2

Erijsen.

# Universidad Nacional Autónoma de México

## FACULTAD DE CIENCIAS

# "LA INTEGRAL DE RIEMANN-STIELTJES"

T E S I S

Que para obtener el titulo de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a :

JAVIER ALAGON CANO

México, D. F.     Enero 1981

# TESIS CON FALLA DE ORIGEN

# P R O L O G O

La idea de esta tesis surgió en los cursos de Análisis Matemático I y II impartidos por el Dr. José Luis Abreu a partir del verano de 1978 en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México. En un curso de tal naturaleza suele cubrirse el material del libro "Principios de Análisis Matemático" de Walter Rudin. Cuando nos correspondía estudiar el sexto capítulo, "La integral de Riemann-Stieltjes" el Dr. Abreu notó que el material en el libro de Rudin no era de su agrado. La principal objeción era que Rudin trataba el proceso de integración de Riemann-Stieltjes como lo hizo Darboux, con sumas superiores e inferiores y limitado a integradores monótonos y no como originalmente lo hizo Stieltjes. Dicha presentación "esconde" ciertas dificultades y sutilezas de la teoría de integración que son necesarias afrontar para comprenderla a fondo. De acuerdo a esto, escribió unas notas para presentar tales dificultades y sutilezas y exponer las diversas presentaciones que se encuentran en la literatura de la integral de Riemann-Stieltjes y sus relaciones entre sí. Esas notas constituyeron el esqueleto de esta tesis. Sin embargo, el objetivo principal de la tesis no fue rearreglar y completar dichas notas; en realidad, la motivación principal se originó en una clase en la que se deseaba probar que la composición de una función integrable seguida de una continua es nuevamente una función integrable. Nos parecía que este resultado debía ser válido para integradores de variación acotada, pero en clase sólo pudimos probarlo para integradores monótonos. El esfuerzo para obtener este resultado para el caso de integradores de variación acotada fue lo que llevó a la realización de esta tesis.

La resolución del problema anterior tuvo como guía principal un libro muy completo de T.H. Hildebrandt, titulado "Introduction to the Theory of integration", fruto de veinticinco años de experiencia de dicho autor impartiendo cursos sobre integración en la Universidad de Michigan. Desafortunadamente el libro de Hildebrandt es difícil de leer pues utiliza una notación poco conocida y las demostraciones frecuentemente son obscuras. El mismo problema se resuelve en el libro de Apostol, "Análisis Matemático", pero sólo para uno de los tres sentidos de integración presentados aquí, específicamente para el que usa refinamientos de particiones. Como veremos estos sentidos de integración no son equivalentes en general.

La tesis consta de cinco capítulos. En el primero se da la herramienta necesaria para hacer posible el estudio sistemático de la integral de Riemann-Stieltjes y se presentan los primeros dos sentidos de integración Riemann-Stieltjes: el que usa norma de particiones y el que usa refinamientos de particiones.

En el segundo capítulo se estudian las condiciones más comunes bajo las cuales existe la integral de Riemann-Stieltjes, además de algunos resultados que muestran cómo afectan las discontinuidades del integrando y del integrador a la integral de Riemann-Stieltjes y viceversa.

El tercer capítulo trata de las relaciones entre los dos sentidos de integración presentados: las condiciones necesarias y suficientes para que un sentido de integración implique el otro. Se introduce un nuevo sentido de integración, el referente a sumas superiores e inferiores, y se estudian sus relaciones con los dos sentidos de integración antes presentados. Se concluye el capítulo resumiendo en un esquema gráfico estas relaciones.

En el cuarto capítulo se estudian diferentes resultados con la integral de Riemann-Stieltjes dentro del análisis matemático clásico: propiedades, la conexión con la integral de Riemann, la fórmula del cambio de variable. Se concluye el capítulo presentando el problema que motivó el trabajo en esta tesis, al cual ya nos hemos referido.

El quinto capítulo se dedica principalmente a la resolución de tal problema y constituye la parte fundamental de este trabajo. Se concluye el capítulo estudiando las clases de funciones determinadas por integrales de Riemann-Stieltjes.

El material de este trabajo puede utilizarse para un primer curso sobre la integral de Riemann-Stieltjes a nivel de Análisis Matemático II de la Facultad de Ciencias de la UNAM. Para tal fin recomendaríamos omitir la sección II-2 y todo el Capítulo V.

Deseo expresar el más sincero agradecimiento para el Dr. José Luis Abreu, bajo cuya amigable dirección trabajé en esta tesis. Asimismo para los doctores José Angel Canavati Ayub y Alberto Alonso y Coria, quienes amablemente tomaron a su cargo la revisión de esta tesis, y a la Dra. Helga Fetter, que me aclaró algunas dudas. Finalmente, al Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas de la UNAM, por el apoyo brindado durante la realización de este trabajo.

J.A.C.

I N D I C E

# CAPITULO I

# PRELIMINARES

El objetivo de este capítulo es definir la integral de Riemann-Stieltjes. Para ello será necesario utilizar el concepto de convergencia de redes en espacios métricos.

## § 1. CONVERGENCIA DE REDES.

1.1. Definición. Un *conjunto dirigido* es un conjunto D con una relación binaria $\leq$ que tiene las siguientes propiedades:

(a) Si $a \in D$, entonces $a \leq a$.

(b) Si $a,b,c \in D$ son tales que $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

(c) Si $a,b \in D$, entonces existe $c \in D$, tal que $a \leq c$ y $b \leq c$.

1.2. Definición. Sea $\mathcal{E}$ un espacio métrico, con métrica $\rho$. Una *red* en $\mathcal{E}$ es una función de un conjunto dirigido D en $\mathcal{E}$ y el valor de la función en cada $\gamma \in D$, se denota con $x_\gamma$. Decimos que la red $\{x_\gamma\}_{\gamma \in D}$ *converge* a un punto $x \in \mathcal{E}$, y lo escribimos $x_\gamma \to x$ ó $x = \lim_{\gamma \in D} x_\gamma$, si dado $\epsilon > 0$, existe $\gamma_0 \in D$, tal que para todo $\gamma \in D$ con $\gamma \geq \gamma_0$, se tiene que $\rho(x_\gamma, x) < \epsilon$. Análogamente, decimos que la red $\{x_\gamma\}_{\gamma \in D}$ es *de Cauchy*, si dado $\epsilon > 0$, existe $\gamma_0 \in D$, tal que para todos $\gamma, \gamma' \in D$ con $\gamma \geq \gamma_0$ y $\gamma' \geq \gamma_0$, se tiene que $\rho(x_\gamma, x_{\gamma'}) < \epsilon$.

1.3. Notación. Denotaremos a la bola con centro en x y radio r, por medio de $B(x,r)$, y a su cerradura por $\overline{B(x,r)}$.

Recordemos que un espacio métrico *completo* es aquél en donde toda sucesión de Cauchy converge. La siguiente proposición nos dice que en dichos espacios una *red de Cauchy* converge.

1.4. Proposición. Si $\mathcal{E}$ es un espacio métrico completo y si $\{x_\gamma\}_{\gamma \in D}$ es una red de Cauchy en $\mathcal{E}$, entonces existe $x \in \mathcal{E}$ tal que $x_\gamma \to x$.

Demostración. Por ser $\{x_\gamma\}_{\gamma \in D}$ una red de Cauchy, existe $\gamma_1 \in D$, tal que para todo $\gamma \geq \gamma_1$, $\rho(x_\gamma, x_{\gamma_1}) < 1$. Sea $A_1 = \overline{B(x_{\gamma_1}, 1)}$. Ahora, existe $\gamma_2 \in D$ con $\gamma_2 \geq \gamma_1$, tal que para todo $\gamma \in D$ con $\gamma \geq \gamma_2$ se tiene que $\rho(x_\gamma, x_{\gamma_2}) < 1/2$. Sea $A_2 = \overline{B(x_{\gamma_2}, 1/2)} \cap A_1$. De esta manera podemos definir inductivamente $\gamma_n$, tal que para todo $\gamma \in D$ con $\gamma \geq \gamma_n$, se tenga que $\rho(x_\gamma, x_{\gamma_n}) < 1/n$. Definimos también $A_n = \overline{B(x_{\gamma_n}, 1/n)} \cap A_{n-1}$. Así, hemos construido una cadena decreciente de conjuntos cerrados no vacíos $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$, y por lo tanto, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ no es vacío y consiste de un solo punto (En esto último, hemos hecho uso del teorema de Cantor para espacios métricos completos (Ver [4], pag. 67, teorema 6.52).). Llamemos x a ese punto. Entonces, para todo $n \in N$, si $\gamma \in D$ es tal que $\gamma \geq \gamma_n$, tenemos

$$\rho(x, x_\gamma) \leq \rho(x, x_{\gamma_n}) + \rho(x_{\gamma_n}, x_\gamma) \leq 2/n ,$$

puesto que $x_\gamma$ y x pertenecen a $A_n$. Por lo tanto $x_\gamma \to x$. □

§ 2. PARTICIONES Y SUMAS DE RIEMANN-STIELTJES.

2.1. Defin ción. Una *partición* P del intervalo $[a,b]$ es un conjunto finito $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, tal que $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Dada la partición P decimos que el conjunto de números reales $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ es una *elección compatible* con P, y escribimos $\xi \sim P$, si $x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq \ldots \leq \xi_n \leq x_n$. Al conjunto de las particiones del intervalo $[a,b]$, lo denotaremos por $P([a,b])$.

2.2. Definición. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a,b]$. La *norma* de la partición P, denotada por $\|P\|$ está dada por

$$\|P\| = \max \{|x_i - x_{i-1}|, \; i=1,\ldots,n.\}$$

2.3. Definición. Sea D el conjunto de todas las parejas $(P,\xi)$, donde $P \in P([a,b])$ y $\xi \sim P$. Escribimos $(P,\xi) \leq (P',\xi')$ si $\|P'\| \leq \|P\|$. Es fácil verificar que D con la relación binaria $\leq$ es un conjunto dirigido.

2.4. Definición. Si $f$ y $g$ son funciones reales definidas en $[a,b]$, para cada $(P,\xi) \in D$, definimos

$$\Sigma(P,\xi,f,g) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})]$$

donde $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$. A $\Sigma(P,\xi,f,g)$ se le llama una *suma de Riemann-Stieltjes*.

Notemos que en la definición anterior, $f$ y $g$ son funciones reales, sin embargo hacemos la misma definición si $f$ es real y $g$ toma valores en $R^d$. Más aún, la misma definición es válida si $f$ y $g$ son complejas o si $f$ es compleja y $g$ toma valores en $C^d$ o si $f$ toma valores en $C^d$ y $g$ es compleja. Para evitar complicaciones innecesarias, supondremos que $f$ y $g$ son reales, pero deberá notarse que todo lo que vamos a probar es válido en todos los casos mencionados, excepto aquellos resultados en los que explícitamente se mencione que $f$ o $g$ es monótona; ese tipo de resultados son tales que las demostraciones que damos de ellos son válidas sólo para $f$ y $g$ reales. Por último, notemos que la función

$$(P,\xi) \to \Sigma(P,\xi,f,g)$$

de D en R, es una red.

## § 3. DEFINICIONES DE LA INTEGRAL DE RIEMANN-STIELTJES.

3.1. Definición. Decimos que $f$ es *Riemann-Stieltjes integrable con respecto a $g$ en el sentido de la norma* y escribimos $f \in \mathcal{R}(g)$, si la red

$$\{\Sigma(P,\xi,f,g)\}_{(P,\xi) \in D}$$

es convergente. Al valor límite de $\Sigma(P,\xi,f,g)$ en caso de existir, lo llamamos la *integral de $f$ con respecto a $g$ en el sentido de la norma*, o simplemente la *norma-integral de $f$ con respecto a $g$*, y lo denotamos por

$$\int_a^b f\,dg \qquad ó \qquad \int_a^b f(x)\,dg(x).$$

Notemos pues, que para probar que $f \in \mathcal{R}(g)$, tenemos que demostrar que dado $\epsilon > 0$, existe $(P_0, \xi_0) \in D$. tal que si $(P, \xi) \geq (P_0, \xi_0)$, entonces

$$\left| \Sigma(P, \xi, f, g) - \int_a^b f\,dg \right| < \epsilon,$$

es decir, dada la definición de la relación binaria $\leq$ en el conjunto D, tenemos que probar que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, $(\delta = \|P_0\|)$,tal que si $\|P\| < \delta$, $\xi \sim P$, entonces

$$\left| \Sigma(P, \xi, f, g) - \int_a^b f\,dg \right| < \epsilon.$$

Debido a esto, escribiremos

$$\int_a^b f\,dg = \lim_{\|P\| \to 0} \Sigma(P, \xi, f, g)$$

siempre que $f \in \mathcal{R}(g)$.

Con esto ya tenemos definido un tipo de integral de Riemann-Stieltjes, sin embargo, antes de empezar con el estudio sistemático de esta integral, veremos otro tipo de integral de Riemann-Stieltjes, el que se refiere a "refinamientos de particiones". Posteriormente veremos, como ya hemos apuntado en la introducción, que en general no son equivalentes estos dos tipos de integrales.

3.2. <u>Definición</u>.Sean P y P' dos particiones del intervalo $[a,b]$. Decimos que P' es un *refinamiento* de P si todos los elementos de P son también elementos de P', y en este caso escribimos $P' \succ P$. Sea $P_0$ la partición formada con los elementos de P y los de P', entonces llamamos a $P_0$, el *refinamiento común* de P y P', y lo denotamos por $P_0 = P \vee P'$. Si $P_1, \ldots, P_n$

son particiones de $[a,b]$ entonces $\bigvee_{i=1}^{n} P_i$ denota el refinamiento común de $P_1,\ldots,P_n$, que puede definirse como

$$(\ldots((P_1 \vee P_2)\vee P_3)\vee \ldots)\vee P_n.$$

3.3. <u>Definición</u>. En el conjunto D de parejas $(P,\xi)$ donde $P \in p([a,b])$ y $\xi \sim P$, definimos una nueva relación binaria $\leq_1$ por medio de $(P,\xi) \leq_1 (P',\xi')$ si $P' > P$. Al conjunto D, equipado con esta relación $\leq_1$, lo denotamos por $D_1$. Es fácil ver que $D_1$ es un conjunto dirigido.

3.4. <u>Nota</u>. Si $(P,\xi) \leq_1 (P',\xi')$ entonces también se tiene que $(P,\xi) \leq (P',\xi')$; pero no es cierto que siempre que $(P,\xi) < (P',\xi')$ también se tenga $(P,\xi) \leq_1 (P',\xi')$, como puede verse con un ejemplo sencillo.


3.5. <u>Definición</u>. Si $f$ y $g$ son funciones reales en $[a,b]$ tales que

$$\lim_{(P,\xi)\in D_1} \Sigma(P,\xi,f,g)$$

existe, entonces decimos que $f$ *es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a* $g$ *en el sentido de los refinamientos*, y escribimos $f \in \mathcal{R}_1(g)$. A este límite, en caso de existir, le llamaremos la sigma-integral de la función $f$ con respecto a la función $g$. ($\sigma$-integral, la sigma es por tradición histórica, pues en los primeros artículos escritos sobre la integral de Riemann-Stieltjes se acostumbraba denotar con una $\sigma$ a una partición).

y lo denotaremos por

$$\sigma\int_a^b f\,dg \quad ó \quad \sigma\int_a^b f(x)dg(x).$$

Notemos que para probar que $f \in \mathcal{R}_1(g)$, tenemos que demostrar que dado $\epsilon > 0$, existe una partición $P_0$, tal que si $P \succ P_0$ y $\xi \sim P$, entonces

$$\left| \Sigma(P,\xi,f,g) - \sigma\int_a^b f\,dg \right| < \epsilon,$$

y en caso de que esto suceda lo escribiremos así

$$\sigma\int_a^b f\,dg = \lim_{P\uparrow} \Sigma(P,\xi,f,g)$$

significando que el límite de la derecha se toma en $D_1$, es decir, en el sentido de los refinamientos.

