattering, I Short range potentials, Comm. Math. Phys. 61 pp. 1978).

⟨21⟩ _____:. _____, II. Singular and long range potentials, Ann. Phys. 119 pp. 117-132 (1979).

⟨22⟩ _____. A new method for asymptotic completeness . Mathematical problems in Theoretical Physics, K. Osterwalder ed., Lecture Notes in Phyiscs. 116, Springer, Berlin (1980).

⟨23⟩ Enss, V y B. Simon. Bound states on totsl cross sections atom-atom atom- ion collisions by geometrical methods . Phys. Rev. Lett. 44 pp. 319-322 (1980).

⟨24⟩ _______________. Finite total cross sections in non relativistic quantum mechanics. Comm. Math. Physics 76 pp. 177-209 (1980).

⟨25⟩ _______________. Total cross sections in non relativistic scatterenf theory (por aparecer en : Classical , Semiclassical and Quantum Mechanical Problems in Mathematics, Chemistry and Physics . K Gustafson and W. P. Reinhardt eds., Plenum, New York 1980/81.

⟨26⟩ Faris, W. Perturbations of non-normalizable eigenvectors, Helvetica Phisica Acta 44 pp. 930-936 (1971).

⟨27⟩ ________. Time decay and the Born series, Rocky Mountain. J. Math. 1 pp. 637-648 (1971).

⟨28⟩ Gellmann, M. y M. L. Goldberg; The formal theory of scattering theory . Phys. Rev. 91 pp. 398-408 (1953).

<29> Ginibre, J. La méthode dependant du temps dans le probléme de la complétud3 asymptotique. Univ. Paris-Sud LpTHE 80/8, 1980.

<30> Green, T. y O. Landford III: Rigourous derivation of the phase shift formula for the Hilbert space scattering operator of a single particle, J. Mathematical Phys. 1 pp. 131-140 (1960).

<31> Groosman, A. y T. T. Wu: Schrodinger scattering amplitude I. J. Math. Pyhsics. 3 pp. 710-713 (1961).

<32> Guillot, J.C. y G. Schmidt: Spectral and scattering theory for Dirac operators. Arch. Rational Mech. Anal. 55 pp.193-206 (1974).

<33> Herbst, I. Unitary equivalence of Stark Hamiltonians. Math. Zeit. 155 pp. 55-70 (1997).

<34> Hormander, L. The existence of wave operators in scattering theory, Math. Zeit. 146 pp. 69-91 (1976).

<35> Ikebe, T. Eigenfunction expansions associated with the Schrodinger pperators and their applications to saatterind theory. Arch. Rational Mech. Anal. 5 Pp. 1-34 (1960).

<36> ________. Remarks on the ortogonality of eigenfunctions for the Schrodinger operator . J. Fac. Sci.,Tokyo Univ. Sect. I 17 pp. 355-361 (1970).

<37> ________. On the phase shift formula for scatterinf operator. Pacific. J. Math. 15 pp. 511-523 (1965).

<38> W. Jager: Zur Theorie der Schwingungsgleichung mit variablen koeffizienten in Aussengebieten, Math. Z. 102 pp. 62-88 (1967).

<39> Kuroda, S. Stationary theory of scattering and eigenfunctions I, II. Sugako. 18 pp. 74-85(1966).

<40> ________. Perturbation of eigenfunction expansions. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A 57 pp. 1213-1217 (1967).

<41> ________. An abstract stationary theory to perturbation of continuous spectra and saattering theory, J. Analyse Math. 20 pp. 57-117 (1967).

<42> Kato, Tosio. On finite dimensional perturbations of self adjoint operators, J. Math. Soc. Japan 9 pp. 239-249 (1967).

<43> ________. Perturbations of continuous spectra by trace clss operators. Proc. Soc. Japan Acad. 33 pp. 260-264 (1957).

⟨44⟩ ______. Wave operators and unitary equivalence . Pacific J. Math. 15 pp. 111-180 (1965).

⟨45⟩ ______. Spectral and scattering theory for the self adjoint operators associated with the perturbed Klein-Gordon typer equations. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sdct. IA Math. 23 pp. 199-221 (1976).

⟨46⟩ ______. Wave operators and similaritu for some non-selfadjoint operators. Math. Ann. 162 pp. 258-279 (1966).

⟨47⟩ ______. Smooth operators and commutators, Studia Math. 31 pp. 532-546 (1968).

⟨48⟩ Lavine, R. Absolute continuity of Hamiltonianoperators with repulsive potentials. Proc. Amer. Math. Soc. 22 pp. 55-60 (1968).

⟨49⟩ ______. Commutators and scattering theory; Repulsive interactions I. Comm. Math. Phys. 20 pp. 302-323 (1969).

⟨50⟩ ______. Completeness of the wave operators in the repulsive N-body problem. J. Math. Phys. 14 pp. 376-379 (1973).

⟨51⟩ ______. Commutators and scattering theory II. A cllas of one body problems. Indina Univ. Math. J. 21 pp. 643-656 (1972).

⟨52⟩ Lippmann, B.A. y J. Schwinger: Variational principles for scattering processes I. Phys. Rev. 79 pp. 469-480 (1950).

⟨53⟩ Lundberg, L. Spectral and scattering theory for the Klein-Gordon equation. Comm. Math. Phys. 31 pp. 243-257 (1973).

⟨54⟩ Matveev. V.B. The invariance principle for generalized wave operators. Topics Math. Phys. 5 pp. 77-85 (1982).

⟨55⟩ ______. Theoret. and Math. Phys. 8 pp. 663-667 (1971).

⟨56⟩ Mochinzuki, K. On the perturbation of continuous spectrum of the Dirac operators. Proc. Japan Acad. 40 pp. 707 - 712 (1964).

