UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DE EULER A FOURIER: CRISIS Y ABANDONO DEL CONCEPTO CLASICO DE FUNCION.

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a :

ANTONIO ANTOLIN FONSECA

México, D. F. 1981

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

I N D I C E

EULER Y FOURIER: CRISIS Y ABANDONO DEL CONCEPTO CLASICO DE FUNCION

I. INTRODUCCION.

El objeto del presente ensayo es ilustrar, empleando para ello los trabajos de Euler sobre la cuerda vibrante y los de Fourier sobre flujo de calor en sólidos, la transformación del concepto de función que marca el tránsito del Análisis Clásico al moderno, o si se prefiere, para usar una terminología más o menos sugerente, del Cálculo al Análisis.[1]

Existe una imagen convencional de las Matemáticas del siglo XVIII, que las presenta como interesadas únicamente en el desarrollo de las técnicas y las aplicaciones y desinteresadas, si no de hecho inconscientes, de la necesidad de una fundamentación rigurosa de sus métodos. Ahora bien, esta imagen tiene no sólo el defecto de ser falsa, sino uno peor: el de ser superficial. En efecto, el desarrollo de la Matemática no puede ser descrito, si se pretende entenderlo, únicamente en términos de lo que interesa o preocupa en un momento dado a los que la practican. No basta, por ejemplo, decir que en el siglo dieciocho el interés primordial de los matemáticos consistía en extender las fronteras de la Mecánica Racional y que no es sino hasta el siglo siguiente que se preocupan por consolidar los avances logrados, reflexionando sobre las bases en que se apoyan los métodos matemáticos que habían hecho posibles tales avances.

No es mi intención substituir la anterior imagen por alguna otra igual-

1] En lo sucesivo, sin embargo, se usará la palabra "Análisis" en el sentido que lo usaban los autores que se discuten, salvo indicación en contrario.

mente general, pero presumiblemente más "profunda"; no está dentro de mis posibilidades el hacerlo. Por el contrario, me ocuparé de un problema particular e incluso de una visión parcial del mismo. Pretendo con ello mostrar la riqueza de detalle que es necesario incorporar, de alguna manera, en una generalización válida acerca del desarrollo histórico de las Matemáticas, aún cuando no pretenda abarcar más que un pequeño sector de las mismas y ello sólo por un período relativamente breve.

II. LA CUERDA VIBRANTE. ANTECEDENTES: TAYLOR Y D'ALEMBERT.

1. Brook Taylor (1685-1731), conocido por el teorema que expresa los coeficientes en el desarrollo en serie de potencias de una función en términos de las derivadas sucesivas de la misma, publicó dicho teorema en su libro Methodus Incrementorum Directa et Inversa (1715). En ese mismo libro inició el estudio de las vibraciones de una cuerda tensa. En seguida paso a describir su tratamiento de dicho problema, siguiendo la presentación de Lagrange[2]. Se supone que la cuerda no se estira, para evitar el tener que introducir las fuerzas elásticas; así pues, <u>tómese el elemento de arco</u> <u>$ds = dx$</u>. Sea F la tensión de la cuerda, M su masa, a su longitud; sea m, además, la masa de un elemento de la cuerda.

La tensión actúa en la dirección de la tangente, es decir, en la de ds que por ser infinitamente pequeño puede considerarse recto; así pues, para hallar la fuerza resultante de las tensiones que actúan en el punto M, se construye el paralelogramo de fuerzas, que es semejante al de la Fig. 1,

2] [1], p. 69 (bibliografía al final).

de lados de longitud ds; la razón de semejanza es F/ds (los lados del paralelogramo de fuerzas tienen longitud F). Como se puede ver en la figura, la resultante es (proporcional a)

$$2[y^{I}-(y+y^{II})/2] =$$

$$2y^{I}-y-y^{II} = -d^{2}y \quad 3]$$

La verdadera resultante será pues, igual a

$$-d^{2}y(F/ds) = -d^{2}y(F/dx).$$

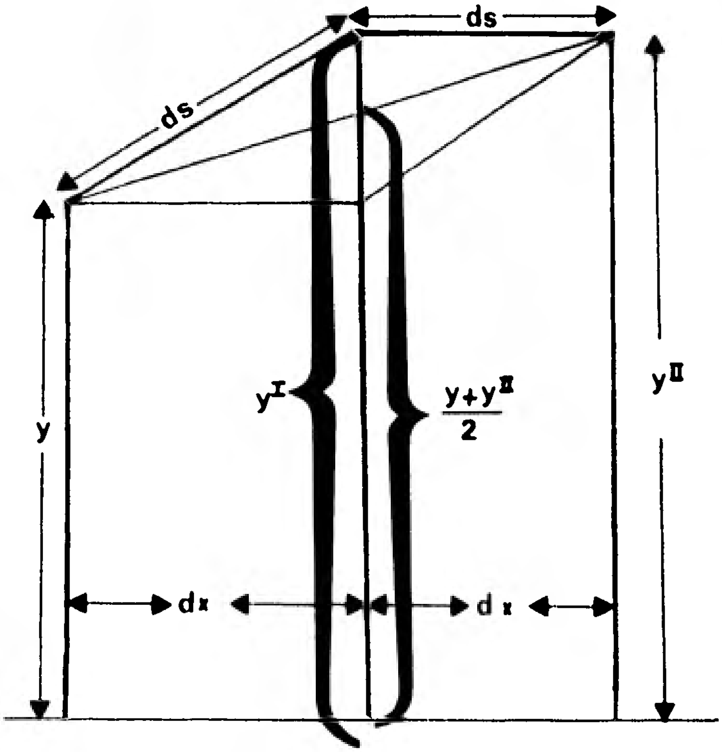


Fig.1

Esta es la fuerza que actúa sobre un elemento de arco de longitud ds (= dx), cuya masa hemos supuesto concentrada en el punto M. Para hallar la aceleración, basta dividir dicha fuerza por la masa del elemento $m = (M/a)dx$ 4], obteniéndose

$$\text{aceleración del elemento} = -\frac{Fa}{M}\cdot\frac{d^{2}y}{dx^{2}}$$

3] $d^{2}y = dy^{I}-dy = (y^{II}-y^{I})-(y^{I}-y) = y^{II}-2y^{I}+y.$
4] M/a es la masa por unidad de longitud, o densidad lineal de masa de la cuerda.

(en notación más reciente escribiríamos $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ en vez de $\frac{d^2 y}{dx^2}$). Ahora bien, Taylor supone que todos los puntos de la cuerda pasan simultáneamente por la posición de equilibrio, o dicho de otra manera, que la cuerda recupera su forma rectilínea. Cree, además, que esta suposición es válida únicamente en el caso de que la aceleración de cada punto sea proporcional a la distancia que debe recorrer para llegar a su posición de equilibrio, distancia que no es otra que la ordenada y. De lo anterior resulta que la ecuación que obtiene Taylor (según Lagrange) es

$$-\frac{Fa}{M}\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y}{K} \tag{1}$$

cuya solución, obtenible por un método común ya desde la primera mitad del siglo dieciocho es

$$y = Y \text{ sen } x\sqrt{f},$$ [5]

donde $f = M/FaK$ y Y es el máximo valor de y. Por otra parte, también debe tenerse

$$-\frac{T}{2h}\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{y}{K} \tag{2}$$

donde T es el tiempo que un cuerpo grave tarda en caer desde una altura h; así pues, resulta que $T^2/2h$ es una constante que depende de la elección de unidades de tiempo y longitud[6], ya que (1) y (2) no son sino dos ex-

---

5] curiosamente, Lagrange no menciona el hecho de que la solución general de (1) es $A \text{ sen } x\sqrt{f} + B \cos x\sqrt{f}$.

6] en el sistema MKS, esta constante vale alrededor de 0.102 seg^2/m.

presiones de la misma suposición: la aceleración de cada punto es proporcional a la distancia del mismo a su posición de equilibrio. De (1) y (2) resulta que el valor de y para cada valor de la abcisa x y el tiempo t es

$$(3) \qquad y = Y \operatorname{sen}(x\sqrt{f})\operatorname{sen}(t\sqrt{g}),\ g = \frac{2h}{T^2K}$$

o bien, si y decrece cuando t crece,

$$(3)' \qquad y = Y \operatorname{sen}(x\sqrt{f})\cos(t\sqrt{g})$$

La constante K no es arbitraria; sus valores posibles se determinan por la condición de que $y = 0$ cuando $x = a$, independientemente de t, es decir, sen $a\sqrt{f} = 0$, de donde $a\sqrt{f} = n\pi$, n entero.

No estará de más examinar más de cerca esta solución[7]. Dadas las propiedades conocidas del seno y del coseno, no es difícil ver que:

(a) La cuerda oscila según Taylor, con período $2\pi/\sqrt{g}$, es decir todos los puntos de la misma oscilan con este período.

(b) La amplitud de la oscilación del punto de abcisa x es 2Y sen $x\sqrt{f}$.

(c) Los puntos cuyas abcisas son $a/n, 2a/n, \dots, (n-1)a/n$ (además de los extremos $x = 0$ y $x = a$) permanecen fijos durante las oscilaciones, si la solución de que se trata es la que corresponde a $K = Ma/n^2\pi^2F$. Tales puntos se llaman <u>nodos</u>.

(d) La cuerda puede, pues, vibrar con cualquiera de las frecuencias

7] hay una para cada valor de n.

$$\frac{1}{2T}\sqrt{\frac{2Fh}{Ma}}\ ,\ \frac{1}{T}\sqrt{\frac{2Fh}{Ma}}\ ,\ \frac{3}{2T}\sqrt{\frac{2Fh}{Ma}}\ ,\ \text{etc.}$$

La más pequeña de ellas es la que corresponde al llamado <u>tono fundamental</u> de la cuerda.

2. D'Alembert. Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783), figura prominente de la Ilustración francesa, después de observar que las suposiciones hechas por Taylor restringían la generalidad de su solución (cosa que el propio Taylor no parece haber creído), decidió hacer su propio análisis del problema el cual describo a continuación, reconstruyéndolo a partir de algunos fragmentos en Struik[2]. Taylor dispone de dos expresiones para la aceleración de un elemento de la cuerda, a saber:

$$-\frac{Fa}{M}\frac{d^2y}{dx^2}\ ,\quad -\frac{T^2}{2h}\frac{d^2y}{dt^2}\qquad 8]$$

y su hipótesis viciosa consiste en igualar estas expresiones a y/K, pero no hay nada injustificado en igualarlas entre sí, obteniéndose al hacerlo

---

8] No está de más hacer aquí una observación acerca de los signos "menos" que anteceden a estas expresiones. Estos aparecen cuando, como en la figura (1), el elemento de cuerda adopta una forma cóncava hacia abajo. Nótese que la "resultante" calculada es, en realidad, el valor absoluto de la resultante, pues se tuvo cuidado en restar el segmento menor del mayor. Sin embargo, en este caso, tanto la derivada segunda de y respecto a x, como su derivada segunda respecto a t son negativas, la primera precisamente porque la concavidad es hacia abajo y la última porque cuando el elemento de cuerda está en esa posición necesariamente tiene una velocidad decreciente, bien sea que se mueva hacia arriba, en cuyo caso necesariamente va frenándose, bien sea que se mueva hacia abajo, en cuyo caso lo hace acelerándose, cosa que en este caso significa incremento en valor absoluto de una velocidad negativa. Un análisis análogo en el caso de que la concavidad sea hacia arriba muestra que también aquí ambas derivadas tienen el mismo signo (positivas ahora).

la ecuación (en derivadas parciales, aspecto novedoso en la época que nos ocupa)

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2hFa}{T^2M}\,\frac{d^2y}{dx^2} = k\,\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (4)$$

No es ésta exactamente, la forma en que D'Alembert escribe la ecuación. La manera en que lo hace se entenderá mejor si se piensa que en el momento que escribe D'Alembert (1747) la noción básica del cálculo infinitesimal en una variable era, no la de derivada, sino la de diferencia infinitamente pequeña (diferencial). Era natural que se intentase hacer de ésta la noción básica del Cálculo en varias variables también, y no la de derivada parcial (menos aún la idea más abstracta de derivada total de una función de varias variables). D'Alembert escribe $dy = pdt + qdx$ y, tras de observar que p, q son igualmente funciones de t, x, añade que $dp = Adt + Bdx$, $dq = Bdt + Cdx$, donde el hecho de que el coeficiente de dx en dp sea igual al coeficiente de dt en dq expresa la igualdad de las parciales cruzadas, demostrada algunos años antes por Euler. D'Alembert escribe la ecuación (4) como $A = kC$ y hace notar que pueden elegirse las unidades involucradas de modo que $k = 1$.

Así obtiene las ecuaciones $dp = Adt + Bdx$, $dq = Bdt + Adx$. Su método de solución es como sigue: de las ecuaciones anteriores se obtiene $dp + dq = (A+B)(dt + dx)$, $dp-dq = (A-B)(dt-ds)$, es decir

$$d(p+q) = (A+B)d(t+x), \quad d(p-q) = (A-B)d(t-s).$$

Se tiene entonces que las diferenciales de $p+q$ y $p-q$ poseen la forma de la diferencial de una función de una variable (no se expresan mediante dos diferenciales independientes); D'Alembert concluye que $p+q$ es función de $t+x$ y $p-q$ es función $t-s$ [9]:

$$p+q = f(t+x),\ p-q = g(t-x),$$

de donde

$$p = \tfrac{1}{2}[f(t+x)+g(t-x)],\ g = \tfrac{1}{2}[f(t+x)-g(t-x)],$$

o, simplemente,

$$p = f(t+x)+g(t-x),\ q = f(t+x)-g(t-x).$$

Ahora puede obtenerse y integrando p respecto a t (ya que p es la derivada parcial de y respecto a t), o bien, integrando q respecto a x. En un caso se obtendría $y = F(t+x)+G(t-x)+h_1(x)$; en el otro, $y = F(t+x)+G(t-x)+h_2(t)$; puesto que ambas expresiones deben ser iguales, resulta que las "constantes" de integración h_1 y h_2 deben ser verdaderas constantes que pueden absorberse en las funciones F y G. D'Alembert no menciona las constantes de integración; tal vez le parece obvio el razonamiento anterior.

Así pues, D'Alembert obtiene como solución general

$$y = F(t+x)+G(t-x) \tag{5}$$

donde F y G son funciones indeterminadas, sujetas a la restricción única de que los extremos de la cuerda, $x=0$, a, deben permanecer fijos, es de-

9] En terminología moderna diríamos que $p+q$ es la composición de la función de dos variables $t+x$ y una función de una variable, etc.

cir: $F(t)+G(t) = F(t+a)+G(t-a) = 0$, cualquiera que sea el valor de t; se sigue que $F(t) = -G(t)$, $F(t+a) = -G(t-a) = F(t-a)$, si hacemos $Z = t-a$, entonces esta última igualdad dice que $F(Z) = F(Z+2a)$, cualquiera que sea el valor de Z, es decir, F es una función períodica de período 2a; la solución general es entonces

$$y = F(t+x)-F(t-x) \tag{5)'$$

donde F tiene período 2a y es, por lo demás, arbitraria.

Supongamos ahora que en algún instante todos los puntos de la cuerda pasan simultáneamente por la posición de equilibrio; es posible tomar ese instante como el correspondiente a $t=0$. En este caso resulta $F(x)=F(-x)$, de modo que F debe ser además una función par. A la inversa, si F es cualquier funcion par de período 2a, (5) representa una vibración posible de la cuerda con la propiedad de que, a intervalos iguales al período todos los puntos de la cuerda pasan simultáneamente por la posición de equilibrio. Esto ciertamente generaliza la solución de Taylor, que corresponde al caso

$$F(Z) = -\frac{Y}{2}\cos\frac{n\pi Z}{a}\ . \qquad 10]$$

La suma de dos o más de estas funciones seguirá siendo par y de período 2a, o sea que satisfará las condiciones de D'Alembert sin proporcionar una de las soluciones de Taylor. A la gráfica de F la llama D'Alembert curva generatriz.

10] Con una elección adecuada de unidades.

III. EULER: "SOBRE LA VIBRACION DE LAS CUERDAS".

En 1748, un año después que D'Alembert leyó en la Academia Real de Ciencias y Bellas Letras de Berlín (Prusia), su análisis del problema de la vibración de las cuerdas con extremos fijos y densidad lineal constante, Euler[11] presentó ante la misma Academia su propia contribución al estudio de dicho problema, publicada en la Historia de la mencionada Academia y recogida en las obras completas de Euler, ([3], p. 63).

En este trabajo de Euler la discusión dá un giro y toma un rumbo distinto, porque es aquí que por primera vez se hace ver con claridad que el movimiento de la cuerda está determinado por su posición inicial y que el problema que se plantea es el de hallar cuál debe ser dicho movimiento dado el desplazamiento inicial de la cuerda o, dicho de otra manera, dada la forma que la cuerda posee al comienzo del movimiento. Puede parecer inmediato y hasta trivial el dar este paso pero si se piensa que, aún cuando se sepa cuántas condiciones iniciales es necesario especificar para determinar por completo la solución de una ecuación diferencial ordinaria, ésto no sugiere claramente las que harán falta para individualizar del todo la de una ecuación en derivadas parciales y se tiene en cuenta, además, que el estudio de éstas últimas se iniciaba apenas, se apreciará mejor la precisión dada por Euler al problema, precisión que contribuyó a situarlo en el interior de las Matemáticas, independizándolo hasta cierto punto de la Física. Más adelante tendré ocasión de regresar a este tema.

Después de referirse a las dos limitaciones de la solución de Taylor

---

11] Leonhard Euler, 1707-1783.

(la relativa al carácter quasi-infinitesimal de las oscilaciones y la que hace a la "uniformidad" de las mismas, ver II.1) retiene Euler la primera afirmando que se trata de una limitación del propio Análisis y que, por otra parte, no afecta gran cosa la relevancia física de las soluciones obtenidas bajo tal suposición, y asegura que es necesario eliminar la segunda limitación, que sí afecta la representatividad de las soluciones desde el punto de vista físico. En esto último coincide con D'Alembert, sólo que su discusión del punto es más rica, pues es aquí que hace intervenir las condiciones iniciales: la forma de la cuerda en vibración no puede ser, al menos no todo el tiempo, sinusoidal, a menos que su posición inicial lo sea.

A continuación, Euler deduce nuevamente la ecuación diferencial del movimiento en cuestión y lo hace a partir de cierta "teoría del equilibrio de las fuerzas aplicadas a un hilo perfectamente flexible", es decir, a partir de consideraciones estáticas. Más exactamente, es a partir de tales consideraciones que encuentra la expresión para la aceleración de un elemento de la cuerda en términos de la derivada segunda de y respecto a x, que después iguala a la expresión de la misma en función de la derivada segunda de y respecto a t. La ecuación que Euler dice se obtiene de esa teoría de hilos flexibles, y que escribe sin mayor comentario, es

$$Fy-Gx+\frac{M}{a}\int dx\int Pdx = 0 \qquad (6)$$

donde F es la tensión de la cuerda, G es la fuerza de reacción (igual y opuesta) a la componente vertical de la tensión en un extremo de la cuerda, cuando ésta se halla fuera de su posición de equilibrio, M es "la masa o peso de toda la cuerda", a es su longitud y P es la aceleración de un elemento.

La notación que emplea Euler para las derivadas parciales en este escrito es como sigue:

$$dy = pdx+qdt$$

$$dp = rdx+sdt$$

$$dq = sdx+udt$$

Diferenciando (6) y dividiendo entre dx se tiene

$$Fp-G + \frac{M}{a}\int Pdx = 0 \tag{7}$$

Diferenciando (7) y dividiendo nuevamente entre dx se llega a

$$Fr + \frac{M}{a} P$$

de donde

$$P = -\frac{Far}{M}$$

Ahora bien, "por los principios mecánicos se deduce la ecuación

$$P = -2d\frac{dy}{dt^2} = -2u\text{"}$$ 12]

La ecuación del movimiento de la cuerda es, entonces,

$$u = \frac{Far}{2M}$$

12] El factor 2 se explica probablemente por las unidades en uso entonces (antes de la Revolución Francesa).

se tendrá ahora

$$dp = rdx + sdt$$

$$dq = sdx + \frac{Fa}{2M}\, rdt$$

"La cuestión mecánica propuesta se reduce pues al problema analítico de buscar funciones r y s de x y t, tales que las fórmulas diferenciales $rdx+sdt$ y $sdx+(Fa/2M)rdt$, se vuelven integrables" (exactas diríamos ahora).

Euler podría ahora, siguiendo a D'Alembert, elegir unidades físicas de modo que $Fa/2M = 1$ y emplear el método usado por éste sin modificación alguna. Sin embargo, de proceder así, borraría las huellas de los parámetros de la cuerda y no podría entonces expresar, como lo hace, la frecuencia de vibración de ésta en función de su masa, longitud y tensión. He aquí el método (o truco, si se prefiere) empleado por Euler, ligeramente modificado: A falta de la factorización de D'Alembert

$$dq \pm dp = (s \pm r)(dx \pm dt)$$

se busca una de la forma

$$dq \pm kdp = (s \pm kr)(dx \pm kdt)$$

que es posible si $k^2 = Fa/2M$; basta tomar la raíz positiva, pues tomar también la negativa resulta redundante.

