UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

conceptos de lógica matemática, teoría de conjuntos y funciones para científicos de áreas biológicas y de la salud

TESIS QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
M A T E M A T I C A
P R E S E N T A

SILVIA ALATORRE FRENK

1980

PREFACIO

La confección de La Tesis siempre es motivo de preocupación, desde que estamos en el último año de la carrera. A mí me preocupaba no sólo el tema, sino el tipo de la tesis: en principio podía plantearme desde emprender todo un trabajo teórico para tratar de encontrar resultados originales, pasando por la consabida solución de trabajar sobre un artículo y medio "fusilármelo", medio completarlo, hasta buscar hacer un trabajo que de veras sirviera para algo. Las tres perspectivas tenían sus ventajas y sus desventajas: la primera podía lanzarme a un trabajo creativo, pero era muy azaroso; la segunda implicaba un trabajo fácil y rápido, pero poco estimulante; la tercera podía resultar en un trabajo creativo y estimulante, pero era azaroso y muy probablemente largo. Debo confesar que pasé un buen tiempo tratando de decidirme; finalmente elegí la última solución. El proceso ha sido en efecto largo (como año y medio), pero también ha sido muy estimulante y (al menos así lo creo) bastante creativo.

Una vez tomada la decisión acerca del tipo de tesis que quería hacer, el tema fue menos problemático. Yo he cursado, aparte de la carrera de Matemáticas, varias materias de la carrera de Biología (Biología General, Biología Celular, Bioquímica, Biología Molecular, Genética, Embriología, Inmunología y otras), porque desde la preparatoria me ha interesado la interdisciplina de las Biomatemáticas. De hecho, trabajo desde 1974 en el IMSS en esa área. El trabajo me ha permitido adquirir una experiencia bastante amplia, a través tanto de impartir cursos de Biomatemáticas y Bioestadística a varios niveles a médicos, químicos, biólogos y veterinarios, como de efectuar trabajos interdisciplinarios para los que he aportado, principalmente, el diseño experimental y el análisis estadístico de investigaciones biomédicas (algunas clínicas, la mayoría básicas). Este trabajo se origina, pues, en una decisión sobre el tipo de tesis que debía hacer y en mi interés y mi experiencia interdisciplinarios, pero su desarrollo no hubiera podido ser sin el invaluable apoyo que significó la dirección del Dr. Ignacio Méndez Ramírez.

Como señalo en la Introducción, el objetivo del trabajo es contribuir a la desmitificación de las Matemáticas para los científicos de las áreas biológicas y de la salud. Es por esto que he buscado darle una forma de entre libro de texto y trabajo de divulgación, lo cual obviamente implica que el nivel matemático expuesto es bastante elemental, ya que he tratado, principalmente, de sentar las bases de una traducción del lenguaje diario que manejan estos científicos a un lenguaje más formal que les permita tanto trabajar interdisciplinariamente como seguir estudiando en textos matemáticos. Mi idea es incluir este trabajo de tesis dentro de un libro de texto que abarque, después de esta primera unidad , una que incluya Algebra, conceptos elementales de Cálculo y Probabilidad, y una unidad de Bioestadística, con Conceptos Básicos, Estadística Descriptiva, Conceptos de Prueba de Hipótesis, Pruebas de Hipótesis Típicas, Regresión y Diseño Experimental. Espero poder realizar este proyecto.

He buscado ilustrar ampliamente el texto con ejemplos y con ejercicios tomados de la Biología y la Medicina, para facilitarles a los científicos su estudio. Sin embargo, he deslizado también, de vez en cuando, algunos ejemplos y ejercicios que son puramente matemáticos: espero que los científicos "caigan en la trampa" y le agarren así gusto al terrible "fantasma" que significan frecuentemente para ellos las Matemáticas. Con la misma idea, he introducido parte de la teoría que matemáticamente se considera importante pero cuya aplicación biomédica no es inmediata como ejercicios: tal es el caso del producto cartesiano y de la composición de funciones entre otros. Por otra parte, he hecho algunas concesiones para permitirles una mejor comprensión, como presentar la recta no como $y = mx + b$ sino como $y = a + bx$, previendo que algún día estudiarán Regresión Lineal.

Espero que esta tesis contribuya a la creación de trabajos interdisciplinarios: tanto los matemáticos como otros científicos tenemos mucho que aprender unos de otros.

Conceptos de

LOGICA MATEMATICA

TEORIA DE CONJUNTOS

y FUNCIONES

para científicos de áreas biológicas y de la salud

Silvia Alatorre Frenk

INDICE

INTRODUCCION

La idea de hacer este trabajo fue surgiendo a lo largo de cinco años de experiencia interdisciplinaria en el área de las Biomatemáticas, experiencia que ha ido mostrando la necesidad de desmitificar las Matemáticas para los científicos de las áreas biológicas y de la salud.

Las Matemáticas han sido tradicionalmente consideradas por estos científicos como una estructura rígida y formal que nada o muy poco les dice acerca de la realidad concreta en la que se mueven: muy frecuentemente les ha parecido difícil y hasta incongruente relacionar los problemas biológicos, humanos, sociales, etc. que constituyen su campo de trabajo con números, ecuaciones, fórmulas y demás artefactos formales que involucran símbolos extraños y abstracciones refinadas. Esta concepción de las Matemáticas, que está bastante generalizada, se debe no a que las Matemáticas sean en efecto tan rígidas e inútiles, y mucho menos a una estrechez de visión por parte de los científicos en cuestión, sino a que el sistema de enseñanza de las Matemáticas a nivel medio y medio superior no se ha preocupado desgraciadamente por hacer de su presentación algo menos rígido, más agradable y sobre todo algo que surja de la realidad que nos rodea y que se revierta sobre ella permitiendo conocerla mejor.

Es pues comprensible que los médicos, biólogos, veterinarios, agrónomos, etc. suelan considerar las Matemáticas como una disciplina engorrosa que es un mal necesario durante la secundaria y la preparatoria e innecesario después. El énfasis que hacen los matemáticos acerca de la necesidad de integrar las Matemáticas a sus propias disciplinas suele tomarse como proselitismo, y los argumentos se escuchan con la tolerancia impaciente que se le concede a un publicista que trata de convencer de la necesidad de comprar un artículo innecesario.

Por otra parte, estos científicos están encontrando actualmente que cada vez con mayor frecuencia la investigación en sus áreas utiliza herramientas matemáticas en distintas fases del método científico, cuando no se basa directamente en fundamentos matemáticos. Esto resulta muchas veces en que los científicos, al leer los reportes de estas investigaciones, pasan por alto toda la parte matemática y no asimilan los artículos más que parcialmente. Pero la eficacia de la herramienta matemática es indudable, porque ha permitido avances científicos de mucho valor: uno de los mejores ejemplos en este sentido es la Estadística, que ayuda, de una manera clara y bastante segura, a manejar la información de una parte de la realidad para resumirla y para obtener de ella conocimiento acerca de la realidad global. Es así como los científicos de las áreas biológicas y de la salud se enfrentan con la necesidad, ahora más tangible y genuina, de llenar sus lagunas en el terreno matemático, para poder tanto asimilar críticamente las investigaciones de otros, como emprender las suyas propias con un equipo matemático sólido.

La diferencia entre los estudiantes preparatorianos y los "biocientíficos" que emprenden el estudio de las Matemáticas no es sólo de edad sino, sobre todo, de motivación, pero suele suceder que si los científicos regresan a sus antiguos libros de texto vuelven a encontrar el tema engorroso y estéril y se desaniman más o menos rápidamente. Es pues necesaria la creación de nuevos manuales que, hablando el lenguaje de estos científicos, contribuyan a motivarlos para seguir adelante en su estudio.

Desde luego, no se trata de hacer matemáticos (y mucho menos matemáticos teóricos) de los "biocientíficos", pero sí es importante que éstos tengan las bases matemáticas necesarias para emprender por su cuenta aplicaciones sencillas y para poder hablar un lenguaje común que permita un trabajo interdisciplinario con matemáticos en casos más complejos; para esto, es obvio que también los matemáticos deben hacer un esfuerzo para la creación de ese lenguaje común, adquiriendo a su vez algunas nociones básicas en las áreas biológicas y de la salud. Es por esto que los manuales de Matemáticas para "biocientíficos" deben tener una importancia más formativa que informativa: el lenguaje común es sobre todo una actitud lógica y ordenada ante los fenómenos a estudiar. Aquí conviene tal vez hacer una aclaración. Un reproche que frecuentemente se les hace a los matemáticos que trabajan interdisciplinariamente con otros científicos es que tienden a interpretar la -

realidad en base a ciertas "casillas" prefabricadas, porque suelen tener un modo de pensar demasiado "cuadriculado". Este reproche está justificado en muchos casos, porque la realidad, y sobre todo la biológica, es demasiado compleja como para poder encasillarla fácilmente, pero eso no debe llevar a un rechazo absoluto de este modo de pensar: el ideal es tener la capacidad de pensar de un modo ordenado y claro cuando es conveniente o necesario, sin perder la capacidad de considerar otros factores de la realidad (sicológicos, éticos, sociales, etc.).

Las Matemáticas proveen a los científicos de las áreas biológicas y de la salud una herramienta que les puede ayudar a comprender y manejar mejor los fenómenos que estudian. Por ello, es importante que la adquisición de esta herramienta se vea ligada desde el principio con ejemplos de aplicaciones prácticas en la biomedicina, para que el mito de las Matemáticas como una disciplina engorrosa, innecesaria y esotérica se convierta para los "biocientíficos" en una visión de una herramienta sencilla, agradable, útil y ligada a la realidad.

Este trabajo intenta contribuir al proceso de desmitificación de las Matemáticas, buscando sentar las bases lógicas y conceptuales para un estudio profundo de otras herramientas matemáticas más sofisticadas, como la Estadística. Es decir: este trabajo no pretende habilitar a los científicos de las áreas biológicas y de la salud para el manejo de herramientas matemáticas sofisticadas, sino facilitarles la adquisición de éstas, exponiendo conceptos fundamentales con múltiples ejemplos de aplicación en las áreas de interés.

El trabajo está dividido en tres capítulos. El primero ("Lógica") expone las bases de pensamiento lógico común a todo trabajo científico. El segundo ("Conjuntos") presenta la traducción del lenguaje lógico a un lenguaje que es cada vez más utilizado en aplicaciones prácticas y fundamental en el estudio de la Probabilidad: el lenguaje conjuntista. El último capítulo ("Funciones y Gráficas") introduce un tema fundamental en el estudio del Cálculo y de la Estadística entre otros, que es el análisis de las relaciones funcionales y de sus modos de representación gráfica.

Cada capítulo está dividido en secciones que a su vez incluyen cierto número de incisos; para facilitar las numerosas referencias cruzadas que se hacen a lo largo del trabajo se han numerado decimalmente capítulos, secciones e incisos (por ejemplo: 1.2.3 es el tercer inciso de la segunda sección del primer capítulo, mientras que 3.2.1 es el primer inciso de la segunda sección del tercer capítulo). Los incisos marcan ciertos puntos que ocurren a lo largo del texto, como definiciones (que quedan encuadradas), tablas y demostraciones y, sobre todo, ejemplos. Estos últimos están tomados principalmente de las áreas biológicas y de la salud, escogidos con la idea de que los científicos encuentren desde el principio la relación del tema con sus campos de interés (tanto generales como con algún grado de especialización), aunque también hay ejemplos tomados de la cotidianidad que nos es común y algunos que surgen de abstracciones matemáticas sencillas.

La penúltima sección de cada capítulo comprende una serie de ejercicios de aplicación; están ordenados aproximadamente de acuerdo con el orden que sigue el material en el texto, y no de acuerdo al grado de dificultad que implican. La última sección de cada capítulo incluye una bibliografía mínima del tema, a la que los lectores pueden recurrir para resolver dudas o para ampliar sus conocimientos. Por otra parte, algunas fuentes bibliográficas de los ejemplos y ejercicios basados en temas biomédicos se encuentran al final del trabajo.

Globalmente, este trabajo está enfocado a facilitarles a los "biocientíficos" la adquisición de la capacidad de formalizar su trabajo científico. Es por esto que se ha buscado partir de la base lógica de la Ciencia, y por lo que el único requisito para emprender el estudio del texto es tener algunos conceptos muy elementales de álgebra de secundaria.

Algunas recomendaciones pueden ser útiles. Por una parte, vale la pena recordar que todo aprendizaje incluye una parte teórica y una parte práctica que deben estar muy ligadas entre sí; por ello se aconseja ir resolviendo los ejercicios a medida que se avanza en el estudio del texto: mientras más ejercicios se resuelvan y más constante sea esta práctica, mejor será el proceso de aprendizaje. Para facilitar esta práctica, se han incluido después del tercer capítulo las soluciones de algunos de los ejercicios, con el fin de que el estudiante pueda ir verificando por sí mismo sus propios resultados.

Por otra parte, se recomienda no pasar por alto ninguna parte del texto: esto incluye leer siempre los símbolos como se indica (la lista de símbolos después de esta Introducción puede ayudar a tal fin), revisar incisos anteriores cuando se hace referencia a ellos, observar cuidadosamente tablas, gráficas y ejemplos, y seguir de cerca las demostraciones que se hacen en el capítulo 2 (son ejemplos de demostraciones típicas, aparte de que sirven para familiarizarse con la notación).

Por último, este texto habrá cumplido sus objetivos si estimula a los científicos de las áreas biológicas y de la salud a seguir adelante en el estudio de otras ramas de las Matemáticas que les pueden permitir una mayor comprensión y un mejor manejo de los fenómenos que estudian.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo no hubiera sido posible de no ser por la experiencia adquirida al impartir cursos: a mis alumnos les debo un agradecimiento por su paciencia para servir (involuntariamente) de conejillos de indias.

Las autoridades de la Unidad de Investigación Biomédica del Centro Médico Nacional del Instituto Mexicano del Seguro Social brindaron un invaluable apoyo; en particular, el doctor Carlos Beyer y el doctor Agustín González Licea.

Fueron también muy importantes los valiosos consejos y el apoyo de los doctores Pedro Solís Cámara, Adalberto Parra y Homero Hernández, del IMSS, de Eugenio Aguilar, de Natalia de Bengoechea y, desde luego, del doctor Ignacio Méndez Ramírez, de la UNAM.

Por último, pero no por ello menos importante, quiero agradecer muy afectuosamente el excelente (artístico, diría yo) trabajo mecanográfico de la Sra. Virginia Hernández Bejarano, quien tuvo una paciencia de santa con los símbolos y conmigo. Asimismo, debo un especial agradecimiento al Sr. Carlos Rivera por su cuidadoso trabajo en la confección de gráficas y dibujos.

