

① *2jeat.*

UN PROBLEMA DE CONVECCION EN FLUIDOS



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# TESIS CON FALLA DE ORIGEN

# INDICE

## INTRODUCCION

### CAPITULO I

#### ASPECTO FISICO DEL PROBLEMA

- |                                     |         |
|-------------------------------------|---------|
| A) HIPOTESIS DEL CONTINUO           | PAG. 1  |
| B) CONSERVACION DE LA MASA          | PAG. 3  |
| C) CONSERVACION DEL MOMENTO         | PAG. 5  |
| D) ECUACION DE ESTADO               | PAG. 25 |
| E) ECUACION DE CONDUCCION DE CALOR  | PAG. 26 |
| F) SIMPLIFICACION DE LAS ECUACIONES | PAG. 32 |

### CAPITULO II

#### EL PROBLEMA A TRATAR

- |                                      |         |
|--------------------------------------|---------|
| A) CARACTERISTICAS GENERALES         | PAG. 37 |
| B) ECUACIONES DEL PROBLEMA DE BENARD | PAG. 40 |

### CAPITULO III

#### ASPECTO MATEMATICO DEL PROBLEMA

- |                       |         |
|-----------------------|---------|
| A) EL PROBLEMA LINEAL | PAG. 48 |
|-----------------------|---------|

### CAPITULO IV

- |              |         |
|--------------|---------|
| CONCLUSIONES | PAG. 67 |
|--------------|---------|

#### BIBLIOGRAFIA

## INTRODUCCION

El proposito de este trabajo, es el de obtener resultados cualitativos y cuantitativos sobre un problema de convección en fluidos usando elementos de análisis funcional, enfocados básicamente a la teoría de Bifurcación.

En este caso, las características propias del problema nos permiten aplicar esta herramienta mencionada en una versión sencilla, pues los resultados generales como existencia de operadores inversos, el operador adjunto, construcción de Espacios de Hilbert, características de los Kernelses y rangos de los operadores, analiticidad y otros se pueden obtener en forma explícita.

Se hará un estudio completo de la ecuación de bifurcación y se encontrará el desarrollo para el primer eigenvalor.

El trabajo se basará en los dos artículos de Eduard Reis et. al.

## CAPITULO I.

### A) ASPECTO FISICO DEL PROBLEMA.

Hablaremos en general, del comportamiento de los flúidos viscosos sometidos a diferencias de temperaturas, se -- plantearán las hipótesis y se deducirán las ecuaciones - que caracterizan el fenómeno para que en la siguiente - sección se aplique todo esto al problema que nos intere- sa tratar.

De acuerdo a la evidencia experimental (Chandrasekhar - Pag. 9-10, 60-72), los flúidos viscosos transportan ca- - lor mediante dos mecanismos:

- a) Conducción, en la cual la energía se transporta direc- tamente de molécula a molécula y no hay movimiento del - flúido a nivel macroscópico.
- b) Convección, en la cual la energía se transporta a tra- vés del movimiento de elementos macroscópicos de flúidos. Este movimiento se debe básicamente a que una diferencia de temperatura produce una diferencia en las densidades- entre partes del flúido (ésto lo da la ecuación de esta- do) y combinado ésto con el efecto de la gravedad produ- ce esta tendencia a moverse. Cabe mencionar que este - efecto debe ser lo suficientemente (grande) para vencer- el efecto de fricción debido a la viscosidad.

Se ha hablado de comportamiento macroscópico y microsco-

pico, por lo que habría que aclarar que se entiende por una y otra cosa.

Desde el punto de vista microscópico, en un fluido se tiene que las distancias entre moléculas son mucho mayores que el tamaño de dichas moléculas, además las moléculas se mueven de manera aleatoria y su distribución también lo es. Para estudiar el comportamiento de un fluido desde el punto de vista microscópico, se requiere del uso de la mecánica estadística, y una buena referencia es el libro "Thermodynamics and Statistical Mechanics" de Sommerfeld.

El punto de vista microscópico, el cual vamos a tomar, nos dice que lo que vamos a considerar como un punto, sería la región más chica en la que los instrumentos de medición miden el valor de cierta propiedad física. Así por ejemplo, un instrumento que mide en una región de  $10^{-9}$  cm<sup>3</sup> (un punto), nos hace ver que lo que mide es un promedio sobre aproximadamente  $3 \times 10^{10}$  moléculas.

En estas condiciones, se supondrá que el fluido es un ente perfectamente continuo (llena todo el espacio físico) y que sus propiedades como masa, momento y temperatura son funciones de la posición que al menos son continuas. Esto se conoce como hipótesis del continuo y es nuestra primera hipótesis.

Que la hipótesis sea buena si tomamos el punto de vista macroscópico es intuitivamente claro y como evidencia ex-

perimental vemos en la figura 1 que en la región que llamamos macroscópica, la densidad es una función continua de la posición, pues la diferencia de su valor entre "puntos" vecinos es pequeña.

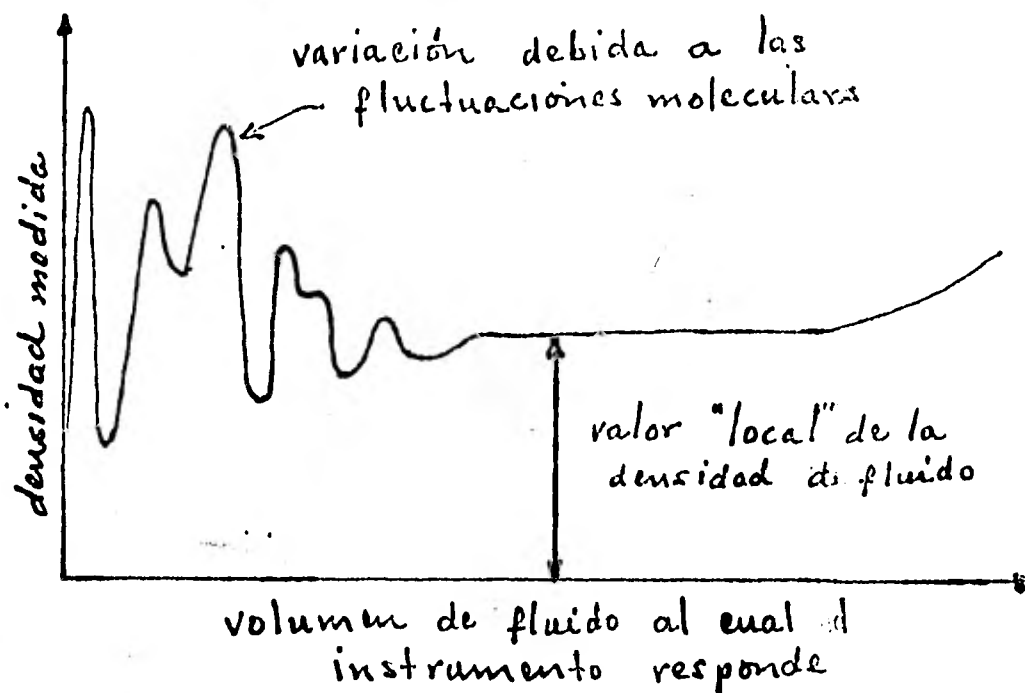


figura 1.- Efecto del tamaño de la región de medición en el valor de la densidad medida.

Las leyes de conservación en la física nos llevan a las ecuaciones que describen un fenómeno. En este caso son cuatro leyes las que nos interesan, la de conservación de la masa, la de la conservación del momento, la de la conservación de la energía y la de la conservación del momento angular.

#### B) CONSERVACION DE LA MASA.

Si consideramos problemas en el que la cantidad de masa dentro del recipiente permanece constante para todo tiempo, es decir que no hay fuentes ni sumideros, tenemos --



que si tomamos un elemento de fluido en un volumen  $V$  la masa que hay en  $V$  está dada por:

$$m = \int_V \rho(x, t) dV$$

por lo que

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(x, t) dV$$

Aquí se está considerando  $V$  independiente del tiempo.

Ya que no hay fuentes ni sumideros, la pérdida o ganancia de fluido en  $V$  únicamente se puede deber a entradas o salidas de éste a través de la superficie  $S$  que encierra a  $V$ .

Es decir,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(x, t) dV = - \int_S \rho(x, t) \underline{u} \cdot \underline{n} dS \quad (I.1)$$

En donde  $\underline{u}$  representa la velocidad del fluido y  $\underline{n}$  es la normal exterior a  $S$ . De ahí el signo menos por que si entra fluido  $\underline{u} \cdot \underline{n} < 0 \Rightarrow \frac{dm}{dt} > 0$ .

Por el teorema de la divergencia (I.1) se transforma en

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(x, t) dV = - \int_V \text{div}(\rho \underline{u}) dV \quad (I.2)$$

Consideramos  $\rho$  una función diferenciable en  $\underline{x}$  y  $T$  y  $V$  un volumen finito de fluido, entonces derivamos bajo el signo-

de la integral en (I.2.)

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{u}) \right] dV = 0$$

Esta igualdad es cierta para cualquier volumen arbitrario que contenga flúidos, si el integrando es continuo - (es decir pediremos que  $\underline{u}$  al menos sea  $C^1$  en las variables de la posición) entonces la última igualdad es cierta para todo volumen  $V$  si y sólo si

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{u}) = 0 \quad ( I.3 )$$

A la ecuación (I.3) se le conoce como ecuación de continuidad.

### C) CONSERVACION DEL MOMENTO.

La conservación del momento nos va a dar las ecuaciones dinámicas del flúido.

Lo que haremos será tomar un elemento de flúidos y describir su movimiento, suponiendo que éste lo rige la segunda ley de Newton.

Así, si  $\underline{u}$  representa la velocidad del elemento de flúido, entonces

$$\frac{d}{dt}(\rho \underline{u}) = \sum_i \underline{F}_i$$

$\underline{F}_i$  son densidades de fuerza.

De la regla de la cadena

$$\frac{d}{dt}(\rho \underline{u}) = \underline{u} \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{u} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \rho \right) + \rho \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \right)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho \underline{u}) = \sum_i F_i$$

Es decir,

$$\underline{u} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \rho \right) + \rho \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \right) = \sum_i F_i$$

Pasaremos ahora a identificar las fuerzas que actúan sobre un fluido.

Clasificaremos a las fuerzas en dos clases:

a) Fuerzas externas que como su nombre lo indica, se deben a agentes externos a todo el fluido (también se les llama fuerzas volumétricas Batchelor Pag.7). El ejemplo más claro que encontramos, es el de la fuerza de la gravedad (que será de hecho la única fuerza externa que existirá en nuestro problema). En el movimiento de un fluido viscoso entre cilindros coaxiales que giren uno con respecto al otro, (problema de Taylor) otra fuerza que actúa es la fuerza centrípeta. También son fuerzas externas las que resultan de la acción de tracciones sobre la frontera del fluido (aunque estas son fuerzas por unidad de área).

b) Fuerzas internas o fuerzas superficiales sobre el elemento de fluido que se está considerando, son las que existen debido a la interacción del elemento de fluido

con elementos vecinos. Las fuerzas internas mas importantes son las debidas a la presión y a las fuerzas cortantes (las fuerzas cortantes son las fuerzas tangenciales por unidad de superficie que ejerce un elemento fluido sobre la superficie de otro cuando están en movimiento relativo).

Encontraremos ahora la representación de la densidad de fuerzas internas. Veremos que éstas estén dadas en términos de un tensor.

Recordamos que existen en la Física algunas cantidades vectoriales cuya relación es tal que una no es colineal a la otra como la polarización  $\vec{P}$  y el campo eléctrico  $\vec{E}$  en donde se tiene la relación.

$$P_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} E_j \quad i=1,2,3$$

Al conjunto  $\alpha_{ij}$  se le llama tensor de polarizabilidad y se dice que es de rango dos porque tiene 2 subíndices.

Los tensores de rango dos se representan por matrices y así la última ecuación se puede escribir en notación matricial.

$$\vec{P} = \Lambda \vec{E} \quad \Lambda = (\alpha_{ij})$$

Definiremos ahora un tensor de rango dos que se llamará tensor de esfuerzo y mostraremos que dicho tensor, me relacionará la normal a la superficie que encierra a nues-

tro elemento de fluido, con las fuerzas internas que actúan sobre éste.

Consideremos un elemento de área en forma de rectángulo cuya normal apunte en la dirección del eje Y.

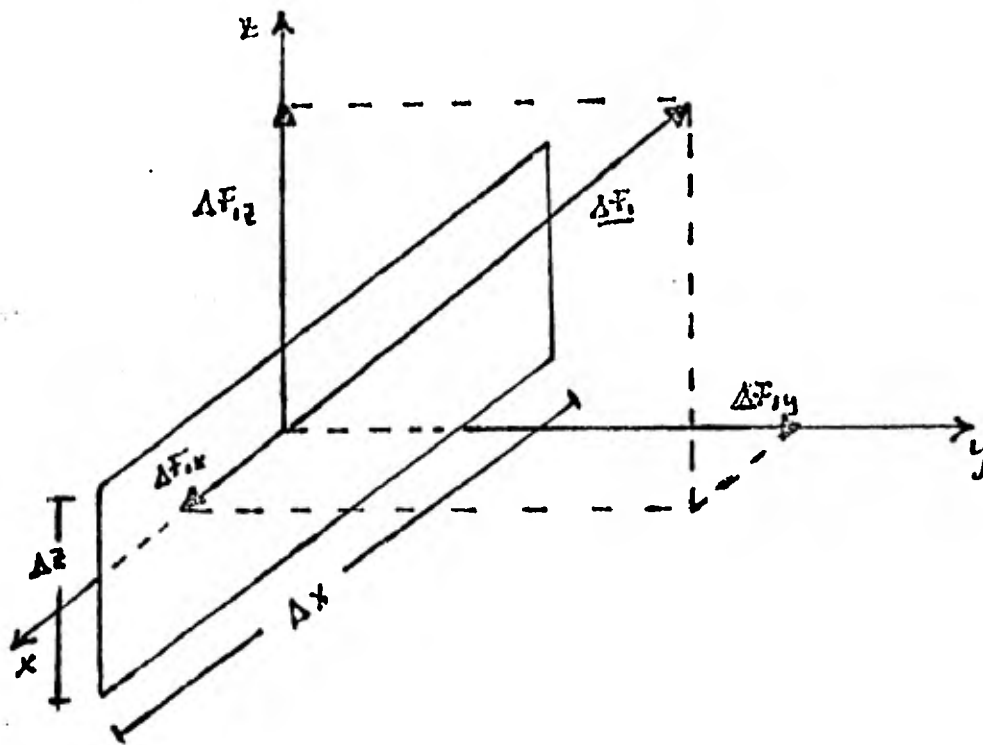


Figura 2.- Descomposición de la fuerza sobre un elemento rectangular.

Las fuerzas que ejercen elementos vecinos al rectángulo estarán representadas por  $\Delta \underline{F}_i = (\Delta F_{ix}, \Delta F_{iy}, \Delta F_{iz})$ .

Debido a que estamos considerando un rectángulo muy pequeño,  $\Delta \underline{F}_i$  es constante en todo el rectángulo.

De esta manera, la fuerza por unidad de área está dada por

$$\frac{\Delta \underline{F}_i}{\Delta a_y} = \left( \frac{\Delta F_{ix}}{\Delta a_y}, \frac{\Delta F_{iy}}{\Delta a_y}, \frac{\Delta F_{iz}}{\Delta a_y} \right)$$

Definiremos:  $S_{xy} \equiv \frac{\Delta F_{ix}}{\Delta a_y}$        $S_{yy} \equiv \frac{\Delta F_{iy}}{\Delta a_y}$        $S_{zy} \equiv \frac{\Delta F_{iz}}{\Delta a_y}$

y en general  $S_{ij} = \frac{\Delta F_i}{\Delta a_j}$  en donde  $\Delta F_i$  representa la "iésima" componente de la fuerza  $\Delta F$  y  $\Delta a_j$  representa un elemento de área  $\Delta a$  cuya normal apunte en la dirección  $x, y$  ó  $z$  si  $j = 1, 2, 3$  respectivamente.

Como  $i$  corre también de 1 a 3 tenemos 9 cantidades  $S_{ij}$  que me definen un tensor de rango 2 y que se llama tensor de esfuerzos.

$$S = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix}$$

Queremos ahora ver que efectivamente  $S$  es un tensor en el sentido de que relaciona un vector con otro.

Para hacer ésto, tomamos un elemento de volumen en forma de tetraedro (aunque se toma un volumen particular para facilitar cálculos, el resultado será válido en general).

