



Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

**Representaciones de Grupos
Compactos.**

T E S I S

PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

Alfonso Bañuelos Avila

MEXICO, D. F.

1980



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

	página
INTRODUCCION	1
§ 1 NOCIONES GENERALES	2
§ 2 REPRESENTACION DE GRUPOS	
COMPACTOS	21
§ 3 OPERACIONES SOBRE REPRESENTACIONES	25
LA REPRESENTACION ESTRELLA	25
SUMA DE REPRESENTACIONES	27
PRODUCTO DE KRONECKER	30
UNA OBSERVACION SOBRE LA REPRESENTACION $P_1 \times P_2^*$	39
§ 4 LEMA DE SHUR	41
§ 5 RELACIONES DE ORTOGONALIDAD	47
§ 6 LOS CARACTERES	54
§ 7 EL ANILLO REPRESENTATIVO	60
§ 8 LA ESTRUCTURA ALGEBRAICA DEL ANILLO REPRESENTATIVO	78
§ 9 LA ESTRUCTURA TOPOLOGICA DEL GRUPO ASOCIADO	91
§ 10 EL TEOREMA PRINCIPAL DE APROXIMACION	98

§ 11 PRIMERAS APLICACIONES DEL

TEOREMA PRINCIPAL DE APROXIMACION

116

BIBLIOGRAFIA

119

INTRODUCCION

Una técnica fundamental en análisis armónico es el estudio de objetos topológico-algebraicos de una clase dada por medio de sus homomorfismos continuos en objetos más elementales de la misma clase. En particular, la teoría de representación de grupos constituye una de las partes más importantes de dicha técnica. El presente trabajo sobre representaciones de grupos compactos pretende así, contribuir a este propósito.

A lo largo de todo este trabajo, al hablar de grupos topológicos supondremos, aún cuando no se mencione que son de Hausdorff.

Es necesario recalcar que todos los resultados que aquí se presentan son ampliamente conocidos, la idea es hacerlos más accesibles, de manera que si esto no se logra pido las más sinceras disculpas al lector.

Quiero expresar mi agradecimiento al Dr. Félix Recillas Juárez y a la Prfa. Enriqueta R. Carrington por haberme asesorado en la elaboración de este trabajo; además a la Prfa. Radmila Bulajich M. por sus importantes observaciones.

REPRESENTACIONES DE GRUPOS COMPACTOS

§ 1 NOCIONES GENERALES

En este párrafo se dan una serie de definiciones y algunos resultados de los cuales haremos uso en la mayoría de los párrafos posteriores. Entre los resultados que consideramos de mayor importancia están, la existencia de una biyección entre las clases de equivalencia de representaciones matriciales y las clases de equivalencia de representaciones abstractas, (Prop. 1.1) y la descomposición de un S -módulo en suma directa de submódulos simples, (Prop. 1.2).

Definición 1.1 Sea S un conjunto arbitrario. Un S -módulo sobre un campo K es un espacio vectorial $\mathcal{B}$ de dimensión finita, junto con un mapeo P de S en los endomorfismos de $\mathcal{B}$, es decir, para cada $\sigma \in S$, $P(\sigma)$ es un endomorfismo de $\mathcal{B}$.

De la definición, debemos considerar a un S -módulo sobre un campo K como una pareja $(\mathcal{B}, P)$. Podemos concluir además que un S -módulo es un grupo aditivo con dos dominios de operadores, siendo uno de ellos el campo K , y el otro el conjunto S , es decir, las operaciones

$$\begin{array}{ccc} K \times Q & \longrightarrow & Q \\ (\alpha, x) & \longrightarrow & \alpha x \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} S \times Q & \longrightarrow & Q \\ (\sigma, x) & \longrightarrow & P(\sigma)x \end{array}$$

están definidas.

Definición 1.2 Dos S -módulos (Q, P) , (Q', P') se dice que son isomorfos si existe un isomorfismo lineal $I : Q \longrightarrow Q'$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo para todo $\sigma \in S$.

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{P(\sigma)} & Q \\ I \downarrow & & \downarrow I \\ Q' & \xrightarrow{P'(\sigma)} & Q' \end{array}$$

Como caso particular consideraremos el caso en que S es el conjunto de elementos de un grupo G . Denotaremos por e al elemento idéntico de G , y en lugar de hablar de un S -módulo, hablaremos de un G -módulo.

Definición 1.3 Un G -módulo (Q, P) es llamado un espacio de representación de G si se satisfacen las siguientes condiciones

- i) $P(\sigma\tau) = P(\sigma) \cdot P(\tau)$ para $\sigma, \tau \in G$ cualesquiera.
- ii) $P(e) = id_Q$.

Notese que podemos tener i) sin tener ii), ya que en un G -módulo, $P(\sigma)$ no tiene porqué ser un isomorfismo, es decir, $P(e) = P(\sigma\sigma^{-1})$ no necesariamente tiene inverso, de manera que $\neq P(\sigma) \cdot P(\sigma^{-1})$ no es en general el mapeo idéntico.

Se concluye inmediatamente que si (Q, P) es un espacio de

representación de un grupo G , entonces $P(\sigma^{-1}) = [P(\sigma)]^{-1}$, es decir, $P(\sigma)$ es un isomorfismo para todo $\sigma \in G$. El mapeo P es llamado una representación de G . La dimensión de $\mathcal{B}$ se llama el grado de P .

Cuando no haya peligro de confusión denotaremos por $\mathcal{B}$ al espacio de representación $(\mathcal{B}, P)$.

Sea $(\mathcal{B}, P)$ un espacio de representación de un grupo G . Si escogemos una base $\{e_1, \dots, e_d\}$ de $\mathcal{B}$, podemos representar - cada endomorfismo $P(\sigma)$, $\sigma \in G$ por una matriz $\tilde{P}(\sigma) = (x_{ij})$ de grado d , cuyos coeficientes estan dados por las fórmulas

$$P(\sigma) e_j = \sum_{i=1}^d x_{ij} e_i$$

De este modo, si $\tilde{P}(\sigma) = (x_{ij})$, $\tilde{P}(\tau) = (y_{ij})$, entonces

$$\tilde{P}(\sigma) \tilde{P}(\tau) = (z_{ij}) = \left(\sum_{n=1}^d x_{in} y_{nj} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Por otro lado } \tilde{P}(\sigma\tau) = (c_{ij}) &\Rightarrow P(\sigma\tau) e_j = \sum_{i=1}^d c_{ij} e_i = P(\sigma) P(\tau) e_j = \\ &= P(\sigma) \left(\sum_{n=1}^d y_{nj} e_n \right) = \sum_{n=1}^d y_{nj} P(\sigma) e_n = \sum_{n=1}^d y_{nj} \sum_{i=1}^d x_{in} e_i = \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{n=1}^d y_{nj} x_{in} e_i \Rightarrow c_{ij} = \sum_{n=1}^d x_{in} y_{nj} \Rightarrow \tilde{P}(\sigma\tau) = (c_{ij}) = \left(\sum_{n=1}^d x_{in} y_{nj} \right) \end{aligned}$$

por lo que $\tilde{P}(\sigma\tau) = \tilde{P}(\sigma) \tilde{P}(\tau)$

$$\text{si } \tilde{P}(e) = (x_{ij}) \Rightarrow P(e) e_j = \sum_{i=1}^d x_{ij} e_i = e_j \Rightarrow x_{ij} = \delta_{ij}$$

luego $\tilde{P}(e) = E$ (la matriz identidad). Es decir, cada representación P de grado d tiene al menos una forma matricial $\tilde{P}$.

Recíprocamente, cualquier mapeo $\tilde{P}$ de G en el conjunto de

matrices de grado d con coeficientes en K le llamaremos una representación (de grado d) de G siempre y cuando las condiciones $\tilde{P}(\sigma z) = \tilde{P}(\sigma) P(z)$, $P(e) = E$ se satisfagan. Vamos ahora que cada representación matricial $\tilde{P}$ tiene al menos una forma abstracta P .

Sea $\tilde{P}$ una representación matricial de grado d , de un grupo G , es decir $\tilde{P}(\sigma) = (x_{ij}(\sigma))$ es una matriz de grado d con coeficientes en algún campo K . Consideremos el espacio vectorial K^d y una base de este, digamos $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$. Definimos el mapeo $P: G \longrightarrow \text{End } K^d$ por

$$P(\sigma) e_j = \sum_{i=1}^d x_{ij}(\sigma) e_i$$

lo extendemos linealmente, es decir, si $e \in K^d$, $e = a_1 e_1 + \dots + a_d e_d$, de modo que $P(\sigma) e = \sum_{i=1}^d a_i P(\sigma) e_i$. Si $\sigma, \tau \in G$ y $\tilde{P}(\sigma z) = (x_{ij}(\sigma z)) = \tilde{P}(\sigma) \tilde{P}(\tau) \Rightarrow x_{ij}(\sigma z) = \sum_{r=1}^d x_{ir}(\sigma) x_{rj}(\tau)$;

de esta manera se tendrá que

$$\begin{aligned} P(\sigma z) e_j &= \sum_{i=1}^d x_{ij}(\sigma z) e_i = \sum_{i=1}^d \sum_{r=1}^d x_{ir}(\sigma) x_{rj}(\tau) e_i = \\ &= \sum_{r=1}^d x_{rj}(\tau) \sum_{i=1}^d x_{ir}(\sigma) e_i \end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned} P(\sigma) P(\tau) e_j &= P(\sigma) \left(\sum_{r=1}^d x_{rj}(\tau) e_r \right) = \sum_{r=1}^d x_{rj}(\tau) P(\sigma) e_r = \\ &= \sum_{r=1}^d x_{rj}(\tau) \sum_{i=1}^d x_{ir}(\sigma) e_i \end{aligned}$$

es decir $P(\sigma z) = P(\sigma) P(\tau)$. Claramente $P(e) e_j = e_j$,

14} \leq d , por lo que $P(\epsilon)$ es el isomorfismo identidad, -
luego el mapeo P es efectivamente una representación de G .

Si la representación matricial $\tilde{P}$ se deriva de la representación abstracta P seleccionando una base en el espacio de representación, diremos que $\tilde{P}$ es una forma matricial de P , y que P es una forma abstracta de $\tilde{P}$. Así pues, si deseamos distinguir entre representaciones por endomorfismos lineales y representaciones por matrices, hablaremos de representaciones abstractas y de representaciones matriciales respectivamente.

Definición 1.4 Se dice que dos representaciones P_1 , P_2 (abstractas) de un grupo G son equivalentes si sus espacios de representación son isomorfos. Se dice que dos representaciones matriciales $\tilde{P}_1$, $\tilde{P}_2$ son equivalentes si existe una matriz regular J tal que $\tilde{P}_2(\sigma) = J \tilde{P}_1(\sigma) J^{-1}$

para cada $\sigma \in G$. (Esto implica que $\tilde{P}_1$ y $\tilde{P}_2$ tienen el mismo grado).

Proposición 1.1 Si las representaciones matriciales $\tilde{P}_1$ y $\tilde{P}_2$ son equivalentes tienen una forma abstracta común y cada forma abstracta de $\tilde{P}_1$ es equivalente a cada forma abstracta de $\tilde{P}_2$. Si P_1 y P_2 son representaciones abstractas equivalentes de G , de grado positivo, entonces cualquier forma matricial de P_1 es equivalente a cualquier forma matricial de P_2 .

Demostración.- $\tilde{P}_1$ y $\tilde{P}_2$ son mapeos de G en el conjunto de matrices de grado d , con coeficientes en algún campo K . Consideremos el espacio vectorial K^d con base $\{e_1, \dots, e_d\}$. Sea P_1 una forma abstracta de $\tilde{P}_1$ con respecto a esta base, es decir, si $\tilde{P}_1(\sigma) = (x_{ij}(\sigma))$

$$P_1(\sigma)e_k = \sum_{j=1}^d x_{kj}(\sigma)e_j \quad k=1, \dots, d.$$

Supongamos que existe una matriz regular δ tal que $\tilde{P}_2(\sigma) = \delta \tilde{P}_1(\sigma) \delta^{-1}$ para todo $\sigma \in G$. Sea Γ el automorfismo de K^d correspondiente a la matriz δ y sea $\Gamma^{-1}(e_j) = u_j = \sum_{k=1}^d (\delta^{-1})_{kj} e_k$ donde $(\delta)_{jk}$, $(\delta^{-1})_{jk}$ son los coeficientes de δ y δ^{-1} respectivamente. Entonces $\{u_1, \dots, u_d\}$ es una base de K^d .

Sea P_2 la forma abstracta de $\tilde{P}_2$ con respecto a esta base, es decir, si $\tilde{P}_2(\sigma) = (y_{ij}(\sigma))$

$$P_2(\sigma)u_j = \sum_{i=1}^d y_{ij}(\sigma)u_i \quad j=1, \dots, d.$$

$$\begin{aligned} \text{Ahora bien, } P_1(\sigma)u_j &= P_1(\sigma) \left(\sum_{k=1}^d (\delta^{-1})_{kj} e_k \right) = \sum_{k=1}^d (\delta^{-1})_{kj} P_1(\sigma)e_k = \\ &= \sum_{k=1}^d (\delta^{-1})_{kj} \left(\sum_{i=1}^d x_{ik}(\sigma)e_i \right) = \sum_{i=1}^d \left(\sum_{k=1}^d x_{ik}(\sigma) (\delta^{-1})_{kj} \right) e_i = \\ &= \sum_{i=1}^d ((\tilde{P}_1(\sigma))_{ik} (\delta^{-1})_{kj}) e_i = \sum_{i=1}^d (\tilde{P}_1(\sigma) \delta^{-1})_{ij} e_i = \sum_{i=1}^d (\delta^{-1} \tilde{P}_1(\sigma))_{ji} e_i = \\ &= \sum_{i=1}^d (\delta^{-1})_{ji} (\tilde{P}_1(\sigma))^j e_i = \sum_{i=1}^d \left(\sum_{k=1}^d (\delta^{-1})_{ik} y_{kj}(\sigma) \right) e_i = \\ &= \sum_{i=1}^d y_{ij}(\sigma) \left(\sum_{k=1}^d (\delta^{-1})_{ik} e_k \right) = \sum_{k=1}^d y_{kj}(\sigma) u_k = P_2(\sigma)u_j; \end{aligned}$$

luego, la representación abstracta de $\tilde{P}_1$ coincide con la representación abstracta de $\tilde{P}_2$.

Sea P_1 una forma abstracta de $\tilde{P}_1$ y P_2 una forma abstracta de $\tilde{P}_2$, ambas construidas con respecto a una misma base $\{e_1, \dots, e_d\}$ de K^d . Sea Γ el automorfismo de K^d dado por la matriz Γ con respecto a esta base, luego, si $e \in K^d$, $\Gamma \circ P_1(\sigma)e = \Gamma \tilde{P}_1(\sigma)e = \tilde{P}_2(\sigma) \Gamma e = P_2(\sigma) \Gamma e$; lo que demuestra que $\Gamma \circ P_1 = P_2 \circ \Gamma$, es decir P_1 y P_2 son equivalentes.

Demostremos ahora la segunda parte de la proposición. Sean $(\mathcal{G}_1, P_1)$ y $(\mathcal{G}_2, P_2)$ representaciones abstractas equivalentes de G . Sean $\{e_1, \dots, e_d\}$, $\{u_1, \dots, u_d\}$ bases de $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ respectivamente, y sean $\tilde{P}_1$ y $\tilde{P}_2$ las formas matriciales de P_1 y P_2 con respecto a las bases dadas. Si $\Gamma: \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ es el isomorfismo tal que $\Gamma P_1(\sigma) = P_2(\sigma) \Gamma$ para todo $\sigma \in G$, sea $\Gamma = (\Gamma_{ij})$ la matriz cuyos coeficientes están dados por la fórmula

$$\Gamma e_j = \sum_{i=1}^d \Gamma_{ij} u_i$$

Sea (d_{ij}) la matriz cuyos coeficientes están dados por la fórmula

$$\Gamma P_1(\sigma) e_j = \sum_{i=1}^d d_{ij} u_i$$

$$\begin{aligned} \text{Pero } \Gamma P_1(\sigma) e_j &= \Gamma \sum_{r=1}^d \chi_{rj}(\sigma) e_r = \sum_{r=1}^d \chi_{rj}(\sigma) \Gamma e_r = \sum_{r=1}^d \chi_{rj}(\sigma) \left(\sum_{i=1}^d \Gamma_{ir} u_i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^d \left(\sum_{r=1}^d \Gamma_{ir} \chi_{rj}(\sigma) \right) u_i, \text{ por lo que } d_{ij} = \sum_{r=1}^d \Gamma_{ir} \chi_{rj}(\sigma), \\ &\text{es decir, } (d_{ij}) = \left(\sum_{r=1}^d \Gamma_{ir} \chi_{rj}(\sigma) \right) = \Gamma \tilde{P}_1(\sigma) \end{aligned}$$

De manera análoga podemos demostrar que la matriz asociada al

isomorfismo $R_1(\sigma) \cdot \Gamma$ es $R_2(\sigma) \cdot \Gamma$, y debido a que $\Gamma \cdot R_1(\sigma) = R_2(\sigma) \cdot \Gamma$ concluimos que $\Gamma \tilde{R}_1(\sigma) = \tilde{R}_2(\sigma) \Gamma$, es decir, que $\tilde{R}_1$ y $\tilde{R}_2$ son equivalentes. ////

Nota.- Es fácil ver que la equivalencia entre representaciones es efectivamente una relación de equivalencia, luego la proposición anterior nos dice que existe una correspondencia biunívoca entre las clases de equivalencia de representaciones abstractas y las clases de equivalencia de representaciones matriciales de un grupo G .

Definición 1.5 Sea $(\mathcal{B}, P)$ un S -módulo. Un subespacio D de $\mathcal{B}$ se dice que es invariante con respecto a P si $P(\sigma)(D) \subset D$ para todo $\sigma \in S$. Siendo este el caso, la restricción $P_1(\sigma) = P(\sigma)|_D$ es un endomorfismo lineal de D . La pareja (D, P_1) es un S -módulo, el cual es llamado un submódulo de $(\mathcal{B}, P)$.
 Más aún, si e es un vector arbitrario de $\mathcal{B}$, y si e^* es la clase residual de e módulo D y e' está en e^* , es decir $e - e' \in D$, entonces $P(\sigma)e'$ está en la clase residual de $P(\sigma)e$ módulo D ya que $P(\sigma)e - P(\sigma)e' = P(\sigma)(e - e') \in D$.
 Si denotamos a $[P(\sigma)e^*]$ por $\Lambda(\sigma)e^*$ entonces $\Lambda(\sigma)$ es un endomorfismo lineal de $\mathcal{B}/D$ y la pareja $(\mathcal{B}/D, \Lambda)$ es un S -módulo.

Si $\mathcal{B}$ es un espacio de representación de un grupo G , y si D es un subespacio invariante, (D, P_1) , $(\mathcal{B}/D, \Lambda)$ son tam-

bién espacios de representación de G .

Sea D es un subespacio invariante de un S -módulo $(\mathcal{B}, P)$ de dimensión mayor que cero. Podemos extender una base $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ de D a una base $\{e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_d\}$ de $\mathcal{B}$. Sea $\sigma \in G$, si $j \leq r$, $P(\sigma)e_j \in D$, luego, denotando a $P(\sigma)e_j$ como combinación lineal de los elementos básicos, $P(\sigma)e_j =$

$$= \sum_{i=1}^d a_{ij} e_i, \text{ es claro que } a_{ij} = 0 \text{ si } i > r. \text{ Por otro lado, es claro que los elementos } e_{r+1}^*, \dots, e_d^* \text{ forman una base de } \mathcal{B}/D \text{ éste, y si } j \geq r+1, \Lambda(\sigma)e_j^* = \sum_{i=r+1}^d b_{ij} e_i^* = [P(\sigma)e_j]^* =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^d a_{ij} e_i \right]^* = \sum_{i=1}^d a_{ij} e_i^* \Rightarrow a_{ij} = b_{ij}, \text{ si}$$

$j \geq r+1, i \geq r+1$. De este modo, la matriz que representa a $P(\sigma)$ con respecto a la base $\{e_1, \dots, e_d\}$ tiene la forma

$$\tilde{P}(\sigma) = \begin{pmatrix} \tilde{P}_1(\sigma) & N(\sigma) \\ 0 & \tilde{\Lambda}(\sigma) \end{pmatrix}$$

donde la matriz $\tilde{P}_1(\sigma)$ representa la restricción $P(\sigma)|_D$ con respecto a la base $\{e_1, \dots, e_r\}$ de D . La matriz $\tilde{\Lambda}(\sigma)$ representa el endomorfismo Λ de $\mathcal{B}/D$ con respecto a la base $\{e_{r+1}^*, \dots, e_d^*\}$ con e_i^* la clase residual de e_i módulo D .

Ahora, sean B, D, R tres subespacios invariantes de algún S -módulo. Tenemos entonces los siguientes teoremas de homomorfismos debidos a Frobenius Noether.

Teorema 1.1 Si $R \subset D \subset B$, D/R es un subespacio invariante de B/R , y B/D es isomorfo a $(B/R)/(D/R)$.

Demostración.- Es inmediato que D/R es subespacio de B/R . Sea $P_1(\sigma)$ la restricción de $P(\sigma)$ a B , y $P_2(\sigma)$ la restricción de $P(\sigma)$ a D , y $(B/R, N)$ el S -módulo correspondiente. Si $d \in D$, denotaremos por d^* a la clase de equivalencia de d módulo R ; luego $\Lambda(\sigma)d^* = [P(\sigma)d]^* \in D/R$, de este modo D/R es subespacio invariante de B/R .

Consideremos la sucesión de homomorfismos

$$B \xrightarrow{\pi_1} B/R \xrightarrow{\pi_2} (B/R)/(D/R)$$

donde π_1 , π_2 son las proyecciones canónicas, es decir, si $b \in B$, $\pi_1(b) = b+R$, si $b+R \in B/R$ entonces $\pi_2(b+R) = b+R+D/R$. Claramente π_1 , π_2 son epimorfismos, y

$$\pi_2 \circ \pi_1 : B \longrightarrow (B/R)/(D/R)$$

tiene como núcleo a D . Comprobemos esta última afirmación.

Puesto que $\pi_2(\pi_1(b)) = \pi_2(b+R) = b+R+D/R$,

se tiene que si $d \in D$, $\pi_2 \circ \pi_1(d) = d+R+D/R = D/R$

pero D/R es la clase del cero en $(B/R)/(D/R)$, luego el

núcleo de $\pi_2 \circ \pi_1$ contiene a D . Por otro lado si $b+R+D/R =$

$= D/R \implies b+R \in D/R \implies b \in D$, de donde concluimos que $D =$

$=$ núcleo de $\pi_2 \circ \pi_1$. Para concluir la demostración nos ayudaremos de los siguientes lemas:

Lema 1.1 Sean N, M, M', M'' S -módulos; si la sucesión de

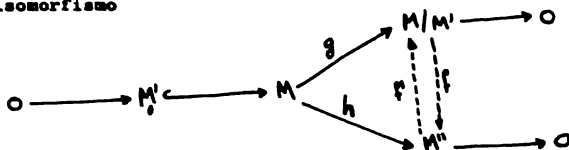
dimensión positiva menor que $\dim R$. Este mismo razonamiento lo podemos repetir para R_1 , y debido a que la dimensión de R es finita, existe $R_n \subset R$ que es simple y $\dim R_n \geq 1$. Pero cualquier submódulo simple está contenido en $\mathcal{B}_1$, luego $R_n \subset \mathcal{B}_1 \cap R$ lo cual contradice la hipótesis de que $\mathcal{B}$ es suma directa de $\mathcal{B}_1$ y R . Por tanto $\dim R = 0$. De donde tenemos que $R = \{0\}$, y $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$.

Proposición 1.4 Sean $\mathcal{B} = D_1 + D_2 + \dots + D_h = D'_1 + D'_2 + \dots + D'_h$ dos representaciones de un S -módulo semisimple $\mathcal{B}$ como suma directa de S -módulos simples. Entonces tenemos que $h = h'$, y existe una permutación ω del conjunto $\{1, 2, \dots, h\}$ tal que D_i es isomorfo a $D'_{\omega(i)}$, $1 \leq i \leq h$.

Demostración. - Construiremos la permutación ω . Supongamos que tenemos definida $\omega(i)$ para $i < k$ (donde $k \leq h$) con las siguientes propiedades: a) $\omega(i) \neq \omega(j)$ para $i < j < k$; b) $D_{\omega(i)}$ es isomorfo a D_i si $i < k$; c) $\mathcal{B} = \sum_{i=1}^k D'_{\omega(i)} + \sum_{i=k+1}^h D_i$.

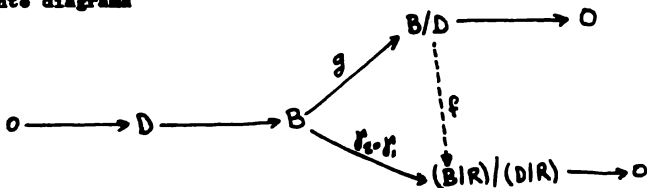
Consideremos ahora el subespacio invariante $D = \sum_{i=k+1}^h D'_{\omega(i)} + \sum_{i=k+1}^h D_i$. Por la proposición 1.2, existe un espacio invariante D' , y es tal que $\mathcal{B}$ es la suma directa de D y D' . Por esto D' es isomorfo a $\mathcal{B}/D$, es decir a D_k . Se concluye que D' es simple y por lo tanto que D' es uno de los mó-

$\rightarrow M''$, $f': M'' \rightarrow M/M'$ tales que $f \circ g = h$ y $f' \circ h = g$, de donde $f \circ f' \circ h = h$, y $f' \circ f \circ g = g$. Pero como g y h son epimorfismos se tiene que $f \circ f' = 1_{M''}$ y $f' \circ f = 1_{M/M'}$, es decir f es isomorfismo



////

Si en el lema 1.2 hacemos $M' = D$, $M = B$, $M'' = (B/R)/(D/R)$, el diagrama anterior se convierte en el siguiente diagrama



Queda así demostrado el teorema 1.1.

////

Teorema 1.2 Los espacios $B+D$ y $B \cap D$ son invariantes, y $(B+D)/D$ es isomorfo a $B/B \cap D$.

Demostración.- Que $B+D$ y $B \cap D$ son invariantes se sigue inmediatamente del hecho de que B y D lo son.

Consideremos la composición de homomorfismos

$$B \xrightarrow{f} B+D \xrightarrow{g} (B+D)/D$$

en donde f es la inclusión y g es el epimorfismo canónico.

Si demostramos que la composición $g \circ f$ es un epimorfismo con núcleo $B \cap D$, tenemos por lema 1.2 que $B/B \cap D$ es isomorfo a $(B+D)/D$. Demostraremos pues la afirmación.

Sea $y \in (B+D)/D$. Por ser g suprayectivo existen $x \in B$, $x' \in D$, tales que $y = g(x+x') = g(x) + g(x') = g(x)$, ya que $g(x') = 0$. Si $g(x) = 0$, entonces $x \in D$, o sea $x \in B \cap D$. Recíprocamente, si $x \in B \cap D$, $g \circ f(x) = 0$, ya que $f(x) \in D$, lo que concluye la demostración. ////

Definición 1.6 Un S -módulo $\mathcal{B}$ se dice que es simple si es de dimensión mayor que cero, y si los únicos subespacios invariantes de $\mathcal{B}$ son $\{0\}$ y $\mathcal{B}$. En particular tenemos un espacio de representación simple de un grupo G . Uno de tales espacios de representación es llamado comúnmente irreducible.

Una representación matricial de un grupo G se dice que es simple o irreducible si una forma abstracta de ella es simple.

Definición 1.7 Un S -módulo es llamado semisimple si puede representarse como una suma de submódulos simples.

Observaciones.- La suma de una colección $\{D_\alpha\}$ de subespacios de un espacio vectorial es el conjunto de vectores de la forma $\sum e_\alpha$ con $e_\alpha \in D_\alpha$ y donde solamente un número finito de vectores e_α son distintos de cero. Es claro que la suma de subespacios invariantes de un S -módulo es un subespacio invariante.

Un S -módulo de dimensión cero deberá considerarse como semisimple, puesto que puede considerarse como la suma de una colección vacía de submódulos simples.