CAPITULO 1

LOGICA

Una de las características de la Ciencia es que maneja información exacta y clara. Para la transmisión de esa información, es necesario un lenguaje que sea también exacto y claro: un lenguaje científico, que elimine las imprecisiones del lenguaje natural. Ejemplos de lenguajes científicos son el de la Química, el de las Matemáticas, el de la Lógica.

Pero ¿qué es la Lógica? El diccionario la define como "la ciencia que estudia las leyes y modos del conocimiento científico". También podemos decir que la Lógica es un conjunto de "reglas de juego" que son aplicadas a una materia prima (las proposiciones) del que se sirve el método científico para garantizar su consistencia. Y es por esa utilización que hace el método científico de la Lógica por lo que nos interesa estudiar su lenguaje.

1.1 PROPOSICIONES

Las proposiciones que maneja la Lógica son las oraciones que son de tipo declarativo o afirmativo.

Ejemplos:

Las siguientes oraciones son proposiciones:

1.1.1 Los peces son vertebrados

1.1.2 México está en Europa

1.1.3 Marta es católica o protestante

Las siguientes oraciones no son proposiciones:

1.1.4 Ven para que te consuele

1.1.5 ¿Quiere usted ser mi novia?

1.1.6 ¡Cuidado, que lo atropellan!

Como se puede ver en los ejemplos, las proposiciones, por ser afirmaciones, pueden ser verdaderas o falsas. Entre las proposiciones, distinguimos además dos tipos: las proposiciones simples, también llamadas elementales o atómicas y las proposiciones compuestas o moleculares. Las simples se lla-

LISTA DE SIMBOLOS

SIMBOLO	SIGNIFICADO	INCISO
$\sim$	no	1.2.7
$\wedge$	y	1.3.5
$\vee$	o	1.5.6
$\rightarrow$	si..., entonces	1.6.13
$\leftrightarrow$	si y sólo si	1.7.12
$\Rightarrow$	implica	1.8.4
$\Leftrightarrow$	es equivalente a	1.8.5
$\{\quad\}$	conjunto	2.1.9
$\in$	pertenece a	2.1.11
$\notin$	no pertenece a	2.1.11
$\mid$	tal que	2.1.20 - 2.1.21
$=$	igual	2.1.24 - 2.1.25
$\neq$	distinto	
Ω	conjunto universo	2.2.5
ϕ	conjunto vacío	2.2.14
$\bar{A}$	complemento de A	2.3.3
$\cap$	intersección	2.4.3
$\cup$	unión	2.5.3
$-$	diferencia	2.6.3
$\subset$	subconjunto de	2.7.3
$\subsetneq$	subconjunto propio de	2.7.6
$\mathcal{P}(A)$	potencia de A	2.7.13
$\mathbb{N}$	conjunto de los números naturales	2.9.1
$\mathbb{Z}$	conjunto de los números enteros	2.9.3
$\mathbb{Q}$	conjunto de los números racionales	2.9.5
$\mathbb{R}$	conjunto de los números reales	2.9.7
$\times$	producto cartesiano	2.10.35
$f:A \rightarrow B$	f va de A en B	3.1.10
$x \mapsto y$	f de x es y	3.1.10
$f(x)$	f de x	3.1.10
$\circ$	composición de funciones	3.5.31

man así porque no es posible subdividirlas en expresiones que sean, a su vez, proposiciones, mientras que las compuestas están formadas por dos o más proposiciones simples unidas por expresiones como "no es cierto que", "y", "o", etc., llamadas conectivas.

Ejemplos:

Las siguientes proposiciones son simples:

1.1.7 La hemoglobina es roja

1.1.8 El cilantro produce cáncer

Las siguientes proposiciones son compuestas:

1.1.9 No es cierto que el cilantro produce cáncer

1.1.10 En verano llueve y en invierno hace frío

1.1.11 Los pigmeos son gigantes o febrero tiene 30 días

1.1.12 Si la testosterona es un lípido, entonces Don Quijote fue emperador de China

A continuación vamos a ver algunos elementos de Lógica proposicional. Estudiaremos las relaciones entre proposiciones, sin ocuparnos de su contenido. Para simplificar este estudio, representaremos a las proposiciones simples con letras minúsculas: p, q, r ..., y a las compuestas con esas mismas letras y con algunos símbolos especiales para las conectivas.

1.2 NEGACION

Consideremos los siguientes ejemplos, tomados de la sección anterior:

Ejemplos:

1.2.1 El cilantro produce cáncer

1.2.2 No es cierto que el cilantro produce cáncer

Puede observarse que la proposición compuesta del ejemplo 1.2.1 es la negación de la proposición simple del ejemplo 1.2.1. En este caso, usamos como conectiva de negación la expresión "no es cierto que", pero podríamos utilizar otras conectivas para lograr el mismo efecto de negación:

Ejemplos:

1.2.2 No es cierto que el cilantro produce cáncer

1.2.3 No es el caso que el cilantro produce cáncer

1.2.4 No ocurre que el cilantro produce cáncer

1.2.5 Es falso que el cilantro produce cáncer

1.2.6 El cilantro no produce cáncer

Las proposiciones de los ejemplos 1.2.2 a 1.2.6 son equivalentes: en todas ellas estamos negando la proposición del ejemplo 1.2.1, estamos indicando que ocurre lo contrario de ella. Así, en forma general, diremos que si una proposición cualquiera es verdadera, su contrario, o su negación, es falsa; y viceversa, si una proposición cualquiera es falsa, su negación es verdadera.

Simplificaremos lo anterior usando una notación simbólica específica: usaremos el símbolo "$\sim$" para indicar una negación:

1.2.7 $\boxed{\text{Si } p \text{ es una proposición, su negación se escribe } \sim p \text{ y se lee "no } p\text{"}}$

1.2.8 Ejemplo:

Si la proposición "El ornitorrinco es mamífero" es representada por la letra r, entonces $\sim r$ (no r) representa la proposición "El ornitorrinco no es mamífero", (o cualquiera de sus equivalentes).

De esta manera, diremos que si una proposición p es verdadera, $\sim p$ es falsa; y si p es falsa, $\sim p$ es verdadera, lo cual puede ser expuesto en forma de tabla (las tablas de este tipo se llaman tablas de verdad):

1.2.9 Tabla de verdad de la negación

p	$\sim p$
V	F
F	V

Ejemplos:

1.2.10 Si p representa la proposición "El DNA es portador de la información genética", entonces p es verdadera y $\sim p$ ("El DNA no es portador de la información genética") es falsa.

1.2.11 Si p representa la proposición "El riñón es un músculo" entonces p es falsa y $\sim p$ ("El riñón no es un músculo") es verdadera.

1.3 CONJUNCION

Consideremos las siguientes proposiciones:

Ejemplos:

1.3.1 Carlos consulta un libro de bioquímica

1.3.2 Carlos consulta un libro de fisicoquímica

1.3.3 Carlos consulta un libro de bioquímica y Carlos consulta un libro de fisicoquímica

La proposición compuesta del ejemplo 1.3.3 es la conjunción de las dos proposiciones simples anteriores, unidas mediante la conectiva "y". De hecho, en el lenguaje ordinario usaríamos una oración equivalente a la del ejemplo 1.3.3:

1.3.4 Carlos consulta un libro de bioquímica y uno de fisicoquímica

En las proposiciones de los ejemplos 1.3.3 y 1.3.4 estamos indicando que ocurren las dos proposiciones de los ejemplos 1.3.1 y 1.3.2, que son ambas verdaderas al mismo tiempo. En cualquier otro caso (Carlos no consulta un libro de bioquímica, o Carlos no consulta un libro de fisicoquímica, o Carlos no consulta ninguno de los dos libros), las proposiciones de los ejemplos 1.3.3 y 1.3.4 resultan falsas.

Como para la negación, una simbología específica nos ayudará a simplificar: usaremos el símbolo " $\wedge$ " para indicar una conjunción:

1.3.5 Si p es una proposición, y q otra, la conjunción de ambas se escribe $p \wedge q$ y se lee "p y q"

1.3.6 Ejemplo:

Si la proposición "En los pulmones y en las células se efectúa intercambio de gases" es representada por la letra r, y la proposición "La hemoglobina transporta oxígeno" es representada por la letra q, entonces $r \wedge q$, (r y q) representa la proposición "En los pulmones y en las células se efectúa intercambio de gases y la hemoglobina transporta oxígeno".

Puede observarse que en el ejemplo 1.3.6 la proposición r es a su vez una proposición compuesta: podemos formar la conjunción de proposiciones compuestas, de la misma manera que formamos la conjunción de proposiciones simples.

Para indicar que, en general, una conjunción de dos proposiciones p, q es verdadera si ambas son verdaderas y falsa en cualquier otro caso, podemos usar de nuevo una tabla de verdad, que nos exponga lo que sucede en cada caso:

1.3.7 Tabla de verdad de la conjunción

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplos:

1.3.8 Si p representa la proposición "El óvulo es una célula haploide" y q representa la proposición "El espermatozoide es una célula haploide", entonces p es verdadera, q es verdadera, y $p \wedge q$ ("El óvulo y el espermatozoide son células haploides") es verdadera.

1.3.9 Si p representa la proposición "La fotosíntesis se lleva a cabo en los cloroplastos" y q representa la proposición "Las plantas fotosintetizan en la oscuridad", entonces p es verdadera, q es falsa, y $p \wedge q$ ("La fotosíntesis se lleva a cabo en los cloroplastos y las plantas fotosintetizan en la oscuridad") es falsa.

1.3.10 Si p representa laproposición "Los huesos son músculos" y q representa la proposición "Los músculos están formados de fibras", entonces p es falsa, q es verdadera, y $p \wedge q$ ("Los huesos son músculos y los músculos están formados de fibras") es falsa.

1.3.11 Si p representa la proposición "El cerebro es regulado por el sistema circulatorio", y q representa la proposición "Las neuronas son reguladas por el estómago", entonces p es falsa, q es falsa, y $p \wedge q$ ("El cerebro es regulado por el sistema circulatorio y las neuronas por el estómago") es falsa.

1.4 TABLAS DE VERDAD Y PUNTUACION SIMBOLICA

Hemos visto ya dos tablas de verdad, y vamos a abrir un pequeño paréntesis dentro de nuestro estudio de Lógica proposicional para hablar un poco más de ellas.

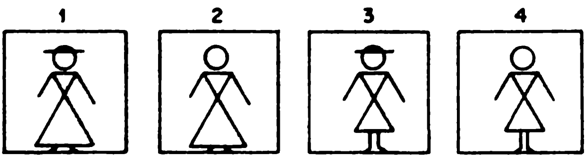
Las tablas de verdad sirven para indicar los <u>valores de verdad</u> (verdadera -

-V-, o falsa -F-) de las proposiciones compuestas en cada una de las posibles combinaciones de valores de verdad de las proposiciones que las componen. Cada renglón de la tabla es una de estas posibles combinaciones, que podríamos encabezar con la frase "¿qué pasaría si...?". De esta manera la tabla de verdad completa muestra todas las posibilidades, pero para aplicarla en un caso concreto, donde sí conocemos los valores de verdad de las proposiciones en juego, usamos sólo un renglón de ella.

1.4.1 Ejemplo:

Si p es la proposición "Alicia usa falda larga" y q es la proposición "Alicia usa sombrero", los cuatro renglones numerados del siguiente encabezado de tabla de verdad representan cada uno de los cuatro casos ilustrados abajo:

	p	q
1	V	V
2	V	F
3	F	V
4	F	F



En la tabla de verdad 1.2.9, en la que estaba en juego sólo una proposición (p), teníamos dos posibilidades: dos renglones; en la tabla de verdad -- 1.3.7, en la que estaban en juego dos proposiciones (p , q), obtuvimos cuatro posibles combinaciones. Si tuvieramos tres proposiciones (digamos, p, q, r), obtendríamos ocho posibles combinaciones de sus valores de verdad:

1.4.2 <u>Tabla de verdad para tres proposiciones</u> (encabezado)

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Y, en general,

1.4.3 $\boxed{\text{Para un número de proposiciones en juego igual a } n \text{, se tienen } 2^n \text{ renglones en la tabla verdad}}$

1.4.4. Ejemplos:

en la tabla 1.2.9, hay n=1 proposición y $2^1=2$ renglones
en la tabla 1.3.7, hay n=2 proposiciones y $2^2=4$ renglones
en la tabla 1.4.2, hay n=3 proposiciones y $2^3=8$ renglones

Desde luego, para formar una tabla de verdad, no basta con saber cuántos renglones tiene, sino que necesitamos saber también cómo llenarlos. Un procedimiento sistemático general es el siguiente:

Formar primero la tabla con tantas columnas como proposiciones estén en juego (n), y con el número de renglones ya calculado (2^n). Empezar en la última columna escribiendo alternadamente V y F, seguir con la penúltima, alternando ahora de dos en dos: V, V, F, F, etc., luego la antepenúltima, alternando de cuatro en cuatro, y seguir así hasta llegar a la primera, la cual tendrá la primera mitad de sus renglones con solamente V, y la segunda con solamente F.

Hasta ahora hemos hablado de las primeras columnas de una tabla de verdad, aquellas que muestran las proposiciones que van a ser combinadas en las siguientes columnas, para formar proposiciones más complejas. A medida que las proposiciones formadas se vayan haciendo más complejas, o sea, a medida que intervengan en ella más proposiciones y más conectivas, necesitaremos una puntuación para nuestro lenguaje. Para ilustrar esta necesidad, consideremos las siguientes proposiciones:

Ejemplos:

1.4.5 Perdonaron al hermano de Juan

1.4.6 Le cortaron la cabeza a Juan

1.4.7 No es cierto que perdonaron al hermano de Juan, y le cortaron la cabeza a Juan

1.4.8 No es cierto que perdonaron al hermano de Juan y le cortaron la cabeza a Juan

Las proposiciones de los ejemplos 1.4.7 y 1.4.8 son ambas composiciones de las de los ejemplos 1.4.5 y 1.4.6, y la única diferencia entre ellas es una coma, que por insignificante que parezca hace que Juan quede definitivamente sin cabeza en 1.4.7 y posiblemente con ella en 1.4.8. La función de la coma es indicar sobre qué actúa la conectiva "no es cierto que", y esta función debe ser llenada cuando manejemos proposiciones simbólicamente: la "puntuación" simbólica está dada por paréntesis:

1.4.9 | Encerramos entre paréntesis las proposiciones compuestas que son consideradas como un todo para operar con otras proposiciones. |

Veamos cómo quedan nuestros ejemplos anteriores usando notación simbólica: si p es la proposición del ejemplo 1.4.5. y q la del 1.4.6, tenemos:

Ejemplos:

1.4.5' p

1.4.6' q

1.4.7' $(\sim p) \wedge q$

1.4.8' $\sim (p \wedge q)$

Podremos ver en qué casos difieren las proposiciones de los ejemplos 1.4.7' y 1.4.8' si formamos las respectivas tablas de verdad:

1.4.10 Tabla de verdad de 1.4.7'

p	q	$\sim p$	$(\sim p) \wedge q$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

En la tabla 1.4.10, para calcular $(\sim p) \wedge q$, calculamos primero $(\sim p)$, - que es F si p es V, y viceversa (ver 1.2.9), y luego la conjunción de ésta con q, que es V sólo si ambas son V (ver 1.3.7).

