



TESIS DE LICENCIATURA

**NUMERO DE SUBCONJUNTOS
COMPACTOS DE UN ESPACIO
TOPOLOGICO**

CARRERA DE MATEMATICAS

MARGARITA ROMERO CORTES



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Introducción.

Se presentan aquí algunos de los principales resultados obtenidos acerca de las cotas superiores de los subconjuntos compactos de un espacio topológico en términos de ciertas funciones cardinales.

Algunos de estos resultados tienen que ver con otros ya obtenidos acerca de una cota para $|X|$:

I. Si X es Hausdorff, entonces $|X| \leq 2^{d(X)}$

II. Si X es Hausdorff, entonces $|X| \leq 2^{AL(X)}$

donde $d(X)$ denota la densidad de X y es igual al $\min \cdot \chi_0 \{ |S| : S \subseteq X, \bar{S} = X \}$; $AL(X)$ es el $\sup \{ L(Y) : Y \subseteq X \}$, donde $L(X)$ es el grado de Lindelöf, $L(X) = \min \cdot \chi_0 \{ m : X \text{ es } m\text{-Lindelöf} \}$.

Mostraremos que en I y II, X puede ser reemplazado por $K_c(X)$ (donde $K_c(X)$ es el número de subconjuntos compactos de X). También se presentarán algunos resultados que tienen

que ver con el número de subconjuntos cerrados de un espacio topológico.

2. Notación.

- $\mathcal{O}(X) = \{A : A \text{ es subconjunto abierto de } X\}$
- $A \in X$ es llamado un conjunto G_δ si y solo si existe $\mathcal{P} \subset \mathcal{O}(X)$ con $|\mathcal{P}| \leq \aleph_1$ y $A = \bigcap \mathcal{P}$

$$\mathcal{O}_1(X) = \{A \in X : A \text{ es un conjunto } G_\delta\}$$

- Denotaremos con m y n números cardinales, m^+ es el menor cardinal mayor que m ; α y β serán números ordinales. Para m cardinal, el ordinal α será igual al tipo de orden del conjunto bien ordenado de cardinales menores que m .

Para α ordinal, el cardinal m será igual a la cardinalidad del conjunto de ordinales menores que α .

- Peso de X , $w(X) = \min \aleph_\alpha \{ |\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es base abierta de } X \}$
- Número celular de X , $c(X) = \sup \aleph_\alpha \{ |\mathcal{P}| : \mathcal{P} \subset \mathcal{O}(X), \text{ discreta} \}$

- Carácter de X , $\chi(X) = \sup \{ \chi(p, X) : p \in X \}$
 donde $\chi(p, X) = \min \{ |\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es base de vecina-} \\ \text{dades de } p \}$

- Pseudo-Carácter de X , $\psi(X) = \sup \{ \psi(p, X) : p \in X \}$
 donde $\psi(p, X) = \min \{ \chi_{\mathcal{F}} : \{p\} \in \mathcal{F}(X) \}$

- Si φ es una función cardinal, entonces $h\varphi$ es la versión hereditaria de φ , esto es,

$$h\varphi(X) = \sup \{ \varphi(\mathcal{V}) : \mathcal{V} \subseteq X \}$$

- Para un espacio X que es T_1 , $\psi K(X) = \chi_n(X)$, donde n es el menor cardinal tal que todo subconjunto compacto de X es la intersección de $\leq n$ conjuntos abiertos de X . $\psi C(X)$ es la función cardinal obtenida de substituir compacto por cerrado en la definición anterior.

2.1 Si X es un T_2 , $\psi K(X) \leq \psi C(X)$, pues en un T_2 todo compacto es un cerrado.

Además, $\psi K(X) \leq hL(X)$, ya que si $x \in X-K$ entonces existen U_x y V_x abiertos tal que $x \in U_x$ y $K \subseteq V_x$ con $U_x \cap V_x = \emptyset$, así que $\mathcal{U} = \{U_x : x \in X-K\}$ es una cubierta abierta de $X-K$. Sea $\mathcal{U}'$ con $|\mathcal{U}'| \leq hL(X)$, una subcubierta de $\mathcal{U}$, entonces la intersección de los V_x correspondientes a los U_x que son elementos de $\mathcal{U}'$ es igual a K . Como $|\mathcal{U}'| \leq hL(X)$ y K cualquier compacto, se sigue que $\psi K(X) \leq hL(X)$.

- Carácter discreción de X , $\Delta(X) = \aleph_n$, donde
 $n = \sup \{ |P| : P \text{ es una colección no vacía,}$
 $\text{discreta, de conjuntos cerrados de } X \}$

- Si X es un conjunto y $\mathcal{S}$ una cubierta de X , entonces $\mathcal{S}$ es cubierta separadora si dados p, q elementos distintos de X , existe algún $S \in \mathcal{S}$ tal que $p \in S$ y $q \notin S$.