Proposición 1.2 Un S -módulo semisimple $\mathcal{B}$ puede representarse como la suma directa $\mathcal{B} = \sum_{i=1}^h D_i$ de una colección finita $\phi = \{D_i\}$ de submódulos simples. Más aún, si tenemos una representación de este tipo y si D es cualquier subespacio invariante de $\mathcal{B}$, entonces existe una subcolección ϕ_0 de ϕ , tal que $\mathcal{B}$ es la suma directa de D y los submódulos pertenecientes a ϕ_0 .

Demostración.- Por hipótesis $\mathcal{B}$ es la suma de alguna colección ψ (finita o infinita) de submódulos simples. Tomemos una base de $\mathcal{B}$ y representemos cada uno de sus elementos como la suma de los vectores pertenecientes a los submódulos de la familia ψ . Puesto que $\mathcal{B}$ es de dimensión finita, y cada una de las sumas mencionadas es finita, concluimos que $\mathcal{B}$ puede ser representado por la suma de alguna subcolección finita de

$\Psi \subset \mathcal{P}$ de sumódulos simples. Entre todas las subcolecciones finitas de $\mathcal{P}$, que tienen la propiedad de que la suma de sus términos es $\mathcal{B}$, sea ϕ la subcolección con el menor número posible de elementos. Sean $D_1, D_2, \dots, D_h$ los distintos elementos de ϕ . Entonces $\mathcal{B} = \sum_{i=1}^h D_i$. Aseguramos que esta suma es directa. Para demostrar esto basta probar que si tenemos una relación de la forma $f_1 + f_2 + \dots + f_h = 0$ con $f_i \in D_i$, entonces $f_i = 0$ para $1 \leq i \leq h$. Sea pues $f_1 + f_2 + \dots + f_h = 0$, luego $f_1 \in D_1 \cap (D_2 + D_3 + \dots + D_h)$ ya que $f_1 = -f_2 - f_3 - \dots - f_h$. Ahora bien, $D_1 \cap (D_2 + D_3 + \dots + D_h)$ es un subespacio invariante de D_1 ; y por ser D_1 simple se tiene que pasa alguna de las siguientes cosas

$$a) D_1 \cap (D_2 + D_3 + \dots + D_h) = D_1$$

$$b) D_1 \cap (D_2 + D_3 + \dots + D_h) = \{0\}.$$

Si pasa a), entonces $D_1 \subset D_2 + \dots + D_h$ y $D_2 + D_3 + \dots + D_h$ debería ser igual a $\mathcal{B}$, en contradicción con nuestra elección de ϕ . Luego $D_1 \cap (D_2 + \dots + D_h) = \{0\}$ y por lo tanto $f_1 = 0$. De manera análoga podemos demostrar que $f_i = 0$ para $1 \leq i \leq h$. Por lo tanto nuestra afirmación queda probada.

Para terminar, consideremos D cualquier subespacio invariante de $\mathcal{B}$. Si $D \in \phi$ no hay nada que probar. Si no es así, consideremos aquellos subconjuntos ϕ' de ϕ los cuales tienen la propiedad de que $\mathcal{B}$ es la suma de D y los y los

módulos de ϕ' (por ejemplo $\phi' = \phi$). Entre estos subconjuntos consideraremos la colección ϕ_0 con el menor número posible de elementos. Si $D_{i_1}, \dots, D_{i_p}$ son los elementos de ϕ_0 , supongamos - que $f + f_{i_1} + \dots + f_{i_p} = 0$, con $f \in D$, $f_{i_j} \in D_{i_j}$ para $1 \leq j \leq p$; luego $f_{i_j} \in D_{i_j} \cap (D + D_{i_1} + \dots + D_{i_{j-1}} + D_{i_{j+1}} + \dots + D_{i_p})$. Este último es un subespacio invariante de D_{i_j} , luego por ser D_{i_j} simple se tiene - que

$$a) D_{i_j} \cap (D + D_{i_1} + \dots + D_{i_{j-1}} + D_{i_{j+1}} + \dots + D_{i_p}) = D_{i_j}, \text{ o bien}$$

$$b) D_{i_j} \cap (D + D_{i_1} + \dots + D_{i_{j-1}} + D_{i_{j+1}} + \dots + D_{i_p}) = \{0\}$$

Si tenemos a) entonces $D_{i_j} \subset D + D_{i_1} + \dots + D_{i_{j-1}} + D_{i_{j+1}} + \dots + D_{i_p}$, y $D + D_{i_1} + \dots + D_{i_{j-1}} + D_{i_{j+1}} + \dots + D_{i_p}$ debería ser $\mathcal{B}$ en contradicción con la elección de ϕ_0 , de donde concluimos que $D_{i_j} \cap (D + D_{i_1} + \dots + D_{i_{j-1}} + D_{i_{j+1}} + \dots + D_{i_p}) = \{0\}$, y por lo tanto que $f_{i_j} = 0$ $1 \leq j \leq p$, luego $f = 0$. Es decir $\mathcal{B}$ es la suma directa de D y $D_{i_1} + \dots + D_{i_p}$. ///

Proposición 1.3 Sea $\mathcal{B}$ un S -módulo tal que si D es cualquier subespacio invariante de $\mathcal{B}$, entonces existe un subespacio invariante D' tal que $\mathcal{B}$ es la suma directa de D y D' . Entonces $\mathcal{B}$ es semisimple.

Demostración.- Sea $\mathcal{B}_1$ la suma de todos los subespacios simples de $\mathcal{B}$. Por hipótesis $\mathcal{B}$ es la suma directa de $\mathcal{B}_1$ y algún otro subespacio invariante R . Supongamos que $\dim R > 0$. Puesto que R no es simple, contiene algún submódulo R_1 de -

dulos D_j' , digamos $V = D_{j_0}'$. Puesto que $D(\omega i) \subset D$ para $i < k$, tenemos que $j_0 \neq \omega(i)$ para $i < k$. Definimos $\omega(k) = j_0$. Es claro que $\omega(i)$, definida ahora para $i < k+1$ satisface las condiciones a), b) y c) para $k+1$. Puesto que podemos definir la función ω univalentemente sobre el conjunto $\{1, 2, \dots, h\}$, deberemos tener que $h' \geq h$; pero debido a que las descomposiciones juegan papeles simétricos, de manera análoga podemos concluir que $h \geq h'$, y de este modo que $h = h'$. Esto demuestra la proposición.

////

Sea ahora $\mathcal{B}$ el espacio de representación de una representación P semisimple, de un grupo G . Si descomponemos a $\mathcal{B}$ en una suma directa de subespacios simples, y si Λ es cualquier representación irreducible de G , podemos contar el número de subespacios simples que son equivalentes a la representación dada Λ . Se concluye de la proposición 1.4 que este número es independiente de la descomposición particular de $\mathcal{B}$ que se use. Este número lo llamamos la multiplicidad de la representación Λ en la representación P .

Proposición 1.5 Sea $(\mathcal{B}, P)$ un S -módulo simple sobre un campo K algebraicamente cerrado. Supongamos además que todos los endomorfismos $P(\sigma)$, $\sigma \in S$ conmutan mutuamente, es decir $P(\sigma) \cdot P(\tau) = P(\tau) \cdot P(\sigma)$.

Entonces la dimensión de B es 1.

Demostración.— Sea $\sigma \in S$. Consideremos la matriz $\tilde{P}(\sigma)$ asociada a $P(\sigma)$ con respecto a alguna base de B . Por ser K algebraicamente cerrado, existen en K las raíces del polinomio característico de $\tilde{P}(\sigma)$. Sea μ una de ellas; luego existe un vector característico $e \in B$, $e \neq 0$ tal que $P(\sigma)e = \mu e$. Sea D el conjunto de vectores con valor característico μ . — Claramente D es un subespacio de B . Más aún, si $\tau \in S$, $e \in D$ tenemos, debido a la conmutatividad de los endomorfismos que $P(\sigma)P(\tau)e = P(\tau)P(\sigma)e = \mu P(\tau)e$, luego $P(\tau)e \in D$, es decir D es invariante. Puesto que B es simple, concluimos que $D = B$. En otras palabras, para cada $\sigma \in S$ existe un elemento $\mu(\sigma) \in K$ tal que $P(\sigma)e = \mu(\sigma)e$, para todo $e \in B$. De manera que si V es un subespacio de B , $e \in V$ y $\sigma \in S$, $P(\sigma)e = \mu(\sigma)e \in V$, es decir, V es invariante. Puesto que B es simple, es igual a cualquier subespacio generado por cualquier vector $e \neq 0$ en B , luego la dimensión de B es 1.

////

§ 2 REPRESENTACION DE GRUPOS COMPACTOS

En este párrafo demostraremos una propiedad de las representaciones matriciales de grupos compactos la cual nos dice que toda representación matricial de un grupo compacto es equivalente a una representación por matrices ortogonales o unitarias, y como consecuencia de esto que toda representación de un grupo compacto es semisimple.

Sea G un grupo topológico. Por una representación (matricial) de G entenderemos un homomorfismo continuo de G en el grupo $GL(n, \mathbb{C})$ (representación compleja) o en el grupo $GL(n, \mathbb{R})$ (representación real).

Teorema 1.2 Cualquier representación real de un grupo compacto es equivalente a una representación por matrices ortogonales. Cualquier representación compleja de un grupo compacto es equivalente a una representación por matrices unitarias.

Demostración.- Consideremos el caso de una representación compleja ρ , de un grupo compacto G .

Sea $\alpha_1(\sigma) = {}^t \bar{\rho}(\sigma) \rho(\sigma)$; es claro que ${}^t \alpha_1(\sigma) = \alpha_1(\sigma)$, es decir $\alpha_1(\sigma)$ es hermitiana. Sea μ un valor característico de $\alpha_1(\sigma)$ y sea e el vector característico co-

correspondiente a μ , luego $\mu(e \cdot e) = P(\sigma)e \cdot P(\sigma)e \geq 0$, ya que $P(\sigma)$ es regular, podemos concluir que $\alpha_1(\sigma)$ es hermitiana definida positiva. Los coeficientes de $\alpha_1(\sigma)$ son funciones continuas de σ sobre G , luego, por ser G compacto son Haar integrables.

Haremos uso del proceso invariante de integración sobre G , normalizado como es usual por la condición $\int_G d\sigma = 1$.

$$\text{Sea} \quad \alpha_1 = \int_G \alpha_1(\sigma) d\sigma$$

(Los coeficientes de α_1 son integrales sobre G de los coeficientes de $\alpha_1(\sigma)$). Puesto que $\alpha_1(\sigma)$ es hermitiana para todo σ , tenemos que ${}^t \alpha_1 = \int_G {}^t \alpha_1(\sigma) d\sigma = \int_G {}^t \alpha_1(\sigma) d\sigma = \int_G \overline{\alpha_1(\sigma)} d\sigma = \overline{\int_G \alpha_1(\sigma) d\sigma} = \overline{\alpha_1}$; es decir α_1 es hermitiana. Si a es cualquier vector en $\mathbb{C}^n$ donde n es el grado de la representación, tenemos que $a \cdot \alpha_1 a = \int_G a \cdot \alpha_1(\sigma) a d\sigma$. Puesto que $a \cdot \alpha_1(\sigma) a = P(\sigma)a \cdot P(\sigma)a \geq 0$, tenemos que α_1 es positiva. (Si λ es un valor característico de α_1 y b es el correspondiente vector característico, $b \cdot \alpha_1 b = \lambda(b \cdot b) \geq 0$, luego $\lambda \geq 0$). Puesto que $\alpha_1(\sigma)$ es definida, tenemos que $a \cdot \alpha_1(\sigma) a > 0$, si $a \neq 0$, de este modo $a \cdot \alpha_1 a > 0$, es decir α_1 es una matriz hermitiana definida positiva.

Si $z \in G$, tenemos que

$${}^t \bar{P}(z) \alpha_1 P(z) = \int_G {}^t \bar{P}(z) {}^t \bar{P}(\sigma) P(\sigma) P(z) d\sigma =$$

$$= \int_G {}^t \bar{P}(\sigma z) P(\sigma z) d\sigma = \int_G {}^t \bar{P}(\sigma) P(\sigma) d\sigma = \alpha_1$$

en virtud del caracter invariante de la integral de Haar.

Sabemos que una matriz α_1 , hermitiana definida positiva puede ser escrita como α^2 donde α es tambien una matriz hermitiana definida positiva (ver p. 14 de [2]). Sea $P'(z) = \alpha P(z) \alpha^{-1}$. Puesto que ${}^t \bar{\alpha} \alpha = \alpha^2 = \alpha_1$, y ${}^t P(z) \alpha_1 P(z) = \alpha_1$, se tiene que ${}^t (\bar{\alpha} \overline{P(z)} \alpha^{-1}) \cdot (\alpha P(z) \alpha^{-1}) = {}^t (\bar{\alpha}^{-1}) \cdot {}^t (\bar{\alpha} \overline{P(z)}) \alpha P(z) \alpha^{-1} = ({}^t \bar{\alpha})^{-1} {}^t \bar{P(z)} + \bar{\alpha} \alpha P(z) \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \alpha_1 \alpha^{-1} = E$. Esto es ${}^t (\alpha P(z) \alpha^{-1})^{-1} = \overline{(\alpha P(z) \alpha^{-1})}$, es decir, la matriz $\alpha P(z) \alpha^{-1}$ es unitaria, o sea, la representación $\alpha P \alpha^{-1}$ es unitaria.

Si ahora consideramos el caso en que P es una representación real, entonces α_1 es una matriz real y podemos suponer que α es real. Se concluye que las matrices $\alpha P(z) \alpha^{-1}$ son reales unitarias, es decir, ortogonales, lo cual completa la demostración del teorema. ////

Corolario.- Cada representación de un grupo compacto es semisimple.

Demostración.- Por el teorema anterior podemos limitarnos a considerar una representación P de G por matrices ortogonales o unitarias.

En el caso complejo podemos considerar que el espacio de

representación es $\mathbb{C}^n$. Sea $\mathcal{B}$ cualquier subespacio invariante de $\mathbb{C}^n$, y sea $\mathcal{B}'$ el subespacio de $\mathbb{C}^n$ compuesto por todos los vectores f , tales que $e \cdot f = 0$ para todo $e \in \mathcal{B}$. Si $f \in \mathcal{B}'$, tenemos $e \cdot P(\sigma)f = {}^t \bar{P}(\sigma) e \cdot f = P(\sigma^{-1}) e \cdot f = 0$ ya que $P(\sigma)$ es unitaria, es decir $\bar{P}(\sigma) = {}^t P(\sigma^{-1}) \Rightarrow {}^t \bar{P}(\sigma) = P(\sigma^{-1})$, y $P(\sigma^{-1})e \in \mathcal{B}$. Esto para $e \in \mathcal{B}$ y $\sigma \in \mathcal{B}$. Se concluye que $\mathcal{B}'$ es un subespacio invariante de $\mathbb{C}^n$.

Sabemos además que $e \cdot e = 0 \Rightarrow e = 0$; se sigue que $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}' = \{0\}$.

Sea $\{e_1, \dots, e_d\}$ una base de $\mathcal{B}$. Los vectores $f \in \mathcal{B}'$ son aquellos cuyas componentes satisfacen las d ecuaciones homogéneas lineales $f \cdot e_i = 0$, $1 \leq i \leq d$. Se concluye que la dimensión de $\mathcal{B}'$ es al menos $n-d$, ya que podemos suponer que $\{e_1, \dots, e_d, e_{d+1}, \dots, e_n\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{C}^n$ (por el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt).

Puesto que $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}' = \{0\}$, la dimensión de $\mathcal{B} + \mathcal{B}'$ es al menos $d + n-d = n$; por lo que $\mathcal{B} + \mathcal{B}' = \mathbb{C}^n$. La afirmación de este corolario se sigue de la proposición 1.3. ////

§ 3 OPERACIONES SOBRE REPRESENTACIONES

En la teoría de representación de grupos existe una representación muy conocida, llamada la representación estrella de una representación. Aparte de definirla en este párrafo, - definimos además la suma y el producto de Kronecker de representaciones y damos algunas de sus propiedades tales como conmutatividad, asociatividad, etc.

LA REPRESENTACION ESTRELLA

Sea φ un endomorfismo de un espacio vectorial $\mathcal{B}$ sobre un campo K , y sea $\mathcal{B}'$ el espacio dual de $\mathcal{B}$, es decir, el espacio de funciones lineales de $\mathcal{B}$ en K . Si $\lambda \in \mathcal{B}'$, definimos ${}^t\varphi(\lambda)$ como el elemento de $\mathcal{B}'$ de la siguiente forma

$${}^t\varphi(\lambda)e = \lambda(\varphi e) \quad e \in \mathcal{B}$$

Puesto que ${}^t\varphi(\alpha\lambda_1 + \lambda_2) = (\alpha\lambda_1 + \lambda_2) \circ \varphi = (\alpha\lambda_1) \circ \varphi + \lambda_2 \circ \varphi = \alpha(\lambda_1 \circ \varphi) + \lambda_2 \circ \varphi = \alpha({}^t\varphi(\lambda_1)) + {}^t\varphi(\lambda_2)$

se tiene que ${}^t\varphi$ es el endomorfismo de $\mathcal{B}'$. Más aún, si φ_1 y

φ_2 son endomorfismos de $\mathcal{B}$, tenemos que ${}^t(\varphi_1 \circ \varphi_2)\lambda = \lambda \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2) = (\lambda \circ \varphi_1) \circ \varphi_2 = {}^t\varphi_1(\lambda) \circ \varphi_2 = ({}^t\varphi_1 \circ {}^t\varphi_2)\lambda$ para todo $\lambda \in \mathcal{B}'$. luego ${}^t(\varphi_1 \circ \varphi_2) = {}^t\varphi_2 \circ {}^t\varphi_1$.

Sea $\{e_1, \dots, e_d\}$ una base de $\mathcal{B}$. Corresponde a esta una base en el espacio dual $\mathcal{B}'$ la cual construimos como sigue

$$\lambda_i e_j = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq d$$

Demostremos que efectivamente se trata de una base. Claramente

$\{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$ son linealmente independientes. Si $\lambda \in \mathcal{B}'$, $\lambda = \sum_{i=1}^d \lambda(e_i) \lambda_i$, ya que $\lambda e_j = (\sum_{i=1}^d \lambda(e_i) \lambda_i) e_j$.

Sea α una matriz la cual representa a un endomorfismo φ con respecto a la base $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$, entonces la matriz que representa a ${}^t\varphi$ con respecto a la base $\{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$ es la transpuesta ${}^t\alpha$ de α , puesto que si $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^d a_{ij} e_i$, entonces

$$\alpha = (a_{ij}); \quad {}^t\varphi(\lambda_k) = \sum_{i=1}^d b_{ik} \lambda_i, \quad \text{y} \quad {}^t\varphi(\lambda_k)(e_j) = \\ = \lambda_k(\varphi e_j) = \lambda_k \sum_{i=1}^d a_{ij} e_i = \sum_{i=1}^d a_{ij} \lambda_k e_i = a_{kj}$$

Por otro lado $(\sum_{i=1}^d b_{ik} \lambda_i) e_j = \sum_{i=1}^d b_{ik} (\lambda_i e_j) = b_{jk}$, luego $b_{jk} = a_{kj}$, es decir $(b_{ji}) = (a_{ij})$, o sea $(b_{ij}) = {}^t(a_{ij})$

Ahora sea $(\mathcal{B}, P)$ un espacio de representación de un grupo G . La fórmula ${}^tP(\sigma\tau) = {}^tP(\tau){}^tP(\sigma)$ muestra que tP no es en general una representación de G , sin embargo el mapeo $\sigma \longrightarrow {}^tP(\sigma^{-1})$ es una representación, ya que $\sigma\tau \longrightarrow {}^tP(\sigma\tau^{-1}) = {}^tP(\tau^{-1}\sigma^{-1}) = {}^tP(\sigma^{-1}) {}^tP(\tau^{-1})$ y $\varepsilon \longrightarrow {}^tP(\varepsilon) = 1_{\mathcal{B}'}$.

Si $\tilde{P}$ es una forma matricial de P , entonces el mapeo $\sigma \longrightarrow (\tilde{P}(\sigma))^*$ es una forma matricial de la representación $\sigma \longrightarrow {}^tP(\sigma^{-1})$, debido a que $P(\sigma^{-1}) = P(\sigma^{-1})$, y a que la matriz que representa a ${}^tP(\sigma)$ es ${}^t\tilde{P}(\sigma)$. De esta forma el -

mapeo $\sigma \longrightarrow {}^t P(\sigma^{-1})$ tiene como forma matricial a ${}^t \tilde{P}(\sigma^{-1}) = {}^t \tilde{P}(\sigma^{-1}) = (P(\sigma))^* .$

Definición 3.1 Si P es una representación abstracta de un grupo G , el mapeo $\sigma \longrightarrow {}^t P(\sigma^{-1})$ es llamado la representación estrella de la representación P , y se denota por P^* . Si P es una representación matricial de G , el mapeo $\sigma \longrightarrow (P(\sigma))^*$ es llamado la representación estrella de P y se denota por P^* .

Proposición 3.1 Sea P una representación matricial unitaria de un grupo G , es decir, una representación la cual asigna a cada $\sigma \in G$ una matriz unitaria. Entonces P^* coincide con la representación conjugada imaginaria $\bar{P}$ de P ($\bar{P}(\sigma) = \overline{P(\sigma)}$). Si P es una representación ortogonal de G , entonces $P^* = P$.

Demostración.- Se sigue inmediatamente de las definiciones. ////.

Por otra parte, si P es una representación matricial de un grupo G , $P^*(\sigma) = {}^t P(\sigma^{-1}) \implies (P^*)^* = {}^t P^*(\sigma^{-1}) = {}^t ({}^t P(\sigma^{-1})^{-1}) = P(\sigma)$, luego $(P^*)^* = P$.

1.- SUMA DE REPRESENTACIONES

Sean (B_1, P_1) y (B_2, P_2) espacios de representación de un grupo G . Definimos para cada $\sigma \in G$ el endomorfismo lineal $-P(\sigma)$ sobre $B_1 \times B_2$ como

$$P(\sigma)(e_i, e_i) = (P_1(\sigma)e_i, P_2(\sigma)e_i), \text{ donde } e_i \in B_i, i=1,2.$$

(En este caso la suma y el producto por escalares en $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ se definen como es usual, coordenada a coordenada).

Es fácil ver que P es efectivamente una representación. Decimos que P es la suma de las representaciones P_1 y P_2 y escribimos $P = P_1 \dot{+} P_2$.

Sea $\{e_{m1}, e_{m2}, \dots, e_{md_m}\}$ una base de $\mathcal{B}_m$, $m=1, 2$. Sean (a_{ij}) y (b_{ij}) las matrices representantod de $P_1(\sigma)$ y $P_2(\sigma)$ con respecto a estas bases. Entonces $f_1 = (e_{11}, 0), f_2 = (e_{12}, 0), \dots, f_{d_1} = (e_{1d_1}, 0), f_{d_1+1} = (0, e_{21}), \dots, f_{d_1+d_2} = (0, e_{2d_2})$ forman una base de $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$. Debido a que $P(\sigma)f_j = (P_1 + P_2)(\sigma)f_j = \sum_{i=1}^{d_1+d_2} d_{ij} f_i$, si $1 \leq i, j \leq d_1$, $d_{ij} = a_{ij}$, si $1 \leq j \leq d_1$, $d_1 \leq i \leq d_1 + d_2$, $d_{ij} = 0$. Si $d_1 < j \leq d_1 + d_2$, $1 \leq i \leq d_1$, $d_{ij} = 0$, y si $d_1 < i, j \leq d_1 + d_2$, $d_{ij} = b_{ij}$, la matriz que representa a $P(\sigma) = (P_1 + P_2)(\sigma)$ con respecto a esta base es de la forma

$$\begin{pmatrix} (a_{ij}) & 0 \\ 0 & (b_{ij}) \end{pmatrix}$$

Esto da lugar a la siguiente definición: Si α y β son matrices cuadradas de grados d_1 y d_2 respectivamente, denotaremos por $\alpha \dot{+} \beta$ a la matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

de grado $d_1 + d_2$.

Ahora, si P_1 y P_2 son representaciones matriciales de un grupo G , denotaremos por supuesto por $P_1 \dot{+} P_2$ la representación matricial que asigna a cada $\sigma \in G$ la matriz

$$P_1(\sigma) \dot{+} P_2(\sigma)$$

Claramente, si P_1, P_2, P_3 son tres representaciones matriciales $(P_1 + P_2) \dot{+} P_3 = P_1 \dot{+} (P_2 \dot{+} P_3)$. Más aún $(P_1 \dot{+} P_2)^*(\sigma) = ((P_1 + P_2)(\sigma))^* = (P_1(\sigma) \dot{+} P_2(\sigma))^* =$

$$= {}^t \begin{pmatrix} P_1(\sigma) & 0 \\ 0 & P_2(\sigma) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} {}^t P_1(\sigma)^{-1} & 0 \\ 0 & {}^t P_2(\sigma)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(\sigma)^* & 0 \\ 0 & P_2(\sigma)^* \end{pmatrix} =$$

$$= P_1(\sigma)^* \dot{+} P_2(\sigma)^* = (P_1^* \dot{+} P_2^*)(\sigma), \text{ es decir } (P_1 \dot{+} P_2)^* =$$

$$= P_1^* \dot{+} P_2^*$$

Si P_1, P_2 y P_3 son representaciones abstractas, los dos miembros de las fórmulas anteriores no son iguales ya que en el primer caso el espacio de representación del primer miembro es $(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2) \times \mathcal{O}_3$, y el espacio de representación del segundo miembro es $\mathcal{O}_1 \times (\mathcal{O}_2 \times \mathcal{O}_3)$; en el segundo caso el espacio de representación del primer miembro es el espacio dual de $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$, y el del segundo miembro es el producto cartesiano de los espacios duales de $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$; sin embargo, la proposición 1.1 nos asegura que ambos miembros son equivalentes.

Si P_1 y P_2 son representaciones abstractas o matriciales, entonces $P_1 \dot{+} P_2$ es equivalente a $P_2 \dot{+} P_1$. En efecto, supongamos que $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ son espacios de representación de las repre-

representaciones dadas. El isomorfismo lineal $(e_1, e_2) \xrightarrow{1} (e_1, e_1)$ de $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ en $\mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_1$, claramente es isomorfismo de $(\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2, P_1 + P_2)$ en $(\mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_1, P_2 + P_1)$, es decir $I \cdot (P_1 + P_2)(\sigma)(e_1, e_2) = I(P_1(\sigma)e_1, P_2(\sigma)e_2) = (P_2(\sigma)e_2, P_1(\sigma)e_1) = (P_2 + P_1)(\sigma)(e_2, e_1) = (P_2 + P_1)(\sigma) \cdot I(e_1, e_2)$,

2.- EL PRODUCTO DE KRONECKER

Sean $(\mathcal{B}_1, P_1)$, $(\mathcal{B}_2, P_2)$ espacios de representación de un grupo G . Denotemos por $\mathcal{B}$ al espacio de funciones bilineales de $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ en K , es decir, si $B \in \mathcal{B}$ entonces $B(\alpha e_1 + e'_1, e_2) = \alpha B(e_1, e_2) + B(e'_1, e_2)$; $B(e_1, \alpha e_2 + e'_2) = \alpha B(e_1, e_2) + B(e_1, e'_2)$.

Sea φ_i , $i=1, 2$ un endomorfismo lineal de $\mathcal{B}_i$. Si asignamos a cada forma $B \in \mathcal{B}$ la forma bilineal $\psi(B)$ definida por $\psi(B)(e_1, e_2) = B(\varphi_1 e_1, \varphi_2 e_2)$ $e_i \in \mathcal{B}_i$, $i=1, 2$ claramente obtenemos un endomorfismo lineal de $\mathcal{B}$, ya que $\psi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, $\psi(\alpha B_1 + B_2)(e_1, e_2) = (\alpha B_1 + B_2)(\varphi_1 e_1, \varphi_2 e_2) = \alpha B_1(\varphi_1 e_1, \varphi_2 e_2) + B_2(\varphi_1 e_1, \varphi_2 e_2) = \alpha \psi(B_1)(e_1, e_2) + \psi(B_2)(e_1, e_2) = [\alpha \psi(B_1) + \psi(B_2)](e_1, e_2)$, luego $\psi(\alpha B_1 + B_2) = \alpha \psi(B_1) + \psi(B_2)$. Decimos que ψ es el endomorfismo lineal de $\mathcal{B}$ que corresponde a la pareja (φ_1, φ_2) .