1.4.11 Tabla de verdad de 1.4.8'

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

En la tabla 1.4.11, para calcular $\sim (p \wedge q)$, calculamos primero $(p \wedge q)$, que es V sólo si p y q son ambas V (ver 1.3.7), y luego la negación de ésta, que es F si $(p \wedge q)$ es V, y viceversa (ver 1.2.9).

Viendo ambas tablas de verdad, es fácil notar que ambas proposiciones coinciden en el primer (F) y en el tercer (V) renglón, y difieren en el segundo y en el cuarto. Si regresamos a los significados iniciales (1.4.7 y 1.4.8) veremos que ahí precisamente reside la diferencia de la que depende la cabeza de Juan: 1.4.8' puede ser V cuando q es F, y 1.4.7' sólo es V con q V.

Las tablas 1.4.10 y 1.4.11 son tablas que explicitan con detalle cada paso seguido. Podemos hacer esas mismas tablas en forma más comprimida:

1.4.12 Tabla de verdad comprimida de 1.4.7' y 1.4.8'

	p	q		($\sim$	p)	$\wedge$	q		$\sim$	(p	$\wedge$	q)
	V	V		F	V	$\boxed{F}$	V		$\boxed{F}$	V	V	V
	V	F		F	V	$\boxed{F}$	F		$\boxed{V}$	V	F	F
	F	V		V	F	$\boxed{V}$	V		$\boxed{V}$	F	F	V
	F	F		V	F	$\boxed{F}$	F		$\boxed{V}$	F	F	F
Paso No.	1	1		2	1	3	1		3	1	2	1

En la tabla 1.4.12, que es la forma comprimida de la 1.4.10 y la 1.4.11 juntas, hemos hecho lo siguiente: formamos tantas columnas como símbolos resultan al escribir una sola vez la(s) proposición(es) compuesta(s) que interesa(n), excluyendo los paréntesis (y no tantas columnas como proposiciones como en los ejemplos anteriores). A continuación numeramos los pasos (último renglón) de la siguiente manera: el primer paso consiste en poner las combinaciones de valores de verdad de p y q (primera y segunda columnas) y copiar estos valores tantas veces como aparecen p y q (cuarta, sexta, octava y décima columnas); en un segundo paso calculamos lo que podemos calcular a partir de lo que ya tenemos, que son, para la 1.4.7'; ($\sim$ p) (tercera columna, igual a la tercera de la tabla 1.4.10), y para la 1.4.8', (p $\wedge$ q) (novena columna, igual a la tercera de la tabla 1.4.11); en un tercer paso calculamos lo que podemos calcular con los elementos obtenidos de los pasos anteriores, tanto para la 1.4.7' (quinta columna, igual a la cuarta de la tabla 1.4.10), como para la 1.4.8' (séptima columna, igual a la cuarta de la tabla 1.4.11). En general, continuamos así hasta que el último paso nos da el resultado deseado. En este ejemplo, como la tabla está formada en realidad por dos, nos detenemos en dos pasos con número final 3, y ésos son los que comparamos.

1.5 DISYUNCION

Para volver a tomar el hilo de nuestro estudio de la Lógica proposicional, retomemos unos ejemplos anteriores para formar las siguientes proposiciones:

Ejemplos:

1.5.1 Carlos consulta un libro de bioquímica

1.5.2 Carlos consulta un libro de fisicoquímica

1.5.3 Carlos consulta un libro de bioquímica o Carlos consulta un libro de fisicoquímica

Decimos que la proposición compuesta del ejemplo 1.5.3 es la <u>disyunción</u> de las dos proposiciones simples anteriores, unidas mediante la conectiva "o". De hecho, en el lenguaje ordinario usaríamos una oración equivalente a la del ejemplo 1.5.3:

1.5.4 Carlos consulta un libro de bioquímica o uno de fisicoquímica

En las proposiciones de los ejemplos 1.5.3 y 1.5.4 estamos indicando que ocurre cuando menos una de las proposiciones de los ejemplos 1.5.1 y 1.5.2 (o bien Carlos consulta un libro de bioquímica, o bien Carlos consulta un libro de fisicoquímica, o bien Carlos consulta ambos libros). Dicho de otra manera, las proposiciones de los ejemplos 1.5.3 y 1.5.4 <u>sólo resultarían falsas si ambas proposiciones de los ejemplos 1.5.1 y 1.5.2 fueran simultáneamente falsas</u>. Aquí debemos hacer resaltar una ambiguedad del lenguaje ordinario: el significado de la conectiva "o" es a veces inclusivo y a veces exclusivo: en el primer caso se incluye la posibilidad de que ocurran ambas proposiciones al mismo tiempo, y en el segundo se excluye (o sucede una, o la otra, pero no ambas). Esta ambiguedad no puede ser reflejada en un lenguaje preciso como el que estamos construyendo:

1.5.5 En el lenguaje de la Lógica, la conectiva "o" se usa siempre en sentido inclusivo.

Necesitaremos también un símbolo para representar a esta conectiva: usaremos "v" para indicar una disyunción:

1.5.6 Si p es una proposición, y q es otra, la disyunción de ambas se escribe p v q y se lee "p o q".

1.5.7 Ejemplo:

Si la proposición "Las plantas fotosintetizan y transpiran" es representada por la letra p, y la proposición "Las plantas respiran y transpiran" es representada por la letra r, entonces p v r (p o r) representa la proposición "Las plantas fotosintetizan y transpiran o las plantas respiran y transpiran"o, abreviadamente, "Las plantas fotosintetizan o respiran, y transpiran"

Como en el caso de la conjunción, puede formarse una disyunción entre proposiciones compuestas, como en el ejemplo 1.5.7.

Por último, veamos la tabla de verdad correspondiente a la disyunción:

1.5.8 Tabla de verdad de la disyunción

p	q	p v q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplos:

1.5.9 Si p representa la proposición "Se obtiene ATP de la glicólisis", y q representa la proposición "Se obtiene ATP del ciclo de Krebs, entonces p es verdadera, q es verdadera, y p v q ("Se obtiene ATP de la glicólisis o del ciclo de Krebs") es verdadera.

1.5.10 Si p representa la proposición "La aspirina puede aliviar el dolor de cabeza" y q representa la proposición "La aspirina puede aliviar la ceguera", entonces p es verdadera, q es falsa, y p v q ("La aspirina puede aliviar el dolor de cabeza o la ceguera") es verdadera.

1.5.11 Si p representa la proposición "La hemoglobina transporta lípidos" y q representa la proposición "La hemoglobina transporta oxígeno", entonces p es falsa, q es verdadera, y p v q. ("La hemoglobina transporta lípidos u oxígeno) es verdadera.

1.5.12 Si p representa la proposición "El HCl es una base" y q representa la proposición "El NaOH es un ácido", entonces p es falsa, q es falsa, y p v q ("El HCl es una base o el NaOH es un ácido") es falsa.

1.6 CONDICIONAL

Consideremos de nuevo unas proposiciones de la sección 1.4:

Ejemplos:

1.6.1 Alicia usa falda larga

1.6.2 Alicia usa sombrero

1.6.3 Si Alicia usa falda larga, entonces Alicia usa sombrero

Decimos que la proposición compuesta del ejemplo 1.6.3 es una proposición condicional, formada por las proposiciones de los ejemplos 1.6.1 y 1.6.2

unidas mediante la conectiva "si..., entonces". Decimos también que la proposición simple del ejemplo 1.6.1 es el antecedente y la del 1.6.2 el consecuente de la condicional. La proposición condicional puede ser formada también mediante el uso de otras conectivas:

Ejemplos:

1.6.4 Si Alicia usa falda larga, entonces usa sombrero

1.6.5 Si Alicia usa falda larga, usa sombrero

1.6.6 Alicia usa sombrero si usa falda larga

1.6.7 Alicia usa falda larga sólo si usa sombrero

1.6.8 Si Alicia usa falda larga, también usa sombrero

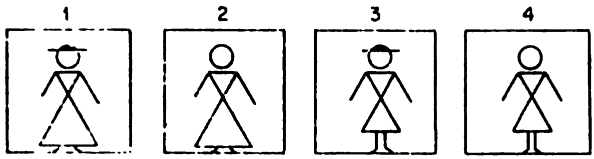
1.6.9 Cada vez que Alicia usa falda larga, usa sombrero

1.6.10 Cuando Alicia usa falda larga, usa sombrero

Las proposiciones de los ejemplos 1.6.4 a 1.6.10 son todas equivalentes a la del 1.6.3. De ellas podemos hacer las siguientes observaciones: la proposición del ejemplo 1.6.4 no es mas que la forma condensada, y más manejable en el lenguaje diario, de la del 1.6.3; la del 1.6.5 es una forma aún más condensada, y en cierto modo paralela a la del 1.6.6: nótese que en los ejemplos 1.6.5 y 1.6.6 la conectiva (si) precede y se aplica al antecedente, - mientras que en el 1.6.7 la conectiva (sólo si) precede y se aplica al consecuente.

En las proposiciones de los ejemplos 1.6.3 a 1.6.10 estamos expresando equivalentemente que si sucede que Alicia use falda larga, entonces forzosamente Alicia usa sombrero, pero no viceversa: puede suceder que Alicia use sombrero sin que Alicia use falda larga. Obsérvese que en estas proposiciones no estamos afirmando que Alicia use falda larga, sino solamente que cuando Alicia usa falda larga usa sombrero. Para aclarar esto, observemos nuevamente las ilustraciones:

1.6.11



En la primera, Alicia usa falda larga, y usa sombrero, por lo que no contradecimos la condicional "Si Alicia usa falda larga, usa sombrero": ésta resulta verdadera.

En la segunda ilustración, Alicia usa falda larga, pero no usa sombrero, lo que es una contradicción: la condicional resulta falsa.

En la tercera y la cuarta ilustraciones, Alicia no usa falda larga, por lo que no podemos contradecir la proposición "Si Alicia usa falda larga, usa sombrero": ésta no nos dice que deba suceder algo en el caso en el que Alicia no use falda larga. Así, independientemente de que Alicia use o no sombrero, la condicional resulta verdadera.

1.6.12 Ejemplo:

Imaginemos que para resolver un complicado caso criminalístico, llamamos a un detective, y le avisamos que le pagaremos si dice la verdad, y le dejaremos de pagar si miente. El detective estudia el caso y dice: "Si el mayordomo cojea, el asesinato ocurrió en el jardín". Supongamos que, aturdido por tan sorprendente declaración, el asesino (no forzosamente el mayordomo) confiesa, de tal manera que conocemos la verdad. Si nos imaginamos las cuatro posibilidades de esta historia (el mayordomo cojea o no, y el asesinato fue en el jardín o no), veremos que la única en la que dejamos de pagarle al detective es cuando le podemos comprobar que mintió: cuando el mayordomo en efecto cojea, pero el asesinato no fue en el jardín. En todos los demás casos, el detective dijo la verdad, y hay que pagarle.

Formalicemos ahora todo lo dicho sobre condicionales. Por principio de cuentas, necesitamos una notación simbólica: usaremos el símbolo " $\rightarrow$ " para expresar proposiciones condicionales:

1.6.13

Si p es una proposición, y q es otra, la condicional que tiene a p como antecedente y a q como consecuente, se escribe $p \rightarrow q$ y se lee "si p entonces q".

1.6.14 Ejemplo:

Si la proposición "Rodrigo no come bien" es representada por la letra r, y la proposición "Rodrigo adelgaza o se enferma" es representada por la letra s, entonces $r \rightarrow s$ (Si r entonces s) representa la proposición "Si Rodrigo no come bien, entonces Rodrigo adelgaza o se enferma", o, abreviadamente: "Si Rodrigo no come bien, adelgaza o se enferma"

Obsérvese que, como en el caso de la negación, la conjunción y la disyunción, se pueden formar proposiciones condicionales usando proposiciones compuestas, como en el ejemplo 1.6.14.

Podemos expresar que $p \rightarrow q$ implica que si p ocurre, entonces forzosamente ocurre q, de una de las siguientes maneras:

1.6.15 <u>$p \rightarrow q$ sólo es falsa si p es verdadera y q es falsa</u>

1.6.16 <u>p es condición suficiente para que ocurra q</u>. Por ejemplo, en 1.6.3 podemos decir que el que Alicia use falda larga es condición suficiente para que use sombrero: basta que use falda larga para que use sombrero.

1.6.17 q es condición necesaria para que ocurra p. Por ejemplo, en 1.6.3 podemos decir que el que Alicia use sombrero es condición necesaria para que use falda larga: necesita usar sombrero para usar falda larga.

1.6.18 Tabla de verdad de la condicional

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejemplos:

1.6.19 Si p representa la proposición "Las hembras de los mamíferos tienen mamas" y q representa la proposición "La vaca tiene mamas", entonces p es verdadera, q es verdadera, y $p \to q$ ("Si las hembras de los mamíferos tienen mamas entonces la vaca tiene mamas") es verdadera.

1.6.20 Si p representa la proposición "En la carne dejada al aire libre aparecen gusanos", y q representa la proposición "Hay generación espontánea", entonces p es verdadera, q es falsa, y $p \to q$ ("Si en la carne dejada al aire libre aparecen gusanos, entonces hay generación espontánea") es falsa (contradecible).

1.6.21 Si p representa la proposición "Hay generación espontánea" y q representa la proposición "En la carne dejada al aire libre aparecen gusanos", entonces p es falsa q es verdadera, y $p \to q$ ("Si hay generación espontánea, entonces en la carne dejada al aire libre aparecen gusanos") es verdadera (no contradecible).

1.6.22 Si p representa la proposición "El espermatozoide porta un homúnculo" y q representa la proposición "Los hijos no heredan características de la madre", entonces p es falsa, q es falsa, y $p \to q$ ("Si el espermatozoide porta un homúnculo, entonces los hijos no heredan características de la madre") es verdadera (no contradecible).