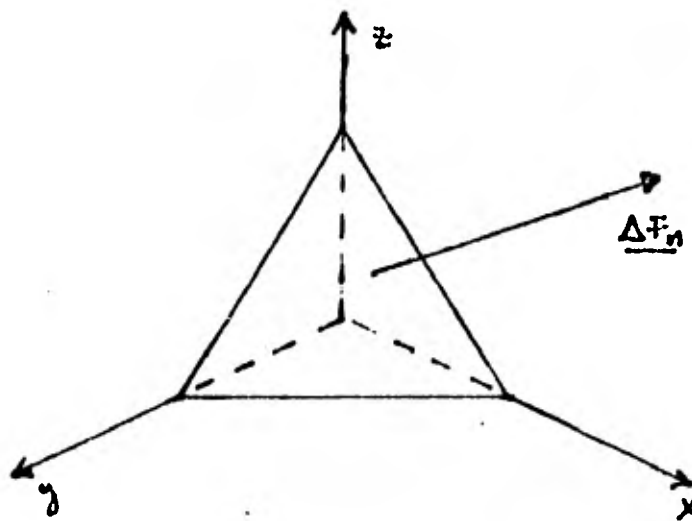


Figura 3: Fuerza normal a la cara del tetraedro

La pregunta es: ¿Podemos determinar  $\Delta F_n$  en términos de  $S$  ?

Para contestar empezaré por dar una primera hipótesis de nuestro modelo. Esta es que las  $S_{ij}$  son de orden 1 ó de acuerdo a la definición de  $S_{ij}$  que  $\Delta F = O(\alpha)$ , las fuerzas internas son proporcionales al área.

De la segunda ley de Newton, tenemos que para el elemento de volumen que estamos considerando (el tetraedro).

$$\rho \Delta V \ddot{a} = \sum_i F_{e_i} \Delta V + \sum_j F_{s_j} \Delta A$$

donde  $\Delta V$  es el volumen,  $\ddot{a}$  la aceleración,  $F_{e_i}$  las densidades de fuerzas externas y  $F_{s_j}$  las fuerzas superficiales por unidad de área.

Reagrupando

$$(\rho \ddot{a} - \sum_i F_{e_i}) \Delta V - \sum_j F_{s_j} \Delta A = 0$$

Sabemos que  $\rho$  es finita y que la aceleración para el tipo de problemas que nos interesan también lo es y las densidades de fuerzas externas como  $\rho g$  son también finitas, por lo que el término

$$(\rho \ddot{a} - \sum_i F_{e_i}) = O(\sum_j F_{s_j})$$

Y como estamos considerando elementos de volumen infinitesimales se tiene que  $\Delta V = o(\Delta A)$ , por lo que la última ecuación se cumple si:

$$\sum_j F_{s_j} = 0$$

Se tiene que la componente X de las fuerzas que actúan -

dencia a deformarse cuando se aplican esfuerzos cortantes (fuerzas tangenciales por unidad de área que ejerce un elemento de fluido sobre elementos vecinos cuando hay movimientos relativos de éstos), sin cambiar su volumen.

Visto a groso modo, si nosotros presionamos un pedazo de plastilina con nuestros dedos, éste cambiará de forma, - en cambio si nosotros metemos nuestra mano al agua y la movemos, se produce un movimiento en el agua, debido a la tendencia al cambio de volumen.

Supongamos ahora un fluido en reposo, de acuerdo a lo dicho anteriormente, los esfuerzos cortantes deben de valer cero, es decir  $S_{ij}=0$  si  $i \neq j$  (se puede ver de la definición de  $S_{ij}$  que si  $i \neq j$ ,  $S_{ij}$  son producidas por fuerzas tangenciales).

Consideramos un elemento de fluido esférico, entonces si el fluido está en reposo.

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & 0 & 0 \\ 0 & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{pmatrix}$$

Definiendo a  $\sigma = \text{traza } S = S_{11} + S_{22} + S_{33}$  entonces

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{11} - \frac{1}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & S_{22} - \frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} - \frac{1}{3}\sigma \end{pmatrix}$$

El primer tensor tiene simetría esférica, pues si llamamos

mos  $S_s = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\sigma \end{pmatrix}$  se tiene que  $S_s \underline{n} = \frac{1}{3}\sigma \underline{n}$

así que si tenemos una esfera en cada punto se tiene que  $S_s \underline{n}$  apunta en la dirección normal y tiene la misma magnitud  $\frac{1}{3}\sigma$ .



Del segundo tensor en  $S$  tenemos que su traza vale cero por lo tanto las tres componentes principales no pueden tener el mismo signo. Supongamos que tenemos dos negativos, (que representan fuerzas de compresión) y uno positivo, (que representa una fuerza de tensión).

Las fuerzas superficiales debidas a este segundo tensor son:

$$S'_{xn} = (S_{11} - \frac{1}{3}\sigma) n_1, \quad S'_{yn} = (S_{22} - \frac{1}{3}\sigma) n_2, \quad S'_{zn} = (S_{33} - \frac{1}{3}\sigma) n_3$$

dos negativos y uno positivo.

En la siguiente figura, se representa el corte de la esfera por un plano y en donde  $S_{11} - \frac{1}{3}\sigma$  y  $S_{22} - \frac{1}{3}\sigma$  tienen signos distintos.

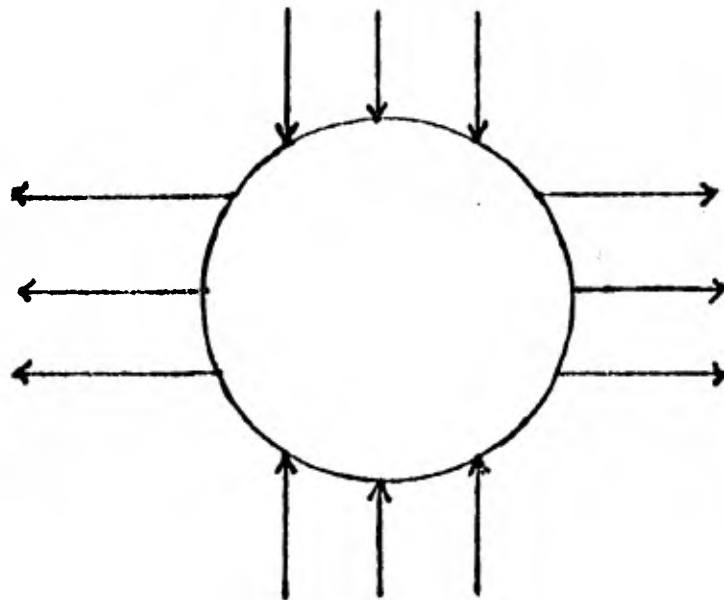


Figura 4.- corte de una esfera del fluido

Debido a que por un lado se comprime y por el otro se expande, la esfera tendería a deformarse y tomaría la forma de una elipsoide, pero el fluido no resistiría esa tendencia a deformarse y se empezaría a mover, en contradicción a la hipótesis de que el fluido está en reposo, por-

lo tando  $S_{11} - \frac{1}{3}\sigma = S_{22} - \frac{1}{3}\sigma = S_{33} - \frac{1}{3}\sigma = 0$ .

Resumiendo esta discusión se tiene que para un fluido en reposo la matriz  $S$  está dada por  $S = \frac{1}{3}\sigma I$  donde  $I$  es la matriz identidad lo que nos dice que todas las fuerzas son normales y de la misma magnitud. De nuestra experiencia propia, al estar bajo el agua sabemos que la fuerza es la compresión y es la debida a la presión hidrostática (recordando que presión es fuerza por unidad de área). Entonces, si le damos un signo positivo a la presión quedará  $S = -pI$  con  $p = \frac{1}{3}\sigma$  para un fluido en reposo.

Toca ahora determinar la forma de  $S$  para un fluido en movimiento. Aquí haremos una segunda hipótesis y éstas es que el tensor de esfuerzos es simétrico  $S_{xy} = S_{yx}$ , (En realidad es una consecuencia de la ley de conservación de momento como se puede ver en el apéndice). Todo tensor simétrico con el sistema de referencia adecuado se puede representar en un punto del fluido por

$$S' = \begin{pmatrix} S'_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & S'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & S'_{zz} \end{pmatrix}$$

en donde esperamos que al menos uno sea distinto de los otros para que exista movimiento.

Lo que ahora esperamos es que haya contribución de las fuerzas tangenciales, de manera que para un fluido en movimiento, la fuerza total no apunte en la dirección de la normal. Sin embargo, de nuestra experiencia de la

hidrostática, vamos a definir ahora la presión para un fluido en movimiento como el promedio de las componentes normales de las fuerzas superficiales sobre un elemento de fluido.

Tomemos como elemento de fluido una pequeña esfera centrada en un punto  $\underline{X}$ , en donde vamos a suponer que  $S$  es constante.

En general, el vector  $\underline{S}^n$  no apunta en la dirección de la normal a la esfera, su proyección sobre ésta es el producto escalar  $\underline{S}^n \cdot \underline{n} = \underline{n}^T S \underline{n}$  siguiendo la notación matricial. Sobre esta cantidad, se tiene la siguiente propiedad.

#### TEOREMA

El promedio de  $\underline{n}^T S \underline{n}$  sobre la esfera es igual a menos la presión,  $\overline{\underline{n}^T S \underline{n}} = -p$ . Aquí la presión es hidrodinámica

Prueba

Sea una esfera de radio  $r$ , por definición

$$\overline{\underline{n}^T S \underline{n}} = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\Omega} (\underline{n}^T S \underline{n}) d\Omega$$

Sea  $\Lambda \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$  y  $P = (P_{ij})$  dos matrices

Tales que  $P^T S P = \Lambda$  con  $P^T P = I$ .

La existencia de la matriz  $P$  está asegurada, pues la forma  $\underline{n}^T S \underline{n}$  es Hermiteana ya que  $S$  es real y simétrica (Courant - Hilbert Vol. 1 Pags. 23-25).

Así pues,

$$n^T S n = n^T P \Lambda P^T n = (P^T n)^T \Lambda (P^T n) = \lambda_1 \zeta_1^2 + \lambda_2 \zeta_2^2 + \lambda_3 \zeta_3^2$$

(donde  $P^T n = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix}$  es la rotación de  $n$  dada por  $P^T$ )  
 y por lo tanto,

$$\overline{n^T S n} = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\Omega} (\lambda_1 \zeta_1^2 + \lambda_2 \zeta_2^2 + \lambda_3 \zeta_3^2) d\Omega.$$

Notamos que,  $\|P^T n\|^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 = 1$  pues,  
 $P^T$  y  $n$  son unitarios.

Si ahora rotamos nuestro sistema de coordenados por  $P^T$ ,  
 es decir sea

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

el Jacobiano de nuestra transformación es

$$\det. \begin{pmatrix} \partial x'_i \\ \partial x_j \end{pmatrix} = \det. P^T = 1 \quad (\text{la transformación es derecha})$$

y es claro que

$$\begin{pmatrix} \zeta_1(x', y', z') \\ \zeta_2(x', y', z') \\ \zeta_3(x', y', z') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1(x', y', z') \\ n_2(x', y', z') \\ n_3(x', y', z') \end{pmatrix}$$

Por lo que

$$\overline{n^T S n} = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\Omega'} (\lambda_1 n_1^2 + \lambda_2 n_2^2 + \lambda_3 n_3^2) d\Omega'$$

$\Omega'$  es la esfera rotada.

Sabemos que

$$\begin{aligned} n_1 &= \cos \theta \sin \phi \\ n_2 &= \sin \theta \sin \phi \\ n_3 &= \cos \phi \end{aligned}$$

y que  $d\Omega' = r^2 \sin \phi d\theta d\phi$

entonces,

$$\overline{n^T S n} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [\lambda_1 \cos^2 \theta \sin^3 \phi + \lambda_2 \sin^2 \theta \sin^3 \phi + \lambda_3 \cos^2 \phi \sin \phi] d\theta d\phi$$

$$\overline{n^T S n} = \frac{1}{4\pi} \left[ \lambda_1 \int_0^{2\pi} \left( \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \int_0^\pi (1 - \cos^2 \phi) \sin \phi d\phi + \lambda_2 \int_0^{2\pi} \left( \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \int_0^\pi (1 - \cos^2 \phi) \sin \phi d\phi \right. \\ \left. + 2\pi \lambda_3 \int_0^\pi \cos^2 \phi \sin \phi d\phi \right]$$

$$\overline{n^T S n} = \frac{1}{4\pi} \left[ \lambda_1 \pi \left( -\cos \phi + \frac{\cos^3 \phi}{3} \right) \Big|_0^\pi + \lambda_2 \pi \left( -\cos \phi + \frac{\cos^3 \phi}{3} \right) \Big|_0^\pi - \frac{2\pi}{3} \lambda_3 \cos^3 \phi \Big|_0^\pi \right]$$

$$\overline{n^T S n} = \frac{1}{3} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = \frac{1}{3} \sigma = -p$$

en donde se define en forma general a la presión como -

$$p = -\frac{1}{3} \sigma \equiv -\frac{1}{3} \text{tr. } \Lambda \quad \text{y es fácil ver que esta defini-}$$

ción se reduce al valor de la presión hidrostática para el caso de un fluido en reposo, pues en este caso,

$$\overline{n^T S n} = -p \overline{n^T I n} = -p \Rightarrow \overline{n^T S n} = -p$$

Vamos ahora a descomponer el tensor  $S$  como la suma de dos tensores

$$S = -pI + \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix}$$

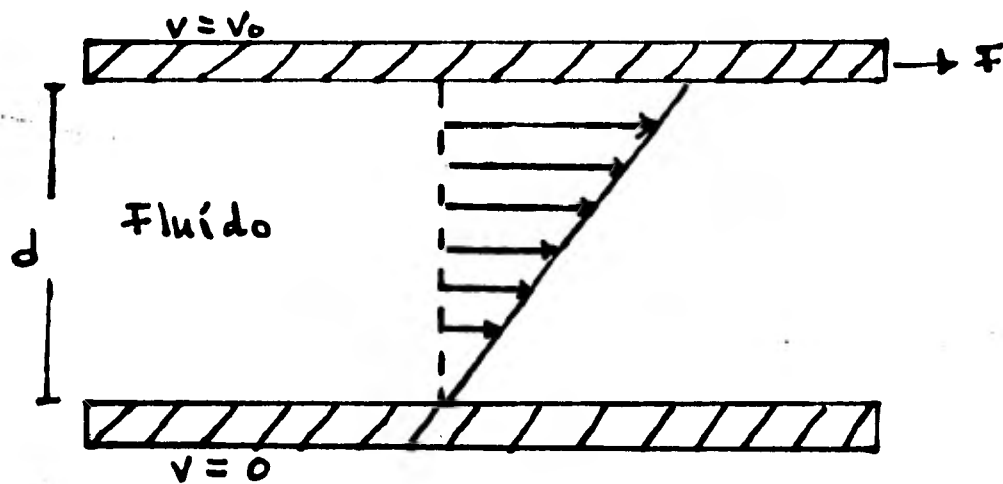
$$\text{en donde } p = -\overline{n^T S n} = -\frac{1}{3} [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3]$$

El segundo tensor se debe únicamente al movimiento, pues para un fluido en reposo este vale cero.

Buscamos ahora la forma que toman los elementos del segundo tensor.

Empezaremos por explicar el experimento que aparece en el segundo volumen de las lecturas de Física de Feynman - Cap. 41 en el que tenemos dos superficies sólidas planas con agua entre ellas. Se mantiene una de ellas en -

reposito y se mueve la otra con velocidad  $V_0$  como lo muestra la figura,



$A =$  Area de la superficie sólida

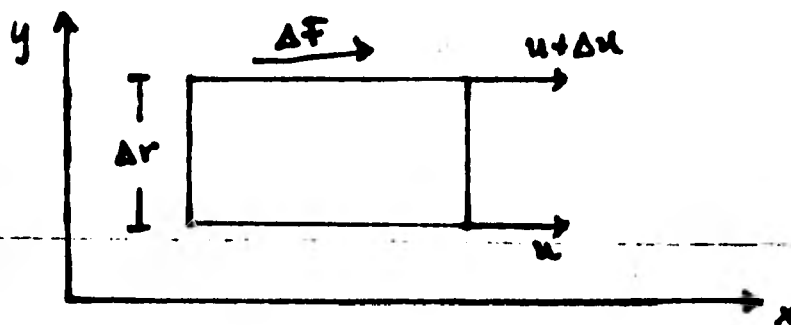
figura 5.- Esquema de las fuerzas de un fluido en movimiento.