Sea θ_i otro endomorfismo de $\mathcal{B}_i$, $i=1, 2$ y sea π el -

endomorfismo lineal de $\mathcal{B}$ que corresponde a la pareja (θ, θ_1) . Sea Γ el endomorfismo de $\mathcal{B}$ que corresponde a la pareja $--$
 $(\psi, \theta_1, \psi \circ \theta_1)$, entonces $\Gamma(\mathcal{B})(e_1, e_2) = \mathcal{B}(\psi \circ \theta_1, \psi \circ \theta_2, e_2) =$
 $= \psi(\mathcal{B})(\theta_1, \theta_2, e_2) = \pi(\psi(\mathcal{B}))(e_1, e_2) = [\pi \circ \psi](\mathcal{B})(e_1, e_2)$, luego $\Gamma(\mathcal{B}) =$
 $= \pi \circ \psi(\mathcal{B})$ para todo $\mathcal{B} \in \mathcal{B}$, es decir $\Gamma = \pi \circ \psi$.

Podemos compensar esta inversión de orden yendo a los correspondientes endomorfismos en el espacio dual $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{B}$ ya que ${}^t(\pi \circ \psi) = {}^t\psi \circ {}^t\pi$.

Definición 3.2 Sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ espacios vectoriales sobre un campo K . El espacio dual del espacio de funciones bilineales sobre $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ es llamado el producto de Kronecker de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, y lo denotamos por $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$.

Sea e_i un elemento de $\mathcal{B}_i$, $i = 1, 2$. A la pareja (e_1, e_2) le corresponde una función lineal sobre $\mathcal{B}$, la cual asigna a cada $\mathcal{B} \in \mathcal{B}$ el valor $\mathcal{B}(e_1, e_2)$. Pero una función lineal sobre $\mathcal{B}$ es un elemento de $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$. De manera que tenemos un mapeo de $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ en $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$. Denotaremos por $e_1 \times e_2$ al elemento de $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ correspondiente a (e_1, e_2) bajo este mapeo.

El mapeo $(e_1, e_2) \longrightarrow e_1 \times e_2$ no es un mapeo lineal, sin embargo es bilineal.

Si ψ_i es un endomorfismo lineal de $\mathcal{B}_i$, $i = 1, 2$ el endomorfismo lineal ${}^t\psi$ de $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ que transforma a $e_1 \times e_2$ de -

acuerdo a la fórmula ${}^t\psi(e_1 \otimes e_2) = \psi_1 e_1 \otimes \psi_2 e_2$
 $({}^t\psi(e_1 \otimes e_2)(b) = e_1 \otimes e_2(\psi(b)) = \psi(b)(e_1, e_2) =$
 $= b(\psi_1 e_1, \psi_2 e_2) = \psi_1 e_1 \otimes \psi_2 e_2(b))$,
 lo denotaremos por $\psi_1 \otimes \psi_2$.

Sean ahora (θ_1, ρ_1) , (θ_2, ρ_2) espacios de representación de un grupo G . Se concluye de lo que hemos visto que el mapeo $\sigma \longrightarrow \rho_1(\sigma) \otimes \rho_2(\sigma)$ es de nuevo una representación de G , ahora el espacio de representación correspondiente es $\theta_1 \otimes \theta_2$. Esta nueva representación se llama el producto de Kronecker de ρ_1 y ρ_2 y se denota por $\rho_1 \otimes \rho_2$.

Sea $\{e_{m1}, e_{m2}, \dots, e_{mdm}\}$, una base de θ_m , $m=1, 2$. Entonces los $d_1 d_2$ elementos $e_{i1} \otimes e_{j2}$, $1 \leq i \leq d_1$, $1 \leq j \leq d_2$ forman una base de $\theta_1 \otimes \theta_2$. En efecto, veamos primero cual es la dimensión de $\mathcal{B}$. Si definimos $f_{ij} = (e_{i1}, e_{j2})$, y las funcionales bilineales λ_{ij} de tal forma que $\lambda_{ij} f_{kl} = \delta_{ik} \delta_{jl}$, veremos que estas $d_1 d_2$ funcionales forman una base de $\mathcal{B}$. Si $\lambda \in \mathcal{B}$, $(e_1, e_2) \in \theta_1 \otimes \theta_2$, $\lambda(e_1, e_2) = \lambda(\sum_{i=1}^{d_1} \alpha_i e_{i1}, \sum_{j=1}^{d_2} \beta_j e_{j2}) = \sum_{ij} \alpha_i \beta_j \lambda(e_{i1}, e_{j2}) = \sum_{ij} \alpha_i \beta_j \lambda f_{ij}$, luego λ solamente depende de los valores sobre los $d_1 d_2$ elementos f_{ij} , es decir, si $\lambda' f_{ij} = \lambda f_{ij}$, $1 \leq i \leq d_1$, $1 \leq j \leq d_2$, entonces $\lambda' = \lambda$. Claramente la funcional $\sum_{ij} \lambda f_{ij} \lambda_{ij}$ coincide con λ en todos los elementos f_{rs} , $1 \leq r \leq d_1$, $1 \leq s \leq d_2$, de manera que $\lambda = \sum_{ij} \lambda f_{ij} \lambda_{ij}$, es decir, los $d_1 d_2$ elementos λ_{ij} generan a $\mathcal{B}$.

Por otro lado, si $\sum_j \alpha_{ij} \lambda_{ij} = 0$, entonces $(\sum_j \alpha_{ij} \lambda_{ij}) e_{ij} = \alpha_{ij} = 0$, de manera que el conjunto $\{\lambda_{ij}\}$ es efectivamente una base de B , es decir B tiene dimensión $d_1 d_2$. Puesto que $B, X B_2$ es el dual de B , ya vimos que ambos tienen la misma dimensión, de manera que será suficiente probar que los elementos $e_{ij} \in X B_2$ son linealmente independientes.

Supongamos que $\sum_j a_{ij} e_{ij} \in X B_2 = 0$; $a_{ij} \in K$. Para cada pareja (i, j) vimos que existe una funcional bilineal λ_{ij} tal que $\lambda_{ij}(e_{ik}, e_{j\ell}) = \delta_{ik} \delta_{j\ell}$. De esto modo, si $B \in B$,

$\sum_j a_{ij} e_{ij} \in X B_2 (B) = \sum_j a_{ij} B(e_{ij}, e_{2\ell}) = 0$. Si $B = \lambda_{ij}$ obtenemos que $a_{ij} = 0$, lo que prueba la afirmación.

Si φ_i es un endomorfismo lineal de B_i , $i=1, 2$, tenemos que $\varphi_1 e_{1k} = \sum_{i=1}^{d_1} a_{ik} e_{i1}$, $\varphi_2 e_{2\ell} = \sum_{j=1}^{d_2} b_{j\ell} e_{2j}$; de donde $\varphi_1 \otimes \varphi_2 (e_{1k} \otimes e_{2\ell}) = \varphi_1 e_{1k} \otimes \varphi_2 e_{2\ell} = (\sum_{i=1}^{d_1} a_{ik} e_{i1}) \otimes (\sum_{j=1}^{d_2} b_{j\ell} e_{2j}) = \sum_{ij} a_{ik} b_{j\ell} e_{i1} \otimes e_{2j}$. Si hacemos $f_{i+d_1(j-1)} = e_{i1} \otimes e_{2j}$ tenemos que $(\varphi_1 \otimes \varphi_2) f_r = \sum_{s=1}^{d_1 d_2} c_{rs} f_s$

$$c_{i+d_1(j-1), k+d_1(\ell-1)} = a_{ik} b_{j\ell} \quad (1)$$

Esto da lugar a la siguiente definición.

Definición 3.3 Sean $\alpha = (a_{ik})$, $\beta = (b_{j\ell})$ dos matrices de grados d_1 y d_2 respectivamente. Denotaremos por $\alpha \otimes \beta$ a la matriz (c_{rs}) de grado $d_1 d_2$ cuyos coeficientes están da-

dos por la ecuación (1) . A este producto le llamamos el -
producto de Kronecker de α y β .

Ejem. Si $\alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\beta = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

$$\alpha \otimes \beta = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Si P_1 y P_2 son representaciones matriciales de un grupo G , llamamos el producto de Kronecker de P_1 y P_2 a la representación matricial $P_1 \otimes P_2$ que asigna a cada $\sigma \in G$ la matriz $P_1(\sigma) \otimes P_2(\sigma)$. Para ver que este mapeo es efectivamente una representación tenemos que comprobar que

- a) $P_1(\sigma)P_1(z) \otimes P_2(\sigma)P_2(z) = (P_1(\sigma) \otimes P_2(\sigma))(P_1(z) \otimes P_2(z))$.
- b) $P_1(e) \otimes P_2(e) = E$.

La demostración de b) es inmediata. Demostraremos a) en general, es decir si α , β son dos matrices de grado d_1 y α' , β' son dos matrices de grado d_2 , probaremos que

$$\alpha\beta \times \alpha'\beta' = (\alpha \times \alpha')(\beta \times \beta').$$

Salvo por los índices, usaremos las letras a , b , c , a' , b' , c' , d , e , f , d' , para denotar los coeficientes de las matrices α , β , $\alpha\beta$, α' , β' , $\alpha'\beta'$, $\alpha\beta \times \alpha'\beta'$, $\alpha \times \alpha'$, $\beta \times \beta'$, $(\alpha \times \alpha')(\beta \times \beta')$, respectivamente.

$$\begin{aligned} \alpha\beta \times \alpha'\beta' &= (d_{pq}) \text{ donde } d_{i+d_1(l-1), k+d_1(s-1)} = c_{ik} c'_{ls} = \\ &= \sum_{n=1}^{d_2} a_{in} b_{nk} \sum_{m=1}^{d_2} a'_{lm} b'_{ms} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Por otro lado } (\alpha \times \alpha')(\beta \times \beta') &= (d'_{pq}) \text{ donde } d'_{i+d_1(l-1), k+d_1(s-1)} = \\ &= \sum_{t=1}^{d_2} e_{i+d_1(l-1), t} f_{t, k+d_1(s-1)} = \sum_{\substack{n=1, \dots, d_1 \\ m=1, \dots, d_2}} e_{i+d_1(l-1), n+d_1(m-1)} f_{n+d_1(m-1), k+d_1(s-1)} = \\ &= \sum_{\substack{n=1, \dots, d_1 \\ m=1, \dots, d_2}} a_{in} a'_{lm} b_{nk} b'_{ms} = \sum_{n=1}^{d_1} a_{in} b_{nk} \sum_{m=1}^{d_2} a'_{lm} b'_{ms} = \\ &= d_{i+d_1(l-1), k+d_1(s-1)}, \text{ luego } \alpha\beta \times \alpha'\beta' = (\alpha \times \alpha')(\beta \times \beta'). \end{aligned}$$

Si α y β son matrices de grados d_1 y d_2 respectivamente, y si $\alpha = (a_{ik})$, $\beta = (b_{ik})$, entonces ${}^t\alpha = (a_{ik})$, ${}^t\beta = (b_{ik})$, $\alpha \times \beta = (c_{ik})$, donde $c_{k+d_1(r-1), i+d_1(l-1)} = a_{ik} b_{lr}$, ${}^t(\alpha \times \beta) = (c_{ik})$, donde $c_{i+d_1(l-1), k+d_1(r-1)} = a_{ik} b_{lr}$, lo que demuestra que ${}^t(\alpha \times \beta) = {}^t\alpha \times {}^t\beta$.

Puesto que $E = \alpha^{-1} \alpha X \beta^{-1} \beta = (\alpha^{-1} X \beta^{-1}) (\alpha X \beta)$, concluimos que $(\alpha X \beta)^{-1} = \alpha^{-1} X \beta^{-1}$, luego, si α y β son matrices regulares, tenemos que $(\alpha X \beta)^* = {}^t(\alpha X \beta)^{-1} = {}^t \alpha^{-1} X {}^t \beta^{-1} = \alpha^* X \beta^*$. Más aún, si α , β , δ son matrices de grados d_1 , d_2 , y d_3 respectivamente, y si (salvo por los índices) denotamos con las letras a , b , c , d , e , f , g , h a los coeficientes de las matrices α , β , δ , $\beta + \delta$, $\alpha X (\beta + \delta)$, $\alpha X \beta$, $\alpha X \delta$, $\alpha X \beta + \delta X \delta$, respectivamente, tenemos que

$$\alpha X (\beta + \delta) = (e_{pq}), \text{ donde } e_{i+d_1(j-1), k+d_1(l-1)} = a_{ik} d_{jl} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } d_2 < l \leq d_2 + d_3 \text{ y } 1 \leq j \leq d_2 \text{ ó } 1 \leq l \leq d_2 \text{ y } d_2 < j \leq d_2 + d_3 \\ a_{ik} b_{jl} & \text{si } 1 \leq l \leq d_2, 1 \leq j \leq d_2 \\ a_{ik} c_{jl} & \text{si } d_2 \leq l \leq d_2 + d_3, d_2 \leq j \leq d_2 + d_3 \end{cases}$$

Por otro lado se tiene que

$$\alpha X \beta + \alpha X \delta = (h_{pq}), \text{ donde } h_{i+d_1(j-1), k+d_1(l-1)} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } d_1 d_2 < k + d_1(l-1) \leq d_1 d_2 + d_1 d_3, \text{ y } 1 \leq i + d_1(j-1) \leq d_1 d_2, \text{ ó} \\ & \text{bien, si } 1 \leq k + d_1(l-1) \leq d_1 d_2 \text{ y } d_1 d_2 < i + d_1(j-1) \leq d_1 d_2 + d_1 d_3 \\ f_{i+d_1(j-1), k+d_1(l-1)} = a_{ik} b_{jl} & \text{si } 1 \leq k + d_1(l-1) \leq d_1 d_2 \text{ y } 1 \leq i + d_1(j-1) \leq d_1 d_2 \\ g_{i+d_1(j-1), k+d_1(l-1)} = a_{ik} c_{jl} & \text{si } d_1 d_2 < k + d_1(l-1) \leq d_1 d_2 + d_1 d_3 \text{ y} \\ & d_1 d_2 < i + d_1(j-1) \leq d_1 d_2 + d_1 d_3. \end{cases}$$

Pero esta última igualdad sucede, en el primer caso si y sólo

si $d_2 < l \leq d_2 + d_3$ y $l \leq j \leq d_2$ ó bien si $l \leq l \leq d_2$ y $d_2 \leq j \leq d_2 + d_3$; en el segundo caso si y sólo si $l \leq l \leq d_2$ y $l \leq j \leq d_2$; y el tercer caso si y sólo si $d_2 < l \leq d_2 + d_3$, y $d_2 < j \leq d_2 + d_3$.

De lo anterior se concluye que $\alpha \times (\rho + \rho') = \alpha \times \rho + \alpha \times \rho'$. De manera que si P_1 , P_2 , y P_3 son representaciones abstractas de un grupo G , entonces $(P_1 \times P_2)^*$ es equivalente a $P_1^* \times P_2^*$, y $P_1 \times (P_2 + P_3)$ es equivalente a $P_1 \times P_2 + P_1 \times P_3$.

Proposición 3.2 Si $(\mathcal{G}_1, P_1)$, $(\mathcal{G}_2, P_2)$, $(\mathcal{G}_3, P_3)$, $(\mathcal{G}', P')$, $(\mathcal{G}'_2, P'_2)$, son espacios de representación de un grupo G , tales que $(\mathcal{G}_1, P_1)$ es isomorfo a $(\mathcal{G}', P')$ y $(\mathcal{G}_2, P_2)$ es isomorfo a $(\mathcal{G}'_2, P'_2)$, entonces

- i) $(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2, P_1 + P_2)$ es isomorfo a $(\mathcal{G}'_1 \times \mathcal{G}'_2, P'_1 + P'_2)$
- ii) $(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2, P_1 \times P_2)$ es isomorfo a $(\mathcal{G}'_1 \times \mathcal{G}'_2, P'_1 \times P'_2)$
- iii) $(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2, P_1 \times P_2)$ es isomorfo a $(\mathcal{G}_2 \times \mathcal{G}_1, P_2 \times P_1)$
- iv) $((\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2) \times \mathcal{G}_3, (P_1 + P_2) \times P_3)$ es isomorfo a $((\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_3) \times (\mathcal{G}_2 \times \mathcal{G}_3), P_1 \times P_3 + P_2 \times P_3)$
- v) $((\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2) \times \mathcal{G}_3, (P_1 \times P_2) \times P_3)$ es isomorfo a $(\mathcal{G}_1 \times (\mathcal{G}_2 \times \mathcal{G}_3), P_1 \times (P_2 \times P_3))$.

Demostración.— i) Sabemos que existen isomorfismos $I_1: \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}'_1$, $I_2: \mathcal{G}_2 \rightarrow \mathcal{G}'_2$ tales que $I_1 \cdot P_1(\sigma) = P'_1(\sigma) \cdot I_1$, $I_2 \cdot P_2(\sigma) = P'_2(\sigma) \cdot I_2 \quad \forall \sigma \in G$, de manera que podemos definir

el isomorfismo $J: \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \longrightarrow \mathcal{B}'_1 \times \mathcal{B}'_2$ tal que $J(e_i, e_2) = (I_1 e_i, I_2 e_2)$, $e_i \in \mathcal{B}_i$, $i=1, 2$. $J \circ (P_1 + P_2)(\sigma)(e_i, e_2) = J(P_1(\sigma)e_i, P_2(\sigma)e_2) = (I_1 \circ P_1(\sigma)e_i, I_2 \circ P_2(\sigma)e_2) = (P'_1(\sigma) \circ I_1 e_i, P'_2(\sigma) \circ I_2 e_2) = (P'_1 + P'_2)(\sigma) \circ J(e_i, e_2)$, para todo $\sigma \in G$ y toda pareja (e_i, e_2) , $e_i \in \mathcal{B}_i$, $i=1, 2$. Por tanto $P_1 + P_2$ y $P'_1 + P'_2$ son equivalentes.

ii) Si $\{e_{d_1}, e_{d_2}, \dots, e_{d_n}\}$ es base de $\mathcal{B}_i$, $i=1, 2$, sabemos que los elementos $e_{i_1} \times e_{i_2}$, $1 \leq i_1 \leq d_1$, $1 \leq i_2 \leq d_2$ forman una base de $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$. Si $e_i \times e_2 \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$, es decir $e_i \times e_2 = \sum_{i,j} a_{ij} e_{i_1} \times e_{i_2}$, definimos $J: \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \longrightarrow \mathcal{B}'_1 \times \mathcal{B}'_2$ de la siguiente forma

$$J(e_i \times e_2) = \sum_{i,j} a_{ij} I_1 e_{i_1} \times I_2 e_{i_2}, \text{ donde } I_1, I_2 \text{ son los}$$

isomorfismos usados en i). Claramente J es un isomorfismo.

Veamos ahora que es isomorfismo de G -módulos.

$$\begin{aligned} J \circ (P_1 \times P_2)(\sigma)(e_i \times e_2) &= J(P_1(\sigma)e_i \times P_2(\sigma)e_2) = \\ &= I_1 \circ P_1(\sigma)e_i \times I_2 \circ P_2(\sigma)e_2 = P'_1(\sigma) \circ I_1 e_i \times P'_2(\sigma) \circ I_2 e_2 = \\ &= (P'_1 \times P'_2)(\sigma)(I_1 e_i \times I_2 e_2) = (P'_1 \times P'_2)(\sigma) \circ J(e_i \times e_2) \end{aligned}$$

para todo $\sigma \in G$ y todo elemento de $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$, es decir $P_1 \times P_2$ es equivalente a $P'_1 \times P'_2$.

iii) La demostración es sencilla y la dejamos como ejercicio.

iv) Al igual que iii) queda como ejercicio.

v) Sea $\{e_m, e_{2m}, \dots, e_{mdm}\}$ base de B_m , $m = 1, 2, 3$, luego los $d_1 d_2$ vectores $e_{i_1} \otimes e_{i_2}$ forman una base de $B_1 \otimes B_2$ y por lo tanto los $d_1 d_2 d_3$ vectores $(e_{i_1} \otimes e_{i_2}) \otimes e_{i_3}$ forman una base de $(B_1 \otimes B_2) \otimes B_3$. Análogamente los $d_1 d_2 d_3$ vectores $e_{i_1} \otimes (e_{i_2} \otimes e_{i_3})$ forman una base de $B_1 \otimes (B_2 \otimes B_3)$, de manera que si definimos el isomorfismo $I: (B_1 \otimes B_2) \otimes B_3 \rightarrow B_1 \otimes (B_2 \otimes B_3)$, $I(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes e_{i_3}) = e_{i_1} \otimes (e_{i_2} \otimes e_{i_3})$, entonces

$$I \cdot [(P_1 \otimes P_2) \otimes P_3](\sigma)(e_{i_1} \otimes e_{i_2}) \otimes e_{i_3} = I[(P_1 \otimes P_2)(\sigma)(e_{i_1} \otimes e_{i_2}) \otimes P_3(\sigma)e_{i_3}] =$$

$$= I[(P_1(\sigma)e_{i_1} \otimes P_2(\sigma)e_{i_2}) \otimes P_3(\sigma)e_{i_3}] = P_1(\sigma)e_{i_1} \otimes (P_2(\sigma)e_{i_2} \otimes P_3(\sigma)e_{i_3}) =$$

$$= P_1(\sigma)e_{i_1} \otimes (P_2 \otimes P_3)(\sigma)(e_{i_2} \otimes e_{i_3}) = [P_1 \otimes (P_2 \otimes P_3)](\sigma)e_{i_1} \otimes (e_{i_2} \otimes e_{i_3}) =$$

$$= [P_1 \otimes (P_2 \otimes P_3)](\sigma) \cdot I(e_{i_1} \otimes e_{i_2}) \otimes e_{i_3}, \text{ lo que demuestra v).}$$

////

UNA OBSERVACION SOBRE LA REPRESENTACION $P_1 \otimes P_1^*$

Sean P_1 y P_2 representaciones matriciales de un grupo G , de grados d_1 y d_2 respectivamente, sea D el conjunto de todas las matrices rectangulares $(d_1 \times d_2)$. D es un espacio vectorial de dimensión $d_1 d_2$. A cada $\sigma \in G$ le asignamos el endomorfismo Λ_σ de D que mapea a cualquier matriz $\alpha \in D$ sobre $\Lambda_\sigma \alpha = P_1(\sigma) \alpha P_2(\sigma^{-1})$.

si $\alpha \in D$, $\sigma, \tau \in G$, entonces $\Lambda_{\sigma\tau} \alpha =$

$$\begin{aligned}
&= P_1(\sigma) P_1(\tau) \alpha P_2(\tau^{-1}) P_2(\sigma^{-1}) = \Lambda_\sigma (P_1(\tau) \alpha P_2(\tau^{-1})) = \\
&= \Lambda_\sigma \circ \Lambda_\tau (\alpha) \quad , \text{ es decir } \Lambda_{\sigma\tau} = \Lambda_\sigma \circ \Lambda_\tau \quad . \text{ Además} \\
&\Lambda_\varepsilon \alpha = P_1(\varepsilon) \alpha P_2(\varepsilon^{-1}) = \alpha \quad . \text{ Por tanto el mapeo } \sigma \longrightarrow \\
&\longrightarrow \Lambda_\sigma \text{ es una representación abstracta de } G.
\end{aligned}$$

Afirmamos que Λ es una forma abstracta de la representación $P_1 \times P_2^*$. Para demostrar nuestra afirmación, denotemos por $\alpha_{i+d_1, (j-1)}$ a la matriz en D que tiene 1 en la intersección del i -ésimo renglón y la k -ésima columna, y ceros en cualquier otro lado. Los $d_1 d_2$ elementos $\alpha_{i+d_1, (j-1)}$ con $1 \leq i \leq d_1$, $1 \leq j \leq d_2$ forman una base de D . La matriz $P_1(\sigma) \alpha_{k+d_1, (l-1)}$ es la matriz que tiene en la l -ésima columna y en el k -ésimo renglón a los coeficientes $a_{kl}(\sigma)$, $1 \leq l \leq d_2$ y cero en cualquier otra parte, por lo que los coeficientes de la matriz $P_1(\sigma) \alpha_{k+d_1, (l-1)} P_2(\sigma^{-1})$ son de la forma

$a_{kl}(\sigma) b_{lj}(\sigma^{-1})$, $1 \leq k \leq d_1$, $1 \leq j \leq d_2$, k, l fijos, en el i -ésimo renglón y en la j -ésima columna; de modo que expresando esta matriz como combinación lineal de las matrices básicas, se tiene que $P_1(\sigma) \alpha_{k+d_1, (l-1)} P_2(\sigma^{-1}) =$

$$= \sum_{lj} a_{kl}(\sigma) b_{lj}(\sigma^{-1}) \alpha_{i+d_1, (j-1)}$$

Si denotamos por $(b_{jl}^*(\sigma))$ a la matriz $P_2^*(\sigma)$, tenemos que $b_{jl}^*(\sigma) = b_{lj}(\sigma^{-1})$.

$$\begin{aligned}
P_1(\sigma) \times P_2^*(\sigma) &= (C_{pq}) \quad \text{donde } C_{i+d_1, (j-1), k+d_1, (l-1)} = \\
&= a_{kl}(\sigma) b_{jl}^*(\sigma) = a_{kl}(\sigma) b_{lj}(\sigma^{-1}) \quad . \text{ Por otro lado, la matriz}
\end{aligned}$$

correspondiente al endomorfismo $\Lambda \sigma$ es de la forma

$(a_{ik}(\sigma) b_{lj}(\sigma^{-1}))$, donde el coeficiente del $i + d_i(j-1)$ renglón y la $k + d_i(l-1)$ columna es $a_{ik}(\sigma) b_{lj}(\sigma^{-1})$, lo que demuestra que la forma matricial de Λ correspondiente a nuestra base elegida en D es $P_1 \otimes P_2^*$ lo cual prueba nuestra afirmación.

§ 4 LEMA DE SCHUR

Aquí, aparte de demostrar el lema de Schur, el cual nos proporciona las condiciones necesarias y suficientes para la equivalencia de dos representaciones, damos una manera de determinar la multiplicidad de la representación identidad y de una representación simple en una representación semisimple - cualesquiera.

Proposición 4.1 (Lema de Schur) Sean P_1 y P_2 representaciones matriciales irreducibles de un grupo G , sobre un cam-

po K . Sean d_1 y d_2 los grados de las representaciones P_1 y P_2 respectivamente. Una condición necesaria y suficiente para la equivalencia de P_1 y P_2 es que exista una matriz rectangular $\alpha \neq 0$ con coeficientes en K , con d_1 renglones y d_2 columnas tal que $P_1(\sigma)\alpha = \alpha P_2(\sigma)$ para todo $\sigma \in G$.

Demostración. - La necesidad de la condición, se debe a la definición de equivalencia entre representaciones matriciales.

Para la suficiencia, supongamos que existe una matriz $\alpha \neq 0$ de d_1 renglones y d_2 columnas tal que $P_1(\sigma)\alpha = \alpha P_2(\sigma), \forall \sigma \in G$. Construyendo espacios vectoriales $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ correspondientes a P_1 y P_2 , e interpretando a α como un mapeo lineal de $\mathcal{B}_2$ en $\mathcal{B}_1$, consideremos $D_1 = \text{Im } \alpha$. Puesto que $\alpha \neq 0$, $D_1 \neq \{0\}$. Si $e \in D_1$, $e = \alpha u$ para algún $u \in \mathcal{B}_2$, luego $P_1(\sigma)e = P_1(\sigma)\alpha u = \alpha P_2(\sigma)u \in D_1$, por tanto D_1 es P_1 -invariante. Puesto que $\mathcal{B}_1$ es irreducible, tenemos que $D_1 = \mathcal{B}_1$. Sea D_2 , el núcleo de α ; puesto que $\alpha \neq 0$, $D_2 \neq \mathcal{B}_2$. Si $u \in D_2$, $\alpha P_2(\sigma)u = P_1(\sigma)\alpha u = 0$, luego $P_2(\sigma)u \in D_2$; es decir D_2 es subespacio invariante de $\mathcal{B}_2$, y por ser este irreducible, concluimos que $D_2 = \{0\}$, es decir el mapeo α es biyectivo, lo que demuestra que $d_1 = d_2$ y que α es una matriz regular. De este modo $P_2(\sigma) = \alpha^{-1}P_1(\sigma)\alpha$ lo que demuestra que P_1 y P_2 son equivalentes.