1.7 BICONDICIONAL

Consideremos de nuevo las proposiciones de la sección 1.6:

Ejemplos:

1.7.1 Alicia usa falda larga

1.7.2 Alicia usa sombrero

1.7.3 Si Alicia usa falda larga, usa sombrero

1.7.4 Si Alicia usa sombrero, usa falda larga

1.7.5 Si Alicia usa falda larga, usa sombrero, y si Alicia usa sombrero, usa falda larga

Podemos observar que la proposición del ejemplo 1.7.4 es la "viceversa" de la del 1.7.3: es la condicional que usa como antecedente la proposición del ejemplo 1.7.2 y como consecuente la del 1.7.1. En cuanto a la del 1.7.5, es la conjunción de las dos anteriores y decimos que es una proposición <u>bicondicional</u>. Veamos poco a poco cómo se puede transformar esta proposición en una más condensada, usando la equivalente condicional del ejemplo 1.6.5:

1.7.5 <u>Si</u> Alicia usa falda larga, usa sombrero, <u>y</u> <u>si</u> Alicia usa sombrero, usa falda larga.

1.7.6 Alicia usa falda larga <u>sólo si</u> usa sombrero, <u>y</u> <u>si</u> Alicia usa sombrero, usa falda larga (ver 1.6.7)

1.7.7 Alicia usa falda larga <u>sólo si</u> usa sombrero, <u>y</u> Alicia usa falda larga <u>si</u> usa sombrero (ver 1.6.6)

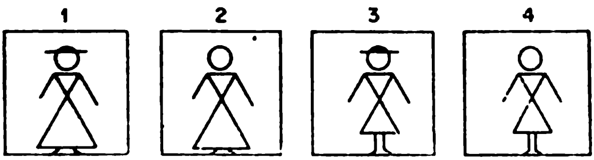
1.7.8 Alicia usa falda larga si usa sombrero, y Alicia usa falda larga sólo si usa sombrero (es la misma que la anterior, sólo intercambiando las dos proposiciones de la conjunción)

1.7.9 Alicia usa falda larga si usa sombrero, y sólo si usa sombrero

1.7.10 Alicia usa falda larga si y sólo si usa sombrero

Es bajo esta última forma, usando la conectiva "si y sólo si" que se manejan generalmente las proposiciones bicondicionales. Las proposiciones de los ejemplos 1.7.5 a 1.7.10 son todas equivalentes, y en ellas estamos expresando que si Alicia usa falda larga, usa sombrero forzosamente, y viceversa. Si nos remitimos a las ilustraciones (1.6.11), vemos que:

1.7.11



En la primera, la primera condicional (1.7.3) es verdadera, y en la segunda (1.7.4) también, por lo que la conjunción de ambas (bicondicional) resulta verdadera.

En la segunda, la primera condicional (1.7.3) es falsa y la segunda (1.7.4) verdadera, por lo que la conjunción de ambas (bicondicional) resulta falsa.

En la tercera, la primera condicional (1.7.3) es verdadera y la segunda (1.7.4) falsa, por lo que la conjunción de ambas (bicondicional) resulta falsa.

En la cuarta, ambas condicionales (1.7.3 y 1.7.4) son verdaderas, por lo - que su conjunción (bicondicional) resulta verdadera.

Como anteriormente, para formalizar necesitamos primero una notación simbó lica: usaremos el símbolo "$\leftrightarrow$" para expresar proposiciones bicondicionales:

1.7.12 $\boxed{\text{Si } p \text{ es una proposición, y } q \text{ es otra, la bicondicional de ambas se escribe } p\leftrightarrow q \text{ y se lee "} p \text{ si y sólo si } q\text{"}}$

1.7.13 Ejemplo:

Si la proposición "En la capital hay smog y otras conta minaciones" es representada por la letra s, y la proposición "los capitalinos son muchos o muy irresponsables" es representada por la letra p, entonces $s\leftrightarrow p$ (s si y sólo si p) representa la proposición "En la capital - hay smog y otras contaminaciones si y sólo si los capita linos son muchos o muy irresponsables"

A continuación mostramos varias maneras de expresar $p\leftrightarrow q$:

1.7.14 <u>p y q son simultáneamente verdaderas y simultáneamente falsas</u>

1.7.15 <u>p es condicion necesaria y suficiente para que ocurra q</u>

1.7.16 <u>q es condición necesaria y suficiente para que ocurra p</u>

1.7.17 <u>Tabla de verdad de la bicondicional</u>

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Ejemplos:

1.7.18 Si p representa la proposición "La glicina es un aminoácido" y q representa la proposición "La glicina tiene un grupo NH_2 y un grupo COOH", entonces p es verdadera q es verdadera, y $p \leftrightarrow q$ ("La glicina es un aminoácido si y sólo si tiene un grupo NH_2 y un grupo COOH"), es verdadera.

1.7.19 Si p representa la proposición "La información genética se transmite por ácidos nucléicos" y q representa la proposición "La información genética se transmite por proteínas", entonces p es verdadera, q es falsa y $p \leftrightarrow q$ ("La información genética se transmite por ácidos nucléicos si y sólo si se transmite por proteínas") es falsa.

1.7.20 Si p representa la proposición "La selección natural no interviene en la evolución" y q representa la proposición "Los organismos complejos han evolucionado a partir de organismos más sencillos", entonces p es falsa, q es verdadera, y $p \leftrightarrow q$ ("La selección natural no interviene en la evolución si y sólo si los organismos complejos han evolucionado a partir de organismos más sencillos") es falsa.

1.7.21 Si p representa la proposición "La mosca es un ave" y q representa la proposición "El gorrión es un insecto", entonces p es falsa, q es falsa, y $p \leftrightarrow q$ ("La mosca es un ave si y sólo si el gorrión es un insecto") es verdadera.

1.8 IMPLICACION Y EQUIVALENCIA LOGICA

Cuando operamos con dos proposiciones (digamos: p,q) para formar una proposición condicional ($p \rightarrow q$) o una bicondicional ($p \leftrightarrow q$) obtenemos nuevas pro posiciones que pueden a su vez ser verdaderas o falsas. Sin embargo, es frecuente que tengamos que expresar que dos proposiciones se relacionan de tal manera que una condicional o una bicondicional entre ellas resulta siempre verdadera.

Ejemplos:

1.8.1 La proposición "Tonche es un gato normal" (r) y la proposición "Tonche tiene cuatro patas y una cola" (p) están relacionadas de tal manera que $r \rightarrow p$ siempre es verdadera, porque no puede suceder que Tonche sea un gato normal y no tenga cuatro patas o no tenga cola.

1.8.2 La proposición "Hoy es lunes" (q) y la proposición "Mañana es martes" (r) están relacionadas de tal manera que $q \leftrightarrow r$ siempre es verdadera porque $q \rightarrow r$ y $r \rightarrow q$ también lo son.

1.8.3 La proposición "Hoy es lunes" y la proposición "Este mes tiene 30 días" no están relacionadas de ninguna de las dos maneras mencionadas en los ejemplos anteriores.

Estas posibles relaciones se llaman implicación lógica (cuando la condicional es verdadera) y equivalencia lógica (cuando la bicondicional es verdadera), y usaremos para ellas los símbolos "$\Longrightarrow$" y "$\Longleftrightarrow$" respectivamente.

1.8.4

Si p es una proposición, y q es otra, la relación "$p \rightarrow q$ siempre es verdadera" se escribe $p \Longrightarrow q$ y se lee "p implica q"

1.8.5

Si p es una proposición, y q es otra, la relación "$p \leftrightarrow q$ siempre es verdadera" se escribe $p \Longleftrightarrow q$ y se lee "p es equivalente a q"

Ejemplos:

1.8.6 Si p representa la proposición "Un humano X tiene 25 años" y q representa la proposición "El humano X ya cambió sus dientes de leche", entonces $p \Rightarrow q$ (pero no $q \Rightarrow p$, por lo que no $p \Leftrightarrow q$).

1.8.7 Si p representa la proposición "Un humano A tiene por lo menos un cromosoma Y en su genotipo" y q representa la proposición "El humano A tiene fenotipo masculino", entonces $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$ y $p \Leftrightarrow q$.

Conviene tal vez enfatizar que mientras que la negación, la conjunción, la disyunción, la condicional y la bicondicional son <u>operaciones</u> que forman nuevas proposiciones a partir de unas dadas, la implicación y la equivalencia lógica son <u>relaciones</u> entre proposiciones, que sólo expresan características de ellas y no forman nuevas proposiciones a partir de ellas.

1.9 PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES LOGICAS

Hasta ahora hemos visto varias maneras de operar con las proposiciones: $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, son operaciones entre proposiciones, de la misma manera que $+$, $\times$, etc. son operaciones entre números. Y, de la misma manera que las operaciones entre números tienen propiedades (por ejemplo: $a + b = b + a$, o sea "el orden de los sumandos no altera la suma"), las operaciones entre proposiciones tienen ciertas propiedades. En esta sección enunciaremos las propiedades más importantes, ejemplificándolas, y veremos cómo se demuestran formalmente algunas de ellas, dejando las demás como ejercicio.

Empecemos con una propiedad de la negación, que podría enunciarse así: "dos negaciones se cancelan"

1.9.1 $\boxed{\sim(\sim p) \Leftrightarrow p}$

1.9.2 Ejemplo:

La proposición "No es cierto que Lourdes no esté embarazada", que es negación de "Lourdes no está embarazada", es equivalente a "Lourdes está embarazada"

1.9.3 <u>Demostración</u>

Para demostrar que dos proposiciones son equivalentes lógicas hay que demostrar que su bicondicional es siempre verdadera (ver 1.8.5). Calculemos, entonces, la bicondicional $\sim(\sim p)\leftrightarrow p$ mediante una tabla de verdad que, por tratarse de sólo una proposición (p), tendrá 2 renglones:

	p	$\sim$	$(\sim$	$p)$	$\leftrightarrow$	p
	V	V	F	V	V	V
	F	F	V	F	V	F
Paso No.	1	3	2	1	4	1

Esta tabla de verdad está hecha de manera análoga a la 1.4.12: en el primer paso copiamos tantas veces como - es necesario los valores de verdad de p, en el segundo calculamos la negación de p, de acuerdo con 1.2.9, en el tercero la negación de la última proposición, también de acuerdo con 1.2.9, y en el cuarto la bicondicional - del último resultado con p. El resultado de este último paso, sacado de acuerdo con 1.7.17, es el que nos importa: como no aparece ningún F en la columna, podemos asegurar que $\sim(\sim p)\Leftrightarrow p$, con lo que queda demostrada nuestra propiedad.

Veamos ahora dos propiedades de la conjunción. La primera es conocida como conmutatividad; y podría enunciarse, siguiendo la forma aprendida en la escuela primaria, como "el orden de los conjuntandos no altera la conjunción":

1.9.4 $\boxed{(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)}$

1.9.5 Ejemplo:

La proposición compuesta: "El niño tiene fiebre y mucha tos" es equivalente a "El niño tiene mucha tos y fiebre"

1.9.6 Demostración

El método general es igual que para la propiedad anterior, así es que aquí sólo mostramos la tabla de verdad:

	p	q	(p	∧	q)	↔	(q	∧	p)
	V	V	V	V	V	V	V	V	V
	V	F	V	F	F	V	F	F	V
	F	V	F	F	V	V	V	F	F
	F	F	F	F	F	V	F	F	F
Paso No.	1	1	1	2	1	3	1	2	1

La segunda propiedad de la conjunción que veremos se refiere a lo que pasa cuando queremos formar más de una conjunción entre más de dos proposiciones y se llama asociatividad:

1.9.7 $\boxed{(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)}$

1.9.8 Ejemplo:

La proposición compuesta "La hipófisis secreta LH y FSH, y también PRL" es equivalente a "La hipófisis secreta LH y también FSH y PRL".

La asociatividad nos dice, entonces, que no importa cómo juntemos o asociemos las proposiciones de una conjunción múltiple, el resultado siempre será equivalente. Esta propiedad hace que la puntuación sea innecesaria: no hay lugar para malos entendidos. Podemos entonces escribir $p \wedge q \wedge r$, que es equivalente a cualquiera de las dos formas de 1.9.7, y correspondiente a - "La hipófisis secreta LH y FSH y PRL" en el ejemplo 1.9.8.

Las dos propiedades de la conjunción que hemos visto tienen sus análogos pa ra la disyunción: veamos primero la <u>conmutatividad</u>:

1.9.9 $\boxed{(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)}$

1.9.10 Ejemplo:

La proposición compuesta "Los genetistas trabajan con - *Drosophila melanogaster* o con *Neurospora crassa*" es -- equivalente a "Los genetistas trabajan con *Neurospora crassa* o con *Drosophila melanogaster*"

Por su parte, la <u>asociatividad</u> toma esta forma:

1.9.11 $\boxed{(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)}$

1.9.12 Ejemplo:

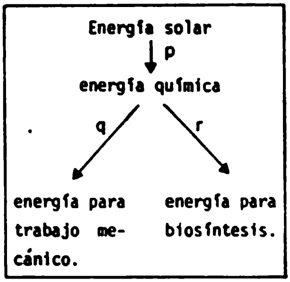
La proposición compuesta "Laura está gorda porque come mucho pan o pasteles, o porque come dulces" es equivalente a "Laura está gorda porque come mucho pan, o porque come pasteles o dulces"

Como en el caso de la conjunción, la asociatividad de la disyunción nos indica que podemos escribir 1.9.11 y 1.9.12 como $p \vee q \vee r$ y "Laura está - gorda porque come mucho pan o pasteles o dulces", respectivamente.

Las propiedades 1.9.4 y 1.9.9, y 1.9.7 y 1.9.11 muestran que existe un paralelismo entre las operaciones de conjunción y de disyunción. Veamos ahora cómo se relacionan ambas operaciones entre sí, mediante las propiedades llamadas de <u>distributividad</u>. Por una parte, la conjunción distribuye a la disyunción:

1.9.13 $\boxed{p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)}$

1.9.14 Ejemplo:

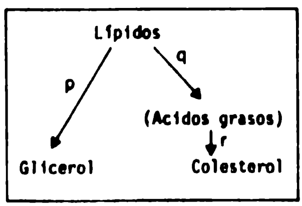


El flujo de energía en la biósfera puede verse (de manera muy simplificada) como en el esquema de junto. La energía solar es transformada mediante la fotosíntesis (p) en energía química, y luego - ésta es utilizada en trabajo mecánico - por ejemplo muscular - (q) o para - biosíntesis (r). Dos maneras equivalentes de expresar lo anterior son: "La energía solar se transforma en - energía química y luego en energía para trabajo mecánico o para biosíntesis"-$p \wedge (q \vee r)$- y "La energía solar se transforma en energía química y luego en energía para trabajo mecánico, o la energía solar se transforma - en energía química y luego en energía para biosíntesis" -$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$-.