Ahora bien, debido a la completitud de R, la proposición I-1.4 nos dice que para demostrar que $f \in \mathcal{R}(g)$ o que $f \in \mathcal{R}_1(g)$, basta probar que la red

$$\{\Sigma(P,\xi,f,g)\}_{(P,\xi)\in D} \quad ó \quad \{\Sigma(P,\xi,f,g)\}_{(P,\xi)\in D_1}$$

respectivamente, es de Cauchy. Así pues, para la norma-integral, la condición de Cauchy de convergencia de una red es que dado $\epsilon > 0$, exista $\delta > 0$, tal que para todas $P$ y $P'$ particiones de $[a,b]$, con $\|P\| < \delta$ y $\|P'\| < \delta$ y $\xi \sim P$, $\xi' \sim P'$, entonces

$$\left| \Sigma(P,\xi,f,g) - \Sigma(P',\xi',f,g) \right| < \epsilon.$$

Para la sigma-integral, la condición de Cauchy es que dado $\epsilon > 0$ exista $P_0 \in P([a,b])$, tal que si $P \succ P_0$ y $P' \succ P_0$ y $\xi \sim P$, $\xi' \sim P'$, entonces

$$\left| \Sigma(P,\xi,f,g) - \Sigma(P',\xi',f,g) \right| < \epsilon$$

Antes de concluir este capítulo, enunciaremos un lema que será de gran utilidad para probar la existencia de algunas integrales de Riemann-Stieltjes. Este lema nos dice que en la condición de Cauchy de convergencia de una red, basta tomar a $P'$ como refinamiento de $P$.

3.6. Lema. Sean $f$ y $g$ funciones reales definidas en $[a,b]$. Entonces tenemos:

(a) Una condición necesaria y suficiente para que $f \in \mathcal{R}(g)$ es que para todo $\epsilon > 0$, exista $\delta > 0$, tal que si $\|P\| < \delta$, $P' \succ P$, $\xi \sim P$ y $\xi' \sim P'$, entonces

$$| \Sigma(P,\xi,f,g) - \Sigma(P',\xi',f,g) | < \epsilon$$

(b) Una condición necesaria y suficiente para que $f \in \mathcal{R}_1(g)$ es que para todo $\epsilon > 0$, exista $P_0 \in \mathcal{P}([a,b])$, tal que si $P \succ P_0$, $P' \succ P$, $\xi \sim P$ y $\xi' \sim P'$, entonces

$$| \Sigma(P,\xi,f,g) - \Sigma(P',\xi',f,g) | < \epsilon$$

Demostración. (a) Como $P' \succ P$ implica que $\|P'\| < \|P\|$, es claro que si $f \in \mathcal{R}(g)$, entonces se tiene la condición dada. Recíprocamente, supongamos que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $\|P\| < \delta$ $P' \succ P$, $\xi \sim P$ y $\xi' \sim P'$, entonces

$$| \Sigma(P,\xi,f,g) - \Sigma(P',\xi',f,g) | < \epsilon/2.$$

Sean $P$ y $P''$ dos particiones con norma menor que $\delta$, y sea $P' = P \vee P''$. Entonces

$$|\ \Sigma(P,\xi,f,g) - \Sigma(P'',\xi'',f,g)\ | \leq$$

$$|\Sigma(P,\xi,f,g) - \Sigma(P',\xi',f,g)\ | + |\Sigma(P',\xi',f,g) - \Sigma(P'',\xi'',f,g)\ | <$$

$< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$.

Por lo tanto, $f \in \mathcal{R}(g)$.

(b) La demostración es análoga. □

3.7. Nota. Frecuentemente, en la expresión

$$\int_a^b f\,dg \quad \text{ó} \quad \sigma\int_a^b f\,dg$$

suele llamársele a $f$ *integrando* y a $g$ *integrador*.

# CAPITULO II

# EXISTENCIA DE INTEGRALES DE RIEMANN-STIELTJES

En este capítulo estudiaremos condiciones necesarias y suficientes para que exista la integral de Riemann-Stieltjes.

## § 1. TEOREMAS DE EXISTENCIA.

El primer teorema, debido a Stieltjes, nos da ya, un criterio bajo el cual tiene sentido hablar de la integral de Riemann-Stieltjes. Concretamente, el teorema nos dice que si el integrando $f$ es continuo y si el integrador $g$ es de "variación acotada", entonces $f \in \mathcal{R}(g)$.

1.1. Definición. Sea $g$ una función real definida en $[a,b]$. Decimos que $g$ es de *variación acotada en* $[a,b]$ si

$$V_a^b\,(g) = \sup \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| < \infty$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$. La expresión $V_a^b\,(g)$ se llama la *variación de* $g$ *en el intervalo* $[a,b]$.

1.2. Teorema. Si $f$ es continua en $[a,b]$ y $g$ es de variación acotada en $[a,b]$, entonces $f \in \mathcal{R}(g)$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como $f$ es uniformemente continua en $[a,b]$, existe $\delta > 0$, tal que si $s,t \in [a,b]$ y $|s-t| < \delta$, entonces

$$|f(s) - f(t)| < \epsilon / V_a^b\,(g)$$

Sean $P = \{x_0,\dots,x_n\}$ y $P' = \{x'_0,\dots,x'_m\}$ dos particiones de $[a,b]$, tales que $\|P\| < \delta$ y $P' \supset P$. Si $\xi \sim P$ y $\xi' \sim P'$, entonces tenemos

$$\left| \Sigma(P,\xi,f,g) - \Sigma(P',\xi',f,g) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) - \sum_{j=1}^{m} f(\xi'_j)(g(x'_j) - g(x'_{j-1})) \right|$$

Para $j=1,\dots,m$, definimos $\eta_j = \xi_i$ siempre que $[x'_{j-1},x'_j] \subset [x_{i-1},x_i]$

Por lo tanto

$$\left| \Sigma(P,\xi,f,g) - \Sigma(P',\xi',f,g) \right| =$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{m} f(\eta_j)\,(g(x'_j) - g(x'_{j-1})) - \sum_{j=1}^{m} f(\xi'_j)(g(x'_j) - g(x'_{j-1}))\right| =$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{m} (f(\eta_j) - f(\xi'_j))(g(x'_j) - g(x'_{j-1})) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} |f(\eta_j) - f(\xi'_j)|\cdot|g(x'_j) - g(x'_{j-1})| <$$

$$< \frac{\epsilon}{V_a^b(g)} \sum_{j=1}^{m} |g(x'_j) - g(x'_{j-1})| \leq \frac{\epsilon}{V_a^b(g)} V_a^b(g) = \epsilon .$$

Utilizando el Lema I-3.6, concluimos que $f \in \mathcal{R}(g)$. □

El mismo resultado es válido para la $\sigma$-integral. Sin embargo omitimos la demostración pues posteriormente probaremos que si $f \in \mathcal{R}(g)$, entonces $f \in \mathcal{R}_1(g)$, con lo que automáticamente tendremos que si $f$ es continua y $g$ es de variación acotada, entonces $f \in \mathcal{R}_1(g)$.

1.3. <u>Teorema</u>.(Integración por partes). Si $g$ y $f$ están definidas en $[a,b]$, entonces

(a) $f \in \mathcal{R}(g)$ si y solo si $g \in \mathcal{R}(f)$, y en este caso

$$\int_a^b f\,dg = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g\,df$$

(b) $f \in \mathcal{R}_1(g)$ si y solo si $g \in \mathcal{R}_1(f)$, y en este caso

$$\sigma\!\int_a^b f\,dg = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sigma\!\int_a^b g\,df$$

<u>Demostración</u>. (a) Supongamos que $g \in \mathcal{R}(f)$. Sea $P = \{x_0,\dots,x_n\}$ una partición de $[a,b]$ y $\xi = \{\xi_1,\dots,\xi_n\}$ una elección compatible con P. Entonces, si definimos $\xi_0 = a$ y $\xi_{n+1} = b$, podemos escribir

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_{i+1})g(x_i) =$$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sum_{i=0}^{n}[f(\xi_{i+1}) - f(\xi_i)]g(x_i) =$$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sum_{i=1}^{n+1} g(x_{i-1})[f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})].$$

Si ahora definimos $P' = \{\xi_0,\dots,\xi_{n+1}\}$ y $\xi' = \{\xi_1',\dots,\xi_{n+1}'\}$, donde $\xi_i' = x_{i-1}$, para $i = 1,\dots,n+1$, la igualdad anterior puede escribirse así

$$\Sigma(P,\xi,f,g) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \Sigma(P',\xi',g,f) \qquad (*)$$

y como obviamente $\|P'\| \leq 2\|P\|$, tenemos que cuando $\|P\|$ tiende a cero, $\|P'\|$ también tiende a cero, lo cual, pasando al límite, nos dice que $f \in \mathcal{R}(g)$ y que vale la fórmula dada en el inciso (a).

(b) La demostración en este caso no puede seguirse de la fórmula (*) del inciso (a), puesto que al tomar refinamientos de P no necesariamente se obtienen refinamientos de P'. Es por ello que seguiremos otro camino. Supongamos pues, que $f \in \mathcal{R}_1(g)$. Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $P_0 \in P([a,b])$, tal que si $P' \rangle P_0$ y $\xi' \sim P'$, se tiene que

$$| \Sigma(P',\xi',f,g) - \sigma\int_a^b f\,dg | < \epsilon. \qquad (**)$$

Sean $P = \{x_0,\dots,x_n\}$ con $P \rangle P_0$ y $\xi = \{\xi_1,\dots,\xi_n\} \sim P$. Entonces

$$\Sigma(P,\xi,g,f) = \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)[f(x_i) - f(x_{i-1})] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)f(x_{i-1}).$$

Y además

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})g(x_{i-1}).$$

Restando estas dos últimas expresiones obtenemos

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) - \Sigma(P,\xi,g,f) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)[g(x_i) - g(\xi_i)] + \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})[g(\xi_i) - g(x_{i-1})]$$

Si tomamos $P' = \{x_0,\xi_1,x_1,\xi_2,x_2,\dots,\xi_n, x_n\}$ y $\xi' = \{x_0,x_1, x_1, x_2, x_2,\dots,x_{n-1}, x_{n-1},x_n\}$, entonces

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) - \Sigma(P,\xi,g,f) = \Sigma(P',\xi',f,g)$$

y además tenemos que $P' \rangle P \rangle P_0$. Por lo tanto la igualdad (**) es válida, y esto significa que

$$\left| f(b)g(b) - f(a)g(a) - \Sigma(P,\xi,g,f) - \sigma\int_a^b f\,dg \right| < \epsilon$$

siempre que $P \supset P_0$. Por lo tanto $g \in \mathcal{R}(f)$ y

$$\sigma\int_a^b f\,dg = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sigma\int_a^b f\,dg. \ \square$$

1.4. Corolario. Si $f$ es de variación acotada en $[a,b]$ y $g$ es continua en $[a,b]$, entonces $f \in \mathcal{R}(g)$ y $f \in \mathcal{R}_1(g)$.

La integral de Riemann se obtiene de la integral de Riemann-Stieltjes, tomando $g(x) = x$.

1.5. Definición. Si $g(x) = x$, entonces en lugar de escribir $f \in \mathcal{R}(g)$, escribimos $f \in \mathcal{R}$ y decimos que $f$ es *Riemann integrable* en el sentido de la norma. Además escribimos $\int_a^b f(x)dx$ en lugar de $\int_a^b f(x)dg(x)$ y $\Sigma(P,\xi,f)$ en lugar de $\Sigma(P,\xi,f,g)$. Para la sigma-integral pueden darse definiciones análogas.

Más tarde veremos que para la integral de Riemann, no es necesario distinguir entre la norma-integral y la sigma-integral.

Como $g(x) = x$ es una función continua en $[a,b]$, tenemos:

1.6. Corolario. Si $f$ es de variación acotada en $[a,b]$, entonces $f$ es Riemann integrable.

## § 2. OSCILACIONES Y DISCONTINUIDADES EN COMUN.

En esta sección introducimos los conceptos de "oscilación de las sumas de Riemann-Stieltjes" y "oscilación de una función" en un intervalo y los utilizamos para caracterizar la norma integrabilidad y la sigma integrabilidad en términos de ellos y también en términos de las discontinuidades del integrador y del integrando.

2.1. Definición. Sean $f$ y $g$ funciones reales definidas en $[a,b]$. La *oscilación de las sumas de Riemann-Stieltjes de la pareja ordenada* $(f,g)$ *en el intervalo* $[a,b]$ denotada con

$$\Omega(f,g,[a,b]),$$

se define como

$$\Omega(f,g,[a,b]) = \sup_{\substack{P,P' \in \mathbf{P}([a,b]) \\ \xi \sim P,\ \xi' \sim P'}} |\Sigma(P,\xi,f,g) - \Sigma(P',\xi',f,g)|$$

2.2. Teorema.

(a) $f \in \mathcal{R}(g)$ si y solo si $\displaystyle\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Omega(f,g,[x_i,x_{i-1}]) = 0.$

(b) $f \in \mathcal{R}_1(g)$ si y solo si $\displaystyle\lim_{P\uparrow} \sum_{i=1}^{n} \Omega(f,g,[x_i,x_{i-1}]) = 0.$

Demostración. (a) Supongamos primero que $f \in \mathcal{R}(g)$. Sea $\epsilon > 0$. Existe $\delta > 0$, tal que si $\|P_1\| < \delta$, $\|P_2\| < \delta$, $\xi_1 \sim P_1$ y $\xi_2 \sim P_2$, tenemos

$$|\Sigma(P_1,\xi_1,f,g) - \Sigma(P_2,\xi_2,f,g)| < \epsilon/2.$$

Sea $P = \{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ una partición de $[a,b]$ con $\|P\| < \delta$. Entonces, para $i=1,\ldots,n$, podemos encontrar $P_i'$, $P_i'' \in \mathbf{P}([x_{i-1},x_i])$, $\xi_i' \sim P_i'$ y $\xi_i'' \sim P_i''$, tales que

$$\Omega(f,g,[x_{i-1},x_i]) \leq \Sigma(P_i',\xi_i',f,g) - \Sigma(P_i'',\xi_i'',f,g) + \epsilon/2n$$

y

$$\Sigma(P_i',\xi_i',f,g) - \Sigma(P_i'',\xi_i'',f,g) > 0.$$

Sean $P' = \bigcup_{i=1}^{n} P_i'$, $P'' = \bigcup_{i=1}^{n} P_i''$, $\xi = \bigcup_{i=1}^{n} \xi_i'$ y $\xi'' = \bigcup_{i=1}^{n} \xi_i''$. Entonces $P'$ y $P''$ son particiones de $[a,b]$, $\xi' \sim P'$ y $\xi'' \sim P''$. Además $\|P'\| < \delta$, $\|P''\| < \delta$ y

$$0 < \sum_{i=1}^{n} \Omega(f,g,[x_{i-1},x_i]) <$$

$$< \sum_{i=1}^{n} (\Sigma(P_i',\xi_i',f,g) - \Sigma(P_i'',\xi_i'',f,g)) + \epsilon/2 =$$

$$= \Sigma(P',\xi',f,g) - \Sigma(P'',\xi'',f,g) + \epsilon/2 <$$

$$< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Por lo tanto

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Omega(f,g,[x_{i-1},x_i]) = 0,$$

para $P = \{x_0,\dots,x_n\}$.

Recíprocamente, supongamos que esto último sucede. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $\|P\| < \delta$ y $P = \{x_0,\dots,x_n\}$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} \Omega(f,g,[x_{i-1},x_i]) < \epsilon.$$

Sean $P = \{x_0,\dots,x_n\}$, $P' = \{x_0',\dots,x_m'\} \in P([a,b])$ con $P' \supset P$ y $\|P\| < \delta$. Si $\xi = \{\xi_1,\dots,\xi_n\}$ y $\xi' = \{\xi_1',\dots,\xi_m'\}$ son elecciones compatibles con $P$ y $P'$ respectivamente, entonces

$$|\ \Sigma(P,\xi,f,g) - \Sigma(P',\xi',f,g)\ | =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} \{f(\xi_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] - \sum_{[x'_{j-1},x'_j]\subset[x_{i-1},x_i]} f(\xi'_j)[g(x'_j) - g(x'_{j-1})]\}\right|$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \left| f(\xi_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] - \sum_{[x'_{j-1},x'_j]\subset[x_{i-1},x_i]} f(\xi'_j)[g(x'_j) - g(x'_{j-1})]\right|$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \Omega(f,g,[x_{i-1},x_i]) < \epsilon .$$

Por lo tanto utilizando el Lema I-3.6, concluimos que $f \in \mathcal{R}(g)$.

(b) La demostración se hace de manera análoga. □

2.3. <u>Definición</u>. Sea $f$ una función definida en $[a,b]$. La *oscilación de $f$* en el intervalo $[a,b]$, denotada por $\omega(f,[a,b])$ se define como

$$\omega(f,[a,b]) = \sup_{x,y\in[a,b]} |f(x) - f(y)|$$

Dado que

$$\Omega(f,g,[a,b]) \geq \omega(f,[a,b])|g(b) - g(a)|$$

para todo intervalo $[a,b]$, el teorema anterior nos implica el siguiente resultado.