Sea P una representación matricial irreducible de un grupo G . Las matrices α tales que $P(\sigma)\alpha = \alpha P(\sigma)$ para todo $\sigma \in G$ obviamente forman un álgebra $\mathcal{O}$. Es decir, si α_1 y α_2 son matrices que cumplen con la propiedad de que $P(\sigma)\alpha = \alpha P(\sigma)$, entonces $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1 + \alpha_2$ y $a\alpha_1$ son matrices que siguen cumpliendo la misma propiedad. De la demostración del lema de Schur se concluye que cada matriz $\alpha \neq 0$ en $\mathcal{O}$ tiene una inversa α^{-1} , y claramente $\alpha^{-1} \in \mathcal{O}$. Expresamos este hecho diciendo que $\mathcal{O}$ es un álgebra con división.

Proposición 4.2 Sea P una representación matricial irreducible de un grupo G , sobre un campo algebraicamente cerrado K . Las únicas matrices que conmutan simultáneamente con todas las matrices $P(\sigma)$, $\sigma \in G$, son los múltiplos escalares de la matriz identidad.

Demostración.- Sea $M \in \mathcal{O}$, $M \neq 0$, y sea Z el conjunto de elementos en $\mathcal{O}$ que pueden expresarse como $R(M)$ donde R es una función racional con coeficientes en K . Claramente Z es un campo, además si identificamos $a \in K$ con $aE \in \mathcal{O}$, tenemos que $K \subset Z$, y debido a que Z está contenido en el espacio vectorial de las matrices de grado d , donde d es el grado de la representación P , se tiene que Z es de grado

finito sobre K . Concluimos que si K es algebraicamente cerrado, $Z = K$, luego $\rho = \alpha E$ para algún $\alpha \in K$.

////

Definición 4.1 La representación identidad de un grupo G es la representación que asigna a cada $\sigma \in G$ el número 1 , considerado como una matriz de grado 1 . Una forma abstracta de esta tiene un espacio de representación C de dimensión 1 , y asigna a cada $\sigma \in G$ el mapeo identico de C en sí mismo.

Proposición 4.3 Sea (π, M) un espacio de representación semisimple de un grupo G , sobre un campo K . La multiplicidad de la representación identidad en la representación M es igual al máximo número de vectores linealmente independientes $e \in \pi$, tales que $M(\sigma)e = e \quad \forall \sigma \in G$.

Demostración.- Sea $\pi = \pi_1 \oplus \dots \oplus \pi_h$, una descomposición de π en suma directa de subespacios simples. Podemos suponer que $\pi_1, \dots, \pi_h$ son todos los términos de esta descomposición, (si los hay) que son isomorfos como G -módulos a C , $1 \leq h \leq h$. Entonces cada π_i , $1 \leq i \leq h$ está generado por un vector $e_i \neq 0$ tal que $M(\sigma)e_i = e_i$ para todo $\sigma \in G$; es decir, hemos encontrado h vectores linealmente independientes tales que $M(\sigma)e_i = e_i$, $1 \leq i \leq h$.

Por otro lado, si $f \in \pi$ es tal que $M(\sigma)f = f \quad \forall \sigma \in G$,

podemos escribir $f = \sum_{i=1}^h f_i$, $f_i \in \mathcal{M}_i$. Por nuestra suposición, tenemos que $\sum_{i=1}^h f_i = \sum_{i=1}^h M(\sigma) f_i$ con $M(\sigma) f_i \in \mathcal{M}_i$ ya que $\mathcal{M}_i$ es invariante. Puesto que la suma de los espacios $\mathcal{M}_i$ es directa, concluimos que $f_i = M(\sigma) f_i \quad \forall \sigma \in G, 1 \leq i \leq h$. Si $i \geq n$, $\mathcal{M}_i$ no puede contener un vector $f_i \neq 0$ con esta propiedad ya que si así fuera, el subespacio de $\mathcal{M}_i$ generado por f_i sería invariante, y por ser $\mathcal{M}_i$ simple, este espacio sería $\mathcal{M}_i$, es decir, $\mathcal{M}_i$ sería de dimensión 1 y por lo tanto isomorfo a $\mathbb{C}$, ya que $M(\sigma)(\lambda f_i) = \lambda f_i, \lambda \in K$. Luego f es combinación lineal de $e_1, \dots, e_n$ y esto concluye la demostración. ////

Proposición 4.4 Sean Λ y P dos representaciones de un grupo G sobre un campo K algebraicamente cerrado, y supongamos que P es irreducible. Si Λ y $\Lambda \otimes P^*$ son semisimples, la multiplicidad de P en Λ es igual a la multiplicidad de la representación identidad en la representación $\Lambda \otimes P^*$.

Demostración.— Si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{B}$ son los espacios de representación correspondientes a Λ y P respectivamente, y $(\mathcal{J}_1, \Lambda_1), \dots, (\mathcal{J}_k, \Lambda_k)$ es una descomposición de $(\mathcal{L}, \Lambda)$ en representaciones simples, $(\mathcal{J} = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{J}_i)$, afirmamos que la representación Λ es equivalente a $\Lambda_1 + \dots + \Lambda_k$. En efecto, el isomorfismo $I: \mathcal{J} \rightarrow \prod_{i=1}^k \mathcal{J}_i$ definido por $I(l) = (l_1, l_2, \dots, l_k)$, donde

$\rho = \sum_{i=1}^n \rho_i$, satisface que $I \cdot N(\sigma) = (N_1 + N_2 + \dots + N_n)(\sigma) \cdot I$
 $\forall \sigma \in G$.

Por otro lado, $N \times P^*$ es equivalente a $(N_1 + \dots + N_n) \times P^*$,
 y esta a su vez es equivalente a $N_1 \times P^* + \dots + N_n \times P^*$; de
 donde $N \times P^*$ es equivalente a $N_1 \times P^* + \dots + N_n \times P^*$.

Consideremos la representación $N_i \times P^*$, $1 \leq i \leq n$. El es-
 pacio de todos los mapeos lineales $N: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{I}_i$ es el espacio
 de representación de $N_i \times P^*$; $N_i \times P^*(\sigma) A = (N_i(\sigma)) A (P(\sigma))^{-1}$
 Si $N_i \times P^*(\sigma) A = A$, se tiene que $N_i(\sigma) A = A P(\sigma)$,
 puesto que N_i y P son irreducibles, el lema de Schur nos ase-
 gura que la igualdad anterior sucede con $A \neq 0$ si y sólomen-
 te si N_i es equivalente a P .

Supongamos que esto pasa; luego dada una base $\{e_1, \dots, e_n\}$
 de $\mathcal{B}$, $\{Ae_1, \dots, Ae_n\}$ es una base de $\mathcal{I}_i$, y co estas bases la
 matriz correspondiente a A es la matriz identidad. De modo -
 que si $\tilde{N}_i$, $\tilde{P}$ son las representaciones matriciales corres-
 pondientes a N_i y P respectivamente, bajo estas bases, se
 tiene que $\tilde{N}_i(\sigma) = \tilde{P}(\sigma) \forall \sigma \in G$, es decir $\tilde{N}_i = \tilde{P}$. Si
 N es algún mapeo lineal de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{I}_i$ tal que $N_i(\sigma) N =$
 $= N P(\sigma)$ se tendría que la matriz asociada a N bajo las ba-
 ses dadas conmuta con la matriz $\tilde{P}(\sigma) \forall \sigma \in G$. Por la -
 proposición 4.2 concluimos que la matriz asociada a N es un
 multiplo de la matriz identidad, es decir de la matriz asocia-

da al mapeo lineal A , luego A' es un múltiplo de A .

De este modo, concluimos que la representación identidad es de multiplicidad igual a uno en $\Lambda_i \otimes P^*$ si y sólo si Λ_i y P son equivalentes, lo que demuestra la proposición.

////

§ 5 RELACIONES DE ORTOGONALIDAD

Nuestro propósito en este párrafo es demostrar el teorema de ortogonalidad de I. Schur que nos asegura que si f, g son coeficientes en dos representaciones irreducibles no equivalentes, entonces $\int_G f(\sigma) g(\sigma^{-1}) d\sigma = 0$, y si f, g son coeficientes de la misma representación irreducible de grado d , entonces $\int_G f(\sigma) \bar{g}(\sigma^{-1}) d\sigma = d^{-1}$ si $f = g$ y $\int_G f(\sigma) \bar{g}(\sigma^{-1}) d\sigma = 0$ si $f \neq g$. Toda la discusión previa está encaminada a este objetivo.

Sea G un grupo compacto, y sea $\tilde{M}$ una representación

matricial de grado d de G sobre el campo de los complejos.

Mostraremos ahora que es posible calcular la multiplicidad de la representación identidad E en la representación $\tilde{M}$.

Denotaremos por $\tilde{M}_0 = \int_G \tilde{M}(\sigma) d\sigma$ a la matriz cuyos coeficientes son las integrales de los coeficientes de $\tilde{M}(\sigma)$.

Podemos considerar a $\tilde{M}$ como la forma matricial de una representación abstracta, la cual denotaremos por $\mathcal{M}$. Sea $\mathcal{M}$ su espacio de representación y sea $\{e_1, \dots, e_d\}$ la base de $\mathcal{M}$ que da lugar a la forma matricial $\tilde{M}$. Del mismo modo, podemos considerar a $\tilde{M}_0$ como un endomorfismo de $\mathcal{M}$ al cual denotaremos por M_0 .

Si $e \in \mathcal{M}$, aseguramos que $M(\sigma)M_0e = M_0e$.

$$\begin{aligned} \text{En efecto, si } e &= \sum_{i=1}^d a_i e_i, \quad M(z)e = \sum_{j=1}^d a_j M(z) e_j = \\ &= \sum_i a_i \sum_j m_{ij}(z) e_j = \sum_i \left(\sum_j a_j m_{ij}(z) \right) e_i = \sum_i u_i(z) e_i \\ & \quad (\tilde{M}(z) = (m_{ij}(z))). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De este modo, } M_0 e &= \sum_i a_i \sum_j \left(\int_G m_{ij}(z) dz \right) e_j = \\ &= \sum_i \sum_j \left(\int_G a_j m_{ij}(z) dz \right) e_i = \sum_i \left(\sum_j \int_G a_j m_{ij}(z) dz \right) e_i = \\ &= \sum_i \left(\int_G \sum_j a_j m_{ij}(z) dz \right) e_i = \sum_i \int_G u_i(z) dz e_i; \text{ luego } M(\sigma)M_0e = \\ &= \sum_i \left(\int_G u_i(z) dz \right) M(\sigma) e_i = \sum_i \left(\int_G u_i(z) dz \right) \sum_k m_{ki}(\sigma) e_k = \\ &= \sum_k \left(\sum_i \int_G u_i(z) m_{ki}(\sigma) dz \right) e_k = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_k \left(\int_G \sum_i m_{ki}(\sigma) u_i(z) dz \right) e_k \quad . \text{ Pero tenemos que} \\
\sum_i u_i(z) \sum_k m_{ki}(\sigma) e_k &= \sum_i u_i(z) M(\sigma) e_i = M(\sigma) \sum_i u_i(z) e_i = \\
&= M(\sigma) M(z) e = M(\sigma z) e = \sum_i u_i(\sigma z) e_i \quad .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Por otro lado tenemos que } \sum_i u_i(z) \sum_k m_{ki}(\sigma) e_k &= \\
&= \sum_k \left(\sum_i m_{ki}(\sigma) u_i(z) \right) e_k \quad , \text{ luego } \sum_k \left(\sum_i m_{ki}(\sigma) u_i(z) \right) e_k = \\
&= \sum_i u_i(\sigma z) e_i \quad , \text{ y por lo tanto } M(\sigma) M_0 e = \\
&= \sum_k \left(\int_G \sum_i m_{ki}(\sigma) u_i(z) dz \right) e_k = \sum_i \int_G u_i(\sigma z) dz e_i = \\
&= \sum_i \int_G u_i(z) dz e_i = M_0 e \quad , \text{ lo que demuestra la afirmación.}
\end{aligned}$$

Recíprocamente, si f es cualquier vector tal que $M(\sigma)f = f$ para todo $\sigma \in G$, veremos que $M_0 f = f$.

$$\begin{aligned}
\text{si } f &= \sum_j c_j e_j = M(\sigma)f = \sum_j c_j M(\sigma) e_j = \sum_j c_j \sum_i m_{ij}(\sigma) e_i = \\
&= \sum_i \left(\sum_j c_j m_{ij}(\sigma) \right) e_i \quad , \text{ luego } c_i = \sum_j c_j m_{ij}(\sigma) \quad \forall \sigma \in G, \\
\text{pero } c_i &= \int_G c_i d\sigma = \int_G \sum_j c_j m_{ij}(\sigma) d\sigma \quad , \text{ luego } M_0 f = \\
&= \sum_i \int_G \sum_j c_j m_{ij}(\sigma) d\sigma e_i = \sum_i c_i e_i = f.
\end{aligned}$$

Se concluye que los vectores $f \in \mathcal{M}$ tales que $M(\sigma)f = f$ son exactamente aquellos vectores de la forma $M_0 e$, $e \in \mathcal{M}$. En otras palabras, la multiplicidad de la representación identidad en M es igual al rango de la matriz $\tilde{M}_0$.

Sean ahora Λ y P dos representaciones irreducibles

de G en el campo de los números complejos. Sean

$$M(\sigma) = \Lambda(\sigma) \times P^*(\sigma)$$

$$M_0 = \int_G M(\sigma) d\sigma$$

Sabemos que la representación identidad E es de multiplicidad igual a cero en M si Λ no es equivalente a P , y que E es de multiplicidad uno en M si Λ es equivalente a P . De este modo, M_0 es la matriz nula en el primer caso, y una matriz de rango uno en el segundo caso.

Los coeficientes de $M(\sigma)$ son productos de los coeficientes de $\Lambda(\sigma)$ por los coeficientes de $P(\sigma^{-1})$. Se concluye que si Λ y P no son equivalentes, entonces

$$\int_G a(\sigma) b(\sigma^{-1}) d\sigma = 0$$

donde $a(\sigma)$, $b(\sigma)$ son coeficientes arbitrarios de $\Lambda(\sigma)$ y $P(\sigma)$ respectivamente.

Investigaremos ahora el caso en que Λ y P son equivalentes. Supongamos que $\Lambda = P$, y que Λ es una representación por matrices unitarias. (Sabemos que en cualquier caso Λ es equivalente a una representación por matrices unitarias). Sea $\mathcal{L}$ el espacio de representación de Λ , y sea $\{e_1, \dots, e_d\}$ la base de $\mathcal{L}$ que da lugar a la representación matricial Λ .

Podemos considerar al espacio $\mathcal{M}$ de mapeos lineales de $\mathcal{L}$ en si mismo un espacio de representación de $\Lambda \otimes P^* = \Lambda \otimes \Lambda^* = M$. Sea θ_{ij} el elemento de $\mathcal{M}$ que mapea a e_j en e_i , y a $e_{j'}$ en cero si $j \neq j'$. Entonces la matriz que representa a θ_{ij} tiene 1 en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna, y cero en cualquier otra parte. De este modo la matriz $\theta_{ij} \wedge (\sigma^{-1})$ tendrá en el i-ésimo renglón coeficientes de la forma $a_{j\lambda}(\sigma^{-1})$, $\lambda = 1, 2, \dots, d$ y cero en cualquier otra parte, por lo que la matriz $\wedge(\sigma) \theta_{ij} \wedge (\sigma^{-1}) = M(\sigma) \theta_{ij}$ tendrá como coeficiente en el k-ésimo renglón y la l-ésima columna a $a_{kl}(\sigma) a_{j\lambda}(\sigma^{-1})$, y al expresarla como combinación lineal de los elementos básicos θ_{ij} de $\mathcal{M}$, tenemos que

$$M(\sigma) \theta_{ij} = \wedge(\sigma) \theta_{ij} \wedge (\sigma^{-1}) = \sum_{\lambda, l} a_{kl}(\sigma) a_{j\lambda}(\sigma^{-1}) \theta_{kl}$$

$$\text{si } \wedge(\sigma) = (a_{\lambda\mu}(\sigma)).$$

Sea θ_1 el mapeo identico de $\mathcal{L}$ en si mismo, es decir, $\theta_1 = \sum \theta_{ii}$. Sabemos que los multiplos escalares de θ_1 son - los unicos mapeos de $\mathcal{L}$ en si mismo que conmutan con $\wedge(\sigma)$

$\forall \sigma \in G$. Se concluye que $M_\sigma \theta$ es un multiplo escalar de θ_1 para $\theta \in \mathcal{M}$, ya que $M(\sigma) M_\sigma \theta = \wedge(\sigma) M_\sigma \theta \wedge (\sigma^{-1}) = M_\sigma \theta$, luego $\wedge(\sigma) M_\sigma \theta = M_\sigma \theta \wedge(\sigma)$. De manera que

$$M_\sigma \theta_{ij} = \sum_{\lambda, l} \left(\int_G a_{kl}(\sigma) a_{j\lambda}(\sigma^{-1}) d\sigma \right) \theta_{kl} = c_{ij} \sum_{\lambda, l} \theta_{kl} = \sum_{\lambda, l} c_{ij} \theta_{kl}$$

$$\text{luego} \quad \int_G a_{ki}(\sigma) a_{jl}(\sigma^{-1}) d\sigma = \delta_{kl} c_{ij}$$

donde c_{ij} es una constante que no depende de k .

Sabemos que $\int_G f(\sigma) d\sigma = \int_G f(\sigma^{-1}) d\sigma$ para cualquier función continua f sobre G , por lo tanto que

$$\delta_{ij} c_{kl} = \int_G a_{jl}(\sigma) a_{ki}(\sigma^{-1}) d\sigma = \delta_{kl} c_{ij}$$

si $k=l$, $c_{ij} = \delta_{ij} c_{kk}$ para todo k , luego $c_{ij} = \delta_{ij} c$, por lo tanto

$$\int_G a_{ki}(\sigma) a_{jl}(\sigma^{-1}) d\sigma = \delta_{kl} \delta_{ij} c$$

El valor de la constante c puede determinarse puesto que

$$M(\sigma)\theta_i = \Lambda(\sigma)\theta_i, \Lambda(\sigma^{-1}) = \Lambda(\sigma)^{-1} = \theta_i, \forall \sigma \in G,$$

y los únicos elementos $\theta \in \mathcal{M}$ tales que $M(\sigma)\theta = \theta \forall \sigma \in G$

son de la forma $M_0\psi$ con $\psi \in \mathcal{M}$, luego $M_0\theta_i = \theta_i$, es decir

$$\begin{aligned} \theta_i &= \sum_{s=1}^d \theta_{is} = M_0\theta_i = \sum_s M_{0s} \theta_{is} = \sum_s \left[\sum_{kl} \left(\int_G a_{ks}(\sigma) a_{il}(\sigma^{-1}) d\sigma \right) \theta_{kl} \right] = \\ &= \sum_s \left[\sum_{kl} \delta_{kl} c \theta_{kl} \right] = \sum_s \left(\sum_k c \theta_{kk} \right) = \sum_k \left(\sum_s c \right) \theta_{kk} = \sum_k dc \theta_{kk} \end{aligned}$$

por lo que $dc = 1$, y de aquí, $c = d^{-1}$.

De manera que si Λ es una representación por matrices unitarias tenemos que $a_{ji}(\sigma^{-1}) = \bar{a}_{ij}(\sigma)$, luego

$$\int_G a_{ki}(\sigma) \bar{a}_{jl}(\sigma^{-1}) d\sigma = \delta_{kl} \delta_{ij} d^{-1}$$

Definición 5.1 Sea G un grupo compacto. Cualquier función sobre G , la cual aparece como coeficiente de alguna representación irreducible de G por matrices unitarias es llamada una función representativa simple sobre G . Cualquier combinación lineal de funciones representativas simples es llamada una función representativa.

De esta manera, hemos demostrado el siguiente teorema

Teorema 5.1 (De ortogonalidad de I. Schur) Sean f y g dos funciones representativas simples sobre un grupo compacto G . Si f y g aparecen como coeficientes en dos representaciones irreducibles no equivalentes, tenemos que

$$\int_G f(\sigma) g(\sigma^{-1}) d\sigma = 0$$

Si f y g son coeficientes de la misma representación irreducible de grado d , la integral

$$\int_G f(\sigma) \overline{g}(\sigma^{-1}) d\sigma$$

es igual a d^{-1} si $f = g$, y a cero si $f \neq g$.

§ 6 LOS CARACTERES

En este párrafo, aparte de las definiciones correspondientes se da una forma de determinar la multiplicidad de una representación irreducible de un grupo compacto en una representación cualesquiera del mismo, haciendo uso de los caracteres - de ambas representaciones. (Corolario 1 a Prop. 6.3). Para este fin, se demuestran algunos resultados previos.

Definición 6.1 Sea P una representación matricial de un grupo G . El caracter de la representación P se define como la función χ sobre G que asocia a cada $\sigma \in G$, la traza de la matriz $P(\sigma)$.

Proposición 6.1 Dos representaciones equivalentes tienen el mismo caracter. Si σ y τ son elementos conjugados, es decir, $\sigma = \rho \tau \rho^{-1}$ para algún $\rho \in G$, y si χ es el caracter de cualquier representación de G , tenemos que $\chi(\sigma) = \chi(\tau)$.

Demostración.- Sean $\alpha = (a_{ij})$, $\beta = (b_{kl})$ dos matrices de grado d . $\alpha\beta = (c_{ik})$, donde $c_{ik} = \sum_{j=1}^d a_{ij} b_{jk}$, luego, - sus elementos diagonales son de la forma $c_{ii} = \sum_j a_{ij} b_{ji}$.

$\beta\alpha = (d_{kl})$ donde $d_{kl} = \sum_j b_{kj} a_{jl}$, y sus elementos diagonales son de la forma $d_{ii} = \sum_j b_{ij} a_{ji}$, y debido a que

$$\begin{aligned} \text{Tr } \alpha \beta &= \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji} = \sum_i \sum_j b_{ji} a_{ij} = \sum_j \sum_i b_{ji} a_{ij} = \\ &= \sum_j \sum_i b_{ji} a_{ij} = \text{Tr } \beta \alpha, \text{ es decir, las trazas de } \alpha \beta \text{ y } \beta \alpha \\ &\text{coinciden. De modo que si } P_1 \text{ y } P_2 \text{ son representaciones equi-} \\ &\text{valentes, existe una matriz regular } \delta \text{ tal que } P_1(\sigma) = \\ &= \delta P_2(\sigma) \delta^{-1}, \text{ luego } \text{Tr } P_1(\sigma) = \text{Tr}(\delta P_2(\sigma) \delta^{-1}) = \\ &= \text{Tr}(P_2(\sigma) \delta^{-1} \delta) = \text{Tr } P_2(\sigma), \text{ por lo tanto } P_1 \text{ y } P_2 \text{ tienen} \\ &\text{el mismo caracter.} \end{aligned}$$

Si σ y τ son conjugados, $P(\sigma) = P(\rho \tau \rho^{-1}) =$
 $= P(\rho) P(\tau) P(\rho^{-1}),$ luego $\chi(\sigma) = \text{Tr } P(\sigma) =$
 $= \text{Tr}(P(\rho) P(\tau) P(\rho^{-1})) = \text{Tr}(P(\tau) P(\rho^{-1}) P(\rho)) = \text{Tr } P(\tau) = \chi(\tau),$
 lo que finaliza la demostración. ////

Definición 6.2 Una clase de representaciones de un grupo G , es el conjunto de todas las representaciones que son equivalentes a una de ellas.

Se sigue, de la proposición 6.1 que a una clase de representaciones de un grupo G le corresponde una función definida sobre G , es decir, el caracter de cualquier representación de la clase. Esta función es llamada el caracter de la clase.

Sean R_1 y R_2 dos clases de representaciones de un grupo G sobre un campo K . De lo que hemos visto en §3 podemos concluir que

1.- La representación estrella P^* de una representación $P \in$

$\in \mathcal{R}_1$, pertenece a la clase $\mathcal{R}_1^*$, la cual depende solamente de $\mathcal{R}_1$. En efecto, si P_1, P_2 son representaciones en $\mathcal{R}_1$ existe una matriz regular J , tal que $P_1(\sigma) = JP_2(\sigma)J^{-1}$, luego $P_1^*(\sigma) = {}^t P_1(\sigma^{-1}) = {}^t (JP_2(\sigma^{-1})J^{-1}) = {}^t J^{-1} {}^t P_2(\sigma^{-1}) {}^t J = ({}^t J)^{-1} P_2^*(\sigma) {}^t J$, luego P_1^* es equivalente a P_2^* .

2.- La suma $P_1 \dot{+} P_2$ de una representación $P_1 \in \mathcal{R}_1$ y una representación $P_2 \in \mathcal{R}_2$ pertenece a la clase $\mathcal{R}_1 \dot{+} \mathcal{R}_2$, la cual depende solamente de $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$. Más aún $\mathcal{R}_1 \dot{+} \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_2 \dot{+} \mathcal{R}_1$. En efecto, vimos que si P_1 es equivalente a P_1' y P_2 a P_2' , entonces $P_1 \dot{+} P_2$ es equivalente a $P_1' \dot{+} P_2'$, y que $P_1 \dot{+} P_2$ es equivalente a $P_2 \dot{+} P_1$.

3.- El producto de Kronecker $P_1 \times P_2$ pertenece a la clase $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$, la cual depende solamente de $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$. Aún más, $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_2 \times \mathcal{R}_1$.

Las operaciones de suma y multiplicación de Kronecker son asociativas en el dominio de las clases de representaciones, y además, la multiplicación de Kronecker es distributiva con respecto a la suma. Sin embargo, las clases de representaciones no forman un anillo, porque la sustracción es generalmente imposible de definir.

Denotaremos por $\chi_{\mathcal{R}}$ al caracter de una clase de representaciones $\mathcal{R}$.

Proposición 6.2 Si R_1 y R_2 son dos clases de representaciones, entonces $\chi_{R_1+R_2} = \chi_{R_1} + \chi_{R_2}$, $\chi_{R_1 \otimes R_2} = \chi_{R_1} \chi_{R_2}$

Demostración.- Si α y β son matrices de grado d_1 y d_2 respectivamente, es fácil ver que $\text{Tr}(\alpha + \beta) = \text{Tr} \alpha + \text{Tr} \beta$ y por tanto que $\chi_{R_1+R_2} = \chi_{R_1} + \chi_{R_2}$.

Veamos que $\text{Tr} \alpha \otimes \beta = \text{Tr} \alpha \text{Tr} \beta$.

$\alpha \otimes \beta = (C_{pq})$ donde $C_{i+d_1(j-1), k+d_1(l-1)} = a_{ij} b_{kl}$ y si $i+d_1(j-1) = k+d_1(l-1)$, forzosamente $j=k$, $l=j$ ya que $i-k = d_1(l-j)$ y esta igualdad solo es posible cuando ambos miembros son cero. De manera que los elementos diagonales de la matriz $\alpha \otimes \beta$ son los elementos

$$C_{i+d_1(j-1), i+d_1(j-1)} = a_{ij} b_{jj}, \text{ y por lo tanto}$$

$$\text{Tr} \alpha \otimes \beta = \sum_{i,j} a_{ij} b_{jj} = \left(\sum_i a_{ii} \right) \left(\sum_j b_{jj} \right) = \text{Tr} \alpha \text{Tr} \beta$$

es decir, $\chi_{R_1 \otimes R_2} = \chi_{R_1} \chi_{R_2}$. ////

Si una clase de representaciones contiene a una representación irreducible (respectivamente semisimple), cada representación de la clase es irreducible (respectivamente semisimple).

Cada clase semisimple $\mathcal{R}$ puede representarse de la forma $\sum \chi_i \mathcal{R}_i$, donde los χ_i son enteros no negativos, y los

R_i' son clases irreducibles. El número χ_i es la multiplicidad de la clase R_i en la clase R , es decir, la multiplicidad de una representación de la clase R_i en una representación de la clase R . Este número depende solamente de las clases R y R_i .

Proposición 6.3 Si R_1 y R_2 son dos clases irreducibles de representaciones de un grupo compacto G en el campo de los números complejos, entonces la integral

$$\int_G \chi_{R_1}(\sigma) \overline{\chi_{R_2}(\sigma)} d\sigma$$

es igual a cero si $R_1 \neq R_2$, e igual a uno si $R_1 = R_2$.