De manera análoga, la disyunción distribuye a la conjunción:

1.9.15 $\boxed{p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)}$

1.9.16 Ejemplo:



El esquema de junto - representa de manera - muy simplificada el - metabolismo de los lípidos en el hígado. Su poniendo que p, q y r son las enzimas (o sistemas enzimáticos) que intervienen en las reacciones que se marcan, podemos explicarlas de cualquiera de estas dos maneras equivalentes: "En la degradación de los lípidos empieza p (para dar glicerol), o empieza q y termina r (para dar colesterol)" $-p \vee (q \wedge r)-$ o: "En la degradación de los lípidos empiezan p ó q y terminan p (para dar glicerol) ó r (para dar colesterol)" $-(p \vee q) \wedge (p \vee r)-$.

Veamos ahora cómo se relacionan los operadores de conjunción y disyunción con el operador de negación. La primera <u>ley de De Morgan</u> nos da una forma de expresar la negación de una conjunción:

1.9.17 $\boxed{\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)}$

1.9.18 Ejemplo:

Para que funcione correctamente el mecanismo de defensa contra cuerpos extraños del sistema inmune de los vertebrados debe haber un reconocimiento por parte de un anticuerpo y un ataque por parte del sistema del complemento. Si un cuerpo extraño no es rechazado, podemos decir "No funcionó el sistema de anticuerpo y complemento" o, equivalentemente "No funcionó el anticuerpo o no funcionó el complemento".

La segunda ley de De Morgan nos da una forma de expresar la negación de una disyunción (obsérvese que se parece a la primera: se dice que una es la <u>dual</u> de la otra):

1.9.19 $\boxed{\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)}$

1.9.20 Ejemplo:

En la noche, losperros se dan cuenta de peligros posibles porque oyen o huelen algo. Si el perro Terri no - percibe una noche a un ladrón, podemos decir "Terri no oyó u olió al ladrón" o, equivalentemente "Terri no oyó al ladrón y no lo olió"

Veamos por último un par de propiedades importantes de la condicional. La primera se refiere a la conjunción de dos condicionales y se llama <u>transitividad</u>:

1.9.21 $\boxed{(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Longrightarrow (p \rightarrow r)}$

1.9.22 Ejemplo:

La conjunción: "Si hay liberación de acetilcolina, la - hay de iones de calcio; y si hay liberación de iones de calcio, hay contracción muscular" implica que: "Si hay liberación de acetilcolina, hay contracción muscular".

La última propiedad que veremos se llama ley de <u>contraposición</u> y relaciona las proposiciones de una condicional con sus negaciones:

1.9.23 $\boxed{(p \rightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)}$

1.9.24 Ejemplo:

La condicional "Si hay vida hay agua" es equivalente a la condicional "Si no hay agua, no hay vida".

Esta ley de contraposición es muy importante, y por eso conviene hacer notar que habla de la equivalencia de dos condicionales, de tal manera que la negación del antecedente de una es el consecuente de la otra, y viceversa, la negación del consecuente de una es el antecedente de la otra.

1.10 LA LOGICA Y LAS HIPOTESIS BIOLOGICAS

La formulación y, sobre todo, la contrastación de hipótesis biológicas merecen un libro aparte (hay varios que tratan el tema en la bibliografía de este capículo). Sin embargo, quisieramos aquí sentar unas bases para su estudio, haciendo notar la relación de las hipótesis biológicas con la Lógica.

Todas las hipótesis pueden ser puestas en forma de proposiciones (en el sentido de la palabra proposición que hemos venido manejando), simples o compuestas. Es muy frecuente que una hipótesis se plantee como una proposición condicional; en particular, es frecuente plantear en forma de proposición condicional las hipótesis que están sujetas a verificación experimental.

1.10.1 Ejemplo:

> Sí la molécula portadora de la información genética es el DNA, entonces al agregar DNA puro de neumococos virulentos a cepas no virulentas se obtendrán cepas virulentas. (Experimentos de Avery en 1944)

Es fácil también encontrar aseveraciones científicas en forma de proposición condicional del siguiente tipo:

1.10.2 Ejemplo:

> Sí una persona tiene amibiasis intestinal, entonces se puede asegurar que ingirió quistes de amibas.

Sobre este último ejemplo quisiéramos hacer dos observaciones importantes.- La primera es con referencia al tiempo: aunque en las proposiciones condicionales aparece la palabra "entonces", esto no quiere decir que lleven implícita una idea de tiempo: se trata de un "entonces" lógico, y no de un "entonces" temporal, y ambos factores, el lógico y el temporal, son independientes entre sí. En la proposición del ejemplo 1.10.2, el consecuente lógico (la ingestión de quistes) antecede temporalmente al antecedente lógico -

(la amibiasis); en otros casos pueden coincidir ambos antecedentes (y consecuentes), como en el siguiente:

1.10.3 Ejemplo:

Si a un niño se le cae un diente de leche, entonces en un futuro (más o menos próximo) le crecerá el diente adulto.

La segunda observación sobre la proposición del ejemplo 1.10.2 se refiere a la unidireccionalidad de las condicionales. Según 1.10.2, la presencia de amibiasis nos permite asegurar la ingestión previa de quistes; sin embargo, 1.10.2 no nos dice nada acerca de la implicación recíproca (si una persona ingirió quistes de amibas, entonces tiene amibiasis intestinal) que, de hecho, es falsa, ya que es posible ingerir quistes de amibas sin por ello sólo tener amibiasis. Como se puede ver, este caso corresponde al segundo - renglón de la tabla 1.6.18, lo que según 1.8.4 hace falsa la implicación.

Veamos ahora otras aplicaciones de la Lógica al planteamiento de hipótesis biológicas. Una de ellas es lo que en Lógica se conoce con el nombre de modus ponendo ponens (mpp), que simplemente afirma que si se tiene una condicional, y se presenta el antecedente de ella, entonces sucede el consecuente:

1.10.4 $\boxed{[(p \rightarrow q) \wedge p] \Longrightarrow q}$

El modus ponendo ponens (mpp) se usa cada vez que se verifica experimentalmente una hipótesis o que se aplica una hipótesis verificada:

1.10.5 Ejemplo:

Si sucede que "cada vez que se expone una planta verde a la luz solar, ésta realiza la fotosíntesis" ($p \rightarrow q$), y que exponemos una planta verde a la luz solar (p), entonces la planta realiza la fotosíntesis (q).

Un error desgraciadamente frecuente sucede cuando se quiere aplicar el mpp al revés: $(p \to q) \land q \Rightarrow p$, lo que es falso (como se puede demostrar con una tabla de verdad), y puede dar lugar a las más extravagantes conclusiones:

1.10.6 Ejemplo:

El amaestrador de pulgas Eugenius Aquilarius, que enseña a estos insectos a brincar cuando él lo ordena, tiene la hipótesis de que las pulgas tienen el oído en las patas, o, equivalentemente, "pulga sin patas no oye" (p). Plantea su experimento así: "Si es cierto que pulga sin patas no oye, entonces pulga amaestrada sin patas no obecede" $(p \to q)$. Aquilarius efectúa su experimento: le corta a una pulga amaestrada las patas y encuentra que, por más que le ordena imperiosamente que brinque, ésta no obedece (q). Conclusión: pulga sin patas no oye.

El diseño experimental del amaestrador de pulgas del ejemplo 1.10.6 es obviamente criticable: confunde un fenómeno (audición) con su medición (brinco) pero es más grave el uso incorrecto de las leyes de la Lógica, ya que cuando éstas se usan correctamente, se puede descubrir muchas fallas de diseño. Por lo pronto, conviene hacer notar que:

1.10.7 $$\boxed{[(p \to q) \land q] \not\Rightarrow p}$$

Otra ley de la Lógica muy frecuentemente usada en la contrastación de hipótesis es la que se conoce con el nombre de <u>modus tollendo tollens</u> (mtt) que no es más que otra forma de plantear la ley de contraposición (1.9.23):

1.10.8 $$\boxed{[(p \to q) \land (\sim q)] \Rightarrow (\sim p)}$$

<u>El modus tollendo tollens</u> (mtt) se usa cuando se rechaza experimentalmente una hipótesis:

1.10.9 Ejemplo:

Cuando Semmelweis, en 1845, tenía que resolver el problema del exceso de muertes por fiebre puerperal en la Primera División de Maternidad del Hospital General de Viena (en contraste con un menor número de muertes análogas en la Segunda División), una de las hipótesis explicativas que se propusieron achacaba el fenómeno al hecho de que en la División Primera el sacerdote que portaba los últimos auxilios a una moribunda pasaba con acompañamiento de acólito y campanilla por las otras salas, produciendo un efecto terrorífico y debilitante en las pacientes, y volviéndolas más susceptibles de contraer el mal fatal (mientras que en la División Segunda el sacerdote tenía acceso directo a la enfermería). Para contrastar esta hipótesis, Semmelweis planteó su experimento así: "Si es cierto que el paso terrorífico del sacerdote propicia el que las pacientes contraigan la fiebre puerperal, entonces, al evitar que el sacerdote cruce las salas para llegar a la enfermería, se obtendrá un descenso en la mortalidad por fiebre puerperal" ($p \rightarrow q$). Semmelweis efectuó su experimento: convenció al sacerdote de que diera un rodeo para llegar a la enfermería sin cruzar las salas y de que suprimiera la campanilla. Pero la mortalidad siguió igual ($\sim q$). Semmelweis concluyó, correctamente, que la hipótesis de que el paso terrorífico del sacerdote propiciara el que las pacientes contrajeran el mal era falsa ($\sim p$), y la rechazó. (Hempel, p. 16)

Por último, quisiéramos observar que, en contraste con las ciencias formales (como la Lógica), que pueden demostrar sus hechos de manera irrebatible, las ciencias factuales (como la Biología) sólo pueden verificar sus hechos, o sea confirmarlos o desconfirmarlos, de manera incompleta y por -

ende temporal. Desde el punto de vista de la Lógica, se puede notar que el mpp nos ayuda a confirmar (no a demostrar) una hipótesis, o a aplicar una hipótesis ya dada por cierta, mientras que el mtt nos ayuda a rechazar una hipótesis.

1.11 EJERCICIOS

1.11.1 Decir si las siguientes oraciones son proposiciones:

a) Cuando despertó, el dinosaurio todavía estaba ahí*

b) Los occipucios de las mancuspias brillan en el desierto.

c) ¡Hola!

d) Cuando calienta el sol aquí en la playa.

e) La testosterona y la progesterona son lípidos.

f) Decir si ésta es una proposición.

1.11.2 Dar dos ejemplos de oraciones que no son proposiciones, dos de proposiciones verdaderas y dos de proposiciones falsas.

1.11.3 Decir si las siguientes proposiciones son simples o compuestas:

a) Darwin o Lamarck tenían razón.

b) Los ribosomas del retículo endoplásmico son el sitio donde se sintetizan las proteínas requeridas por la célula.

c) Si el corazón se detiene, el cuerpo muere.

d) Los alquimistas no pudieron fabricar la piedra filosofal.

e) La vitamina C es una base.

f) La meiosis y la mitosis son formas de división celular.

1.11.4 Dar dos ejemplos de cada uno de los siguientes casos de proposiciones: simple verdadera, simple falsa, compuesta verdadera, compuesta falsa.

---

* Monterroso, A. *Obras completas (y otros cuentos)*. 5a edición, Mortiz, México, p. 77 (1977)

1.11.5 Dar la negación de las siguientes proposiciones:

a) Los elefantes no vuelan.
b) Las plantas verdes fotosintetizan.
c) La mosca es un mamífero.
d) La arginina no es un aminoácido.

1.11.6 Sean las siguientes proposiciones:

p: Luis estudió francés en un instituto en México.
q: Luis vivió cinco años en Francia.
r: Luis vivió trece años en Japón.

Expresar, en función de p, q, r, las siguientes proposiciones compuestas:

a) Luis vivió en el extranjero.
b) Luis sabe francés.
c) Luis aprendió francés en México pero nunca pudo ir a Francia.
d) Luis utilizó una sola visa.

Enunciar verbalmente las siguientes proposiciones:

e) $p \wedge q$
f) $(\sim q) \wedge r$
g) $p \vee (q \wedge r)$
h) $(p \vee q) \wedge r$

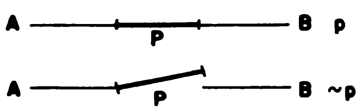
1.11.7 Formar el encabezado de las tablas de verdad de cuatro proposiciones.

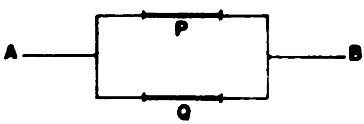
1.11.8 Rosa, Juan y Patricia están en una ciudad que desconocen. Salen a pasear por separado en la mañana y cuando se ven de nuevo para comer cada uno propone un lugar distinto: Rosa, de gusto delicado, pero de poco apetito, sugiere ir a un restaurante donde ella puede comer un platillo de caviar y los demás una comida completa común y corriente; Juan, glotón por naturaleza, quiere ir a un lugar --

que proclama servir entrada, dos platos fuertes, verduras, postre y bebida; Patricia, vegetariana, dice haber encontrado un lugar a su gusto. Deciden jugarlo al azar y cuando llegan al lugar elegido por el ganador, los dos perdedores dicen que se trata también de su restaurante. El menú en la puerta dice así: "caviar o ensalada y asado y calabazas o berenjenas rellenas de atún o queso y postre y café o té". Explicar la situación: ¿Por qué cada uno de ellos entendió de manera distinta un mismo menú? ¿De qué manera podría evitarse la confusión? ¿Hay otras maneras de entender el menú? Si sí, indicar algunas.

NOTA: En este ejercicio se usa la conjunción "o" en sentido exclusivo.

1.11.9 Se ha asociado frecuentemente la Lógica con los circuitos eléctricos. En ellos, el valor de verdad de una proposición corresponde al paso de la corriente eléctrica entre dos puntos. Por ejemplo, sea p la proposición "El interruptor P está cerrado" (o sea, la corriente pasa) entonces p es verdadero (la corriente pasa entre A y B) y $\sim p$ (o sea, el interruptor P está abierto) es falso (La corriente no pasa entre A y B). Decir cuál de los dos esquemas siguientes corresponde a $p \wedge q$ y cuál a $p \vee q$:





1.11.10 Considérense las proposiciones siguientes:

p: Los espermatozoides son células germinales.

q: $2+2=5$

r: La FSH es un ácido nucléico.

s: $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$

Decir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

a)	$p \wedge s$	g)	$\sim r$	m)	$s \vee s$	s)	$r \rightarrow q$
b)	$r \vee p$	h)	$p \vee q$	n)	$q \rightarrow p$	t)	$s \rightarrow r$
c)	q	i)	$q \vee r$	o)	$\sim s$	u)	p
d)	$p \rightarrow s$	j)	$r \rightarrow r$	p)	$s \leftrightarrow p$	v)	$q \wedge s$
e)	$p \wedge \sim p$	k)	$r \rightarrow s$	q)	$q \wedge r$	w)	$r \leftrightarrow q$
f)	$p \wedge r$	l)	$s \vee p$	r)	$q \vee \sim q$	x)	$s \leftrightarrow q$

1.11.11 Considérense las proposiciones siguientes:

p: Hay generación espontánea.

q: La selección natural influye en la evolución.

r: Los gusanos de la carne vienen de las moscas.

s: La evolución es una mentira hereje.