"Así pues, como la fórmula

$$(s \pm kr)(dx \pm kdt)$$

debe ser integrable, es necesario que $s \pm kr$, sea una función de $x \pm kt$"[13]. Aquí la afirmación de D'Alembert hubiese sido la de que $q \pm kp$ debe ser función de $x \pm kt$. Esta pequeña discrepancia no introduce ninguna diferencia esencial en el razonamiento que lleva a concluir que

$$y = F(x+kt)+G(x-kt),$$ [14]

F, G arbitrarias (hasta ahora).

El argumento de Euler es en todo caso más claro: para poder integrar una expresión del tipo Pdu es necesario que sea función de u.

La condición de que los extremos permanezcan fijos se traduce en

$$G(-kt) = -F(kt) \tag{8}$$

$$G(a-kt) = -F(a+kt) \tag{8'}$$

De (8) y (8)' se concluye que tanto F como G deben tener período 2a. Euler muestra además mediante un argumento gráfico que es posible satisfacer (8) y (8)' tomando G = F siempre y cuando F sea una función impar; el tono en que lo hace, sin embargo, es el de una demostración de que ambas funciones <u>deben</u> ser iguales[15], de donde la solución que se obtiene finalmente es

$$y = F(x+kt)+F(x-kt), \tag{9}$$

13] La traducción es literal salvo por un pequeño cambio de notación: he puesto k en vez de $\sqrt{b}$.

14] Compárese con (5). Dejando de lado el factor k, se ve que el signo menos afecta aquí a t, no a x como en (5); es que claramente, $(s \pm kr)(dx \pm kdt) = (kr \pm s)(kdt \pm dx)$: el signo puede adjudicarse indistintamente a cualquiera de las variables.

15] Pueden ser, por ejemplo, ambas pares y F = -G.

donde F es cualquier función impar y periódica (de período 2a).

Sea ahora $y = f(x)$ la forma inicial de la cuerda; haciendo $t = 0$ en (9) se tendrá $2F(x) = f(x)$, de donde resulta que la solución completa, expresada en términos de la forma dada a la cuerda al comienzo del movimiento, $y = f(x)$ es

$$y = \frac{1}{2} f(x+kt) + \frac{1}{2} f(x-kt) \tag{10}$$

Resulta de lo anterior que la forma inicial de la cuerda debe ser una función impar y periódica, pues de lo contrario el problema no será soluble. Esta, al menos, es la conclusión de D'Alembert. No así la de Euler. Supongamos, por ejemplo, que damos inicialmente a la cuerda la forma de una parábola: $f(x) = hx(a-x)$. He aquí una función que no es impar ni periódica. ¿Ha de renunciarse por ello a describir el movimiento de la cuerda en este caso? Tal renuncia era inaceptable para Euler y es por ello que concibe una salida al problema planteado por una solución que no parece incluir ni siquiera los casos más simples, tal como el que indica la Figura 2; que sería apto para describir la vibración de una cuerda de guitarra La salida concebida por Euler, y en la cual descansa la mayor generalidad de su solución (comparada no sólo con la de Taylor, sino también con la de D'Alembert), parece simple: basta tomar la función que da la forma inicial de la cuerda sólo en el intervalo correspondiente a la longitud de la misma (es decir $[0,a]$[16]), a continuación reflejar sucesivamente el arco

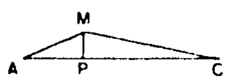


Fig.2

de curva correspondiente respecto a las rectas $x = \pm na$ y finalmente reflejar los arcos así obtenidos uno sí y otro no, respecto al eje de las abcisas. Se obtiene así una curva

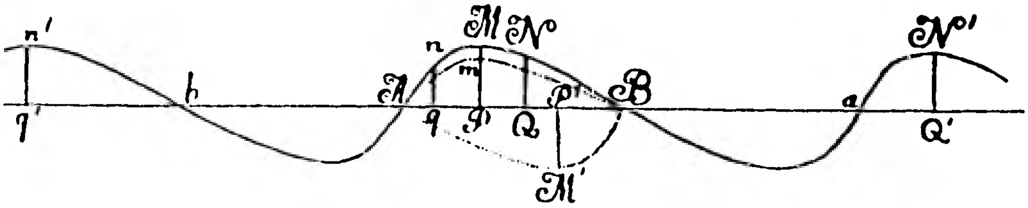


Fig.3

que se extiende a lo largo de éste y que posee las propiedades requeridas de la función F de (9). Una vez que se tiene esta curva es fácil determinar la posición del punto de la cuerda de abcisa x en el tiempo t: tómense las abcisas $x+kt$, $x-kt$ y encuéntrense las ordenadas y_1, y_2 correspondientes a dichas abcisas en la curva descrita anteriormente. Entonces la ordenada del punto x de la cuerda en el instante t será, según (10),

$$y = \frac{y_1+y_2}{2} .$$

La construcción descrita puede parecer inmediata a los ojos del lector moderno; de hecho es presentada sin más comentario en los textos contemporáneos sobre ecuaciones de la física matemática. Sin embargo, constituye el punto focal de la controversia entre Euler y D'Alembert, que de una discrepancia sobre la naturaleza de la solución general de la ecuación (4) con condiciones de frontera ($y = 0$ si $x = 0, a$) e iniciales ($y = f(x)$, si $t = 0$),

16] La notación es posterior a Euler.

desemboca en una discusión sobre los fundamentos del Análisis. Antes de describir esta controversia, y para entenderla mejor, haré una digresión sobre el concepto de función en la primera mitad del siglo dieciocho, con especial referencia a Euler.

IV. EL FORMALISMO Y EL CONCEPTO DE FUNCION.

No haré aquí sino rozar un tema muy amplio: el de la aparición del formalismo a la vez como una fase en el desarrollo que pudiéramos llamar técnico del Análisis y como un intento de fundamentarlo independizándolo de la intuición geométrica y física, es decir, como una fase de su desarrollo conceptual. Sin embargo, no puedo pasar completamente por alto este tema, pues proporciona el contexto en el cual hay que situar la controversia antes mencionada, así como la que se desarrolló entre Euler y D. Bernoulli (1700-1782).

La Enciclopedia Británica (decimoquinta edición, 1978) dá la siguiente definición de formalismo: "Escuela de pensamiento matemático,..., que sostiene que toda la Matemática puede ser reducida a reglas para la manipulación de fórmulas sin referencia alguna a los significados de las fórmulas. Los formalistas afirman que son los símbolos matemáticos en sí mismos, y no el significado, cualquiera que sea, que pudiera atribuírseles, quienes constituyen los objetos básicos de la Matemática". La tesis descrita es atribuída ahí a Hilbert y sus sucesores y sin embargo, como actitud más que como tesis conciente sobre los fundamentos de las Matemáticas, podría adjudicarse a buena parte de los matemáticos del siglo dieciocho, en particular a Euler y Lagrange (Joseph Louis, 1736-1813), si se hacen algunas salvedades, a saber:

(i) En el siglo dieciocho esa actitud era privativa del Análisis y no se extendía al resto de las Matemáticas.

(ii) El significado de fórmula era entonces incomparablemente más restringido que a principios de este siglo.

(iii) La actitud en cuestión estaba lejos de revestir la radicalidad de la tesis moderna y nunca fue consistentemente sostenida. A continuación intento una descripción de dicha actitud.

El formalismo del siglo XVIII consiste en pensar el Cálculo Infinitesimal, y en esto difiere de la concepción leibniziana, como el estudio de las funciones, objetos analíticos y no como el de las curvas, objetos geométricos. Euler define función de la siguiente manera:

"4. Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta, como quiera que lo sea, de dicha cantidad y de números o cantidades constantes".

No está de más añadir su definición de cantidad variable, junto con el comentario o explicación que la sigue.

"2. Una cantidad variable es una cantidad indeterminada, o, si se quiere una cantidad universal, que comprende <u>todos</u> los valores determinados" (el subrayado es mío), y a continuación:

"Un valor determinado cualquiera puede ser expresado por un número, y de aquí se sigue que una cantidad variable comprende todos los números, cualesquiera que sea su naturaleza. Sucede con la cantidad variable como con el género y la especie en relación a los individuos; puede concebírsela como abarcando todas las cantidades determinadas". ([4a], p. 2)

Nótese el énfasis que pone Euler en el hecho de que una variable abarca todos los números o cantidades determinadas; con ello quiere incluir no sólo todos los números reales, sino también los complejos: "Así una tal cantidad (variable) abarca todos los números, tanto positivos como negativos, los números enteros y los fraccionarios, los racionales, los irracionales y los trascendentes; incluso no debe excluírse el cero ni los números imaginarios". ([4a], p. 2)

Una función de una variable es también una variable: "Por ejemplo, mientras que la función $\sqrt{9-z^2}$ no puede dar un número mayor que 3, si se substituyen únicamente números reales en lugar de z, sin embargo, al dar a z como valores números imaginarios, tales como $5\sqrt{-1}$, resulta imposible señalar un valor determinado que no pueda deducirse de la fórmula $\sqrt{9-z^2}$ ". (p.3)

Así pués, en una función f(z) pueden darse a z todos los valores posibles y al hacerlo, f(z) tomará también todos los valores posibles. La convicción que sirve de apoyo a ésta es, sin duda, la de la validez del ahora llamado teorema fundamental del Algebra. En efecto, si $y = f(x)$ es una función algebraica, entonces es raíz de la ecuación $P(x,y) = 0$, donde P es un polinomio en dos variables; si damos a y un valor determinado $y = c$, para hallar los correspondientes valores de x hay que resolver la ecuación $P(x,c) = 0$, de donde resulta que, no importa el valor de c, real o complejo, hay n valores de x para los vuales $y = c$, donde n es el más alto exponente de x en la expresión P(x,y). Es decir, no sólo la función f(x) toma todos los valores posibles, sino que toma cada uno de ellos n veces. Una función trascendente no puede expresarse algebraicamente más que mediante una serie u otra expresión (producto, fracción continua) infinita, de donde resulta que toma cada valor una infinidad de veces. Como apoyo a esta interpretación, cito la definición de Euler de función multiforme:

"14. Así pues, si Z está determinada por la ecuación

$$Z^n - PZ^{n-1} + QZ^{n-2} - RZ^{n-3} + SZ^{n-4} \text{ etc.} = 0,$$

[donde P, Q, R, S, etc. designan funciones uniformes de z], Z será una función multiforme de z, la cual para cada valor de esta variable tomará tantos valores como unidades hay en el exponente n". (id, p. 7)

Después de definir función y exponer algunos esquemas de clasificación de funciones (algebraicas-trascendentes, uniformes-multiformes, pares-impares) en el primer capítulo, Euler dedica el siguiente a discutir la "transformación de funciones", presentando una serie de resultados sobre factorización y desarrollo de funciones racionales en fracciones parciales; sin embargo, el objetivo principal de este capítulo y los dos que le siguen es el de exponer técnicas algebraicas para la obtención de identidades: "...el Algebra nos enseña que una misma cantidad puede tomar distintas formas. Se tendrá una idea de este tipo de transformaciones, si por ejemplo, en vez de la función $2-3Z+Z^2$ se escribe $(1-Z)(2-Z)$, o $(a+Z)^3$ en vez de $a^3+3a^2Z+3aZ^2+Z^3$, ó $a/(a-Z)+a/(a+Z)$ en lugar de $2a^2/(a^2-Z)$, ó $\sqrt{1+Z^2}+Z$ en lugar de $1/(\sqrt{1+Z^2}-Z)$". Discute además la transformación mediante substitución o cambio de variable: si $y = f(x)$ y $Z = g(y)$ entonces puede obtenerse $Z = g(f(x))$, expresión que es necesario reducir a su forma más "simple" (proceso que todavía llamamos simplificación). Es claro que los "cambios de variable" pertenecen igualmente al terreno de la transformación idéntica de expresiones simbólicas. Y es natural que así sea, si se tiene en cuenta que las variables tanto dependientes como independientes, representan todos los números: la igualdad de dos expresiones simbólicas en que las letras son "variables" en el sentido de Euler es lo que se llama identidad modernamente.

Será ahora interesante estudiar el capítulo IV de [4a], sobre desarrollo en serie de potencias, para tratar de discernir si dicho "desarrollo" es una "transformación" en el sentido de los dos capítulos anteriores, es decir, si también aquí se trata de identidades.

Si confiamos en la fidelidad de la traducción de Labey, Euler emplea el verbo transformar también en conexión con el desarrollo de una función en serie, pero, para hacer descansar en algo más sólido la conclusión a la que pretendo llegar, a saber que Euler trata la igualdad entre una función y su desarrollo en serie como una identidad, mencionaré la definición que propone para la suma de una serie <u>divergente</u>, pues ello serviría para responder a una objeción a la mencionada conclusión que surge de inmediato: ¿en qué sentido puede decirse que una función y su desarrollo en serie son iguales fuera del intervalo (o disco) de convergencia de esta última, radio que en general es finito (y no infinito como requeriría el concepto de Euler de función)? De seguro Euler no podría ignorar el fenómeno de la divergencia, puesto que la más simple de todas las series, la geométrica, tiene un radio de convergencia finito y, mejor aún, pequeño. Por supuesto que Euler el analista numérico no ignoraba dicho fenómeno y es por eso precisamente que propone definir la "suma" de una serie numérica divergente como el valor de la función, cuyo desarrollo en serie coincide con la serie dada, en cierto punto, cuando dicha función se evalúa en ese punto. Así pues, para sumar una serie divergente es necesario encontrar la función de la que procede y evaluar ésta adecuadamente [5]. Es claro que la anterior definición de suma es precisamente la que se necesita para preservar la identidad entre una función y su desarrollo en serie.

Puede muy probablemente situarse el origen del punto de vista formal descrito en la versión de Newton del Cálculo [6], que éste presntó como un cálculo algebraico para obtener el desarrollo en serie de potencias de una función, bien sea que dicha función esté dada explicitamente, o que esté definida implícitamente por una ecuación incluso diferencial. Un cálculo tal es para Newton la versión simbólica de los algoritmos de la Aritmética, que permiten obtener el desarrollo de la solución de una ecuación ($ax = b$, $x^n = a$, $p(x) = 0$) en serie de potencias de una base, usualmente 10. Sin la base técnica proporcionada por algoritmos suficientemente poderosos como para resolver los problemas presentados por los diversos usos del Cálculo, el punto de vista formal, que concibe el Cálculo como un conjunto de algoritmos para la obtención de identidades simbólicas propias para la resolución de los problemas que interesaban a los matemáticos, no hubiese podido desarrollarse. Dicha concepción es, pues, producto de una fase de desarrollo del Análisis, que podríamos calificar de avanzada. Es sin embargo, como veremos, esta misma concepción la que funciona como obstáculo en la dilucidación de la problemática planteada por la solución de la ecuación de las vibraciones de una cuerda.

V. LA CONTROVERSIA ENTRE EULER Y D'ALEMBERT.

Había dicho ya que para D'Alembert la función f que representa la forma inicial de la cuerda tenía que ser impar y periódica, es decir, $f(z)$ debía ser una expresión analítica tal que se tuviesen las identidades $f(z+2a) = f(z)$ y $f(-z) = -f(z)$, por ejemplo

$$f(z) = A \operatorname{sen} \frac{\pi z}{a} + B \operatorname{sen} \frac{2\pi z}{a} + C \operatorname{sen} \frac{3\pi z}{a} + D \operatorname{sen} \frac{4\pi z}{a} + \dots$$

ejemplo que es Euler el primero en dar, ([3], p. 76) recalcando que no representa el caso general, sino sólo aquel en que la curva C que sirve para construir la solución (ver III) está dada por una sola ecuación, es decir, es la gráfica de una función, a saber, de la que en el intervalo $[0,a]$ representa la posición de la cuerda para $t = 0$.

En este caso la solución que se obtiene es

$$y(x,t) = A \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi ct}{a} + B \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi ct}{a} + C \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{3\pi ct}{a} + \dots \qquad (11)$$

Para ilustrar la posición de Euler, volvamos a un ejemplo ya mencionado: sea $f(x) = hx(a-x)$; $f(x)$ no es impar ni periódica y por lo tanto la curva C no puede describirse mediante una única ecuación. En efecto, en el intervalo $[-a,0]$ la curva C deberá estar dada por $f_{-1}(x) = hx(a+x)$; en el intervalo $[a,2a]$ por $f_1(x) = h(a-x)(2a-x)$; en el intervalo $[2a,3a]$ por $f_2(x) = h(x-2a)(3a-x)$, en el intervalo $[-2a,-a]$, por $f_{-2}(x) = -h(a+x)(2a+x)$, etc.

Resulta pues que la descripción de la curva C requiere de una infinidad de expresiones analíticas no idénticas entre sí, de modo que en un caso como éste, C es lo que Euler llama una curva descontínua en el volumen II de su Introducción: "Una línea curva continua es aquella cuya naturaleza es expresada por una sola función determinada de x. Pero, si una línea curva está compuesta de diferentes porciones BM, MD, DM, etc., determinadas por varias funciones de x, de modo que siendo una parte BM el resultado de una función, otra parte MD sea el de una segunda función; llamamos esta clase de líneas curvas discontinuas, o mixtas[17] e irregulares, porque no están formadas según una sola ley constante y están compuestas de porciones de diferentes curvas continuas". ([4b], p. 4)

Del texto anterior se desprende que para Euler una curva discontinua no es la gráfica de una función, sino que consiste de arcos que son cada uno parte de la gráfica de una función. Este es al menos, su punto de vista en la Introducción varias veces citadas y que se publicó el mismo año en que Euler presentó a la Academia de Berlín la memoria sobre la vibración de las cuerdas reseñada en el Capítulo III. Mostraré en lo que sigue que Euler no cambió de opinión en diecisiete años, y que, aunque en su solución para el problema de la cuerda vibrante las curvas discontinuas hacen las veces de funciones, Euler siguió pensándolas como algo esencialmente distinto de éstas últimas y con ello quiero decir que no se trata de una simple cuestión de terminología.

D'Alembert comparte con Euler un mismo concepto de función y una misma concepción del Análisis como el estudio de las funciones y difiere de él sólo en el grado de consistencia con que sostiene esa manera de ver las cosas. Me explicaré: si los objetos de estudio del Análisis son las funcio-

17] Esta denominación se hallaba aún en uso hace algunas décadas en textos elementales de geometría.

nes (o mejor son los únicos objetos que éste estudia) y la curva C o curva generatriz no representa una función, salvo en el caso en que la posición inicial de la cuerda está dada por una función impar y periódica, entonces la solución de Euler escapa al Análisis o lo que para D'Alembert es lo mismo, no es aceptable desde el punto de vista del Análisis. En otras palabras, las curvas discontinuas son objetos efectivamente más generales que las funciones (que pueden identificarse con las curvas continuas) pero no pertenecen al Análisis. Por decirlo aún en otros términos: si la solución de Euler fuese en verdad una solución sería más general que la de D'Alembert, como sostenía el propio Euler pero desgraciadamente, aún cuando la Física parece exigir tal solución, el Análisis no es lo suficientemente amplio como para contenerla. Esta parece ser la posición de D'Alembert; un poco estrecha de miras, tal vez, pero consistente con una concepción que Euler mismo había hecho tanto por desarrollar y establecer. ([2], p. 361)

Es entonces a partir de la idea de que el Análisis puede proporcionar una solución a la ecuación de las vibraciones de una cuerda únicamente bajo la suposición de que dicha solución es una función, que D'Alembert redescubre la buena lógica de comprobar si determinada expresión satisface una ecuación substituyendo en ésta. Dicho así parecería que D'Alembert ha redescubierto el hilo negro y lo que resulta sorprendente es que Euler haya tenido necesidad de la objeción de D'Alembert para pensar en hacer una verificación que tendría, elementalmente, que haber hecho desde el comienzo. Y es que para nosotros es evidente que un método de solución de una ecuación involucra, en general, una cadena de implicaciones y no de equivalencias lógicas. Sin embargo, en un contexto en el que domina la visión del Cálculo

Infinitesimal como un sistema de reglas para efectuar transformaciones equivalentes, la mencionada verificación parece innecesaria y la objeción de D'Alembert injustificada y hasta pedante. En las palabras de Euler:

"Pero, aún cuando esta construcción [la de la curva generatriz] esté estraída de la ecuación y = F(x+ct)+G(x-ct) que encierra la solución del problema, el Sr. D'Alembert parece negar que ella satisfaga a la ecuación diferencial de segundo grado $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = c^2\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ 18] que la Teoría proporciona de inmediato. Alega él algunas dificultades, a las cuales es necesario aún responder. Sin embargo, como se puede dudar de la bondad de una construcción, cuando ésta se ajusta perfectamente a la ecuación integral [y = F(x+ct)+G(x-ct)], que contiene la solución del problema y ello bajo el pretexto de que no conviene perfectamente a la ecuación diferencial de la que se ha extraído la integral. Se han resuelto ya tantos problemas mediante integraciones, y a nadie se le había ocurrido hasta ahora poner en duda la solución; tanto más cuanto que son siempre las ecuaciones integrales las que proporcionan las construcciones sin las cuales no es posible vanagloriarse de una solución perfecta". ([3], p. 447)

Para entender mejor la respuesta de Euler a las críticas de D'Alembert, permítaseme citarla aquí en extenso: "45. Pero veamos cuales son los inconvenientes encontrados al remontarse de nuestra construcción a las fórmulas diferenciales de primer y segundo grados. Sea pues AMB la figura inicial dada a la cuerda AB, a la que se ha construído sobre la prolongación Ba=AB

18] Euler usa paréntesis para indicar que las derivadas son parciales.

la figura semejante amB (Figura 27) en situación inversa,

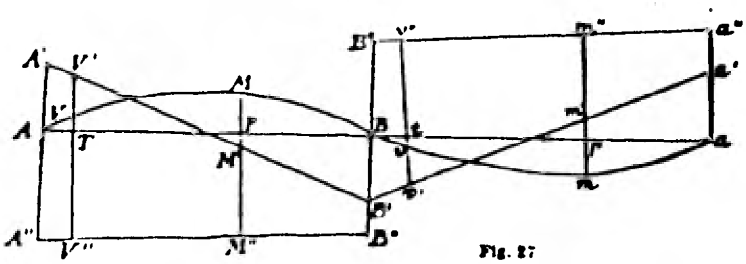


Fig. 27

de modo que transcurrido el tiempo t, y tomando los intervalos PT = Pt = ct, el punto P tomado a la distancia AP = x se encuentra por encima del eje, separado de él por el intervalo

$$y = \frac{1}{2}\ f(x+ct)\ +\ \frac{1}{2}\ f(x-ct)\ =\ \frac{1}{2}\ (-tv+TV),$$

puesto que TV = f(AT) y -tv = f(AT), ya que en general se tiene

$$PM = f(AP) = f(x)$$

Ahora bién, si se construye la curva A'M'B'm'a', de modo que su ordenada sea

$$-PM' = \frac{dPM}{dAP} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x),$$

lo que se hará tomando cierto segmento como unidad. Así, puesto que

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2} f'(x+ct) + \frac{1}{2} f'(x-ct)$$

y

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{c}{2} f'(x+ct) - \frac{c}{2} f'(x-ct)$$

se tendrá empleando la nueva curva.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2} (-tv'+TV') \quad y \quad \left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{c}{2} (-tv'-TV')$$

en donde la última fórmula $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ expresa la velocidad del punto P de la cuerda dirigida hacia arriba, después de un tiempo t. Por lo demás, es evidente que las ordenadas de estas curvas, que en la figura caen por debajo del eje, deben tomarse negativas".