Demostración.— Sean $P_1 \in R_1$, $P_2 \in R_2$. Si $P_1(\sigma) = (a_{ij}(\sigma))$, $P_2(\sigma) = (b_{hk}(\sigma))$; $\chi_{R_1}(\sigma) = \sum_i a_{ii}(\sigma)$, $\chi_{R_2}(\sigma) = \sum_k b_{kk}(\sigma)$, luego $\chi_{R_1}(\sigma) \chi_{R_2}(\sigma) = \left(\sum_i a_{ii}(\sigma) \right) \left(\sum_k b_{kk}(\sigma) \right)$,

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_G \chi_{R_1}(\sigma) \overline{\chi_{R_2}(\sigma)} d\sigma &= \int_G \left(\sum_i a_{ii}(\sigma) \right) \overline{\left(\sum_k b_{kk}(\sigma) \right)} d\sigma = \\ &= \int_G \left(\sum_i a_{ii}(\sigma) \right) \left(\sum_k \overline{b_{kk}(\sigma)} \right) d\sigma = \int_G \sum_{i,k} a_{ii}(\sigma) \overline{b_{kk}(\sigma)} d\sigma = \\ &= \sum_{i,k} \int_G a_{ii}(\sigma) \overline{b_{kk}(\sigma)} d\sigma, \text{ y el teorema 5.1 nos asegura que es-} \end{aligned}$$

tas integrales son cero si P_1 y P_2 no son equivalentes, es

decir, si $R_1 \neq R_2$. Si $R_1 = R_2$, $\chi_{R_1} = \chi_{R_2}$, luego

$$\begin{aligned}
\int_G \chi_{R_i}(\sigma) \overline{\chi_{R_i}}(\sigma) d\sigma &= \int_G \chi_{R_i}(\sigma) \overline{\chi_{R_i}}(\sigma) d\sigma = \\
&= \int_G \left(\sum_i a_{ii}(\sigma) \right) \left(\sum_k \overline{a_{kk}}(\sigma) \right) d\sigma = \int_G \sum_{i,k} a_{ii}(\sigma) \overline{a_{kk}}(\sigma) d\sigma = \\
&= \sum_{i,k} \int_G a_{ii}(\sigma) \overline{a_{kk}}(\sigma) d\sigma \text{ y el mismo teorema nos asegura que} \\
&\int_G a_{ii}(\sigma) \overline{a_{kk}}(\sigma) d\sigma = d^{-1} \text{ si } i=k \text{ y a cero si } i \neq k, \text{ por}
\end{aligned}$$

lo tanto

$$\sum_{i,k} \int_G a_{ii}(\sigma) \overline{a_{kk}}(\sigma) d\sigma = \sum_i \int_G a_{ii}(\sigma) \overline{a_{ii}}(\sigma) d\sigma = d d^{-1} = 1,$$

lo que finaliza la demostración.

////

Corolario 1 La multiplicidad de una clase irreducible R_i de representaciones de un grupo compacto en una clase R es igual a

$$\int_G \chi_R(\sigma) \overline{\chi_{R_i}}(\sigma) d\sigma$$

Demostración.— Si escribimos $R = \sum_i x_i R_i$, claramente

$$\begin{aligned}
\chi_R &= \sum_i x_i \chi_{R_i}, \text{ luego } \int_G \chi_R(\sigma) \overline{\chi_{R_i}}(\sigma) d\sigma = \\
&= \int_G \sum_i x_i \chi_{R_i}(\sigma) \overline{\chi_{R_i}}(\sigma) d\sigma = \sum_i x_i \int_G \chi_{R_i}(\sigma) \overline{\chi_{R_i}}(\sigma) d\sigma = \\
&= x_i \text{ si } R_i = R_i, \text{ lo que demuestra el corolario.}
\end{aligned}$$

////

Corolario 2. Dos clases de representaciones de un grupo compacto coinciden si y sólo si tienen el mismo carácter.

Demostración.- Ya vimos que si dos clases de representaciones coinciden, tienen el mismo caracter (Proposición 6.1).

El corolario 1 muestra que si dos clases de representaciones R y R' tienen el mismo caracter, la multiplicidad de cada clase irreducible en R es la misma que en R' y recíprocamente, es decir que $R = R'$. ////.

§ 7 EL ANILLO REPRESENTATIVO

El anillo representativo juega el papel de principal importancia en la teoría de representaciones. En este párrafo se tratan algunos resultados acerca del anillo representativo de un grupo compacto G . Entre los que consideramos de mayor importancia esta el hecho de que si G admite una representación fiel P_ρ , entonces los coeficientes de P_ρ y $\overline{P}_\rho$ forman un sistema de generadores del anillo representativo de G . En particular, si G es de Lie, sin hacer uso de la hipótesis -

de que G admite una representación fiel, se demuestra que existe una representación P de G tal que los coeficientes de P y $\bar{P}$ forman un sistema de generadores del anillo representativo de G .

Definición 7.1 El anillo representativo de un grupo compacto G es el anillo generado sobre el campo de los números complejos por los coeficientes de todas las representaciones de G . En otras palabras, los elementos del anillo representativo son las funciones complejas sobre G que pueden ser expresadas como polinomios en los coeficientes de las representaciones de G .

Más generalmente, sea E cualquier conjunto de representaciones de G . Denotaremos por $\theta(E)$ al anillo generado por los coeficientes de las representaciones pertenecientes a E .

Si E_1, E_2 son dos conjuntos de representaciones, encontraremos ahora bajo qué condiciones se da la igualdad

$$\theta(E_1) = \theta(E_2).$$

Definición 7.2 Decimos que un conjunto de representaciones es cerrado si satisface las siguientes condiciones

- 1) Si $P_1, P_2 \in E$, entonces $P_1 + P_2, P_1 \times P_2 \in E$.
- 2) Si una representación irreducible P es de multiplici-

dad mayor que cero en una representación de $\mathcal{E}$, entonces $P \in \mathcal{E}$.

3) Si P es equivalente a una representación de $\mathcal{E}$, entonces $P \in \mathcal{E}$.

Sea $\mathcal{E}_1$ cualquier conjunto de representaciones de $\mathcal{G}$. Consideremos el conjunto F de representaciones irreducibles de multiplicidad mayor que cero en representaciones de la forma $\Lambda_1 \chi \cdots \chi \Lambda_h$, $\Lambda_i \in \mathcal{E}_1$ con $1 \leq i \leq h$. Si P_1 y P_2 pertenecen a F , es decir, P_1 es de multiplicidad mayor que cero en una representación de la forma $\Lambda_1 \chi \cdots \chi \Lambda_h$, y P_2 es de multiplicidad mayor que cero en una representación de la forma $\Lambda'_1 \chi \cdots \chi \Lambda'_k$, $\Lambda_i, \Lambda'_j \in \mathcal{E}_1$, $1 \leq i \leq h$, $1 \leq j \leq k'$. De este modo $P_1 \chi P_2$ es de multiplicidad mayor que cero en $\Lambda_1 \chi \cdots \chi \Lambda_h \chi \Lambda'_1 \chi \cdots \chi \Lambda'_k$, entonces cada representación irreducible de multiplicidad mayor que cero en $P_1 \chi P_2$ es de multiplicidad mayor que cero en $\Lambda_1 \chi \cdots \chi \Lambda_h \chi \Lambda'_1 \chi \cdots \chi \Lambda'_k$, es decir está en F .

Sea $\mathcal{E}$ el conjunto de representaciones que son equivalentes a representaciones a representaciones de la forma

$$P_1 + P_2 + \cdots + P_k, P_j \in F, 1 \leq j \leq k$$

Aseguramos que $\mathcal{E}$ es el mínimo conjunto de representaciones cerrado que contiene a $\mathcal{E}_1$. En efecto, si $\Lambda \in \mathcal{E}_1$, $\Lambda = \Lambda_1 + \cdots + \Lambda_h$, donde Λ_i es simple ($1 \leq i \leq h$), de multi-

plicidad mayor que cero en Λ , de modo que $\Lambda_i \in F$. Por lo tanto $\Lambda \in E$, es decir $E_1 \subset E$.

1) Si $\Lambda_1, \Lambda_2 \in E$, Λ_1 es equivalente a una representación de la forma $P_1 + \dots + P_n$, Λ_2 es equivalente a una representación de la forma $P'_1 + \dots + P'_n$, $P_i, P'_j \in F, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$; por lo que $\Lambda_1 + \Lambda_2$ es equivalente a la representación $P_1 + P_2 + \dots + P_n + P'_1 + \dots + P'_n$, es decir $\Lambda_1 + \Lambda_2 \in E$.

$\Lambda_1 \times \Lambda_2$ es equivalente a $(P_1 + \dots + P_n) \times (P'_1 + \dots + P'_n) =$
 $= \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} P_i \times P'_j$, y como $P_i \times P'_j$ es la suma de representaciones simples de multiplicidad mayor que cero en $P_i \times P'_j$, es decir, de representaciones en F , concluimos que $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ es equivalente a una suma de representaciones en F , por lo que

$$\Lambda_1 \times \Lambda_2 \in E.$$

2) Si P es una representación irreducible de multiplicidad mayor que cero en una representación de E , claramente $P \in F$, luego $P \in E$.

3) Claramente si P es una representación en E y P' es una representación equivalente a P , $P' \in E$.

De manera que E es cerrado.

Si E' es un cerrado que contiene a E_1 , por las propiedades 1) y 2) de cerrados, E' contiene a F y por las propiedades 1) y 3), E' contiene a E , lo cual confirma nuestra

afirmación.

Proposición 7.1 Sea $\mathcal{E}_1$ un conjunto de representaciones de $\mathcal{G}$, y sea $\mathcal{E}$ el mínimo conjunto de representaciones cerrado que contiene a $\mathcal{E}_1$. El anillo $\mathcal{O}(\mathcal{E}_1)$ coincide con el conjunto Λ de todas las combinaciones lineales con coeficientes complejos de coeficientes de representaciones irreducibles pertenecientes a $\mathcal{E}$.

Demostración.— Sea P una representación irreducible en $\mathcal{E}$. Entonces existen representaciones $\Lambda_1, \dots, \Lambda_h \in \mathcal{E}_1$ tales que P es de multiplicidad mayor que cero en $\Lambda_1 \otimes \Lambda_2 \otimes \dots \otimes \Lambda_h$, es decir, existe una matriz regular P tal que

$$P(\Lambda_1 \otimes \dots \otimes \Lambda_h)P^{-1} = P \oplus N$$

donde N es alguna representación. Cada coeficiente de la representación $\Lambda_1 \otimes \dots \otimes \Lambda_h$ es un producto de coeficientes de las representaciones $\Lambda_1, \dots, \Lambda_h$ y por lo tanto pertenece a $\mathcal{O}(\mathcal{E}_1)$. Se concluye que los coeficientes de $P \oplus N$ y en particular los de P pertenecen a $\mathcal{O}(\mathcal{E}_1)$, luego $\Lambda \subset \mathcal{O}(\mathcal{E}_1)$.

Si Λ es cualquier representación perteneciente a $\mathcal{E}$, los coeficientes de Λ pertenecen a Λ ya que $\Lambda = \delta(P_1 \oplus \dots \oplus P_R)\delta^{-1}$, donde δ es una matriz regular cuyos coeficientes son números complejos, y $P_1, P_2, \dots, P_R$ son sim-

ples y pertenecen a $\mathcal{E}$.

Si P y P' son dos representaciones irreducibles pertenecientes a $\mathcal{E}$, tenemos que $P \chi P' \in \mathcal{E}$. Se sigue que el producto de cualquier coeficiente de P por cualquier coeficiente de P' pertenece a A , de lo cual deducimos inmediatamente que A es un anillo. Puesto que $A \subset \mathcal{O}(\mathcal{E}_1)$ y cada coeficiente de una representación de $\mathcal{E}_1$ pertenece a A , se concluye que $A = \mathcal{O}(\mathcal{E}_1)$.

////

Proposición 7.2 Sean $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ dos conjuntos de representaciones de G . Entonces $\mathcal{O}(\mathcal{E}_1) = \mathcal{O}(\mathcal{E}_2)$ si y sólo si el mínimo cerrado que contiene a $\mathcal{E}_1$ es igual al mínimo cerrado que contiene a $\mathcal{E}_2$.

Demostración.- Si el mínimo cerrado que contiene a $\mathcal{E}_1$ es igual al mínimo cerrado que contiene a $\mathcal{E}_2$, la proposición 7.1 nos asegura que $\mathcal{O}(\mathcal{E}_1) = \mathcal{O}(\mathcal{E}_2)$.

Recíprocamente, sea $\mathcal{O}(\mathcal{E}_1) = \mathcal{O}(\mathcal{E}_2)$. Supongamos por un momento que existe una representación irreducible P en el mínimo cerrado que contiene a $\mathcal{E}_1$ y no en el mínimo cerrado que contiene a $\mathcal{E}_2$. Sea f un coeficiente distinto de cero de P . Si g es cualquier coeficiente de una representación irreducible perteneciente al mínimo cerrado que contiene a $\mathcal{E}_2$, las relaciones de ortogonalidad nos aseguran que

$$\int_{\mathcal{G}} g(\sigma) \bar{f}(\sigma) d\sigma = 0$$

y esta fórmula se cumple para cualquier $g \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_1)$ (Proposición 7.1). Puesto que

$$\int_{\mathcal{G}} f(\sigma) \bar{f}(\sigma) d\sigma > 0$$

la función f no pertenece a $\mathcal{O}(\mathcal{E}_1)$, luego $\mathcal{O}(\mathcal{E}_1) \neq \mathcal{O}(\mathcal{E}_2)$, lo que contradice nuestra hipótesis. Concluimos que si $\mathcal{O}(\mathcal{E}_1) = \mathcal{O}(\mathcal{E}_2)$, los mínimos cerrados que contienen a $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ respectivamente, son iguales. ////

Definición 7.3 Decimos que un conjunto $\mathcal{E}$ de representaciones de $\mathcal{G}$ contiene suficientes representaciones si el mínimo conjunto de representaciones cerrado que contiene a $\mathcal{E}$ es el conjunto de todas las representaciones de $\mathcal{G}$.

A partir de la proposición 7.2 concluimos que un conjunto $\mathcal{E}$ de representaciones tiene suficientes representaciones si $\mathcal{O}(\mathcal{E})$ es todo el anillo representativo. Más aún, se concluye de la demostración a esta proposición, que si $\mathcal{E}$ no contiene suficientes representaciones, existe una representación irreducible P de $\mathcal{G}$ tal que si f es un coeficiente de P y $g \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$, entonces

$$\int_{\mathcal{G}} g(\sigma) \bar{f}(\sigma) d\sigma = 0$$

Definición 7.4 Una representación P de G se dice que es fiel si es inyectiva, es decir, si mapea a G continua e inyectivamente sobre un subgrupo G_1 del grupo topológico $GL(d, \mathbb{C})$, donde d es el grado de P .

En $GL(d, \mathbb{C})$ se considera la topología que hace del mapeo $\psi: GL(d, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^{d^2}$ definido por $\psi((a_{ij})) = (b_1, \dots, b_{d^2})$, donde $b_{i+d(j-1)} = a_{ij}$, un homeomorfismo.

Proposición 7.3 Si G admite una representación fiel P_0 , el conjunto $\{P_0, \overline{P_0}\}$ contiene suficientes representaciones.

Denotaremos por d_0 el grado de P_0 y $P_0(\sigma) = (x_{ij}(\sigma))$

Antes de dar la demostración veamos el siguiente

Lema.- Sea f una función continua sobre G , y sea a un número real mayor que cero. El anillo generado por las $2d_0^2$ funciones $x_{ij}(\sigma)$ y $\overline{x_{ij}}(\sigma)$ contiene una función f_1 tal que

$$|f(\sigma) - f_1(\sigma)| \leq a \quad \text{para todo } \sigma \in G.$$

Demostración.- Denotaremos por $y_{i+d_0(j-1)}(\xi)$, $y_{i+d_0(j-1)+d_0^2}(\xi)$ a las partes real e imaginaria de los coeficientes de la matriz ξ de grado d_0 , es decir, si c_{ij} es el coeficiente de en el i -ésimo renglón y la j -ésima columna,

$$C_{ij} = y_{i+d_0(j-1)}(z) + \sqrt{-1} y_{i+d_0(j-1)+d_0^2}(z), \quad 1 \leq i, j \leq d_0$$

La representación P_0 mapea a G_0 continua y univocamente sobre un subgrupo G_1 de $GL(d_0, \mathbb{C})$. Puesto que G_0 es compacto, P_0 es un homeomorfismo de G_0 en G_1 y G_1 es compacto. Que P_0 es homeomorfismo se deduce del hecho de que

$\psi: GL(d_0, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^{d_0^2}$ definida por $\psi((a_{ij})) = (b_1, \dots, b_{d_0^2})$, donde $b_{i+d_0(j-1)} = a_{ij}$ es homeomorfismo, y la imagen de cualquier cerrado en G_0 y por lo tanto compacto, bajo P_0 es compacta en G_1 ; luego al aplicarle ψ a esta imagen obtenemos un cerrado de $\mathbb{C}^{d_0^2}$, es decir, la imagen de cualquier cerrado en G_0 bajo P_0 es cerrada, por lo que P_0 es homeomorfismo.

Sea $\phi: \mathbb{C}^{d_0^2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2d_0^2}$ definida por $\phi(b_1, \dots, b_{d_0^2}) = (c_1, \dots, c_{2d_0^2})$, donde c_i es la parte real de b_i si $1 \leq i \leq d_0^2$, y c_i es la parte imaginaria de $b_{i-d_0^2}$ si $d_0^2 < i \leq 2d_0^2$. Si $\varphi: G_0 \longrightarrow \mathbb{R}^{2d_0^2}$ definida por $\varphi(\sigma) = (y_1(\rho(\sigma)), \dots, y_{2d_0^2}(\rho(\sigma)))$, claramente $\varphi = \phi \circ \psi \circ P_0$, es decir, φ es homeomorfismo de G_0 sobre un subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^{2d_0^2}$. La función $f_2 = f \circ \varphi^{-1}$ es una función continua definida sobre K . Debido al teorema de extensión de Tietze (p. 149 [3]) concluimos que f_2 puede extenderse a una función continua definida sobre todo $\mathbb{R}^{2d_0^2}$. Seguiremos denotando por f_2 a dicha extensión. Puesto que K es compacto, es acotado. Sea M una cota para

las coordenadas de los puntos de K . Por el teorema de aproximación de Weierstrass (p. 95) sabemos que existe un polinomio $Q(y_1, \dots, y_{2d+1}) = Q(y)$ tal que la desigualdad

$$|f_2(y) - Q(y)| \leq \alpha$$

se cumple para todos los puntos $y = (y_1, \dots, y_{2d+1})$ tales que $|y_k| \leq M$, $1 \leq k \leq 2d+1$. Definimos la función f_1 por la fórmula

$$f_1(\sigma) = Q(y_1(P_0(\sigma)), \dots, y_{2d+1}(P_0(\sigma)))$$

Entonces tenemos que $|f(\sigma) - f_1(\sigma)| \leq \alpha \quad \forall \sigma \in C_f$

En efecto, $y_{i+2d+1}(P_0(\sigma)) = \frac{1}{2} (x_{i,j}(\sigma) + \overline{x}_{i,j}(\sigma))$

$$y_{i+2d+1+2d+1}(P_0(\sigma)) = \frac{1}{2} \sqrt{-1} (x_{i,j}(\sigma) - \overline{x}_{i,j}(\sigma))$$

luego la función f_1 de hecho es un polinomio en las funciones

$x_{i,j}(\sigma)$, $\overline{x}_{i,j}(\sigma)$, y así, el lema probado. ////

Probaremos ahora la proposición 7.3.

Supongamos que el conjunto $\{P_0, \overline{P}_0\}$ no contiene suficientes representaciones. De lo que hemos visto hasta ahora, podemos concluir que existe una función continua $f \neq 0$ de C_f en $\mathbb{C}$, tal que si $g \in \mathcal{O}(\{P_0, \overline{P}_0\})$,

$$\int_{C_f} g(\sigma) \overline{f}(\sigma) d\sigma = 0$$

Puesto que f es continua sobre un compacto, es acotada. Sea m tal que $|f(\sigma)| < m \quad \forall \sigma \in C_f$. Como $\int_{C_f} f(\sigma) \overline{f}(\sigma) d\sigma > 0$

podemos encontrar un número $a > 0$ tal que

$$am < \int_G f(\sigma) \overline{f}(\sigma) d\sigma$$

Por el lema, existe una función continua $f_1 \in \mathcal{O}(1_P, \overline{P}_0)$ tal que $|f(\sigma) - f_1(\sigma)| \leq a \quad \forall \sigma \in G$. Se concluye que

$$\begin{aligned} \left| \int_G f(\sigma) \overline{f}(\sigma) d\sigma \right| &= \left| \int_G (f(\sigma) - f_1(\sigma)) \overline{f}(\sigma) d\sigma \right| \leq \\ &\leq \int_G |f(\sigma) - f_1(\sigma)| |\overline{f}(\sigma)| d\sigma \leq am \end{aligned}$$

lo cual es contradictorio. De este modo, la proposición 7.3 queda probada. ////

Proposición 7.4 Supongamos que un grupo compacto G admite al menos una representación fiel. Si H es un subgrupo cerrado de G , entonces cada representación irreducible de H es de multiplicidad mayor que cero en la restricción a H de alguna representación de G .

Demostración.— Sea P_0 una representación fiel de G y sea Λ_0 la restricción de P_0 a H . Entonces Λ_0 es una representación fiel de H , y por lo tanto el conjunto $\{\Lambda_0, \overline{\Lambda}_0\}$ contiene suficientes representaciones de H . Se concluye que cada representación irreducible de H es de multiplicidad mayor que cero en alguna representación de la forma $\Lambda_0 \otimes \dots \otimes \overline{\Lambda}_0 \otimes \overline{\Lambda}_0 \otimes \dots \otimes \Lambda_0$, pero cualquier representación de este tipo es la restricción a H de alguna representación de G del

tipo $P_0 \times \dots \times P_0 \times \overline{P_0} \times \dots \times \overline{P_0}$.

////

Proposición 7.5 Supongamos que un grupo compacto G admite al menos una representación fiel y que $\mathcal{H}$ es un subgrupo cerrado de G . Si $\mathcal{H} \neq G$, entonces existe al menos una representación irreducible de G , distinta de la representación identidad, cuya restricción a $\mathcal{H}$ es tal que la representación identidad de $\mathcal{H}$ es de multiplicidad mayor que cero en ella.

Demostración.- Seleccionaremos una representación P_R en cada clase R de representaciones de G . Denotaremos por $\alpha_{i,j}^{P_R}$ a los coeficientes de P_R . Cada función f del anillo representativo Θ de G puede escribirse de la forma

$$f = \sum_{i,j,R} a_{i,j}^{P_R} \alpha_{i,j}^{P_R}$$

donde R corre sobre todas las clases irreducibles de representaciones, y los $a_{i,j}^{P_R}$ son constantes de las cuales solamente un número finito son distintas de cero. Haciendo uso de las relaciones de ortogonalidad tenemos que

$$\int_G f(\sigma) d\sigma = \sum_{i,j,R} a_{i,j}^{P_R} \int_G \alpha_{i,j}^{P_R}(\sigma) d\sigma = a_{11}^E$$

donde E es la representación identidad, ya que su único coeficiente es la función constante 1 , es decir, $\alpha_{11}^E = 1$.

Supongamos por un momento que la restricción a $\mathcal{H}$ de

las representaciones $P_R \neq E$ con R irreducible, son tales que la representación identidad de $\mathcal{H}$ no es de multiplicidad mayor que cero en alguna de ellas. Entonces la restricción de cada χ_R a $\mathcal{H}$ será una combinación lineal de coeficientes de representaciones irreducibles de $\mathcal{H}$, y si $P_R \neq E$ esta expresión involucrará sólo coeficientes de representaciones irreducibles de $\mathcal{H}$ distintas de la representación identidad. (Ver demostración a la proposición 7.1).

Por el mismo argumento empleado para probar las igualdades anteriores, concluimos que

$$I(f, \mathcal{H}) = a_n^E = \int_G f(\sigma) d\sigma$$

donde $I(f, \mathcal{H})$ es la integral de Haar invariante sobre el grupo compacto $\mathcal{H}$, normalizada como es usual, $I(1, \mathcal{H}) = 1$.

La igualdad $I(f, \mathcal{H}) = \int_G f(\sigma) d\sigma$, se cumple para todas las funciones f del anillo representativo Θ , se cumple también para cada función continua sobre G ya que por el lema usado en la demostración de la proposición 7.3, cada una de estas funciones puede ser aproximada tanto como se quiera por funciones en Θ , es decir dados $\varepsilon > 0$ y $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ continua, existe $f' \in \Theta$ tal que $|f(\sigma) - f'(\sigma)| < \varepsilon/2 \quad \forall \sigma \in G$, luego $|I(f, \mathcal{H}) - \int_G f(\sigma) d\sigma| = |I(f, \mathcal{H}) - I(f', \mathcal{H}) + \int_G f'(\sigma) d\sigma - \int_G f(\sigma) d\sigma| \leq |I(f, \mathcal{H}) - I(f', \mathcal{H})| +$

$$+ \left| \int_G f'(\sigma) d\sigma - \int_G f(\sigma) d\sigma \right| < \varepsilon,$$

y como ε es arbitrario, podemos concluir que

$$I(f, \mathcal{H}) = \int_G f(\sigma) d\sigma.$$

Puesto que $\mathcal{H}$ es distinto de G existe una función continua f sobre G la cual satisface las siguientes condiciones:

- 1) f se anula sobre $\mathcal{H}$.
- 2) f no es idénticamente cero sobre G .

Esta afirmación la podemos hacer debido a que implícitamente estamos suponiendo que el grupo G es de Hausdorff, y todo grupo topológico Hausdorff y compacto es normal, de modo que si $\sigma \in \mathcal{H}^c$ existe una función continua f sobre G tal que f es cero sobre $\mathcal{H}$ y $f(\sigma) = 1$. Entonces tenemos que $I(f, \mathcal{H}) = 0$ y por ser f continua y no idénticamente cero, sobre $\mathcal{H}^c$ existe una vecindad sobre la cual $f \neq 0$ y como la medida de Haar de una vecindad es mayor que cero, podemos concluir que

$$\int_G f(\sigma) \overline{f(\sigma)} d\sigma > 0$$

lo que contradice el resultado obtenido anteriormente. De este modo concluimos que existe al menos una representación irreducible de G distinta de la representación identidad, cuya restricción a $\mathcal{H}$ es tal que la representación identidad de $\mathcal{H}$ es de multiplicidad mayor que cero en ella. ////

Sea ahora G un grupo de Lie compacto cualesquiera, es decir, no supondremos que G admite una representación fiel. Sea $\mathcal{N}$ el conjunto de elementos $\sigma \in G$ los cuales son representados por la matriz identidad en todas las representaciones de G , es decir si $\sigma \in \mathcal{N}$, $P(\sigma)$ es la matriz identidad para cualquier representación P de G . Claramente $E \in \mathcal{N}$ y debido a que si $\sigma, \tau \in \mathcal{N}$, $P(\sigma\tau) = P(\sigma)P(\tau)$, concluimos que $\sigma\tau \in \mathcal{N}$, es decir que $\mathcal{N}$ es un subgrupo de G .

Puesto que acordamos que una representación de un grupo topológico es un mapeo continuo, si $\sigma \in \mathcal{N}^c$, entonces existe una representación P de G tal que $P(\sigma)$ no es la matriz identidad, y como $GL(d, \mathbb{C})$ es Hausdorff, existe una vecindad abierta de $P(\sigma)$ que no contiene a la matriz identidad, luego la imagen inversa de esta vecindad bajo P es una vecindad abierta de σ , es decir $\mathcal{N}^c$ es abierto y por lo tanto $\mathcal{N}$ es cerrado.

Denotemos por G_1 al grupo $G/\mathcal{N}$. Cada representación de G mapea a $\mathcal{N}$ sobre la matriz identidad, de esta manera define una representación de G_1 . Recíprocamente, cada representación de G_1 corresponde a una representación de G . Concluimos que los anillos representativos de G y G_1 son isomorfos.

Más aún, si $\sigma \in G$, con $\sigma \neq E$, entonces existe una

representación P de G_1 tal que $P(\sigma)$ no es la matriz identidad. Concluiremos de este hecho que G_1 admite una representación fiel.