Decir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

a)	$q \wedge r$	c)	$r \rightarrow p$	e)	$s \vee p$	g)	$r \wedge s$
b)	$\sim (q \leftrightarrow s)$	d)	$q \vee p$	f)	$s \rightarrow q$	h)	$p \rightarrow s$

1.11.12 Sean las siguientes proposiciones:

m: La madre de Natalia tiene los ojos claros

n: Natalia tiene los ojos claros.

p: El padre de Natalia tiene los ojos claros.

Expresar, en función de m, n, p, las siguientes proposiciones:

a) No es cierto que toda la familia de Natalia tenga los ojos claros.

b) En la familia de Natalia, las mujeres tienen ojos claros o los padres tienen ojos oscuros.

c) Si Natalia tiene los ojos claros, alguno de sus padres los tiene claros.

d) Si ambos padres de Natalia tienen los ojos claros, Natalia tiene los ojos claros.

Enunciar verbalmente las proposiciones siguientes:

e) $\sim n \rightarrow \sim (p \wedge m)$ g) $(\sim p) \rightarrow (\sim m)$

f) $(\sim m) \wedge (\sim n) \wedge (\sim p)$ h) $n \rightarrow (m \vee p)$

1.11.13 Considérense las proposiciones siguientes:

r: él es rico

f: él es feliz

g: él es gordo

Expresar, en función de r, f, g, las siguientes proposiciones:

a) Los gordos felices son pobres

b) Ser gordo es suficiente para ser feliz

c) Ser rico es necesario para ser gordo

d) El es pobre sólo si es flaco

e) Si él no es pobre, es gordo o feliz

1.11.14 Si la siguiente proposición es falsa: "No es mentira que no es cierto que no es imposible que los claveles del jardín de Eduardo no sean de un color distinto del blanco" ¿Puede haber un clavel blanco en el jardín de Eduardo?

1.11.15 Demostrar con tablas de verdad que:

a) $p \vee (q \wedge r) \not\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge r$

b) $p \wedge (q \vee r) \not\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r$

Ilustrar esto cuando p, q, r, son las siguientes proposiciones:

p: la insulina es una proteína

q: la hemoglobina es una proteína

r: la hemoglobina es un lípido

1.11.16 Demostrar, mediante el uso de tablas de verdad, las relaciones 1.9.7, 1.9.9., 1.9.11, 1.9.13, 1.9.15, 1.9.17, 1.9.19, 1.921 y 1.9.23.

1.11.17 Demostrar con tablas de verdad e ilustrar con ejemplos biomédicos:

a) $p \wedge q \Rightarrow p$

b) $p \Rightarrow p \vee q$

c) $p \not\Rightarrow p \wedge q$

d) $p \vee q \not\Rightarrow p$

1.11.18 Demostrar con tablas de verdad las siguientes relaciones, e ilustrarlas con ejemplos biomédicos:

a) $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee q$

b) $\sim (p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge (\sim q)$

1.11.19 Demostrar con tablas de verdad las siguientes relaciones, e ilustrarlas con ejemplos biomédicos:

a) $[p \rightarrow (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)]$

b) $[p \rightarrow (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)]$

c) $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge r) \leftrightarrow (q \wedge r)]$

d) $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \vee r) \leftrightarrow (q \vee r)]$

1.11.20 Demostrar con tablas de verdad 1.10.4, 1.10.7, 1.10.8.

1.11.21 Explicar y analizar lógicamente las frases que usamos todos los días del tipo:

a) "Si mi abuela tuviera ruedas, sería bicicleta" (ver 1.6.18)

b) "Si todos los mexicanos comen carne a diario, yo soy el Papa" (mtt)

1.12 BIBLIOGRAFIA

Arnaz, J.A. *Iniciación a la lógica simbólica*. ANUIES, México (1975)

Bunge, M. *La investigación científica: su estrategia y su filosofía*. Ediciones Ariel, Barcelona (1972).

Cañedo D., L., H. García R. e I. Méndez R. *Principios de investigación médica*. DIF, México (1977).

Jasso G., P. *Matemáticas I*. Colegio de Bachilleres, Edicol, México (1975).

Lipschutz, S. *Teoría de conjuntos y temas afines*. Colección Schaum, McGraw-Hill, México, Capítulo 14 (1969).

National Council of Teachers of Mathematics #12. *Lógica*. Editorial Trillas, México (1977).

Rivera M., M. *Comprobación científica de hipótesis*. ANUIES, México (1975).

Zubieta R., G. *Manual de lógica para estudiantes de matemáticas* (segunda edición). Editorial Trillas, México (1971).

Zubieta R., G. *Lógica elemental*. ANUIES, México (1973).

CAPITULO 2

CONJUNTOS

En los últimos años se ha dicho y escrito mucho acerca de las "Matemáticas modernas", especialmente en cuanto a la inserción de la "Teoría de los Conjuntos" en los programas de estudio de las escuelas elementales. Pero ¿qué son y por qué importan tanto los conjuntos? De hecho, la "Teoría de Conjuntos" no es más que una manera de decir las cosas: es un lenguaje nuevo, y como tal puede aportar toda una visión nueva y enriquecedora de la realidad. Del mismo modo en que la Lógica ofrece un lenguaje científico que se puede utilizar en cualquier rama de la Ciencia (Capítulo 1), la "Teoría de Conjuntos" aporta un lenguaje preciso y claro que puede ayudar a describir y a comprender muchos fenómenos científicos.

Para el investigador en una Ciencia experimental, el lenguaje de los Conjuntos debe entenderse, pues, como una herramienta que puede ser útil en el manejo conceptual de ciertos objetos o procesos. Además, el lenguaje de los Conjuntos tiene aplicaciones prácticas e inmediatas para, por ejemplo, el estudio de la Probabilidad.

2.1 CONJUNTOS Y ELEMENTOS

Así como en el primer capítulo empezamos hablando de la materia prima de la Lógica (las proposiciones), ahora comenzaremos entablando conocimiento con los términos sobre los que vamos a trabajar. Y, así como resultó que las proposiciones de la Lógica nos eran familiares, resulta también que los conjuntos son términos de uso diario:

Ejemplos:

2.1.1 Los "Beatles" fueron un <u>conjunto</u> de músicos muy famoso.

2.1.2 La digestión se realiza gracias a un <u>conjunto</u> de reacciones enzimáticas.

2.1.3 Los insectos tienen un <u>conjunto</u> de características que los distinguen de otras clases.

2.1.4 Un subfilum es un <u>conjunto</u> de clases.

Un <u>conjunto</u> es, entonces, una colección de entidades físicas (objetos, personas, etc.) o abstractas (conceptos, procesos, etc.) que llamaremos <u>elementos</u>:

Ejemplos:

2.1.5 John Lennon es un <u>elemento</u> del conjunto de los "Beatles".

2.1.6 La hidrólisis de cadenas peptídicas catalizada por la pepsina es un <u>elemento</u> del conjunto de reacciones enzimáticas que intervienen en la digestión.

2.1.7 "Tener seis patas" es un <u>elemento</u> del conjunto de características de los insectos.

Antes de seguir adelante, observemos que podemos ahorrarnos muchas palabras mediante el uso de símbolos específicos (por ejemplo, en Lógica: ver el capítulo 1). Por eso, nos convendrá ponernos de acuerdo sobre una simbología mínima: usaremos letras mayúsculas para referirnos a conjuntos, y letras minúsculas para referirnos a elementos.

2.1.8 Ejemplo:

Podemos marcar con D al conjunto de los dedos de una mano, y con a al dedo anular. Decimos entonces que "D es <u>el conjunto cuyos elementos son</u> los dedos de una mano", y que "a es elemento de D", o "a está en D", o "a <u>pertenece</u> a D".

También resultarán muy útiles símbolos que nos ahorren las expresiones "el conjunto cuyos elementos son" y "pertenece a":

2.1.9 | Usamos llaves: { } para enmarcar a los elementos de un conjunto, mismos que separamos con comas. |

2.1.10 Ejemplo:

El conjunto D del ejemplo 2.1.8 se puede expresar así:
D = {pulgar, índice, medio, anular, meñique}

2.1.11 Usamos el símbolo " $\in$ " para indicar que un elemento pertenece a un conjunto, y el símbolo " $\notin$ " para indicar que un elemento NO pertenece a un conjunto.

2.1.12 Ejemplo:

En el ejemplo 2.1.8, $a \in D$: o sea a pertenece a D (o a es un elemento de D, o a está en D). Además, si g es el dedo gordo del pie, $g \notin D$.

Los elementos de un conjunto tienen en común ciertas propiedades (por lo menos, la de pertenecer al conjunto) que definen al conjunto. Como queremos que el lenguaje de los conjuntos sea un lenguaje científico, tenemos que tener cuidado de eliminar las ambigüedades: los conjuntos que manejemos deberán estar bien definidos, de tal manera que quede claro exactamente cuáles son sus elementos. Para lograr esto podemos dar la lista exacta de los elementos del conjunto, o bien describirlos, diciendo las propiedades que los hacen pertenecer distintivamente al conjunto. La primera manera consiste en poner (en cualquier orden) los elementos dentro de llaves separándolos con comas, como hicimos en el ejemplo 2.1.10:

Ejemplos:

2.1.13 D = {pulgar, índice, medio, anular, meñique}

2.1.14 A = {mayo, junio, julio, agosto}

2.1.15 B = {a,b,c,d,e}

2.1.16 S = {brazo, CO_2, azul, risa, catálisis, Voltaire}

Esta manera admite una variante: cuando los elementos de un conjunto tienen una propiedad común que es obvia al dar los primeros elementos, se ponen puntos suspensivos para indicar "y así en adelante".

Ejemplos:

2.1.17 $L = \{a,b,c,d,e,....\}$

2.1.18 $P = \{2,4,6,8,....\}$

La segunda manera de definir un conjunto, o sea la descripción de la(s) propiedad(es) que tienen en común sus elementos, se consigue poniendo entre llaves la propiedad:

Ejemplos:

2.1.19 N = {números pares}

2.1.20 E = {enzimas alostéricas}

o bien usando una letra que simboliza a un elemento genérico seguida de una raya vertical (|) que simboliza la expresión "tal que":

Ejemplos:

2.1.21 F = {d|d es dedo de la mano} se lee "F es el conjunto cuyos elementos son las d tales que d es dedo de la mano" (d es un elemento genérico).

2.1.22 R = {l ∈ L|l es una de las primeras cinco} (dode L es el conjunto del ejemplo 2.1.17) se lee "R es el conjunto cuyos elementos son las l elementos de L tales que l es una de las primeras cinco".

2.1.23 C = {m|m es mes del año y m no tiene "r"}

2.1.24 G = {n|n es número y n es par}

Hasta ahora hemos estado usando un símbolo del que no hemos hablado explícitamente: se trata del símbolo "=" : "igual". Pero ¿qué es la igualdad? Este es un caso en el que la palabra adopta un sentido más estricto en un lenguaje científico que en el lenguaje ordinario. Podemos decir: "Julio es igualito a su papá" o "todos los hombres son iguales", y entonces estamos usando la palabra "igual" como sinónimo de "muy parecido". Esta ambi--

güedad ("muy parecido" no es un concepto preciso) debe ser evitada en un lenguaje científico: cuando, en el lenguaje de Conjuntos, o en otro lenguaje científico usemos la palabra "igual", querremos decir que estamos hablando de dos representaciones de lo mismo:

Ejemplos:

2.1.25 Si M es el conjunto de todas las moléculas, entonces agua $\in$ M y $H_2O \in$ M, y los dos elementos son iguales: agua = H_2O.

2.1.26 Si P es el conjunto de los cuatro puntos cardinales, y C = {Norte, Sur, Este, Oeste}, entonces los dos conjuntos son iguales: P = C.

Debemos notar entonces que cuando decimos que dos conjuntos son iguales, queremos decir que son dos representaciones de un mismo conjunto. En particular, cuando definimos un conjunto dando la lista de sus elementos, no importa el orden en que los enumeremos:

Ejemplos:

2.1.27 {boca, esófago, estómago, intestino delgado} =
{esófago, intestino delgado, estómago, boca}

2.1.28 {arroz, frijol, maíz} = {maíz, arroz, frijol}

Además, como la relación existente entre un conjunto y sus elementos es la de pertenencia, cada elemento está o no está en un conjunto dado; es decir que no tiene sentido que esté dos veces:

Ejemplos:

2.1.29 {huevo, larva, pupa, insecto adulto, huevo}=
{huevo, larva, pupa, insecto adulto

2.1.30 {proteína, fosfolípido, proteína} = {fosfolípido, proteína}

Por último, dos conjuntos son representaciones de lo mismo y por ende iguales si al definirlos por medio de la descripción de las propiedades de sus respectivos elementos, éstas resultan equivalentes.

Ejemplos:

2.1.31 Si $A = \{x | x$ cumple la propiedad $p\}$, $B = \{x | x$ cumple la propiedad $q\}$, y $p \Leftrightarrow q$, entonces $A = B$

2.1.32 {seres humanos con fenotipo masculino} = {seres humanos con por lo menos un cromosoma Y en su genoma}

2.2. OTRAS DEFINICIONES BASICAS

Consideremos los ejemplos siguientes:

Ejemplos:

2.2.1 Un filum es un conjunto de subfila

2.2.2 Un subfilum es un conjunto de clases

2.2.3 Una clase es un conjunto de órdenes

2.2.4 Un orden es un conjunto de familias

En estos ejemplos los términos subfilum, clase y orden toman sucesivamente los papeles de elemento y de conjunto. Así por ejemplo, al hablar de la clase de los mamíferos, cabe preguntarse si estamos refiriéndonos a un elemento del (conjunto) subfilum de los vertebrados, o a un conjunto cuyos elementos son una serie de órdenes. Estas dudas pueden eliminarse si se define al principio un conjunto que sirva de base o de marco de referencia:

2.2.5 Llamamos <u>conjunto universo</u> al conjunto que consta de todos los elementos que intervendrán como tales en un estudio dado; en general lo marcamos con la letra griega Ω (omega).

Ejemplos:

2.2.6 Si vamos a estar hablando de subfila (como conjuntos) y sus clases (como elementos), definimos Ω = {todas las clases}, y entonces la clase de los mamíferos es un elemento de Ω y del (conjunto) subfilum de los vertebrados.

2.2.7 Si vamos a estar hablando de clases (como conjuntos) y sus órdenes (como elementos), definimos Ω = {todos los órdenes}, y entonces la clase de los mamíferos es un conjunto, cuyos elementos (órdenes) son elementos de Ω.