Si en este experimento se mide la fuerza necesaria para mantener el movimiento de la parte superior a una velocidad  $V_0$  se tiene que,

$$F = \eta' \frac{A V_0}{d} \Rightarrow \frac{F}{A} = \eta' \frac{V_0}{d}$$

A la constante  $\eta'$  se le llama coeficiente de viscosidad.

Considerando ahora un fluido en movimiento y tomamos de éste una pequeña celda rectangular en la que hay movimiento relativo en la dirección  $X$  de la placa superior respecto a la inferior como lo muestra la siguiente figura.



GRÁFICA  $y$  vs  $x$ .

Area de la superficie superior =  $\Delta A_y$

Una tercera hipótesis a nuestro modelo es que la fuerza de corte por unidad de área que existe debido al movimiento relativo, es de la misma forma que la encontrada en el experimento discutido anteriormente. Es decir, -

$$\frac{\Delta F_x}{\Delta A_y} = \eta' \frac{\Delta u_x}{\Delta y}$$

y por otra parte, de la definición del tensor de esfuerzos

$$S_{xy} = \frac{\Delta F_x}{\Delta A_y}$$

Tomando el límite cuando  $\Delta y \rightarrow 0$  y  $\Delta u_x \rightarrow 0$

$$S_{xy} = \eta' \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

y en general

$$S_{ij} = \eta' \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \begin{matrix} i=1,2,3 \\ j=1,2,3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \end{matrix} \quad \begin{matrix} u_1 = u_x \\ u_2 = u_y \\ u_3 = u_z \end{matrix}$$

Por hipótesis,  $S_{ij} = S_{ji}$  por lo que

$$S_{ij} = \eta' / 2 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i \neq j$$

$$y \quad S_{ii} = -p + S'_{ii} = -p + \eta' \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad i=1,2,3.$$

Definiendo  $\eta' = 2\eta$  tenemos que

$$S_{ij} = \eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{para } i \neq j.$$

$$S_{ii} = -p + 2\eta \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad i=1,2,3.$$

En realidad, la expresión para  $S_{ii}$  es incompleta, aunque el término que falta se hace cero para fluido incompresible que son los que más nos interesan.

Para encontrar la expresión completa, explicaremos como-

llegaron a ésta Lamb (pag. 574) y Batchelor (pag. 143). - Ambos sostienen la hipótesis de que el tensor  $S$  depende linealmente de las derivadas espaciales de la velocidad.

Lamb habla de la existencia de fuerzas de interacción entre elementos del fluido con sus vecinos debido a la compresión de éste (se puede pensar que para un fluido compresible, movimientos relativos de elementos de fluidos que producen esfuerzos de corte que dependen linealmente de las derivadas espaciales de la velocidad por hipótesis, pueden producir a nivel global compresiones del fluido en unas regiones y expansiones en otras)..

El término  $\text{div } \underline{v}$  que es lineal en las derivadas espaciales de  $\underline{v}$  está íntimamente relacionado con la compresibilidad del fluido, pues si éste es incompresible ( $\rho = \text{cte.}$ ) de la ecuación de continuidad se deduce que  $\text{div } \underline{v} = 0$  por lo que Lamb añade a  $S_{ij}$  el término simétrico  $\lambda \text{div } \underline{v}$  en donde  $\lambda$  es una constante que está determinada por el hecho de que

$$\text{tr. } S = S_{11} + S_{22} + S_{33} = -3p + 2\eta \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + 3\lambda \text{div } \underline{v} = -3p$$

Entonces  $(2\eta + 3\lambda) \text{div } \underline{v} = 0$

Si el fluido es compresible  $\text{div } \underline{v} \neq 0$  en general, por lo que  $\lambda = -\frac{2}{3}\eta$  y así,

$$S_{ii} = -p + 2\eta \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\eta \text{div } \underline{v}$$

Batchelor por su parte, usa la hipótesis de la dependen-



cia lineal de  $S$  con las derivadas espaciales de la velocidad.

Del cálculo tensorial, tenemos que la dependencia lineal entre dos tensores de segundo orden se establece a través de un tensor de cuarto orden.

Definamos el tensor de segundo orden,  $U$

como 
$$U = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad \begin{matrix} i=1,2,3 \\ j=1,2,3 \end{matrix}$$

entonces  $S' = AU$  en donde  $A$  es un tensor de cuarto orden cuyos elementos están dados por  $A_{ijkl}$  y

$$S' = S + pI.$$

Los fluidos que consideramos serán siempre isotrópicos, por lo tanto el tensor  $A$  es isotrópico.

Sobre tensores isotrópicos de cuarto orden proponemos el siguiente resultado (Jeffreys capítulo VII).

Todo tensor isotrópico de cuarto orden se puede escribir de la forma

$$A_{ijkl} = \eta \delta_{ik} \delta_{jl} + \eta' \delta_{il} \delta_{jk} + \eta'' \delta_{ij} \delta_{kl}$$

Así

$$S_{ij} = (\eta \delta_{ik} \delta_{jl} + \eta' \delta_{il} \delta_{jk} + \eta'' \delta_{ij} \delta_{kl}) U_{kl}$$

como 
$$S'_{ij} = S'_{ji}$$

$$\eta \delta_{ik} \delta_{jl} + \eta' \delta_{il} \delta_{jk} + \eta'' \delta_{ij} \delta_{kl} = \eta' \delta_{lj} \delta_{ki} + \eta \delta_{jk} \delta_{il} + \eta'' \delta_{ji} \delta_{kl}$$

Entonces  $\eta = \eta'$  por lo que  $A_{ijkl} = \eta (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \eta'' \delta_{ij} \delta_{kl}$

De esta forma

$$S'_{ij} = \eta (\delta_{ik} \delta_{je} + \delta_{ie} \delta_{jk}) \frac{\partial u_e}{\partial x_k} + \eta'' \delta_{ij} \delta_{ke} \frac{\partial u_k}{\partial x_e}$$

$$S'_{ij} = \eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \eta'' \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

$S'_{ij} = \eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ ,  $i \neq j$  expresión que ya habíamos encontrado.

Para  $S'_{ii}$  de la definición de  $S'$  tenemos que,

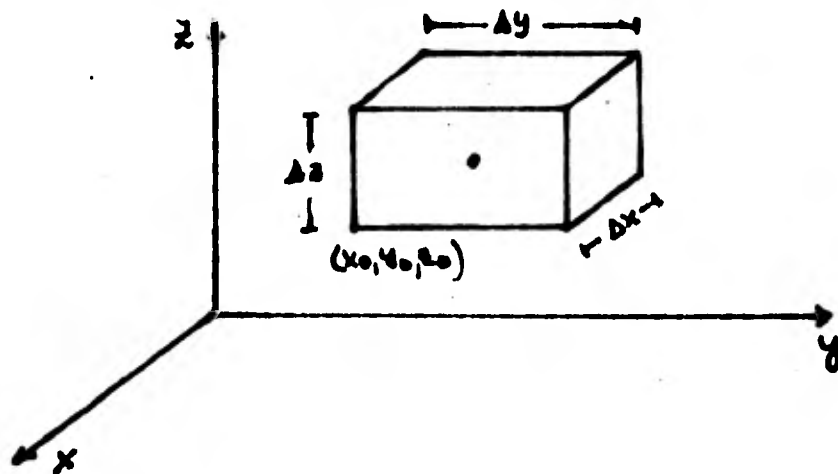
$$S'_{11} + S'_{22} + S'_{33} = 0 = 2\eta \operatorname{div} \cdot u + 3\eta'' \operatorname{div} u = 0$$

entonces  $\eta'' = \frac{2}{3}\eta \Rightarrow S = -pI + S'$  es el tensor cuyos elementos estan dados por

$$S_{ij} = \eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i \neq j$$

$$S_{ii} = 2\eta \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\eta \operatorname{div} \cdot u - p$$

Conocida ya  $S$ , ahora queremos determinar las fuerzas de viscosidad por unidad de volumen. Para esto tomamos como elemento de volumen un pequeño prisma rectangular con centro en  $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 + \frac{\Delta z}{2})$  como lo muestra la figura.



Se considerará el rectángulo tan pequeño que  $S$  es constante.

La fuerza resultante, será la suma de las fuerzas sobre las caras.

Entre caras paralelas, se tienen fuerzas de acción y - - reacción debido a que están tan cerca una de otra que se considera que una desliza sobre la otra.

Llamaremos cara 1 a la cara paralela al plano  $YZ$  más -- cercana a éste y cara 2 a la más lejana. Análogamente cara 3 a la cara paralela al plano  $XZ$  más cercana a el y cara 4 a la más lejana. Por último cara 5 a la cara más cercana al plano  $XY$  y cara 6 a la más lejana.

Veamos la contribución de las seis caras para la fuerza en la dirección  $X$ .

Recordando la definición de  $S_{ij}$  y que  $-p$  es normal a la superficie, tenemos que

En la dirección  $X$  :

Sobre la cara (1)  $-S_{11}(x_0, y_0, z_0) \Delta Y \Delta Z$  fuerza de acción

Sobre la cara (2)  $+S_{11}(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) \Delta Y \Delta Z$  fuerza de reacción

Sobre la cara (3)  $-S_{12}(x_0, y_0, z_0) \Delta X \Delta Z$  fuerza de acción

Sobre la cara (4)  $+S_{12}(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) \Delta X \Delta Z$  fuerza de reacción

Sobre la cara (5)  $-S_{13}(x_0, y_0, z_0) \Delta X \Delta Y$  fuerza de acción

Sobre la cara (6)  $+S_{13}(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) \Delta X \Delta Y$  fuerza de reacción

De este modo

$$\begin{aligned} \text{[ Fuerzas en } x &= [S_{11}(x+\Delta x, y_0, z_0) - S_{11}(x_0, y_0, z_0)] \Delta y \Delta z + [S_{12}(x_0, y_0+\Delta y, z_0) - S_{12}(x_0, y_0, z_0)] \Delta x \Delta z \\ &+ [S_{13}(x_0, y_0, z_0+\Delta z) - S_{13}(x_0, y_0, z_0)] \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

$$\text{[ Fuerzas en } x = \left[ \frac{S_{11}(x+\Delta x) - S_{11}(x)}{\Delta x} + \frac{S_{12}(y_0+\Delta y) - S_{12}(y_0)}{\Delta y} + \frac{S_{13}(z_0+\Delta z) - S_{13}(z_0)}{\Delta z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z$$

Por lo tanto el término encerrado en el paréntesis será la densidad volumétrica de la componente X de la fuerza, la cual nos interesaba encontrar para la expresión que sale de la segunda ley de Newton y que hemos denotado por  $F_{ix}$ .

Para considerar el valor de la densidad de fuerza en un punto calculamos el límite cuando del término en el interior del paréntesis y tenemos que,

$$F_{ix} = \frac{\partial S_{11}}{\partial x} + \frac{\partial S_{12}}{\partial y} + \frac{\partial S_{13}}{\partial z}$$

En forma análoga se obtiene

$$F_{iy} = \frac{\partial S_{21}}{\partial x} + \frac{\partial S_{22}}{\partial y} + \frac{\partial S_{23}}{\partial z}$$

$$F_{iz} = \frac{\partial S_{31}}{\partial x} + \frac{\partial S_{32}}{\partial y} + \frac{\partial S_{33}}{\partial z}$$

Sustituyendo los valores del tensor S y considerando que la viscosidad  $\eta$  no depende de la posición llegamos a la forma que toman las densidades de fuerzas internas.

$$F_{ix} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\eta \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{2}{3}\eta \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{2\eta}{3} \left[ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial z} \right] + \eta \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}$$

$$+ \eta \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \eta \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \eta \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial z}$$

$$F_{ix} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta u_1 + \frac{1}{3}\eta \left[ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial z} \right]$$

$$F_{ix} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta u_1 + \frac{1}{3}\eta \frac{\partial}{\partial x} (\text{div } \mathbf{u})$$

Del mismo modo

$$F_{iy} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \eta \Delta u_z + \frac{1}{3} \eta \frac{\partial}{\partial y} (\text{div. } \underline{u})$$

$$F_{iz} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \eta \Delta u_z + \frac{1}{3} \eta \frac{\partial}{\partial z} (\text{div. } \underline{u})$$

Sustituyendo las densidades de fuerzas internas en la 2a ley de Newton obtengo

$$\rho \left[ \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} \right] + (\underline{u} \cdot \nabla \rho) \underline{u} = \sum_j F_{mj} - \nabla P + \eta \Delta \underline{u} + \frac{1}{3} \eta \nabla (\text{div. } \underline{u})$$

A estas ecuaciones, se les conoce como ecuaciones de Navier - Stokes.

De ahora en adelante, la única densidad de fuerza externa que nos va a interesar será la de la gravedad, que de acuerdo al sistema de referencia que utilizaremos, siempre apunta en la dirección . Así, para nuestro interés las ecuaciones de Navier - Stokes, toman la siguiente forma,

$$\rho \left[ \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} \right] + \frac{\partial \rho}{\partial t} \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla \rho) \underline{u} = -\rho g \hat{k} - \nabla P + \eta \Delta \underline{u} + \frac{1}{3} \eta \nabla (\text{div. } \underline{u}) \quad (I.4)$$

#### D) ECUACION DE ESTADO

Para describir un fluido en estado de equilibrio, se tienen que dar valores de los parámetros que están involucrados, como son la presión, el volumen y la temperatura entre otros. Es bien sabido, que no todos los paráme--

tros de estado son independientes. Por ejemplo, para un gas ideal, se tiene la relación

En general, se puede escribir la relación entre las variables de estado en forma implícita. Así, para estados de la materia en equilibrio, la relación entre las variables  $P$ ,  $V$  y  $T$ , estará dada por la ecuación.

$$f(P, V, T) = 0$$

llamada ecuación de estado.

En nuestro caso, tenemos un fluido que puede estar en movimiento, por lo tanto no es un estado de equilibrio, sin embargo, el movimiento no es un factor que altere de manera considerable los valores de los parámetros de estado si las velocidades son bajas. Se puede pensar que un fluido en movimiento a velocidades bajas es el resultado de transiciones reversibles de estados de equilibrio.

Por lo tanto, para nuestro fluido en movimiento se va a cumplir la ecuación de estado  $f(P, \rho, T) = 0$  en donde se sustituye el volumen por la densidad.

Aquí va implícito el hecho de que nuestro fluido es de un solo material, porque si fuera de varios, otros parámetros a considerar serían las concentraciones relativas.

E) ECUACION DE CONDUCCION DE CALOR.

Hemos visto la forma matemática que me describen la conservación de la masa y del momento, toca ahora encontrar la ecuación que me dé la conservación de la energía.

Consideremos un fluido a una temperatura  $T$  que se encuentra en movimiento y tomemos un elemento de volumen constante. Para este elemento la energía por unidad de masa será,

$$E = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + C_v T \quad (1.5)$$

en donde  $C_v$  = calor específico a volumen constante por unidad de masa.

La pérdida o ganancia de energía en el tiempo se debe al trabajo realizado por el sistema, al trabajo cedido sobre el y a pérdidas o ganancias de energía a través de la frontera  $S$  del volumen  $V$  que tomamos fijo.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho E dV = \frac{\partial W_{\text{neto}}}{\partial t} + \text{Cambios de Energía a través de } S.$$

Aquí  $w$  es trabajo por unidad de volumen.

Por lo tanto, hay que hacer un conteo de los términos a la derecha de la última ecuación.

Recordemos que cuando se obtuvieran las ecuaciones dinámicas se decía que habían dos tipos de fuerzas:

a) Fuerzas externas (fuerzas por unidad de volumen)

b) Fuerzas internas (fuerzas por unidad de superficie) -- que están definidas por el tensor  $S$ .

Sea  $\underline{F}$  igual a la suma de las fuerzas externas por unidad de volumen. Tomando un elemento pequeño de volumen  $dV$  en el interior de  $V$  en donde podemos considerar a  $\underline{F}$  como constante, el trabajo realizado por unidad de volumen será

$$dW_{ext.} = \sum_{i=1}^3 F_i \cdot dx_i = \sum_{i=1}^3 F_i \cdot \dot{x}_i dt \Rightarrow \frac{\partial W_{ext.}}{\partial t} = \underline{F} \cdot \underline{v}$$

y para todo el volumen  $V$ , el trabajo neto debido a fuerzas externas es

$$\frac{\partial W_{ext.,neto}}{\partial t} = \int_V \underline{F} \cdot \underline{v} dV$$

Por lo que toca al trabajo realizado por las fuerzas superficiales en el interior de  $V$ , vamos a tener fuerzas de acción y reacción entre capas vecinas de fluido, es decir el trabajo que cede una capa lo recibe su vecina, por lo que globalmente no contribuyen.