Para $p \in X$, el orden de p con respecto a $\mathcal{S}$ denotado por $\text{ord}(p, \mathcal{S})$, es la cardinalidad del conjunto

$$\mathcal{S}_p = \{ S \in \mathcal{S} : p \in S \}$$

- El peso punto separador de X , denotado por $\text{psw}(X)$ es $\aleph_n$, donde n es el menor cardinal tal que X tiene una cubierta abierta separadora $\mathcal{S}$ con $\text{ord}(p, \mathcal{S}) \leq n$ para todo $p \in X$.

2.2 Un espacio T está separado por la derecha (izquierda) si y solo si existe un buen orden $<$ de T tal que todo segmento inicial (final) de T bajo $<$ es abierto.

(i) Un espacio X tiene un subespacio separado por la derecha (izquierda) de cardinalidad $\aleph_n$ si y solo si contiene por inclusión una sucesión bien ordenada

creciente (decreciente) $\{G_\gamma : \gamma < \alpha\}$ de conjuntos abiertos de X (si T está separado por la derecha y es de cardinalidad α , podemos formar una sucesión bien ordenada y creciente de conjuntos abiertos considerando el segmento inicial correspondiente a cada punto de T . Si $\{G_\gamma : \gamma < \alpha\}$ es una sucesión creciente de abiertos podemos escoger en cada G_γ un elemento g_γ , y bien ordenarlos, de tal modo que si $q_p \in G_{p_1} \cap G_{p_2} \subset G_{p_3}$ con $p_1 < p_2$ entonces $g_{p_1} < g_{p_2}$. Así $E = \{g_\gamma : \gamma < \alpha\}$ es un subespacio separado por la derecha de cardinalidad α).

(ii) Si T está separado por la derecha por $\leq$, si T puede bien ordenarse en tipo α , α regular, entonces T tiene una cubierta abierta $\mathcal{U}$ tal que toda subcubierta de $\mathcal{U}$ es de cardinalidad α . (Si para cada punto en T tomamos el segmento inicial correspondiente, entonces tendríamos una cubierta abierta $\mathcal{W}$ de T . Si $\mathcal{W}'$ es una subcubierta de $\mathcal{W}$ tal que $|\mathcal{W}'| < \alpha$, podemos tomar el mín de cada elemento de $\mathcal{W}'$ y así tendríamos $\{q_\gamma : \gamma < \beta, \beta < \alpha\}$ tal que $\lim_{\gamma \rightarrow \beta} q_\gamma = \alpha$ lo que implicaría que α no es regular).

3. En esta sección se demostrará que X puede ser representado por $K(X)$ en I y II, habiendo antes demostrado que:

I. Si X es Hausdorff, entonces $|X| \leq 2^{2^{d(X)}}$.

Prueba:

Sea $D \subset X$ denso tal que $|D| = d(X)$. Para $x \in X$ hagamos $G_x = \{G \cap D : x \in G \in \mathcal{C}(X)\} \subset \mathcal{C}(D)$

Como X es Hausdorff, si $x \neq y$, entonces $G_x \neq G_y$ así que G es un mapeo 1-1 de X en $\mathcal{C}(\mathcal{C}(D))$, por lo tanto $|X| \leq 2^{2^{d(X)}}$.

II. Si X es un Hausdorff, entonces $|X| \leq 2^{hL(X)}$.

Primero demostraremos que $|X| \leq 2^{h(X)}$, y luego que $h(X) = hL(X)$.

Prueba:

Sea $\kappa = h(X)$ y supongamos que $|X| > 2^\kappa$. Por inducción transfinita definiremos los conjuntos

$$X(\xi_0, \dots, \xi_\eta, \dots) \quad \eta < \kappa$$

como sigue. Hagamos

$$X = X(0) \quad X(1)$$

donde $X(\xi)$ son subconjuntos cerrados propios de X .

Si los conjuntos $X(\xi_0, \dots, \xi_\eta, \dots) \quad \eta < \kappa$ han sido definidos para todo $\xi < \rho$, pondremos

$$X(\xi_\eta) \quad \eta < \rho = \bigcap_{\xi < \rho} X(\xi_\eta) \quad \eta < \kappa$$

si p es un ordinal límite, y si $p = \sigma + 1$, pondremos

$$X(\epsilon_\eta)_{\eta < \sigma} = X(\epsilon_\sigma^+, 0) \cup X(\epsilon_\sigma^-, 1),$$

donde los conjuntos del lado derecho son subconjuntos cerrados propios del conjunto del lado izquierdo, si éste tiene al menos dos puntos.