2.4. <u>Corolario</u>. Sean $f$ y $g$ funciones reales definidas en $[a,b]$.

(a) Si $f \in \mathcal{R}(g)$, entonces $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega(f,[x_{i-1},x_i])|g(x_i) - g(x_{i-1})| = 0$;

(b) Si $f \in \mathcal{R}_1(g)$, entonces $\lim_{P\nearrow} \sum_{i=1}^{n} \omega(f,[x_{i-1},x_i])|g(x_i) - g(x_{i-1})| = 0$;

donde $P = \{x_0,\dots,x_n\}$.

El corolario anterior, nos permitirá probar el siguiente teorema, que es básico para la demostración de los resultados de la sección V-1.(Dichos resultados son en realidad la parte fundamental de este trabajo).

2.5. <u>Teorema</u>. Sean $f$ y $g$ funciones reales definidas en $[a,b]$.

(a) Si $f \in \mathcal{R}(g)$, entonces $f$ y $g$ no tienen discontinuidades en común.

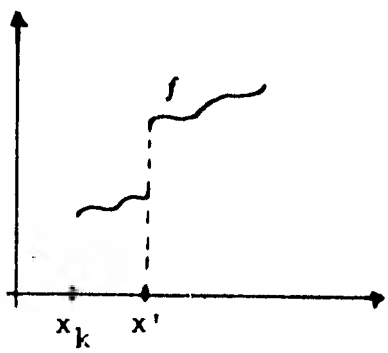
(b) Si $f \in \mathcal{R}_1(g)$, entonces $f$ y $g$ no tienen discontinuidades en común del mismo lado.

<u>Demostración</u>. Probaremos primero la parte (b). Supongamos que $f \in \mathcal{R}_1(g)$. Sea $\epsilon > 0$. De acuerdo con el corolario anterior, existe $P_0 \in P([a,b])$, tal que si $P = \{x_0,\ldots,x_n\}$ es un refinamiento de $P_0$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f,[x_{i-1},x_i])|g(x_i) - g(x_{i-1})| < \epsilon.$$

Sea $x'$ un punto de discontinuidad de $f$ por la izquierda, y sea $x_k$ el punto de P inmediatamente a la izquierda de $x'$. Existe $\epsilon' > 0$ tal que si $0 < \delta < x' - x_k$, entonces

$$\omega(f,[x'-\delta,x']) > \epsilon'.$$




Si incluimos $x'$ en P, tenemos que

$$\omega(f,[x_k,x'])|g(x') - g(x_k)| < \epsilon,$$

y por lo tanto

$$\omega(f,[x'-\delta,x'])|g(x') - g(x'-\delta)| < \epsilon,$$

para todo $\delta \in (0,x'-x_k)$, lo cual implica que

$$|g(x') - g(x'-\delta)| < \epsilon/\epsilon'.$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to x'^-} g(x) = g(x')$$

es decir, $g$ es continua por la izquierda en $x'$. El mismo razonamiento se aplica al lado derecho, de donde concluimos que $f$ y $g$ no tienen discontinuidades en común del mismo lado en $[a,b]$.

Para probar (a), supongamos que $f \in \mathcal{R}(g)$. Sea $\epsilon > 0$. Existe $\delta > 0$, tal que si $P = \{x_0,\ldots,x_n\} \in P([a,b])$ tiene norma menor que $\delta$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f,[x_{i-1},x_i])|g(x_i) - g(x_{i-1})| < \epsilon.$$

Sea $x'$ un punto de discontinuidad de $f$. Como $f \in \mathcal{R}_1(g)$ siempre que $f \in \mathcal{R}(g)$ (Teorema III-1.1), tenemos que $g$ es continua por la derecha o por la izquierda en $x'$. Más aún, si $0 < \delta',\delta'' < \delta/2$, entonces

$$\omega(f,[x'-\delta',x'+\delta''])|g(x'+\delta'') - g(x'-\delta')| < \epsilon.$$

Como $f$ es discontinua en $x'$, existe $\epsilon' > 0$, tal que

$$\omega(f,[x'-\delta',x'+\delta'']) > \epsilon'$$

para $0<\delta',\delta''<\delta/2$, con lo que tenemos

$$|g(x'+\delta'') - g(x'-\delta')| < \epsilon/\epsilon',$$

y por lo tanto

$$\lim_{(\delta',\delta'')\to(0,0)} [g(x'+\delta'') - g(x'-\delta')] = 0.$$

Como $g$ es continua por la derecha o por la izquierda, se sigue que

$$\lim_{x \to x'} g(x) = g(x').$$

Luego, si $g(x)$ es discontinua en $x'$, $f$ debe ser continua en $x'$. □

§ 3. DISCONTINUIDADES.

Ahora veremos como actúan las discontinuidades de $f$ o de $g$ en la expresión $\int_a^b f\,dg$

3.1. Definición. Si x es un número real, definimos la función real $\mathcal{H}(x)$, "función de Heaviside", por medio de

$$\mathcal{H}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

3.2. Teorema. Sea $f$ una función real definida en $[a,b]$ y continua en $x_0 \in (a,b)$. Si $g(x) = \mathcal{H}(x-x_0)$, entonces $f \in \mathcal{R}(g)$ y $\int_a^b f\,dg = f(x_0)$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Existe $\delta > 0$, tal que si $|x-x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Sea P una partición de $[a,b]$ con $\|P\| < \delta$ y sea $\xi$ una elección compatible con P. Entonces

$$|\Sigma(P,\xi,f,g) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Por lo tanto $f \in \mathcal{R}(g)$ y $\int_a^b f\,dg = f(x_0)$. □

3.3. Teorema. Sea $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ una serie absolutamente convergente y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a,b)$. Sea $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathcal{H}(x-x_n)$. Entonces si $f$ es continua en $[a,b]$, $f \in \mathcal{R}(g)$ y

$$\int_a^b f\,dg = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(x_n).$$

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n| < \epsilon$. Sea $g_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \mathcal{H}(x-x_n)$. Usando la linealidad de la integral respecto a $g$, del teorema anterior tenemos que

$$\int_a^b f\,dg_N = \sum_{n=1}^{N} c_n f(x_n).$$

Por otro lado, si $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$, entonces

$$\left| \int_a^b f\,d(g-g_N) \right| \leq M\, V_a^b(g-g_N) \leq M\epsilon.$$

Por lo tanto

$$\left|\int_a^b f\,dg - \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(x_n)\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_a^b f\, d(g-g_N)\right| + \left|\int_a^b f\, dg - \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(x_n)\right| <$$

$$< M\epsilon + \epsilon = (M+1)\epsilon.$$

Lo cual prueba que $f \in \mathcal{R}(g)$ y la igualdad que deseábamos demostrar. □

3.4. Teorema. Si $f$ es acotada en $[a,b]$ y tiene sólo un número finito de discontinuidades y si $g$ es monótona creciente en $[a,b]$ y continua en los puntos de discontinuidad de $f$, entonces $f \in \mathcal{R}(g)$.

Demostración. Sea $\{t_1, \ldots, t_m\}$ el conjunto de discontinuidades de $f$. Sea $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Dado $\epsilon > 0$, sea $\delta_1 > 0$, tal que $|g(x)-g(t_i)|<\epsilon$ si $|x-t_i| < \delta_1$, para $i = 1,\ldots,m$. Sea $\delta_2 > 0$, tal que $|f(s)-f(t)|<\epsilon$ si $|s-t| < \delta_2$ y $s,t \in [a,b]\setminus \bigcup_{i=1}^{m} (t_i-\delta_1/2, t_i+\delta_1/2)$. Sean $P_1$ y $P_2$ particiones de $[a,b]$ con $\|P_1\|, \|P_2\| < \min(\delta_1/2, \delta_2)$. Si definimos $P$, partición de $[a,b]$ por $P = P_1 \cup P_2 \cup \bigcup_{i=1}^{m} \{t_i-\delta_1/2, t_i+\delta_1/2\}$, y si $\xi_1$, $\xi_2$ y $\xi$ son elecciones compatibles con $P_1$, $P_2$ y $P$ respectivamente. Entonces puede demostrarse que

$$(*) \qquad |\Sigma(P_1,\xi_1,f,g) - \Sigma(P,\xi,f,g)| \leq 4M\cdot m\cdot\epsilon + V_a^b(g)\cdot\epsilon,$$

y también

$$(**) \qquad |\Sigma(P_2,\xi_2,f,g) - \Sigma(P,\xi,f,g)| \leq 4M\cdot m\cdot\epsilon + V_a^b(g)\cdot\epsilon,$$

(ver la demostración a continuación), de manera que

$$|\Sigma(P_1,\xi_1,f,g) - \Sigma(P_2,\xi_2,f,g)| \leq 2[4M\cdot m + V_a^b(g)]\epsilon.$$

Por lo tanto $f \in \mathcal{R}(g)$. □

Demostraremos ahora las fórmulas (*) y (**) de la demostración anterior. Si denotamos a $P$, $P_1$, $\xi$ y $\xi_1$ por

$$P = \{y_0,\ldots,y_\ell\}, \qquad \xi = \{\xi_1,\ldots,\xi_\ell\},$$
$$P_1 = \{x_0,\ldots,x_k\}, \qquad \xi_1 = \{\tau_1,\ldots,\tau_k\},$$

entonces

$$|\Sigma(P_1,\xi_1,f,g) - \Sigma(P,\xi,f,g)| =$$
$$= \left|\sum_{i=1}^{k} f(\tau_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] - \sum_{j=1}^{\ell} f(\xi_j)[g(y_j) - g(y_{j-1})]\right|$$

Para $j = 1,\ldots,m$, definimos $\eta_j = \tau_i$ si $[y_{j-1},y_j] \subset [x_{i-1},x_i]$. Por lo tanto

$$|\Sigma(P_1,\xi_1,f,g) - \Sigma(P,\xi,f,g)| =$$
$$= \left|\sum_{j=1}^{\ell}[f(\eta_j) - f(\xi_j)][g(y_j) - g(y_{j-1})]\right| \leq$$
$$\leq \sum_{j=1}^{\ell} |f(\eta_j) - f(\xi_j)|\,|g(y_j) - g(y_{j-1})|\,.$$

Si ahora definimos $A = \{j : [y_{j-1},y_j] \subset \bigcup_{i=1}^{m} (t_i - \delta_1/2, t_i + \delta_1/2)\}$, entonces podemos escribir

$$|\Sigma(P_1,\xi_1,f,g) - \Sigma(P,\xi,f,g)| \leq$$
$$\leq \sum_{j\in A} |f(\eta_j)-f(\xi_j)|\,|g(y_j)-g(y_{j-1})| + \sum_{j\in A^c} |f(\eta_j)-f(\xi_j)|\,|g(y_j)-g(y_{j-1})|.$$

Para $j \in A^c$, como $\eta_j$ y $\xi_j$ están en un mismo intervalo $[x_{i-1},x_i]$ para algún $i$, tenemos

$$|f(\eta_j) - f(\xi_j)| < \epsilon\,.$$

Por lo tanto

$$\sum_{j\in A^c} |f(\eta_j) - f(\xi_j)| \, |g(y_j) - g(y_{j-1})| <$$

$$< \epsilon \cdot \sum_{j\in A^c} |g(y_j) - g(y_{j-1})| \leq \epsilon \cdot V_a^b(g).$$

Por otro lado, como $f$ es acotada y $g$ creciente,

$$\sum_{j\in A} f(\eta_j) - f(\xi_j)| \, |g(y_j) - g(y_{j-1})| <$$

$$< 2M \sum_{j\in A} (g(y_j) - g(y_{j-1})),$$

y dadas las definiciones de A y de P, es claro que

$$\bigcup_{j\in A} [y_{j-1}, y_j] = \bigcup_{i=1}^{m} [t_i - \delta_1/2, t_i + \delta_1/2].$$

Por lo tanto

$$\sum_{j\in A} g(y_j) - g(y_{j-1}) = \sum_{i=1}^{m} [g(t_i + \delta_1/2) - g(t_i - \delta_1/2)],$$

y como $t_i + \delta_1/2 - (t_i - \delta_1/2) = \delta_1$, resulta que

$$\sum_{j\in A} g(y_j) - g(y_{j-1}) < m\epsilon.$$

Luego

$$\sum_{j\in A} |f(\eta_j) - f(\xi_j)| \, |g(y_j) - g(y_{j-1})| < 4M.m.\epsilon.$$

De donde obtenemos finalmente que

$$|\Sigma(P_1, \xi_1, f, g) - \Sigma(P, \xi, f, g)| < 4M\cdot m\cdot\epsilon + V_a^b(g)\cdot\epsilon,$$

que es la fórmula (*). La fórmula (**) se obtiene de igual manera.

# CAPITULO III

## RELACIONES ENTRE LOS DIVERSOS SENTIDOS DE INTEGRACION

Ya hemos mencionado anteriormente, que en general, los dos tipos de integrales vistos no son equivalentes. En este capítulo veremos porqué sucede esto. Además estudiaremos otro tipo más de integral y sus relaciones con los anteriores.

### § 1. RELACIONES ENTRE LA NORMA-INTEGRAL Y LA SIGMA-INTEGRAL.

El primer resultado en esta sección, nos dice que si $g$ es una función definida en $[a,b]$, entonces el conjunto de funciones $f$ para las que $f \in \mathcal{R}(g)$, está contenido en el conjunto de funciones $f$ para los que $f \in \mathcal{R}_1(g)$. Posteriormente veremos que esta contención es propia.

1.1. <u>Teorema</u>. Sean $f$ y $g$ funciones reales definidas en $[a,b]$. Si $f \in \mathcal{R}(g)$, entonces $f \in \mathcal{R}_1(g)$ y $\int_a^b f\,dg = \sigma\int_a^b f\,dg$

<u>Demostración</u>. Sea $\epsilon > 0$. Como $f \in \mathcal{R}(g)$, existe $\delta > 0$, tal que si $P \in \mathbf{P}([a,b])$ con $\|P\| < \delta$ y si $\xi \sim P$, tenemos que

$$|\Sigma(P,\xi,f,g) - \int_a^b f\,dg| < \epsilon .$$

Tomemos una partición arbitraria $P_0$ con $\|P_0\| < \delta$ y una elección $\xi_0$ compatible con $P_0$. Entonces para cualquier $(P,\xi) \in D_1$ con $(P_0,\xi_0) \leq_1 (P,\xi)$, tenemos que $\|P\| \leq \|P_0\| < \delta$, y por lo tanto

$$\left| \Sigma(P,\xi,f,g) - \int_a^b f\,dg \right| < \epsilon ,$$

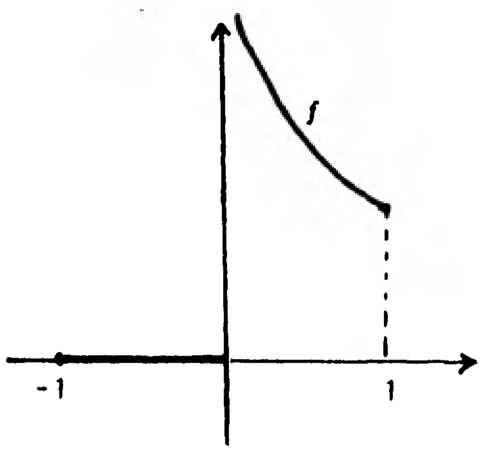
lo cual prueba el teorema. □

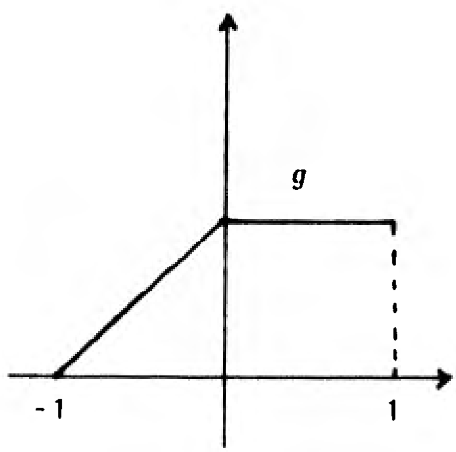
Veremos ahora, que en general, no es cierto que si $f \in \mathcal{R}_1(g)$, entonces $f \in \mathcal{R}(g)$. Para esto daremos dos contraejemplos.