"46. Ciertamente la línea A'M'B'm'a' ha sido obtenida a partir de un segmento continuo; pero se objeta que si la curva AMB no fuese continua y tuviese ángulos, aparecerían interrupciones en la línea A'M'B'm'a'. Sin embargo, como lo exige la primera condición de nuestro problema que no solamente todas las ordenadas de la curva AMB sino también los ángulos de inclinación de sus elementos respecto al eje, sean infinitamente pequeños, ángulos tales que se desee suponer en la figura AMB están de antemano excluídos, puesto que son, cundo mucho, infinitamente pequeños. Más aún, incluso en el caso en que existiese cierta interrupción en esta segunda línea, no afectaría ésta más que a un elemento, y por lo tanto no perturbaría la solución. En todo caso bastaría redondear infinitamente poco las angulosidades de la figura AMB, para hacer desaparecer tal inconveniente y, por la misma razón de que no se habría cambiado sino infinitamente poco la figura

AMB todas las conclusiones extraídas permanecerían las mismas. Objeciones tales son en todo parecidas a las que se han hecho contra el cálculo de las infinitamente pequeñas".

"47. Sin embargo los citados inconvenientes serán mucho más considerables cuando uno se remonta a los diferenciales de segundo grado, para lo cual hace falta describir una nueva línea A"M"B"m"a" a partir de lo anterior A'M'B'm'a', del mismo modo que ésta se formó a partir de la figura AMBma. Ya que como la línea A'M'B'm'a' puede tener en B', un ángulo más considerable, se obtendrán dos lugares para el punto B", uno abajo, el otro por encima del eje, lo que parece hacer inciertas las fórmulas diferenciales de segundo grado que encierran las aceleraciones instantáneas. En efecto, para el punto P de la cuerda, después del tiempo t, se tendrá para esta tercera línea:

$$\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \frac{1}{2}\, f'(x+ct) + \frac{1}{2}\, f''(x-ct) = \frac{1}{2}\,(tv''-TV'')$$

y

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{c^2}{2}\, f''(x+ct) + \frac{c^2}{2}\, f''(x-ct) = \frac{c^2}{2}\,(tv''-TV'')$$

De donde, si el punto t cayese en B, se estaría incierto de si como valor de tv" se debería tomar la ordenada BB" positiva o negativa. Pero, aunque ahí se cometa algún error, este error no afectará más que a un sólo elemento y por lo tanto no será de consecuencias, siendo siempre infinitamente pequeño".

'48. Además, a pesar de esta incertidumbre, se tendrá siempre abiertamente

$$\frac{ddy}{dt^2} = c^2 \frac{ddy}{dx^2} ,$$

que, siendo la ecuación principal a la que la Teoría conduce inmediatamente, es evidente que nuestra construcción la satisface tanto como a la ecuación integral a la que fue llevada; y, tras todo ello, no hay sino redondear infinitamente poco el ángulo B en la segunda línea, para reunir los dos puntos B" y B" en B y de este modo ver desvanecerse todas las dificultades. El cambio que recaiga sobre la primera curva AMBma, seráasimismo infinitamente pequeño y, por lo tanto, no cambiará nada el estado inicial de la cuerda, del cual se ha extraído la determinación del movimiento. Todas estas objeciones son pues de la misma naturaleza que las que se han hecho en otras ocasiones contra el cálculo diferencial, reprochándo a éste que ciertas partículas de algunos elementos, que no se anulan, son no obstante despreciadas en relación a otras cantidades. Como actualmente tales dudas se han disipado por completo, aquéllas que se han hecho surgir acerca de la presente determinación del movimiento de las cuerdas, habrán de caer por su propio peso". ([3], p. 448)

El ejemplo de la Figura 27 es revelador: la forma inicial de la cuerda es la de una parábola; la gráfica de la primera derivada se compone de segmentos de pendiente alternativamente positiva y negativa, la segunda derivada es discontinua (en el sentido moderno) en los puntos $\pm$ na; significativamente, Euler une los segmentos horizontales colocados alternativamente por encima y por abajo del eje mediante segmentos verticales. Así pues, la controversia se desenvuelve en torno a casos sencillos como éste: curvas discontinuas (en el sentido de la Introducción de 1748) que siguen una regla simple de formación; aquí la curva se compone de arcos parabólicos idénticos. Nótese que Euler sigue empleando la terminología de la Introducción al reconocer en el párrafo 46 que la curva A'M'B'm'a' construida en el párrafo anterior ha sido obtenida a partir de una porción "continua" de la curva AMBma.

Ahora para Euler considerar el problema de los ángulos señalado por D'Alembert. Como se vé, dá cuenta de este problema diciendo que el error cometido es infinitamente pequeño (lo que puede ser fals9 en el caso de la segunda derivada), que basta una modificación infinitesimal de la curva para elimnarlo, lo que no perturbaría la solución (para justificar ésto se requiere probar que las soluciones de la ecuación dependen continuamente de las condiciones iniciales) y, finalmente, que la ecuación vale en general en todo caso (porque sólo piensa en funciones con singularidades aisladas). En lo que sigue las palabras "continua" y "discontinua" aplicadas a una curva, significan continuidad y discontinuidad en el sentido de Euler cuando aparecen así entrecomilladas; en caso contrario, se refieren a continuidad o discontinuidad en el sentido moderno. Para indicar las líneas de una posible discusión por parte de Euler, haré dos observaciones inmediatas relativas a la relación entre "continuidad" y continuidad en el contexto de la construcción de la curva AMBma que resuelve el problema de la cuerda vibrante. En primer lugar, si AMB es "continua" A'M'B'm'a' será siempre continua, mientras que A"M"B"m"a" puede o no serlo. En el ejemplo de Euler es discontinua y si AMB está dado por $h^2x^2(a-x)^2$, A"M"B"m"a" sera continua. Por otra parte, si AMB es "discontinua". A'M'B'm'a' y A"M"B"m"a" pueden ser continuas o discontinuas. Ejemplos:

1) Si AMB está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{h}{c}\, x & 0 \leq x \leq c \\ \frac{h}{a-c}\,(a-x) & c \leq x \leq a \end{cases}$$

entonces A'M'B'm'a' es discontinua (y "discontinua") pero tal vez Euler habría considerado continua A"M"B"m"a": es idénticamente cero, salvo por el sutil detalle de no estar definida en los puntos $c \pm na$. La frase "no estar definida" representa una actitud que tomó cuerpo la primera mitad del siglo diecinueve.

2) Si AMB está dada por

$$f(x) = \begin{cases} (a/3)^3 - (a/3-x)^3 & 0 \leq x \leq a/3 \\ (a/3)^3 & a/3 \leq x \leq 2a/3 \\ (a/3)^3 + (2a/3-x)^3 & 2a/3 \leq x \leq a \end{cases}$$

A'M'B'm'a' es continua y A"M"B"m"a" no lo es pero sus discontinuidades no aparecen en los puntos $a/3 \pm na$, $2a/3 \pm na$, correspondientes a las "discontinuidades" de AMB.

3) Si AMB está dada por

$$f(x) = \begin{cases} (a/3)^3 + 2(x-a/3)^3 + (3/a)(x-a/3)^4 & 0 \leq x \leq a/3 \\ (a/3)^3 & a/3 \leq x \leq 2a/3 \\ (a/3)^3 - 2(x-2a/3)^3 + (3/a)(x-2a/3)^4 & 2a/3 \leq x \leq a \end{cases}$$

Entonces tanto A'M'B'm'a' como A"M"B"m"a" son continuas, aunque "discontinuas".

Los ejemplos anteriores muestran que es posible someter a examen la cuestión de la relación entre continuidad y "continuidad" con medios propios de la matemática del siglo dieciocho y es por ello que resulta curioso que no haya emprendido este examen el propio Euler o (D'Alembert que era quien había puesto tal dificultad sobre el tapete). Aparentemente la relación entre "discontinuidad" y presencia de ángulos permaneció sin aclarar y con mayor razón la pregunta, más difícil, de si una curva "discontinua", posee necesariamente alguna derivada, del orden que sea, discontinua.

Me parece conveniente terminar esta descripción de la controversia entre Euler y D'Alembert con una aclaración. De lo dicho anteriormente, parecería que a Euler no se le ocurrió nunca substituir su solución en la ecuación. Esto es falso, si con solución nos referimos a la expresión

$$y = F(x+ct)+F(x-ct)$$

En efecto, Euler sí se ocupa de verificar que dicha expresión satisface la ecuación del movimiento de la cuerda. Pero el problema es más complicado: la expresión citada no constituye por sí sola la solución de Euler al problema de la cuerda; representa tan sólo lo que ésta tiene en común con la de D'Alembert. La solución de Euler consiste, más bien, en una interpretación original y novedosa de dicha expresión. La dificultad resalta mejor ahora; ¿cómo substituir en una ecuación, no una fórmula, sino una interpretación de ella? Esta dificultad nos lleva a la cuestión de la representación. Las curvas "discontinuas" no poseen una representación simple, es decir, una curva de esa clase no corresponde a una función y sólo puede entrar al Análisis como un objeto compuesto o, peor aún, como varios objetos, posiblemente como una infinidad de ellos (ver más arriba). Estamos, pués, ante un círculo vicioso: la falta de una representación adecuada impide el libre manejo de las curvas "discontinuas" en el Análisis, lo que restringe necesariamente el concepto de función e, inversamente, es el limitado concepto de función lo que impide reconocer una representación de curvas discontinuas que precisamente el problema de la cuerda vibrante puso ante los ojos de los analistas del siglo dieciocho y muy en especial de Euler. Esta última afirmación constituye el tema del siguiente capítulo.

VI. LA CONTROVERSIA ENTRE EULER Y BERNOULLI.

La solución de Daniel Bernoulli no es otra que la ecuación (11) que Euler había dado anteriormente como un caso particular; Bernoulli, sin embargo, la presenta como la solución general que abarca todas las vibraciones que puede ejecutar una cuerda. Su posición difiere tanto de la de Euler como de la de D'Alembert, aunque, según Euler la solución de este último coincide con la de Bernoulli.

He aquí la posición de Bernoulli en sus propias palabras:"Observemos en primer término que, según la teoría del señor Taylor, una cuerda tensa puede llevar a cabo vibraciones uniformes de una infinidad de maneras, distintas entre sí desde el punto de vista físico, pero equivalentes desde el punto de vista geométrico, puesto que sólo difieren por la unidad de medida empleada. Estas distintas maneras se caracterizan por el número de vientres que la cuerda forma al vibrar. Cuando hay uno sólo [Fig. 1] se tienen las vibraciones más lentas, que producen el tono fundamental; cuando hay dos vientres y un nodo en el punto medio del eje [Fig.2], entonces las vibraciones se duplican y producen la octava del tono fundamental; cuando la cuerda forma tres, cuatro o cinco vientres, con dos, tres o cuatro nodos equidistantes, como sucede en las Figuras 3, 4,5, las vibraciones se multiplican por tres, cuatro o cinco y producen la duodésima, la doble octava o la tercera mayor de la doble octava relativa al tono fundamental. En cada tipo de vibración los desplazamientos totales pueden ser grandes o pequeños, a discreción, siempre y cuando el mayor de ellos se considere extremadamente pequeño. La naturaleza de estas vibraciones es tal que no sólo cada punto principia y termina cada vibración en el mismo instante, sino que todos los puntos se colocan después de cada semioscilación simple en la posición del eje AB. Debemos considerar todas estas condiciones como esenciales y así tenemos a la vez todas las curvas que el Sr. Taylor encontró como soluciones al problema". ([2], p. 361)

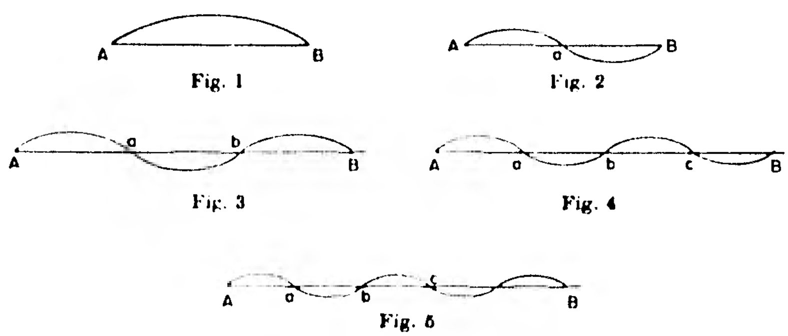


Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

Fig. 5

Más adelante, después de describir su estudio experimental del sonido de diversos instrumentos musicales, concluye:

"Hacemos, pues, notar que la cuerda AB puede llevar a cabo vibraciones no únicamente según la primera, o segunda, o tercera, etc. figuras, sino que es capaz de ejecutar todas las combinaciones posibles de tales vibraciones, y que todas las nuevas curvas dadas por D'Alembert y Euler no son sino combinaciones de las vibraciones Taylorianas." ([7], p. 41)

Después de observar que, de acuerdo con Taylor, las ecuaciones de las curvas con 0, 1, 2, 3, etc. nodos son

$$y = A \text{ sen } \frac{\pi x}{a}, \quad y = B \text{ sen } \frac{2\pi x}{a}, \quad y = C \text{ sen } \frac{3\pi x}{a}, \quad y = D \text{ sen } \frac{4\pi x}{a}$$

etc, hace notar que al combinar estas curvas se obtiene

$$y = A \text{ sen } \frac{\pi x}{a} + B \text{ sen } \frac{2\pi x}{a} + C \text{ sen } \frac{3\pi x}{a} + D \text{ sen } \frac{4\pi x}{a} + \ldots$$

y afirma:

"He aquí pues esta infinidad de curvas, halladas sin cálculo alguno, y nuestra ecuación coincide con la del Sr. Euler. Es verdad que Euler no presenta esta multitud infinita como general, y que la ofreció sólo como un caso particular en el parágrafo 30, pero es esto lo que no me queda claro aún. Si hay además otras curvas, no se en que sentido pueden ser admitidas". ([7], p. 42)

Como puede verse, Bernoulli extrae su solución al problema de la cuerda de consideraciones físicas; vale la pena insistir en que lo que aquí está en juego es la solución general y que la diferencia esencial entre Bernoulli y Euler es que lo que éste considera ser una solución particular (una familia particular de soluciones), para el primero es la solución general. La discrepancia entre Bernoulli y D'Alembert es de otro orden, pues D'Alembert concuerda de hecho con Bernoulli (según Euler) en que la serie de senos es la solución general de la ecuación del movimiento. Sin embargo, coincide con Euler, y en ello disciente de Bernoulli, en que hay vibraciones físicamente posibles de la cuerda que el análisis de Bernoulli no contempla (ver la cita de Fourier en el Capítulo IX).

En lo anterior apunta el tema de las relaciones entre la Física y la Matemática, según la conciben los participantes en la polémica que nos ocupa. Ciertamente hay alguna confusión si se juzga con el criterio actual: Bernoulli saca conclusiones matemáticas a partir de consideraciones físicas, pues a partir de su análisis experimental, aunque no puramente empírico, del sonido de los instrumentos musicales determina la solución general de una ecuación en derivadas parciales en segundo orden, y quiero subrayar el hecho de que no presenta su conclusión como el resultado de un argumento heurístico que hace plausible, sin probarla, dicha conclusión. Al contrario, ataca la solución analítica de D'Alembert y Euler como superflua y artificiosa:

"No por ello estimo en menos los cálculos de los señores D'Alembert y Euler, los cuales ciertamente contienen todo lo que el análisis puede poseer de más profundo y sublime, pero que muestran al mismo tiempo que un análisis abstracto que se acepta sin un examen sintético de la cuestión que se discute puede sorprendernos más bien que iluminarnos.

Me parece que basta que dirijamos nuestra atención a la naturaleza de las vibraciones simples de las cuerdas para prever sin cálculo alguno todo lo que estos grandes geómetras han descubierto mediante los cálculos más abstractos y espinosos que la mente analítica es capaz de ejecutar". ([2], p. 361)

Por otra parte Euler también emplea argumentos físicos en defensa de su solución. Pero más adelante habrá ocasión de volver a este tema y quiero ahora pasar a la parte de la controversia que se desenvuelve en terreno propio de la matemática. Los componentes esenciales de la solución de Bernoulli son:

a) La descripción de los modos básicos de vibración, dada ya anteriormente por Taylor.

b) El principio de superposición según el cual la cuerda puede ejecutar simultáneamente cualquier número de oscilaciones elementales.

Euler demuestra que no hay nada de necesario en que los modos básicos sean sinusoidales y que el principio de superposición no se aplica únicamente a ellos:

a) "28... Veamos ahora si a la mitad del tiempo de una vibración, la cuerda se extiende de una manera perfectamente rectilínea, o no. Puesto que al tiempo de una vibración corresponde v[=ct] = a, pongamos para el tiempo medio $v = \frac{1}{2}$ a y se tendrá de la fórmula general

$$y = \frac{1}{2} f\left(x + \frac{1}{2} a\right) + \frac{1}{2} f\left(x - \frac{1}{2} a\right),$$

cuyo valor se anulará si $f(\frac{1}{2} a - x)$ es $= f(\frac{1}{2} a + x)$, es decir, si la figura ADB (Fig. 4) dada a la cuerda al comienzo es tal que a las abcisas $\frac{1}{2}a + x$ y $\frac{1}{2}a - x$ corresponden ordenadas iguales: lo que sucede si la ordenada CD bajada al punto medio de la longitud AB es un diámetro de la curva ADB y la parte DB es semejante e igual a la parte DA. Así pues, cuantas veces la curva inicial tenga esta propiedad, otras tantas la cuerda se extenderá en línea recta a la mitad de cada vibración; y como ello puede suceder de innumerables maneras, es patente que esta condición por sí sola no requiere que la cuerda adquiera siempre al vibrar la forma de una trocoide prolongada". ([3], p. 75)

Esto es, aún suponiendo que para que la cuerda pase por su situación de equilibrio es necesario que lo haga a la mitad de cada vibración, es decir, a la cuarta y a las tres cuartas partes de cada período. La figura a la que Euler se refiere en el texto no es muy ilustrativa por lo que la he reemplazado por la que sigue:

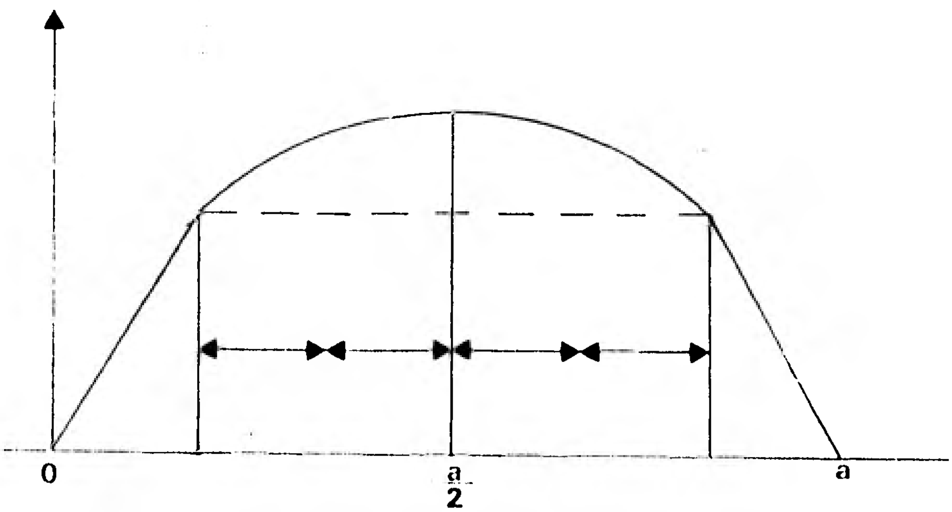


Fig.4

Recuérdese además que de la solución de D'Alembert, empleada tembién por Euler con algunas modificaciones, resulta que la curva denotada por "f" es periódica, de manera que el argumento de Bernoulli en el sentido de que todas las vibraciones de la cuerda son periódicas no constituye una objeción contra la solución de Euler, como este hace notar. Pasemos ahora a la segunda cuestión:

b) "23. Antes de emprender la resolución de la ecuación

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{Fa}{2M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right),$$

hago notar que posee un alcance infinito.