Ahora vemos que debe haber una sucesión $(\epsilon_\eta)_{\eta < \kappa^+}$ tal que $|X(\epsilon_\eta)_{\eta < \xi}| \geq 2$ para todo $\xi < \kappa^+$, ya que de otro modo

$$|X| \leq |\{(\epsilon_\eta)_{\eta < \xi} : \xi < \kappa^+ \wedge \epsilon_\xi = 0 \vee 1\}| \leq \sum_{\xi < \kappa^+} 2^{|\xi|} = 2^{\aleph}$$

se cumpliría. Así que tenemos una sucesión decreciente de conjuntos cerrados de longitud κ^+ , lo cual implica que $\kappa(X) \geq \kappa^+$. (2.2 - (ii))

Ahora demostraremos que

$$\kappa(X) = \sup \{L(Y) : Y \subseteq X\} = \min \{\aleph : X \text{ es hereditariamente } \aleph\text{-Lindelöf}\}$$

Prueba: Si $|Y| = \kappa^+$, el cual es un cardinal regular

y Y está separado por la derecha en tipo α entonces Y no es α -Lindelöf para ningún $\beta \leq \alpha$ (3-3-ii). Esto implica que $h(X) \leq \alpha$, si X es hereditariamente α -Lindelöf. Inversamente, si X no es hereditariamente α -Lindelöf, entonces podemos encontrar una familia de abiertos $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}(X)$, tal que para $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$, $|\mathcal{F}_0| \leq \alpha$ tenemos que

$$\bigcup \mathcal{F}_0 \neq \bigcup \mathcal{F} \quad (*)$$

Sea $\mathcal{F} = \{G_\gamma : \gamma < \beta\}$ donde $\beta = |\mathcal{F}|$. Si los puntos x y sus vecindades $G_\gamma(p) \in \mathcal{F}$ han sido definidos para $p < v < \beta$, entonces

$$H_v = \bigcup \{G_\gamma(p) : p < v\} \neq \bigcup \mathcal{F} \quad (\text{por } *)$$

así que podemos escoger un punto $x \in \bigcup \mathcal{F} - H_v$ y sus vecindades $G_\gamma(v) \in \mathcal{F}$. Claramente $\{x_p : p < \beta\}$ está separado por la derecha, así que $h(X) > \beta > \alpha$

Teorema 3.1. Si X es Hausdorff, entonces $|K(X)| \leq 2^{d(X)}$

Prueba: Sea $d(X) = \kappa$ y D un subconjunto denso de X

tal que $|D| = n$. La colección de abiertos

$$\mathcal{S} = \{ (E)^{\circ} : E \subseteq D \}$$

tiene cardinalidad $= 2^n$ y además veremos que $\mathcal{S}$ es una cubierta separadora de X . Como $(D)^{\circ} = X$ entonces $\mathcal{S}$ es una cubierta abierta de X . Sean $p, q \in X$ tal que $p \neq q$, como X es Hausdorff existe U abierto tal que $p \in U$ y $q \notin U$. Pero $U \cap D \neq \emptyset$, sea $T = U \cap D$, si demostramos que $p \in (T)^{\circ}$ y $q \notin (T)^{\circ}$ habremos demostrado que $\mathcal{S}$ es cubierta separadora de X . Sabemos que $T = \overline{U \cap D} \subseteq \overline{U \cap D} = \overline{U}$. Sea $x \in \overline{U}$, entonces para toda V vecindad abierta de x , $V \cap U \neq \emptyset$, pero $(V \cap U) \cap D = V \cap (U \cap D)$, así que $x \in \overline{U \cap D} = T$ por lo tanto, $\overline{U} = T$ y como $p \in U$ y $q \notin \overline{U}$ entonces $p \in (T)^{\circ}$ y $q \notin (T)^{\circ}$.

Sea $\mathcal{S}_1$ las uniones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}_2$ todas las intersecciones de elementos de $\mathcal{S}_1$. Como $|\mathcal{S}_1| = |\mathcal{S}|^{<\omega} = (2^n)^{<\omega} = 2^n$ entonces

$$|\mathcal{S}_2| = 2^{|\mathcal{S}_1|} = 2^n.$$

La prueba estará completa si demostramos que $K(X) \subseteq \mathcal{S}_2$. Sea K compacto de X . Para cada $p \in X$ con $p \notin K$ existe algún $S_p \in \mathcal{S}_1$ tal que $K \subseteq S_p$ y $p \notin S_p$. Claramente $K = \bigcap \{ S_p : p \notin K \}$; y por lo tanto $K \in \mathcal{S}_2$.