En donde hay una contribución neta distinta de cero es en la frontera de  $V$ , pues ahí la acción es sobre la vecindad en el interior de  $V$  y la reacción es sobre el exterior, por lo tanto esta última no contribuye a nuestro conteo en  $V$ .

Para encontrar cuanto vale este término, recordemos que los  $S_{ij}$  elementos del tensor  $S$ , me dan fuerzas superfi-



ciales en la dirección  $\hat{i}$  sobre un elemento de superficie cuyo normal apunta en la dirección  $\hat{j}$ .

Tomemos un elemento de superficie  $dS$  de la frontera de  $V$  cuya normal exterior está dada por  $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$ . Entonces la  $i$ -ésima componente de la fuerza superficial en la dirección  $\underline{n}$  en términos de  $S_{ij}$  está dada por  $S_{in} = S_{ij} n_j$  y por lo tanto, el trabajo por unidad de superficie sobre  $dS$ , tomado tan chico que  $S_{in}$  es constante será

$$dW_{sup} = S_{in} \cdot d\underline{x} = S_{in} \cdot \underline{v} dt$$

$$\Rightarrow \frac{dW_{sup}}{dt} = S_{in} \cdot \underline{v} = \underline{v}^T S_{in}$$

Integrado a lo largo de toda la superficie  $S$  frontera de  $V$  tenemos que

$$\frac{dW_{sup}}{dt} = \int_S \underline{v}^T S_{in} dS$$

Lo único que falta es encontrar los cambios de energía a través de la frontera.

Primero, tenemos que si el elemento de volumen  $V$  se encuentra a diferentes temperaturas que los elementos vecinos, la ley cero de la termodinámica me dice que el sistema completo tenderá a un equilibrio térmico. Para que esto suceda, deberá haber conducción de calor de las partes calientes a las partes frías y nos interesa medir

esa conducción de calor (que es energía) a través de la superficie  $S_n$  frontera de  $V$ . Siendo  $k$  el coeficiente de conducción de calor, la cantidad de calor que se transmite a través de  $S_n$  será

$$\int_{S_n} k(\nabla T \cdot \underline{n}) dS_n$$

Por último, se tendrá pérdida ó ganancia de energía debido a la entrada o salida de fluido y ésta se obtiene por la integral

$$- \int_{S_n} \rho E \underline{u} \cdot \underline{n} dS_n$$

que es análoga a la que se tiene para calcular la pérdida ó ganancia de masa.

Con todo esto, tengo que el cambio de energía en el tiempo me lo da la siguiente ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho E dV = \int_V \underline{F} \cdot \underline{u} dV + \int_{S_n} [\underline{u}^T S_n + k \nabla T \cdot \underline{n} - \rho E \underline{u} \cdot \underline{n}] dS_n \quad (1.6)$$

Desarrollando los productos escalares y matriciales tendríamos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho E dV = \sum_{i=1}^3 \int_V F_i u_i dV + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{S_n} u_i S_{ij} n_j dS_n + \int_{S_n} (k \nabla T \cdot \underline{n} - \rho E \underline{u} \cdot \underline{n}) dS_n$$

Si nosotros escribimos las ecuaciones de Navier - Stokes en términos del tensor  $S$  tendríamos

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho (\underline{u} \cdot \nabla) u_i - \text{div}(\rho \underline{u}) u_i + (\underline{u} \cdot \nabla) p u_i = F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}$$

$i=1, 2, 3$  (notemos que se sustituyo el término --

$\frac{\partial p}{\partial t}$  por  $-\text{div}(\rho \underline{u})$  que se obtiene de la ecuación de

continuidad).

Se multiplica la ecuación por  $u_i$  y se suma sobre todas las  $i$  tenemos

$$\sum_{i=1}^3 \left( \frac{1}{2} \rho \frac{\partial u_i^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i^2}{\partial x_j} - \text{div}(\rho \mathbf{u}) u_i^2 + (\mathbf{u} \cdot \nabla \rho) u_i^2 \right) = \sum_{i=1}^3 F_i u_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 u_i \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}$$

Integramos sobre todo el volumen y obtenemos

$$\int_V \sum_{i=1}^3 \left( \frac{1}{2} \rho \frac{\partial u_i^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i^2}{\partial x_j} - \text{div}(\rho \mathbf{u}) u_i^2 + (\mathbf{u} \cdot \nabla \rho) u_i^2 \right) dV = \int_V \sum_{i=1}^3 \left( F_i u_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} u_i \right) dV$$

Aplicamos teorema de la divergencia en (1.6) a las integrales de superficie y sustituimos el valor de  $\mathbf{E}$  dado por (1.5) para obtener

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{1}{2} \rho \sum_{i=1}^3 u_i^2 + \rho c_v T \right) dV &= \sum_{i=1}^3 \int_V F_i u_i dV + \sum_{j=1}^3 \int_V \frac{\partial (u_i S_{ij})}{\partial x_j} dV + \int_V \text{div}(k \nabla T) dV \\ &\quad - \int_V \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (\frac{1}{2} \rho u_i^2 u_j)}{\partial x_j} dV - \int_V \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (\rho c_v T u_j)}{\partial x_j} dV \end{aligned}$$

Sustituimos de las ecuaciones de Navier - Stokes el valor de  $\sum_{i=1}^3 \int_V u_i \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} dV$  en esta última ecuación y obtenemos

$$\begin{aligned} \int_V \left[ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial t} u_i^2 + \sum_{i=1}^3 \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho c_v T)}{\partial t} \right] dV &= \int_V \sum_{i=1}^3 \left( \frac{1}{2} \rho \frac{\partial u_i^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i^2}{\partial x_j} \right) dV \\ &+ \int_V \sum_{i,j=1}^3 S_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV + \int_V \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial (\rho u_j)}{\partial x_j} u_i^2 dV + \int_V \sum_{i,j=1}^3 u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} u_i^2 dV + \int_V \text{div}(k \nabla T) dV - \int_V \left[ \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial (\frac{1}{2} \rho u_i^2 u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\rho c_v T u_j)}{\partial x_j} \right] dV \end{aligned}$$

Simplificando y agrupando todo en un solo integrado obtenemos

$$\begin{aligned} \int_V \left[ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial t} u_i^2 + \frac{\partial (\rho c_v T)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} u_i^2 + \frac{\rho}{2} \sum_{i,j=1}^3 u_i^2 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \sum_{i,j=1}^3 S_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right. \\ \left. - \text{div}(k \nabla T) + \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial (\rho c_v T u_j)}{\partial x_j} \right] dV = 0 \end{aligned}$$

Suponiendo continuidad en el integrado, esta igualdad se satisface para todo volumen  $V$  si y solo si el integrando es cero, ésto es

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i^2) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho c_v T) + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} u_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \rho u_i^2 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^3 S_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ & = \text{div}(k \nabla T) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho c_v T u_j) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Esta es la ecuación de calor en su forma mas general. Con las aproximaciones de Boussinesq, encontraremos posteriormente una forma mas simplificada de esta ecuación, que será la que usaremos nosotros.

#### F) SIMPLIFICACION DE LAS ECUACIONES

Para llegar a una forma simplificada de las ecuaciones que describen el problema, utilizaremos como hipótesis que las aproximaciones de Boussinesq son válidas para nuestro problema.

Empezaremos por mencionar dichas aproximaciones, para luego encontrar la forma simplificada de las ecuaciones.

1).- Los cambios en la densidad se deben a cambios en la temperatura y no en la presión.

2).- Los gradientes de velocidad son lo suficientemente pequeños, de manera que el efecto en la temperatura por la conversión en trabajo puede ser ignorado.

3).- La viscosidad dinámica  $\mu$ , la conductividad térmica

ca  $k$  y los calores específicos son constantes.

4).- La ecuación  $\rho(T)$  es lineal en  $T$ .

De la segunda hipótesis, concluimos que la aproximación de estado de equilibrio será válida para nuestro problema, de esta manera, existe una ecuación de estado - - -

$$f(P, \rho, T) = 0.$$

De la primera hipótesis, se deduce que la ecuación de estado se reduce a una función del tipo  $f(\rho, T) = 0$ .

Suponiendo que  $f$  es  $C^1$  en  $\rho$  y en  $T$ , por el teorema de la función implícita, si  $\frac{\partial f}{\partial \rho} \neq 0$  entonces tenemos que

$$\rho = \rho(T) \quad \frac{d\rho}{dT} = - \left( \frac{\frac{\partial f}{\partial T}}{\frac{\partial f}{\partial \rho}} \right)$$

Por último, de la cuarta hipótesis, haciendo un desarrollo en Taylor, tenemos que nuestra ecuación estará dada por

$$\rho(T) = \rho_0 + \left. \frac{d\rho}{dT} \right|_{T=T_0} (T - T_0)$$

en donde  $\rho_0$  y  $T_0$  son la densidad y temperatura del fluido en reposo.

Se define  $\alpha$  el coeficiente de expansión volumétrica como

$$\alpha = - \frac{1}{\rho_0} \left. \frac{d\rho}{dT} \right|_{T=T_0}$$

Así, se tiene finalmente que nuestra ecuación de estado está dada como

$$\rho(T) = \rho_0 [1 - \alpha (T - T^0)]$$

ya que el coeficiente de expansión volumétrica  $\alpha$  es -- del orden  $10^{-3}$  (Chandrasekhar Pag. 16), tenemos que para variaciones de temperatura del orden de diez grados, el término  $\rho_0 \alpha (T - T^0)$  es del orden  $10^{-2}$ , ésto será importante cuando tomemos los términos de mas alto orden en nuestras ecuaciones de movimiento.

Por lo que toca al resto de las ecuaciones, al sustituir la ecuación de estado en la ecuación de continuidad obtenemos

$$-\alpha \rho_0 \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_0 [1 - \alpha (T - T^0)] \text{div } \underline{u} - \alpha \rho_0 \underline{u} \cdot \nabla T = 0$$

$$\rho_0 \text{div } \underline{u} - \alpha \rho_0 \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + (T - T^0) \text{div } \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla T \right] = 0$$

Al orden mas alto, en este caso se obtiene que al orden  $\alpha^0$  el único término que contribuye es  $\rho_0 \text{div } \underline{u}$  despreciando los términos al orden  $\alpha$  a orden mayor se tiene que

$$\text{div } \underline{u} = 0 \quad (\text{I.8})$$

Al sustituir esta ecuación y la ecuación de estado en las ecuaciones de Navier - Stokes se obtiene

$$\rho_0 [1 - \alpha (T - T^0)] \left[ \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} \right] - \rho_0 \alpha \frac{\partial T}{\partial t} \underline{u} - \rho_0 \alpha (\underline{u} \cdot \nabla T) \underline{u} = -\rho_0 [1 - \alpha (T - T^0)] \nabla p - \nabla p + \eta \Delta \underline{u}$$

Agrupando los términos de orden  $\alpha^0, \alpha^{1/3}$  y menores o iguales a  $\alpha^{2/3}$  tenemos

$$\rho_0 \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \rho_0 g \underline{k} - \rho_0 g \alpha (\tau - \tau^0) \underline{k} + \rho_0 (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} + \nabla P - \eta \Delta \underline{u} + O(\alpha^{2/3}) = 0$$

Estamos suponiendo por hipótesis, que las velocidades y sus gradientes son pequeños, de tal modo que  $\rho_0 g \alpha (\tau - \tau^0)$  sea del orden de  $\|\rho_0 \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}\|$ , desperdiciando los términos de orden  $\alpha^{2/3}$  o menores nuestras ecuaciones de Navier - Stokes en forma aproximada serán

$$\rho_0 \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \rho_0 g [1 - \alpha (\tau - \tau^0)] \underline{k} + \rho_0 (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} + \nabla P - \eta \Delta \underline{u} = 0 \quad (1.9)$$

Por último, al sustituir la tercera hipótesis, la ecuación de estado y la ecuación  $\text{div } \underline{u} = 0$  en la ecuación general de conducción de calor obtenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 -\frac{1}{2} \rho_0 \alpha \frac{\partial T}{\partial t} u_i^2 + \rho_0 c_v \frac{\partial T}{\partial t} - \rho_0 \alpha (\tau - \tau^0) c_v \frac{\partial T}{\partial t} - \rho_0 \alpha c_v T \frac{\partial T}{\partial t} \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \rho_0 u_j \alpha \frac{\partial T}{\partial x_j} u_i^2 - \sum_{i,j=1}^3 S_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - k \Delta T + \sum_{j=1}^3 \rho_0 c_v u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} - \rho_0 \alpha T c_v \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T}{\partial x_j} u_j \\ & - \rho_0 \alpha (\tau - \tau^0) T \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T}{\partial x_j} u_j = 0 \end{aligned}$$

Si desarrollamos a primer orden la velocidad en la serie de Taylor obtendríamos

$$u_i \sim |\nabla u_i| d \quad i=1,2,3$$

donde  $d$  es el tamaño o longitud en la dirección  $i$  del recipiente (distancia entre los lados del rectángulo en

nuestro caso)

De ahí que  $|\nabla u_i|^2 \sim \frac{u_i \cdot \nabla u_i}{d}$

pero  $u_i \cdot \nabla u_i = O(\alpha(T-T^0)g)$  como acabamos de --  
ver, entonces  $|\nabla u_i|^2 \sim \frac{\alpha(T-T^0)}{d} g$  y así

$$\sum_{i,j=1}^3 S_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sim \frac{\mu \alpha}{d} (T-T^0) g$$

Para comparar con los términos de mayor orden, tomemos --  
por ejemplo el término  $k \Delta T$ . Del desarrollo en Tay--  
lor de la temperatura  $\Delta T \sim \frac{T-T^0}{d^2}$ , entonces

$\frac{\sum_{i,j=1}^3 S_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}{k \Delta T} \sim \frac{\mu \alpha g d}{k}$  y este valor para líquidos ordi--  
narios es del orden de  $10^{-7}$  ó  $10^{-8}$  cuando  $d \sim 1 \text{ cm}$ .

(Chandrasekhar Pag. 17 - 18) por lo que es despreciable.

Por lo que si nos quedamos con los términos del orden --

$\alpha^0$  de la ecuación de calor y definiendo  $K = \frac{k}{\rho_0 C_v}$

el coeficiente de conductividad termométrica, llegamos a  
la ecuación de calor simplificada

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tilde{u} \cdot \tilde{\nabla} T - K \Delta T = 0 \tag{I.10}$$



## CAPITULO II

### A) EL PROBLEMA A TRATAR

Consideremos un fluido viscoso contenido en un recipiente en forma de prisma rectangular infinito en una dirección y el cual tiene sus caras paralelas a los planos XY XZ y YZ, dichas caras son rígidas. Ponemos los ejes coordenados de tal modo que la fuerza de gravedad apunte en la dirección  $-Z$ . El prisma tendrá  $r$  centímetros de ancho y  $h$  centímetros de profundidad y de longitud infinita como lo muestra la figura

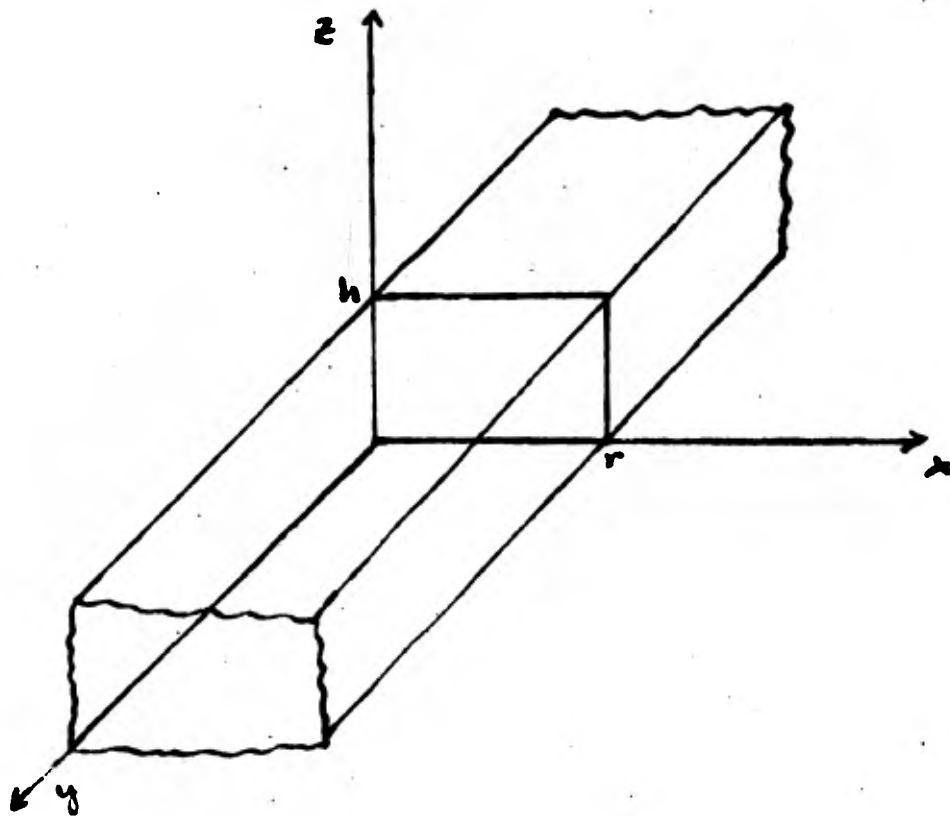


figura .- Características del recipiente que contiene al fluido.