Ya que si P, Q, R son funciones de x y t, tales que satisfacen esta ecuación cuando se ponen en lugar de y, de modo que se tiene tanto $y = P$, como $y = Q$ y $y = R$, es claro que el valor

$$y = \alpha P+\beta Q+\gamma R$$

satisfará igualmente a dicha ecuación. La razón de ello es que y no tiene más que una dimensión en nuestra ecuación. Esta observación nos conduce de inmediato a la solución del Sr. Bernoulli, tomada en un sentido más general, puesto que si las igualdades $y = P$, $y = Q$, $y = R$ representa cada una un tipo particular de vibración de la cuerda, la misma cuerda será también susceptible del movimiento representado por la ecuación

$$y = \alpha P+\beta Q+\gamma R;$$

esta misma composición tendrá también lugar para las demás clases de vibración, siempre y cuando sean infinitamente pequeñas, ya que la ecuación que expresa el movimiento no contiene en sus términos más que una dimensión de la ordenada y. Es aquí, pues, que hay que buscar el verdadero fundamento de la solución del Sr. Bernoulli". ([3], p. 243)

Es decir, en la linealidad de la ecuación y no en alguna propiedad física de las oscilaciones. Los anteriores argumentos son claros e incluso impecables, pero es otro argumento de Euler contra la generalidad de la solución de Bernoulli el más significativo y el que más interesa desde el punto de vista adaptado aquí, a saber, el de las limitaciones intrínsicas del Análisis del siglo dieciocho en su estudio de las entonces nuevas cuestiones de la Física Matemática. Permítaseme citar a Euler en extenso:

"5. Pero hay más: yo no había dado la ecuación:

$$y = A \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} + B \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{a} + C \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{a} + D \operatorname{sen} \frac{4\pi x}{a} + \text{etc.}$$

más que como una solución particular de la fórmula que contiene en general todas las curvas que pueden convenir a una cuerda puesta en movimiento; y hay una infinidad de otras curvas que no están comprendidas en esta ecuación.

Si el Sr. Bernoulli estuviese de acuerdo en ello no habría afirmado que todas las curvas de una cuerda pulsada resultaban únicamente de la combinación de dos o más curvas Taylorianas; y habría reconocido que el argumento basado en dicha combinación no basta para proporcionar una solución completa de la cuestión que nos ocupa. No habría tampoco considerado el método de que nos hemos servido el Sr. D'Alembert y yo como demasiado enredado para llegar a una solución general, que podría extraerse de una sencilla consideración física. La cuestión principal que tengo que desarrollar es entonces la de si todas las curvas de una cuerda puesta en movimiento están comprendidas en la ecuación citada, o no."

"6. El Sr. Bernoulli no rebate directamente la negativa que acabo de avanzar: se limita a decir que no lo tiene suficientemente claro; sin embargo es únicamente en ese punto que se funda la preferencia que trata de dar a su método por sobre aquél de que el Sr. D'Alembert y yo nos hemos servido. Puesto que si la consideración del Sr. Bernoulli proporcionase todas las curvas que pueden presentarse en el movimiento de las cuerdas, es seguro que sería infinitamente preferible a nuestro método, que en tal caso habría que considerar como una brecha sumamente espinosa para llegar a una solución tan fácil de encontrar por otro camino. Pero a la inversa, si la consideración del Sr. Bernoulli no descubre todas las curvas que convienen a una cuerda en vibración, y hay casos en los que la forma de la cuerda es absolutamente irreducible a los trocoides de Taylor, es también innegable que el método del Sr. Bernoulli, por bello que sea en sí mismo, resultará muy inferior al método que proporciona todos las soluciones posibles".

"7. Pero me parece que esta última circunstancia no puede ser puesta en duda, si se considera que puede darse inicialmente a la cuerda una figura cualquiera. Pues concibamos que se haya dado a la cuerda, antes de soltarla, una forma que no esté comprendida en la ecuación $y = A \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} + B \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{a} +$ + etc. y no hay duda de que la cuerda, tras de ser liberada súbitamente, se verá agitada por un determinado movimiento. Es también seguro que la forma que tendrá después del primer instante será todavía muy diferente de la ecuación citada, e incluso cuando se quisiere sostener que tras de varios instantes se sujeta finalmente a una figura comprendida en dicha ecuación, no se puede dejar de estar de acuerdo en que, antes de que ello ocurra, el movimiento de la cuerda es muy diferente del que la consideración del Sr. Bernoulli encierra. No adecuándose pues este primer movimiento a las leyes extraídas de la teoría de Taylor, ello me parece completamente suficiente para hacer ver que dicha teoría no es capaz de aclararnos todos los movimientos de los que una cuerda es susceptible".

"8. Se estará, pués, obligado a reconocer que el movimiento de la cuerda, al menos durante algún tiempo desde el inicio, depende de la forma dada a la cuerda para empezar; la cual, siendo absolutamente arbitraria, resulta imposible sostener que dicho movimiento se ajuste siempre a las leyes mencionadas. Parece además muy improbable que un movimiento tal se reduzca finalmente a la trocoide de Taylor; e incluso cuando ello ocurriera, como el Sr. Bernoulli ha observado muy ingeniosamente que ocurre en la mezcla de dos o más trocoides, la causa no puede sino ser atribuída al amortiguamiento del movimiento causado por circunstancias extremas que no se han tenido en cuenta en el cálculo. Así, esto no debe siquiera entrar en la solución, en la que se hace abstracción de todas las causas que pueden amortiguar y alterar el movimiento. De aquí se sigue que una solución no puede ser considerada completa, a menos que abarque todos los casos del movimiento para todas las formas posibles que pueden darse a la cuerda inicialmente".

"9. Pero tal vez puede argumentarse que la ecuación $y = A \text{ sen } \frac{\pi x}{a}$ + etc., debido a que contiene una infinidad de coeficientes indeterminados es tan general que encierra todas las curvas posibles; es necesario reconocer que si eso fuese cierto el método del Sr. Bernoulli proporcionaría un método completo. Pero, aparte del hecho de que este gran geómetra no ha presentado el argumento, todas las curvas comprendidas en dicha ecuación, aún cuando se aumente el número de términos al infinito, poseen ciertas características que las distinguen de todas las demás curvas. Puesto que, si se toma la abcisa x negativa la ordenada se vuelve también negativa e igual a la que corresponde a la abcisa positiva x; asimismo, la ordenada que corresponde a la abcisa a+x es negativa e igual a la correspondiente a la abcisa x [19]. Así pues, si la curva dada a la cuerda al comienzo no tiene estas propiedades es seguro que no estará encerrada en la ecuación. Sin embargo, ninguna curva algebraica tiene tales propiedades, de modo que es necesario excluirlas a todas de la ecuación; y sin duda alguna hará también falta excluir de allí una infinidad de curvas trascendentes".

Resumiendo el argumento de Euler tenemos:

1) La construcción de Bernoulli implica que la forma inicial de la cuerda, cualquiera que sea, debe poder escribirse como una serie de senos.
2) Toda serie de senos representa una función impar y periódica.
3) Pero no toda función es impar y periódica. Por ejemplo, ninguna función algebraica es periódica.

Ahora bien, desde el punto de vista actual ni siquiera tiene sentido decir que la forma inicial de la cuerda se representa por una función impar o periódica (de período 2a) puesto que dicha función está dada únicamente en el intervalo [0,a] correspondiente a la longitud de la cuerda. Es evidente

---

19] Esto ocurre sólo si la curva inicial es simétrica respecto a a/2; probablemente Euler quiso decir a-x en vez de x.

que Euler consideraba los atributos mencionados como intrínsecamente contenidos en una expresión analítica, sin referencia a un dominio especificado independientemente de tal expresión, en la que ésta representa la regla de correspondencia: en otras palabras, si bien modernamente es necesario indicar por separado el dominio y la regla de co-respondencia (que puede o no ser una expresión analítica) para definir una función, para Euler bastaba la regla (siempre una expresión analítica) puesto que ella es la función; esto es claro ya de lo dicho en el Capítulo IV. No es irrelevante, sin embargo repetirlo aquí en conexión con el problema de la cuerda, puesto que para dilucidar el concepto de función sustentado por Euler no basta referirse a una definición de libro de texto, sino que es preciso ver como actúa esa noción en un contexto específico. Tras de las palabras puede esconderse un significado más amplio o, por el contrario, más estrecho que el aparente. Las verbalizaciones de los matemáticos griegos son un buen ejemplo de lo último. Así, Aquímedes en su tratado sobre la esfera y el cilindro da las siguientes definiciones:

"Aplico el término cóncava en la misma dirección a una línea (resp. superficie) tal que, si se toman en ella dos puntos cualesquiera, o bien, todas las líneas rectas que unen los puntos caen de un mismo lado de la línea, o bien, algunos caen en uno y el mismo lado mientras que otras caen sobre la línea misma, pero ninguna en el otro lado." ([8], p. 404)

Tomada así fuera de contexto, esta definición muy bien podría hacernos creer que con ella inaugura Arquímedes el estudio de las figuras convexas bi- y tridimensionales en general. Sin embargo, si atendemos al desarrollo de la Matemática Griega en general y al del tratado en cuestión en particular nos desengañaremos fácilmente: Arquímedes utiliza las definiciones citadas únicamente para formular las siguientes suposiciones: "De las otras líneas[20] que están en un plano y tienen los mismos extremos, [cualesquiera dos] son desiguales siempre que ambas sean cóncavas en la misma dirección y una de ellas esté, o bien totalmente incluida entre la otra y la línea recta que tiene los mismos extremos que ella, o bien está en parte incluida, y tiene parte común con la otra: y aquella que está incluída es menor", y la correspondiente a superficies.

A su vez, utiliza las dos suposiciones anteriores únicamente para concluír que un círculo es mayor que un polígono inscrito en él y menor que uno circunscrito, y que la superficie de revolución generada por un polígono (regular) inscrito en un círculo es menor que la esfera generada por el círculo y la superficie generada por un polígono circunscrito es mayor que la esfera. Es claro entonces que la amplitud efectiva de los conceptos introducidos por Arquímedes es mucho menor que la potencial compatible con sus enunciados. Algo semejante ocurre cuando Apolonio define para curvas cualesquiera naciones que sólo aplica a las cónicas y que, de hecho, de entre las curvas conocidas de los griegos, sólo para las cónicas tienen sentido.

Del fenómeno opuesto, a saber, que el significado real o efectivo sea más amplio que el aparente, es más difícil encontrar ejemplos, porque lo usual, en Matemáticas al menos, es que las palabras le lleven la delantera al pensamiento. Además en este caso la situación es más complicada que en

20] Además de las rectas.

el ya ejemplificado, porque para poder identificar en un contexto dado un concepto que generaliza alguno explícitamente definido por el autor o conocido por él es necesario contar con ese concepto generalizado y ésto nos enfrenta de inmediato a un problema: ese concepto generalizado, propio de una Matemática posterior a la que se examina lo mismo puede decirse que generaliza o que niega el concepto en cuestión. Por ejemplo, la Geometría Hiperbólica ¿incluye (como caso límite) la Euclidiana o la niega? la Mecánica Relativista ¿incluye (también como caso límite) a la Newtoniana, o la niega? En el presente estudio encontraremos una situación parecida al comparar el concepto de función de Fourier con el de Euler, D'Alembert y Lagrange. Lo que está en juego aquí es la manera en que se piensa el desarrollo de las Matemáticas u otras ciencias. Pero volviendo al fenómeno mencionado al comienzo del parágrafo anterior, el ejemplo que tengo en mente es el siguiente: desde un punto de vista posterior a Euler, que identifica curvas y funciones, el añadir a la calse de las curvas continuas la de las discontinuas significa ampliar el concepto de función por lo que podría decirse que eso fue lo que hizo Euler. Sin embargo, el argumento de éste contra Bernoulli muestra que tal ampliación no constituye una generalización, es decir que Euler no construye una noción que incluya a las curvas (o funciones) continuas y a las curvas (o funciones) discontinuas como distintos casos particulares. Al contrario, Euler percibe esos casos como antitéticos: una curva discontinua exige para su descripción varias funciones, al contrario de una continua, que se describe mediante una sola. Por eso no acepta la solución de Bernoulli como general: éste pretende que, no sólo la forma inicial de la cuerda, sino su extensión a toda la recta se pueden escribir siempre mediante una sola ecuación (la serie de senos); pero es evidente que la forma inicial de la cuerda puede requerir varias ecuaciones para ser descrita en el intervalo [0,a] y que, en todo caso, su extensión requiere usualmente una infinidad de ellas, cosa que ocurre, por ejemplo, siempre que dicha forma inicial es algebraica. Si Euler hubiese pensado la curva discontinua que emplea para resolver el problema como una función, se habría encontrado ante una función impar y periódica, de modo que no podría haber empleado como argumento contra su representabilidad mediante una serie de senos el hecho de que esta última es siempre impar y periódica, precisamente. De hecho Euler parece haber creído que toda función impar y periódica puede, en efecto, representarse mediante una serie de senos. Al menos, eso parecen implicar los siguientes pasajes.

"Es bien cierto que el Sr. D'Alembert, si bien me reprochó que mi solución no era diferente de la suya, afirmó, sin prueba alguna, que mi solución no se extiende a todas las figuras posibles que la cuerda pueda poseer inicialmente; y coincide con el Sr. Bernoulli en el sentimiento que éste porece sostener, de que el movimiento de una cuerda no puede ser determinado, a menos que su forma inicial esté comprendida en la ecuación varias veces citada" ([3], p. 238) (la serie de senos) y más adelante: "Pero dudo mucho que él [D'Alembert] encuentre una solución distinta de la mía, a menos que se aferre a las mismas hipótesis que hizo en su solución, y que lo condujeron a la ecuación:

$$y = A \text{ sen } \frac{\pi x}{a} + B \text{ sen } \frac{2\pi x}{a} + C \text{ sen } \frac{3\pi x}{a} + \text{etc.". (id)}$$

En los pasajes citados, Euler identifica la solución de D'Alembert con la de Bernoulli, aûn cuando sabemos que aquél no la escribió en forma en que lo hizo éste. Las hipótesis hechas por D'Alembert a que Euler alude, no pueden ser sino las de que la forma inicial de la cuerda es tanto impar como periódica. No está claro si es D'Alembert o el propio Euler quien de allí concluye que entonces se expresa mediante una serie de senos. En todo caso Euler no objeta la conclusión, aunque el tono general de su polémica hace pensar que si Euler la creyese falsa, no desaprovecharía la ocasión de reprochárselo a D'Alembert. Por otra parte, Lagrange, que escribe en defensa de la solución de Euler, expresa explícitamente la opinión en cuestión:

"17. Uno de los dos, a saber, el Sr. Euler, se apresuró a responder a esas objeciones[21] en la misma disertación citada, que aparece impresa a continuación de la del Sr. Bernoulli. Objeta a éste que su ecuación para la curva sonora, aûn cuando continuada al infinito, no puede sin embargo representar todos los movimientos posibles de una cuerda tensa; ya que si se hace t = 0, la ecuación de la curva se convierte en:

$$y = \alpha \operatorname{sen} \frac{\bar{\omega} x}{2a} + \beta \operatorname{sen} \frac{2\bar{\omega} x}{2a} + \gamma \operatorname{sen} \frac{3\bar{\omega} x}{2a} + \ldots \quad {}^{22]}$$

En consecuencia, sería necesario que esta ecuación encierra todas las figuras que pueden darse a una cuerda tensa, a saber todas las curvas posibles, lo cual no parece ocurrir, debido a ciertas propiedades que aparentemente distinguen las curvas comprendidas en esa ecuación de todas las otras curvas que puedan imaginarse; estas propiedades son las mismas que el

---

21] Las de Bernoulli.
22] $\bar{\omega} = 2\pi$ en la notación de Lagrange.

Sr. D'Alembert requiere de sus curvas generatices, a saber, que aumentándo o disminuyendo la abcisa en un múltiplo cualquiera del eje, el valor de la ordenada y no cambia. En efecto se puede, según me parece, demostrar que todas las curvas dotadas de dichas propiedades pueden reducirse a la ecuación antedicha. De ello se sigue que, si bien el Sr. D'Alembert encontró el Análisis Tayloriano insuficiente para obtener una solución general parece sin embargo coincidir con el Sr. Bernoulli en el fondo, a saber, que el problema no es soluble en más casos que en las de la trocoide o de la mezcla de varios trocoides".[23]] ([1], p. 70)

Así pues, Euler parece creer, y Lagrange con seguridad piensa que toda función impar y periódica puede representarse mediante una serie de senos y, no obstante, ninguno de los dos reconoce la posibilidad de desarrollar la curva generatriz en una tal serie, aún cuando ella es la gráfica de una función impar y periódica (siempre y cuando no se entienda la palabra "función" en el sentido restringido de Euler). Queda pues razonablemente establecido que el hecho de que Euler haya evitado llamar funciones a sus curvas discontinuas no se reduce a una mera cuestión de terminología.

Por otra parte, concluir que Euler no amplió, en algún sentido, el concepto de función en su solución al problema de la cuerda, sería precipitado.

23] También Lagrange identifica aquí las posiciones de D'Alembert y Bernoulli, sin matizarlas; sin embargo no son idénticas, puesto que mientras Bernoulli insistía, apoyado en razones físicas, en que todo movimiento de la cuerda corresponde a una generatriz expresable mediante una serie de senos, D'Alembert aceptó el argumento de Euler en el sentido de que la expresión trigonométrica no abarca todos los movimientos físicamente posibles de la cuerda. El punto de vista de D'Alembert era, más bien, el de que la solución analítica más general es esa expresión. Pensaba, pues, que el Análisis era más restringido que la Mecánica.

Pues en efecto, es capaz de hacer jugar a las curvas discontinuas el papel que corresponde a las funciones. Esto se ve claramente en un ejemplo que Euler presenta como el argumento más sólido contra la posición de Bernoulli. Consiste tal ejemplo, o mejor dicho, familia de ejemplos, en desplazar inicialmente sólo una parte de la cuerda, dejando el resto en la posición de equilibrio. Euler analiza en detalle varios casos de este tipo, de los cuales transcribo el primero:

"20. Sea como antes la longitud de la cuerda AB = a, su peso = M, la fuerza de la tensión = F y g la altura de la que los cuerpos graves caen en un segundo; y que para medir el tiempo se tome una línea recta $c = \sqrt{\frac{2Fag}{M}}$, que representará un segundo. Supongamos ahora que esta cuerda no ha sido desplazada al comienzo más que en la parte AC, a la que se le dá la forma AMC, mientras que el resto conserva su forma natural y rectilínea, y que

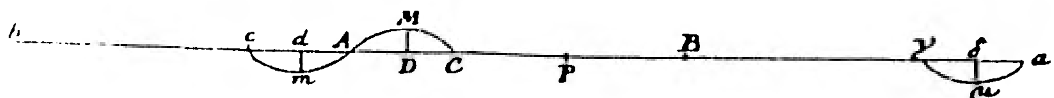


Fig. 6

después de haber forzado a la cuerda a adoptar este estado, se la libera súbitamente. Dado lo anterior, se pregunta, ¿cuál será el movimiento que agitará a la cuerda en lo sucesivo? Para este efecto, se tomará sobre la recta AB prolongada los intervalos Ab = Ba = AB, sobre los cuales se describirá las curvas Amc y a μγ semejantes a la curvatura inicial AMC, pero en situación inversa, para tener la escala de los tiempos [?] bcmAMCB$\gamma\mu$a, cuyas partes bc, CB y Bγ coinciden con el propio eje, de modo que las ordenadas en estos espacios se consideran nulas".

"21. Ahora, por la construcción explicada anteriormente, es fácil determinar el movimiento de cada punto de la cuerda. Así, el punto medio M de la parte desplazada AC, que al inicio se encuentra a la distancia DM, se aproximará al eje y llegará a D transcurrido el tiempo = AD (recuérdese la elección de unidad de tiempo); de allí pasará al otro lado del eje y después de un tiempo Dd = 2AD, se encontrará a la distancia $\frac{1}{2}$ dm = $\frac{1}{2}$ DM [25], de donde regresará nuevamente hacia el eje, al que llegará pasado el tiempo Dc = 3AD[26], donde permanecerá en reposo hasta el tiempo

$$D\gamma = BD+BC = 2AB-3AD,$$

de modo que la duración de tal reposo es

$$= 2AB-6AD = 2AB-3AC = 2BC-AC.$$

De la misma manera, el punto C subirá inicialmente, y trnascurrido el tiempo CD = AD llegará a su máximo desplazamiento = $\frac{1}{2}$ DM, de donde regresará a C después de un tiempo CA = 2AD; de allí pasará al otro lado del eje hasta una distancia $\frac{1}{2}$ dm = $\frac{1}{2}$ DM, transcurrido el tiempo Cd = 3AD; a continuación regresará a C tras un tiempo Cc = 4AD, donde repasará hasta que haya pasado el tiempo Cγ = 2BC = 2AB-2AC. Por otra parte, un punto P cual-

25] Implícitamente supone aquí Euler que la parte desplazada no es mayor de las 4/5 partes de la longitud total de la cuerda.