1.2. Contraejemplos.

(a) Definamos $f$ y $g$ en $[-1,1]$, por medio de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ 1/x, & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \leq 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$




Para cualquier partición P que sea refinamiento de $\{-1,0,1\}$, tenemos que $\Sigma(P,\xi,f,g) = 0$, y por tanto $f \in \mathcal{R}_1(g)$. Para ver que $f \notin \mathcal{R}(g)$, tomemos $\delta > 0$. Entonces existe $n \in N$ tal que $2/n < \delta$.

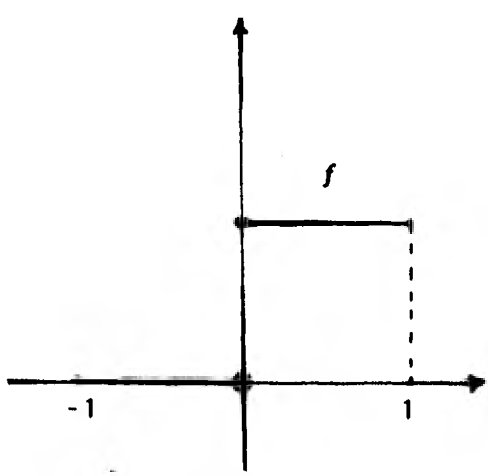
Sea $P = \{-1=-n/n, -(n-1)/n, \ldots, -1/n, 1/n, \ldots, (n-1)/n, n/n=1\}$. Si $\xi$ es cualquier elección compatible con P, tal que el elemento de la elección que está en el intervalo $[-1/n, 1/n]$ es $1/n^2$, tenemos

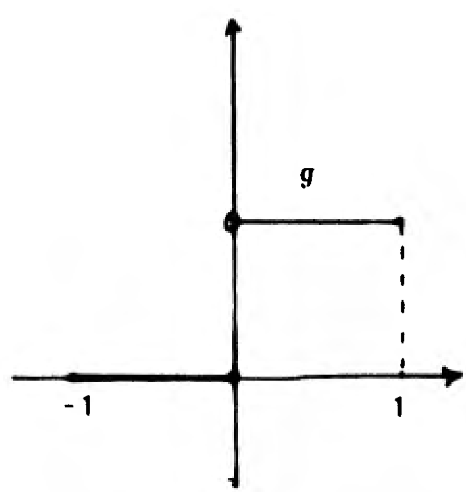
$$\Sigma\ (P,\xi,f,g) = f(1/n^2)[g(1/n) - g(-1/n)] = n^2[1-(1-1/n)] = n.$$

Esto demuestra que las sumas de Riemann-Stieltjes $\Sigma\ (P,\xi,f,g)$ no están acotadas y por lo tanto $f \notin \mathcal{R}(g)$.

(b) Definamos $f$ y $g$ en $[-1,1]$, de la manera siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$




Si P es una partición de $[-1,1]$ que es refinamiento de $\{-1,0,1\}$, se tiene que $(P,\xi,f,g) = 1$, independientemente de $\xi$. Por otra parte, sea $\delta > 0$. Entonces existe $n \in N$, tal que $2/n < \delta$. Sea $P = \{-1,\dots,-1/n,1/n,\dots,1\}$ y sean $\xi = \{-1=-n/n,-(n-1)/n,\dots,-1/n,1/n,\dots,(n-1)/n\}$ y $\xi' = \{-(n-1)/n,\dots,-1/n,1/n,\dots,(n-1)/n, n/n = 1\}$. Tenemos entonces que $\xi \sim P$, $\xi' \sim P$, $\|P\| < \delta$ y

$$\Sigma(P,\xi,f,g) = 0 \qquad \text{y} \qquad \Sigma(P,\xi',f,g) = 1.$$

Por lo tanto $f \notin \mathcal{R}(g)$ en $[-1,1]$.

Puede verse que la dificultad en (a) se debe a que $f$ no es acotada y la dificultad en (b) a que $g$ no es continua. Esta observación sugiere el siguiente resultado.

1.3. <u>Teorema</u>. Si $f$ es acotada en $[a,b]$, $g$ es continua en $[a,b]$ y $f \in \mathcal{R}_1(g)$, entonces $f \in \mathcal{R}(g)$.

<u>Demostración</u>. Sea $\epsilon > 0$. Como $f \in \mathcal{R}_1(g)$, existe $P_0 = \{x_0,\dots,x_n\}$ partición de $[a,b]$, tal que si $P' \supset P_0$ y $\xi' \sim P'$, entonces

$$\left| \Sigma(P',\xi',f,g) - \sigma\int_a^b f\,dg \right| < \epsilon/2.$$

Sea $M > 0$ una cota de $|f|$ en $[a,b]$. Debido a que $g$ es continua en $[a,b]$, podemos escoger $\delta > 0$, tal que si $s,t \in [a,b]$ con $|s-t| < \delta$, entonces

$$|g(s) - g(t)| < \epsilon/8Mn$$

Sea $P$ una partición de $[a,b]$ con $\|P\| < \delta$, y definamos $P' \in P([a,b])$, por medio de

$$P' = P \vee P_0$$

P'

P

$P_0$

La partición P tiene dos tipos de intervalos: los que están contenidos en el interior de alguno de los de $P_0$, los cuales son también intervalos de P'; y los que contienen algún punto de $P_0$, los cuales son a lo más 2n, y éstos son unión de varios intervalos de P'. Dada $\xi$ compatible con P, construimos $\xi'$ compatible con P' de manera que los valores de $\xi'$ sean los mismos que los de $\xi$ en los intervalos del primer tipo y, en los demás intervalos los valores de $\xi'$ se toman arbitrariamente. Entonces

$$|\Sigma(P',\xi',f,g) - \Sigma(P,\xi,f,g)| \leq 2n\cdot 2M\cdot\epsilon/8Mn = \epsilon/2,$$

y como $P' \supset P_0$, tenemos que

$$|\ (P',\xi',f,g) - \sigma\int_a^b f\,dg| < \epsilon/2.$$

Por lo tanto

$$|\Sigma(P,\xi,f,g) - \sigma\int_a^b f\,dg| < \epsilon,$$

lo cual prueba que $f \in \mathcal{R}(g)$ y que $\int_a^b f dg = \sigma\int_a^b f\,dg$. □

1.4. Teorema. Sean $f$ y $g$ funciones reales definidas en $[a,b]$. Si $g$ no es constante en ningún subintervalo de $[a,b]$ y $f \in \mathcal{R}_1(g)$, entonces $f$ es acotada en $[a,b]$.

Demostración. Supongamos que $f$ no es acotada en $[a,b]$. Entonces existe una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $[a,b]$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} |f(t_n)| = \infty.$$

Sea $P = \{x_0,\ldots,x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Hay por lo menos un intervalo $[x_{k-1},x_k]$ de la partición P que contiene una infinidad de puntos de la suçesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$. Si $g(x_{k-1}) \neq g(x_k)$, definimos $P' = P$. Si $g(x_{k-1}) = g(x_k)$, existe z en $(x_{k-1},x_k)$, tal que $g(x_{k-1}) \neq g(z) \neq g(x_k)$ y entonces definimos $P' = P \cup \{z\}$. En cualquiera de los dos casos tenemos que $P' = \{y_0,\ldots,y_m\}$ es un refinamiento de P y hay una k tal que $[y_{k-1},y_k]$ contiene una infinidad de puntos de la sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $g(y_{k-1}) \neq g(y_k)$. Dado $M > 0$, tomemos una elección $\xi = \{\xi_1,\ldots,\xi_m\}$ compatible con P', y definamos $\xi' = \{\xi_1',\ldots,\xi_m'\}$ por medio de $\xi_i' = \xi_i$ si $i \neq k$, y $\xi_k'$ igual a alguno de los puntos de la sucesión $\{t_n\}$ del intervalo $[y_{k-1},y_k]$ para el cual

$$|f(t_n)| > \frac{M}{|g(y_k) - g(y_{k-1})|} + \left|\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m} f(\xi_i')[g(y_i) - g(y_{i-1})]\right|.$$

Entonces

$$|\Sigma(P',\xi',f,g)| \geq |f(\xi_k')|\,|g(y_k)-g(y_{k-1})| - \left|\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m} (\xi_i')[g(y_i)-g(y_{i-1})]\right| > M,$$

lo cual contradice el que $f \in \mathcal{R}(g)$. Por lo tanto, $f$ tiene que ser acotada. □

Este resultado también puede obtenerse de los argumentos que se dan en la nota V-1.5.

La función $g(x) = x$ no es constante en ningún subintervalo de $[a,b]$. Luego tenemos el siguiente resultado:

1.5. Corolario. Si $f \in \mathcal{R}_1$ en $[a,b]$, entonces $f$ es acotada en $[a,b]$.

Combinando este corolario con el teorema III-1.3, tenemos:

1.6. Corolario. Sea $f$ una función real definida en $[a,b]$. Entonces $f \in \mathcal{R}_1$ si y solo si $f \in \mathcal{R}$.

De manera que los dos conceptos de integración son equivalentes para el caso de la integral de Riemann. Pero más aún:

1.7. Corolario. Si $g$ es continua en $[a,b]$ y no hay ningún subintervalo donde la $g$ sea constante, entonces $f \in \mathcal{R}_1(g)$ si y solo si $f \in \mathcal{R}(g)$.

Demostración. Supongamos que $f \in \mathcal{R}_1(g)$. Por el Teorema III-1.4, $f$ es acotada, y por el teorema III-1.3, $f \in \mathcal{R}(g)$. $\square$

Veremos ahora otra equivalencia entre los sentidos de integración hasta ahora vistos; para ello necesitaremos el concepto de"pseudoaditividad" de dos funciones:

1.8. Definición. Sean $f$ y $g$ funciones reales definidas en $[a,b]$. Decimos que $g$ *es pseudoaditiva respecto a* $f$ en el punto $x \in [a,b]$, si

$$\lim_{(\delta,\delta')\to(0,0)} \{f(\xi_{\delta\delta'})[g(x+\delta)-g(x-\delta')] - f(\xi_{\delta'})[g(x)-g(x-\delta')] - f(\xi_{\delta})[g(x+\delta)-g(x)]\} = 0$$

para todos $\xi_{\delta\delta'} \in [x-\delta',x+\delta]$, $\xi_{\delta'} \in [x-\delta',x]$ y $\xi_{\delta} \in [x,x+\delta]$. (Si $x=a$ ó $x=b$, entonces $\delta'=0$ ó $\delta=0$, respectivamente).

1.9. Notas.

(a) Si $f$ o $g$ es continua en $x \in [a,b]$ y si $g$ o $f$, respectivamente, es acotada en una vecindad de $x$, entonces $g$ es pseudoaditiva respecto a $f$ en $x$. Para probar esto basta observar que

$$f(\xi_{\delta\delta'})[g(x+\delta)-g(x-\delta')]-f(\xi_{\delta'})[g(x)-g(x-\delta')]-f(\xi_{\delta})[g(x+\delta)-g(x)] =$$

$$= [f(\xi_{\delta\delta'})-f(\xi_{\delta})][g(x+\delta)-g(x)] + [f(\xi_{\delta\delta'})-f(\xi_{\delta'})][g(x)-g(x-\delta)]$$

y tomar el límite cuando $\delta$ y $\delta'$ tienden a cero.

(b) Recíprocamente, si $g$ es pseudoaditiva respecto a $f$ en $x \in [a,b]$, entonces $f$ ó $g$ es continua en ese punto. Para probar esto, supongamos primero que $g$ es discontinua en $x$ por la derecha. Entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_n \searrow x$ y $|g(x) - g(x_n)| > \epsilon$, para algún $\epsilon > 0$. Ahora, como $g$ es pseudoaditiva respecto a $g$, definiendo $\xi_{\delta\delta'} = \xi_{\delta'} = x$, obtenemos

$$\lim_{\delta\to 0} [f(x) - f(\xi_\delta)][g(x_n) - g(x)] = 0,$$

y por tanto $f(\xi_\delta) \to f(x)$, si $\xi_\delta \to x$, por lo que $f$ es continua en x. El mismo razonamiento se aplica si $g$ es discontinua en x por la izquierda, y por lo tanto también puede aplicarse si $f$ es discontinua.

1.10. Nota. En la demostración del siguiente teorema se usará la siguiente notación: Si $I = [c,d]$, entonces el "incremento" de la función $g$ en el intervalo I, $\Delta g(I)$, está dado por $\Delta g(I) = g(d) - g(c)$. Además, $\xi_I$ denotará un elemento cualquiera en el intervalo I, y $\sum_{I\subset P}$ representará la suma sobre los intervalos I de la partición P.

1.11. Teorema. Sean $f$ y $g$ funciones reales definidas en $[a,b]$. Entonces $f \in \mathcal{R}(g)$ si y solo si $f \in \mathcal{R}_1(g)$ y $g$ es pseudoaditiva respecto a $f$ en x, para todo $x \in (a,b)$.

Demostración. Supongamos primero que $f \in \mathcal{R}(g)$. Ya hemos visto que entonces $f \in \mathcal{R}_1(g)$. Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$, tal que si $\|P\| < \delta$, $\|P'\| < \delta$, $\xi \sim P$ y $\xi \sim P'$, tenemos

$$|\Sigma(P,\xi,f,g) - \Sigma(P',\xi',f,g)| < \epsilon.$$

Sea $x \in (a,b)$, y sean $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_k,x-\delta',x+\delta'',x_{k+1},\ldots,x_n\}$ y $P' = \{x_0,x_1,\ldots,x_k,x-\delta',x,x+\delta'',x_{k+1},\ldots,x_n\}$ dos particiones de $[a,b]$, donde $\delta' < x - x_k$ y $\delta'' < x_{k+1} - x$. Si $\|P\| < \delta$, $\|P'\| < \delta$, $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_k, \xi_{\delta'\delta''}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n\} \sim P$ y $\xi' = \{\xi_1, \ldots, \xi_k, \xi_{\delta'}, \xi_{\delta''}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n\} \sim P'$, entonces

$$| \Sigma(P,\xi,f,g) - \Sigma(P',\xi',f,g) | =$$

$$= |f(\xi_{\delta'\delta''})[g(x+\delta'')-g(x-\delta')] - f(\xi_{\delta'})[g(x)-g(x-\delta')] - f(\xi_{\delta''})[g(x+\delta'')-g(x)]|$$

$$< \epsilon .$$

Por lo tanto

$$\lim_{(\delta',\delta'')\to(0,0)} \{f(\xi_{\delta'\delta''})[g(x+\delta'')-g(x-\delta')] - f(\xi_{\delta'})[g(x)-g(x-\delta')] - f(\xi_{\delta''})[g(x+\delta'')-g(x)]\} = 0,$$

para todos $\xi_{\delta'\delta''} \in [x-\delta', x+\delta'']$, $\xi_{\delta'} \in [x-\delta', x]$ y $\xi_{\delta''} \in [x, x+\delta'']$, de donde concluimos que $g$ es pseudoaditiva respecto a $f$ en $x$, para todo $x \in [a,b]$.

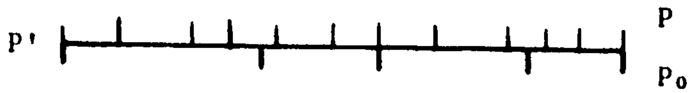
Recíprocamente, supongamos esto último y que $f \in \mathcal{R}_1(g)$. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe $P_0 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\} \in \mathcal{P}([a,b])$, tal que si $P' \supset P_0$ y $\xi' \sim P'$, tenemos

$$|\Sigma(P',\xi',f,g) - \sigma\!\int_a^b f\,dg| < \epsilon/2.$$

Como $g$ es pseudoaditiva respecto a $f$ en $x_1, \ldots, x_n$, existe $\delta > 0$, tal que si $0 < \delta_i', \delta_i'' < \delta$, para $i = 1, \ldots, n$, entonces

$$|f(\xi_{\delta_i'\delta_i''})[g(x_i+\delta_i'')-g(x_i-\delta_i')] - f(\xi_{\delta_i'})[g(x_i)-g(x_i-\delta_i')] - f(\xi_{\delta_i''})[g(x_i+\delta_i'')-g(x_i)]| < \epsilon/4n,$$

para todos $\xi_{\delta_i'\delta_i''} \in [x_i-\delta_i', x_i+\delta_i'']$, $\xi_{\delta_i'} \in [x_i-\delta_i', x_i]$ y $\xi_{\delta_i''} \in [x_i, x_i+\delta_i'']$. Sea $P \in \mathbf{P}([a,b])$, con norma menor que $\delta$, y sea $P' = P \vee P_0 = \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$.