El fluido se calentará a través de la cara que está en el plano XY, mientras que las caras que se encuentran en los planos definidos por  $X = 0$  y  $X = r$  son aislantes térmicos.

Este fluido será un transmisor de calor y nos interesa ver si dicha transmisión se realiza únicamente por conducción o también por convección. Para ésto necesitamos encontrar las soluciones a las ecuaciones simplificadas que se obtuvieron en el capítulo anterior, con las condiciones de frontera apropiadas.

Estamos interesados en soluciones estacionarias al problema de modo que el sistema de ecuaciones a resolver es

$$\begin{aligned} \text{div } \underline{u} &= 0 \\ (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla P - [1 - \alpha(T - T^*)] g \hat{k} + \nu \Delta \underline{u} \quad \nu = \eta / \rho_0 \\ \underline{u} \cdot \nabla T &= k \Delta T \end{aligned}$$

Por otra parte, de las características particulares del problema se tiene que hay una simetría respecto al eje Y. Ayudados de esta simetría, buscaremos soluciones que no dependan de Y, por lo que las ecuaciones se simplifican-

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial z} &= 0 \\ u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta u_1 \\ u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} &= \nu \Delta u_2 \\ u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \Delta u_3 - [1 - \alpha(T - T^*)] g \\ u_1 \frac{\partial T}{\partial x} + u_2 \frac{\partial T}{\partial z} &= k \Delta T \end{aligned}$$

En donde ahora

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

De las condiciones a la frontera, el hecho de que las paredes son rígidas implica que  $\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$  en la frontera ( $\underline{n}$  es la normal a las paredes rectangulares) y por otro lado la viscosidad impide que el fluido resbale sobre las-

paredes, esto me dice que  $u \cdot e_i = 0$ ,  $i=1,2$ , en donde  $e_i$ ,  $i=1,2$ , representa dos vectores no colineales sobre una cara y esta igualdad será cierta para cada una de las caras. Es claro que de las dos condiciones antes mencionadas se tiene que  $u = 0$  en las paredes del rectángulo.

Por lo que se refiere a la temperatura, el que las caras en los planos  $X = 0$  y  $X = r$  sean aislantes térmicas implica que  $\frac{\partial T}{\partial n} |_{x=0} = \frac{\partial T}{\partial n} |_{x=r} = 0$  en este caso las normales apuntan en la dirección  $\mp X$  respectivamente, es decir la condición de frontera es  $\frac{\partial T}{\partial X} |_{x=0} = \frac{\partial T}{\partial X} |_{x=r} = 0$ .

Y las paredes a lo largo de los planos  $z = 0$  y  $z = h$  se mantiene a temperaturas constantes  $T^-$  y  $T^+$ , respectivamente.

Es decir,  $T(x, 0) = T^-$ ,  $T(x, h) = T^+$ .

Si vemos la ecuación

$$u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} = v \Delta u_2$$

$$u_2 = 0 \quad \text{en la frontera}$$

notamos que  $u_2 = 0$  es solución y es única porque si hubiera otra  $u_2 \neq 0$  se tendría para  $u_1, u_2$  conocidas

$$-v \Delta u_2 + v \cdot \nabla u_2' = 0, \quad v = (u_1, u_2) \Rightarrow -v u_2' \Delta u_2 + u_2' v \cdot \nabla u_2' = 0$$

Integrado sobre el rectángulo definido por  $0 \leq x \leq r$ ,  $0 \leq z \leq h$  y aplicando el teorema de Green obtenemos,

ilen

pare-

al so

si---

$$\nu \int_0^h \int_0^r |\nabla u_2'|^2 dx dz + \int_0^h \int_0^r u_2' \underline{v} \cdot \nabla u_2' dx dz = 0$$

pero  $u_2' \underline{v} \cdot \nabla u_2' = \underline{v} \cdot (\nabla \frac{1}{2} u_2'^2) = \text{div} (\frac{1}{2} \underline{v} u_2'^2) - \frac{1}{2} u_2'^2 \text{div} \underline{v}$

pero  $\text{div} \underline{v} = 0 \Rightarrow u_2' \underline{v} \cdot \nabla u_2' = \text{div} (\frac{1}{2} \underline{v} u_2'^2)$

Así tenemos que

$$\nu \int_0^h \int_0^r |\nabla u_2'|^2 dx dz + \int_0^h \int_0^r \text{div} (\frac{1}{2} \underline{v} u_2'^2) dx dz = 0$$

Por el teorema de la divergencia

$$\int_0^h \int_0^r \text{div} (\frac{1}{2} \underline{v} u_2'^2) dx dz = \int_{\partial \Omega} \frac{1}{2} u_2'^2 \underline{v} \cdot \underline{n} dS = 0 \quad \text{pues } u_2 \text{ y } \underline{v} \text{ valen}$$

cero en la frontera  $\partial \Omega$ .

De este modo

$$\int_0^h \int_0^r |\nabla u_2'|^2 dx dz = 0$$

Por lo tanto  $\nabla u_2' = 0 \Rightarrow u_2' = c$  pero  $u_2' = 0$  en las paredes así  $u_2 = 0$  es la única solución.

Conocida  $u_2$  el problema se reduce a uno bidimensional sobre un rectángulo de largo  $r$  y ancho  $h$  con las siguientes ecuaciones y condiciones a la frontera.

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial z} = 0$$

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u_1$$

$$u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta u_2 - [(1-\alpha)(T-T^*)] g$$

$$u_1 \frac{\partial T}{\partial x} + u_2 \frac{\partial T}{\partial z} = k \Delta T$$

con  $u_1 = u_2 = 0$  en la frontera del rectángulo

$$T(x,0) = T^-, T(x,h) = T^+, \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=r} = 0$$

B) ECUACIONES DEL PROBLEMA DE BENARD

En esta sección, empezaremos por resumir lo dicho en la sección anterior, luego encontraremos una primera solución a nuestro problema y finalmente, reescribiremos las ecuaciones para llegar al planteamiento con el que vamos a trabajar para encontrar posibles soluciones de perturbación respecto a la primera solución.

De acuerdo a lo hecho hasta ahora, resolver nuestro problema significa encontrar soluciones para  $u, u_2, p, T$  de las ecuaciones

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u_1 \quad (\text{II.1})$$

$$u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta u_2 - [1 - \alpha (\tau - \tau^*)] g \quad (\text{II.2})$$

$$u_1 \frac{\partial T}{\partial x} + u_2 \frac{\partial T}{\partial z} = k \Delta T \quad (\text{II.3})$$

con las condiciones a la frontera

$$u_1(x, 0) = u_2(x, z) = 0 \quad \text{en } \partial \Omega$$

$$T(x, 0) = T^*, \quad T(x, h) = T^*, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=r} = 0$$

$$\text{y } \text{div } \underline{u} = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Cabe hacer notar, que en la ecuación (II.2), el término  $[1 - \alpha (\tau - \tau^*)] g$  y es una densidad de fuerza en debido al cambio de peso por calentamiento. Cuando el fluido se calienta, se expande, por lo tanto su densidad disminuye y así, el fluido mas frio tenderá a caer por gravedad. Este efecto deberá ser lo suficientemente grande para vencer a la viscosidad.

De la experiencia física, esperamos una solución que me-represente la conducción pura, es decir  $u_1(x, z) = 0$

$u_2(x, z) = 0$  , sustituyendo estos valores en

(II.1) y (II.2) tenemos que,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -[1 - \alpha(T - T^0)] \rho g \quad (\text{II.4})$$

De la primera obtenemos que  $P$  no depende de  $x$  y por lo tanto  $\frac{dP^0}{dz} = -\rho_0 [1 - \alpha(T^0 - T^0)] \rho g$  en donde  $P^0$  y  $T^0$  representan la presión y temperatura del estado de conducción. Es decir,  $T^0$  satisface la ecuación  $\Delta T^0 = 0$  con las condiciones de frontera para  $T$ .

Una solución es  $T^0 = \left(\frac{T^+ - T^-}{h}\right) z + T^- (\alpha^0)$  y tenemos que la solución es única pues si hay dos soluciones

$T^0_1$  y  $T^0_2$  entonces  $T^0_{12} = T^0_1 - T^0_2$  satisface

$$\Delta T^0_{12} = 0 \quad \text{con} \quad T^0_{12}(x, 0) = T^0_{12}(x, h) = 0$$

$$\text{y} \quad \frac{\partial T^0_{12}}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial T^0_{12}}{\partial x} \Big|_{x=r} = 0$$

De la primera identidad de Green resulta que

$$0 = \int_0^h \int_0^r T^0_{12} \Delta T^0_{12} dx dz = - \int_0^h \int_0^r |\nabla T^0_{12}|^2 dx dz + \int_{\partial \Omega} T^0_{12} \frac{\partial T^0_{12}}{\partial n} ds \quad (\alpha)$$

Pero en los segmentos a lo largo de  $z=0$ ,  $z=h$   $T^0_{12}=0$  y

en los segmentos a lo largo de  $x=0$ ,  $x=r$   $\frac{\partial T^0_{12}}{\partial n} = -\frac{\partial T^0_{12}}{\partial x} = 0$

por lo que  $T^0_{12} \frac{\partial T^0_{12}}{\partial n} = 0$  en  $\partial \Omega$ . Sustituyendo en (a)

llegamos a que  $-\int_0^h \int_0^r |\nabla T^0_{12}|^2 dx dz = 0$ , pero  $T^0_{12}(x, 0) = 0$

por lo que  $T^0_{12}(x, z) = 0$ , lo que me demuestra

que (a) es solución única a  $\Delta T^0 = 0$  con las condiciones de frontera.

Por último, sustituyendo  $T^0$  en (II.4) tenemos que,

$$\frac{dP^0}{dz} = -\rho_0 [1 - \alpha \left(\frac{T^+ - T^-}{h}\right) z] \rho g$$

de donde

$$P^0(z) = -\rho_0 g z + \rho_0 \alpha \left(\frac{T^+ - T^-}{2h}\right) g z^2 + P_0$$

Así tenemos que una solución al problema de Benard está dada por

$$u_1(x, z) = u_2(x, z) = 0$$

$$P^0(x, z) = -\rho_0 g z + \rho_0 \alpha \left( \frac{T^+ - T^-}{2h} \right) g z^2 + P_0$$

$$T^0(x, z) = \left( \frac{T^+ - T^-}{h} \right) z + T^-$$

y esta solución nos representa el estado de conducción del problema.

Observamos que para el caso de  $T^+ = T^-$  (equilibrio térmico) se tiene  $T^0(x, z) = T^-$ ,  $u_1(x, z) = 0$ ,  $u_2(x, z) = 0$  y

$P^0(x, z) = -\rho_0 g z + P_0$  que nos representa el caso hidrostático.

Para buscar posibles soluciones distintas a la del estado de conducción, sean  $\tilde{u}_i(x, z)$  una solución distinta de cero,  $P(x, z) = \tilde{P}(x, z) + P^0(z)$  y  $T(x, z) = \tilde{T}(x, z) + T^0(x, z)$  que satisface (II.1, II.2, II.3) es decir

$$\tilde{u}_1 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} + \tilde{u}_2 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{P}(x, z)}{\partial x} + \nu \Delta \tilde{u}_1 \quad (II.5)$$

$$\tilde{u}_1 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x} + \tilde{u}_2 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} - [\alpha(T^+ + T^- - T^-)] g + \nu \Delta \tilde{u}_2 \quad (II.6)$$

$$\tilde{u}_1 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + \tilde{u}_2 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \tilde{u}_3 \frac{\partial \tilde{T}^0}{\partial z} = k \Delta T \quad (II.7)$$

Además la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial z} = 0 \quad (II.8)$$

sean ahora  $\tilde{x} = \frac{x}{h}$

$$\tilde{z} = \frac{z}{h}$$

Notamos que  $\tilde{x}$  y  $\tilde{z}$  son variables a dimensionales y es-

tan definidas en  $0 \leq \bar{x} \leq \pi l$   
 $0 \leq \bar{z} \leq \pi$

donde  $l = \frac{r}{h}$

Así, si aplicamos la regla de la cadena a (II.5),  
 (II.6) y (II.7), sustituyendo además  $\frac{d\bar{T}^0}{d\bar{z}}$  y  $T^0$  en (II.6)  
 se obtienen las siguientes ecuaciones.

$$\tilde{u}_1 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \bar{x}} + \tilde{u}_3 \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} + \nu \left[ \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial \bar{z}^2} \right] \left( \frac{\pi}{h} \right) \quad (II.9)$$

$$\left( \frac{\pi}{h} \right) \tilde{u}_1 \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \bar{x}} + \left( \frac{\pi}{h} \right) \tilde{u}_3 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\pi}{h} \right) \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} + \alpha g \bar{T}(\bar{x}, \bar{z}) \\ + \nu \left[ \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial \bar{z}^2} \right] \left( \frac{\pi^2}{h^2} \right) \quad (II.10)$$

$$\left( \frac{\pi}{h} \right) \tilde{u}_1 \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \left( \frac{\pi}{h} \right) \tilde{u}_3 \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} + \left( \frac{\pi^2 - \pi^4}{h} \right) \tilde{u}_2 = k \Delta \bar{T} \left( \frac{\pi^2}{h^2} \right) \quad (II.11)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (II.12)$$

De la última, se tiene en vista de que el dominio es simplemente conexo, que existe una  $\psi(\bar{x}, \bar{z})$  (que la definiremos adimensional multiplicándola por un factor constante que nos de las unidades correctas) tal que

$$\tilde{u}_1 = \frac{\pi \nu}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}, \quad \tilde{u}_3 = -\frac{\pi \nu}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}}$$

Por último se definirá una temperatura adimensional  $\Theta$

$$\Theta = \frac{k \pi (\bar{T} - \bar{T}^*)}{\nu} \bar{T}$$

de donde  $\bar{T} = \frac{(\bar{T} - \bar{T}^*) \nu}{k \pi} \Theta$

Al introducir las nuevas expresiones para  $\tilde{u}_1, \tilde{u}_3, \bar{T}$  en (II.9), (II.10) y (II.11), obtenemos



$$\frac{\pi^2 \nu^2}{h^2} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right] = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\nu \pi^2}{h^2} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^3} \right] \quad (\text{II.13})$$

$$\frac{\pi^2 \nu^2}{h^2} \left[ -\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right] = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\alpha g h (T^- - T^+) \nu}{k \pi^2} \theta + \frac{\nu \pi^2}{h^2} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II.14})$$

$$\left( \frac{\pi^2}{h^2} \right) \frac{\nu^2}{k \pi} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + \frac{\pi \nu^2}{h^2} \left( + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\pi^2}{h^2} \frac{k \nu}{k \pi} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.15})$$

Simplificando (II.15) y definiendo

$$[\psi, \theta] = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

tenemos por último que

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\nu}{k} [\psi, \theta] = 0 \quad (\text{II.16})$$

Por otra parte, si derivamos (II.13) con respecto a  $\bar{z}$  y (II.14) con respecto a  $\bar{x}$  y restamos lo que se obtiene es

$$\frac{\pi^2 \nu^2}{h^2} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2 \partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z \partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2 \partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z^2} - \left( 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^4} \right) \right] = -\frac{\alpha g h (T^- - T^+) \nu}{k \pi^2} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Simplificado tenemos

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^3} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x^2} \right) - \Delta^2 \psi = -\frac{\alpha g h^3 (T^- - T^+)}{k \pi^2 \nu} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Aplicando  $[\psi, \theta]$  al lado izquierdo de la última ecuación obtenemos

$$\Delta^2 \psi + [\psi, \Delta \psi] = \frac{\alpha g h^3 (T^- - T^+)}{k \pi^2 \nu} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\Delta = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right), \quad \Delta^2 = \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right) \quad (\text{II.17})$$

Por lo que se refiere a las condiciones de frontera, es claro que para  $\theta$  se tiene que

$$\theta(x, 0) = \theta(x, \pi) = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0$$

Para la  $\psi$  se tiene que la condición  $\psi = 0$  ( $\partial \Omega$ ) implica que  $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$  en  $\partial \Omega$ , por lo que  $\psi = \text{cte.}$  en  $\partial \Omega$  que la podemos tomar como cero, pues esto no altera el valor de las velocidades que es lo que realmente nos interesa.