26] Idem 2/3, de modo que basta esta segunda suposición; obsérvense restricciones análogas en lo que sigue.

quiera de la parte CB permanecerá en reposo durante el lapso PC, después de lo cual adquirirá el mismo movimiento que el punto C, si la distancia $P\gamma$ es mayor que Pc [27], o bien, $PB+BC > AP+AC$ o, lo que es lo mismo, $BP > AC$. Pero si $BP < AC$, reemprende su movimiento antes".

"22. De lo anterior podremos deducir la forma de la cuerda después de un tiempo cualquiera transcurrido desde el inicio; de lo cual consideraré los principales instantes:

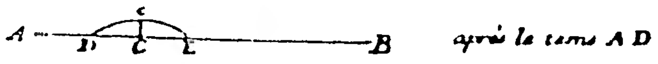


Fig 7

I. Tras el tiempo AD la cuerda tendrá la figura 7, en que la parte AD es recta y la curvatura no se encuentra más que en la parte DcE, siendo el punto c el que corresponde al máximo desplazamiento.

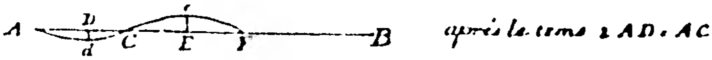


Fig 8

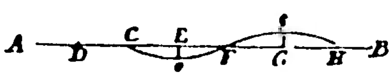
27] Pc corresponde, para el punto P, al tiempo Cc para el punto C; si $Pc > P\gamma$, el punto P no permanece en reposo hasta que transcurra dicho tiempo, porque en ese caso, la abcisa que la construcción requiere se tome a la derecha de P cae en la curva $\gamma\mu$a desde antes.

II. Transcurrido el tiempo 2AD (Fig. 8) la cuerda tendrá la forma AdCeFB donde los intervalos AD, DC, CE, EF se toman iguales; los puntos d y e se encuentran en sus máximos desplazamientos respecto al eje.

après le tems 3 AD

Fig 9

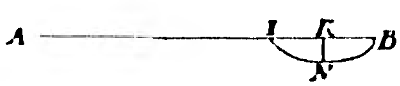
III. Pasado un tiempo 3AD (Fig. 9) la misma curvatura ha avanzado sobre la parte DG, estando en reposo y rectilíneas las partes AD y BG.



après le tems 4AD = 2 AC

Fig. 10

IV. Después de un tiempo 4AD (Fig. 10) la misma curvatura ha avanzado sobre la parte CH, supuesto que 6AD sea aún menor que AB.



après le tems AB

Fig. 11

V. Finalmente, transcurrido el tiempo AB la cuerda recibe la figura AINB (Fig. 11) semejante a la primera, pero invertida; después de lo cual los mismos fenómenos se repiten empleando para ello un tiempo = AB, es decir $\sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$ segundos".

"23. Se ve pues que este movimiento es sumamente irregular y no hay parte de la cuerda que lleve a cabo oscilacioens regulares que puedan compararse a las de un péndulo simple, a la manera del Sr. Bernoulli. Ello puesto que cada parte no se desplaza más que durante cierto tiempo, en el cual incluso su movimiento es cualquier cosa menos parecido al de algún péndulo y durante otro tiempo la misma parte se encuentra en un reposo perfecto. El Sr. Bernoulli me había objetado contra este movimiento que si una parte de la cuerda hubiése permanecido en reposo durante algún tiempo, no tendría razón de empezar a moverse en un sentido más bien que en el otro. Pero basta seguir paso a paso la progresión del movimiento para ver disiparse toda duda". ([3], p. 435)

La larga cita recién concluida muestra dos cosas:

1. Aún cuando la curva generatriz que Euler emplea en la solución del problema de la cuerda es un objeto geométrico sin representación analítica (o con una tan complicada que resulta inútil), puede hacérsele desempeñar el papel de solución de un problema analítico, a saber, el de la ecuación de onda con condiciones iniciales y de frontera, y esto no en un sentido puramente cualitativo o general, sino efectivo, en la descripción pormenorizada de casos particulares; cuantitativa incluso, si se hace un dibujo cuidadoso. Es así como Euler, aunque no

ha logrado todavía la síntesis que supere la antítesis continuidad-discontinuidad, al manejar ambos polos de la misma conjuntamente efectúa, en la práctica, una ampliación del concepto de función. Tal ampliación es abierta, es decir, al carecer los nuevos objetos de una representación según una sintáxis más o menos definida, las fronteras del nuevo universo geométrico-analítico quedan necesariamente indefinidas.

2. El argumento que Euler ofrece en último término y con carácter decisivo es físico: en el ejemplo presentado, el movimiento de la cuerda no es una verdadera vibración y no entra, por lo tanto, en el análisis bernoulliniano. Si cierra así el círculo: contra el argumento físico de Bernoulli en favor de cierta expresión como solución de un problema que es, sin embargo, analítico como enfatiza Euler al señalar la abstracción efectuada al deducir la ecuación de onda, Euler mismo, y después de haber dado un argumento analítico[28], termina ofreciendo como irrefutable un argumento también físico, como si la plausibilidad del ejemplo presentado y su "bello acuerdo con la experiencia" ([3], p. 431) obligarán a la ecuación de onda a aceptarlo entre sus soluciones, sin más. Vale la pena repetir aquí algo ya dicho, a saber, que los argumentos físicos son presentados, no como simples apoyos a la intuición, sino como apodícticos.

28] El de la periodicidad e imparidad.

VII. OTRA VEZ EL FORMALISMO.

Llegados a este punto resulta ya evidente que el problema de las vibraciones de una cuerda tensa generó una crisis en el Análisis del siglo dieciocho; que se manifestó a través del desacuerdo persistente entre matemáticos de primer orden acerca de la solución de un problema aparentemente bien planteado.

El problema exige para su solución satisfactoria, no ya una ampliación, sino una genuina generalización del concepto de función. Sin embargo, hay un obstáculo en el camino hacia la generalización del concepto de función y es precisamente el concepto que necesita ser generalizado (¿o debiéramos decir negado?). Más precisamente, he intentado localizar la fuente del obstáculo en la concepción algebraico-formal del Análisis. Ahora procuraré hallar razones que expliquen la fuerza de dicho obstáculo. Las razones que aduzco se reducen esencialmente a una: la viabilidad de la concepción formal como base en que fundar el Análisis, su posibilidad de convertirse en teoría rigurosa de los procesos analíticos. Desde luego esta posibilidad no tendría valor histórico, si no la encontrásemos concebida y desarrollada realmente en la Historia. Se la encuentra, en efecto, en Euler y, mejor aún en Lagrange. Expondré, pues, brevemente el intento de Lagrange de fundar rigurosamente el Análisis sobre nociones de tipo formal. Antes quiero aclarar que no trato de evaluar la importancia histórica de ese intento en el sentido de sus repercusiones sobre posteriores esfuerzos en la dirección de la fundamentación del Análisis o, si se prefiere, del Cálculo; más bien lo ofrezco como indicador de que la visión formalista procuró tomar conciencia de sí misma como alternativa a las concepciones que podemos llamar numéricas, es decir, la basada en la noción de límite y la infinitesimalista; cosa que no habría hecho de no poseer cierta consistencia intrínseca.

Lagrange expresó sus ideas sobre el Análisis en dos libros: Théorie des Fonctions Analytiques (1797, 1813) y Leçons sur le Calcul des Fonctions (1808); no disponiendo de este último, he tomado las citas correspondientes de [9].

En primer lugar, la definición de función que dá Lagrange es la misma que Euler había dado en 1748: "se llama función de una o varias cantidades a toda expresión de cálculo en la cual dichas cantidades entran de una manera arbitraria, mezcladas o no con otras cantidades que se considera poseen valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles". ([10], p. 1)

Lagrange es más explícito que Euler respecto al carácter algebraico de su noción de función:

"Bajo este punto de vista, debe considerarse el álgebra como la ciencia de las funciones, y es fácil ver que la resolución consiste en general en encontrar los valores de las cantidades desconocidas como funciones determinadas de las cantidades conocidas. Estas funciones representan entonces las diferentes operaciones que es necesario llevar a cabo sobre las cantidades conocidas para obtener los valores de aquéllas que uno busca y que no son propiamente más que el resultado final del cálculo.

Pero en el álgebra no se consideran las funciones más que en la medida en que resultan de las operaciones de la aritmética, generalizadas y transportadas a letras mientras que en el cálculo de funciones propiamente dicho, se consideran las funciones que resultan de la operación algebraica del desarrollo en serie [que se obtiene] cuando se atribuye a una o varias cantidades de la función incrementos indeterminados". ([9], p. 172) También hace resaltar más claraemtne el carácter formal de la misma noción:

"Siempre que se concibe una función en relación a una de las cantidades que la componen, se hace abstracción del valor de dicha cantidad y no se considera más que la manera en que entra en la función, es decir, en la cual se combina con ella misma y con las otras cantidades". (id.)

El hecho de que las variables deben pesnarse como indeterminadas y no en relación a su capacidad de tomar valores numéricos resalta claramente en la prueba de que en el desarrollo en serie de potencias de una función aparecen sólo potencias enteras y positivas de la variable. La prueba es como sigue:

"Voy ahora a demostrar que en la serie resultante del desarrollo de la función $f(x+i)$ no puede encontrarse ninguna potencia fraccionaria de i, a menos que se den a x valores particulares. En efecto, es claro que los radicales de i no pueden provenir más que de radicales que aparezcan en la función original $f(x)$ y es claro al mismo tiempo que la sustitución de $x+i$ en lugar de x no puede ni aumentar ni disminuir el número de tales radicales, ni cambiar la naturaleza de los mismos en tanto que x e i son cantidades indeterminadas. Por otro lado se sabe de la teoría de ecuaciones que todo radical tiene tantos valores diferentes como unidades hay en su exponente, y que toda función irracional posee consecuentemente tantos valores como combinaciones puedan hacerse con los diferentes valores de los radicales que contenga. Así pues, si en el desarrollo de la función $f(x+i)$ pudiese aparecer un término de la forma $ui^{m/n}$, la función $f(x)$ sería necesariamente irracional y tendría por lo tanto un cierto número de valores diferentes, que sería el mismo para la función f(x+i) así como para su desarrollo. Pero como este desarrollo está representado por la serie $f(x)+pi+qi^2+etc.+ui^{m/n}+etc.$ cada valor de f(x) se combinaría con cada uno de los n valores del radical $\sqrt[n]{i^m}$ de modo que la función f(x+i) desarrollada poseería más valores que la misma función no desarrollada, lo que es absurdo" ([10], p. 8) y añade:

"Esta demostración es general y rigurosa mientras x e i permanezcan indeterminadas; pero dejaría de serlo si se dan a x valores determinados, ya que sería posible que tales valores destruyesen algunos radicales en f(x) que podrían, sin embargo, subsistir en f(x+i)". ([10], p. 9)

Se observa que en el caso de Lagrange, como en el de Euler, es esencial que la(s) variable(s), así como la función, puedan tomar valores complejos (de ello depende el argumento sobre el número de valores de un radical). Cualquier variable, dependiente o independiente, puede así tomar todos los valores (salvo algunos excepcionales), y todas son, tomadas fuera de contexto, equivalentes; difieren sólo por la manera en que entran en las expresiones analíticas. Es claro pues que no se trata de un formalismo puro en el que las indeterminadas son meros símbolos que pueden combinarse con otros según ciertas reglas, sino de uno apoyado en las propiedades de los números complejos. Aún así posee el sabor de un enfoque formal; considérese por ejemplo, la afirmación de que f(x+i) contiene los mismos radicales que f(x): se trata de una afirmación acerca del comportameinto de una expresión simbólica de cierto tipo cuando en ella se substituye la variable por alguna otra expresión simbólica particular; tiene entonces que ver con las reglas de composición de tales expresiones.

Como puede verse, Lagrange reconoce que ciertos valores particulares de la variable pueden alterar la forma de una función: precisamente por éso, cuando de dicha forma se trata, no está permitido dar valores a la variable.

El siguiente paso en esta teoría formal de series, o teoría de series formales, es exhibir la relación de las funcioes p, q, r, etc. con f(x); de paso se verá que son funciones de x solamente y que no dependen de i. Si en f(x+i) se hace i = 0 se obtiene f(x), de donde f(x+i) es = a f(x) más una función de x e i que se anula para i = 0; puesto que en el desarrollo de f(x+i) aparecen únicamente potencias enteras de i, se debe tener $f(x+i) = f(x)+iP$, donde P es una función de x e i que no es infinita cuando i = 0; sea ahora p la función de x (sin i) en que se convierte P cuando hacemos i = 0; entonces $P = p+iQ$; nuevamente, $Q = q+iR$, etc. Se tiene pues $f(x+i) = f(x)+i(p+iQ) = f(x)+ip+i^2Q = f(x)+ip+i^2q+i^3R$, etc. Esto no sólo muestra que p, q, r, etc. no dependen de i, sino que indica como calcularlas. Por ejemplo, si

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad f(x+i) = \frac{1}{x+i},$$

de donde

$$iP = \frac{1}{x+i} - \frac{1}{x} = \frac{-i}{x(x+i)}\ ; \quad P = -\frac{1}{x(x+i)}, \quad p = -\frac{1}{x^2}$$

$$iQ = P-p = -\frac{1}{x(x+i)} + \frac{1}{x^2} = \frac{i}{x^2(x+i)}\ ; \quad Q = \frac{1}{x^2(x+i)}, \quad q = \frac{1}{x^3}$$

$$iR = \frac{1}{x^2(x+i)} - \frac{1}{x^3} = -\frac{i}{x^3(x+i)}\ ; \quad R = -\frac{1}{x^3(x+i)}, \quad r = -\frac{1}{x^4}, \text{ etc.}$$

(el ejemplo es de Lagrange).

Falta aún ver la regla de formación de p, q, r, etc. (funciones que Lagrange llama, con una terminología todavía en uso, <u>derivadas</u> de f(x)) pues, aunque lo dicho basta para calcularlas una por una, no es claro qué relación guardan entre sí. Para descubrir ésta, Lagrange desarrolla f(x+i+0) de dos maneras, a saber, substituyendo en el desarrollo de f(x+i) primero i+0 en lugar de i, y después x+0 en lugar de x, e iguala las expresiones obtenidas que, para ser iguales como funciones de tres variables deben coincidir en cada uno de sus términos semejantes: en primer lugar

$$f(x)+p(i+0)+q(i+0)^2+r(i+0)^3+\text{ etc.} = f(x)+pi+qi^2+ri^3+\text{ etc.} +$$
$$p0+2qi0+3ri^20+4Si^30+\text{ etc.}$$

donde se han puesto sólo los primeros dos términos de cada binomio.

En segundo lugar, si al poner x+0 en lugar de x, f(x) se convierte en f(x)+f0+ etc., p se convierte en p+p'0+ etc., q en q+q'0+ etc. y así sucesivamente, $f(x)+pi+qi^2+$ etc. se convertirá en:

$$f(x)+pi+qi^2+ri^3+\text{ etc.}$$
$$+\ f(x)0+p'i^0+q'i^20+r'i^30+\text{ etc.}$$

Los términos semejantes, y en particular los que contienen la primera potencia de 0, deben ser iguales, por lo que

$$p = f'(x),\ 2q = p',\ 3r = q',\ 4S = r',\text{ etc.}$$

de donde

$$q = \frac{p'}{2} = \frac{f''(x)}{2}\ ,\ r = \frac{q'}{3} = \frac{f'''(x)}{2\cdot 3}\ ,\ s = \frac{f^{(4)}(x)}{2\cdot 3\cdot 4}\ \text{ etc.}$$

Aquí $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, etc. es una sucesión de funciones donde cada una a partir de la segunda guarda con la anterior la misma relación que la que le sigue guarda con ella, por lo que si se sabe como encontrar la primera función derivada de cualquier función dada, puede obtenerse el desarrollo de una función arbitaria.

Hasta aquí Lagrange en paráfrasis. No es mi intención analizar ni evaluar su programa de fundamentación del Análisis, sino tan sólo dar una idea del mismo que permita percibir, aunque sea superficialmente, su sabor. Desde luego, el éxito alcanzado por Lagrange es más bien modesto. Consigue definir las derivadas de una función sin recurrir ni a límites ni a infinitésimos, pero sólo gracias a que se supone que toda función se puede desarrollar en serie de potencias en la que no aparecen, además, exponentes irracionales. Los resultados presentados son válidos sólo para series formales de potencias.

Alguien formado en la versión weierstrassiana de los fundamentos no puede dejar de preocuparse por la convergencia de las series, y el manejo puramente algebraico de las mismas le resulta extraño. ¿Para qué querría Lagrange series en las que no se puede dar valores numéricos a la variable? Antes de considerar esta pregunta y como mero ejercicio dialéctico, formulemos su contrapartida: ¿por qué insistía Weierstrass, igual que otros antes que él, en dar valores numéricos a las variables? Seguramente no por el mero afán de hacer cálculos aritméticos. La respuesta se remite a la relación entre el Análisis y sus aplicaciones.

Pensemos en el acto de medir algo. El ejemplo más básico de medición es el de determinar la longitud de un segmento de recta. Medir un segmento consiste en compararlo con otro, elegido arbitrariamente que se denomina unidad, para ver cuantas veces cabe éste en aquél. Generalmente no cabe un número entero exacto de veces. Para medir el residuo menor que la unidad, cuando lo hay, se subdivide ésta. Tampoco la nueva unidad, parte alícuota de la primera, cabe necesariamente un número entero de veces en el residuo, lo que hace necesaria una nueva subdivisión, etc. ¿Cuántas veces se necesita subdividir la unidad para poder medir cualquier segmento? El hecho de que dado un segmento, existe siempre otro inconmensurable con él, muestra que, no importa que esquema se adopte al subdividir, se requiere una infinidad de subdivisiones. Si nuestro esquema consiste en dividir la unidad en diez partes iguales, cada una de ellas en diez partes iguales, etc. se vé que, en general, el resultado de medir un segmento, que consiste en el número de veces que la unidad y cada una de sus subunidades cupieron en el segmento y sus residuos sucesivos, es una expansión decimal infinita, y el conjunto de todas éstas, a saber los números reales, es lo que se requiere para expresar cualquier posible resultado de una medición teórica: la recta numérica no es más que la regla perfecta en que están marcadas todas las subdivisiones de la unidad.

Aún sin entrar a discutir la medición más detalladamente (ver [11], Cap. VI) lo anterior muestra que los números reales son el vínculo entre las Matemáticas y la Física. Es por ello que un análisis que se limita al estudio de expresiones simbólicas en que las variables no son susceptibles de determinaciones numéricas, no sólo no se aplica a la Física, sino que no tiene, en principio, ninguna relación con ella. Más aún: no es necesario salir de las Matemáticas para encontrar ese problema, puesto que para relacionar el Análisis con la Geometría es necesario que las variables tomen valores que son, si no números reales, magnitudes geométricas[29]. Queda claro entonces que una teoría de los procesos analíticos que atienda nada más a sus aspectos formales, de manipulación de símbolos, no puede explicar la relevancia de tales procesos en las aplicaciones físicas o geométricas. Es pues, necesariamente, una teoría de alcances limitados y es por esta razón que Lagrange se vió obligado a considerar también la convergencia de sus series, encontrando tanto la forma integral del residuo en una serie de potencias, como la llamada de Lagrange.

Antes de terminar este capítulo quiero insistir en el hecho de que si una teoría del Análisis no incluye entre sus objetivos el de explicar cómo es posible aplicarlo a la Geometría y a las Ciencias empíricas, entonces esa teoría puede revestir un carácter puramente formal, sin referencia a lo numérico, y ello en una medida no sospechada por Lagrange (ver [13], p. 9). Esta posibilidad queda generalmente ocultada por el hecho de que el Algebra no se concibe habitualmente en términos formales. En efecto, si se axiomatiza la parte del álgebra ordinaria que se ocupa de establecer identidades y no de resolver ecuaciones, es decir, si se busca una lista mínima de identidades a partir de las cuales puedan obtenerse todas las demás, se llegará generalmente a la lista conocida como "axiomas de campo"; pero el campo por excelencia es el de los números reales y esto nos remite a la medición y por ende a la Física. Pero no es indispensable dar una interpretación numérica de los axiomas de campo, ya que es posible también pensar-

29] Para una interpretación de la Geometría Analítica como un álgebra de segmentos (que es, desde luego, isomorfa a la de los números reales) ver la Geometría de Descártes [12].

los como reglas para identificar expresiones simbólicas. Por ejemplo, la regla a(b+c) = ab+ac dice que las expresiones a(b+c) y ab+ac deben considerarse equivalentes. A los axiomas de campo hay que agregar, desde luego, el principio de intercambiabilidad de expresiones equivalentes.