Corolario 3.2 Sea X un espacio de Hausdorff separable. Entonces, el número de subconjuntos compactos de X es $\leq 2^{2^{d(X)}}$

Ahora daremos un ejemplo de un T_3 en el cual el número de subconjuntos cerrados $\leq 2^{2^{d(X)}}$.

Además demostraremos que si X es T_3 y regular, entonces X puede ser reemplazado en I por el número de subconjuntos cerrados.

- Denotemos por $\mathcal{F}(d)$ al conjunto de todos los ultrafiltros no principales en d y definamos

$$X = d \cup \mathcal{F}(d)$$

dotemos a X con una topología T_3 como sigue:

Todo elemento es aislado en X , mientras que si $u \in \mathcal{F}(d)$, entonces una base de vecindades para u está dada por los conjuntos de la forma

$$\{u\} \cup A, \text{ donde } A \in u.$$

Entonces es fácil ver que X es T_3 , $X = w(X) = 2^{2^d}$,

ya que $\mathcal{F}(d)$ es discreto en X , además $d(X) = d$

Por lo tanto el número de subconjuntos cerrados es $\leq 2^{2^{d(X)}}$

Teorema 3.3 Si X es un espacio regular, entonces $w(X) \leq 2^{d(X)}$ y por lo tanto el número de subconjuntos cerrados de X es $\leq 2^{2^{d(X)}}$

Prueba:

Sea K una colección de abiertos U tales que $V = (\bar{U})^\circ$, por demostrar que K es una base para X . Sea S un abierto de X y $x \in S$, demosntremos que existe $U \in K$ tal que $x \in U \subset S$. Como X es regular entonces existe V vecinada cerrada de x tal que $x \in V \subset S$, por ser V vecindad tenemos que $x \in V^\circ$, pero por ser cerrada tenemos que $V^\circ = (\bar{V})^\circ$, así que $V^\circ \in K$.

Sea D denso en X tal que $|D| = d(X)$. Veamos que el mapeo $U \mapsto U \cap D$ de K en $\mathcal{P}(D)$ es 1-1. Sean U_1 y U_2 elementos de K tales que $U_1 \neq U_2$. Como $U_1 = (\bar{U}_1)^\circ$ y $U_2 = (\bar{U}_2)^\circ$ entonces $\bar{U}_1 \neq \bar{U}_2$ y $U_1 \neq \bar{U}_2$ (ya que si $\bar{U}_1 = \bar{U}_2$ como U_2 es abierto entonces $U_1 = U_2^\circ = (\bar{U}_2)^\circ = U_2$, entonces $U_1 = U_2$).

Sea $A = U_1 - \bar{U}_2$, si $A \neq \emptyset$ como $\bar{U}_2$ es cerrado entonces A es la intersección de dos abiertos y por lo tanto A es un abierto. Si $A = \emptyset$ tenemos que $U_1 \subset \bar{U}_2$, y ya que $(\bar{U}_2)^\circ = U_2$ entonces $U_1 \subset U_2$ por lo tanto tenemos que $U_2 - \bar{U}_1$ debe ser diferente del vacío (pues si no tendríamos que $U_2 \subset U_1$, lo que implicaría que $U_1 = U_2$), y por lo tanto abierto. Vemos así que si $U_1 \neq U_2$ entonces U_1 y U_2 difieren en al menos un abierto y $U_1 \cap D \neq U_2 \cap D$. Hemos demostrado que $U \mapsto U \cap D$ es un mapeo 1-1 de K en $\mathcal{P}(D)$ lo que implica que $|K| \leq |R| \leq 2^{d(X)}$ y esto que $|G(X)| \leq 2^{d(X)}$ y por lo tanto el número de subconjuntos cerrados es $\leq 2^{2^{d(X)}}$.

Para demostrar que $\mathcal{K}$ puede ser substituido por $\mathcal{K}(X)$ en II probaremos antes otros resultados.

Definición:

Sea E un conjunto y $\mathcal{U}$ una colección de conjuntos. Entonces

$$\mathcal{P}_n(E) = \{A \subseteq E : |A| \leq n\}$$

$$\mathcal{U}_n = \{A : A \text{ es la unión de } \leq n \text{ elementos de } \mathcal{U}\}$$

Lema 3.4. Sea X espacio topológico, $\mathcal{U}$ cubierta abierta de X , n un cardinal infinito. Si para todo $U \in \mathcal{U}_n$ y $A \in \mathcal{P}_n(X)$ tenemos que

$$A \cap U = (U \cap X) \cap \emptyset$$

entonces existe N subespacio discreto de X tal que $|N| \geq n^+$.