Entonces, usando la notación definida en 1.10, con $\xi_I = \xi_i$ cuando $I = [x_{i-1}, x_i]$ y $\xi_I' = \xi_j'$ cuando $I = [y_{j-1}, y_j]$, obtenemos

$$| \Sigma(P,\xi,f,g) - \Sigma(P',\xi',f,g) | =$$

$$\Big| \sum_{I\subset P\cap P'} [f(\xi_I) - f(\xi_I')]\Delta g(I) + \sum_{I\subset P\setminus P'} f(\xi_I)\Delta g(I) - \sum_{I\subset P'\setminus P} f(\xi_I')\Delta g(I) \Big| <$$

$$\leq \Big| \sum_{I\subset P\cap P'} [f(\xi_I) - f(\xi_I')]\Delta g(I) \Big| + \Big| \sum_{I\subset P\setminus P'} f(\xi_I)\Delta g(I) - \sum_{I\subset P'\setminus P} f(\xi_I')\Delta g(I) \Big|$$

y esto último puede escribirse como

$$|\Sigma(P',\eta,f,g) - \Sigma(P',\tau,f,g)| + \Big| \sum_{i=1}^{n} \{ f(\xi_{\delta_i'\delta_i''})[g(x_i+\delta_i'') - g(x_i-\delta_i'')] - f(\xi_{\delta_i''})[g(x_i+\delta_i'') - g(x_i)] - f(\xi_{\delta_i'})[g(x_i) - g(x_i-\delta_i')] \} \Big| ,$$

donde (i) $\eta$ y $\tau$ son dos elecciones compatibles con $P'$ que coinciden en $P'\setminus P$; (ii) los $\delta_i'$ y $\delta_i''$ se determinan de manera tal que si $x_i = y_k$, entonces $\delta_i' = y_k - y_{k-1}$, $\delta_i'' = y_{k+1} - y_k$, para $i = 1, \dots, n$; (iii) $\xi_{\delta_i'\delta_i''} \in [x_i-\delta_i', x_i+\delta_i'']$, $\xi_{\delta_i'} \in [x_i-\delta_i', x_i]$ y $\xi_{\delta_i''} \in [x_i, x_i+\delta_i'']$, son los elementos de las elecciones compatibles $\xi$ y $\xi'$ con $P$ y $P'$ respectivamente. Por lo tanto

$$| \Sigma(P,\xi,f,g) - \Sigma(P',\xi',f,g) | < \epsilon/4 + \epsilon/4 = \epsilon/2$$

Finalmente, como $P' \succ P_0$, entonces

$$| \Sigma(P,\xi,f,g) - \sigma\int_a^b f\,dg | \leq$$

$$\leq | \Sigma(P,\xi,f,g) - \Sigma(P',\xi',f,g)| + |\Sigma(P',\xi',f,g) - \sigma\int_a^b f\,dg|$$

$$< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Por lo tanto $f \in \mathcal{R}(g)$. □

La importancia de este teorema no se aprecia antes de combinarlo con la nota III-1.9, para así obtener el importantísimo resultado:

1.12. <u>Teorema</u>. Sean $f$ y $g$ funciones reales definidas y acotadas en $[a,b]$. Una condición necesaria y suficiente para que $f \in \mathcal{R}(g)$, es que $f \in \mathcal{R}_1(g)$ y $f$ y $g$ no tengan discontinuidades en común.

<u>Demostración</u>. Se sigue del teorema anterior y la nota III-1.9. □

## § 2. UN TERCER SENTIDO DE INTEGRACION.

Para el caso en que $g$ es monótona creciente en $[a,b]$, hay un sentido de integración más que definimos a continuación y que es fácil ver que es equivalente al de $\mathcal{R}_1(g)$. (Por cierto, este es el sentido de integración que trata W. Rudin en su libro "Principios de Análisis Matemático").

2.1. <u>Definición</u>. Sean $g$ una función creciente en $[a,b]$ y $f$ una función real acotada en $[a,b]$. Sea $P = \{x_0,\ldots,x_n\} \in \mathbf{P}([a,b])$. Si $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ y $M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, para $i=1,\ldots,n$, entonces la *suma inferior* de Riemann-Stieltjes para la partición P y las funciones $f$ y $g$, denotada por $L(P,f,g)$ se define como

$$L(P,f,g) = \sum_{i=1}^{n} m_i[g(x_i) - g(x_{i-1})].$$

Análogamente definimos la *suma superior*, $U(P,f,g)$, por medio de

$$U(P,f,g) = \sum_{i=1}^{n} M_i[g(x_i) - g(x_{i-1})].$$

2.2. <u>Definición</u>. Sean $f$ una función monótona creciente en $[a,b]$ y $g$ una función real acotada en $[a,b]$. Decimos que $f$ *es Riemann-Stieltjes integrable respecto a* $g$ *en el sentido de las sumas superiores e inferiores*, y lo escribimos así: $f \in \mathcal{R}_2(g)$, si y solo si

$$\inf_{P\in\mathbf{P}([a,b])} U(P,f,g) = \sup_{P\in\mathbf{P}([a,b])} L(P,f,g)$$

En caso de que esto suceda, denotamos este valor por

$$S\int_a^b f\,dg \qquad \text{ó} \qquad S\int_a^b f(x)\,dg(x)$$

y le llamamos la integral de Riemann-Stieltjes en el sentido de las sumas superiores e inferiores, o $S$-integral.

Notemos que probar que $f \in \mathcal{R}_2(g)$ es equivalente a probar que dado $\epsilon > 0$, existe una partición P, tal que

$$U(P,f,g) - L(P,f,g) < \epsilon$$

(Para mayores detalles referentes a este sentido de integración, ver [4], Capítulo VI).

Este nuevo sentido de integración es equivalente al de los refinamientos, en el caso en que $g$ sea monótona creciente como podemos ver en el siguiente teorema.

2.3. Teorema. Sean $g$ una función monótona creciente en $[a,b]$ y $f$ una función real acotada en $[a,b]$. Entonces $f \in \mathcal{R}_1(g)$ si y solo si $f \in \mathcal{R}_2(g)$.

Demostración. Supongamos que $f \in \mathcal{R}_1(g)$. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe $P_0$, tal que si $P = \{x_0, \ldots, x_n\} \rangle P_0$, y $\xi \sim P$, tenemos

$$\left|\Sigma(P,\xi,f,g) - \sigma\int_a^b f\,dg\right| < \epsilon/2.$$

Luego,

$$|U(P,f,g) - L(P,f,g)| \leq \left|U(P,f,g) - \sigma\int_a^b f\,dg\right| + \left|L(P,f,g) - \sigma\int_a^b f\,dg\right| <$$

$$< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Por lo tanto $f \in \mathcal{R}_2(g)$.

Recíprocamente, supongamos que $f \in \mathcal{R}_2(g)$. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe $P_0 \in \mathcal{P}([a,b])$, tal que

$$U(P_0, f, g) - L(P_0, f, g) < \epsilon .$$

Ahora, si $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ es un refinamiento de $P_0$, es fácil ver que

$$L(P_0, f, g) \leq L(P, f, g)$$

y

$$U(P, f, g) \leq L(P_0, f, g),$$

por lo que

$$U(P, f, g) - L(P, f, g) \leq U(P_0, f, g) - L(P_0, f, g) < \epsilon .$$

Sea $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \sim P$. Las desigualdades

$$L(P, f, g) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] \leq U(P, f, g)$$

y

$$L(P, f, g) \leq S\int_a^b f\,dg \leq U(P, f, g),$$

implican que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(x_i)\ g(x_{i-1})] - S\int_a^b f\,dg \right| < \epsilon .$$

Por lo tanto $f \in \mathcal{R}_1(g)$. □

La relación existente entre la norma-integral y la S-integral no es tan sencilla como la relación entre la $\sigma$-integral y la S-integral. Si por ejemplo, definimos dos funciones

$f$ y $g$, de la manera siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

tenemos que $f \in \mathcal{R}_1(g)$, como ya vimos en la sección III-1.2, y por el teorema anterior, $f \in \mathcal{R}_2(g)$. Sin embargo, $f \notin \mathcal{R}(g)$. El recíproco de esta situación es válido. Específicamente:

2.4. <u>Teorema</u>. Sea $g$ monótona creciente en $[a,b]$ y $f$ real acotada en $[a,b]$. Si $f \in \mathcal{R}(g)$, entonces $f \in \mathcal{R}_2(g)$.

<u>Demostración</u>. Si $f \in \mathcal{R}(g)$, entonces $f \in \mathcal{R}_1(g)$. Como $g$ es monótona creciente en $[a,b]$ y $f$ real acotada en $[a,b]$, el teorema anterior nos asegura que entonces $f \in \mathcal{R}_2(g)$. □

Si utilizamos el corolario III-1.7, obtenemos un resultado más fuerte:

2.5. <u>Corolario</u>. Si $g$ es continua y estrictamente monótona creciente en $[a,b]$ y $f$ es real acotada en $[a,b]$, entonces $f \in \mathcal{R}(g)$ si y solo si $f \in \mathcal{R}_2(g)$.

Análogamente a lo dicho para la norma integral y la sigma-integral, en el caso en que $g(x) = x$, decimos que $f$ es *Riemann integrable en el sentido de las sumas superiores e in-*

*feriores* si $f \in \mathcal{R}_2(g)$. En tal caso escribimos $f \in \mathcal{R}_2$; al valor de la integral lo denotamos por $\int_a^b f(x)dx$ y en lugar de escribir $U(P,f,g)$ o $L(P,f,g)$, escribimos $U(P,f)$ o $L(P,f)$, respectivamente.

Para el caso de la integral de Riemann, los tres sentidos de integración definidos son equivalentes.

2.6. Teorema. Sea $f$ una función real definida en $[a,b]$. Entonces las siguientes aseveraciones son equivalentes:

(a) $f \in \mathcal{R}$;

(b) $f \in \mathcal{R}_1$;

(c) $f \in \mathcal{R}_2$;

y en este caso $\int_a^b f(x)dx = \sigma\int_a^b f(x)dx = S\int_a^b f(x)dx$.

De modo que para la integral de Riemann no es necesario distinguir entre los diversos sentidos de integración. Así cuando decimos que $f \in \mathcal{R}$, sabemos que $f$ es acotada y que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \Sigma(P,\xi,f) = \lim_{(P,\xi)\in D_1} \Sigma(P,\xi,f) = \inf_P U(P,f) = \sup_P L(P,f).$$

§ 3. ESQUEMAS GRAFICOS DE RELACIONES.

Podemos resumir los resultados de este capítulo en los siguientes diagramas.

(I)

si (a) $f$ acotada y $g$ continua

o (b) $g$ no es contante en ningún subintervalo y es continua

o (c) $f$ y $g$ acotadas y sin discontinuidades en común

o (d) $g$ es pseudoaditiva respecto a $f$ en todo $x \in (a,b)$.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{f \in \mathcal{R}(g)} \arrow[d, shift left=2, Rightarrow, "\text{siempre}"] & \\
\boxed{f \in \mathcal{R}_1(g)} \arrow[u, shift left=2, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & \boxed{f \in \mathcal{R}_2(g)}
\end{tikzcd}$$

siempre y cuando $f$ sea real y $g$ creciente

(II)

$$\boxed{f \in \mathcal{R} \Leftrightarrow f \in \mathcal{R}_1 \Leftrightarrow f \in \mathcal{R}_2}$$

(III)

$$\boxed{\mathcal{R}\ (g)\setminus\mathcal{R}(g) = \left\{ f \mid g \text{ no es pseudoaditiva respecto a } f \text{ en algún punto de } (a,b) \right\}}$$

# CAPITULO IV

## DESARROLLO DE LA TEORIA DE LA INTEGRAL DE RIEMANN-STIELTJES

A lo largo de este capítulo veremos cómo se desarrolla la integral de Riemann-Stieltjes dentro del análisis matemático clásico: sus propiedades, la conexión entre integración y diferenciación; veremos cómo se evalúan integrales de Riemann-Stieltjes con ayuda de la integral de Riemann y el teorema de cambio de variable. Mencionaremos, además, el porqué es posible reducir el estudio de integrales de Riemann-Stieltjes con integradores de variación acotada, al estudio de integrales con integradores monótonos crecientes, punto que será tratado en el siguiente capítulo. En este capítulo nos limitaremos a desarrollar la teoría de la norma-integral; las demostraciones para el caso de la $\sigma$-integral son muy similares y pueden consultarse en el libro de Análisis Matemático de T. Apóstol.

## § 1. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DE RIEMANN-STIELTJES.

Las siguientes propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes pueden demostrarse fácilmente a partir de la definición:

1.1. <u>Teorema</u>.

(a) $\int_a^b 1\cdot dg(x) = g(b) - g(a)$.

(b) Si $f_1$ y $f_2 \in \mathcal{R}(g)$ en $[a,b]$, entonces $f_1+f_2 \in \mathcal{R}(g)$ en $[a,b]$ y

$$\int_a^b (f_1+f_2)\,dg = \int_a^b f_1\,dg + \int_a^b f_2\,dg.$$

(c) Si $f \in \mathcal{R}(g)$ en $[a,b]$ y c es un escalar, entonces

$cf \in \mathcal{R}(g)$ en $[a,b]$ y

$$\int_a^b cf\,dg = c\int_a^b f\,dg.$$

(d) Si $g$ es monótona creciente y $f_1(x) \leq f_2(x)$ para todo x $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f_1\,dg \leq \int_a^b f_2\,dg,$$

siempre y cuando $f_1, f_2 \in \mathcal{R}(g)$.

(e) Si $f \in \mathcal{R}(g)$ en $[a,b]$ y $a < c < b$, entonces $f \in \mathcal{R}(g)$ en $[a,c]$ y en $[c,b]$ y

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg.$$

(f) Si $f \in \mathcal{R}(g_1)$ y $f \in \mathcal{R}(g_2)$ en $[a,b]$, entonces $f \in \mathcal{R}(g_1+g_2)$ en $[a,b]$ y

$$\int_a^b f\,d(g_1+g_2) = \int_a^b f\,dg_1 + \int_a^b f\,dg_2.$$

(g) Si $f \in \mathcal{R}(g)$ y c es un escalar, entonces $f \in \mathcal{R}(cg)$ y

$$\int_a^b f\,d(cg) = c\int_a^b f\,dg.$$

(h) Si $f \in \mathcal{R}(g)$ en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f\,dg \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|\, V_a^b(g).$$

1.2. <u>Notas</u>.

(a) El recíproco de la propiedad (e) no es válido. Es decir, no es cierto que si

$$\int_c^c f\,dg \qquad y \qquad \int_c^b f\,dg$$

existen, con a < c < b, entonces

$$\int_a^b f\,dg$$

exista. Para ver esto , tomemos de nuevo el ejemplo de la sección III-1.2. (b):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para este par de funciones es fácil ver que

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dg(x) = 0 \qquad y$$

$$\int_{0}^{1} f(x)\,dg(x) = 1.$$

Sin embargo, como ya demostramos,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dg(x)$$

no existe.

(b) Para la $\sigma$-integral valen todas las propiedades del teorema anterior, incluso el recíproco del inciso (e). Lo mismo es válido para la $S$-integral.

## § 2. CONEXION ENTRE LA INTEGRAL DE RIEMANN-STIELTJES Y LA INTEGRAL DE RIEMANN.

Para la integral de Riemann, la conexión entre diferenciación e integración, está dada por los siguientes dos teoremas:

2.1. <u>Teorema</u>. (fundamental del cálculo. I) Si $f \in \mathcal{R}$ en $[a,b]$ y si definimos $F(x)$ para $a \leq x \leq b$, como

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds,$$

entonces $F$ es continua en $[a,b]$, y si $f$ es continua en $x_0 \in [a,b]$, entonces $F'(x_0) = f(x_0)$.