De esta manera, un campo puede verse como el conjunto de las clases de equivalencia en que los axiomas de campo parten el conjunto de todas las expresiones simbólicas bien formadas según una sintáxis que no es difícil especificar (no debe serlo, puesto que la aprendemos en la secundaria). No sería tampoco difícil inventar los σ-campos, que contendrían expresiones formadas por una infinidad de símbolos[30] y aquí tendríamos ya no sólo el Algebra, sino también el Análisis. Planteadas así las cosas, la problemática consistiría en determinar toda la clase de equivalencia de una expresión dada y en decidir si una secuencia de transformaciones es o no compatible con las reglas básicas[31].

Lo dicho basta, me parece, para mostrar que la concepción formalista no es disparatada ni trivial y únicamente tiene el defecto de no sevir a ciertos fines; lo que explica tanto su fuerza como su debilidad.

VIII. FOURIER: EL ESTUDIO MATEMATICO DE LA CONDUCCION DEL CALOR.

Es bien sabido que el trabajo más importante de Jean Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830) en el campo de la Física Matemática versa sobre la di-

30] Por ejemplo, sumas infinitas.
31] Por ejemplo, demostrar que el algoritmo para la raíz cuadrada de un polinomio o serie ([6], p. 41) produce invariablemente una serie (o un polinomio si el radicando es un polinomio cuadrado perfecto) que multiplicada(o) por sí misma(o) reproduce el radicando.

fusión del calor en los cuerpos. Por eso, antes de ver cómo dicho trabajo resuelve la controversia suscitada por el problema de la cuerda, describiré dos fases de su investigación de la difusión del calor: la inicial y la final. Omito los intermedios porque no es mi propósito mostrar la evolución de su pensamiento al respecto. Para ello remito al lector interesado a [14] que contiene una edición crítica de la monografía presentada por Fourier al Institut de France en 1807.

1.- Transmisión del calor entre masas disjuntas. Esta paráfrasis se basa en la monografía de 1807 ([14], p. 43). Se trata de n masas disjuntas alineadas, el propósito de Fourier al emprender este análisis es el de hacer posteriormente n infinito para obtener una distribución continua de masa (una barra). Esta manera de proceder tiene al menos un antecedente importante en el trabajo de Lagrange sobre la cuerda vibrante [1].

Sean n primas de masa m cada uno, situados a distancias iguales sobre una recta. Se supone que el mecanismo de transmisión del calor es como sigue: del primer prisma se desprende una masa infinitesimal dm que se desplaza hasta el segundo, de éste una que se desplaza hasta el tercero, etc. Todos los desprendimientos y desplazamientos ocurren simultáneamente y todas las pequeñas masas (iguales a dm) regresan a ser prisma de origen al mismo tiempo. Todo el proceso ocurre en un tiempo infinitesimal dt. Se supone además que las pequeñas masas mensajeras y sus prismas destinatarios se ponen instantáneamente en equilibrio térmico. Como se sabe, si un cuerpo de masa m_1 y temperatura T_1 se pone en contacto con otro de masa m_2 y temperatura T_2, la temperatura de equilibrio (suponiendo que no hay pérdida de calor) es

$$T = \frac{m_1T_1 + m_2T_2}{m_1 + m_2} \quad .$$

Sean $T_1, T_2, \ldots, T_n$ las temperaturas de los cuerpos en el tiempo t. Si se considera la primera mitad del proceso descrito (las masas dm se han transportado y puesto en contacto con las masas vecinas), las nuevas temperaturas serán:

$$T_1, \quad \frac{T_2(m-dm)+T_1dm}{m}, \quad \frac{T_3(m-dm)+T_2dm}{m}, \ldots, \quad \frac{T_n m+T_{n-1}dm}{m+dm}$$

o bien

$$T_1, T_2+(T_1-T_2)\,\frac{dm}{m}, \; T_3+(T_2-T_3)\,\frac{dm}{m}, \ldots, \; T_n+(T_{n-1}-T_n)\,\frac{dm}{m}$$

donde en la última expresión se han despreciado los términos que contienen potencias de dm superiores a la primera[32]. Cuando las masas dm regresan al prisma del cual partieron, las temperaturas se convierten en

$$T_1-(T_1-T_2)\,\frac{dm}{m}, \; T_2+[(T_1-T_2)-(T_2-T_3)]\,\frac{dm}{m}, \; T_3+[(T_2-T_3)+(T_3-T_4)]\,\frac{dm}{m},$$

$$\ldots, \; T_n+(T_{n-1}-T_n)\,\frac{dm}{m} \; .$$

Para dar a la primera y última ecuaciones la misma forma que tienen las demás, introduzcamos $T_0 = T_1$ y $T_{n+1} = T_n$. Además, sea $Kdt = dm$ [33]. En-

---

32] $\dfrac{dm}{m+dm} = \dfrac{dm}{m}\,\dfrac{1}{1+\dfrac{dm}{m}} = \dfrac{dm}{m}\left(1 - \dfrac{dm}{m} + \left(\dfrac{dm}{m}\right)^2 + \text{etc.}\right) \approx \dfrac{dm}{m}$.

tonces, puesto que las temperaturas obtenidas son los valores de $T_1,\ldots,T_n$ al tiempo t+dt, se obtienen las ecuaciones

$$(12) \qquad dT_k = \frac{K}{m}[(T_{k+1}-T_k)-(T_k-T_{k-1})]dt, \qquad k = 1,2,\ldots,n$$

El problema se reduce, pues, a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (12) con condiciones iniciales $T_k(0) = T_k^0$, las temperaturas iniciales dadas de los prismas. Como para los fines del presente ensayo no interesa la solución, me limitaré a indicar el método de solución empleado por Fourier; consiste en suponer $T_k = a_k e^{ht}$, igualdad que, substituida en (12), convierte el sistema en una ecuación en diferencias cuya solución proporciona a_k en términos de h, cuyos n [34] valores los obtiene de la ecuación $a_{n+1} = a_n$.

2.- Deducción de la ecuación general del movimiento del calor en un sólido. Me atendré aquí a la pulida exposición de la Théorie Analytique de la Chaleur (1822), [16], p. 107, [16a], p. 233.

a) Una distribución lineal de temperaturas es estacionaria. Supóngase que el punto (x,y,z) de un sólido tiene la temperatura (*) $T = A-ax-by-cz$ y tómense tres puntos P, Q, R alineados y donde Q es el punto medio del segmento PR; sean sus coordenadas $P = (x-\alpha, y-\beta, z-\gamma)$,

---

33] En la concepción leibniziana del cálculo, cualesquiera dos infinitésimos del mismo orden son comparables, es decir, su cociente es finito y distinto de cero [15]; por lo tanto el cociente $\frac{dm}{dt} = K$ no puede interpretarse en este caso como la derivada de m respecto a t, ya que m es <u>constante</u> (m varía a lo más por el infinitésimo dm); he aquí un ejemplo de un argumento infinitesimalista difícil de traducir al lenguaje de límites.

34] El espacio de soluciones de (12) es de dimensión n.

$Q = (x,y,z)$, $R = (x+\alpha, y+\beta, z+\gamma)$. Substituyendo en (*) tendremos las temperaturas de estos puntos, T_P, T_Q, T_R; es fácil comprobar que $T_R - T_Q = T_Q - T_P$. Como la cantidad de calor que un punto recibe de otro depende de la distancia y de la diferencia entre las temperaturas de los puntos, Q recibirá tanto calor de R como envía a P, de modo que su temperatura no cambiará por la acción de P y R; pero como la totalidad de los puntos vecinos de Q pueden descomponerse en parejas como P, R, se concluye que la temperatura de Q no cambia.

b) Definición del coeficiente K de conductividad térmica. Considérese el sólido comprendido entre dos planos paralelos, a distancia 1 uno del otro. Supóngase además que uno de los planos se mantiene a temperatura 0 y el otro a temperatura 1 (temperaturas de congelación y ebullición del agua, respectivamente); si la coordenada z mide la distancia respecto al segundo plano, la distribución estacionaria de temperaturas es $T = 1-z$; el calor en este cuerpo fluye verticalmente de abajo hacia arriba y la cantidad del mismo que pasa por un plano paralelo a los que limitan al cuerpo es igual a la que atraviesa cualquier otro plano semejante, pues de lo contrario la región comprendida entre dos de estos planos que tuviesen flujos distintos tendría una ganancia o pérdida neta de calor y su temperatura no podría permanecer constante. Piénsese ahora, no en el cuerpo infinito considerado, sino en un cilindro recto cualquiera comprendido entre los mismos dos planos que el cuerpo y supóngase que los puntos de la cara lateral del cilindro se mantienen cada uno a la temperatura dictada por la ecuación $T=1-z$; es claro que el flujo de calor en el interior del cilindro es igual al que se observa en una región cualquiera del sólido infinito congruente con el cilindro y que el flujo de calor a través de cualquier sección transversal del cilindro paralela a sus bases es el mismo; como estas secciones tienen un área finita puede calcularse la cantidad de calor que las atraviesa por unidad de área por unidad de tiempo; dicha cantidad es característica de cada substancia y se llama coeficiente de conductividad térmica; se denotará por K. Si el plano inferior se mantiene a temperatura c en vez de 1, la nueva distribución de temperaturas es $T = c(1-z)$ y la cantidad de un calor que pasa por unidad de área por unidad de tiempo es cK, puesto que las temperaturas y las diferenicas de temperaturas de puntos vecinos se habrán multiplicado por c.

c) En un cuerpo con distribución lineal de temperaturas $T = A-ax-by-cz$, la cantidad de calor que pasa por unidad de área por unidad de tiempo en dirección del eje z es cK. En efecto, tal cantidad es la suma de las cantidades enviadas por puntos situados por debajo de la sección considerada y cercanos a ella a puntos situados por encima y también cercanos. Más precisamente cada punto P arriba de la sección recibe calor no sólo de puntos situados directamente abajo de él, sino de puntos vecinos a éstos; se descompone esta vecindad en discos perpendiculares al eje z y cada disco en pares de puntos simétricos respecto al centro Q; los puntos de cada par equidistan de P por lo que el calor que envíen a P dependerá sólo de la diferencia entre sus respectivas temperaturas y a la temperatura de P. Sean $P = (x,y,z+\gamma)$, $Q = (x,y,z)$ y los puntos en cuestión $Q = (x+\alpha,y+\beta,z)$ y $Q_2 = (x-\alpha$,

$y-\beta,z)$.

El calor enviado por Q_1 y Q_2 a P será $q(T_{Q_1}-T_P)+q(T_{Q_2}-T_P)$, donde q es una constante de proporcionalidad, la misma para ambos puntos. Si ahora se piensan los puntos P, Q_1 y Q_2 en un sólido comprendido entre dos planos paralelos y cuya distribución de temperaturas es $T = c-cz$, un simple cálculo mostrará que la cantidad de calor que P recibe de Q_1 y Q_2 es la misma en ambos cuerpos; por lo tanto el flujo de calor en la dirección del eje z es la misma en ambos casos, pero en el segundo caso se sabe que es cK. Análogamente, se tiene que el flujo de calor, siempre por unidad de área por unidad de tiempo, es aK en la dirección del eje x y bK en la dirección del eje y.

d) Cálculo del flujo de calor en el caso de una distribución variable de temperaturas. Sea $T = f(x,y,z,t)$ la distribución; se calculará la cantidad de calor que pasa durante un tiempo dt a través de un disco infinitesimal w con centro en el punto $P = (x,y,z)$ y que es paralelo al plano x,y. En el tiempo t, las temperaturas de los puntos que están en la vecindad infinitesimal del punto P se pueden escribir en la forma

$$T + \frac{\partial T}{\partial x}\,dx + \frac{\partial T}{\partial y}\,dy + \frac{\partial T}{\partial z}\,dz;$$

supongamos que estas temperaturas no varían durante el instante dt. La cantidad de calor que atraviesa el disco w en el tiempo dt depende únicamente de estas temperaturas, o lo que es lo mismo, no depende de la distribución fuera de la vecindad infinitesimal considerada, distribución que puede cambiarse a voluntad sin modificar el flujo a través de w, desde luego durante el tiempo dt. Tómese la distribución lineal independiente de t que coincide con la dada en la vecindad infinitesimal de P; para dicha distribución lineal se sabe que el flujo por unidad de área por unidad de tiempo es menos K veces el coeficiente de z; en este caso el coeficiente $\frac{\partial T}{\partial z}$ y por lo tanto el flujo a través del área durante el tiempo dt será $-K\frac{\partial T}{\partial z}$ wdt. Se tienen, desde luego las expresiones conrrespondientes para el flujo en la dirección de los otros ejes.

e) Deducción de la ecuación general de la propagación del calor en el interior de los sólidos. Considérese el prisma de caras paralelas a los ejes coordinados, con centro en (x,y,z) y lados de longitud dx, dy, dz. Se trata de calcular la ganancia (o pérdida) neta de calor que experimenta el prisma durante el tiempo dt. La contribución de las caras perpendiculares al eje z, por ejemplo, se obtiene como sigue: salvo que la función T tenga un máximo o un mínimo en el punto (x,y,z) la dirección de propagación del calor no cambia en el prisma, ya que tiene un espesor infinitesimal; luego entra por una cara y sale por la opuesta, es decir, la ganancia se obtiene restando lo que sale de lo que entra; convengamos en que el calor se mueve en la dirección de cada eje[35]. La contribución del eje z será; de acuerdo con (d),

$$K\frac{\partial T}{\partial z}\left(x,y,z+\frac{dz}{2}\right)dxdydt - K\frac{\partial T}{\partial z}\left(x,y,z-\frac{dz}{2}\right)dxdydt = K\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(x,y,z)dxdydzdt$$

35 Cuando no sea así, se tendrá una "ganancia" negativa.

Análogamente, las contribuciones de las caras perpendiculares al eje x y al eje y son, respectivamente,

$$K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dxdydzdt, \quad K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dxdydzdt$$

por lo que el incremento total del calor en el prisma es

(13) $$K \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) dxdydzdt$$

Sea D la densidad del cuerpo, C su capacidad calórica, o cantidad de calor que lleva la temperatura de la unidad de masa de la temperatura 0 a la temperatura 1. El prisma tiene masa Ddxdydz; la cantidad de calor que llevará la temperatura de esta masa de 0 a 1 es a C como Ddxdydz es a la unidad de masa, es decir, CDdxdydz es la cantidad de calor necesario para llevar la temperatura del prisma un grado. Por otra parte, el incremento de la temperatura del prisma es $\frac{\partial T}{\partial t}$ dt; la cantidad de calor responsable de ese incremento será a CDdxdydz como $\frac{\partial T}{\partial t}$ dt es a 1, luego dicha cantidad será

(14) $$CD \frac{\partial T}{\partial t} dxdydzdt.$$

Igualando las dos expresiones (13) y (14) para el incremento de la cantidad de calor en el prisma durante el tiempo dt se obtiene la ecuación del calor

(15) $$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{CD} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right).$$

Es interesante comparar la deducción del modelo para la transmisión de calor entre masas disjuntas con la de la ecuación general. La primera se basa en la postulación de un mecanismo carente por completo de plausibilidad física; la segunda, por el contrario, parte de una formulación cuidadosa de los principios físicos de la difusión del calor y con ella inaugura una nueva rama de la física. Desde cierto punto de vista el primer modelo es más significativo, y ésto precisamente por el hecho de que no se apoya en una teoría física.

Hasta el momento en que Fourier escribe, la matematización de los fenómenos físicos se apoyaba siempre en una teoría considerada verdadera, o bien era meramente descriptiva, evitando toda mención de causas o mecanismos subyacentes. Ejemplo de lo primero es toda la Mecánica Racional desarrollada a partir de Newton, incluyendo el problema de la cuerda; como ejemplos de lo segundo pueden citarse las teorías planetarias hasta antes de Kepler, e incluso la ley de la caída libre de los cuerpos, de Galileo. Lo novedoso de la aproximación de Fourier resalta mejor aún si se lo compara con su antecedente más importante en el aspecto técnico, a saber el análisis de n cuerpos con que Lagrange atacó el problema de la cuerda. Antes de pasar a una distribución continua de masa, Lagrange supone la masa concentrada en n puntos, lo que lo lleva (ver II.1) al sistema de ecuaciones (compararlo con (12))

$$(16) \qquad \frac{d^2 y_k}{dt^2} = e[(y_{k+1}-y_k)-(y_k-y_{k-1})], \quad k = 0,\ldots,n+1, \; e = \text{etc.},$$

$$y_0 = y_{n+1} = 0.$$

Lagrange obtiene el resultado buscado para la distribución continua resolviendo el sistema (16) y tomando en la solución los puntos con masa infinitamente próximos entre sí ([1], p. 72 y p. 97). Lo mismo hace Fourier en el caso del flujo de calor en un anillo ([16], p. 268-295), encontrando que el resultado coincide con el obtenido directamente a partir de la ecuación en derivadas parciales para el caso continuo, de modo que al menos en un caso se comprueba que el resultado obtenido mediante el modelo basado en un mecanismo imaginario[36] coincide con el que se deriva de las leyes físicas de la difusión del calor. Esto arroja luz sobre las relaciones entre la Física y las Matemáticas o tal vez sería mejor decir que las obscurece; en efecto, si la matematización de un fenómeno físico se basa en el enunciado matemático de una ley física, ello explica su éxito en predecir características del fenómeno; por ejemplo, la formulación de un problema dinámico se obtiene, en lo esencial, introduciendo en el lugar adecuado la ecuación $F = \frac{d}{dt}(mv)$, que es la expresión matemática de la segunda ley de Newton del movimiento de los puntos materiales. Ahora bien, en este caso la formulación matemática de la ley es practicamente indistinguible de un enunciado preciso de la misma, es decir, que el proceso de matematización se dió antes de enunciarla: cuando es posible formularla ello ocurre ya en forma esencialmente matemática.

No abundaré en lo anterior, pero quiero subrayar el hecho de que en la Mecánica, que es la Física Matemática del siglo dieciocho, la construcción de modelos matemáticos queda desdibujada por una identificación entre sig-

36] En las palabras de Fourier: "por lo demás, no se supone que la transmisión del calor en los sólidos se opera de una manera análoga a la que se acaba de describir; este primer problema [el de las masas disjuntas] y los dos siguientes [n masas disjuntas alineadas y situadas en un círculo, respectivamente] no deben ser considerados más que como cuestiones abstractas y accesorias" ([14], p. 39).

nificante y significado: un modelo matemático es una fotografía filtrada de la realidad física; si bien deja de lado lo inesencial, no por ello es menos fotográfico el proceso. Siempre es posible pensar en un proceso físico que aproxime al matemático. Por ejemplo, en el caso del análisis de n cuerpos de Lagrange, el sistema de n masas concentradas unidas por tramos de cuerda sin masa se puede aproximar mediante un hilo delgado con n cuentas que resulten pesadas por comparación con el hilo; así, aún cuando a primera vista el mencionado análisis de Lagrange parece apoyarse en una idealización más extrema que la constituída por la curva con una distribución continua de masa, en realidad es del mismo orden que ésta. No así el análisis de n cuerpos de Fourier: aquí la Física y la Matemática se han distanciado y sin embargo los resultados son tan buenos como si no hubiese habido distanciamiento. A los ojos de un matemático del siglo dieciocho, como Lagrange, esto debió aparecer tan paradójico como el desarrollo de una función cualquiera en serie trigonométrica.

IX. LAS SERIES DE FOURIER (FIN DE LA CRISIS).

El primer intento de resolución de la ecuación (4) que dió Fourier fué el de su particularización para el caso de la distribución estacionaria de temperaturas en la lámina rectangular infinita que se muestra en la Figura 5, donde el lado finito se mantiene a temperatura

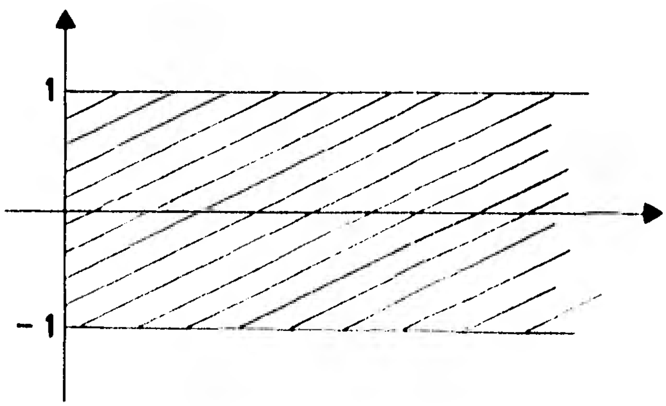


Fig.5

constante 1 y los lados infinitos a temperatura 0. Lo presento según la versión que dió Fourier en 1807 de un manuscrito suyo de 1805 ([14], p. 134).