Prueba:

Sean $\{x_\alpha : \alpha < \alpha' < \omega_{m+1}\}$

$$\{U_\alpha : \alpha < \alpha'\}$$

construidos de tal modo que se satisfaga que para todo

$$\beta < \alpha' : (i) x_\beta \in U_\beta, \quad U_\beta \in \mathcal{U}_m$$

$$(ii) \{x_\alpha : \alpha < \beta\} \cap [\{x_\alpha : \alpha \geq \beta\}] = \emptyset$$

$$(iii) [\{x_\alpha : \alpha < \beta\}] \cap [\{x_\alpha : \alpha \geq \beta\}] = \emptyset$$

Escojamos $x_{\alpha'}$ y $U_{\alpha'}$. En vista de la suposición de

que $G = X - (\cup \{U_{\alpha} : \alpha \in A'\} \cup [\{x_{\alpha} : \alpha \in A'\}]) \neq \emptyset$
 entonces existe $x \in G$ y $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. To-
 mamos $x = x_{\alpha'}$ y $U = U_{\alpha'}$. Hemos construido
 $M = \{x_{\alpha} : \alpha \in \omega_{\alpha'}\}$ que satisface las propie-
 dades i) - iii) y que por lo tanto es discreto y
 además $|M| \geq \alpha'$.

Corolario 3.5 Sea X espacio topológico,
 $\mathcal{U}$ cubierta abierta de X , $hc(X) = \alpha$. Entonces
 existen $U \in \mathcal{U}$ y $A \in \mathcal{P}_{\alpha}(X)$ tal que $X = U \cup \bar{A}$.

Teorema 3.6 (Majnai-Jundász [8]). Si X es un
 espacio de Fréchet, entonces

$$|X| \leq 2^{hc(X) \cdot \psi(X)}$$

Teorema 3.7 Si X es un espacio de Hausdorff, entonces $|K(X)| \leq 2^{hc(X) \cdot \mathfrak{U}(X)}$.

Prueba:

Sea $n = hc(X) \cdot \mathfrak{U}(X)$, entonces por el teorema 3.6 $|X| \leq 2^n$ (todo punto es un compacto, entonces $\mathfrak{U}(X) \leq \mathfrak{U}(X)$)
 Para cada $p \in X$ sea $\mathcal{U}_p$ una colección de vecindades abiertas de p , cerrada bajo intersecciones finitas y tal que $|\mathcal{U}_p| \leq 2^n$ y además

$$\cap \{U : U \in \mathcal{U}_p\} = \{p\}$$

Sean

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \bigcup \{\mathcal{U}_p : p \in X\} \\ \mathcal{C} &= \{a \cup X : a \in \mathcal{U}_p, p \in \mathcal{P}_n(X)\} \\ \mathcal{E} &= \{E : E \text{ está en } \mathcal{C}_n\}\end{aligned}$$

Obtenemos las cardinalidades de los conjuntos anteriores

$$\begin{aligned}|\mathcal{U}| &= |\mathcal{U}_p| \cdot |X| \leq 2^n \cdot 2^n = 2^n \\ |\mathcal{U}_m| &= |\mathcal{U}|^m \leq (2^n)^m = 2^n \\ |\mathcal{P}_m(X)| &= |X|^m \leq (2^n)^m = 2^n \\ |\mathcal{C}| &= |\mathcal{U}_m| \cdot |\mathcal{P}_m(X)| \leq 2^n \cdot 2^n = 2^n \\ |\mathcal{E}| &= |\mathcal{C}|^m \leq (2^n)^m = 2^n\end{aligned}$$

Como $|E| \leq 2^m$ la prueba estará completa si demostramos que el complemento de cada compacto está en $\mathcal{E}$.
 Sea $K \subset X$ compacto. Como $\mathcal{P}(K(X)) \in \mathfrak{m}$, entonces $(X-K) = \bigcup \{F_\alpha : 0 \leq \alpha < m\}$ donde cada F_α es un subconjunto cerrado de X . Fijemos $\alpha < m$. Para cada $p \in F_\alpha$ usamos la compacidad de K para obtener algún $U_p \in \mathcal{U}_p$ tal que $K \cap U_p = \emptyset$. Sean

$$U = \{U_p : p \in F_\alpha\} \text{ y } U' = \bigcup_{p \in F_\alpha} U_p$$

apliquemos el corolario 3.5 para obtener G_α en $\mathcal{U}_m$ y $A_\alpha \in \mathcal{P}_m(U')$ tal que $F_\alpha \subseteq G_\alpha \cup A_\alpha$ (ya que $F \subseteq U'$). Sea $C_\alpha = G_\alpha \cup A_\alpha$ entonces $C_\alpha \in \mathcal{C}$ y $C_\alpha \cap K = \emptyset$. Claramente $(X-K) = \bigcup \{C_\alpha : 0 \leq \alpha < m\}$ entonces $(X-K) \in \mathcal{E}$.