<u>Demostración</u>. Como $f \in \mathcal{R}$ en $[a,b]$, entonces $f$ es acotada. Luego existe $M > 0$, tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in [a,b]$. Si $a \leq x < y \leq b$, entonces por la propiedad (h) de la sección IV-1.1. tenemos

$$|F(y) - F(x)| \leq M|x-y|,$$

por lo que $F$ es continua. Supongamos que $f$ es continua en $x_0 \in [a,b]$; entonces dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $t \in [a,b]$ y $|t-x_0| < \delta$, entonces $|f(t) - f(x_0)| < \epsilon$. Por lo tanto, si $x_0-\delta < s \leq x_0 \leq t < x_0+\delta$ y $s < t$, usando nuevamente la propiedad (h), obtenemos

$$\left|\frac{F(t) - F(s)}{t-s} - f(x_0)\right| = \frac{1}{t-s}\left|\int_s^t [f(u)-f(x_0)]du\right|$$

Por lo tanto, $F'(x_0) = f(x_0)$. □

2.2. <u>Teorema</u>. (fundamental del cálculo.II) Si $f \in \mathcal{R}$ en $[a,b]$ y existe una función $F$, tal que $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Demostración. Como $f$ es Riemann integrable en $[a,b]$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in P([a,b])$ con $\|P\| < \delta$, y si $\xi \sim P$, entonces

$$|\Sigma(P,\xi,f) - \int_a^b f(x)dx| < \epsilon$$

Escojamos $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ compatible con P (con la ayuda del teorema del valor medio), tal que

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

para $k = 1,..,n$. Entonces obtenemos que

$$\Sigma(P,\xi,f) = F(b) - F(a),$$

y por lo tanto

$$|\ F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)dx\ | < \epsilon$$

Dada la arbitrariedad de $\epsilon$, esto prueba que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \square$$

Es bien sabido que los teoremas anteriores son los que nos permiten calcular integrales de Riemann. Los dos siguientes teoremas conectan la integral de Riemann-Stieltjes con la integral de Riemann, y nos dicen cuándo y cómo podemos evaluar una integral de Riemann-Stieltjes.

2.3. Teorema.

(a) Si $f \in \mathcal{R}(g)$ en $[a,b]$ y $f \cdot g' \in \mathcal{R}$, entonces

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

(b) Si $f$ es acotada en $[a,b]$ y $g' \in \mathcal{R}$, entonces $f \in \mathcal{R}(g)$ si y solo si $f \cdot g' \in \mathcal{R}$.

<u>Demostración</u>. Para cada partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a,b]$, utilicemos el teorema del valor medio en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, para $k = 1, \dots, n$, para definir $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ por

$$g'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = g(x_k) - g(x_{k-1}),$$

y definamos $\xi$ elección compatible con P, por $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$. Entonces, dado $\epsilon > 0$, como $f \in \mathcal{R}(g)$, existe $\delta > 0$, tal que si $\|P\| < \delta$, tenemos

$$|\Sigma(P,\xi,f,g) - \int_a^b f\,dg| < \epsilon/2,$$

pero para esta $\xi$,

$$\Sigma(P,\xi,f,g) = \Sigma(P,\xi,f \cdot g'),$$

con lo que tenemos

$$|\Sigma(P,\xi,f \cdot g') - \int_a^b f\,dg| < \epsilon/2.$$

Dada la integrabilidad de $f \cdot g'$, tenemos que si $\epsilon$ es suficientemente pequeño,

$$|\Sigma(P,\xi,f \cdot g') - \int_a^b f(x)g'(x)dx| < \epsilon/2,$$

y por lo tanto

$$\left| \int_a^b f\,dg - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx \right| < \epsilon,$$

lo cual demuestra (a). Para demostrar (b), sea $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Como $g' \in \mathcal{R}$, dado $\epsilon > 0$, definimos $\delta > 0$, tal que si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in P([a,b])$ con $\|P\| < \delta$, entonces para toda pareja de elecciones $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ y $\xi' = \{\xi_1', \ldots \xi_n'\}$ compatibles con P,

$$|\Sigma(P,\xi,g') - \Sigma(P,\xi',g')| < \epsilon/M.$$

Pero ahora podemos definir otras dos elecciones compatibles con P, $\eta = \{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ y $\eta' = \{\eta_1', \ldots, \eta_n'\}$ por medio de:

$$\eta_i = \begin{cases} \xi_i, & \text{si } g'(\xi_i) \geq g'(\xi_i') \\ \xi_i', & \text{si } g'(\xi_i) < g'(\xi_i') \end{cases} \quad \text{y} \quad \eta_i' = \begin{cases} \xi_i', & \text{si } g'(\xi_i) \geq g'(\xi_i') \\ \xi_i, & \text{si } g'(\xi_i) < g'(\xi_i') \end{cases}$$

para $i = 1, \ldots, n$. Entonces

$$|\Sigma(P,\eta,g') - \Sigma(P,\eta',g')| < \epsilon/M,$$

y como

$$\Sigma(P,\eta,g') - \Sigma(P,\eta',g') = \sum_{i=1}^{n} |g'(\xi_i) - g'(\xi_i')|(x_i - x_{i-1})$$

hemos demostrado que si $\|P\| < \delta$, entonces cualesquiera dos elecciones $\xi$ y $\xi'$ compatibles con P, son tales que

$$\sum_{i=1}^{n} |g'(\xi_i) - g'(\xi_i')|(x_i - x_{i-1}) < \epsilon/M.$$

Ahora escojamos $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ con ayuda del teorema del valor medio, de tal modo que

$$g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = g(x_i) - g(x_{i-1}),$$

para i= 1,...,n. Entonces para toda elección $\xi' = \{\xi_1', \ldots, \xi_n'\}$ compatible con P

$$|\Sigma(P,\xi',f,g) - \Sigma(P,\xi',f\cdot g')| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')[g'(\xi_i) - g'(\xi_i')](x_i - x_{i-1})\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i')|\,|g'(\xi_i) - g'(\xi_i')|\,(x_i - x_{i-1}).$$

De donde concluimos que $f \in \mathcal{R}(g)$ si y solo si $f\cdot g' \in \mathcal{R}$, y además en este caso

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b f(x)g'(x)\,dx. \; \square$$

Notemos que esta demostración no cubre los casos en que ambas, $f$ y $g$, toman valores en C o una en C y la otra en $C^d$. El caso en que ambas $f$ y $g$ son complejas, es importante para la evaluación de integrales de línea en la teoría de funciones de variable compleja. Para este caso, sin embargo, podemos enunciar el siguiente corolario del teorema anterior.

2.4. Corolario. Si $f$ y $g$ son funciones complejas en $[a,b]$, $f$ es acotada en $[a,b]$ y $g' \in \mathcal{R}$ en $[a,b]$, entonces si $f = f_1 + if_2$ con $f_1$ y $f_2$ reales y $f_1\cdot g' \in \mathcal{R}$ y $f_2\cdot g' \in \mathcal{R}$, entonces $f \in \mathcal{R}(g)$ y

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

También si $f_1 \in \mathcal{R}(g)$ y $f_2 \in \mathcal{R}(g)$, entonces $f\cdot g' \in \mathcal{R}$ y

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

La demostración es inmediata de la validez del teorema anterior para "$f$" real.

## 3. FORMULA DEL CAMBIO DE VARIABLE EN INTEGRALES DE RIEMANN-STIELTJES.

3.1. Teorema. (del cambio de variable). Sea $\varphi: [A,B] \to [a,b]$ estrictamente creciente, sobre y continua. Si $f \in \mathcal{R}(g)$ en $[a,b]$, entonces $f\circ\varphi \in \mathcal{R}(g\circ\varphi)$ en $[A,B]$ y

$$\int_A^B f\circ\varphi\, d(g\circ\varphi) = \int_a^b f\,dg.$$

Demostración. Para cada partición P de $[a,b]$, $\varphi^{-1}(P)$ es una partición de $[A,B]$ y para cada elección $\xi$ compatible con P, $\varphi^{-1}(\xi)$ es una elección compatible con $\varphi^{-1}(P)$ y todas las particiones de $[A,B]$ y sus elecciones compatibles son de esta forma. Más aún, $\|P\|$ tiende a cero si y solo si $\|\varphi^{-1}(P)\|$ tiende a cero, dado que tanto $\varphi$ como $\varphi^{-1}$ son uniformemente continuas. Finalmente, como

$$\Sigma(P,\xi,f,g) = \Sigma(\varphi^{-1}(P),\varphi^{-1}(\xi),f\circ\varphi,g\circ\varphi)$$

Resulta que $f \in \mathcal{R}(g)$ si y solo si $f\circ\varphi \in \mathcal{R}(g\circ\varphi)$ y en tal caso

$$\int_a^b f\,dg = \int_A^B f\circ\varphi\, d(g\circ\varphi). \quad \square$$

Si en el teorema anterior $g(x) = x$ y $\varphi' \in \mathcal{R}$ en $[A,B]$, entonces usando el teorema IV-2.3.(b), concluimos que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_A^B f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Luego tenemos el siguiente resultado:

3.2. Corolario. Sea $\varphi: [A,B] \to [a,b]$ estrictamente creciente, sobre y continua. Si $f \in \mathcal{R}$ en $[a,b]$ y $\varphi' \in \mathcal{R}$ en $[A,B]$, entonces $f\circ\varphi \in \mathcal{R}(\varphi)$ en $[A,B]$ y

$$\int_a^b f(x)dx = \int_A^B f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

El teorema que veremos a continuación nos dice a "grosso modo" que la composición de una función Riemann-Stieltjes integrable respecto a una función monótona creciente, con una función continua, resulta ser Riemann-Stieltjes integrable respecto a la función monótona creciente en cuestión (este resultado es parecido a uno de Teoría de la Medida que dice que la composición de una función medible con una continua es medible). Específicamente:

3.3. Teorema. Sea $g$ una función monótona creciente en $[a,b]$ y supongamos que $f \in \mathcal{R}(g)$ en $[a,b]$ es tal que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$. Si $\phi:[m,M] \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{R}^d$ o $\mathbb{C}$ o $\mathbb{C}^d$) es continua, entonces

$$\phi\circ f \in \mathcal{R}(g).$$

<u>Demostración</u>. Sea $\epsilon > 0$. Como $\phi$ es uniformemente continua en $[m,M]$, existe $\delta > 0$, tal que si $s,t \in [m,M]$ y $|s-t| < \delta$, entonces

$$|\phi(s) - \phi(t)| < \frac{\epsilon}{2V_a^b(g)}.$$

Dado que $f \in \mathcal{R}(g)$, si $K = \sup\limits_{t\in[m,M]} |\phi(t)|$, existe $\rho > 0$ tal que si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in P([a,b])$ con $\|P\| < \rho$, entonces para toda pareja $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, $\xi' = \{\xi_1', \ldots, \xi_n'\}$ de elecciones compatibles con P,

$$|\Sigma(P,\xi,f,g) - \Sigma(P,\xi',f,g)| < \frac{\delta}{4K}\epsilon .$$

Ahora definamos otras dos elecciones compatibles con P, $\eta = \{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ y $\eta' = \{\eta_1', \ldots, \eta_n'\}$, por medio de

$$\eta_i = \begin{cases} \xi_i, & \text{si } f(\xi_i) \geq f(\xi_i') \\ \xi_i', & \text{si } f(\xi_i) < f(\xi_i') \end{cases} \quad \text{y} \quad \eta_i' = \begin{cases} \xi_i', & \text{si } f(\xi_i) \geq f(\xi_i') \\ \xi_i, & \text{si } f(\xi_i) < f(\xi_i') \end{cases}$$

para $i = 1,\ldots,n$. Entonces

$$\Sigma(P,\eta,f,g) - \Sigma(P,\eta',f,g) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [f(\eta_i) - f(\eta_i')][g(x_i) - g(x_{i-1})] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i) - f(\xi_i')||g(x_i) - g(x_{i-1})|$$

$$< \frac{\delta}{4K}\epsilon .$$

pues $g$ es monótona creciente y $\eta$ y $\eta'$ son compatibles con P. Luego, hemos demostrado que si $\|P\| < \rho$, entonces cualesquiera dos elecciones $\xi$ y $\xi'$ compatibles con P, son tales que

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i) - f(\xi_i')| [g(x_i) - g(x_{i-1})] < \frac{\delta}{4K}\epsilon .$$

Sea A el subconjunto de $\{1,...,n\}$ que consta de las i tales que $|f(\xi_i) - f(\xi_i')| < \delta$, y sea B el subconjunto de $\{1,...,n\}$ que consta de las i tales que $|f(\xi_i) - f(\xi_i')| \geq \delta$. Entonces

$$\sum_{i\in B} |g(x_i) - g(x_{i-1})| < \frac{\epsilon}{4K} ,$$

y por lo tanto

$$|\Sigma(P,\xi, \phi\circ f, g) - \Sigma(P,\xi',\phi\circ f, g)| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} [\phi(f(\xi_i)) - \phi(f(\xi_i'))][g(x_i) - g(x_{i-1})]\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |\phi(f(\xi_i)) - \phi(f(\xi_i'))| |g(x_i) - g(x_{i-1})| \leq$$

$$\leq \sum_{i\in A} \frac{\epsilon}{2V_a^b(g)} |g(x_i) - g(x_{i-1})| + \sum_{i\in B} 2K|g(x_i) - g(x_{i-1})| \leq$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2V_a^b(g)} . V_a^b(g) + 2K\frac{\epsilon}{4K} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon .$$

Así pues, hemos probado que dado $\epsilon > 0$, existe $\rho > 0$, tal que si $\|P\| < \rho$ y si $\xi \sim P$, $\xi' \sim P$, entonces

$$|\Sigma(P,\xi, \phi\circ f, g) - \Sigma(P,\xi',\phi\circ f, g)| < \epsilon,$$

y el siguiente lema nos asegura que entonces $\phi\circ f \in \mathcal{R}(g)$. □

3.4. Lema. Sea $f$ una función real definida en $[a,b]$. Si $g$ es monótona creciente en $[a,b]$ y si suponemos que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $\|P\| < \delta$ y $\xi \sim P$, $\xi' \sim P$ con

$$|\Sigma(P,\xi,f,g) - \Sigma(P,\xi',f,g)| < \epsilon ,$$

entonces $f \in \mathcal{R}(g)$.

<u>Demostración</u>. Sean $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in P([a,b])$ con $\|P\| < \delta$ y $Q = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\} \in P([a,b])$ un refinamiento de P. Si $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \sim P$ y $\eta = \{\eta_1, \ldots, \eta_m\} \sim Q$, entonces

$$|\Sigma(P,\xi,f,g) - \Sigma(Q,\eta,f,g)| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] - \sum_{j=1}^{m} f(\eta_j)[g(y_j) - g(y_{j-1})]\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{m} [f(\xi_j') - f(\eta_j)][g(y_j) - g(y_{j-1})]\right|,$$

donde $\xi_j' = \xi_i$ si $[y_{j-1}, y_j] \subset [x_{i-1}, x_i]$, para $j = 1,\ldots,m$. Sea $\tau_i$ aquella $\eta_j \in [x_{i-1}, x_i]$, tal que

$$|f(\xi_i) - f(\tau_i)| = \max_{\{j \mid [y_{j-1}, y_j] \subset [x_{i-1}, x_i]\}} |f(\xi_i) - f(\eta_j)| =$$

$$= \max_{\{j \mid [y_{j-1}, y_j] \subset [x_{i-1}, x_i]\}} |f(\xi_j') - f(\eta_j)|$$

para $i=1,\ldots,n$. Definamos dos elecciones $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ y $\beta = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ compatibles con P, por medio de:

$$\alpha_i = \begin{cases} \tau_i, & \text{si } f(\xi_i) \leq f(\tau_i) \\ \xi_i, & \text{si } f(\xi_i) > f(\tau_i) \end{cases} \quad \text{y} \quad \beta_i = \begin{cases} \xi_i, & \text{si } f(\xi_i) \leq f(\tau_i) \\ \tau_i, & \text{si } f(\xi_i) > f(\tau_i) \end{cases}$$

para $i = 1,\ldots,n$. Sea $\epsilon > 0$. Entonces

$$|\Sigma(P,\alpha,f,g) - \Sigma(P,\beta,f,g)| =$$

$$= |\sum_{i=1}^{n}[f(\alpha_i) - f(\beta_i)][g(x_i) - g(x_{i-1})]| =$$

$$= |\sum_{i=1}^{n}|f(\tau_i) - f(\xi_i)||g(x_i) - g(x_{i-1})|| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}|f(\tau_i) - f(\xi_i)||g(x_i) - g(x_{i-1})|.$$

Por lo tanto

$$|\Sigma(P,\xi,f,g) - \Sigma(Q,\eta,f,g)| =$$

$$= |\sum_{j=1}^{m}[f(\xi'_j) - f(\eta_j)][g(y_j) - g(y_{j-1})]| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m}|f(\xi'_j) - f(\eta_j)|[g(y_j) - g(y_{j-1})] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\{j|[y_{j-1},y_j]\subset[x_{i-1},x_i]\}}|f(\xi'_j) - f(\eta_j)|[g(y_j) - g(y_{j-1})] \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{\{j|[y_{j-1},y_j]\subset[x_{i-1},x_i]\}}|f(\tau_i) - f(\xi_i)|[g(y_j) - g(y_{j-1})] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}|f(\tau_i) - f(\xi_i)|\sum_{\{j|[y_{j-1},y_j]\subset[x_{i-1},x_i]\}}[g(y_j) - g(y_{j-1})] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}|f(\tau_i) - f(\xi_i)|[g(x_i) - g(x_{i-1})] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}|f(\tau_i) - f(\xi_i)||g(x_i) - g(x_{i-1})| < \epsilon.$$

Luego, hemos probado que dado $\epsilon > 0$, si $\|P\| < \delta$, $Q$  $P$, $\xi \sim P$ y $\eta \sim Q$, entonces

$$|\Sigma(P,\xi,f,g) - \Sigma(Q,\eta,f,g)| < \epsilon,$$

siempre que $g$ sea monótona creciente, y utilizando el lema I-3.6(a) obtenemos que $f \in \mathcal{R}(g)$. □

Recordemos que si $g$ es una función de variación acotada en $[a,b]$, entonces $g$ se puede escribir como la diferencia de dos funciones monótonas crecientes definidas en $[a,b]$. En particular si $V_a^x(g)$ denota la variación de $g$ en el intervalo $[a,x]$, tenemos

$$g(x) = V_a^x(g) - (V_a^x(g) - g(x))$$

donde tanto $\upsilon(x) = V_a^x(g)$, como $w(x) = V_a^x(g) - g(x)$ son funciones crecientes en $[a,b]$. Se suele llamar a estas funciones y , la *parte creciente de* $g$ y la *parte decreciente de* $g$, respectivamente. Así lo haremos nosotros de aquí en adelante. (Para mayores referencias sobre funciones de variación acotada, ver [1], capítulo 7.).