Puesto que G_1 es un grupo de Lie, existe una vecindad abierta V del elemento neutro E_1 de G_1 la cual no contiene algún subgrupo de G_1 (p. 127, Lema 1, § VIII, Cap. IV [2]), denotemos por F al complemento de V_1 en G_1 . Si P es cualquier representación de G_1 , denotemos por $\mathcal{N}(P)$ al núcleo de la representación P . Claramente $\mathcal{N}(P)$ es un subgrupo cerrado de G_1 , y la intersección de los grupos $\mathcal{N}(P)$ para toda representación P de G_1 es $\{E_1\}$. De este modo tenemos

$$(\bigcap \mathcal{N}(P)) \cap F = \emptyset$$

Puesto que F es compacto, existe un conjunto finito $\{P_1, \dots, P_n\}$, de representaciones de G_1 tales que $(\bigcap_{i=1}^n \mathcal{N}(P_i)) \cap F = \emptyset$

En efecto, los conjuntos $\mathcal{N}(P_i)$ son una cubierta abierta de F . Concluimos pues que $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{N}(P_i) \subset V_1$, y como $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{N}(P_i)$ es un grupo, éste debiera ser $\{E_1\}$, debido a la propiedad de la vecindad V_1 . Afirmamos entonces que la representación $P_1 + \dots + P_n$ es una representación fiel de G_1 . En efecto, si $\sigma \in G_1$ y $(P_1 + \dots + P_n)(\sigma) = P_1(\sigma) + \dots + P_n(\sigma)$ es la matriz identidad, entonces $P_i(\sigma)$ es la matriz identidad, para $1 \leq i \leq n$, luego $\sigma \in \bigcap \mathcal{N}(P_i)$, y por lo tanto $\sigma = E_1$.

y si $(P_1 + \dots + P_n)(\sigma) = (P_1 + \dots + P_n)(\tau)$,

$(P_1 + \dots + P_n)(\varepsilon) = (P_1 + \dots + P_n)(\sigma^{-1}\tau)$, luego $\sigma^{-1}\tau = \varepsilon_1$, por lo tanto $\sigma = \tau$.

Proposición 7.6 Sea $\mathcal{G}$ un grupo de Lie compacto. Existe una representación P de $\mathcal{G}$ con las siguientes propiedades: Cada elemento del núcleo de P tiene como imagen bajo cualquier otra representación de $\mathcal{G}$ a la matriz identidad. Los coeficientes de las representaciones P y $\bar{P}$ forman un sistema de generadores del anillo representativo de $\mathcal{G}$.

Demostración.- Sabemos que $\mathcal{G}/\eta = \mathcal{G}_1$ admite una representación fiel P , pero esta da lugar a una representación de $\mathcal{G}$, que seguiremos denotando por P . El núcleo de P es η , es decir, si $\sigma \in \eta$, σ tiene como imagen a la matriz identidad bajo cualquier representación de $\mathcal{G}$.

Sabemos que existe un isomorfismo ψ entre los anillos representativos de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}_1$, es decir si $f \in \mathcal{O}(\mathcal{G})$, $\psi(f) \in \mathcal{O}(\mathcal{G}_1)$, y $f(\sigma) = \psi(f)(\bar{\sigma})$, donde $\bar{\sigma} = \sigma\eta$. De este modo, si g es un coeficiente de P , $\psi(g)$ es el coeficiente correspondiente de P como representación de $\mathcal{G}_1$.

Sabemos además que $\{P, \bar{P}\}$ contiene suficientes representaciones de $\mathcal{G}_1$, es decir el mínimo cerrado que contiene a $\{P, \bar{P}\}$ es el conjunto de representaciones de $\mathcal{G}_1$, y si

$\psi(f)$ es un elemento del anillo representativo de G_1 , con $f \in \mathcal{O}(G)$, $\psi(f)$ es combinación lineal de coeficientes $\psi(h)$ de representaciones irreducibles de G_1 , con h coeficiente de la correspondiente representación de G . De este modo $\psi(f)$ es combinación lineal de coeficientes $\psi(h)$ de representaciones de multiplicidad mayor que cero en representaciones de la forma $P_1 X \dots X P X \bar{P} X \dots X \bar{P}$, de esta forma cada coeficiente $\psi(h)$ de una de estas representaciones está en $\mathcal{O}(\{P, \bar{P}\})$, es decir cada coeficiente h está en $\mathcal{O}(\{P, \bar{P}\})$. (En el primer caso se consideran P y $\bar{P}$ como representaciones de G_1 , en el segundo como representaciones de G). Pero si $\psi(f)$ es combinación lineal de los coeficientes $\psi(h)$, entonces f es combinación lineal de los coeficientes h , es decir, $f \in \mathcal{O}(\{P, \bar{P}\})$, de modo que los coeficientes de las representaciones P y $\bar{P}$ forman un sistema de generadores del anillo representativo de G .

////

§ 8 LA ESTRUCTURA ALGEBRAICA DEL ANILLO REPRESENTATIVO

Comenzamos este párrafo mostrando las relaciones algebraicas entre los elementos del anillo representativo $\mathcal{O}(G)$ donde G es un grupo de Lie compacto, y entre un conjunto de generadores de éste. Posteriormente se considera el conjunto $\mathcal{M}(G)$ de homomorfismos $\omega: \mathcal{O}(G) \rightarrow \mathbb{C}$ el cual se dota en primer lugar de una estructura de grupo y posteriormente de una topología con la cual $\mathcal{M}(G)$ resulta ser un grupo de Lie.

Denotaremos por G a un grupo de Lie compacto, y por $\mathcal{O}$ al anillo representativo de G .

Si P es una representación de G , denotaremos por $d(P)$ al grado de P , y por α_{ij}^P al (i, j) -coeficiente de P ; $1 \leq i, j \leq d(P)$. $\mathcal{O}$ es por lo tanto el anillo generado por las funciones α_{ij}^P .

Sabemos que existe un conjunto finito de representaciones de G el cual contiene suficientes representaciones. Si $\{P_1, \dots, P_h\}$ es tal conjunto, las funciones $\alpha_{ij}^{P_k}$, $1 \leq i, j \leq d(P_k)$, $1 \leq k \leq h$ forman un conjunto de generadores de $\mathcal{O}$. Deseamos encontrar las relaciones algebraicas que se verifican entre estos generadores.

Será conveniente introducir nuevas variables independientes u_{ij}^P con $1 \leq i, j \leq d(P)$. P corriendo sobre todas las representaciones de G . Sea $\mathcal{U}$ el anillo de polinomios con las variables u_{ij}^P con coeficientes en $\mathbb{C}$. (Puede existir un número infinito de variables, pero cada polinomio contiene solamente un número finito de ellas). Existe un homeomorfismo de $\mathcal{U}$ en θ , el cual mapea u_{ij}^P sobre el coeficiente α_{ij}^P correspondiente. Sea $\mathcal{A}$ el núcleo de este homomorfismo. Nos proponemos determinar $\mathcal{A}$ exhibiendo un conjunto de generadores de este ideal.

A cada representación P le asignamos la matriz $U(P)$ de grado $d(P)$ cuyos coeficientes son los u_{ij}^P correspondientes. Entre los polinomios pertenecientes a $\mathcal{A}$ se encuentran en particular los siguientes

- 1) Los coeficientes de las matrices $U(P_1 + P_2) - (U(P_1) + U(P_2))$
 $U(P_1 \otimes P_2) - U(P_1) \otimes U(P_2)$ para todas las posibles elecciones de las representaciones P_1 y P_2 .
- 2) Los coeficientes de las matrices $U(\gamma P \gamma^{-1}) - \gamma U(P) \gamma^{-1}$
 donde γ es cualquier matriz regular de grado $d(P)$.
- 3) El polinomio $u_{ii}^E - 1$, donde E es la representación - identidad de G .

Proposición 8.1 Los polinomios mencionados en 1), 2) y 3) forman un conjunto de generadores del ideal $\mathcal{A}$.

Demostración.— Sea $\mathcal{A}_1$ el menor ideal que contiene a los polinomio enlistados en 1), 2) y 3). Tenemos que probar que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$.

Seleccionaremos una representación de cada clase de representaciones irreducibles. Sea $\{P_\beta\}_{\beta \in A}$ el conjunto de representaciones obtenidas de esta forma (A algún conjunto de índices). Aseguramos que cada polinomio en $\mathcal{U}$ es congruente módulo $\mathcal{A}_1$ con alguna combinación lineal finita de las variables $u_{ij}^{P_\beta}$, $1 \leq i, j \leq d(P_\beta)$, $\beta \in A$. Es suficiente probar esto para la constante 1, para cada variable $u_{ij}^{P_\beta}$, y para el producto de cualesquiera dos de estas variables.

Tenemos que $1 \equiv u_{11}^E \pmod{\mathcal{A}_1}$, y E es una de las representaciones P_β . Si P es cualquier representación, existe una matriz regular M tal que $P = M(P_{\beta_1} + \dots + P_{\beta_n})M^{-1}$, $\beta_1, \dots, \beta_n \in A$. Se concluye que los coeficientes de $U(P)$ son congruentes módulo $\mathcal{A}_1$ con los correspondientes coeficientes de $M(U(P_{\beta_1} + \dots + U(P_{\beta_n}))M^{-1}$, ya que los coeficientes de $U(P)$ son congruentes módulo $\mathcal{A}_1$ con los coeficientes $M(U(P_{\beta_1} + \dots + U(P_{\beta_n}))M^{-1}$, y estos a su vez son congruentes módulo $\mathcal{A}_1$ con los coeficientes de $M(U(P_{\beta_1}) + \dots + U(P_{\beta_n}))M^{-1}$ y la congruencia es transitiva.

Como los coeficientes de $M(U(P_{\beta_1}) + \dots + U(P_{\beta_n}))M^{-1}$ son combinaciones lineales finitas de las variables $u_{ij}^{P_\beta}$, con-

cluimos que las variables $u_{ij}^{P_0}$ son congruentes módulo $\mathcal{A}_1$ a una combinación lineal finita de las variables $u_{ij}^{P_0}$. Finalmente observamos que $u_{ij}^{P_0} u_{ij}^{P'}$ es un coeficiente de $U(P) \otimes U(P')$ y por lo tanto congruente módulo $\mathcal{A}_1$ con un coeficiente de $U(P \otimes P')$, es decir, el resultado anterior nos dice que es también congruente módulo $\mathcal{A}_1$ a una combinación lineal finita de las variables $u_{ij}^{P_0}$. Nuestra afirmación ha sido por lo tanto probada.

Sea P cualquier polinomio en el ideal $\mathcal{A}$. Tenemos entonces que

$$P \equiv \sum_{i,j,P} a_{ij}^{P_0} u_{ij}^{P_0} \pmod{\mathcal{A}_1}$$

donde los $a_{ij}^{P_0}$ son constantes. Puesto que $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$, $P \in \mathcal{A}$ y

$$P - \sum a_{ij}^{P_0} u_{ij}^{P_0} \in \mathcal{A}_1, \quad P - (P - \sum a_{ij}^{P_0} u_{ij}^{P_0}) = \sum a_{ij}^{P_0} u_{ij}^{P_0} \in \mathcal{A}_1,$$

tenemos que $\sum a_{ij}^{P_0} \alpha_{ij}^{P_0} = 0$. Multiplicando por $\overline{\alpha_{kl}^{P_0}}$, tenemos

que $\sum a_{ij}^{P_0} \alpha_{ij}^{P_0} \overline{\alpha_{kl}^{P_0}} = 0$; integrando sobre el grupo G obtenemos por las relaciones de ortogonalidad que $a_{kl}^{P_0} = 0$ para todas las $a_{kl}^{P_0}$ que aparecen en la suma, concluimos entonces que

$P \in \mathcal{A}_1$. La proposición ha sido por lo tanto probada. ////

Si conocemos cualquier sistema de generadores $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ del anillo representativo Θ , podemos obtener las relaciones algebraicas entre estos generadores en la siguiente forma: expresamos cada $\alpha_{ij}^{P_0}$ como un polinomio en las cantidades Z_i y

substituimos estas expresiones en las relaciones entre funciones f las cuales resultan de 1), 2) y 3).

Estudiaremos ahora los homomorfismos ω del anillo representativo θ en el campo de los números complejos. Si $z_1, \dots, z_m$ forman un sistema de generadores de θ un homomorfismo ω queda determinado cuando los números $\omega(z_1) = a_1, \dots, \omega(z_m) = a_m$ están dados. Estos números no pueden tomarse arbitrariamente, deberán satisfacer las relaciones $P(a_1, \dots, a_m) = 0$, donde $P(z_1, \dots, z_m) = 0$ son las relaciones que se cumplen entre $z_1, \dots, z_m$ en θ . Concluimos que los homomorfismos de θ en $\mathbb{C}$ pueden identificarse con los puntos de la variedad algebraica definida por las ecuaciones $P = 0$.

Definición 9.1 Sea θ el anillo representativo de un grupo de Lie compacto G . El conjunto de homomorfismos de θ en $\mathbb{C}$ es llamado la variedad algebraica asociada a G . Esta variedad deberá denotarse por $M(G)$.

Si un sistema de generadores $\{z_1, \dots, z_m\}$ está dado, el conjunto de puntos $M_z = \{\omega(z_1), \dots, \omega(z_m) \in \mathbb{C}^m / \omega \in M(G)\}$ es llamado el modelo de $M(G)$ correspondiente a los generadores $z_1, \dots, z_m$.

Definición 8.2 Sea R el conjunto de todas las representaciones de un grupo de Lie compacto G . Una representación de

$\mathcal{R}$ es cualquier mapeo $\mathcal{S}$ el cual asigna a cada $P \in \mathcal{R}$ una matriz regular $\mathcal{S}(P)$ de grado igual a $d(P)$ en tal forma que las igualdades

$$\mathcal{S}(P_1 + P_2) = \mathcal{S}(P_1) + \mathcal{S}(P_2), \mathcal{S}(P_1 \times P_2) = \mathcal{S}(P_1) \times \mathcal{S}(P_2)$$

$$\mathcal{S}(P P^{-1}) = P^{-1} \mathcal{S}(P) P^{-1}$$

se satisfacen para representaciones P_1, P_2 cualesquiera y para cualquier matriz regular P de grado $d(P)$.

Sea ω cualquier homomorfismo de $\mathcal{O}$ en $\mathbb{C}$. Asignamos a cada representación P la matriz $S_\omega(P)$ cuyos coeficientes son los números $\omega(\alpha_{ij}^P)$, $1 \leq i, j \leq d(P)$; de este modo obtenemos un mapeo S_ω el cual asigna una matriz a cada elemento de $\mathcal{R}$.

Proposición 8.2 Si $\omega \in \mathcal{M}(\mathcal{G})$ el mapeo S_ω es una representación de $\mathcal{R}$. El mapeo $\omega \longrightarrow S_\omega$ es una biyección de $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ sobre el conjunto de representaciones de $\mathcal{R}$.

Demostración.- Puesto que $S_\omega(P_1 + P_2)$ es una matriz de grado $d(P_1 + P_2) = d(P_1) + d(P_2)$ cuyos coeficientes son los números

$$\omega(\alpha_{ij}^{P_1 + P_2}) = \begin{cases} \omega(\alpha_{ij}^{P_1}) & \text{si } 1 \leq i, j \leq d(P_1) \\ 0 & \text{si } d(P_2) < j \leq d(P_1) + d(P_2), 1 \leq i \leq d(P_1) \\ & \text{ó bien } d(P_1) < i \leq d(P_1) + d(P_2), 1 \leq j \leq d(P_1) \\ \omega(\alpha_{ij}^{P_2}) & \text{si } d(P_1) < i, j \leq d(P_1) + d(P_2). \end{cases}$$

es decir, los coeficientes de $S_{\omega}(R) + S_{\omega}(R_2)$, concluimos que $S_{\omega}(R + R_2) = S_{\omega}(R) + S_{\omega}(R_2)$. La matriz $S_{\omega}(R \times R_2)$ tiene como coeficiente en el $i + d(R)(j-1)$ - renglón y la $k + d(R)(l-1)$ - columna al número $\omega(\alpha_{i,j}^R \alpha_{k,l}^R) = \omega(\alpha_{i,k}^R) \omega(\alpha_{j,l}^R)$ es decir al coeficiente $(i + d(R)(j-1), k + d(R)(l-1))$ de la matriz $S_{\omega}(R) \times S_{\omega}(R_2)$, de donde $S_{\omega}(R \times R_2) = S_{\omega}(R) \times S_{\omega}(R_2)$. Por ser ω homomorfismo, claramente tenemos que $S_{\omega}(P P^{-1}) = P^{-1} \omega(P) P^{-1}$. Para probar que S_{ω} es una representación de R , será suficiente probar que la matriz $S_{\omega}(P)$ es regular, con P una representación cualquiera de G . En primer lugar tenemos que $P^*(\sigma)^t P(\sigma) = E$, $\forall \sigma \in G$, donde E es la matriz identidad. Se concluye que

$$\sum_j \alpha_{i,j}^{P^*} \alpha_{j,k}^P = \delta_{i,k}, \quad 1 \leq i, k \leq d(P).$$

Puesto que ω es un homomorfismo, tenemos

$$\sum_j \omega(\alpha_{i,j}^{P^*}) \omega(\alpha_{j,k}^P) = \delta_{i,k}$$

De este modo $S_{\omega}(P^*)^t S_{\omega}(P) = E$ lo que demuestra que $S_{\omega}(P)$ es regular y que

$$S_{\omega}(P^*) = (S_{\omega}(P))^*$$

por lo tanto S_{ω} es una representación de R .

Probaremos ahora la segunda parte de la proposición.

Si ω_1, ω_2 son elementos distintos de $\mathcal{M}(G)$, existe

una función representativa α_{ij}^P tal que $\omega_1(\alpha_{ij}^P) \neq \omega_2(\alpha_{ij}^P)$, de donde $S_{\omega_1}(P) \neq S_{\omega_2}(P)$, es decir $S_{\omega_1} \neq S_{\omega_2}$ y por lo tanto el mapeo $\omega \longrightarrow S_\omega$ es inyectivo.

Finalmente, sea S cualquier representación de R . a cada variable u_{ij}^P le asignamos el número $\tilde{\omega}(u_{ij}^P)$ que es la (i, j) entrada de $S(P)$. Puesto que las variables u_{ij}^P son algebraicamente independientes $\tilde{\omega}$ puede extenderse a un homomorfismo (también denotado por $\tilde{\omega}$) del anillo de polinomios $\mathcal{U}$ en $\mathbb{C}$. Puesto que S es una representación de R , los polinomios descritos en 1) y 2) son claramente mapeados sobre cero. Más aún, sea E la representación identidad. Entonces $S(E)$ es un número distinto de cero el cual es igual a su cuadrado en virtud de la igualdad $E \times E = E$. Se concluye que $S(E) = 1$, de este modo $\tilde{\omega}(u_{ii}^E - 1) = 0$.

Por la proposición 8.1, los polinomios del ideal $\mathcal{A}$ tienen como imagen al cero bajo el homomorfismo $\tilde{\omega}$. Puesto que θ puede ser identificado con $\mathcal{U}/\mathcal{A}$, vemos que $\tilde{\omega}$ define en forma natural un homomorfismo ω de θ en $\mathbb{C}$. Es claro que $S = S_\omega$, y la proposición 8.2 queda así probada. ////

Observaciones. Hemos probado que si S es una representación de R , entonces

$$S(P^*) = (S(P))^*$$

para cualquier representación P de G .

Sean S_1, S_2 dos representaciones cualesquiera de $\mathcal{R}$.

Afirmamos que el mapeo $P \longrightarrow S_1(P)S_2^{-1}(P)$ es de nuevo una representación de $\mathcal{R}$, donde S^{-1} es el mapeo que asigna a cada $P \in \mathcal{R}$ la matriz $(S(P))^{-1}$. En efecto, $P_1 + P_2 \longrightarrow S_1(P_1 + P_2) \cdot S_2^{-1}(P_1 + P_2) = [S_1(P_1) + S_1(P_2)] [S_2^{-1}(P_1) + S_2^{-1}(P_2)] = S_1(P_1)S_2^{-1}(P_1) + S_1(P_2)S_2^{-1}(P_2)$.

Matricialmente tenemos

$$\begin{pmatrix} S_1(R) & 0 \\ 0 & S_1(R) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_2^{-1}(R) & 0 \\ 0 & S_2^{-1}(R) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1(R)S_2^{-1}(R) & 0 \\ 0 & S_1(R)S_2^{-1}(R) \end{pmatrix};$$

$$P \times R \longrightarrow S_1(P \times R) S_2^{-1}(P \times R) = [S_1(P) \times S_1(R)] [S_2^{-1}(P) \times S_2^{-1}(R)] = S_1(P)S_2^{-1}(P) \times S_1(R)S_2^{-1}(R).$$

$$P \mapsto S_1(P \mapsto P^{-1}) S_2^{-1}(P \mapsto P^{-1}) = P^{-1} S_1(P) P^{-1} S_2(P) P^{-1} = P^{-1} S_1(P) S_2^{-1}(P) P^{-1};$$

Por tanto el conjunto de las representaciones de $\mathcal{R}$ forman un grupo, siendo el elemento neutro el mapeo que asocia a cada representación P la matriz identidad de grado $d(P)$.

Definición 8.3 Haciendo uso de la correspondencia establecida por la proposición 8.2 entre los elementos de $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ y las representaciones de $\mathcal{R}$, podemos definir una estructura de grupo en $\mathcal{M}(\mathcal{G})$. El grupo obtenido en esta forma es llamado el grupo algebraico asociado a $\mathcal{G}$.

Introduzcamos ahora una topología en $\mathcal{M}(G)$. A cada conjunto de generadores $\{z_1, \dots, z_m\}$ de θ le corresponde un modelo M_Z de $\mathcal{M}(G)$, y los elementos de $\mathcal{M}(G)$ están en correspondencia biunívoca con los puntos de este modelo, es decir a cada $\omega \in \mathcal{M}(G)$ le corresponde un punto $(\omega(z_1), \dots, \omega(z_m)) \in M_Z \subset \mathbb{C}^m$. Puesto que $M_Z \subset \mathbb{C}^m$, a M_Z le consideramos con la topología inducida por la topología de $\mathbb{C}^m$. La correspondencia biunívoca entre $\mathcal{M}(G)$ y M_Z da lugar a una topología en $\mathcal{M}(G)$, es decir, si $\phi: \mathcal{M}(G) \longrightarrow M_Z$ es tal que $\phi(\omega) = (\omega(z_1), \dots, \omega(z_m))$, este mapeo es biyectivo y le damos a $\mathcal{M}(G)$ la topología que hace de ϕ un homeomorfismo. Veamos que esta topología no depende de la elección del modelo M_Z .

Sea $M_{Z'}$ otro modelo para el conjunto de generadores $\{z'_1, \dots, z'_m\}$. Entonces cada z_i puede expresarse como un polinomio en $z'_1, \dots, z'_m$, y cada z'_i puede expresarse como un polinomio en $z_1, \dots, z_m$. Sea $z_i = P_i(z'_1, \dots, z'_m), \dots, z_m = P_m(z'_1, \dots, z'_m)$ $z'_i = P'_i(z_1, \dots, z_m), \dots, z'_m = P'_m(z_1, \dots, z_m)$. Sea $(\omega(z_1), \dots, \omega(z_m)) \in M_Z, \omega \in \mathcal{M}(G)$. Sea $F: M_Z \longrightarrow M_{Z'}$ definido por $F(\omega(z_1), \dots, \omega(z_m)) = (\omega(z'_1), \dots, \omega(z'_m))$. Claramente F es biyectivo y $F(\omega(z_1), \dots, \omega(z_m)) = (\omega(P_1(z_1, \dots, z_m)), \dots, \omega(P_m(z_1, \dots, z_m))) = (P'_1(\omega(z_1), \dots, \omega(z_m)), \dots, P'_m(\omega(z_1), \dots, \omega(z_m)))$, de manera que F es continuo.

$F^{-1}(\omega(z'_1), \dots, \omega(z'_m)) = (\omega(z_1), \dots, \omega(z_m)) = (P_1(\omega(z_1), \dots, \omega(z'_m)), \dots, P_m'(\omega(z'_1), \dots, \omega(z'_m)))$, de modo que F^{-1} es continuo, por lo tanto F es homeomorfismo, y la topología de $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ no depende del modelo $M_{\mathbb{Z}}$.

Sea $\{P_1, \dots, P_n\}$ un conjunto con suficientes representaciones de $\mathcal{G}$. Sea $P_0 = P_1 + \dots + P_n + \bar{P}_1 + \dots + \bar{P}_n$ y denotemos por d_0 el grado de P_0 . Sabemos que las d_0^2 funciones $\alpha_{ij}^{P_0}$, $1 \leq i, j \leq d_0$ forman un conjunto de generadores de $\mathcal{O}$. Asignemos a cada $\omega \in \mathcal{M}(\mathcal{G})$ la matriz $S_\omega(P_0)$ que denotamos por $\omega(P_0)$. Afirmando que este mapeo es una representación de $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ por matrices de grado d_0 . En efecto, debido a que la representación S_1, S_2 de $\mathcal{R}$ asocia a cada $P \in \mathcal{R}$ el producto de matrices $S_1(P) S_2(P)$, tenemos que el mapeo antes mencionado asocia al producto $\omega_1 \omega_2$ la matriz $S_{\omega_1}(P) S_{\omega_2}(P)$; además el idéntico de $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ que denotaremos por ω_E es tal que $S_{\omega_E}(P) = E$ donde E es la matriz identidad de grado $d(P)$, por lo tanto a ω_E se le asocia la matriz $S_{\omega_E}(P_0) = E$ donde E es la matriz identidad de grado d_0 . Esto demuestra la afirmación.

Como las funciones $\alpha_{ij}^{P_0}$ dan lugar a un modelo de $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ la representación anterior de $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ es fiel puesto que

$$S_{\omega_1}(P) = \omega_1(P) = \omega_2(P) = S_{\omega_2}(P) \text{ si y sólo si } \omega_1 = \omega_2$$

Sabemos que $GL(d, \mathbb{C})$ tiene la topología que hace del mapeo $\psi: GL(d, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^{d^2}$ definido por $\psi(a_{ij}) = (b_1, \dots, b_{d^2})$

donde $b_{i+d(j-1)} = a_{ij}$, un homeomorfismo. Si $\tilde{P}_0$ es la representación de $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ dada por $\tilde{P}_0(\omega) = S\omega(P_0) = \omega(P_0)$, $B \subset GL(d, \mathbb{C})$ es la imagen de $\tilde{P}_0$ y $M_{\mathbb{Z}_0}$ es el modelo de $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ correspondiente al sistema de generadores $\{\alpha_{ij}^0\}$ ordenado de tal forma que $\psi|_B \longrightarrow M_{\mathbb{Z}_0}$ sea homeomorfismo, entonces el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\phi} & M_{\mathbb{Z}_0} \\ & \searrow \tilde{P}_0 & \downarrow \psi^{-1} \\ & & B \end{array}$$

es decir, $\tilde{P}_0$ es homeomorfismo.

Más generalmente, si P es cualquier representación de $\mathcal{G}$, el mapeo $\omega \longrightarrow S\omega(P)$ es una representación de $\mathcal{M}(\mathcal{G})$. Denotaremos a esta representación por $\tilde{P}$.

Proposición 8.3 Sea P una representación de $\mathcal{G}$ cuyos coeficientes forman un sistema de generadores del anillo representativo $\mathcal{O}$ de $\mathcal{G}$. Entonces $\tilde{P}$ mapea a $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ sobre el conjunto de todas las matrices (x_{ij}) las cuales tienen la siguiente propiedad: Si P es cualquier polinomio tal que $P(\dots \alpha_{ij}^P \dots) = 0$, entonces $P(\dots x_{ij} \dots) = 0$.

Demostración. - Si $\omega \in \mathcal{M}(\mathcal{G})$, los coeficientes de $\tilde{P}(\omega) = \omega(P)$ son los números $\omega(\alpha_{ij}^P)$. Puesto que ω es homeomorfismo, la

igualdad $P(\dots \alpha_{ij}^P \dots) = 0$ implica que $P(\dots \omega(\alpha_{ij}^P) \dots) = 0$

Recíprocamente, sea (x_{ij}) una matriz que satisface las condiciones mencionadas. Puesto que los elementos α_{ij}^P forman un sistema de generadores de θ , estas condiciones implican la existencia de un homomorfismo ω de θ en $\mathbb{C}$ tal que $\omega(\alpha_{ij}^P) = x_{ij}$, $1 \leq i, j \leq d(P)$, ya que si $\alpha_{ij}^P = P(\dots \alpha_{nk}^P \dots)$, $k \neq i$, $l \neq j$, entonces $Q(\dots \alpha_{ij}^P \dots) = P(\dots \alpha_{nk}^P \dots) - \alpha_{ij}^P = 0 \Rightarrow Q(\dots x_{ij} \dots) = P(\dots x_{nk} \dots) - x_{ij} = 0$, es decir $x_{ij} = P(\dots x_{nk} \dots)$, $k \neq i$, $j \neq l$. Concluimos que la matriz (x_{ij}) es igual a $\omega(P)$, lo cual completa la demostración. ////

Corolario.- El grupo algebraico asociado a un grupo de Lie G es un grupo de Lie.