Aunque en 1805 había obtenido la ecuación que se aplica a este caso directamente a partir de principios físicos, en 1807 la obtiene particularizando la ecuación general: como se trata de la distribución estacionaria $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$; además no hay coordenada z, de donde se obtiene

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{17}$$

se supone que no hay pérdida de calor a través de la superficie, sino sólo a través de los lados fríos, "y para dar en cierto modo una existencia física a la cuestión, puede uno imaginarse que el grosor de la lámina es infinitamente grande". (id)

Fourier inicia aquí su uso sistemático del método de separación de variables para obtener soluciones particulares, que se superponen para obtener la solución general, gracias a la linealidad de la ecuación. Sea $T = f(x)g(y)$; entonces

$$f''(x)g(y)+f(x)g''(y) = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g''(y)}{g(y)} = 0$$

Como los sumandos son cada uno función de distinta variable independiente, la ecuación anterior sólo puede darse si cada uno es constante:

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = A, \quad \frac{g''(y)}{g(x)} = -A$$

Estas ecuaciones poseen soluciones exponenciales o trigonométricas dependiendo del signo de A; como $g(\pm 1) = 0$, g debe ser trigonométrica; tómese

$f(x) = e^{mx}$, $g(y) = \cos ny$. Si se substituye $T = e^{mx}\cos ny$ en (6) se obtiene la condición $m^2 = n^2$, de donde $T = e^{nx}\cos ny$ o bien $T = e^{-nx}\cos ny$; la primera posibilidad es incompatible con la situación física: $T \to 0$ cuando $x \to \infty$, ya que la única fuente de calor es el lado finito. Además $\cos n = 0$ implica $n = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ y superponiendo todas estas soluciones se obtiene la general:

$$(18)\quad T = a_1 e^{-\frac{1}{2}\pi x}\cos\left(\frac{1}{2}\pi y\right) + a_2 e^{-\frac{3}{2}\pi x}\cos\left(\frac{3}{2}\pi y\right) + a_3 e^{-\frac{5}{2}\pi x}\cos\left(\frac{5}{2}\pi y\right) + \ldots$$

No se conforma Fourier con la deducción analítica de (18), sino que dá una interpretación de la misma a la Bernoulli, en que cada término corresponde a una versión simple del fenómeno (recuérdese que en la ec. (11) cada sumando representa un modo de vibración armónica simple de la cuerda). El término general $e^{-(1/2)(2k+1)\pi x}\cos\frac{1}{2}(2k+1)\pi y$ es la solución que corresponde a la distribución de temperaturas $T = \cos\frac{1}{2}(2k+1)\pi y$ en el lado finito (para tener temperatura constante 1 se necesita una infinidad de esos términos). Se puede resumir la interpretación física de la distribución $T = e^{-(1/2)(2k+1)\pi x}\cos\frac{1}{2}(2k+1)\pi y$ con una imagen; la gráfica de T es una superficie que corta al plano x, y a lo largo de los lados infinitos de la lámina y que si se la corta según el lado finito tiene la forma $\cos\frac{1}{2}(2k+1)\pi y$; además se acerca asintóticamente al plano x, y cuando x tiende a infinito y en la dirección del eje x se curva siempre hacia dicho plano. Pues bien, la imagen prometida es ésta: el calor se mueve por la lámina como agua vertida sobre la misma desde el lado finito. Fourier concluye:

"Cualquiera que sea la función g(y) que expresa las temperaturas iniciales y determina la figura de la curva en la sección tomada en el origen, la superficie que pasa por esta curva y las arístas 0 y 0 [los lados infinitos] tiene todas sus ordenadas compuestas de la suma de las ordenadas pertenecientes a las superficies particulares de las que se acaba de hablar. Es necesario imaginar que hay tantas láminas sólidas diferentes como términos en la ecuación de la superficie general, que cada una de estas láminas se calienta por separado como si no hubiese más que un término en la ecuación, que todas las láminas permanecen superpuestas, en fin, que las cantidades de calor que afectan a los puntos correspondientes se acumulan sobre uno sólo. Dicho ésto, se puede concebir que el calor que surge a cada instante de la fuente se distribuye así en porciones diferentes, se propaga según una de las leyes elementales expuestas y que todos estos movimientos parciales se llevan a cabo a la vez sin estorbarse" ([14], p. 144).

Sin embargo, aún cuando Fourier hace un análisis como el de Bernoulli su actitud no puede ser más distinta de la de éste. De ninguna manera concluye que (18) es la solución de (17) porque es la superposición de los movimientos elementales del calor. Más bien, el hecho de que la solución de (17) pueda interpretarse de esa manera, muestra que hay acuerdo entre el resultado de los cálculos y una comprensión física plausible del fenómeno. Esta actitud reaparece todo a lo largo del monumental trabajo de Fourier; los argumentos físicos y los matemáticos se iluminan mutuamente en la medida de lo posible, pero no se confunden: juegan papeles independientes dentro de un todo armonioso. Es precisamente porque la separación entre Física y Matemáticas es mucho más definida en Fourier que en sus predecesores, que se esfuerza él en mostrar su acuerdo, acuerdo que ha dejado de ser automático y que necesita ser comprobado en cada nueva situación.

Se presenta a continuación el problema de determinar los coeficientes en (18), problema subyacente en la discusión sobre la cuerda y cuya enorme dificultad, si no imposibilidad había apuntado Euler. En el caso que nos ocupa deben determinarse a partir de la ecuación

(19) $$1 = a \cos u + b \cos 3u + c \cos 5u + \ldots, \quad \text{donde} \quad u = \frac{1}{2}\pi y$$

La función debe satisfacerse para todos los valores de u entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$. Derivando (19) una infinidad de veces y haciendo $u = 0$ se obtiene el sistema infinito

(20) $$\begin{array}{l} 1 = a + b + c + d + \ldots \\ 0 = a + 3^2 b + 5^2 c + 7^2 d + \ldots \\ 0 = a + 3^4 b + 5^4 c + 7^4 d + \ldots \\ 0 = a + 3^6 b + 5^6 c + 7^6 d + \ldots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array}$$

Fourier resuelve el sistema (20) aproximándolo mediante sistemas de n ecuaciones con n incógnitas como se muestra. Al resolver el primer sistema se obtiene un valor de a ($a = 1$); al resolver el segundo se obtiene un valor para b y uno para a distinto del primero; al resolver el tercer sistema se obtiene un primer valor para c y valores para a y b distintos de los anteriores y así sucesivamente; "se trata pués de examinar si, a medida que el número de incógnitas aumenta, cada uno de los valores de a, b, c, d, etc. no converge hacia un límite finito, que no pueda por otra parte sobrepasar, pero al que se aproxime continuamente" dice Fourier ([14], p. 144). Su ataque empieza con el sistema de 7×7:

$$
\begin{aligned}
a + b + c + d + e + f + g &= 1\\
a + 3^2b + 5^2c + 7^2d + 9^2e + 11^2f + 13^2g &= 0\\
a + 3^4b + 5^4c + 7^4d + 9^4e + 11^4f + 13^4g &= 0\\
a + 3^6b + 5^6c + 7^6d + 9^6e + 11^6f + 13^6g &= 0\\
a + 3^8b + 5^8c + 7^8d + 9^8e + 11^8f + 13^8g &= 0\\
a + 3^{10}b + 5^{10}c + 7^{10}d + 9^{10}e + 11^{10}f + 13^{10}g &= 0\\
a + 3^{12}b + 5^{12}c + 7^{12}d + 9^{12}e + 11^{12}f + 13^{12}g &= 0.
\end{aligned}
$$

Multiplicando la primera ecuación por 13^2 y restándole la segunda, multiplicando la segunda por 13^2 y restándole la tercera, etc. obtiene

$$
\begin{aligned}
&a(13^2-1) + b(13^2-3^2) + c(13^2-5^2) + d(13^2-7^2)\\
&\quad + e(13^2-9^2) + f(13^2-11^2) = 13^2\\
&a(13^2-1) + 3^2b(13^2-3^2) + 5^2c(13^2-5^2) + 7^2d(13^2-7^2)\\
&\quad + 9^2e(13^2-9^2) + 11^2f(13^2-11^2) = 0\\
&a(13^2-1) + 3^4b(13^2-3^2) + 5^4c(13^2-5^2) + 7^4d(13^2-7^2)\\
&\quad + 9^4e(13^2-9^2) + 11^4f(13^2-11^2) = 0\\
&a(13^2-1) + 3^6b(13^2-3^2) + 5^6c(13^2-5^2) + 7^6d(13^2-7^2)\\
&\quad + 9^6e(13^2-9^2) + 11^6f(13^2-11^2) = 0\\
&a(13^2-1) + 3^8b(13^2-3^2) + 5^8c(13^2-5^2) + 7^8d(13^2-7^2)\\
&\quad + 9^8e(13^2-9^2) + 11^8f(13^2-11^2) = 0\\
&a(13^2-1) + 3^{10}b(13^2-3^2) + 5^{10}c(13^2-5^2) + 7^{10}d(13^2-7^2)\\
&\quad + 9^{10}e(13^2-9^2) + 11^{10}f(13^2-11^2) = 0.
\end{aligned}
$$

A continuación elimina f, empleando ahora como factor 11^2:

$$
\begin{aligned}
a(13^2-1)(11^2-1) + b(13^2-3^2)(11^2-3^2) + c(13^2-5^2)(11^2-5^2) & \\
+ d(13^2-7^2)(11^2-7^2) + e(13^2-9^2)(11^2-9^2) &= 13^2 \cdot 11^2 \\
a(13^2-1)(11^2-1) + 3^2b(13^2-3^2)(11^2-3^2) + 5^2c(13^2-5^2)(11^2-5^2) & \\
+ 7^2d(13^2-7^2)(11^2-7^2) + 9^2e(13^2-9^2)(11^2-9^2) &= 0 \\
a(13^2-1)(11^2-1) + 3^4b(13^2-3^2)(11^2-3^2) + 5^4c(13^2-5^2)(11^2-5^2) & \\
+ 7^4d(13^2-7^2)(11^2-7^2) + 9^4e(13^2-9^2)(11^2-9^2) &= 0 \\
a(13^2-1)(11^2-1) + 3^6b(13^2-3^2)(11^2-3^2) + 5^6c(13^2-5^2)(11^2-5^2) & \\
+ 7^6d(13^2-7^2)(11^2-7^2) + 9^6e(13^2-9^2)(11^2-9^2) &= 0 \\
a(13^2-1)(11^2-1) + 3^8b(13^2-3^2)(11^2-3^2) + 5^8c(13^2-5^2)(11^2-5^2) & \\
+ 7^8d(13^2-7^2)(11^2-7^2) + 9^8e(13^2-9^2)(11^2-9^2) &= 0.
\end{aligned}
$$

Después de eliminar también c se tiene

$$
\begin{aligned}
a(13^2-1)(11^2-1)(9^2-1) + b(13^2-3^2)(11^2-3^2)(9^2-3^2) & \\
+ c(13^2-5^2)(11^2-5^2)(9^2-5^2) & \\
+ d(13^2-7^2)(11^2-7^2)(9^2-7^2) &= 13^2 \cdot 11^2 \cdot 9^2 \\
a(13^2-1)(11^2-1)(9^2-1) + 3^2b(13^2-3^2)(11^2-3^2)(9^2-3^2) & \\
+ 5^2c(13^2-5^2)(11^2-5^2)(9^2-5^2) & \\
+ 7^2d(13^2-7^2)(11^2-7^2)(9^2-7^2) &= 0 \\
a(13^2-1)(11^2-1)(9^2-1) + 3^4b(13^2-3^2)(11^2-3^2)(9^2-3^2) & \\
+ 5^4c(13^2-5^2)(11^2-5^2)(9^2-5^2) & \\
+ 7^4d(13^2-7^2)(11^2-7^2)(9^2-7^2) &= 0 \\
a(13^2-1)(11^2-1)(9^2-1) + 3^6b(13^2-3^2)(11^2-3^2)(9^2-3^2) & \\
+ 5^6c(13^2-5^2)(11^2-5^2)(9^2-5^2) & \\
+ 7^6d(13^2-7^2)(11^2-7^2)(9^2-7^2) &= 0.
\end{aligned}
$$

Las tres ecuaciones en a, b, c son

$$a(13^2-1)(11^2-1)(9^2-1)(7^2-1)$$
$$+\ b(13^2-3^2)(11^2-3^2)(9^2-3^2)(7^2-3^2)$$
$$+\ c(13^2-5^2)(11^2-5^2)(9^2-5^2)(7^2-5^2) = 13^2\cdot 11^2\cdot 9^2\cdot 7^2$$

$$a(13^2-1)(11^2-1)(9^2-1)(7^2-1)$$
$$+\ 3^2b(13^2-3^2)(11^2-3^2)(9^2-3^2)(7^2-3^2)$$
$$+\ 5^2c(13^2-5^2)(11^2-5^2)(9^2-5^2)(7^2-5^2) = 0$$

$$a(13^2-1)(11^2-1)(9^2-1)(7^2-1)$$
$$+\ 3^4b(13^2-3^2)(11^2-3^2)(9^2-3^2)(7^2-3^2)$$
$$+\ 5^4c(13^2-5^2)(11^2-5^2)(9^2-5^2)(7^2-5^2) = 0$$

Las dos ecuaciones en a y b son

$$a(13^2-1)(11^2-1)(9^2-1)(7^2-1)(5^2-1)$$
$$+\ b(13^2-3^2)(11^2-3^2)(9^2-3^2)(7^2-3^2)(5^2-3^2)$$
$$= 13^2\cdot 11^2\cdot 9^2\cdot 7^2\cdot 5^2$$

$$a(13^2-1)(11^2-1)(9^2-1)(7^2-1)(5^2-1)$$
$$+\ 3^2b(13^2-3^2)(11^2-3^2)(9^2-3^2)(7^2-3^2)(5^2-3^2)$$
$$= 0.$$

Finalmente, cuando se han eliminado todas las incógnitas menos a, queda

$$a(13^2-1)(11^2-1)(9^2-1)(7^2-1)(5^2-1)(3^2-1)$$
$$=13^2\cdot 11^2\cdot 9^2\cdot 7^2\cdot 5^2\cdot 3^2.$$

Es claro que si se hubiese empleado una ecuación más, hubiese aparecido el factor 15^2-1 en el primer miembro y 15^2 en el segundo, de donde el valor de a buscado es

$$a=\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 9^2\cdot 11^2\cdot 13^2\ldots}{(3^2-1)(5^2-1)(7^2-1)(9^2-1)(11^2-1)(13^2-1)\ldots}$$

si los factores del denominador se descomponen, por ejemplo, $15^2-1=(14)(15)$ se obtiene

$$a=\frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot 9\cdot 11\cdot 11\cdot 13\cdot 13\ldots}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot 10\cdot 10\cdot 12\cdot 12\cdot 14\ldots}$$

El valor de esta expresión es conocido desde Wallis ([2], p.244) y es $\frac{4}{\pi}$.

Para encontrar los valores de b,c,... compara Fourier el sistema (11) obtenido de (10) con el de 6×6 tomando directamente de (9) y encuentra que si en (11) en vez de las incógnitas a, b, c, d, e, f se ponen las nuevas incógnitas

$$a^1 = \frac{13^2-1^2}{13^2}\,a,\; b^1 = \frac{13^2-3^2}{13^2}\,b,\; \dots ,\; f^1 = \frac{13^2-11^2}{13^2}\,f$$

(11) se transforma en el mencionado sistema de 6×6. Así, si en vez de partir del sistema 7×7, se hubiese empezado con el de 6×6, se podrían haber obtenido los valores de f, e, d, c, b, a en el caso 7×7 multiplicando los valores obtenidos para el caso 6×6 por

$$\frac{13^2-11^2}{13^2},\ \frac{13^2-9^2}{13^2},\ \frac{13^2-7^2}{13^2},\ \frac{13^2-5^2}{13^2},\ \frac{13^2-3^2}{13^2},\ \frac{13^2-1^2}{13^2}.$$

Basta entonces encontrar ahora los valores iniciales de cada incógnita, por ejemplo, el valor de f en el caso 6×6. En efecto sea F dicho valor. Entonces en el caso 7×7 se tendrá el valor $F\,\dfrac{13^2}{13^2-11^2}$, en el caso

8×8 el valor $F\,\dfrac{13^2}{13^2-11^2}\cdot\dfrac{15^2}{15^2-11^2}$, etc.

Los valores iniciales son

$$a = 1$$

$$b = \frac{1^2}{1^2-3^2}$$

$$c = \frac{1^2\cdot 3^2}{(1^2-5^2)(3^2-5^2)}$$

$$d = \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{(1^2-7^2)(3^2-7^2)(5^2-7^2)}$$

$$e = \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}{(1^2-9^2)(3^2-9^2)(5^2-9^2)(7^2-9^2)}$$

Ahora, de las expresiones como producto infinito de a, b, c, etc., factorizando las diferencias de cuadrados y comparando con el producto de Wallis, obtiene Fourier los valores

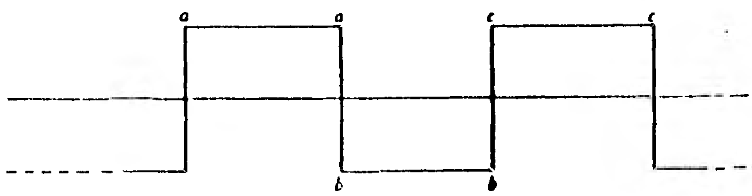
$$a = \frac{4}{\pi}\ ,\ b = -\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{\pi}\ ,\ c = \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{\pi}\ ,\ d = -\frac{1}{7}\cdot\frac{4}{\pi}\ ,\ \text{etc.}$$

y de ellos la ecuación

$$(12)\qquad \frac{1}{4}\pi = \cos u - \frac{1}{3}\cos 3u + \frac{1}{5}\cos 5u - \frac{1}{7}\cos 7u + \dots$$

que es el desarrollo de una constante en serie trigonométrica.Fourier venció a Euler en su propio terreno: el de la manipulación formal. Basta integrar (12) entre 0 y u término a término para obtener el desarrollo en serie de senos de una función que, si bien es impar, no es periódica, contradiciendo a Euler.

Para disipar malos entendidos, analiza Fourier el comportamiento de la serie para todos los valores de u y encuentra que representa la línea de la figura.



En la concepción de Fourier los trazos verticales forman parte de la línea, de modo que lo que para nosotros es una función discontinua en todos los múltiplos impares de $\pi/2$ y que vale alternadamente $\frac{\pi}{4}$ y $-\frac{\pi}{4}$, no es pensada así por Fourier, sino que posee una continuidad que hace ambigua su definición como función.

Pero no se piense que Fourier no sabe lo que dice en este caso: tiene razón al decir que las gráficas de las sumas parciales de la serie se aproximan a la línea de la figura como límite[37]. No parece haber estado interesado en distinguir claramente la convergencia de las curvas de la de las funciones (de R en R, no de R en R^2). Sin embargo discute ésta inmediatamente después.

En primer lugar encuentra la suma de los primeros m términos (m par) en forma cerrada, como sigue:

1º. Deriva $y = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \ldots - \frac{1}{2m-1}\cos(2m-1)x$

2º. Multiplica por $2\,\mathrm{sen}\,2x$

3º. Expresa cada término como una diferenica de cosenos, obteniendo una suma telescópica.

4º. Simplificando e integrando obtiene

$$y = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{sen}\,2mx}{\cos x}\,dx$$

Ahora integra por partes, integrando siempre el factor correspondiente

37] Bueno, no exactamente, pero no se le puede exigir a Fourier que descubriese el fenómeno de Gibbs, y menos en su primer ejemplo. Ver [17], p. 294.

a sen 2mx y derivando siempre el que corresponde a $\frac{1}{\cos x}$. Obtiene

$$y = c - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2m}\cos.(2mx)\sec.x + \frac{1}{2^2m^2}\sin.2mx\sec.'x\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2^3m^3}\cos.(2mx)\sec.''x + \ldots \&c.\right).$$

De aquí se ve que $y \to c$ cuando m tiende a infinito, a menos que x sea un valor para el cual sec x es infinita, es decir, cos x = 0.

Más adelante calcula incluso el residuo en (12) acotando la integral que aparece en cada integración por partes. Para evaluar c, hace x = 0 en la serie y obtiene la serie de Leibniz para $\pi/4$.

Así pues, Fourier es capaz de llevar a cabo una discusión de la convergencia de sus series, al menos en casos particulares (discute varios otros, además del visto aquí), mediante cálculos simples; no se trata de una teoría ε-δ, sino de integrar por partes, acotar una integral. Tanto más sorprendente resulta entonces que al discutir la generalidad de la solución trigonométrica, ni Bernoulli para apoyarla, ni Euler para atacarla, hayan mencionado siquiera la cuestión de la convergencia. Y es que ésta se presenta únicamente cuando se concibe una función como correspondencia numérica: si una serie ha de representarla, debe producir la misma correspondencia entre números que la función, es decir, al evaluar la serie para un determinado valor numérico de la variable debe producir el mismo resultado que la propia función; si la función no se concibe más que como correspondencia entre ciertos dos conjuntos de números, la mencionada propiedad de una serie es el <u>único criterio</u> para decidir si representa o no a la función dada. Evaluar series conduce inevitablemente a alguna noción de convergencia, de aproximación sucesiva.

Si por el contrario, la serie se concibe como un desarrollo formal de la función, como el resultado de aplicar a ésta cierto algoritmo productor de identidades, el evaluar la serie es irrelevante, o mejor dicho, la convergencia de la misma es irrelevante, porque en el caso de que diverja puede definirse su suma de manera que se preserve la identidad entre ella y la función (expresión analítica) de la cual es desarrollo; la identidad de dos expresiones no se funda en que valgan lo mismo para iguales valores de la variable independiente, aunque se espera que ello ocurra.