Corolario 3.6 Sea X un espacio de Hausdorff el cual satisface $hc(X) \leq \aleph_0$ y en el cual todo subconjunto compacto es un G_δ . Entonces el número de subconjuntos compactos de X es $\leq 2^{\aleph_0}$.

Corolario 3.9 Si X es un espacio de Hausdorff, entonces $|K(X)| \leq 2^{NL(X)}$; En particular, si X es un Hausdorff, hereditariamente Lindelöf, el número de subconjuntos compactos de X será $\leq 2^{X_0}$.

Prueba:

Tenemos que demostrar que $hc(X) \leq NL(X)$. Sea $\mathcal{F}$ una familia de abiertos disjuntos tal que $|\mathcal{F}| \leq hc(X)$. Para cada $F \in \mathcal{F}$ sea $p_F \in F$ cualquier elemento, hagamos $X' = \{p_F\}_{F \in \mathcal{F}}$ subespacio de X , esto implica que $\mathcal{F}$ es una cubierta abierta de X' y como $\mathcal{F}$ es disjunta entonces $|\mathcal{F}| \leq NL(X)$. Ya hablamos visto que $\mathcal{F}K(X) \leq NL(X)$ (ver 2.1), por lo tanto, $hc(X) \cdot \mathcal{F}K(X) \leq NL(X)$. Vemos así que el corolario se sigue de lo anterior y del teorema 3.7. ($\therefore hc(X) \leq h_1(m)$)

Definiciones:

$s(X) = \sup\{X_0(D) : D \subseteq X, D \text{ subespacio discreto de } X\}$
entonces $s(X) = hc(X)$.

$F(X) = \mathcal{F}_0 \cdot m$, donde m es el menor cardinal tal que todo conjunto abierto es la unión de $\leq m$ cerrados $\Rightarrow$
 $F(X) = \mathcal{F}_0 \cdot C(X)$.

Proposición 3.10 Si X es un espacio T_0 ,
 $s(X) \leq \Delta(X) \cdot F(X)$ (o equivalentemente $nc(X) \leq \Delta(X) \cdot \chi(X)$).

Prueba:

Sea $\Delta(X) \cdot F(X) = m$, D un subespacio discreto de X , tenemos que demostrar que $|D| \leq m$. Para cada $p \in D$ sea V_p una vecindad abierta de p tal que $V_p \cap (D - \{p\}) = \emptyset$. Sea $W = \bigcup \{V_p : p \in D\}$. Como W es un conjunto abierto y $F(X) \leq m$, tenemos que $W = \{N_\alpha : 0 \leq \alpha \leq m\}$ donde cada N_α es un conjunto cerrado. Para cada $\alpha < m$ sea $K_\alpha = N_\alpha \cap D$, notemos que $D = \bigcup \{K_\alpha : 0 \leq \alpha < m\}$. La prueba es completa si demostramos que $|K_\alpha| \leq m$ para todo $\alpha < m$. Fijemos $\alpha < m$. $\mathcal{F}_\alpha = \{V_x : x \in K_\alpha\}$ es una colección discreta de cerrados en X , (tomemos $x \in X$, entonces si $x \notin N_\alpha$ tenemos que $X - N_\alpha$ es una vecindad abierta de x que no contiene ningún punto de K_α . Si $x \in N_\alpha$ entonces $x \in W$ y por lo tanto existe $q \in D$ tal que $x \in V_q$, así que V_q es una vecindad de x que intersecciona a lo más a un elemento de $\mathcal{F}_\alpha$). Como $\Delta(X) \leq m$ entonces $|K_\alpha| \leq m$.

Corolario 3.11 Si X es un espacio de Hausdorff, entonces $|K(X)| \leq 2^{\Delta(X) \cdot \mathcal{P}C(X)}$. En particular, si X es un espacio Hausdorff, X_0 -compacto, en el cual todo conjunto cerrado es un G_δ , entonces el número de subconjuntos compactos de X es $\leq 2^{\aleph_0}$.

Prueba:

Si $m = \Delta(X) \cdot \mathcal{P}C(X)$, entonces $nc(X) \leq m$ y como $\mathcal{P}K(X) \leq \mathcal{P}C(X)$ tenemos que $hc(X) \cdot \mathcal{P}K(X) \leq m$, esto implica que $|K(X)| \leq 2^m$.