Conviene observar aquí que, independientemente de la elección que se haga de conjunto universo, los elementos de un conjunto pueden a su vez ser conjuntos, como sucede en los ejemplos 2.2.6 y 2.2.7. Sin embargo, cuando un conjunto es elemento de otro, sus elementos no son elementos del conjunto que lo contiene.

Ejemplos:

2.2.8 En el ejemplo 2.2.6,,la clase de los mamíferos es considerada como un elemento del subfilum de los vertebrados, pero sus propios elementos (o sea, sus órdenes) no son elementos del subfilum de los vertebrados. Dicho de otra manera, un subfilum no es un conjunto de órdenes.

2.2.9 Análogamente, y considerando el ejemplo 2.2.7, resulta que una clase no es un conjunto de familias.

2.2.10 Si N = {tierra, {H_2O, CO_2}, sol}, entonces se tiene que tierra $\in N$, {H_2O, CO_2} $\in N$, y sol $\in N$, pero $H_2O \notin N$ y $CO_2 \notin N$.

Hasta ahora hemos estado hablando de conjuntos que tienen varios elementos; podemos imaginar conjuntos que tienen exactamente dos elementos,

2.2.11 Ejemplo:

El conjunto de las orejas de un ser humano normal tiene dos elementos.

...conjuntos que tienen exactamente un elemento,

2.2.12 Ejemplo:

El conjunto de los corazones de un ser humano normal tiene un elemento.

... y conjuntos que tienen exactamente cero elementos:

2.2.13 Ejemplo:

El conjunto de las alas de un ser humano normal no tiene ningún elemento.

Estos conjuntos sin elementos son muy especiales; como todos son la representación de lo mismo (o sea de la nada, del "vacío"), son iguales:

2.2.14 Llamamos conjunto vacío al conjunto que no tiene ningún elemento; lo marcamos con la letra escandinava $\emptyset$.

Ejemplos:

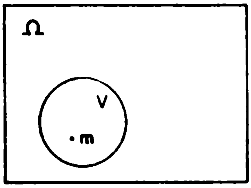
2.2.15 $\emptyset$ = {pulgas que se saben de memoria "El Quijote"}

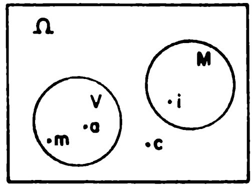
2.2.16 $\emptyset$ = {elefantes unicelulares}

Lo último que veremos en esta sección es una manera muy fácil de representar gráficamente los conjuntos de los que hablemos: se trata de los diagramas de Venn. En un diagrama de Venn representamos al conjunto universo Ω con un rectángulo cuyos puntos pueden corresponder a los elementos de Ω. De esta manera, los otros conjuntos en estudio quedan representados por regiones cerradas más pequeñas (generalmente círculos), incluídas dentro del rectángulo.

2.2.17 Ejemplo:

Tomemos el ejemplo 2.2.6, en el que Ω ={todas las clases}. Si representamos por m a la clase los mamíferos (elemento), y por V al subfilum de los vertebrados (conjunto), podemos hacer el diagrama de Venn siguiente (ver el primero de los diagramas de la página que sigue):





Este mismo diagrama puede complicarse tanto como queramos: por ejemplo, podemos considerar, siempre dentro del mismo Ω, la clase de las aves (a), la clase de las coníferas (c), la clase de los insectos (i), y el subfilum de los mandibulados (M); obtenemos así el segundo diagrama de Venn. Obsérvese que: $m \in V$, $a \in V$, $i \in M$, $c \notin V$, $c \notin M$, $m \notin M$, $a \notin M$, $i \notin V$.

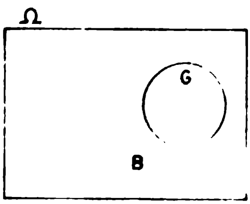
De este modo, los diagramas de Venn nos servirán para representar gráficamente los conjuntos y sus relaciones, cuyo estudio iniciamos de lleno a continuación.

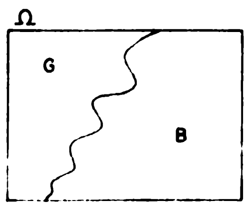
2.3 COMPLEMENTO

Consideremos los siguientes conjuntos:

2.3.1 Ejemplo:

Ω = {enfermos internados en un hospital un día dado}
G = {enfermos graves del hospital}
B = {enfermos no graves del hospital}
Cualquiera de los dos diagramas de Venn de abajo puepuede servir para ilustrar los conjuntos Ω, G y B.





En el ejemplo 2.3.1, los conjuntos G y B están relacionados de una manera particular: no comparten elementos (o sea: no hay enfermos que estén al mismo tiempo graves y no graves), y entre los dos abarcan todo el conjunto universo (o sea: todos los enfermos del hospital pueden ser clasificados en graves o en no graves). Cuando esto sucede con dos conjuntos, decimos que son <u>complementarios</u>: en el ejemplo 2.3.1, el conjunto B es el <u>complemento</u> del conjunto G (y viceversa).

2.3.2 Ejemplo:

Si Ω ={enzimas que intervienen en el ciclo de Krebs}, y F = {fumarasa} , entonces el complemento de F es el conjunto de todas las enzimas que intervienen en el ciclo de Krebs que no son la fumarasa.

El complemento de un conjunto A es entonces el <u>conjunto formado por todos los elementos de Ω que no pertenecen a A</u>. Esto lo podemos expresar de manera simbólica, e incluso podemos ayudarnos de la simbología del lenguaje de la Lógica, si nos fijamos en que la pertenencia de un elemento x a un conjunto A puede ser considerada como una proposición lógica: "x pertenece a A" o "$x \in A$". Además, añadiremos a nuestro repertorio de símbolos uno que nos permita ahorrarnos la expresión "complemento de", y que será el símbolo " $\bar{\ }$ " :

2.3.3

> Si A es un conjunto dentro de un conjunto universo Ω, $\bar{A}$ es el complemento de A, y se tiene que:
>
> $$\bar{A} = \{x \in \Omega | x \notin A\}$$
>
> O, equivalentemente:
>
> $$\bar{A} = \{x \in \Omega | \sim (x \in A)\}$$

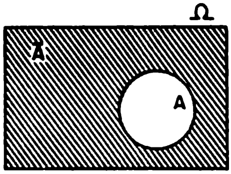
Ejemplos:

2.3.4 Si $\Omega = \{a,b,c,d\}$, y $A = \{a,c\}$, entonces $\bar{A} = \{b,d\}$

2.3.5 Sea Ω = {etapas de la mitosis}, o sea que Ω = {interfase, profase, metafase, anafase, telofase}, y sea T = {interfase, profase, metafase}. Entonces $\bar{T} = \{x \in \Omega | x \notin T\}$ = {anafase, telofase}.

Resulta entonces que un conjunto no comparte ningún elemento con su complemento, y que cualquier elemento del conjunto universo está o en un conjunto o en su complemento. Esto se puede apreciar gráficamente en el siguiente diagrama de Venn, en el que se halla sombreado el complemento del conjunto A:

2.3.6 Diagrama de Venn del Complemento



2.4 INTERSECCION

Consideremos los siguientes conjuntos:

2.4.1 Ejemplo:

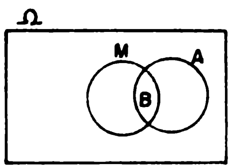
Ω = {especies de vertebrados}

M = {mamíferos}

A = {vertebrados marinos}

B = {mamíferos marinos}

El diagrama de Venn de abajo puede servir para ilustrar los conjuntos Ω, M, A y B.



En el ejemplo 2.4.1, el conjunto B es el conjunto de los vertebrados que cumplen con las características de M y de A: decimos que B es la intersección de los conjuntos M y A.

2.4.2 **Ejemplo:**

Sea $\Omega = \{\text{hortalizas}\}$, y sean $F = \{\text{hortalizas de las que se come el fruto}\}$ y $R = \{\text{hortalizas de las que se come la flor}\}$ dos conjuntos en Ω. Entonces la calabaza es un elemento que pertenece a la intersección de F y R.

Tenemos entonces que la intersección de dos conjuntos es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a ambos simultáneamente. Podemos, como en el caso del complemento, usar la simbología de la Lógica para expresar esto y, como ya es nuestra costumbre, necesitaremos un símbolo específico: usaremos "$\cap$" para expresar la intersección:

2.4.3

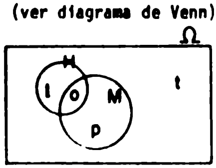
> Si A y B son dos conjuntos dentro de un conjunto universo Ω, $A \cap B$ es la intersección de A y B, y se tiene que:
> $$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$
> O, equivalentemente:
> $$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Ejemplos:

2.4.4 Si $\Omega = \{a,b,c,d\}$, y $A = \{a,c\}$ y $B = \{b,c\}$, entonces $A \cap B = \{c\}$

2.4.5 Si $\Omega = \{\text{hormonas humanas}\}$, podemos definir, en Ω, $H = \{\text{hormonas producidas por el hipotálamo}\}$ y $M = \{\text{hormonas que actúan normalmente sobre el útero}\}$. Consideremos las siguientes hormonas: la oxitocina (o), la hormona liberadora de ACTH (l), la progesterona (p), y la testosterona (t). Tenemos entonces (ver diagrama de Venn):

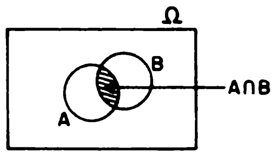
$o \in H$	$o \in M$	$o \in H \cap M$
$l \in H$	$l \notin M$	$l \notin H \cap M$
$p \notin H$	$p \in M$	$p \notin H \cap M$
$t \notin H$	$t \notin M$	$t \notin H \cap M$



lo cual se parece bastante a la tabla de verdad de la conjunción (1.3.7).

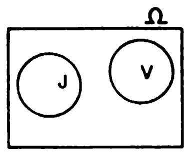
Resulta pues que la intersección no es mas que la conjunción traducida a lenguaje conjuntista. En general, en un diagrama de Venn la intersección se ve como en el área sombreada del siguiente:

2.4.6 <u>Diagrama de Venn de la Intersección</u>



Sin embargo, debemos observar que la intersección de dos conjuntos es un conjunto que no forzosamente tiene elementos: puede ser el conjunto vacío.

2.4.7 Ejemplo:



En Ω = {seres humanos}, los conjuntos
$J = \{x \in \Omega | x$ tiene menos de 25 años$\}$ y
$V = \{x \in \Omega | x$ tiene más de 60 años$\}$,
tienen intersección vacía: $J \cap V = \phi$
Decimos entonces que son conjuntos <u>ajenos</u> entre sí.

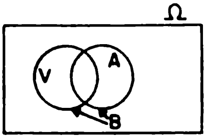
2.5 UNION

Consideremos los siguientes conjuntos:

2.5.1 Ejemplo:

Ω = {personas que viven en una comunidad dada}
V = {personas que explotan los recursos vegetales}
A = {personas que explotan los recursos animales}
B = {personas que explotan los recursos bióticos}

El diagrama de Venn de abajo puede servir para ilustrar los conjuntos Ω, V, A y B.



En el ejemplo 2.5.1, el conjunto B es el conjunto de las personas que cumplen con las características de V o de A: decimos que B es la unión de los conjuntos V y A.

2.5.2 Ejemplo:
Sea Ω = {frutos}, y sean R= {frutos rojos} y V= {frutos verdes} dos conjuntos en Ω. Entonces tanto la sandía como el jitomate y el aguacate pertenecen a la unión de R y V.

Tenemos entonces que la unión de dos conjuntos es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a por lo menos uno de los dos: es el conjunto formado por los elementos de uno o de otro. Es importante observar que aquí, como al hablar de disyunción lógica (sección 1.5) estamos usando la conectiva "o" en sentido inclusivo (ver 1.5.5). Es por cierto la disyunción lógica la que nos puede ayudar a expresar simbólicamente la unión de conjuntos; usaremos "U" como símbolo específico para la unión:

2.5.3

Si A y B son dos conjuntos dentro de un conjunto universo Ω, $A \cup B$ es la unión de A y B, y se tiene que:
$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$
O, equivalentemente:
$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \vee x \in B\}$

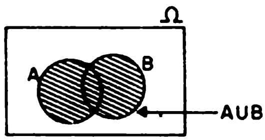
Ejemplos:

2.5.4 Si $\Omega = \{a,b,c,d\}$, y $A = \{a,c\}$ y $B = \{b,c\}$, entonces $A \cup B = \{a,b,c\}$

2.5.5 Recordemos que la herencia del color de los ojos en los humanos sigue las leyes de Mendel; el gen tiene dos alelos: uno dominante (ojos oscuros) y uno recesivo (ojos claros). Además, cada persona tiene dos copias del gen, una heredada del padre y otra de la madre. Si Ω = {personas}, podemos definir, en Ω, P ={personas que heredaron del padre el alelo dominante} y M = {personas que heredaron de la madre el alelo dominante}. Entonces, si D = {personas que tienen el fenotipo dominante}, D = $P \cup M$.

En general, en un diagrama de Venn la unión se ve como el área sombreada del siguiente:

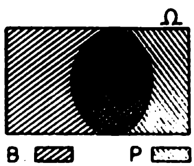
2.5.6 Diagrama de Venn de la Unión



Un caso particular ocurre cuando la unión de dos conjuntos abarca todo el conjunto universo:

2.5.7 Ejemplo:

En Ω={especies de vertebrados}, los conjuntos P ={especies con respiración pulmonar} y B = {especies con respiración branquial} son tales que $P \cup B = \Omega$



2.6 DIFERENCIA

Consideremos los siguientes conjuntos:

2.6.1 Ejemplo:

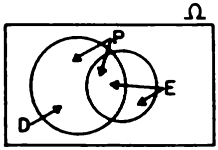
Ω = {moléculas orgánicas}

P = {proteínas}

E = {enzimas, coenzimas}

D = {proteínas que no son enzimas}

El diagrama de Venn de abajo puede servir para ilustrar los conjuntos Ω, P, E y D.



En el ejemplo 2.6.1, el conjunto D es el conjunto de las moléculas orgánicas que cumplen con las características de P y no cumplen con las de E: decimos que D es la diferencia de P menos E.

2.6.2 Ejemplo:

Sea Ω= {especies vivas}, y sean E= {especies del subreino embryophyta} y C = {especies que tienen clorofila} dos conjuntos en Ω. Entonces las algas verdes pertenecen a la diferencia de C menos E.