Si en el teorema anterior, en lugar de que $g$ sea una función monótona creciente, $g$ es de variación acotada, la demostración no puede aplicarse, puesto que la fórmula (*) de la página 54 no nos dice nada en este caso. Sin embargo, cabe pensar que el teorema sigue siendo válido para $g$ de variación acotada. Lo más natural es pensar que si $g$ es de variación acotada basta descomponerla en su parte creciente y en su parte decreciente y aplicar el teorema IV-3.3 separadamente a cada una de estas partes. Sin embargo, para hacer esto es necesario demostrar que si $f \in \mathcal{R}(g)$ y $g$ es de variación acotada, entonces $f \in \mathcal{R}(\nu)$ donde $\nu$ es la parte creciente de $g$. El siguiente capítulo está dedicado principalmente a la demostración de este resultado. (Este resultado para $\mathcal{R}_1(g)$, puede verse en el libro de Análisis Matemático de T. Apostol. La demostración para el caso de $\mathcal{R}(g)$ requiere de algunos resultados especiales, principalmente el teorema III-1.11 y la desigualdad del lema V-1.1).

# CAPITULO V

## INTEGRALES DE RIEMANN-STIELTJES CON INTEGRADORES DE VARIACION ACOTADA

A lo largo de la historia de la integral de Riemann-Stieltjes las integrales con integradores de variación acotada han jugado un papel muy importante y este es el caso que más frecuentemente se usa. En este último capítulo, estudiaremos ciertas propiedades de este tipo de integrales. El objetivo principal de este capítulo es demostrar el resultado que sugerimos al final del capítulo anterior: Si $g$ es una función de variación acotada en $[a,b]$ y si $f \in \mathcal{R}(g)$ entonces $f \in \mathcal{R}(v)$, donde $v(x) = V_a^x(g)$ es la parte creciente de $g$. Esto lo haremos en la primera sección. Con esto habremos reducido el estudio de las integrales de Riemann-Stieltjes con integradores de variación acotada, al estudio de las integrales de Riemann-Stieltjes con integradores monótonos crecientes. En esta misma sección veremos también algunas consecuencias de este hecho.

En la segunda sección de este capítulo veremos algunas clases de funciones determinadas por integrales de Riemann-Stieltjes. La conclusión más relevante de esta parte será que la clase de funciones continuas es adjunta o complementaria a la clase de funciones de variación acotada con respecto a la integral de Riemann-Stieltjes.

§ 1. $f \in \mathcal{R}(g) \Rightarrow f \in \mathcal{R}(v)$.

Comenzamos esta sección demostrando una desigualdad que será de gran importancia posteriormente.

1.1. Lema. Sea $f$ una función real definida en $[a,b]$. Si $g$ es de variación acotada en $[a,b]$, entonces

$$\omega(f,[a,b])|g(b)-g(a)| \leq \Omega(f,g,[a,b]) \leq \omega(f,[a,b])V_a^b(g).$$

Demostración. La desigualdad del lado izquierdo es obvia y vale aunque $g$ no sea de variación acotada. Para probar la desigualdad del lado derecho, tomemos $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y $P' = \{x_0', \ldots, x_m'\}$ dos particiones de $[a,b]$. Si $\xi \sim P$ y $\xi' \sim P'$, y si $P_0 = P \vee P' = \{y_0, y_1, \ldots, y_\ell\}$, entonces

$$|\Sigma(P,\xi,f,g) - \Sigma(P',\xi',f,g)| =$$

$$= |\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})] - \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j')[g(x_j')-g(x_{j-1}')]|.$$

Ahora, si $n_i$ denota el número de intervalos de la partición $P_0$ contenido en $\bigcup_{k=1}^{i} [x_{k-1}, x_k]$ para $i = 1, \ldots, n$, y si $m_j$ denota el número de intervalos de la partición $P_0$ contenidos en $\bigcup_{k=1}^{j} [x_{j-1}', x_j']$ para $j = 1, \ldots m$, de tal manera que $n_n = m_m = \ell$, tenemos que

$$|\Sigma(P,\xi,f,g) - \Sigma(P',\xi',f,g)| =$$

$$= |\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i} f(\xi_i)[g(y_k)-g(y_{k-1})] - \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=m_{j-1}+1}^{m_j} f(\xi_j')[g(y_k)-g(y_{k-1})]|$$

y si definimos $\eta_k = \xi_i$, cuando $[y_{k-1}, y_k] \subset [x_{i-1}, x_i]$ y $\tau_k = \xi'_j$, cuando $[y_{k-1}, y_k] \subset [x'_{j-1}, x'_j]$, entonces

$$|\Sigma(P,\xi,f,g) - \Sigma(P',\xi',f,g)| =$$

$$= |\sum_{k=1} f(\eta_k)[g(y_k) - g(y_{k-1})] - \sum_{k=1} f(\tau_k)[g(y_k) - g(y_{k-1})]| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1} |f(\eta_k) - f(\tau_k)|\,|g(y_k) - g(y_{k-1})| \leq$$

$$\leq \omega(f,[a,b]) \sum_{k=1} |g(y_k) - g(y_{k-1})| \leq$$

$$\leq \omega(f,[a,b]) V_a^b(g).$$

Por lo tanto, tomando el supremo sobre todas las particiones P y P' de $[a,b]$, concluimos que

$$\Omega(f,g,[a,b]) \leq \omega(f,[a,b]) V_a^b(g). \;\square$$

Si combinamos el lema anterior con el teorema II-1.8, obtenemos:

1.2. <u>Teorema</u>. Sean $f$ y $g$ dos funciones reales definidas en $[a,b]$.

(a) Si $f \in \mathcal{R}(g)$ entonces $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega(f,[x_{i-1},x_i])|g(x_i) - g(x_{i-1})| = 0$

y si $f \in \mathcal{R}_1(g)$ entonces $\lim\limits_{P\uparrow} \sum_{i=1}^{n} \omega(f,[x_{i-1},x_i])|g(x_i) - g(x_{i-1})| = 0$

donde $P = \{x_0, x_1, \ldots x_n\} \in \mathcal{P}([a,b])$.

(b) Si $g$ es de variación acotada en $[a,b]$, y si

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega(f,[x_{i-1},x_i])V_{x_{i-1}}^{x_i}(g) = 0,$$

o si

$$\lim_{P} \sum_{i=1}^{n} \omega(f,[x_{i-1},x_i])V_{x_{i-1}}^{x_i}(g) = 0,$$

en donde $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in P([a,b])$, entonces $f \in \mathcal{R}(g)$ o $f \in \mathcal{R}_1(g)$, respectivamente.

El siguiente resultado es el resultado inverso del inciso (b) del teorema anterior; para ello necesitaremos del siguiente lema.

1.3. <u>Lema</u>. Sea $f$ de variación acotada en $[a,b]$. Entonces $x \in [a,b]$ es un punto de continuidad de $f$ si y solo si $x$ es también un punto de continuidad de la función $v(x) = V_a^x(f)$.

<u>Demostración</u>. Como $v(x)$, es una función monótona creciente, para todo $x \in (a,b)$, existen tanto el límite por la derecha como el límite por la izquierda. Denotémoslos por $v(x+)$ y $v(x-)$ respectivamente. Como $f$ es de variación acotada entonces puede ser expresada como la diferencia de su parte creciente y su parte decreciente, i.e., $f = v - w$, y por lo tanto, $f(x+)$ y $f(x-)$ existen para cada $x \in (a,b)$. Si $a \leq x < y \leq b$, entonces por definición de $V_x^y(f)$ tenemos

$$0 \leq |f(y) - f(x)| \leq V_x^y(f) = v(y) - v(x).$$

Si hacemos tender y a x, encontramos que

$$0 \leq |f(x+) - f(x)| \leq v(x+) - v(x),$$

y de manera similar

$$0 \leq |f(x) - f(x-)| \leq v(x) - v(x-).$$

Estas desigualdades implican que un punto de continuidad de $v$ es también un punto de continuidad de $f$.

Para probar el recíproco, sea $f$ continua en $c \in (a,b)$. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $0 < |x-c| < \delta$ implica que $|f(x) - f(c)| < \epsilon/2$. Para esta misma $\epsilon$, existe también una partición P del intervalo $[c,b]$, con $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, tal que

$$V_c^b(f) - \epsilon/2 < \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| .$$

Si agregamos puntos a P, lo único que sucede es que la suma $\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$, incrementa su valor y por lo tanto podemos suponer $0 < x_1 - x_0 < \delta$. Esto significa que

$$|f(x_1) - f(c)| < \epsilon/2,$$

y por lo tanto

$$V_c^b(f) - \epsilon/2 < \epsilon/2 + \sum_{k=2}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \epsilon/2 + V_{x_1}^b(f),$$

ya que $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[x_1, b]$. Por lo tanto tenemos

$$V_c^b(f) - V_{x_1}^b(f) < \epsilon .$$

Pero

$$0 \leq \nu(x_1) - \nu(c) = V_a^{x_1}(f) - V_a^{c}(f) = V_c^{x_1}(f) = V_c^{b}(f) - V_{x_1}^{b}(f) < \epsilon .$$

Por lo tanto, hemos demostrado que si $0 \leq x_1 - c \leq \delta$, entonces

$$0 \leq \nu(x_1) - \nu(c) < \epsilon .$$

Esto prueba que $\nu(c+) = \nu(c)$. Un argumento similar prueba que $\nu(c-) = \nu(c)$. Así pues, el lema está probado para todo los puntos interiores de $[a,b]$. Basta hacer algunas modificaciones triviales para probarlo en los puntos extremos a y b. □

El siguiente teorema constituye la parte central de esta sección. Además de contener el resultado que sugerimos al final del capítulo anterior ($f \in \mathcal{R}(g) \Rightarrow f \in \mathcal{R}(\nu)$), el teorema demuestra que las condiciones suficientes para que $f \in \mathcal{R}(g)$ ó $f \in \mathcal{R}_1(g)$ cuando $g$ es de variación acotada del inciso (b) del teorema anterior y que están dadas solamente en términos de la oscilación de la función $f$ en cada subintervalo de la partición y de la variación de $g$ ahí mismo, son también necesarias.

1.4. <u>Teorema</u>. Sea $f$ una función real definida en $[a,b]$. Si $g$ es una función de variación acotada en $[a,b]$ y si $\nu(x) = V_a^x(g)$ entonces:

(a) $f \in \mathcal{R}(g)$ si y solo si $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \omega(f,[x_{i-1},x_i])V_{x_{i-1}}^{x_i}(g) = 0$, donde $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}([a,b])$.

(b) $f \in \mathcal{R}(g)$ si y solo si $f \in \mathcal{R}(\nu)$.

(c) $f \in \mathcal{R}_1(g)$ si y solo si $\lim\limits_{P} \sum\limits_{i=1}^{n} \omega(f,[x_{i-1},x_i])V_{x_{i-1}}^{x_i}(g) = 0$, donde $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}([a,b])$.

(d) $f \in \mathcal{R}_1(g)$ si y solo si $f \in \mathcal{R}_1(\nu)$.

Demostración. Probaremos primero (c). El hecho de que la condición dada en (c) es suficiente está contenido en el teorema V-1.2. Para probar que la condición dada es necesaria, supongamos pues que $f \in \mathcal{R}_1(g)$. Entonces, debido al teorema V-1.2,

$$\lim_{P\nearrow} \sum_{i=1}^{n} \omega(f,[x_{i-1},x_i])|g(x_i) - g(x_{i-1})| = 0,$$

donde $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}([a,b])$. Podemos suponer que $f$ es acotada en $[a,b]$ (Ver nota V-1.5.). Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $P'_0$ partición de $[a,b]$, tal que si $P' = \{x'_0, x'_1, \ldots, x'_\ell\} \succ P'_0$, tenemos

$$\sum_{i=1}^{\ell} \omega(f,[x_{i-1},x'_i])|g(x'_i) - g(x'_{i-1})| < \epsilon/2.$$

Además, existe $P''_0 \in \mathcal{P}([a,b])$, tal que si $P'' = \{x''_0, x''_1, \ldots, x''_m\} \succ P''_0$, entonces

$$V_a^b(g) \leq \sum_{i=1}^{m} |g(x''_i) - g(x''_{i-1})| + \frac{\epsilon}{2\omega(f,[a,b])}$$

Por lo tanto, si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \succ P'_0 \vee P''_0$, tenemos

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} \omega(f,[x_{i-1},x_i]) V_{x_{i-1}}^{x_i}(g) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \omega(f,[x_{i-1},x_i])(|g(x_i)-g(x_{i-1})| + V_{x_{i-1}}^{x_i}(g) - |g(x_i)-g(x_{i-1})|) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \omega(f,[x_{i-1},x_i])|g(x_i)-g(x_{i-1})| + \omega(f,[a,b]) \sum_{i=1}^{n} (V_{x_{i-1}}^{x_i}(g) -$$

$$- |g(x_i) - g(x_{i-1})|) <$$

$$< \epsilon/2 + \omega(f,[a,b])[V_a^b(g) - \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})|] <$$

$$< \epsilon/2 + \omega(f,[a,b]) \frac{\epsilon}{2\omega(f,[a,b])} = \epsilon,$$

de donde concluimos que

$$\lim_{P\nearrow} \sum_{i=1}^{n} \omega(f,[x_{i-1},x_i])V_{x_{i-1}}^{x_i}(g) = 0,$$

donde $P = \{x_0,x_1,\ldots,x_n\} \in \mathbf{P}([a,b])$. Luego, hemos demostrado (c).

Dado que $V_{x_{i-1}}^{x_i}(g) = V_{x_{i-1}}^{x_i}(\nu)$. (d) se sigue inmediatamente de (c).

Nos falta probar (a) y (b). Que la condición dada en (a) es suficiente, se sigue del teorema V-1.2(b). Veamos que es necesaria. Sea $f \in \mathcal{R}(g)$. Entonces $f \in \mathcal{R}_1(g)$ y $f$ y $g$ no tienen discontinuidades en común (teorema III-1.12.) Por lo tanto $f$ y $\nu$ no tienen discontinuidades en común, debido al lema anterior, y usando la nota III-1.9.(a), concluimos que $\nu$ es pseudoaditiva respecto a $f$ y además como $f \in \mathcal{R}_1(\nu)$, tenemos que $f \in \mathcal{R}(\nu)$.