La preocupación de Fourier por la convergencia muestra que concibe una función como correspondencia numérica, una lista de pares de números que no tiene por qué obedecer una "ley de continuidad", que carece de una estructura a priori. Desde un punto de vista moderno, las funciones que Fourier tenía en mente eran ejemplos bastante particulares de correspondencias numéricas y los itemes de la lista distaban aún de ser completamente independientes entre sí, pero el germen de esa idea pertenece a una noción numérica de función. Generalmente las listas se describen mediante fórmulas que permiten calcular el segundo miembro de cada pareja cuando en ellas se substituye el primero, pero nada obliga a considerar únicamente listas que pueden especificarse mediante una sóla fórmula; distintas fórmulas pueden convenir a distintas partes de una lista; si dos fórmulas distintas coinciden en determinada parte de la lista, ello no significa que coincidan en otra. En fin, el trabajo de Fourier señala el fin del concepto clásico de función y ello es evidente desde este primer ejemplo.

Pero Fourier no para allí. Mediante un verdadero tour de force encuentra los coeficientes en el desarrollo en serie de senos de una función impar desarrollable en serie de potencias. Empieza desarrollando los senos en serie de potencias, agrupando términos semejantes e igualando los coeficientes de potencias iguales de x en ambos miembros. Esto lo conduce al sistema

$$\begin{aligned}
a + 2b + 3c + 4d + 5e + \&c. &= A \\
a + 2^3b + 3^3c + 4^3d + 5^3e + \&c. &= B \\
a + 2^5b + 3^5c + 4^5d + 5^5e + \&c. &= C \\
a + 2^7b + 3^7c + 4^7d + 5^7e + \&c. &= D \\
a + 2^9b + 3^9c + 4^9d + 5^9e + \&c. &= E \\
\&c.
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{array}{ccc}
\phi(0) = 0 & \text{et} & \phi'(0) = A \\
\phi''(0) = 0 & \text{et} & -\phi'''(0) = B \\
\phi^{IV}(0) = 0 & \text{et} & \phi^{V}(0) = C \\
\phi^{VI}(0) = 0 & \text{et} & -\phi^{VII}(0) = D \\
\&c. & & \&c.
\end{array}$$

Obtiene Fourier la solución en la forma

$$\frac{1}{2}\,a = A - B\left(\frac{\pi^3}{2.3} - \frac{1}{1^2}\right) + C\left(\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{1^2}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{1^4}\right)$$

$$-D\left(\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7} - \frac{1}{1^2}\cdot\frac{\pi^4}{2.3.4.5} + \frac{1}{1^4}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{1^6}\right)$$

$$+E\left(\frac{\pi^8}{2.3.4.5.6.7.8.9} - \frac{1}{1^2}\cdot\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7} + \frac{1}{1^4}\cdot\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{1^6}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{1^8}\right) \&c.$$

$$-\frac{1}{2}\,2b = A - B\left(\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{2^2}\right) + C\left(\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{2^4}\right)$$

$$-D\left(\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7} - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{\pi^4}{2.3.4.5} + \frac{1}{2^4}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{2^6}\right)$$

$$+E\left(\frac{\pi^8}{2.3.4.5.6.7.8.9} - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7} + \frac{1}{2^4}\cdot\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{2^6}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{2^8}\right) \&c.$$

$$\frac{1}{2}\,3c = A - B\left(\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{3^2}\right) + C\left(\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{3^2}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{3^4}\right)$$

$$-D\left(\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7} - \frac{1}{3^2}\cdot\frac{\pi^4}{2.3.4.5} + \frac{1}{3^4}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{3^6}\right) + \ldots \&c.$$

$$-\frac{1}{2}\,4d = A - B\left(\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{4^2}\right) + C\left(\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{4^2}\cdot\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{4^4}\right) + \ldots \&c.$$

$$\frac{1}{2}\,5e = A - B\left(\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{5^2}\right) + \ldots \&c.$$

$$-\frac{1}{2}\,6f = A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \&c.$$

Si llamamos S/n al coeficiente de sen nx, si n es impar o de -sen nx si n es par, Fourier muestra que

$$S = \varphi(\pi) - \frac{1}{n^2}\varphi''(\pi) + \frac{1}{n^4}\varphi^{iv}(\pi) - \frac{1}{n^6}\varphi^{vi}(\pi) + \ldots$$

Considerada S como función de π, se ve que satisface la ecuación

$$S + \frac{1}{n^2}\frac{d^2S}{d^2} = \phi\ (\pi) \qquad (\pi \text{ es aquí la variable})$$

cuya solución general es

$$S = a\cos nx + b\,\mathrm{sen}\,nx + \mathrm{sen}\,nx\int \cos nt\,\phi(t)dt - n\cos nx\int \mathrm{sen}\,nt\,\phi(t)dt$$

Haciendo $x = \pi$ y teniendo en cuenta que n es entero ésta expresión se reduce a

$$S = C \pm n\int \phi\ (t)\,\mathrm{sen}\,ntdt$$

o simplemente

$$S = \pm n\int \phi(t)\ \mathrm{sen}\,ntdt,$$

puesto que la integral indefinida puede absorber la constante. ¡Así llega Fourier a la forma integral de los coeficientes!

Una vez descubierta la forma integral, hace notar Fourier que los coeficientes asi determinados pueden ser calculados aún cuando ϕ no posea un desarrollo en serie de potencias. Para justificar su afirmación, recurre a la interpretación geométrica de la integral: es el área bajo la gráfica de $\phi(x)\,\mathrm{sen}\,nx$, que se obtiene multiplicando las ordenadas de la senoide por los coeficientes $\phi(x)$, lo que siempre puede hacerse, bien "sea que se le pueda asignar [a $\phi(x)$] una ecuación analítica, o que no dependa de ninguna ley regular" puesto que "es evidente que servirá siempre para reducir la curva de los senos de una manera cualquiera, de modo que el área de la curva reducida tiene en todos los casos un valor definido que proporciona el del coeficiente de sen nx en el desarrollo de la función" ([14], p. 215). Es claro que en ningún caso está pensando Fourier en funciones más generales que las que hoy llamamos continuas por tramos; más aún, su idea de función continua era necesariamente más restringida que la actual; más de medio siglo después, la famosa función continua en todos los puntos pero diferenicable en ninguno de Weierstrass causó sorpresa ([7], p. 72).

Finalmente, Fourier redescubrió de manera independiente el truco de Euler que es ahora estándar: multiplicar por sen nx e integrar término a término. Esta manera de obtener los coeficientes deja claro, si no lo era ya, que no es necesario hacer hipótesis especiales sobre ϕ . Además funciona para la serie trigonométrica general. Inmediatamente se aplica Fourier a dar una lista de ejemplos que sepulten definitivamente el antiguo concepto de función. Estos son algunos de ellos:

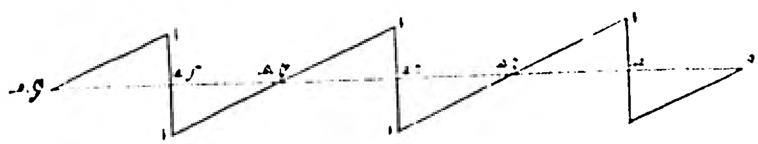
a) Desarrollo de una función par (el coseno, nada menos) en serie de senos exclusivamente:

$$\cos x = \frac{2}{1\cdot 3}\operatorname{sen} 2x + \frac{4}{3\cdot 5}\operatorname{sen} 4x + \frac{6}{5\cdot 7}\operatorname{sen} 6x + \dots$$

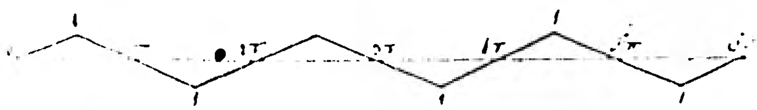
La figura aclara la naturaleza de esta expresión (la curva de trazo continuo representa la serie, la punteada al coseno).

b) Tres distintos desarrollos para $\frac{1}{2}x$, a saber

(i) $\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + \ldots$ representado por la figura



(ii) $\frac{2\operatorname{sen} x}{\pi} - \frac{2\operatorname{sen} 3x}{3^2\pi} + \frac{2\operatorname{sen} 5x}{5^2\pi} - \frac{2\operatorname{sen} 7x}{7^2\pi} + \ldots$ representado por



(iii) $\frac{1}{4}\pi - \frac{2}{\pi}\cos x - \frac{2}{3^2\pi}\cos 3x - \frac{2}{5^2\pi}\cos 5x - \ldots$ al que corresponde la figura

c) Desarrollo de la función dada en $[0,\pi]$ por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} nx, & 0 \leq x \leq \pi/n \\ 0, & \pi/n \leq x \leq \pi \end{cases}$$

El desarrolo en cuestión es:

$$\frac{1}{2}\pi f(x) = \frac{n}{n^2-1} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \operatorname{sen} x + \frac{n}{n^2-n^2} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} \operatorname{sen} 2x + \frac{n}{n^2-3^2} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{n} \operatorname{sen} 3x + \ldots$$

Este ejemplo contradice directamente al que Euler presentó como irrebatible mentís a Bernoulli. Es inútil multiplicar los ejemplos. Para terminar este capítulo, he aquí las reflexiones de Fourier sobre la cuerda, que son todo un manifiesto del nuevo Análisis:

"La exposición detallada de los resultados de nuestro análisis no puede dejar ninguna duda sobre el sentido correcto en que se deben tomar; los desarrollos de senos y cosenos múltiples poseen evidentemente toda la generalidad que comportan las funciones arbitrarias. Se puede representar mediante una serie de senos de arcos múltiples una función que no contenga más que potencias pares de la variable, por ejemplo la función cosx . Se puede resolver en una serie de cosenos de arcos múltiples una función cualquiera, por ejemplo una que no contenga sino potencias impares de la variable. Se encuentran fácilmente, haciendo uso de los mismos desarrollos, las ecuaciones de las líneas discontinuas compuestas de rectas que forman ángulos entre sí, o formadas de arcos de parábola y líneas rectas, o las ecuaciones de líneas que, tras de alejarse del eje durante parte de su curso se confunden con él súbitamente en un intervalo determinado. Se puede, en fin, obtener por el mismo medio las ecuaciones de superficies discontinuas como los poliedros. No solamente se reconoce la posibilidad de los desarrollos en cuestión, sino que pueden determinarse efectivamente todas sus partes. El valor de un coeficiente cualquiera en la ecuación.

$$\phi(x) = a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + a_3 \operatorname{sen} 3x + \ldots + a_i \operatorname{sen} ix + \ldots$$

es el de una integral definida $\int \phi(x) \operatorname{sen} ixdx$, tomada desde $x = a$ hasta $x = \pi$. Cualquiera que pueda ser la función $\phi(x)$, la integral tiene un valor determinado que puede introducirse en el cálculo. Los valores de estas integrales son análogos al del área total $\int \phi(x)dx$ comprendida entre la curva y el eje en un intervalo dado, o a los de cantidades mecánicas, tales como las coordenadas del centro de gravedad de esta área. Es evidente que dichas cantidades poseen valores asignables, tanto si la forma de los cuerpos es regular, como si se les da una forma discontinua y completamente arbitraria.

Si se aplican los principios que se acaban de establecer a la cuestión del movimiento de las cuerdas vibrantes, se resolverán todas las dificultades presentadas por el análisis de Daniel Bernoulli. En efecto, la solución propuesta por este gran geómetra no parece la aplicable al caso en que la figura inicial de la cuerda es la de un triángulo o un trapecio, o es tal que solamente una parte de la cuerda está desplazada, mientras que las otras partes se confunden con el eje. Los inventores del análisis de las ecuaciones en derivadas parciales consideraban incluso imposible tal aplicación. D'Alembert pensaba que la ecuación

$$y = \alpha \operatorname{sen} x + \beta \operatorname{sen} 2x + \gamma \operatorname{sen} 3x + \delta \operatorname{sen} 4x + \text{etc.}$$

pertenece evidentemente a una curva cuya curvatura es continua y no como en el caso del triángulo isósceles que la curvatura varía bruscamente en el punto medio donde las dos partes forman un ángulo' (V. Opuscules mathematiques, Tomo 1). 'Sostengo', dice Euler, que esta solución, no importa cuán general pueda parecer, no es sino muy particular, y no agota la extensión de nuestro problema. Para asegurarnos por completo de esta insuficiencia, basta considerar el caso en que no se ha desplazado al comienzo más que una parte de la cuerda, permaneciendo el resto en un reposo perfecto. Si esta parte es = b, haría falta determinar la expresión encontrada para y de manera que tomando $x > b$ se anule y ello para todos los valores posibles entre b y la longitud de la cuerda, lo que es manifiestamente imposible. Así, el movimiento que la cuerda recibirá en este caso no puede ser jamás representado por la expresión dada por y' (V. Nou. Mem. Fur. Tomo III)[38].

Estas objeciones muestran vívidamente la necesidad que existía de demostrar que una función cualquiera puede siempre ser desarrollada en serie de senos o cosenos de arcos múltiples y de todas las pruebas de ésta proposición, la más completa es la que consiste en desarrollar efectivamente una función arbitraria en una serie tal, asignando los valores de los coeficientes. Los problemas que preceden satisfacen esta condición y me he convencido, en efecto, de que el movimiento de la cuerda sonora se representa en todos los casos posibles tan exactamente empleando los desarrollos trigonométricos como por la integral que contiene funciones arbitrarias. De ello es claro que el primero de los geómetras que hemos citado, había llegado mediante un análisis particular a una solución que no difiere por su

38] Nuestra [3], p. 385.

por su generalidad de la proporcionada por la ecuación en diferencias parciales. La imperfección de esa solución consiste, me parece, en que el autor no determinó los coeficientes por comparación con el estado inicial y se limitó a asegurar que podían serlo.

Pero los geómetras no admiten más que aquello que no pueden poner en duda. En las investigaciones que dependen de las ecuaciones en diferencias parciales, es con frecuencia fácil encontrar soluciones particulares cuya suma puede constituir una integral general; el uso de estas soluciones exige que se determinen todas las constantes que encierran. Me parece que la dificultad principal reside en esta determinación, porque supone el desarrollo de una función arbitraria. Es muy notable el hecho de que se pueda expresar el valor de los coeficientes aunque la función propuesta no esté sujeta a una ley fija y que se obtenga la ecuación analítica de una línea compuesta de arcos de naturaleza diferente. Ello conduce a admitir en el Cálculo funciones que toman valores iguales siempre que la variable recibe un valor cualquiera comprendido entre dos límites dados; mientras que si se substituye en ambas funciones, en lugar de la variable, un número comprendido en otro intervalo, los resultados de las dos substituciones son diferentes el uno del otro. Las funciones que gozan de esta propiedad son representados por líneas diferentes que coinciden únicamente en una parte de su curso y presentan una especie singular de oscilación finita, que no había sido propuesta hasta ahora. Estas consideraciones tienen su origen en el cálculo de las ecuaciones en diferencias parciales, al que pertenecen; ellas arrojan una nueva luz sobre el cálculo y servirán para extender su uso en las teorías físicas en general".

X. EPILOGO.

Como dije en el capítulo VI, la incierta tentativa de Euler de ampliar el universo de los objetos-función dejó a éste sin fronteras definidas. La razón que propuse es la falta de una representación basada en una sintaxis bien definida. La representación puramente pictórica no es lo bastante estructurada como para satisfacer tal criterio. Fourier proporcionó la representación requerida y resolvió la crisis planteada por la apertura del universo efectuada por Euler, cerrándolo. Ciertamente el nuevo universo está más densamente poblado que el anterior, el universo de D'Alembert, y de Euler en sus inicios. Se restablece el equilibrio entre la Física y las Matemáticas, a la vez que se efectúa una más clara delimitación entre ellas, incrementando tanto su autonomía relativa como su mutua interdependencia.

La cerradura llevada a cabo por Fourier, cuya conciencia manifiesta éste por sus repetidas referencias a funciones "cualesquiera" o "arbitrarias", lleva en sí el germen de su propia reapertura. Señalé el hecho de que el estudio de la convergencia es consustancial al concepto de función en que descansa el trabajo de Fourier. Tan es así que Fourier no se limita a considerar algunos casos particulares, sino que ataca el problema de la convergencia en el caso general. Pero, ¿cómo puede procederse para demostrar un teorema válido para todas las funciones, sin excepción, un teorema <u>sin hipótesis</u>? Cuando Dirichlet (Peter Gustav Lejeune, 1805-1859) dió en 1829 la que se considera ser la primera demostración rigurosa de la convergencia de las series trigonométricas, dió condiciones suficientes para que la serie de Fourier de una función converja a ésta. Lo notable es que las condiciones de Dirichlet no excluyen a ninguna de las funciones de Fourier. Al caracterizarlas como aquéllas que satisfacen a sus condiciones, contempló necesariamente los límites del universo desde el otro lado, violentando de nueva cuenta sus fronteras. Vale la pena señalar que la técnica de la prueba de Dirichlet es una reformulación de los argumentos de Fourier hacia el final de su Théorie (arts 415-17 y 423) ([18], p. 119).

La reapertura del universo de los objetos-función efectuada por Dirichlet vuelve a poner sobre el tapete el problema de la representación, pero por otra parte empieza a configurar una alternativa: la del tratamiento quasi-axiomático de clases de funciones, cuyas propiedades deben extraerse, más que de una representación definida, de la definición de la clase (la definición de continuidad, por ejemplo). Se abre así a la vez la vía hacia el Análisis moderno y hacia la fundamentación del clásico, vuelta cada vez más necesaria por la progresiva independización de éste respecto a la Física y la Geometría.

BIBLIOGRAFIA

Todas las referencias que aparecen en el texto son a esta bibliografía.

1. Lagrange, Joseph Louis. Recherches sur la nature et la propagation du son. En el Tomo 1 de: Oeuvres de Lagrange, 14 vols., ed. J.A. Serret, G. Darboux y otros. Paris, 1867-92. Reimpresión en Hildesheim, 1968.
2. Struik, Dirk J. A source book in Mathematics, 1200-1800. Harvard University Press. Cambridge, Mass. 1969.
3. Euler, Leonhard. Leonhardi Euleri Opera Omnia, serie 2, vol. 10. Ed. Societas Scientiarum Naturalium Helveticae, 1911-. Leipzig, Berlin y Zurich. Las memorias citadas son (las páginas se refieren al citado volumen de sus obras):

   -Sur la vibration des cordes (1748)1750, p. 63-77

   -Remarques sur les memoires precedens de M. Bernoulli, (1753)1755, p. 233-254

   -Eclaircissements sur le mouvement des cordes vibrantes (1762/5) 1766, p. 377-396

   -Sur le mouvement d'une corde qui au commencement n'a été ebranlée que dans une partie (1765)1767
4. Euler, Leonhard. Introduction a l'Analyse infinitesimale; trad. J.A. Labey. Paris, 1835. (a) vol. I, (b) vol. II.
5. Barbeau, E.J. y Leah, P.J. Euler's 1760 paper on divergent series. Historia Mathematica 3 (1976) p. 141-160.

6. Newton, Isaac. A treatise of the methods of series and fluxions; trad. Derek T. Whiteside, en: D.T. Whiteside, The mathematical papers of Isaac Newton, vol. III. Cambridge University Press, Cambridge, 1969.

7. Manheim, Jerome. The genesis of point set topology. Pergamon Press, Oxford, 1964.

8. Archimedes. On the sphere and cilinder; trad. T.L. Heath. Dover Publications, New York. También en Great Books of the Western World, No. 11, publicados por Encyclopaedia Britannica. Chicago 1952 (22a. reimpresion, 1978).

9. Houzel, C.; Ovaert, J.L.; Raymond, P.; Sansuc, J.J. Philosophie et calcul de l'infini. François Maspero, Paris 1976.

10. Lagrange, J.L. Théorie des fonctions analytiques. Paris 1813.

11. Campbell, Norman. What is science? Dover Publications, New York

12. Descartes, René. La géometrie. Original francés y traducción al inglés por D.E. Smith y M.L. Latham. Dover Publications. La traducción aparece también en Great Books (ver 8), no. 31.

13. Cartan, Henri. Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes. Hermann, Paris 1961.

14. Grattan-Guiness, Ivor. Joseph Fourier, 1768-1830. M.I.T. Press, Cambridge, Mass. 1972.

15. Bos. H.M.J. Differentials, higher order differentials and the derivative in the leibnizian calculus. Archive for the History of Exact Sciences, vol. 14, 1974/75.

16. Fourier, Jean Baptiste Joseph. Théorie analytique de la chaleur: en

Oeuvres de Fourier, vol. 1; ed. Gastón Darboux. Paris 1888-1890 (2 vols.) Reimpresión de la Asociación Mexicana "Clásicos de la Ciencia", México, 1963. 16a.: Great Books, no. 45.

17. Carslaw, H.S. An introduction to the theory of Fourier's series and integrals, 3a. edición. Dover Publications.

18. Dirichlet, Peter Gustav Lejeune. Sur la convergence des series trigonométriques qui servent a représenter une fonction arbitraire entre des limites données. En: G. Lejeune Dirichlet's Werke, ed. L. Kroneker, Berlin 1889-1897. (2 vols.) Reimpresión 1 vol. Chelsea Publishing Company, New York, 1969.