Es decir, tenemos que  $\psi$  satisface en la frontera

$$\psi(x, z) = \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial \Omega \quad \eta = \text{normal exterior.}$$

En realidad nosotros utilizaremos como condiciones a la frontera

$$\psi(x, z) = \frac{\partial^2 \psi(x, z)}{\partial n^2} = 0 \text{ en } \partial \Omega$$

de donde vemos que se ha cambiado la condición  $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$  por otra que no corresponde a la condición de paredes rígidas de nuestro problema que sin embargo simplificará sustancialmente el problema de encontrar soluciones para  $\psi$ ,  $\theta$  y  $\lambda$ .

Resumiendo, tenemos que para encontrar posibles soluciones distintas a la del estado de conducción hay que buscar soluciones distintas de la trivial al problema representado por

$$\Delta\theta + \frac{\nu}{k} [\psi, \theta] - \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.16})$$

$$\Delta^2\psi + [\psi, \Delta\psi] - \lambda \frac{\partial\theta}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.17})$$

Con las condiciones de frontera

$$\psi(x, z) = \frac{\partial^2\psi(x, z)}{\partial n^2} = 0 \quad \partial\Omega \quad (\text{II.18})$$

$$\theta(x, 0) = \theta(x, \pi) = 0 \quad \frac{\partial\theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial\theta}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0$$

Aquí hemos denotado a  $\lambda = \frac{\alpha g (\tau - \tau') h^3}{\kappa \nu \tau'}$ , que se le conoce como número de Rayleigh y que mide la razón entre la fuerza de flotación debido a  $\alpha g (\tau - \tau')$  y las fuerzas viscosas. Mas adelante veremos como éste es el parámetro importante para determinar cuando puede haber convección (físicamente es cuando las fuerzas de flotación vencen a la viscosidad).

El número  $\sigma = \frac{\nu}{k}$  se le conoce como número de Prandtl.

## CAPITULO III

### ASPECTO MATEMATICO DEL PROBLEMA

#### A) EL PROBLEMA LINEAL

De acuerdo a la sección anterior, el problema a resolver es encontrar  $\underline{\chi} = \begin{pmatrix} \psi \\ \theta \end{pmatrix}$  y  $\lambda$  que satisfacen

$$\Delta^2 \psi + [\psi, \Delta \psi] - \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.1})$$

$$\Delta \theta + \frac{\nu}{k} [\psi, \theta] - \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

En el rectángulo  $\Omega$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $0 \leq z \leq \pi$  y las condiciones de frontera.

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial n^2} = 0 \quad \text{en } \partial \Omega \quad (\text{III.1})$$

$$\theta(x, 0) = \theta(x, \pi) = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0$$

Ahora, nos interesa estudiar la parte lineal del problema. Es decir, los valores de  $\lambda$  para los cuales el problema tiene solución no trivial, y como se comporta  $L_\lambda$  lejos de esos valores. En este caso, la linealización está dada por

$$L_\lambda \underline{\chi} = 0 \quad L_\lambda \equiv \begin{pmatrix} \Delta^2 & -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & -\Delta \end{pmatrix} \quad (\text{III.2})$$

con las mismas condiciones de frontera.

Es interesante notar que el problema no es autoadjunto,

y esto era de esperarse, pues hay un intercambio de energía (energía calorífica por energía cinética).

Para empezar, definiremos el siguiente espacio

$$H = \left\{ (\psi), \psi \in C^\infty(\omega), \theta \in C^\infty(\omega) \left| \begin{array}{l} \psi(x, z) = 0 \\ \Delta(x, z) = 0 \end{array} \right. \right\}_{\text{en } \partial\Omega}, \left. \begin{array}{l} \theta(x, 0) = \theta(x, \pi) = 0 \\ \frac{\partial\theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial\theta}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0 \end{array} \right\} \left( \begin{array}{l} (\psi_1), (\psi_2) \\ (\theta_1), (\theta_2) \end{array} \right)_H \quad (\text{III.3})$$

con  $\psi(x, z)$  y  $\theta(x, z)$  funciones reales.

En donde  $\left( \begin{array}{l} (\psi_1), (\psi_2) \\ (\theta_1), (\theta_2) \end{array} \right)_H \equiv \int_0^\pi \int_0^{\pi^2} (\Delta^2\psi_1 \Delta^2\psi_2 + \Delta\theta_1 \Delta\theta_2) dx dz$

**Teorema**

$\left( \begin{array}{l} (\psi_1), (\psi_2) \\ (\theta_1), (\theta_2) \end{array} \right)_H$  es un producto escalar sobre el abierto del que se define (III.3).

**Demostración**

a) Es claramente bilineal.

b)  $\| \left( \begin{array}{l} \psi \\ \theta \end{array} \right) \|_H^2 = \int_0^\pi \int_0^{\pi^2} [(\Delta^2\psi)^2 + (\Delta\theta)^2] dx dz \geq 0$

en particular  $\| \left( \begin{array}{l} \psi \\ \theta \end{array} \right) \|_H^2 = 0$  implica  $\Delta^2\psi = 0, \Delta\theta = 0$

Así  $\int_0^\pi \int_0^{\pi^2} \theta \Delta\theta dx dz = 0 = - \int_0^\pi \int_0^{\pi^2} |\nabla\theta|^2 dx dz + \int \theta \frac{\partial\theta}{\partial n} d\Lambda$

usando la primera identidad de Green.

De las condiciones de frontera de  $\theta$  se tiene

$\int_{\partial\Omega} \theta \frac{\partial\theta}{\partial n} d\Lambda = 0$  por lo que  $\int_0^\pi \int_0^{\pi^2} |\nabla\theta|^2 dx dz = 0$ ,  
 es decir  $\nabla\theta = 0$  entonces  $\theta = \text{cte.}$ , pero  
 $\theta(x, 0) = \theta(x, \pi) = 0$  por lo que  $\theta(x, z) \equiv 0$ .

Por lo que a  $\psi$  se refiere

$$\int_0^\pi \int_0^{\pi_1} \psi \Delta^2 \psi \, dx dz = 0 = \int_0^\pi \int_0^{\pi_1} |\Delta \psi|^2 \, dx dz + \int_{\partial \Omega} \left( \psi \frac{\partial (\Delta \psi)}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial n} \Delta \psi \right) \, d\Omega$$

en donde se usó la segunda identidad de Green.

De las condiciones de frontera para  $\psi$ , la integral sobre la frontera es cero, lo que da por resultado que

$$\Delta \psi = 0$$

Usando ahora la primera identidad de Green para

$$\int_0^\pi \int_0^{\pi_2} \psi \Delta \psi \, dx dz \quad \text{se tiene que}$$

$$- \int_0^\pi \int_0^{\pi_2} |\nabla \psi|^2 \, dx dz + \int_{\partial \Omega} \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} \, d\Omega = 0$$

Por lo que  $\int_0^\pi \int_0^{\pi_2} |\nabla \psi|^2 \, dx dz = 0$  entonces  $\psi = \text{cte.} = 0$ .

Resumiendo tenemos que

$$\|(\psi, \theta)\|_{\mathcal{H}}^2 \geq 0 \quad \text{y} \quad \|(\psi, \theta)\|_{\mathcal{H}}^2 = 0 \Leftrightarrow \psi(x, z) = \theta(x, z) = 0 \quad \text{en } \partial \Omega.$$

Por lo tanto, el espacio  $\mathcal{H}$  definido por III.3 es un espacio de Hilbert (Rektorys paginas 70-73).

Sobre  $\mathcal{H}$  se tiene el siguiente resultado  $\mathcal{H}(\Omega) \subset H^4(\Omega) \times H^2(\Omega)$ ,  
 $H^4(\Omega) \times H^2(\Omega) = \{(\psi, \theta) \mid \psi \in H^4, \theta \in H^2\}$  en donde  $\|(\psi, \theta)\|_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}}^2 = \|\psi\|_{H^4}^2 + \|\theta\|_{H^2}^2$

Para ver que esto es cierto, necesitamos probar que

$$k_0 \|(\psi, \theta)\|_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}}^2 \leq \|(\psi, \theta)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq k_1 \|(\psi, \theta)\|_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}}^2$$

$$a) \quad \|(\Psi)\|_H^2 \leq K_1 (\|\Psi\|_A^2 + \|\Theta\|_2^2)$$

Usando las desigualdades  $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$  y

$(a+b+c)^2 \leq 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$  tenemos que

$$\begin{aligned} \|(\Psi)\|_H^2 &= \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} [(\Delta\Psi)^2 + (\Delta\Theta)^2] dx dz \leq 4 \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \left[ \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x \partial z}\right)^2 \right] dx dz \\ &\quad + 2 \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \left[ \left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}\right)^2 \right] dx dz \end{aligned}$$

$$\|(\Psi)\|_H^2 \leq 8 \left[ \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \left[ \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x \partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}\right)^2 \right] dx dz \right] \leq 8 [\|\Psi\|_A^2 + \|\Theta\|_2^2]$$

Entonces la desigualdad (a) es cierta.

En particular si tomamos los resultados por separado para  $\Psi$  y  $\Theta$  tenemos que

$$\|\Delta^2\Psi\|_2^2 \leq C_1 \|\Psi\|_A^2$$

$$\|\Delta\Theta\|_2^2 \leq C_2 \|\Theta\|_2^2$$

Ahora queremos demostrar que

$$b) \quad [\|\Psi\|_A^2 + \|\Theta\|_2^2] \leq C \|(\Psi)\|_H^2$$

Para ésto definimos los siguientes subespacios de  $H^4(\Omega)$  y  $H^2(\Omega)$  respectivamente

$$\widehat{H}^4(\Omega) = \left\{ \Psi \in H^4(\Omega) \mid \Psi = \Delta\Psi = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\}$$

$$\widehat{H}^2(\Omega) = \left\{ \Theta \in H^2(\Omega) \mid \begin{array}{l} \Theta(x,0) = \Theta(x,\pi) = 0 \\ \frac{\partial\Theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial\Theta}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0 \end{array} \right\}$$

Ambos subespacios son cerrados, pues de los teoremas de-

traza para fronteras que sean Lipchitz, como lo es en -- nuestro caso (Rektorys Pag. 325) se tiene que el operador  $\gamma$  que manda una función a su valor en la frontera es acotado de  $H^m(\Omega) \xrightarrow{\gamma} H^{m-1/2}(\partial\Omega)$  (misma-referencia).

Por lo tanto si  $\psi_n$  es una sucesión en  $\hat{H}^1(\Omega)$  con  $\psi_n = \Delta\psi_n = 0$  en  $\partial\Omega$  entonces

$$\gamma(\psi_n) \xrightarrow{H^{1/2}(\Omega)} 0, \quad \gamma(\Delta\psi_n) \xrightarrow{H^{1/2}(\Omega)} 0$$

Entonces

$$\psi \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x, z) \in \hat{H}^1(\Omega)$$

Para  $\hat{H}^2(\Omega)$  se tiene una situación análoga.

Definimos sobre  $\hat{H}^1(\Omega)$  la norma  $\|\psi\|_{\hat{H}^1}^2 = \|\Delta\psi\|_{L^2(\Omega)}^2$  y sobre  $H^2(\Omega)$  la norma  $\|\theta\|_{\hat{H}^2}^2 = \|\Delta\theta\|_{L^2(\Omega)}^2$  y así

$$\hat{H}^1(\Omega) = \left\{ \psi \in H^1(\Omega) \mid \psi = \Delta\psi = 0 \text{ en } \partial\Omega, \|\psi\|_{\hat{H}^1}^2 = \|\Delta\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}$$

$$\hat{H}^2(\Omega) = \left\{ \theta \in H^2(\Omega) \mid \theta(x, 0) = \theta(x, \pi) = 0, \frac{\partial\theta}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial\theta}{\partial x}\Big|_{x=\pi} = 0, \|\theta\|_{\hat{H}^2}^2 = \|\Delta\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}$$

Buscaremos ahora bases ortogonales para  $\hat{H}^1(\Omega)$  y  $\hat{H}^2(\Omega)$ .

Para empezar tenemos el siguiente teorema

Teorema

$$Y_{l,m}(x, z) \equiv \sin \frac{mx}{2} \sin nz \quad \text{es una base ortogonal de } L^2(\Omega)$$



Prueba

$$\int_0^\pi \int_0^\pi Y_{lm}(x,z) Y_{l'm'}(x,z) dx dz = \int_0^\pi \frac{\sin \frac{mx}{2}}{x} \frac{\sin \frac{m'x}{2}}{x} dx \int_0^\pi \sin nz \sin n'z dz = \frac{\pi^2}{4} \delta_{mn} \delta_{n'n'}$$

Es decir las  $Y_{lm}(x,z)$  son ortogonales, falta ver que es base. Para ésto, sea  $\varphi(x,z) \in L^2(\Omega)$  tal que  $\varphi(x,z) \perp_{L^2} Y_{lm}(x,z) \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \varphi(x,z) \frac{\sin \frac{mx}{2}}{x} \sin nz dx dz = 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Por el teorema de Fubini (Rudin Pag. 150)

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \varphi(x,z) \frac{\sin \frac{mx}{2}}{x} \sin nz dx dz = \int_0^\pi dx \left( \int_0^\pi \varphi(x,z) \sin nz dz \right) \frac{\sin \frac{mx}{2}}{x} = 0$$

definiendo  $f_n(x) = \int_0^\pi \varphi(x,z) \sin nz dz$ , se tiene que

$$f_n(x) = 0 \quad \text{pues } \frac{\sin \frac{mx}{2}}{x} \text{ es base de } L^2(0, \pi).$$

Por el mismo argumento (el  $\sin nz$  es base de  $L^2(0, \pi)$ )

$$\varphi(x,z) = 0 \quad (\text{salvo en un conjunto de medida cero}).$$

Con lo que queda demostrado el teorema (Halmos Pag. 27).

Lema

$$Y_{lm}(x,z) \text{ en una base ortogonal en } \hat{H}^4(\Omega)$$

Prueba

$$(Y_{lm}, Y_{l'm'})_{\hat{H}^4} = \left[ \left( \frac{m}{2} \right)^2 + n^2 \right]^2 \left[ \left( \frac{m'}{2} \right)^2 + n'^2 \right]^2 (Y_{lm}, Y_{l'm'})_{L^2} = \left[ \left( \frac{m}{2} \right)^2 + n^2 \right]^2 \left[ \left( \frac{m'}{2} \right)^2 + n'^2 \right]^2 \frac{\pi^2}{4} \delta_{lm} \delta_{l'm'}$$

entonces son ortogonales en  $H^4(\Omega)$ , y si  $\phi \in H^4(\Omega)$  es ortogonal a  $Y_{mn}(x,z)$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{N}$ , es decir

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \Delta^2 \phi \Delta^2 Y_{mn} dx dz = 0 = [(\frac{\pi}{2})^2 + n^2] \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \Delta^2 \phi Y_{mn} dx dz$$

Como  $m \in \mathbb{N}$  y  $n \in \mathbb{N}$ , la última igualdad es cierta si-

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \Delta^2 \phi Y_{mn} dx dz = 0$$

Por el teorema anterior, esto implica que  $\Delta^2 \phi = 0$  es decir  $\phi(x,z) = 0$  como se probó anteriormente.

Con lo que el lema queda demostrado (Halmos Pag.27).