Si $\mathcal{F}$ es una colección discreta de conjuntos cerrados tal que $|\mathcal{F}| > \aleph_0$, podemos formar un conjunto T tomando un elemento de cada miembro de $\mathcal{F}$ entonces $|T| > \aleph_0$ y por ser X X_0 -compacto, T tiene un punto límite $\forall$ (pues $\mathcal{F}$ es una colección discreta), así que $\Delta(X) \leq \aleph_0$. Además todo conjunto cerrado es un G_δ y por lo tanto $\mathcal{P}C(X) \leq \aleph_0$ entonces $|K(X)| \leq 2^{\aleph_0}$.

4. Antes de dar a conocer el principal resultado -
do de esta sección presentaremos algunos lemas
que son necesarios para la demostración de éste.

Lema 4.1 (Burke [3]). Sea κ un cardinal
infinito, $\{E_t : t \in A\}$ una colección de
conjuntos con $|A| > 2^\kappa$ y $|E_t| \leq \kappa$ para
todo $t \in A$. Supongamos que

$$E_t = E_t^1 \cup E_t^{1'} \quad \text{y} \quad E_t^1 \cap E_t^{1'} = \emptyset$$

para toda $t \in A$. Entonces existe algún
 $B \subseteq A$, $|B| > 2^\kappa$, tal que si s y t están en B ,
entonces

$$E_s^1 \cap E_t^{1'} = \emptyset$$

Lema 4.2 Sea X un espacio topológico con

$\Delta(X) \leq m$, y sea $\mathcal{S}$ una cubierta abierta de X tal que $\text{ord}(p, \mathcal{S}) \leq m$ para todo $p \in X$. Entonces existe una subcubierta de $\mathcal{S}$ de cardinalidad $\leq m$.

Prueba:

Supongamos que ninguna ^{subcolección} de $\mathcal{S}$ de cardinalidad $\leq m$ cubre a X . Por el lema de Zorn, existe un subconjunto N de X el cual es maximal con respecto a la propiedad de que si p y q son elementos distintos de N , entonces

$$q \notin S_p = \{ S \in \mathcal{S} : p \in S \}$$

Por la maximalidad de N , la hipótesis de que $\text{ord}(p, \mathcal{S}) \leq m$ para todo $p \in X$, y la suposición de que ninguna subcolección de $\mathcal{S}$ de cardinalidad $\leq m$ cubre a X , podemos demostrar que $|N| > m$ (si $|N| \leq m$, como $\text{ord}(p, \mathcal{S}) \leq m$ para todo p en N , entonces existe una subcolección de $\mathcal{S}$ de cardinalidad $\leq m$ que cubre a N , por la maximalidad de N tendríamos

entonces que la subcubierta de M sería también de X). Ahora $\mathcal{F} = \{\bar{p} : p \in M\}$ es una colección discreta de conjuntos cerrados en X , (sea $x \in X$, S algún elemento de $\mathcal{S}$ el cual contiene a x . Supongamos que

$$S \cap \bar{p} \neq \emptyset \quad \text{y} \quad S \cap \bar{q} \neq \emptyset$$

donde p y q son elementos distintos de M . Como S es abierto, $p \in S$ y $q \in S$, así que $q \in S_p$).

Así que $\mathcal{F}$ es una colección discreta de conjuntos cerrados en X con $|\mathcal{F}| > \kappa$, lo cual es una contradicción, ya que $\Delta(X) \leq \kappa$.

Lema 4.5 (Nisencen [5]). Sea X un conjunto, κ un cardinal infinito, y sea $\mathcal{U}$ una colección de conjuntos tal que el $\text{ord}(p, \mathcal{U}) \leq \kappa$

para todo $p \in K$. Entonces la cardinalidad del conjunto de todas las cubiertas finitas minimales de K por elementos de $\mathcal{U}$ no excede m .

Teorema 4.4 Si X es un espacio T_1 , entonces

$$|K(X)| \leq 2^{\Delta(X) \cdot \text{pw}(X)}.$$

Prueba:

Sea $n = \Delta(X) \cdot \text{pw}(X)$. Primero probamos que $|X| \leq 2^n$. Supongamos que $|X| > 2^n$. Sea una cubierta abierta separadora de X . Para todo $p \in X$, sea

$$S_p = \{S \in \mathcal{S} : p \in S\}$$

Ahora

$$X - \{p\} = \bigcup \{X - S : S \in S_p\}$$

Además $\Delta(X - S) \leq n$ para cada S en S_p , (pues si $\Delta(X - S) > n$ implica que existe $\mathcal{F}$ colección

discreta de cerrados en $X-S$ tal que $|F| \leq n$.