Demostración.- Sea P una representación de G cuyos coeficientes forman un sistema de generadores de θ . Claramente $\tilde{P}$ es un isomorfismo de grupos topológicos de $\mathcal{M}(G)$ sobre un subgrupo de $GL(d, \mathbb{C})$ el cual está definido por las relaciones algebraicas entre los coeficientes de P . De este modo, si la imagen de $\tilde{P}$ es U y $\delta = (x_{ij}) \in U^c$, entonces existe un polinomio Q tal que $Q(\dots \alpha_{ij}^P \dots) = 0$ y $Q(\dots x_{ij} \dots) \neq 0$. Puesto que Q es continuo, existe una vecindad de (x_{ij}) tal que $Q \neq 0$ sobre esta vecindad, es decir, U^c es abierto, luego U es cerrado. Pero todo subgrupo cerrado de un grupo de

Lie es grupo de Lie, lo cual demuestra el corolario.

////

§ 9 ESTRUCTURA TOPOLOGICA DEL GRPO ASOCIADO

En este párrafo se dan algunos resultados acerca de homeomorfismos definidos sobre $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ y finalmente demostramos la igualdad de dos subgrupos compactos de $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ obtenidos en forma distinta.

Sean $\mathcal{G}$ un grupo de Lie compacto y $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ su grupo algebraico asociado. Si f es cualquier función perteneciente al anillo representativo Θ de $\mathcal{G}$, entonces el conjugado $\bar{f}$ de f también pertenece a Θ . El mapeo $f \longrightarrow \bar{f}$ es un automorfismo de Θ , el cual asocia a cada constante compleja su conjugado. Consideremos el mapeo $f \longrightarrow \omega(\bar{f})$, $\omega \in \mathcal{M}(\mathcal{G})$; puesto que $f \longrightarrow \omega(\bar{f}) = \overline{\omega(f)} = \overline{\omega(f)\omega(\bar{g})} = \overline{\omega(f)}\omega(\bar{g})$, y

$af + g \longrightarrow \overline{\omega(\overline{af + g})} = \overline{\omega(\overline{af} + \overline{g})} = \overline{\omega(\overline{f})} + \overline{\omega(\overline{g})} = \overline{\omega(f)} + \overline{\omega(g)}$
 con $a \in \mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{O}$, concluimos que el mapeo mencionado es un elemento de $\mathcal{M}(\mathcal{G})$. Denotemos a este elemento por ω^z .

Sea P cualquier representación de $\mathcal{G}$. Entonces

$$\tilde{P}(\omega^z) = \omega^z(P) = \overline{\omega(\overline{P})}$$

donde $\overline{P}$ es el conjugado imaginario de la representación P . Puesto que $(\omega_1 \omega_2)^z(P) = \overline{\omega_1 \omega_2(\overline{P})} = \overline{\omega_1(\overline{P})} \overline{\omega_2(\overline{P})}$, concluimos que $(\omega_1 \omega_2)^z = \omega_1^z \omega_2^z$. Además $(\omega^z)^z(f) = \overline{\omega^z(\overline{f})} = \overline{\omega(\overline{\overline{f}})} = \omega(f)$, es decir la operación z aparece como un automorfismo de orden dos del grupo $\mathcal{M}(\mathcal{G})$. Veamos que esta operación es además un homeomorfismo.

Sea $\{P_1, \dots, P_n\}$ un conjunto con suficientes representaciones de $\mathcal{G}$, y sea $P_0 = P_1 + \dots + P_n + \overline{P_1} + \dots + \overline{P_n}$. Puesto que los coeficientes de P_0 forman un sistema de generadores, claramente los coeficientes de $\overline{P_0}$ también forman un sistema de generadores de $\mathcal{O}$, de hecho este sistema es una permutación del anterior. El mapeo $(\dots, \omega(\alpha_{ij}^{P_1}), \dots) \longrightarrow (\dots, \omega(\alpha_{ij}^{\overline{P_1}}), \dots) = (\dots, \overline{\omega(\alpha_{ij}^{P_1})}, \dots)$, con $\omega \in \mathcal{M}(\mathcal{G})$ es un homeomorfismo de $M_{\mathbb{Z}}$ en $M_{\mathbb{Z}}$, ya que lo único que estamos haciendo es permutar las coordenadas de $(\dots, \omega(\alpha_{ij}^{P_1}), \dots)$. Claramente la composición $(\dots, \omega(\alpha_{ij}^{P_1}), \dots) \longrightarrow (\dots, \omega(\alpha_{ij}^{\overline{P_1}}), \dots) \longrightarrow (\dots, \overline{\omega(\alpha_{ij}^{\overline{P_1}})}, \dots)$ es homeo-

morfismo, de donde concluimos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \omega & \xrightarrow{\quad} & (\dots, \omega(\alpha_{ij}^R), \dots) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \omega^* & \xrightarrow{\quad} & (\dots, \overline{\omega(\alpha_{ij}^R)}, \dots) \end{array}$$

es conmutativo, lo que demuestra que el mapeo $\omega \longrightarrow \omega^*$ es un homeomorfismo de $\mathcal{M}(\mathcal{G})$.

Puesto que si $\omega \neq \omega^*$, es decir $Z = (\dots, \omega(\alpha_{ij}^R), \dots) \neq (\dots, \overline{\omega(\alpha_{ij}^R)}, \dots) = Z'$, y si toda vecindad de Z contiene un punto $(\dots, \overline{\omega(\alpha_{ij}^R)}, \dots) = (\dots, \overline{\omega(\alpha_{ij}^R)}, \dots)$, entonces toda vecindad de Z' contiene este punto, (por el homeomorfismo de antes mencionado), de esta manera, existirían redes $\mathcal{U}: D \longrightarrow M_Z$, $\mathcal{U}': D' \longrightarrow M_{Z'}$, donde D y D' son los conjuntos dirigidos de vecindades de Z y Z' respectivamente; tales que $\mathcal{U} \longrightarrow Z$, $\mathcal{U}' \longrightarrow Z'$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$, de donde $Z = Z'$, lo que contradice nuestra hipótesis. De este modo, si $Z \neq Z'$, existe una vecindad V de Z en M_Z tal que $(\dots, \omega(\alpha_{ij}^R), \dots) \neq (\dots, \overline{\omega(\alpha_{ij}^R)}, \dots) \forall \omega \in \mathcal{M}(\mathcal{G})$, es decir, el conjunto de $\omega \in \mathcal{M}(\mathcal{G})$ tales que $\omega \neq \omega^*$ es abierto, de donde se concluye que el conjunto de $\omega \in \mathcal{M}(\mathcal{G})$ tales que $\omega = \omega^*$ es un subgrupo cerrado $\mathcal{G}_0$ de $\mathcal{M}(\mathcal{G})$.

Sea σ cualquier elemento de $\mathcal{G}$. El mapeo $f \longrightarrow f(\sigma)$, $f \in \mathcal{G}$ claramente es homeomorfismo de $\mathcal{G}$ en $\mathcal{G}$, es decir, es

un elemento de $\pi(G)$ que denotaremos por $\omega\sigma$. Si P es cualquier representación de G , tenemos que $\bar{P}(\omega\sigma) = \omega\sigma(P) = P(\sigma)$. Afirmamos que el mapeo $\sigma \longrightarrow \omega\sigma$ de G en $\pi(G)$ es un homomorfismo continuo. En efecto, es fácil ver que es homomorfismo, demostraremos pues que es continuo.

Sea P_0 la representación mencionada con anterioridad. Si $B \subset GL(d, \mathbb{C})$ es la imagen de $\bar{P}_0$, sabemos que $\bar{P}_0: \pi(G) \longrightarrow B$ es homeomorfismo, y si $M_{\mathbb{Z}}$ es el modelo de $\pi(G)$ correspondiente al sistema de generadores cuyos elementos son los coeficientes de P_0 , ordenados de tal forma que el mapeo ya mencionado $\psi: B \longrightarrow M_{\mathbb{Z}}$ sea homeomorfismo, y si denotamos por ϕ_ω al mapeo tal que $\phi_\omega(\sigma) = \omega\sigma$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{P_0} & B \\ \phi_\omega \downarrow & \nearrow \bar{P}_0 & \downarrow \psi^{-1} \\ \pi(G) & \xrightarrow{\phi} & M_{\mathbb{Z}} \end{array}$$

Puesto que $\bar{P}_0$ es homeomorfismo y P_0 es continua, concluimos que ϕ_ω es continuo, lo que demuestra la afirmación.

Debido a que G es compacto, este homomorfismo tiene como imagen a un subgrupo compacto G_2 de $\pi(G)$.

Como $\omega_\sigma^i(f) = \omega_\sigma(\bar{f}) = \bar{f}(\sigma) = f(\sigma) = \omega_\sigma(f)$, se concluye que $G_2 \subset G_1$. Probaremos que $G_2 = G_1$, pero antes veamos el siguiente lema.

Lema 9.1 El grupo G_1 es compacto.

Demostración.- Sea P_0 una representación unitaria cuyos coeficientes forman un sistema de generadores de $\mathcal{O}$. Para cualquier $\omega \in \mathcal{M}(G_1)$, tenemos que

$$\overline{\omega^r(P_0)} = \omega(\bar{P}_0) = \omega(P_0^*) = (\omega(P_0))^*$$

por lo tanto, si $\omega = \omega^r$, la matriz $\omega(P_0) = \bar{P}_0(\omega)$ es unitaria. Por otro lado, $\bar{P}_0$ es una representación fiel de $\mathcal{M}(G_1)$, y por lo tanto mapea a G_1 topológicamente sobre un subgrupo cerrado de $U(d(P_0)) \subset GL(d(P_0), \mathbb{C})$ y $U(d(P_0))$ es compacto (Ver teorema 1, p. 4). Concluimos que G_1 es compacto. ////

Proposición 9.1 Sea $\omega \in \mathcal{M}(G_1)$ tal que $\omega = \omega^r$, entonces existe $\sigma \in G_1$ tal que $\omega(f) = f(\sigma) \quad \forall f \in \mathcal{O}$.

Demostración.- Puesto que G_1 y G_2 son grupos de Lie compactos; para probar que $G_1 = G_2$ aplicaremos el criterio usado en la proposición 7.5. Sea Λ cualquier representación de G_1 ; la restricción de Λ a G_2 es una representación P de G_2 . Supongamos que P contiene a la representación identidad de G_2 , es decir que la representación identidad de G_2 es de multiplicidad mayor que cero en P . Queremos entonces probar que la representación identidad de G_1 es de multiplicidad

mayor que cero en Λ .

Por suposición, existe una matriz regular δ tal que

$$\delta \Lambda(\omega \sigma) \delta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M(\sigma) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

para todo $\sigma \in G_1$. Sean $f_{kl}(\omega)$ los coeficientes de la representación $\delta \Lambda \delta^{-1}$ de G_1 , con $1 \leq k, l \leq d(\Lambda)$. Haciendo uso de la representación P_0 mencionada en la demostración del lema 9.1, denotemos por x_{ij} a los coeficientes de la representación $\tilde{P}_0$ de $\mathcal{M}(G_1)$. La restricción de $\tilde{P}_0$ a G_1 , siendo una representación fiel de G_1 , garantiza que las funciones $x_{ij}, \bar{x}_{ij}$ forman un sistema de generadores del anillo representativo de G_1 . De aquí se concluye que si para $\omega \in G_1$

$$f_{kl}(\omega) = F_{kl}(\dots x_{ij}(\omega) \bar{x}_{ij}(\omega) \dots)$$

donde cada F_{kl} es un polinomio de coeficientes complejos, tenemos que

$$F_{kl}(\dots x_{ij}(\omega \sigma) \bar{x}_{ij}(\omega \sigma) \dots) = \delta_{kl}, \quad \sigma \in G_1$$

Por otro lado tenemos que $x_{ij}(\omega \sigma) = \alpha_{ij}^{\sigma}(\sigma) \quad \forall \sigma \in G_1$,
 $x_{ij}(\omega) = \omega(\alpha_{ij}^{P_0}) \quad \forall \omega \in G_1$. Puesto que $\omega = \omega^r$, tenemos
 que $\bar{x}_{ij}(\omega) = \overline{\omega(\alpha_{ij}^{P_0})} = \overline{\omega(\alpha_{ij}^{P_0})} = \omega(\overline{\alpha_{ij}^{P_0}})$

y como ω es homomorfismo, las relaciones

$$F_{21}(\dots \alpha_{ij}^{P_0}, \overline{\alpha_{ij}^{P_0}} \dots) = \delta_{21}$$

implican que $F_{21}(\dots \chi_{ij}(\omega) \overline{\chi_{ij}(\omega)} \dots) = \delta_{21}$

de donde

$$\rho \wedge (\omega) \rho^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

Si $\{e_1, \dots, e_{d(N)}\}$ es la base de $\mathbb{C}^{d(N)}$ correspondiente a la representación matricial $\rho \wedge \rho^{-1}$ de G_1 , claramente el espacio generado por e_1 es invariante bajo $\rho \wedge \rho^{-1}$ y

$\rho \wedge (\omega) \rho^{-1}(\lambda e_1) = \lambda e_1$, es decir, la representación identidad de G_1 es de multiplicidad mayor que cero en $\wedge$. Esto demuestra la proposición 9.1. ////

En el caso en que G admite al menos una representación fiel P , tomando $P_0 = P + \overline{P}$ en el lema 9.1, vemos que P_0 es también una representación fiel. Si denotamos por χ_{ij} a los coeficientes de P afirmamos que el mapeo de G en G_1 definido por $\sigma \longrightarrow \omega_\sigma$ es isomorfismo. En efecto, hasta ver - que este mapeo es inyectivo (La proposición 9.1 nos dice que es suprayectivo y ya se demostró que es homomorfismo). Si $\sigma, \tau \in G$, $\sigma \neq \tau$, existen i, j tales que $\chi_{ij}(\sigma) \neq \chi_{ij}(\tau)$, de modo que $\omega_\sigma(\chi_{ij}) = \chi_{ij}(\sigma) \neq \chi_{ij}(\tau) = \omega_\tau(\chi_{ij})$, es decir $\omega_\sigma \neq$

$\neq \omega_{\pi}$, y esto demuestra la afirmación.

§ 10 EL TEOREMA PRINCIPAL DE APROXIMACION

Ya hemos visto (en lema para la demostración a la proposición 7.3) que si G es un grupo compacto de matrices, entonces cualquier función continua sobre G es el límite de una sucesión de funciones en el anillo representativo Θ de G . Este resultado se cumple también para grupos de Lie compactos. Probaremos este resultado fundamental, el cual se debe a H. Peter y H. Weyl.

Teorema 10.1 (De Peter-Weyl) Sea G un grupo de Lie compacto y sea f una función continua sobre G . Si $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, existe en el anillo representativo Θ de G una función g tal que

$$|f(\sigma) - g(\sigma)| \leq a \quad \forall \sigma \in G$$

Para la demostración de este teorema haremos uso de algunas definiciones y lemas que damos a continuación.

Denotaremos por F al espacio de todas las funciones continuas con valores en los complejos definidas sobre G . Puesto que G es compacto, cada función $f \in F$ es acotada. Sea

$$\|f\|_\infty = \sup_{\sigma \in G} |f(\sigma)|$$

Claramente $\|af\|_\infty = |a| \|f\|_\infty \quad (a \in \mathbb{C})$

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Podemos hacer de F un espacio métrico, en el cual la distancia entre dos funciones f, g sea $\|f-g\|_\infty$.

Definición 12.1 Un subconjunto Φ de F diremos que es acotado si existe un número $A \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|f\|_\infty \leq A \quad \forall f \in \Phi$

La oscilación de una función $f \in F$ sobre un subconjunto E de G es el $\sup_{\sigma, \tau \in E} |f(\sigma) - f(\tau)|$

Definición 12.2 Un subconjunto $\Phi \subset F$ diremos que es un conjunto de funciones equicontinuas, si para todo $\alpha > 0$ existe una vecindad U_α del elemento neutro en G tal que si $f \in \Phi, \sigma \in U_\alpha$ la oscilación de f en σU_α es menor o igual que α .

Lema 12.1 Sea $\Phi \subset F$ un conjunto acotado de funciones equicontinuas, y sea $\alpha > 0$. Si un subconjunto $\Phi_\alpha \subset \Phi$ es tal que

$\|f-g\|_\infty > \alpha$, para todo par de f, g en Φ_α , entonces Φ_α es

finito.

Demostración. - Sea A un número tal que $\|f\|_\infty \leq A \quad \forall f \in \Phi$.

Si $\sigma_0 \in \mathcal{U}_\gamma$, el conjunto de números $f(\sigma_0), f \in \Phi$ está contenido en el subconjunto compacto del plano complejo definido por la desigualdad $|z| \leq A$. Se concluye inmediatamente que existe un subconjunto finito $\Psi_{\sigma_0} \subset \Phi$ con la siguiente propiedad: A cada $f \in \Phi$ le corresponde una función $f_1 \in \Psi_{\sigma_0}$ tal que la desigualdad $|f(\sigma_0) - f_1(\sigma_0)| < \gamma/6$ se cumple. (Tomando vecindades abiertas de radio $\gamma/6$ alrededor de cada complejo $f(\sigma_0)$ obtenemos una cubierta abierta del conjunto compacto $S = \overline{\{f(\sigma_0) / f \in \Phi\}}$).

Sea σ cualquier punto de $\sigma_0 \cup \mathcal{U}_\gamma$; tenemos entonces que

$$|f(\sigma) - f_1(\sigma)| \leq |f(\sigma) - f(\sigma_0)| + |f(\sigma_0) - f_1(\sigma_0)| + |f_1(\sigma_0) - f_1(\sigma)| < \gamma/2$$

Por otro lado, a cada pareja f, g de funciones de Φ_1 le podemos asociar un punto $\sigma = \sigma(f, g)$ tal que $|f(\sigma) - g(\sigma)| > \alpha$

Si $(f, g) \in \Phi_1 \times \Phi_1$ es una pareja tal que $\sigma(f, g) \in \sigma_0 \cup \mathcal{U}_\gamma$ no se puede dar el caso que para $f_1 \in \Psi_{\sigma_0}$, $|f(\sigma_0) - f_1(\sigma_0)| < \gamma/6$ y $|g(\sigma_0) - f_1(\sigma_0)| < \gamma/6$. Por otra parte si $(f, g), (f', g') \in \Phi_1 \times \Phi_1$ son tales que $\sigma(f, g), \sigma(f', g') \in \sigma_0 \cup \mathcal{U}_\gamma$, $|f(\sigma_0) - f_1(\sigma_0)| < \gamma/6$ y $|f_1(\sigma_0) - f_1(\sigma)| < \gamma/6$, entonces $f = f'$; análogamente para g y g' , de modo que si Ψ_{σ_0} tiene M funciones, a lo más pueden

existir $\sum_{i=1}^{m-1} i$ parejas $(f, g) \in \Phi_1 \times \Phi_1$ tales que $\sigma(f, g) \in \sigma_0 \cup \sigma_k$.

Puesto que G es compacto puede ser cubierto por un número finito de conjuntos $V_1, \dots, V_n$, cada uno de los cuales es de la forma $\sigma_0 \cup \sigma_k$. Puesto que existe sólo un número finito de parejas $(f, g) \in \Phi_1 \times \Phi_1$ tales que $\sigma(f, g) \in V_i$, $1 \leq i \leq n$ concluimos que Φ_1 es finito. ////

Lema 10.2 Si una sucesión de funciones pertenece a un conjunto Φ acotado y equicontinuo, es posible extraer de ella una sub-sucesión la cual converge uniformemente sobre G .

Demostración.— Sea $\mu > 0$ un entero. Podemos construir un subconjunto finito $\Phi_\mu \subset \Phi$ con las siguientes propiedades:

- 1) Si $f, g \in \Phi_\mu$, $f \neq g$ entonces $\|f - g\|_\mu \geq \frac{1}{\mu}$
- 2) Si f es cualquier función en Φ , existe una función $g \in \Phi_\mu$ tal que $\|f - g\|_\mu < \frac{1}{\mu}$

Sea $f_i \in \mathcal{F}$. Si $f_1, \dots, f_r$ han sido definidas, y si existe una función f tal que $\|f - f_i\| \geq \frac{1}{\mu}$ para $1 \leq i \leq r$ tomamos $f_{r+1} = f$.

Este proceso inductivo no puede continuar indefinidamente, debido al lema 10.1. Si se finaliza en f_s hacemos $\Phi_\mu = \{f_1, \dots, f_s\}$.

Sea $\{f_m\}$ una sucesión de funciones en Φ . Sea M_0 el conjunto de enteros mayores que cero. Definiremos por inducción sobre μ un subconjunto infinito $M_\mu \subset M_0$. Supongamos $\mu \geq 0$ y que M_μ ha sido definido. Entonces, puesto que Φ_μ es fini-

to $\forall \mu$, existe una función $g_{\mu+1} \in \Phi_{\mu+1}$ tal que la desigualdad $\|f_m - g_{\mu+1}\|_u < \frac{1}{\mu+1}$ se cumple para un conjunto infinito de enteros $m \in M_\mu$. $M_{\mu+1}$ deberá ser el conjunto de estos enteros. En cada M_μ hay un entero $m_\mu > \mu$. Puesto que $M_\nu \subset M_\mu$ para $\nu > \mu$, tenemos que $\|f_{m_\nu} - g_\mu\|_u < \frac{1}{\mu}$, $\|f_{m_\mu} - f_\mu\| < \frac{1}{\mu}$, de este modo $\|f_{m_\nu} - f_{m_\mu}\|_u < \frac{2}{\mu}$. Se concluye que la sucesión $\{f_{m_\nu}\}$ converge uniformemente sobre C_Y . ////

Introduciremos ahora en F una operación, la cual es una generalización del producto escalar. Si $f, g \in F$, sea

$$f \cdot g = \int_{C_Y} f(\sigma) \bar{g}(\sigma) d\sigma$$

donde la integral es la de Haar, normalizada por la condición

$$\int_{C_Y} d\sigma = 1$$

Veamos ahora las siguientes propiedades:

- 1) Para $g \in F$ fija $f \cdot g$ es lineal en f , es decir $(a_1 f_1 + a_2 f_2) \cdot g = a_1 (f_1 \cdot g) + a_2 (f_2 \cdot g)$, ($a_1, a_2 \in \mathbb{C}$).
- 2) $g \cdot f = \overline{f \cdot g}$ ya que $\overline{\int_{C_Y} f \bar{g}} = \int_{C_Y} \overline{f \bar{g}} = \int_{C_Y} g \bar{f}$
- 3) si $f \neq 0$ $f \cdot f > 0$

Sea $\|f\| = (f \cdot f)^{1/2}$. Si $a, b \in \mathbb{R}$, tenemos que $(af + bg) \cdot (af + bg) = af \cdot (af + bg) + bg \cdot (af + bg) = a^2 (f \cdot f) + ab (f \cdot g) + ab (g \cdot f) + b^2 (g \cdot g) = a^2 (f \cdot f) + 2ab \operatorname{Re}(f \cdot g) + b^2 (g \cdot g)$

Puesto que esta expresión es mayor que cero para toda pareja de

reales a, b , haciendo $a = \|g\|$, $b = \|f\|$, obtenemos que

$$(R_2(f \cdot g))^2 = (f \cdot f)(g \cdot g), \text{ es decir } |R_2(f \cdot g)| \leq \|f\| \|g\|.$$

Sea v un número real tal que $\exp(\sqrt{-1}v)(f \cdot g) = |f \cdot g|$

Si reemplazamos f por $(\exp \sqrt{-1}v) f$, vemos que la desigualdad de Schwarz se verifica

$$|f \cdot g| \leq \|f\| \|g\|.$$

Por otro lado tenemos $\|f + g\|^2 = f \cdot f + 2R_2(f \cdot g) + g \cdot g \leq \|f\|^2 + 2\|f\| \|g\| + \|g\|^2$ lo cual prueba la desigualdad de Minkowski.

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

Ahora sea R una función continua con valores complejos, definida sobre $G \times G$, la cual satisface la siguiente condición

$$R(\sigma, z) = \overline{R(z, \sigma)}$$

Si f es cualquier función en F , denotaremos por Kf la función definida por la fórmula

$$Kf(\sigma) = \int_G R(\sigma, z) f(z) dz$$

Probaremos que $Kf \in F$. Sea $a > 0$. Existe una vecindad U_a del elemento identico $E \in G$ tal que la desigualdad

$$|R(\sigma\rho, z) - R(\sigma, z)| < a$$

se cumple siempre que $\rho \in U_a$. En efecto, de no ser así, exis-

tiría una sucesión $\{\rho_m\}$ de elementos de G , tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_m = \varepsilon, \quad |K(\sigma \rho_m, z) - K(\sigma, z)| \geq a$$

de manera que deberíamos tener que $|K(\sigma \varepsilon, z) - K(\sigma, z)| \geq a$, lo

cual es imposible.

Si $\rho \in U_a$, tenemos

$$\begin{aligned} (1) \quad |Kf(\sigma \rho) - Kf(\sigma)| &= \left| \int_G K(\sigma \rho, z) f(z) dz - \int_G K(\sigma, z) f(z) dz \right| \\ &= \left| \int_G (K(\sigma \rho, z) - K(\sigma, z)) f(z) dz \right| \leq a \int_G |f(z)| dz = a (1 \cdot \|f\|) \leq \end{aligned}$$

$\leq a \|f\|$; lo cual demuestra la continuidad de la función Kf .

más aún, si $A = \sup_{(\sigma, z) \in G \times G} |K(\sigma, z)|$ tenemos que

$$(2) \quad |Kf(\sigma)| \leq A \int_G |f(z)| dz \leq A \|f\|$$

Estas dos últimas desigualdades demuestran el siguiente lema:

Lema 10.3 El operador K mapea al conjunto de todas las funciones $f \in F$, tales que $\|f\| \leq 1$ sobre un conjunto de funciones acotado y equicontínuo.

Otra propiedad del operador K está expresada en la fórmula

$$(3) \quad Kf \cdot g = f \cdot Kg$$

la cual es similar a la fórmula que expresa el caracter hermitiano de una matriz. Para demostrar esta fórmula observemos que

$$kf \cdot g = \int_G \left(\int_G k(\sigma, z) f(z) dz \right) \bar{g}(\sigma) d\sigma = \int_{G \times G} k(\sigma, z) f(z) \bar{g}(\sigma) d\sigma dz = \\ = \int_G f(z) \left(\int_G \bar{k}(z, \sigma) \bar{g}(\sigma) d\sigma \right) dz = f \cdot kg$$

Diremos que un número C es el valor característico de la función k si existe una función $\varphi \neq 0$ en F tal que $k\varphi = C\varphi$. Cualquiera de estas funciones es llamada una función característica perteneciente al valor C . Nuestro siguiente paso será probar la existencia de valores característicos.