Demostrado esto tenemos que  $\tilde{Y}_{mn}(x,z) = \frac{2}{\pi\sqrt{2}} Y_{mn}$  es una base ortonormal en  $L^2(\Omega)$  y ortogonal en  $H^4(\Omega)$ , por lo tanto toda función  $\phi(x,z) \in L^2(\Omega)$  tiene un desarrollo del tipo

$$\phi(x,z) = \sum_{m,n} a_{mn} \tilde{Y}_{mn}(x,z) \text{ con } a_{mn} = (\phi, \tilde{Y}_{mn})$$

$$\|\phi\|^2 = \sum_{m,n} |a_{mn}|^2 < \infty \text{ por hipótesis.}$$

Veremos ahora que el operador  $\Delta^2$  es 1-1 y sobre de  $H^4(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  y que  $\|\psi\|_4^2 \leq \|\Delta^2 \psi\|_2^2$ .

$$\text{Sea } \psi = \sum_{m,n} \frac{a_{mn}}{[(\frac{\pi}{2})^2 + n^2]^2} \tilde{Y}_{mn}$$

Es claro que  $\psi(x,z) \in L^2(\Omega)$  pues

$$\left| \frac{a_{mn}}{[(\frac{\pi}{2})^2 + n^2]} \right| < a_{mn} \text{ entonces } \sum_{m,n} \left| \frac{a_{mn}}{[(\frac{\pi}{2})^2 + n^2]^2} \right|^2 < \infty$$

Queremos ver ahora, si las derivadas de  $\psi$  están en  $L^2(\Omega)$ . Para hacer ésto, tomaremos la suma truncada

$$\psi_{MN}(x, z) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn} \left[ \left(\frac{m}{l}\right)^2 + n^2 \right]^{-2} Y_{m,n}(x, z) \quad \text{se tiene que } \psi_{MN}(x, z) \in C^0(\Omega)$$

Tomemos la cuarta derivada  $\frac{\partial^4 \psi_{M,N}}{\partial x^2 \partial z^2} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N -\frac{2}{\pi \sqrt{z}} \frac{a_{mn} \left(\frac{m}{l}\right)^3 n}{\left[ \left(\frac{m}{l}\right)^2 + n^2 \right]^2} \cos \frac{m\pi x}{l} e^{-n z}$

$$\Rightarrow \|\psi_{M,N}\|_{L^2}^2 = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left| \frac{a_{mn} \left(\frac{m}{l}\right)^3 n}{\left[ \left(\frac{m}{l}\right)^2 + n^2 \right]^2} \right|^2$$

Pero se tiene el siguiente resultado

$$\left(\frac{m}{l}\right)^3 n \leq \left[ \left(\frac{m}{l}\right)^2 + n^2 \right]^2$$

Prueba

$$\text{Sea } u = n, \quad v = \frac{m}{l}$$

Consideremos

$$\begin{aligned} (u^2 + v^2)^2 - uv^3 - (u-v)^4 &= -4u^2v^2 + 3uv^3 + 4u^3v \\ &= uv \left[ (v-2u)^2 + 2v^2 \right] \end{aligned}$$

ya que  $u > 0$   $v > 0$ , se tiene que

$$(u^2 + v^2)^2 - uv^3 > (u-v)^4 \geq 0 \Rightarrow uv^3 \leq (u^2 + v^2)^2$$

Es decir

$$\left\| \frac{\partial^4 \psi_{MN}}{\partial x^2 \partial z^2} \right\|_{L^2}^2 \leq \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N |a_{mn}|^2$$

por lo tanto

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \frac{\partial^4 \psi_{MN}}{\partial x^2 \partial z^2} = \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2} \in L^2(\Omega)$$

para  $\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2}$  se hace exactamente lo mismo. En

este caso la desigualdad a probar sería  $n^3 \left(\frac{m}{l}\right) \leq \left[ \left(\frac{m}{l}\right)^2 + n^2 \right]^2$

que es la misma que la anterior definiendo para este caso

$$\text{so } u = \left(\frac{m}{l}\right), \quad v = n$$

Así, 
$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x \partial z^3} = \lim_{M, N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N -\frac{2}{\pi \sqrt{2}} \frac{a_{mn} n^3 (\frac{m}{2})}{[(\frac{m}{2})^2 + n^2]^2} \cos \frac{mx}{2} \cos nz \in L^2(\Omega)$$

También se hace lo mismo para ver que  $\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4}$  y  $\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2}$  estén en  $L^2(\Omega)$ . Las desigualdades que se tienen que cumplir son

$$(\frac{m}{2})^4 \leq [(\frac{m}{2})^2 + n^2]^2$$

$$n^4 \leq [(\frac{m}{2})^2 + n^2]^2$$

$$(\frac{m}{2})^2 n^2 \leq [(\frac{m}{2})^2 + n^2]^2$$

respectivamente, las cuales claramente son ciertas recordando que  $m > 0$ ,  $n > 0$ .

Concluiremos de todo esto que las cuartas derivadas de  $\psi$  están en  $L^2(\Omega)$  por lo que  $\psi(x, z) \in \hat{H}^4(\Omega)$ .

Además

$$\Delta^2 \psi = \sum_{m, n} \frac{2}{\pi \sqrt{2}} a_{mn} \left[ \frac{(\frac{m}{2})^4 + 2(\frac{m}{2})^2 n^2 + n^4}{2[(\frac{m}{2})^2 + n^2]^2} \right] \cos \frac{mx}{2} \cos nz = \phi$$

Este resultado me dice que  $\Delta^2$  es sobre pues para todo  $\phi \in L^2(\Omega)$  existe una  $\psi \in H^4(\Omega)$  tal que  $\Delta^2 \psi = \phi$ .

Tenemos ahora que

$$\left\| \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} \right\|_{L^2}^2 \leq \|\phi\|_{L^2}^2$$

$$\left\| \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2} \right\|_{L^2}^2 \leq \|\phi\|_{L^2}^2$$

$$\left\| \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2} \right\|_{L^2}^2 \leq \|\phi\|_{L^2}^2$$

$$\left\| \frac{\partial^4 \psi}{\partial x \partial z^3} \right\|_{L^2}^2 \leq \|\phi\|_{L^2}^2$$

$$\left\| \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} \right\|_{L^2}^2 \leq \|\phi\|_{L^2}^2$$

Queremos ver que las normas de las primeras, segundas y terceras derivadas de  $\psi$  también estén acotadas por la norma de  $\phi$ .

Haciendo lo mismo que para  $\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2}$  se tiene que

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right\|_2^2 \leq \|\phi\|_2^2, \quad \left\| \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right\|_2^2 \leq \|\phi\|_2^2, \quad \left\| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right\|_2^2 \leq \|\phi\|_2^2, \quad \left\| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right\|_2^2 \leq \|\phi\|_2^2 \\ & \left\| \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right\|_2 \leq \|\phi\|_2^2, \quad \left\| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right\|_2 \leq \|\phi\|_2^2, \quad \left\| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2 \partial z} \right\|_2 \leq \|\phi\|_2^2, \quad \left\| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z^2} \right\|_2^2 \leq \|\phi\|_2^2, \\ & \left\| \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} \right\|_2 \leq \|\phi\|_2^2, \end{aligned}$$

son ciertas suponiendo que las siguientes desigualdades se cumplen

- a)  $u \leq [u^2 + v^2]^2$
- b)  $u^2 \leq [u^2 + v^2]^2$
- c)  $uv \leq [u^2 + v^2]^2$
- d)  $u^3 \leq [u^2 + v^2]^2$
- e)  $u^2v \leq [u^2 + v^2]^2$

donde  $u = \eta$  y  $v = \eta$  o viceversa.

Verificamos la primera, ya que las demás se checan en forma similar.

a)  $u \leq [u^2 + v^2]^2$

Si  $u = \eta \geq 1$  entonces  $u \leq u^4$  y los demás términos son positivos.

Entonces la desigualdad es cierta

Si  $u = \frac{m}{2}$  con  $\frac{m}{2} < 1$  y  $v = \eta \geq 1$  entonces  $u < v^4$  y los demás términos son positivos.

Con todo ésto hemos demostrado que

$$\|\psi\|_4^2 \leq C \|\phi\|_2^2, \text{ es decir}$$

$$\|\psi\|_4^2 \leq C \|\Delta^2 \psi\|_2^2 \quad (\text{III.4})$$

Ya que  $\psi = (\Delta^2)^{-1} \phi$  se tiene que

$\|(\Delta^2)^{-1} \phi\|_4^2 \leq C \|\phi\|_2^2$  es decir  $\|(\Delta^2)^{-1}\| \leq \sqrt{C}$ , el operador inverso  $(\Delta^2)^{-1}$  es continuo. La existencia del inverso la da el hecho que  $\Delta^2 : \hat{H}^4(\Omega) \longrightarrow \hat{L}^2(\Omega)$  es 1-1, sobre y continuo, resultados que salieron en forma directa de las construcciones de  $\psi$  y  $\phi$ .

Por lo que se refiere a  $\hat{H}^2(\Omega)$  se tiene una situación parecida.

### Teorema

$$Y_{2mn}(x, z) = \cos \frac{mx}{2} \operatorname{sen} nz \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad n \in \mathbb{N}.$$

es base de  $L^2(\Omega)$

### Prueba

Sea  $g(x, z) \in L^2(\Omega)$  tal que  $g(x, z) \perp_{L^2} Y_{2mn}(x, z) \quad \forall m, n$

es decir

$$\int_0^\pi \int_0^\pi g(x, z) \cos \frac{mx}{2} \operatorname{sen} nz \, dx \, dz = 0 = \int_0^\pi \operatorname{sen} nz \left( \int_0^\pi g(x, z) \cos \frac{mx}{2} \, dx \right) dz$$

Aplicando nuevamente el teorema de Fubini.

Pero como  $\text{sen } n z$  es base de  $L^2(0, \pi)$  se tiene que-

$$f_m(z) = \int_0^{\pi} g(x, z) \cos \frac{mx}{2} dx = 0$$

y como  $\cos \frac{mx}{2}$  con  $m=0, 1, 2, \dots$  es base de

$$L^2(0, \pi) \Rightarrow f_m(z) = 0 \Leftrightarrow g(x, z) = 0.$$

Además es claro que  $Y_{2mn}(x, z)$  son ortogonales, por lo que usando el mismo argumento que para  $Y_{mn}(x, z)$  se tiene que  $Y_{2mn}(x, z)$  es base de  $L^2(\Omega)$ .

Lema

$$Y_{2mn}(x, z) \text{ es base de } \hat{H}^2(\Omega)$$

Prueba

Por una parte  $Y_{2mn}(x, 0) = Y_{2mn}(x, \pi) = 0$  para todo

$m, n$  y  $\frac{\partial Y_{2mn}}{\partial x} = -\frac{m}{2} \text{sen } \frac{mx}{2} \text{sen } n z$ , por lo tanto,

$$\frac{\partial Y_{2mn}}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial Y_{2mn}}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0$$

Esto nos indica que  $Y_{2mn}(x, z) \in \hat{H}^2(\Omega) \forall m, n$ .

Se tiene que

$$(Y_{2mn}, Y_{2m'n'})_{\Omega} = \left[ \left( \frac{m}{2} \right)^2 + n^2 \right] \left[ \left( \frac{m'}{2} \right)^2 + n'^2 \right] (Y_{2mn}, Y_{2m'n'})_z = \left[ \left( \frac{m}{2} \right)^2 + n^2 \right] \left[ \left( \frac{m'}{2} \right)^2 + n'^2 \right] \frac{\pi^2}{4} \delta_{mm'} \delta_{nn'}$$

Por lo que  $Y_{2mn}(x, z)$  es un conjunto de funciones ortogonales en  $\hat{H}^2(\Omega)$ .

Por último, sea  $\theta(x, z) \in \hat{H}^2(\Omega)$  tal que  $\theta(x, z) \perp_{\hat{H}^2(\Omega)} Y_{2mn} \forall m, n$

es decir

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \Delta \theta \Delta Y_{2mn} dx dz = \left[ \left( \frac{m}{2} \right)^2 + n^2 \right] \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \Delta \theta Y_{2mn} dx dz = 0 \forall m, n.$$

por lo que

$$\left\| \frac{\partial^2 \theta_{MN}}{\partial x^2} \right\|_{L^2}^2 \leq \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N |a_{mn}|^2$$

$$\left\| \frac{\partial^2 \theta_{MN}}{\partial z^2} \right\|_{L^2}^2 \leq \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N |a_{mn}|^2$$

$$4 \left\| \frac{\partial^2 \theta_{MN}}{\partial x \partial z} \right\|_{L^2}^2 \leq \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N |a_{mn}|^2$$

y así

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \lim_{\substack{M \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \frac{\partial^2 \theta_{MN}}{\partial x^2} \in L^2(\Omega) \quad \text{y} \quad \left\| \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right\|_{L^2}^2 \leq \|\tilde{\theta}\|_{L^2}^2$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial z} = \lim_{\substack{M \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \frac{\partial^2 \theta_{MN}}{\partial x \partial z} \in L^2(\Omega) \quad \text{y} \quad \left\| \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial z} \right\|_{L^2}^2 \leq \|\tilde{\theta}\|_{L^2}^2$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \lim_{\substack{M \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \frac{\partial^2 \theta_{MN}}{\partial z^2} \in L^2(\Omega) \quad \text{y} \quad \left\| \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right\|_{L^2}^2 \leq \|\tilde{\theta}\|_{L^2}^2$$

Esto me dice que

$$\theta(x, z) \in \hat{H}^2(\Omega)$$

Además

$$\left\| \frac{\partial \theta}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 \leq \|\tilde{\theta}\|_{L^2}^2 \quad \text{pues} \quad \left(\frac{m}{x}\right) \leq \left(\frac{m}{x}\right)^2 + n^2$$

$$\left\| \frac{\partial \theta}{\partial z} \right\|_{L^2}^2 \leq \|\tilde{\theta}\|_{L^2}^2 \quad \text{pues} \quad n \leq \left(\frac{m}{x}\right) + n^2$$

Por lo que  $\|\theta\|_{L^2}^2 \leq \|\tilde{\theta}\|_{L^2}^2$  pero  $\tilde{\theta}(x, z) = -\Delta \theta$  como se puede ver directamente. Por lo tanto  $-\Delta$  es sobre (análogo al caso anterior)

$$\text{Así} \quad \|\theta\|_{L^2}^2 \leq \|\Delta \theta\|_{L^2}^2 \quad \text{(III.5)}$$

y de la construcción de  $\theta(x, z)$  y  $\tilde{\theta}(x, z)$  se tiene que  $-\Delta : H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  es un operador continuo, 1-1 y sobre esto implica que existe el operador  $(-\Delta)^{-1}$  y es continuo, ya que

$$\|(-\Delta)^{-1} \tilde{\theta}\|_{L^2}^2 \leq \|\tilde{\theta}\|_{L^2}^2$$

Resumiendo, las desigualdades (III.4) y (III.5) implican



que

$$[\|\psi\|_0^2 + \|\theta\|_2^2] \leq C \|\begin{pmatrix} \psi \\ \theta \end{pmatrix}\|_0^2$$

y así  $\hat{H}^0(\Omega) \times \hat{H}^2(\Omega) = H(\Omega) \subset H^0(\Omega) \times H^2(\Omega)$  , y la -

base de  $H(\Omega)$  estará dada por

$$\left\{ \begin{pmatrix} Y_{1mn} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ Y_{2mn} \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} m \geq 0 \\ n \geq 1 \end{matrix} \right\}$$

Ahora buscaremos soluciones a  $L_\lambda \underline{x} = \underline{0}$  para  $\underline{x} \in H(\Omega)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

Si desarrollamos  $\underline{x}$  en término de la base encontrada anteriormente

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \psi \\ \theta \end{pmatrix} = \sum_{\substack{m \geq 0 \\ n \geq 1}} E_{mn} \begin{pmatrix} \text{sen } \frac{m\pi x}{l} \text{ sen } n\pi z \\ 0 \end{pmatrix} + F_{mn} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \frac{m\pi x}{l} \text{ sen } n\pi z \end{pmatrix}$$

con  $\sum_{\substack{m \geq 0 \\ n \geq 1}} |E_{mn}|^2 [(\frac{m}{l})^2 + n^2]^4 + |F_{mn}|^2 [(\frac{m}{l})^2 + n^2]^2 < \infty$  por hipótesis

Aplicamos el operador  $L_\lambda$ , notando que podemos aplicarlo a cada término de la serie ya que es continuo y la serie  $L_\lambda \underline{x}$  es convergente en  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  como se vio anteriormente.

$$L_\lambda \underline{x} = \sum_{\substack{m \geq 0 \\ n \geq 1}} \begin{pmatrix} [(\frac{m}{l})^2 + n^2] E_{mn} + \lambda (\frac{m}{l}) F_{mn} \\ (\frac{m}{l}) E_{mn} + [(\frac{m}{l})^2 + n^2] F_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{sen } \frac{m\pi x}{l} \text{ sen } n\pi z \\ \cos \frac{m\pi x}{l} \text{ sen } n\pi z \end{pmatrix}$$

en donde  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac \\ bd \end{pmatrix}$

Entonces  $L_\lambda \underline{x} = \underline{0}$  si y solo si

$$\begin{pmatrix} [(\frac{m}{l})^2 + n^2] E_{mn} + \lambda (\frac{m}{l}) F_{mn} \\ (\frac{m}{l}) E_{mn} + [(\frac{m}{l})^2 + n^2] F_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [(\frac{m}{l})^2 + n^2] & \lambda (\frac{m}{l}) \\ (\frac{m}{l}) & [(\frac{m}{l})^2 + n^2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{mn} \\ F_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\forall m \geq 0, n \geq 1$$

$$\text{Si } \det \begin{pmatrix} [(\frac{m}{l})^2 + n^2]^2 & \lambda(\frac{m}{l}) \\ (\frac{m}{l}) & [(\frac{m}{l})^2 + n^2] \end{pmatrix} = (\frac{m}{l})^2 \left[ \frac{[(\frac{m}{l})^2 + n^2]^3}{(\frac{m}{l})^2} - \lambda \right] \neq 0 \quad \forall m \neq 0, n \neq 0$$

la matriz es invertible y para ese caso  $E_{mn} = F_{mn} = 0$

y la única solución es la trivial  $\chi = 0$ .