Sea $x \in S$, como S es un conjunto abierto entonces existe V vecindad de x tal que $x \in V \subset S$, por lo cual tenemos que $V \cap F = \emptyset$, por lo tanto F sería una colección discreta de cerrados en X , lo cual sería una contradicción).

Y ya que $|S_p| \leq n$ tenemos que $\Delta(X - \{p\}) \leq n$.

Sea $R_p = \{S \in \mathcal{S} : p \notin S\}$. Entonces R_p es una cubierta abierta de $X - \{p\}$ tal que para todo $q \in X - \{p\}$ el $\text{ord}(q, R_p) \leq n$. Por el lema 4.2 existe una subcolección $\mathcal{W}_p$ de R_p con $|\mathcal{W}_p| \leq n$ la cual cubre a $X - \{p\}$.

Notemos que $\mathcal{W}_p \cap \mathcal{S}_p = \emptyset$. Por el lema 4.1, existe algún $Y \subset X$ con $|Y| \geq 2^n$ tal que si p y q están en Y entonces $\mathcal{W}_p \cap \mathcal{S}_q = \emptyset$.

Sean p y q dos puntos distintos de Y . Escogamos S en $\mathcal{W}_p$ tal que $q \in S$. Entonces $S \in \mathcal{S}_q$, así que $\mathcal{W}_p \cap \mathcal{S}_q \neq \emptyset$, lo que es una contradicción. Con lo cual tenemos que $|X| \leq 2^n$.

Ahora probaremos que $|N(X)| \leq 2^n$. Ya que $|X| \leq 2^n$

y el $\text{ord}(p, \mathcal{S}) \leq n$ para todo $p \in X$, se sigue que $|\mathcal{S}| \leq 2^n$. Sea $\mathcal{W}$ todas las uniones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ y $\mathcal{G}$ todas las intersecciones de $\leq n$ elementos de $\mathcal{W}$, entonces, $|\mathcal{G}| \leq 2^n$, la prueba estará completa si demostramos que $K(X) \subseteq \mathcal{G}$.

Dado K subconjunto compacto de X , sea

$$\{S_\alpha : 0 \leq \alpha \leq n\}$$

el conjunto de todas las cubiertas finitas minimales de K por elementos de $\mathcal{S}$ y para cada $\alpha \leq n$ sea $W_\alpha = \bigcup S_\alpha$. Entonces

$$K = \bigcap \{W_\alpha : 0 \leq \alpha \leq n\}$$

y por lo tanto $K \in \mathcal{G}$.

Corolario 4.5 Sea X un espacio $\mathcal{N}_1$ -compacto con una cubierta abierta separadora punto-numerable. Entonces el número de subconjuntos compactos de X es $\leq 2^{\mathcal{N}_0}$.

BIBLIOGRAFIA

1. A.V. Arhangel'skii, Cardinalidad de biconjuntos que satisfacen el primer axioma de numerabilidad. Dokl. Akad. Nauk SSSR 167 (1969), 967-970 = Soviet Math. Dokl. 10 (1969), 951-955.
2. D.K. Burke, Una nota de ejemplo 3 de Bing, en Lecturas de Notas en Matemáticas, vol. 375, Springer-Verlag, Nueva York, 1974, pp. 47-52.
3. W.H. Comfort y H. Hager, Cálculos para el número de funciones reales continuas. Transactions of American Mathematical Society. Volumen 150, agosto 1970.
4. W.H. Comfort, Una introducción de invariantes cardinales. General Topology and its Applications. 1 (1971) 163-199. North-Holland Publishing Company.
5. V.V. Filippou, On feathered paracompacta. Dokl. Akad. Nauk SSSR 178 (1968), 555-556 = Soviet Math. Dokl. 9 (1968), 161-164, MR 35 # 956.
6. J. de Groot, Subespacios discretos de espacios de Hausdorff, Bull. Akad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 13 (1965), 537-544.

7. T. Jech. *Teoría de Conjuntos*. Academic Press. 1978.

8. Juhász and Hajnal, Subespacios discretos de espacios topológicos, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 70 = Indag. Math.* 29 (1967), 343-356.

9. R.E. Hoel, On a theorem of Arhangel'skii concerning Lindelöf p -spaces, *Canad. J. Math.* 27 (1975), 459-468.

10. R.E. Hoel y D.K. Burke, Número de subconjuntos compactos de un espacio topológico, *Proceedings of the American Mathematical Society*. Vol. 56, Julio de 1976.

11. J. Juhász, funciones cardinales en topología, *Math. Centre Tracts*, no. 34, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1971. MR 49 # 4776.

12. B. Sapiroukhii, Subespacios discretos de espacios topológicos. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 202 (1972), 779-782 = *Soviet Math. Dokl.* 13 (1972), 215-219.