Puesto que $|kf(\sigma)| \leq A \|f\|$

$$\|kf\| = (kf \cdot kf)^{1/2} = \left[\int_G kf \overline{kf} \right]^{1/2} = \left[\int_G |kf|^2 \right]^{1/2} \leq \\ \leq \left[\int_G A^2 \|f\|^2 \right]^{1/2} = A \|f\|.$$

por lo tanto los números $\|kf\|$ son acotados cuando f varía en el conjunto de funciones tales que $\|f\| = 1$. Denotemos por $\|k\|$ a la mínima cota superior de $\|kf\|$, $\|f\| = 1$, es decir $\|k\| = \sup \{ \|kf\| / \|f\| = 1 \}$. Claramente $\|kf\| \leq \|k\| \|f\|$ para cualquier $f \in F$, debido a que k es lineal y $\| \frac{f}{\|f\|} \| = 1$

Lema 10.4 $\|k\| = \sup \{ |kf \cdot f| / \|f\| = 1 \}$

Demostración.— Si $\|f\| = 1$, tenemos que $|kf \cdot f| \leq \|kf\| \|f\| \leq \|k\|$. Sea $C = \sup \{ |kf \cdot f| / \|f\| = 1 \}$. Se concluye que $|kf \cdot f| \leq C \|f\|^2$ para cualquier $f \in F$. Sean f y g dos funciones en F tales que $\|f\| = \|g\| = 1$. Entonces

$$K(f+g) \cdot (f+g) = Kf \cdot f + Kg \cdot g + Kf \cdot g + Kg \cdot f = \\ = Kf \cdot f + Kg \cdot g + 2 \operatorname{Re}(Kf \cdot g) \leq C \|f+g\|^2$$

$$K(f-g) \cdot (f-g) = Kf \cdot f + Kg \cdot g - 2 \operatorname{Re}(Kf \cdot g) \geq -C \|f-g\|^2$$

$$\text{De este modo } 4 \operatorname{Re}(Kf \cdot g) \leq C (\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2) = \\ = 2C (\|f\|^2 + \|g\|^2) = 4C, (\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)).$$

Si suponemos que $Kf \neq 0$ y tomamos $g = \|Kf\|^{-1} Kf$ obtenemos que $\|Kf\| \leq C$. Esta última desigualdad se cumple además si

$Kf = 0$. Hemos probado por lo tanto que $\|K\| = C$. ////

Lema 10.5 Al menos uno de los valores $\|K\|$ o $-\|K\|$ es un valor característico de la función K .

Demostración.— Podemos encontrar una sucesión $\{f_m\}$ de funciones en F tales que $\|f_m\| = 1$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} Kf_m \cdot f_m = \|K\|$ o bien $\lim_{m \rightarrow \infty} Kf_m \cdot f_m = -\|K\|$. Sea $C = \lim_{m \rightarrow \infty} Kf_m \cdot f_m$.

Reemplazando, si es necesario la sucesión $\{f_m\}$ por una subsecuencia, podemos suponer sin pérdida de generalidad que la sucesión $\{Kf_m\}$ converge uniformemente sobre G a una función φ (Lemas 10.2, 10.3). Para ver que $\varphi \in F$, consideremos $\alpha > 0$. Puesto que Kf_m converge uniformemente a φ , existe M tal que $\|Kf_m - \varphi\|_\infty < \alpha/3$ si $m \geq M$. Puesto que $Kf_m \in F$, existe una vecindad U_α de ε , tal que $\|Kf_m(\sigma_p) - Kf_m(\sigma)\| < \alpha/3$ para todo $p \in U_\alpha$; de este modo $|\varphi(\sigma_p) - \varphi(\sigma)| \leq$

$\leq |\varphi(\sigma\rho) - kf_m(\sigma\rho)| + |kf_m(\sigma\rho) - kf_m(\sigma)| + |kf_m(\sigma) - \varphi(\sigma)| < a$,
 luego, efectivamente $\varphi \in F$.

Observemos ahora que la operación $f \cdot g$ es continua con respecto a la métrica definida por la norma uniforme $\| \cdot \|_u$. En efecto, tenemos que $\| f \|_u^2 = \int_G f(z) \overline{f(z)} dz \leq \| f \|_u^2$, de este modo $|(f_1 - f_2) \cdot (g_1 - g_2)| \leq \| f_1 - f_2 \|_u \| g_1 - g_2 \|_u \leq \| f_1 - f_2 \|_u \| g \|_u$, luego $|(f_1 - f_2) \cdot g| \leq \| f_1 - f_2 \|_u \| g \|_u$.

Puesto que $k f_m \cdot f_m = f_m \cdot k f_m = \overline{k f_m \cdot f_m}$, $k f_m \cdot k$ es real, luego entonces $\| k f_m - c f_m \|^2 = \| k f_m \|^2 + c^2 \| f_m \|^2 - 2c (k f_m \cdot f_m)$, y el miembro de la derecha tiende a $\| \varphi \|^2 - c^2$ cuando m crece indefinidamente. Se concluye que $\| \varphi \| \geq c$, de modo que $\varphi \neq 0$ cuando $c \neq 0$. Por otro lado tenemos que $\| k f_m \|^2 \leq \| k \|^2 = c^2$, y por lo tanto el lado derecho de nuestra fórmula es menor o igual que $2c^2 - 2c (k f_m \cdot f_m)$, y esta sucesión tiende a cero. Concluimos que $\lim_{m \rightarrow \infty} \| k f_m - c f_m \| = 0$, de este modo que $\lim_{m \rightarrow \infty} \| k(k f_m) - c k f_m \| = 0$ ya que k es lineal y continuo. Puesto que $\lim_{m \rightarrow \infty} \| k f_m - \varphi \| = 0$ tenemos que $\lim_{m \rightarrow \infty} \| k(k f_m) - k \varphi \|_u = 0$, por consiguiente $\| k \varphi - c \varphi \| = \lim_{m \rightarrow \infty} \| k(k f_m) - c k f_m \| = 0$ lo que demuestra que $k \varphi = c \varphi$. El lema queda por lo tanto demostrado si $c \neq 0$. Si $c = 0$, tenemos que $\| k \| = 0$, $k f = 0 \forall f$, luego el lema queda probado trivialmente. ///

Diremos que dos funciones $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$ son ortogonales una con respecto a la otra si $\varphi \cdot \psi = 0$.

Sea Φ el conjunto de funciones características de k , las cuales pertenecen a valores característicos distintos de cero. Podemos encontrar un subconjunto $\Phi^* \subset \Phi$ con las siguientes propiedades:

- 1) Si φ y ψ están en Φ^* y $\varphi \neq \psi$, entonces $\varphi \cdot \psi = 0$.
- 2) $\|\varphi\| = 1$ para toda $\varphi \in \Phi^*$.
- 3) Φ^* es maximal con las propiedades 1) y 2), es decir no es posible incluir propiamente a Φ^* en algún otro subconjunto de Φ que cumpla con las propiedades 1) y 2).

En efecto, si $\mathcal{D}$ es la familia de subconjuntos de Φ cuyos elementos cumplen con las propiedades 1) y 2), $\mathcal{D}$ no es vacía debido a que si $\varphi \in \Phi$, $\{\frac{\varphi}{\|\varphi\|}\} \in \mathcal{D}$. Damos a $\mathcal{D}$ el orden parcial $<$ definido por

$$\Phi_1 < \Phi_2 \text{ si } \Phi_1 \subset \Phi_2, \Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{D}.$$

aplicando el lema de zorn obtenemos Φ^* .

Lema 10.6 Sea $\alpha > 0$. Existe solamente un número finito de funciones en Φ^* las cuales pertenecen a valores característicos mayores que α en valor absoluto

Demostración. Sean $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ funciones de Φ^* tales que $k\varphi_i = \alpha_i \varphi_i$ y $|\alpha_i| > \alpha$ para todo i . Tenemos que $k(\varphi_i - \varphi_j) =$

$= c_i \varphi - c_j \varphi_j$, de manera que $\|K(\varphi_i - \varphi_j)\|^2 = c_i^2 + c_j^2 > 2a^2$.
 Por otro lado $\|K(\varphi_i - \varphi_j)\|_u^2 \geq \int_G |K(\varphi_i - \varphi_j)|^2 = \|K(\varphi_i - \varphi_j)\|^2$
 es decir $\|K(\varphi_i - \varphi_j)\|_u \geq \|K(\varphi_i - \varphi_j)\| > \sqrt{2}a$, y el le-
 ma se sigue de los lemas 10.1 y 10.3. ////

Lema 10.7 Cualquier función $f \in \Phi$ es una combinación lineal de un número finito de funciones en Φ^* .

Demostración.— Sea C el valor característico de f , y sean $\varphi_1, \dots, \varphi_h$ las funciones de Φ^* que tienen a C como valor característico. Sea $f' = f - \sum_{i=1}^h (f \cdot \varphi_i) \varphi_i$. Puesto que $Kf = Cf$, $K\varphi_i = C\varphi_i$, tenemos además que $Kf' = Cf'$. Más aún, f' es ortogonal a $\varphi_1, \dots, \varphi_h$. Sea $\psi \in \Phi^*$ distinta de $\varphi_1, \dots, \varphi_h$; entonces ψ tiene como valor característico a $d \neq C$. Tenemos que $f' \cdot \psi = \frac{1}{d} (f' \cdot K\psi) = \frac{1}{d} (Kf' \cdot \psi) = \frac{f'}{d} (f' \cdot \psi)$ luego $f' \cdot \psi = 0$, es decir f' es ortogonal a toda función de Φ^* . Si $f' \neq 0$, el conjunto compuesto de los elementos de Φ^* y $\frac{f'}{\|f'\|}$ deberá tener las propiedades 1) y 2) mencionadas antes, lo cual es imposible. Por lo tanto $f' = 0$, lo que demuestra el lema.

////

Se concluye del lema 10.6 que Φ^* es un conjunto numerable. Ordenamos los elementos de Φ^* en una sucesión $\{\varphi_\mu\}$, $1 \leq \mu \leq \infty$ ó $1 \leq \mu \leq \mu_0$ en el caso en que Φ^* sea finito. Si denotamos por c_μ el valor característico de φ_μ , observamos que si

$\sum_{\mu} c_{\mu} \psi_{\mu}$ es una combinación lineal finita de funciones de Φ^* ,
 $\| \sum c_{\mu} \psi_{\mu} \|^2 = \sum |c_{\mu}|^2$

Lema 10.8 (Desigualdad de Bessel). Si f es una función continua en F , la serie $\sum_{\mu} |f \cdot \psi_{\mu}|^2$ es convergente y su suma es menor o igual que $\|f\|^2$.

Demostración.- Sea $g_i = f - \sum_{\mu \leq i} (f \cdot \psi_{\mu}) \psi_{\mu}$, donde i es cualquier entero positivo si Φ^* es infinito, y es a lo más igual al número de elementos de Φ^* si Φ^* es finito.

$$g_i \cdot \psi_{\mu} = (f - \sum_{\mu \leq i} (f \cdot \psi_{\mu}) \psi_{\mu}) \cdot \psi_{\mu} = f \cdot \psi_{\mu} - f \cdot \psi_{\mu} = 0 \quad \text{para } 1 \leq \mu \leq i$$

de lo cual se concluye que

$$\|f\|^2 = \|g_i\|^2 + \sum_{\mu \leq i} |f \cdot \psi_{\mu}|^2$$

Esto demuestra el lema

////

Lema 10.9 Si $f \in F$, la serie $\sum_{\mu} (kf \cdot \psi_{\mu}) \psi_{\mu}$ converge uniformemente sobre C_f a la función kf .

Demostración.-

$$\sum_{\mu \leq i} (kf \cdot \psi_{\mu}) \psi_{\mu} = \sum_{\mu \leq i} (kf \cdot \psi_{\mu}) \frac{k \psi_{\mu}}{c_{\mu}} =$$

$$= \sum_{\mu \leq i} (f \cdot k \psi_{\mu}) \frac{k \psi_{\mu}}{c_{\mu}} = \sum_{\mu \leq i} (f \cdot \psi_{\mu}) k \psi_{\mu} = k \left(\sum_{\mu \leq i} (f \cdot \psi_{\mu}) \psi_{\mu} \right)$$

Haciendo uso de un resultado obtenido en la demostración al lema 10.8, tenemos que $\| \sum_{\mu \leq i} (kf \cdot \psi_{\mu}) \psi_{\mu} \| \leq A \| \sum_{\mu \leq i} (f \cdot \psi_{\mu}) \psi_{\mu} \| =$

$= A \left(\sum_{\mu=1}^n |f \cdot \psi_{\mu}|^2 \right)$ y del lema 10.8 podemos concluir que el último

término en la expresión anterior tiende a cero cuando λ y δ crecen indefinidamente (en el caso en que Φ^* es infinito), por lo tanto la serie dada converge uniformemente. Resta demostrar que su suma es Kf .

Sea $K_n(\sigma, z) = K(\sigma, z) - \sum_{\mu=1}^n c_{\mu} \psi_{\mu}(\sigma) \overline{\psi_{\mu}(z)}$. Puesto que cada c_{μ} es real, tenemos que $K_n(\sigma, z) = \overline{K_n(z, \sigma)}$. Si $\psi \in F$, tenemos que $K_n \psi = K \psi - \sum_{\mu=1}^n c_{\mu} (\psi \cdot \psi_{\mu}) \psi_{\mu}$ (K_n se define para K_n como K fue definida para K). Se concluye que $K_n \psi \cdot \psi_{\mu} =$

$$= K \psi \cdot \psi_{\mu} - c_{\mu} (\psi \cdot \psi_{\mu}) \psi_{\mu} = \psi \cdot K \psi_{\mu} - c_{\mu} (\psi \cdot \psi_{\mu}) = 0 \text{ si } 1 \leq \mu \leq n$$

En particular si ψ es una función característica de K_n perteneciente a un valor característica $d \neq 0$ tenemos que $\psi \cdot \psi_{\mu} = 0$ para $1 \leq \mu \leq n$, por lo tanto $K \psi = K_n \psi = d \psi$, y ψ es una función característica de K perteneciente a d . Se concluye que ψ es combinación lineal de las funciones ψ_{ν} para las cuales $c_{\nu} = d$. Tenemos que $\psi = \sum_{\nu=d} b_{\nu} \psi_{\nu}$, y $b_{\nu} = \psi \cdot \psi_{\nu}$, de este modo $b_{\nu} = 0$ si $\nu \leq n$. Sea $a > 0$, si n es suficientemente grande de manera que todos los índices μ para los cuales $|c_{\mu}| \geq a$ sean menores que n , podemos concluir que $|d| < a$, de modo que por el lema 10.5 $\|K_n\| \leq a$. Se concluye que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|K_n f\| = 0$ si Φ^* es infinito, y si Φ^* es finito $K_n f = 0$ si n es el número de elementos de Φ^* . Pero -

$$k_n f = k f - \sum_{\mu=1}^n (k f \cdot \varphi_\mu) \varphi_\mu, \text{ de este modo}$$

$$\|k f - \sum_{\mu} (k f \cdot \varphi_\mu) \varphi_\mu\| = 0$$

lo que completa la demostración del lema. ////

Lema 10.10 Si la función $k(\sigma, z)$ es de la forma $X(\sigma^{-1}z)$ donde X es una función continua sobre G tal que $X(\sigma^{-1}) = \overline{X(\sigma)}$, entonces cada función característica de k cuyo valor característico es $c \neq 0$ es una función representativa de G .

Demostración.— Si f es cualquier función en F y $\rho \in G$, denotamos por f_ρ la función definida por $f_\rho(\sigma) = f(\rho\sigma)$. Supongamos que f es una función característica de k con valor característico $c \neq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} c f_\rho(\sigma) &= c f(\rho\sigma) = k f(\rho\sigma) = \int_G k(\rho\sigma, z) f(z) dz = \\ &= \int_G X(\sigma^{-1}\rho^{-1}z) f(z) dz = \int_G X(\sigma^{-1}z') f(\rho z') dz' = \\ &= \int_G X(\sigma^{-1}z') f_\rho(z') dz' = k f_\rho(\sigma) \end{aligned}$$

en virtud del carácter invariante de la integral de Haar. De este modo f_ρ es otra vez una función característica con valor característico c . Podemos suponer que las funciones del conjunto Φ^* las cuales tienen a c como valor característico son

$\varphi_1, \dots, \varphi_h$. Por el lema 10.7 tenemos que

$$\varphi_{\rho} = \sum_{i=1}^h g_{i\rho}(\rho) \varphi_i \quad g_{i\rho}(\rho) = \varphi_{\rho} \cdot \varphi_i$$

Sea $P(\rho) = (g_{i\rho}(\rho))$. Entonces debido a que

$$\begin{aligned} \varphi_{\rho_1 \rho_2}(\sigma) &= \sum_{i=1}^h g_{i\rho_1}(\rho_1) \varphi_i(\sigma) = \sum_{i=1}^h \left(\int_{\mathcal{G}} \varphi_{\rho_1 \rho_2}(z) \overline{\varphi_i}(z) dz \right) \varphi_i(\sigma) = \\ &= \sum_{i=1}^h \left(\int_{\mathcal{G}} \varphi_{\rho_1}(\rho_2 z) \overline{\varphi_i}(z) dz \right) \varphi_i(\sigma) = \\ &= \sum_{i=1}^h \left(\int_{\mathcal{G}} \varphi_{\rho_1}(z) \overline{\varphi_i}(\rho_2^{-1} z) dz \right) \varphi_i(\sigma) = \\ &= \sum_{i=1}^h \left(\int_{\mathcal{G}} \varphi_{\rho_1}(z) \overline{\varphi_i}(\rho_2^{-1} z) dz \right) \varphi_i(\sigma) = \\ &= \sum_{i=1}^h \left(\int_{\mathcal{G}} \varphi_{\rho_1}(z) \overline{\varphi_i}(z) dz \right) \varphi_i(\sigma) = \\ &= \sum_{i=1}^h \left(\int_{\mathcal{G}} \varphi_{\rho_1}(\rho_2 z) \overline{\varphi_i}(z) dz \right) \varphi_i(\sigma) = \\ &= \sum_{i=1}^h \left(\int_{\mathcal{G}} (\varphi_{\rho_1})_{\rho_2}(z) \overline{\varphi_i}(z) dz \right) \varphi_i(\sigma) = \\ &= \sum_{i=1}^h ((\varphi_{\rho_1})_{\rho_2} \cdot \varphi) \varphi_i(\sigma) = (\varphi_{\rho_1 \rho_2})_{\rho_1}(\sigma) \quad , \text{ es decir} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\rho_1 \rho_2} &= (\varphi_{\rho_2})_{\rho_1} \quad , \text{ luego } (\varphi_{\rho_1 \rho_2})_{\rho_1} = \left(\sum_{k=1}^h g_{k\rho_1}(\rho_2) \varphi_k \right)_{\rho_1} = \\ &= \sum_{k=1}^h g_{k\rho_1}(\rho_2) \varphi_{k\rho_1} = \sum_{k=1}^h g_{k\rho_1}(\rho_2) \left(\sum_{i=1}^h g_{i\rho_1}(\rho_1) \varphi_i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^h \sum_{k=1}^h g_{i\rho_1}(\rho_1) g_{k\rho_1}(\rho_2) \varphi_i = \sum_{i=1}^h g_{i\rho_1}(\rho_1 \rho_2) \varphi_i, \quad y \end{aligned}$$

$$(g_{i\rho_1}(\rho_1)) (g_{k\rho_1}(\rho_2)) = \left(\sum_{k=1}^h g_{i\rho_1}(\rho_1) g_{k\rho_1}(\rho_2) \right) = (g_{i\rho_1}(\rho_1 \rho_2)),$$

de modo que $P(\rho_1 \rho_2) = P(\rho_1) P(\rho_2)$

Por otro lado, como φ_i es continua en $\mathcal{G}$, y este es compacto,

φ_i es además uniformemente continua en G_f . De esto se concluye que para cada $\alpha > 0$, existe una vecindad U_α del elemento identico $\varepsilon \in G_f$ tal que $\|\varphi_{j\rho} - \varphi_i\|_\alpha < \alpha$ siempre que $\rho \in U_\alpha$. De esto podemos concluir que $\lim_{\rho \rightarrow \varepsilon} g_{ij}(\rho) =$

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow \varepsilon} \varphi_{j\rho} \cdot \varphi_i &= \delta_{ij} = g_{ij}(\varepsilon) \text{ ya que } \lim_{\rho \rightarrow \varepsilon} \varphi_{j\rho} \cdot \varphi_i = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow \varepsilon} \int_{G_f} \varphi_{j\rho}(z) \overline{\varphi_i}(z) dz = \int_{G_f} \lim_{\rho \rightarrow \varepsilon} \varphi_j(\rho z) \overline{\varphi_i}(z) dz = \\ &= \int_{G_f} \varphi_j(z) \overline{\varphi_i}(z) dz = \varphi_j \cdot \varphi_i = \delta_{ij} \end{aligned}$$

El mapeo $\rho \longrightarrow P(\rho)$ de G_f en el conjunto de matrices de grado h es por lo tanto una representación continua de G_f y las funciones g_{ij} son funciones representativas. Para ver - que las funciones g_{ij} son continuas basta checarlo como ya lo hicimos en el elemento identico. Pero tenemos que $\varphi_j(\rho) =$
 $= \varphi_{j\rho}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^h g_{ij}(\rho) \varphi_i(\varepsilon)$, lo que demuestra que cada es en particular una función representativa. El lema 10.10 queda por lo tanto probado. ////

Lema 10.11 Sea χ una función continua sobre G_f tal que $\chi(\sigma^{-1}) = \overline{\chi(\sigma)}$, y sea $\alpha > 0$. Entonces existe una función representativa g de G_f tal que $\|\chi - g\|_\alpha < \alpha$

Demostración.- Sea K el operador asociado a la función $k(\sigma, \tau) = \overline{\chi(\sigma^{-1}\tau)}$. Determinamos una vecindad V del elemento identico ε tal que la desigualdad $|\overline{\chi(\sigma^{-1}\tau)} - \overline{\chi(\sigma^{-1})}| < \alpha/2$

se cumpla para todo $z \in V$. Podemos construir una función continua f_1 con valores reales no negativos tal que $f_1(z) \neq 0$

$f_1(\sigma) = 0$ si $\sigma \in V^c$, (lema de Uryshon). El número $J = \int_G f(z) dz$ es distinto de cero. Sea $f = J^{-1} f_1$, luego $\int_G f(z) dz =$

Por otra parte

$$|X(\sigma) - Kf(\sigma)| = |\bar{X}(\sigma^{-1}) - Kf(\sigma)| = \left| \int_G (\bar{X}(\sigma^{-1}) - \bar{X}(\sigma^{-1}z)) f(z) dz \right| < \frac{\alpha}{2}$$

Haciendo uso de los lemas 10.9 y 10.10 vemos que existe una función representativa g tal que $\|Kf - g\|_u < \frac{\alpha}{2}$. Se concluye que $\|X - g\|_u < \alpha$, lo cual prueba el lema. //

Sea ahora f una función continua sobre G arbitraria. Sean $X_1(\sigma) = f(\sigma) + \bar{f}(\sigma^{-1})$, $X_2(\sigma) = \sqrt{-1} (f(\sigma) - \bar{f}(\sigma^{-1}))$ de modo que $X_i(\sigma^{-1}) = \bar{X}_i(\sigma)$, $i=1, 2$, y debido a que $f(\sigma) = \frac{1}{2} [(f(\sigma) + \bar{f}(\sigma^{-1})) - \sqrt{-1} (\sqrt{-1} (f(\sigma) - \bar{f}(\sigma^{-1})))] = \frac{1}{2} [X_1(\sigma) - \sqrt{-1} X_2(\sigma)]$, es decir $f = \frac{1}{2} (X_1 - \sqrt{-1} X_2)$ y debido a que X_1 y X_2 pueden ser aproximadas por funciones representativas, lo mismo se cumple para f . Esto demuestra el teorema 10.1. //

§ 11 PRIMERAS APLICACIONES DEL TEOREMA PRINCIPAL

DE APROXIMACION

Teorema 11.1 Un grupo de Lie compacto admite al menos una representación fiel.

Demostración.- Sea G un grupo de Lie compacto. Haciendo uso de los comentarios posteriores a la proposición 7.5, vemos que para probar que G admite una representación fiel es suficiente probar que si $\sigma \in G$, $\sigma \neq E$, existe una representación P de G tal que $P(\sigma)$ no es la matriz identidad.

Sea f una función continua sobre G tal que $f(\sigma) \neq f(E)$. Puesto que f puede ser aproximada por funciones representativas vemos que existe una función representativa la cual toma - valores distintos en σ y E , y nuestra afirmación se sigue inmediatamente de este hecho. ////

Proposición 11.1 Sea H un subgrupo cerrado de un grupo de Lie G , entonces cualquier representación irreducible de H es de multiplicidad mayor que cero en la restricción a H de alguna representación de G .

Demostración.- La demostración es inmediata haciendo uso del

teorema 11.1 y de la proposición 7.4.

Teorema 11.2 (Teorema de Tannaka) Sea $\mathcal{R}$ el conjunto de todas las representaciones de un grupo de Lie compacto G . Sea G_1 el conjunto de todas las representaciones S de $\mathcal{R}$ las cuales satisfacen las condiciones suplementarias $S(\bar{P}) = \overline{S(P)}$, donde P es cualquier elemento de $\mathcal{R}$ y $\bar{P}$ es el conjugado imaginario de P . Si definimos una multiplicación en G_1 por la fórmula $S_1 S_2(P) = S_1(P) S_2(P)$, G_1 es un grupo. Sea σ cualquier elemento de G y definamos la representación S_σ de $\mathcal{R}$ por $S_\sigma(P) = P(\sigma)$, entonces el mapeo $\sigma \longrightarrow S_\sigma$ es un isomorfismo de G y G_1 .

Demostración.- Esto se sigue inmediatamente de los comentarios que siguen a la proposición 9.1, y del teorema 11.1. ///

Proposición 11.2 Sea f una función continua sobre un grupo de Lie compacto G tal que $f(\sigma) = f(\tau \sigma \tau^{-1}) \quad \forall \sigma, \tau \in G$.

Si α es cualquier número mayor que cero, existe una función f_1 , la cual es una combinación lineal de caracteres de representaciones irreducibles de G , tal que $|f(\sigma) - f_1(\sigma)| \leq \alpha$ para todo $\sigma \in G$.

Demostración.- Sea P cualquier representación unitaria irreducible de G ; denotemos por $g_j(\sigma)$ a los coeficiente de $P(\sigma)$.

Entonces

$$g_{ij}(z\sigma z^{-1}) = \sum_{kl} g_{ik}(z) g_{kl}(\sigma) g_{lj}(z^{-1})$$

y $g_{lj}(z^{-1}) = \overline{g_{lj}}(z)$. Haciendo uso de las relaciones de ortogonalidad tenemos

$$\int_{\mathcal{G}} g_{ij}(z\sigma z^{-1}) dz = \sum_{kl} \int_{\mathcal{G}} g_{ik}(z) g_{kl}(\sigma) g_{lj}(z^{-1}) dz = 0$$

$$\text{si } i \neq j, \text{ y } \int_{\mathcal{G}} g_{ii}(z\sigma z^{-1}) dz = d^{-1} \chi(\sigma)$$

donde d y χ son respectivamente el grado y el caracter de la representación P .

A partir del teorema general de aproximación, sabemos que existe una función f_2 del anillo representativo de $\mathcal{G}$ tal que $|f(\sigma) - f_2(\sigma)| \leq a$ para todo $\sigma \in \mathcal{G}$. Se concluye que

$$\left| \int_{\mathcal{G}} f(z\sigma z^{-1}) dz - \int_{\mathcal{G}} f_2(z\sigma z^{-1}) dz \right| \leq a$$

Puesto que $f(\sigma) = f(z\sigma z^{-1})$, tenemos que

$$\int_{\mathcal{G}} f(z\sigma z^{-1}) dz = f(\sigma)$$

Por otro lado f_2 es una combinación lineal de coeficientes de representaciones unitarias irreducibles de $\mathcal{G}$, y por lo tanto la función $f_1(\sigma) = \int_{\mathcal{G}} f_2(z\sigma z^{-1}) dz$ es una combinación lineal de caracteres de representaciones irreducibles de $\mathcal{G}$. La proposición 12.2 queda por lo tanto demostrada. ////

BIBLIOGRAFIA

- [1] Cardenas T. Humberto y Lluís R. Emilio. Módulos Semi-simples y Representación de Grupos Finitos. Sociedad matematica mexicana, Serie 1. Ed. F. Trillas S. A. México 1970.
- [2] Chevalley C. Theory of Lie Groups. Princeton University Press 1946. Octava edición 1970.
- [3] Dugundji J. Topology. Allin and Bacon Inc. Boston 1966. Novena edición 1974.
- [4] Fraleigh John B. First Course in Abstract Algebra. Addison-Wesley Publishing Company. World Student Series. Cuarta edición 1971.
- [5] Hewitt E. and Stromberg K. Real and Abstract Analysis. Springer-Verlag Heidelberg New York 1965.
- [6] Hewitt. E. and Ross K. Abstract Harmonic Analysis. Volumen 1. Springer-Verlag Berlin. Gottingen Heidelberg 1963.
- [7] Herstein I. N. Topics in Algebra. Xerox College Publishing. Segunda edición 1971.
- [8] Moore John T. Elements of Linear Algebra and Matrix Theory. Mc Graw-Hill Book Company 1968.