Ahora, si $f \in \mathcal{R}(\nu)$,dado que

$$\nu(x_i) - \nu(x_{i-1}) = V_{x_{i-1}}^{x_i}(g),$$

entonces por el teorema V-1.2. (a), tenemos que

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega(f,[x_{i-1},x_i])V_{x_{i-1}}^{x_i}(g) = 0,$$

y usando el teorema V-1.2.(b), obtenemos que $f \in \mathcal{R}(g)$. Esto demuestra (b) y (a). □

1.5. <u>Nota</u>. Demostraremos en esta nota lo que afirmamos sin prueba al principio de la demostración del teorema anterior: Si $f \in \mathcal{R}_1(g)$. "puede suponerse" que $f$ es acotada en $[a,b]$, es decir, existe una función $h$ acotada, tal que

$$\int_{x_1}^{x_2} f\,dg = \int_{x_1}^{x_2} h\,dg,$$

para todos $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$. Para ello, supongamos primero que existe una sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \nearrow x$ y $\lim\limits_{x_n \nearrow x} |f(x_n)| = \infty$, es decir, $x$ es un punto singular de $f$ por la izquierda. Entonces $g$ tiene que ser constante en un intervalo de la forma $[x-\delta, x]$, pues si no sucediera esto, podríamos tomar una sucesión de números positivos $\{\delta_n\}$ con $\delta_n \searrow 0$, tal que $g(x-\delta_n) \neq g(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, como $\lim\limits_{x_n \nearrow x} |f(x_n)| = \infty$, podríamos tomar una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de la sucesión $\{x_n\}$ tal que

$$|f(x_{n_k})|\,|g(x-\delta_k) - g(x)| > k,$$

lo cual sería una contradicción a nuestra suposición de que $f \in \mathcal{R}_1(g)$. Análogamente, si $\{x_n\}$ es tal que $x_n \searrow x$ y $\lim\limits_{x_n \searrow x} |f(x_n)| = \infty$, $g$ es constante en un intervalo de la forma $[x, x+\delta]$. Así, hemos probado que si $f \in \mathcal{R}_1(g)$ y $\lim\limits_{x_n \to x} |f(x_n)| = \infty$, entonces $g$ tiene que ser constante en un intervalo a un lado o alrededor de $x$, lo que implica que existe $\delta > 0$, tal que

$$\int_{x-\delta}^{x} f\,dg = 0 \text{ ó } \int_{x}^{x+\delta} f\,dg = 0.$$

Sea $C = \{x \in [a,b]$ tal que existe $\{x_n\}$ en $[a,b]$ con $x_n \nearrow x$ ó $x_n \searrow x$

$$y \lim_{x_n \nearrow x} |f(x_n)| = \infty \text{ ó } \lim_{x_n \nearrow x} |f(x_n)| = \infty, \text{ respectivamente.}\}$$

El conjunto $C$ es cerrado, ya que si $x^*$ es un punto de acumulación de $C$, entonces existe una sucesión $\{y_n\}$ de elementos en $C$, tal que para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathrm{N}$, tal que si $n > N$, tenemos que $|y_n - x^*| < \epsilon/2$. Además, para todo $n \in \mathrm{N}$, existe una sucesión$\{y_k^{(n)}\}$ con $y_k^{(n)} \nearrow y_n$ ó $y_k^{(n)} \searrow y_n$ cuando $k \to \infty$, tal que

$$\lim_{y_k^{(n)} \nearrow y_n} |f(y_k^{(n)})| = \infty \quad \text{ó} \quad \lim_{y_k^{(n)} \searrow y_n} |f(y_k^{(n)})| = \infty,$$

es decir, podemos extraer una subsucesión$\{y_{k_\ell}^{(n)}\}_{\ell=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{y_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$, tal que si $|y_{k_\ell}^{(n)} - y_n| < \epsilon/2$, entonces

$$|f(y_{k_\ell}^{(n)})| > \ell$$

para todo $\ell \in \mathrm{N}$. Como

$$|y_{k_\ell}^{(n)} - x^*| \leq |y_{k_\ell}^{(n)} - y_n| + |y_n - x^*| < \epsilon$$

para $n > N$ y $\ell$ grande, concluimos que $x^* \in C$. Por lo tanto $C$ es cerrado y como es acotado, $C$ es compacto. Luego, $C$ es un conjunto compacto que consiste de los puntos $x \in [a,b]$ donde $\lim_{x_n \to x} |f(x_n)| = \infty$ y ya vimos que en cada uno de esos puntos existe un intervalo $I_x$ donde la $g$ es constante; más aún si $x \in C$ y $x$ es un punto singular sólo por la izquierda podemos tomar a $I_x$ de la forma $(x-\delta_x, x]$ ; si $x \in C$ y $x$ es singular solo por la derecha podemos tomar a $I_x$ de la forma $[x, x+\delta_x)$, y si $x \in C$ es singular de ambos lados podemos tomar a $I_x$ de la forma $(x-\delta_x, x+\delta_x)$. Ahora, si $x \in C$ y $x$ es un punto singular de

$f$ sólo por la izquierda, tomemos $\epsilon_x$ tal que en $(x,x+\epsilon_x)$ no haya puntos de $C$ y definamos $J_x = (x-\delta_x, x+\epsilon_x)$. Análogamente si $x \in C$ es un punto singular de $f$ sólo por la derecha, tomamos $\epsilon_x$ tal que en $(x-\epsilon_x, x)$ no haya puntos de $C$ y definimos $J_x = (x-\epsilon_x, x+\delta_x)$. Si $x \in C$ es un punto singular de $f$ por ambos lados tomamos $J_x = I_x$. Así, $\{J_x\}_{x\in C}$ constituye una cubierta abierta de $C$ y como $C$ es compacto, existe una subcubierta finita de $C$:

$$\{(x_i-\delta_{x_i}, x_i+\epsilon_{x_i})\}_{i=1}^{N}$$

en donde los $x_i \in C$, $i = 1,\ldots,N$. Si $x_i$ es un punto singular de sólo por la izquierda, entonces $g$ es constante en un intervalo de la forma $[x_i-\beta_{x_i}, x_i]$, (donde $\beta_{x_i}=\delta_{x_i}/2$, por ejemplo), y por lo tanto

$$\int_{x_i-\beta_{x_i}}^{x_i} f\,dg = 0,$$

por lo que en este intervalo podemos suponer a la función $f$ acotada; es más redefinimos a la función $f$ en estos intervalos como 0. Hacemos lo mismo si $x_i$ es un punto singular de $f$ sólo por la derecha o si $x_i$ es un punto singular de $f$ por ambos lados.

A la nueva función resultante le llamamos $h$. Luego $h$ es acotada, y utilizando las propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes dadas en la sección IV-1, es fácil verificar que si $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$, entonces

$$\int_{x_1}^{x_2} f\,dg = \int_{x_1}^{x_2} h\,dg,$$

que es lo que queríamos demostrar.

Los incisos (b) y (d) del teorema anterior muestran que es equivalente estudiar integrales de Riemann-Stieltjes con integradores de variación acotada a estudiar integrales de Riemann-Stieltjes con integradores monótonos crecientes.

Una vez demostrado este resultado podemos regresar al teorema que lo motivó y a sus consecuencias.

1.6. <u>Teorema</u>. Sea $g$ una función de variación acotada en $[a,b]$ y supongamos que $f \in \mathcal{R}(g)$ en $[a,b]$ y que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$. Si: $\phi:[m,M] \to R$ ( o $R^d$ o $C$ o $C^d$) es continua, entonces $\phi \circ f \in \mathcal{R}(g)$.

<u>Demostración</u>. Sabemos que el teorema es válido si $g$ es monótona creciente. Sea $g$ una función de variación acotada en $[a,b]$. Entonces $g = v - w$ donde $v$ y $w$ son la parte creciente y decreciente de $g$ respectivamente. Como $f \in \mathcal{R}(g)$, entonces $f \in \mathcal{R}(v)$ y $f \in \mathcal{R}(w)$ y por lo tanto $\phi \circ f \in \mathcal{R}(v)$ y $\phi \circ f \in \mathcal{R}(w)$, por lo que $\phi \circ f \in \mathcal{R}(g)$. □

1.7. <u>Corolario</u>. Si $f_1, f_2 \in \mathcal{R}(g)$ en $[a,b]$ y si $f_1$ y $f_2$ son reales y acotadas y $g$ es de variación acotada, entonces $f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{R}(g)$.

<u>Demostración</u>. Por el teorema anterior es claro que $(f_1+f_2)^2$ y $(f_1-f_2)^2 \in \mathcal{R}(g)$ y por lo tanto

$$f_1 \cdot f_2 = \frac{1}{4}\{(f_1+f_2)^2 - (f_1-f_2)^2\} \in \mathcal{R}(g). \ \square$$

1.8. Corolario. Si $g$ es monótona creciente en $[a,b]$ y si $f:[a,b] \to R^d$ es acotada, entonces $f \in \mathcal{R}(g)$ en $[a,b]$ y

$$\int_a^b |f|\,dg \geq \left|\int_a^b f\,dg\right|$$

Demostración. Si $f = (f_1,\ldots,f_d)$ entonces $|f|^2 = f_1^2 + \ldots + f_d^2 \in \mathcal{R}(g)$. Por lo tanto $\sqrt{|f|^2} = |f| \in \mathcal{R}(g)$. La desigualdad se cumple obviamente para cada suma de Riemann-Stieltjes:

$$|\Sigma(P,\xi,f,g)| \leq \Sigma(P,\xi,|f|,g),$$

y por lo tanto también se cumple para el límite. □

## § 2. CLASES DE FUNCIONES DETERMINADAS POR INTEGRALES DE RIEMANN-STIELTJES.

En la historia de la teoría de la integral, la clase de funciones continuas ha jugado un papel muy importante. En realidad se toma como un hecho que cualquier proceso de integración sobre un intervalo lineal "debe hacer" integrable a toda función continua. Esto hace surgir el problema de caracterizar la clase $\mathcal{L}$ de funciones $g$ tales que $\int_a^b f\,dg$ existe para toda función continua $f$ en $[a,b]$. Para los propósitos de esta caracterización no es necesario distinguir entre la norma-integral y la sigma-integral, debido a que si $f \in \mathcal{R}_1(g)$, para toda función $f$ continua, en particular, $f \in \mathcal{R}_1(g)$ para $f(x) = x$. Por lo tanto $g \in \mathcal{R}_1(f) = \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}$; luego $g$ es acotada y por lo tanto $f \in \mathcal{R}(g)$ para toda función $f$ continua.

2.1. Teorema. Una condición necesaria para que $\int_a^b f\,dg$ exista para toda función $f$ continua en $[a,b]$ es que $g$ sea de variación acotada.

Para la demostración de este teorema necesitamos dos lemas técnicos:

2.2. Lema. Si $a_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente, entonces existen constantes $c_n \geq 0$, con $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ y tales que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ es divergente.

Demostración. Si $S_n = \sum_{m=1}^{n} a_m$, entonces $c_n = 1/S_n$ es una sucesión positiva con $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Además

$$\sum_{p=0}^{m} \frac{a_{n+p}}{S_{n+p}} \geq \sum_{p=0}^{m} \frac{a_{n+p}}{S_{n+m}} = \frac{S_{n+m} - S_{n-1}}{S_{n+m}} = 1 - \frac{S_{n-1}}{S_{n+m}} .$$

Como $S_n$ tiende a infinito si $n$ tiende a infinito, existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{S_{n-1}}{S_{n+m}} < \frac{1}{2}$, y por lo tanto

$$\sum_{p=0}^{m} \frac{a_{n+p}}{S_{n+p}} > \frac{1}{2} ,$$

por lo que no se satisface la condición de Cauchy de convergencia de una serie. Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ es divergente. □

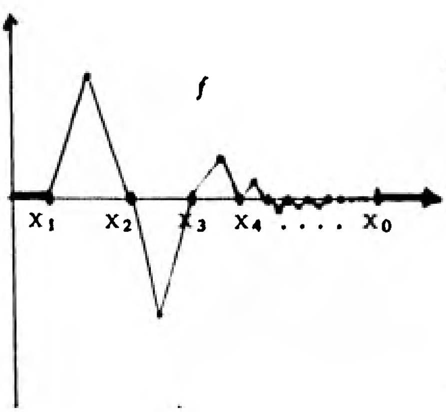
El segundo lema que necesitamos es simplemente una propiedad local de las funciones de variación acotada.

2.3. Lema. Una función $g$ es de variación acotada en $[a,b]$ si y solo si para todo $x \in [a,b]$, existe una vecindad $[x-\delta_1, x+\delta_2]$, con $\delta_1, \delta_2 > 0$ ($\delta_1=0$ si $x=a$, $\delta_2=0$ si $x=b$) tal que $g$ es de variación acotada en $[x-\delta_1, x+\delta_2]$.

Demostración. El "solo si" es obvio. El "si" se sigue del teorema de Heine-Borel. □

Demostración del teorema. Supongamos que $\int_a^b f\,dg$ existe para toda función continua $f$ pero que $g$ no es de variación acotada en $[a,b]$. Entonces existe un punto $x_0$ de $[a,b]$ tal que $g$ es de variación infinita sobre todo intervalo $[x_0-\delta_1, x_0+\delta_2]$ y por lo tanto $g$ es de variación infinita sobre $[x_0-\delta_1, x_0]$ para todo $\delta_1$ positivo o sobre $[x_0, x_0+\delta_2]$ para todo $\delta_2$ positivo. Supongamos que sucede lo primero. Podemos entonces encontrar una sucesión monótona creciente $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $x_n$ aproximándose a $x_0$ por la izquierda tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |g(x_{n+1}) - g(x_n)| = \infty.$$




Usando el lema V-2.2, tomemos $c_n$, para $n=1,2,\ldots$ tales que $c_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n |g(x_{n+1}) - g(x_n)| = \infty$. Construyamos $f$ de la manera siguiente: (a) $f(x) = 0$ para $a \leq x \leq x_1$ y para $x \geq x_0$; (b) $f(x_n) = 0$ para todo número natural $n$; (c) $f[(x_n+x_{n+1})/2] = c_n \cdot \text{signo}(g(x_{n+1}) - g(x_n))$

(d) $f(x)$ lineal entre $x_n$ y $(x_n+x_{n+1})/2$ y entre $(x_n+x_{n+1})/2$ y $x_{n+1}$. Entonces $f(x)$ es continua en $[a,b]$. Ahora, si $P = \{x_0',\ldots,x_n'\}$ es cualquier partición de $[a,b]$ con $x_k' < x_0 \leq x_{k+1}'$, para cualquier número positivo M, podemos agregar $x_0$ y un número finito de puntos $x_n$ entre $x_k'$ y $x_0$ a P, de manera que

$$\sum_{x_n \in P} f[(x_n+x_{n+1})/2][g(x_{n+1}) - g(x_n)] > M.$$

Por lo tanto, si $\xi \sim P$, tenemos que

$$\lim_{P\uparrow} \Sigma(P,\xi,f,g)$$

no existe, lo cual contradice la hipótesis de que $\int_a^b f\,dg$ existe. Luego, hemos demostrado que si $\int_a^b f\,dg$ existe para toda función continua $f$ en $[a,b]$, entonces $g$ es de variación acotada en $[a,b]$.

El inverso de la demostración ya lo hemos probado en el teorema II-1.2. □

Si intercambamos los papeles de $f$ y $g$ tenemos otro teorema.

2.4. Teorema. Si $\int_a^b f\,dg$ existe para todas las funciones $g$ de variación acotada en $[a,b]$, entonces $f$ es continua en $[a,b]$.

Demostración. Sea $x_0 \in [a,b]$ y sea $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < x_0 \\ 0 & \text{si } x = x_0 \\ 1 & \text{si } x > x_0 \end{cases}$

Entonces $g$ es de variación acotada y es claro que $\int_a^b f\,dg$ existe si y solo si $f$ es continua en $x = x_0$. Por lo tanto, si $\int_a^b f\,dg$

existe para toda $g$ de variación acotada en $[a,b]$, entonces $f$ es continua en $[a,b]$. □

De estos dos teoremas concluimos que la clase de funciones continuas es complementaria o adjunta a la clase de funciones de variación acotada con respecto a la integral $\int_a^b f\,dg$.

# R E F E R E N C I A S


1. Apostol, Tom. "Mathematical Analysis", 2nd. edition, CalTech., Addison-Wesley, 1974, pp. 140-182.

2. Hildebrandt, T.H., "Introduction to the Theory of Integration", University of Michigan, Academic Press, 1963, pp. 25-71.

3. Hildebrandt, T.H., "Definitions of Stieltjes integrals of the Riemann type", American Mathematical Monthly, vol. 45, pp.265-279.

4. Rudin, W. "Principles of Mathematical Analysis", University of Wisconsin, Mc. Graw-Hill Book Company, 1964, pp. 104-129.