Por otra parte, si existen parejas  $(m_i, n_i)$  tales que -

$$\lambda = \lambda_{mn} = \frac{[(\frac{m_i}{l})^2 + n_i^2]^3}{(\frac{m_i}{l})^2} \quad \text{tenemos que}$$

$$[(\frac{m_i}{l})^2 + n_i^2] E_{mn} + \lambda_{mn} (\frac{m_i}{l}) F_{mn} = 0$$

Notemos que los valores de  $\lambda$  para las que hay soluciones no triviales son números reales y positivos, cosa que va de acuerdo a la Física del problema ya que por una parte el número de Rayleigh involucra cantidades físicas que son reales y por otro lado es intuitivamente claro que para que pueda haber convección, el fluido cercano a la cara superior debe estar a menor temperatura que el cercano a la cara inferior, es decir  $T^+ < T^-$  lo que da valores positivos de  $\lambda$  (su definición está al final del capítulo II).

Damos a  $F_{mn}$  el valor de 1, por lo que  $E_{mn} = -\frac{[(\frac{m}{l})^2 + n^2]}{(\frac{m}{l})}$

y así la solución a  $\mathcal{L}_{\lambda_{mn}} \chi = 0$  será

$$\chi = \sum_{m_i, n_i / \lambda = \lambda_{mn}} \begin{pmatrix} -[(\frac{m_i}{l})^2 + n_i^2] \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \frac{m_i x}{l} \sin n_i z \\ \cos \frac{m_i x}{l} \sin n_i z \end{pmatrix}$$

Deseo ahora ver el comportamiento para  $\lambda_{\lambda}$  fuera del es-

pectro.

En el caso en que  $\lambda \neq \frac{[(\frac{m}{2})^2 + n^2]^3}{(\frac{m}{2})^2}$   $\forall m \geq 0, n \geq 1$

entonces  $L_\lambda$  es invertible ya que acabamos de probar que  $L_\lambda$  es 1-1 y tenemos que para  $\phi \in \mathcal{D}$  desarrollándolo en la base de  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$

$$\phi \sim \sum_{\substack{m \geq 0 \\ n \geq 1}} \begin{pmatrix} \alpha_{mn} \sin \frac{m\pi}{2} \sin n\pi z \\ \beta_{mn} \cos \frac{m\pi}{2} \sin n\pi z \end{pmatrix}$$

en donde  $\sum_{\substack{m \geq 0 \\ n \geq 1}} (|\alpha_{mn}|^2 + |\beta_{mn}|^2) < \infty$  por hipótesis.

Si aplicamos a  $\phi$  el operador  $L_\lambda^{-1}$ , suponiendo por el momento que podemos aplicarlo término a término de la serie, es decir suponiendo que la serie  $L_\lambda^{-1} \phi$  es convergente se tiene que

$$L_\lambda^{-1} \phi \sim \sum_{\substack{m \geq 0 \\ n \geq 1}} \left[ \begin{pmatrix} [(\frac{m}{2})^2 + n^2]^2 & \lambda(\frac{m}{2}) \\ (\frac{m}{2}) & [(\frac{m}{2})^2 + n^2] \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_{mn} \\ \beta_{mn} \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \sin \frac{m\pi}{2} \sin n\pi z \\ \cos \frac{m\pi}{2} \sin n\pi z \end{pmatrix}$$

$$L_\lambda^{-1} \phi \sim \sum_{\substack{m \geq 0 \\ n \geq 1}} \left[ \frac{1}{[(\frac{m}{2})^2 + n^2]^3 - \lambda(\frac{m}{2})^2} \begin{pmatrix} [(\frac{m}{2})^2 + n^2 & -\lambda(\frac{m}{2}) \\ -(\frac{m}{2}) & [(\frac{m}{2})^2 + n^2]^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{mn} \\ \beta_{mn} \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \sin \frac{m\pi}{2} \sin n\pi z \\ \cos \frac{m\pi}{2} \sin n\pi z \end{pmatrix}$$

Definamos

$$\begin{pmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \end{pmatrix} = \frac{1}{[(\frac{m}{2})^2 + n^2]^3 - \lambda(\frac{m}{2})^2} \begin{pmatrix} [(\frac{m}{2})^2 + n^2 & -\lambda(\frac{m}{2}) \\ -(\frac{m}{2}) & [(\frac{m}{2})^2 + n^2]^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{mn} \\ \beta_{mn} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$L_\lambda^{-1} \phi \sim \sum_{\substack{m \geq 0 \\ n \geq 1}} \begin{pmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \frac{m\pi}{2} \sin n\pi z \\ \cos \frac{m\pi}{2} \sin n\pi z \end{pmatrix}$$

y si  $L_2^{-1} \phi \in H(\Omega)$

$$\|L_2^{-1} \phi\|_H^2 = \sum_{\substack{m \geq 0 \\ n \geq 1}} |A_{mn}|^2 \left[ \left(\frac{m}{2}\right)^2 + n^2 \right]^4 + |B_{mn}|^2 \left[ \left(\frac{m}{2}\right)^2 + n^2 \right]^2$$

Sustituyendo  $A_{mn}$  y  $B_{mn}$  y usando la desigualdad  $(a-b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$  se tiene que si existe

$$\|L_2^{-1} \phi\|_H^2 \leq \sum_{\substack{m \geq 0 \\ n \geq 1}} \frac{2}{\left\{ \left[ \left(\frac{m}{2}\right)^2 + n^2 \right]^3 - \lambda \left(\frac{m}{2}\right)^2 \right\}^2} \left( \alpha_{mn}^2 \left[ \left(\frac{m}{2}\right)^2 + n^2 \right]^6 + \lambda \beta_{mn}^2 \left[ \left(\frac{m}{2}\right)^2 + n^2 \right]^4 \left(\frac{m}{2}\right)^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{m}{2}\right)^2 \left[ \left(\frac{m}{2}\right)^2 + n^2 \right]^2 \alpha_{mn}^2 + \left[ \left(\frac{m}{2}\right)^2 + n^2 \right]^6 \beta_{mn}^2 \right)$$

del hecho que  $\left(\frac{m}{2}\right)^2 < \left(\frac{m}{2}\right)^2 + n^2$  y  $\left[ \left(\frac{m}{2}\right)^2 + n^2 \right]^3 < \left[ \left(\frac{m}{2}\right)^2 + n^2 \right]^5 < < \left[ \left(\frac{m}{2}\right)^2 + n^2 \right]^6$  se llega a que

$$\|L_2^{-1} \phi\|_H^2 \leq \sum_{\substack{m \geq 0 \\ n \geq 1}} \frac{2}{\left( \left[ \left(\frac{m}{2}\right)^2 + n^2 \right]^3 - \lambda \left(\frac{m}{2}\right)^2 \right)^2} (2\alpha_{mn}^2 + (1+\lambda)\beta_{mn}^2) \left[ \left(\frac{m}{2}\right)^2 + n^2 \right]^6$$

Ahora, si  $\lambda \leq 0$  entonces  $\left[ \left(\frac{m}{2}\right)^2 + n^2 \right]^3 - \lambda \left(\frac{m}{2}\right)^2 \geq \left[ \left(\frac{m}{2}\right)^2 + n^2 \right]^3$  (a)

y si  $\lambda \geq 0 \Rightarrow \left\{ \left[ \left(\frac{m}{2}\right)^2 + n^2 \right]^3 - \lambda \left(\frac{m}{2}\right)^2 \right\} \geq \left[ \left(\frac{m}{2}\right)^2 + n^2 \right] \left[ \left(\frac{m}{2}\right)^2 + n^2 - \lambda \right]$  (b)

ya que  $-\lambda n^2 \leq 0$

Para  $\lambda \leq 0$  no habría problema, ya que la desigualdad (a) encontrada tenemos que

$$\|L_2^{-1} \phi\|_H^2 \leq 2 \sum_{\substack{m \geq 0 \\ n \geq 1}} 2\alpha_{mn}^2 + (1+\lambda)\beta_{mn}^2 \leq \text{Max.}(4, 2+2\lambda^2) \|\phi\|_{L^2}^2$$

(Recordemos que ahí la Física nos dice que la convección es imposible)

Para  $\lambda \geq 0$  tenemos que

$$\left[ \left(\frac{m}{2}\right)^2 + n^2 \right]^2 - \lambda > \frac{\left[ \left(\frac{m}{2}\right)^2 + n^2 \right]^2}{2} \text{ si } \lambda < \frac{\left[ \left(\frac{m}{2}\right)^2 + n^2 \right]^2}{2}$$

En el caso que  $\lambda > \frac{[(\frac{m}{2})^2 + n^2]}{2}$ , es claro que el número de  $(m, n)$  tales que  $[(\frac{m}{2})^2 + n^2] < 2\lambda$  es finito

De esta forma descompondremos la suma

$$\sum_{\substack{m \geq 0 \\ n \geq 0}} \frac{2}{\sqrt{[(\frac{m}{2})^2 + n^2] - \lambda (\frac{m}{2})^2}} (2\alpha_{mn}^2 + (1+\lambda^2)\beta_{mn}^2) [(\frac{m}{2})^2 + n^2]^6 = \sum_{\substack{(m,n) \\ (\frac{m}{2})^2 + n^2 < \sqrt{2}\lambda}} ( ) + \sum_{\substack{(m,n) \\ (\frac{m}{2})^2 + n^2 > \sqrt{2}\lambda}} ( )$$

De la segunda suma, usando la desigualdad

$$[(\frac{m}{2})^2 + n^2]^2 - \lambda \geq \frac{[(\frac{m}{2})^2 + n^2]}{2} \text{ en (b) se tiene que}$$

$$\sum_{\substack{(m,n) \\ (\frac{m}{2})^2 + n^2 \geq \sqrt{2}\lambda}} ( ) \leq 4 \sum_{\substack{(m,n) \\ (\frac{m}{2})^2 + n^2 \geq \sqrt{2}\lambda}} (2\alpha_{mn}^2 + (1+\lambda^2)\beta_{mn}^2) \leq \text{Max. } (8, 4+4\lambda^2) \sum_{\substack{(m,n) \\ (\frac{m}{2})^2 + n^2 \geq \sqrt{2}\lambda}} (|\alpha_{mn}|^2 + |\beta_{mn}|^2)$$

La primera suma, al ser finita está acotada

$$\sum_{\substack{(m,n) \\ (\frac{m}{2})^2 + n^2 \leq 2\sqrt{2}\lambda}} ( ) \leq (4 \sum_{\substack{(m,n) \\ (\frac{m}{2})^2 + n^2 \leq 2\sqrt{2}\lambda}} (|\alpha_{mn}|^2 + |\beta_{mn}|^2)) K(\lambda)$$

Uniendo las dos sumas se obtiene finalmente que para  $\lambda \geq 0$

$$\|L_\lambda \phi\|_H^2 \leq C(\lambda) \|\phi\|_{L_2 \times L_2}^2$$

por lo tanto si  $\lambda \neq \frac{[(\frac{m}{2})^2 + n^2]}{(\frac{m}{2})^2} \forall m \geq 0, n \geq 1$

$L_\lambda^{-1}$  es un operador continuo de  $L_2 \times L_2$  a  $H(\Omega)$

Hemos visto hasta ahora que  $L_\lambda$  tiene soluciones no triviales si y solo si existen parejas  $(m_i, n_i)$  tales que  $\lambda = \lambda_{mn} = \frac{[(\frac{m}{2})^2 + n^2]}{(\frac{m}{2})^2}$ . Las preguntas que nos hacemos ahora son: ¿como varía  $\lambda_{mn}$  si varían  $m, n$  ? y ¿cuantas parejas  $(m_i, n_i)$  podrían darnos un mismo valor de  $\lambda_{mn}$  ?.

## CAPITULO IV

### CONCLUSIONES

Se buscaron posibles estados de convección del fluido -- dentro de el prisma y en el Capítulo IV se encontró, por una parte, que de acuerdo a lo esperado no existe convección para valores de  $\theta$  negativos, por otra parte, el hecho de que, para  $\theta$  entre  $\theta_{min}$  y  $\theta_{max}$  tampoco hubiera, nos indica que en esos casos la fuerza de viscosidad vence a la de gravedad hasta llegar al mínimo, en donde encontramos nuestra primera rama de bifurcación.

La primera rama de bifurcación, suponiendo que el valor mínimo de  $\theta$  tiene multiplicidad  $n$  va hacia la derecha como se ve al final del capítulo III y es estable.

Aunque se tienen aquí las formas explícitas de las ecuaciones de bifurcación, no hemos podido encontrar como se ven éstas para el caso de multiplicidad  $n$  del valor mínimo de  $\theta$  y para los siguientes valores de éste. - Hasta donde sabemos, no se ha hecho nada al respecto.

Por último, por lo que se refiere a la bifurcación secundaria, Buse ha encontrado que ésta existe y que depende del número de Prandtl  $T$ , también se tiene evidencia experimental de esto.

Un enfoque variacional a un problema semejante a éste lo

hace Rabinowitz, el cual estudia el problema de convección entre dos planos infinitos.

Otro tipo de casos que se han estudiado sobre este problema, es el ver como cambia el estado de convección suponiendo una perturbación en las temperaturas de las caras del prisma, así como un estudio de como pasar suavemente la conducción a convección usando técnicas de reescalamiento y empalmado soluciones de la vecindad de la frontera del rectángulo con las del interior de éste. Nos referimos a los dos artículos de Reis, et. al.

## BIBLIOGRAFIA

Batchelor G.K.

An Introduction to Fluid Dynamics

Cambridge University Press, 1967.

Berger M.S.

Applications of Global Analysis to Specific Nonlinear  
Eigenvalue Problems.

Rocy Mountain Journal of Mathematics, Vol. 3,  
number 2, 1973.

Berger M.S.

Nonlinearity and Functional Analysis.

Academic Press, 1977.

Fife P.

The Benard Problem for general fluid dynamical equations  
and the remarks on the Boussinesq approximation. Indiana  
University. Math. Journal 20 (1970) 303 - 326.

Jeffreys H.

Cartesian Tensors

Cambridge University Press, 1965

Joseph D.D.

Stability of Fluid Motions II

Springer - Verlag, Berlin, 1976



Liusternik and Sobolev  
Elements of Functional Analysis  
Frederick Unger Publishing Company 1965.

Rabinowitz P.  
Existence and Nonuniqueness of rectangular solutions  
of the Benard problem.  
Arch. Rational Mech. Anal. 29 (1968) 32-57.

Reis E, Tavantzis J.  
A boundary value problem of thermal convection  
Journal of Differential Equations 35, (45-54) 1980

Reis E, Tavantzis J., Matkowsky J.  
On Smooth Transition to Convection.  
SIAM, Journal Appl. Math. 34 (1978) 322-337).

Sattinger D.H.  
Topics in Stability and Bifurcation Theory  
Lecture Notes in Mathematics 309  
Sipringer Verlag, New York 1973.