⟨57⟩ Mourre, E. Link betewn the geometrical and the spectral transformation aproaches in scattering theory. Comm. Math. Phys. 40 pp. 125-146 (1975).

⟨58⟩ Pearson, D.B. General theory of potential scattering with absortion at local sin--gularities . Helvetica Physica Acta. 47 pp. 249-264 (1974).

⟨59⟩ ______. A generalization of Birman's trace theorem . J. Functional Anal. 28 pp. 182-186 (1978).

⟨60⟩ Perry, P.A. Mellin transforms and scattering theory, I. Short range potentials. Dude Math. J. 47 pp. 187-193 (1980).

⟨61⟩ Povzner, A. Ya. Om the expansion of arbitrary functions in terms of the eigen-functions of the operatos - u cu. Math. Sb. 32 pp. (109)-(106) (1953).

⟨62⟩ ________. On eigenfunction expansions in terms of scattering solutions. Dokl. A Nauk. SSSR. 104 (1955).

⟨63⟩ Prosser, R. Relativistic potential scattering. J. Mathematical Phys. 4 pp. 1048-1054 (1963).

⟨64⟩ Putnam, R. Continuouos spectra by unbounded operators I,II. J. Math. Soc. Japan 11pp. 247-262 (1959).

⟨65⟩ Rejto, P.A. On gentle perturbations I,II. Comm. Pure Appl. Math. 16 pp. 279-303 (1963).

⟨66⟩ ________. On partly gentle perturbations I,II,III. J. Math. Anal. Appl. 17, 20, 27 pp. 453-462, 145-187, 21-67 (1967), (1967), (1969).

⟨67⟩ Rollnik, M. Stremaxima und gebundene Zustande. Z. Phys. 145 pp. 639-653 (1956).

⟨68⟩ Rosenblum, M. Perturbationsof continuous spectrum and unitary equivalence. Pacific J. Math. 7pp. 997-1010 (1957).

⟨69⟩ Sakanovich, L.A. The invariance principle for generalized wave operators. Fun-'ctional Anal. Appl. 5pp.49-55(1971).

⟨70⟩ Scadron, M. , S. Weinberg y J. Wright: Functional analysis and scattering theory. Phys. Rev. 135 pp.B202-B207 (1964).

⟨71⟩ Schechter, M. Letters Math. Phys. 3 pp.521 (1979).

⟨72⟩ ___________. The Klein-Gordon equation and scattering theory. Ann. Pyhs. 101 pp. 601-691 (1976).

⟨73⟩ Simon, B. Phase space analysis of simple scattering systems : extensions of some work of Enss. Duke Math. J. 46 pp. 119-168 (1979).

⟨74⟩ Strauss, w. Scattering for hiperbolic equations. Trans. Amer. Math. Soc. 108 pp. 13-37 (1963).

⟨75⟩ Schwartz, J. Some non-self ajoint operators. Comm. Pure Appl. Math. [illegible]

⟨76⟩ pp. 609-639 (1960).

⟨77⟩ Strichartz, R. Multipliers on fractional Sobolev spaces. J. Math. Mech. 16 1031-1060 (1967).

⟨78⟩ Tohe, D. Eigenfunction expansions associated with Schrodinger operators in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$. Arch. Rational. Mech. Anal. 26 pp. 335-356 (1967).

⟨79⟩ ________. Spectral theory for the wave equation with a potential term. Arch. Rational Mech. Anal. 22 pp. 364-406 (1966).

⟨80⟩ Thompson, M. Eigenfunction expansions and the associated scattering theory for the potential perturbations of the Dirac equation. Quart. J. Math. Oxford Ser. 23 pp. 17-55 (1972).

⟨81⟩ Veselic, K. A spectral theory for the Klein-Gordon equation with an external electrostatic potential. Nuclear Phys. A 147 pp. 215-224 (1970).

⟨82⟩ ________.y J. Weidmann: Existenz der Wellenoperatoren f'ur eine Allgemeine Klasse von Operatoren. Math. Z. 134 pp. 225-274(1973).

⟨83⟩ ________. Asymptotic estimates of wave functions and the existence of wave operators. J. Functional Analysis17 pp. 61-77 (1974).

⟨84⟩ Weder, R. Self adjointness and invariance of the essential spectrum for the Kleun-Gordon equation. Helvetica. Phys. Acta. 50 pp. 100-117 (1977).

⟨85⟩ ________. Scattering theory for the Klein- Gordon equation. J. Functional Analusis. 27 (1978).

⟨86⟩ ________. Spectral properties of the Dirac Hamiltonians. Ann. Soc. Sci. Bruxw-lles Ser. I 87 pp. 341-355 (1973).

⟨87⟩ Weidmann, J. Zur Spektral Theorie von Sturm - Liouville Operatoren. Math. Z. 98 pp. 268-273 (1967).

⟨88⟩ Wollenberg, M. The invariance principle for wave operators. Pacific J. Math. 59 pp.303 (1975).

⟨89⟩ Yafaev, P.A. On the proof of Enss of asymptotic completeness in potential scattering theory. Lenengrad Branch Mathematical institute E-279 (1979).

⟨90⟩ ________. A remark concerning the theory of scattering for perturbed poly-harmonic operator. Math Notes 15 pp. 260-265 (1974).

⟨91⟩ Yamada, O. On the principle of limiting absortion for the Dirac operators. Publ. Res. Inst. Math Sci. 8 pp. 557-577 (1972/73).

⟨92⟩ Zemach, C. y A . Klein : The born expansions in non-relativistic quantum theory I. Nuovo Cimento. 10 pp. 1078-1087 (1958).