Resulta entonces que la diferencia de un conjunto A menos un conjunto B es el conjunto formado por todos los elementos de A que no están en B. En notación simbólica esto queda así (hemos añadido el símbolo "-", que usaremos específicamente para la diferencia):

2.6.3

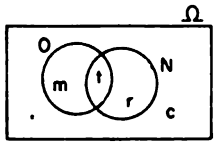
Si A y B son dos conjuntos dentro de un conjunto universo Ω, A-B es la diferencia de A menos B, y se tiene que: $A-B = \{x \in A \mid x \notin B\}$

De hecho, podemos observar que otra manera de expresar la diferencia es
$A-B = A\cap\overline{B} = \{x \in \Omega \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

Ejemplos:

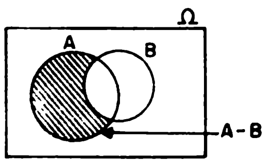
2.6.4 Si $\Omega = \{a,b,c,d\}$, y $A = \{a,c\}$ y $B = \{b,c\}$, entonces $A-B=\{a\}$

2.6.5 Si Ω = {componentes de la célula}, podemos definir, en Ω, O = {organelos}, y N = {componentes que contienen ácidos nucléicos}. Entonces, si m es la membrana celular, $m \in O-N$ porque es un organelo que no contiene ácidos nucléicos. Otra manera de expresar lo mismo es: "$m \in O \wedge m \notin N$", o sea "$m \in O \wedge m \in \overline{N}$", o sea $m \in O\cap\overline{N}$. Además, si t es una mitocondria, r es un RNA mensajero y c es el citoplasma, se tiene que: $t \in O$, $t \in N$, $t \notin O-N$; $r \notin O$, $r \in N$, $r \notin O-N$; $c \notin O$, $c \notin N$, $c \notin O-N$.



Por último, veamos gráficamente la diferencia de un conjunto A menos un conjunto B.

2.6.6. <u>Diagrama de Venn de la Diferencia</u>



2.7 SUBCONJUNTOS

Consideremos los siguientes conjuntos:

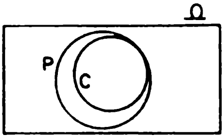
2.7.1 Ejemplo:

Ω = {alimentos}

P = {alimentos que tienen proteínas}

C = {carnes}

El diagrama de Venn de abajo puede servir para ilustrar los conjuntos Ω, P y C.



En el ejemplo 2.7.1, el conjunto C está relacionado de una manera particular con el conjunto P: todos los elementos de C pertenecen a P (o sea, todas las carnes tienen proteínas); sin embargo, hay elementos de P que no pertenecen a C (o sea, hay alimentos que tienen proteínas y no son carnes, como la soya y los frijoles). Decimos para expresar esta relación que C es un subconjunto de P o que P contiene a C.

2.7.2 Ejemplo:

Si Ω = {seres humanos}, y F = {seres humanos de sexo femenino} y N = {niñas}, entonces N es subconjunto de F (F contiene a N)

Resulta entonces que un conjunto A es subconjunto de otro conjunto B si todos los elementos de A pertenecen a B. Dicho de otra manera, A es subconjunto de B cuando sucede que cada vez que un elemento pertenece a A, pertenece a B: y esto no es más que una proposición condicional (ver 1.6.9). Y es precisamente la relación de implicación lógica la que nos va a ayudar a expresar simbólicamente la relación de subconjunto, también llamada contención; introducimos además el símbolo " $\subset$ " :

2.7.3

Si A y B son dos conjuntos dentro de un conjunto universo Ω, decimos que A es subconjunto de B, o que B contiene a A, o que A está contenido en B y escribimos $A \subset B$, cuando todos los elementos de A pertenecen a B. O, equivalentemente: $A \subset B \iff (x \in A \implies x \in B)$

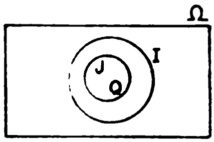
2.7.4 Ejemplo:

Si $\Omega = \{a,b,c,d\}$, y $A = \{a,c\}$ y $B = \{a,b,c\}$, entonces $A \subset B$.

De hecho, podemos distinguir entre dos tipos de contención, uno más estricto que otro:

2.7.5 Ejemplo:

Sea Ω = {monedas mexicanas en circulación en 1979}, y sean I = {monedas que tienen efigies de héroes de la guerra de independencia}, J = {monedas que tienen la efigie de Josefa Ortiz de Domínguez} y Q = {monedas que valen cinco centavos}. Entonces $J \subset I$, y $J \subset Q$, pero mientras que en I hay elementos que no pertenecen a J (por ejemplo, las monedas de un peso con la efigie de Morelos), en Q no hay elementos que no pertenezcan a J (o sea: todas las monedas de cinco centavos tienen la efigie de la corregidora). La contención $J \subset I$ es más estricta que la contención $J \subset Q$.



Puede resultar engorroso el uso de un mismo símbolo para dos relaciones distintas: la contención en sentido no estricto (como $J \subset Q$ en el ejemplo 2.7.5) y la contención en sentido estricto (como $J \subset I$ en el ejemplo 2.7.5). Dejaremos el símbolo " $\subset$ " para la contención no estricta, y usaremos uno ligeramente distinto para la contención estricta: " $\subsetneq$ ":

2.7.6 Si A y B son dos conjuntos dentro de un conjunto universo Ω tales que $A \subset B$, y además existen elementos de B que no estén en A, decimos que A es subconjunto escricto (también llamado subconjunto propio) de B, o que B contiene estrictamente a A, y escribimos $A \subsetneqq B$.
O, equivalentemente:

$$A \subsetneqq B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B-A \neq \emptyset).$$

Obsérvese que en 2.7.6 el último renglón es la traducción a lenguaje simbólico de lo que está dicho antes con palabras: "$B-A \neq \emptyset$" es la traducción de "existen elementos de B que no están en A". Cuando no importa aclarar si se trata de una contención estricta o no, usamos simplemente el símbolo "$\subset$". De esta manera resulta, en el ejemplo 2.7.5, que $J \subsetneqq I$ y $J \subset Q$. Además resulta que $Q \subset J$; de hecho $J = Q$. Esto nos permite llegar a lo siguiente:

2.7.7 Si A y B son dos conjuntos dentro de un conjunto universo Ω, entonces:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$$

lo que no es más que una manera simbólica de decir que el que dos conjuntos son iguales quiere decir que todos los elementos de uno pertenecen al otro, y viceversa, o sea, también: $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

Aquí conviene hacer una aclaración: en Conjuntos (como en Lógica), se tiene que mientras que el complemento (negación) es una <u>operación</u> con un conjunto (proposición) y la intersección (conjunción), la unión (disyunción) y la diferencia son <u>operaciones</u> con dos conjuntos (proposiciones), obteniéndose en cada caso un nuevo conjunto (proposición), la contención (implicación) y la igualdad (equivalencia) son <u>relaciones</u> entre conjuntos (proposiciones).

2.7.8 Ejemplo:

Sea Ω = {moléculas orgánicas}, y sean los siguientes conjuntos en Ω: A = {ácidos orgánicos}, C = {moléculas que tienen un grupo -COOH} y N = {aminoácidos}. Entonces se tienen las siguientes relaciones: $A \subsetneqq \Omega$, $C \subsetneqq \Omega$, $N \subsetneqq \Omega$; $A \subset C$, $C \subset A$, $A = C$; $N \subsetneqq A$, $N \subsetneqq C$.

En el ejemplo 2.7.8 vimos que los conjuntos de los que hablamos dentro de un conjunto universo están contenidos dentro de él. Esto sucede siempre: si A es un conjunto dentro de un conjunto universo Ω, $A \subset \Omega$ (obsérvese que no forzosamente $A \subsetneq \Omega$: podría suceder que $A = \Omega$). Otra contención que sucede siempre es la siguiente: $\emptyset \subset A$: el conjunto vacío es subconjunto de todos los subconjuntos. Veamos un ejemplo:

2.7.9 Ejemplo:

Consideremos en Ω = {seres vivos} los conjuntos M = {mamíferos}, P = {peces} y R = {humanos capaces de fotosintetizar}. Es obvio que $R = \emptyset$. Además, $R \subset M$, porque todos los humanos capaces de fotosintetizar son mamíferos. También $R \subset P$, porque todos los humanos capaces de fotosintetizar son peces: la única manera de contradecir esto sería mostrando un ser humano capaz de fotosintetizar que no sea pez, lo que es imposible, porque no hay humanos capaces de fotosintetizar. Obsérvese que si x es un caballo, $x \in M$ es verdadero, $x \in P$ es falso y $x \in R$ es falso; entonces $x \in R \rightarrow x \in M$ es verdadero y $x \in R \rightarrow x \in P$ es verdadero (ver tabla de verdad de la condicional, 1.6.18); o sea, que si $x \in R$, $x \in M$, y si $x \in R$, $x \in P$.

En el ejemplo 2.7.9, vemos que $\emptyset \subset M$ y $\emptyset \subset P$. Para demostrar en general que $\emptyset \subset A$ para cualquier conjunto A hacemos algo parecido: todos los elementos de $\emptyset$ (o sea ninguno) están en A, por lo que $\emptyset \subset A$. Lo que sucede es que, al aplicar la implicación (o sea, una condicional verdadera) sólo estamos en los casos correspondientes a los dos últimos renglones de la tabla de verdad 1.6.18, (porque nunca puede ser verdadero que $x \in \emptyset$), que son verdaderos. Entonces:

2.7.10 Si A es un conjunto dentro de un conjunto universo Ω, $\emptyset \subset A$.

De hecho, $\emptyset \subsetneq A$, a menos que $A = \emptyset$:

2.7.11 Ejemplos:

Siguiendo el ejemplo 2.7.9, $R = \emptyset \subsetneq M$ y $R = \emptyset \subsetneq P$, pero si B = {bacterias más pesadas que un elefante}, se tie ne que $B = \emptyset$: $R \subset B$ y $B \subset R$ porque $R = B = \emptyset$.

Finalmente, consideremos un problema que puede llegar a planteársenos: dado un conjunto, ¿cuántos subconjuntos puede tener, y cuáles son?

2.7.12 Ejemplo:

Sea Ω = {bases nitrogenadas de los nucleótidos} = {adenina, guanina, timina, citosina, uracilo} = {a,g,t,c,u}. El conjunto R = {u} tiene los siguientes subconjuntos: $\emptyset \subset R$ y $R \subset R$. El conjunto de las bases púricas, P = {a,g} tiene los siguientes subconjuntos: $\emptyset \subset P$, $\{a\} \subset P$, $\{g\} \subset P$ y $P \subset P$. El conjunto de las bases pirimídicas, $M = \{t,c,u\}$ tiene los siguientes subconjuntos: $\emptyset \subset M$, $\{t\} \subset M$, $\{c\} \subset M$, $\{u\} \subset M$, $\{t,c\} \subset M$, $\{t,u\} \subset M$, $\{c,u\} \subset M$ y $M \subset M$.

Podemos observar, en el ejemplo 2.7.12, que el conjunto R, de un elemento, tiene dos subconjuntos; que el conjunto P, de dos elementos, tiene cuatro - subconjuntos, y que el conjunto M, de tres elementos, tiene ocho subconjuntos (dos de esos subconjuntos son siempre $\emptyset$ y el conjunto mismo). En general:

2.7.13 **Si un conjunto A dentro de un conjunto universo Ω tiene n elementos, entonces tiene 2^n posibles subconjuntos. - Llamamos la potencia de A y denotamos por $P(A)$ al conjun- de todos los subconjuntos de A: $P(A)$ tiene 2^n elementos.**

2.7.14 Ejemplo:

En el ejemplo 2.7.12, se tiene que:
R tiene un elemento ($n=1$), y $P(R)$, $2^1 = 2$ elementos: $P(R) = \{\emptyset, R\}$. P tiene dos elementos ($n=2$) y $P(P)$, $2^2 = 4$ elementos: $P(P) = \{\emptyset, \{a\}, \{g\}, P\}$. M tiene tres elementos ($n=3$) y $P(M)$, $2^3 = 8$ elementos.

El hecho de que el número de elementos de la potencia de un conjunto con n elementos sea igual al número de renglones de la tabla de verdad de n proposiciones (ver 1.4.3) no es mera coincidencia. Podemos asociar a cada uno de los n elementos de un conjunto la proposición de pertenencia al conjunto (por ejemplo, en el conjunto P de 2.7.12, al elemento a le asociamos la proposición $a \in P$), y tenemos así tantas proposiciones como elementos. En la tabla de verdad resultante, cada uno de los 2^n renglones corresponden a uno de los 2^n subconjuntos, desde el primero (con solamente V) que corresponde al conjunto entero, hasta el último (con solamente F) que corresponde al conjunto vacío.

2.7.15 Ejemplo:

Tomemos el conjunto P del ejemplo 2.7.12. $P = \{a, g\}$ tiene dos elementos, y cada uno le asociamos una proposición: al elemento a, $a \in P$, y al elemento g, $g \in P$. En la tabla de verdad resultante, cada renglón corresponde a un subconjunto:

$a \in P$	$g \in P$	
V	V	al subconjunto P (ver diagrama 1)
V	F	al subconjunto $\{a\}$ (ver diagrama 2)
F	V	al subconjunto $\{g\}$ (ver diagrama 3)
F	F	al subconjunto ϕ (ver diagrama 4)

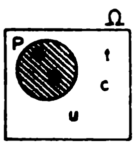


Diagrama 1
Subconjunto P
$a \in P$, $g \in P$

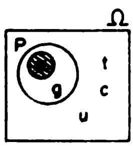


Diagrama 2
Subconjunto $\{a\}$
$a \in \{a\}$, $g \notin \{a\}$

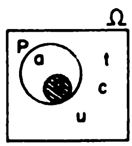


Diagrama 3
Subconjunto $\{g\}$
$a \notin \{g\}$, $g \in \{g\}$

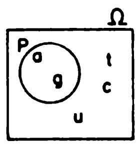


Diagrama 4
Subconjunto ϕ
$a \notin \phi$, $g \notin \phi$

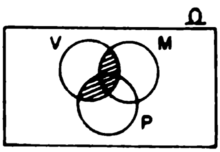
Como se puede ver en el ejemplo 2.7.15, la traducción al lenguaje de la Lógica nos permite saber no sólo cuántos, sino cuáles son los subconjuntos de un conjunto, al retraducir al lenguage de los Conjuntos cada uno de los renglones de la tabla de verdad.

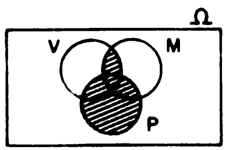
2.8 PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES DE CONJUNTOS

Antes de entrar de lleno a algunas de las muchas propiedades interesantes que tienen las operaciones de conjuntos, hagamos algunas observaciones que parecen pertinentes. La primera se refiere a la formación de conjuntos complejos: ésta se logra de la misma manera que en Lógica se forman proposiciones compuestas: usando adecuadamente varios operadores y marcando prioridades con paréntesis: las reglas de puntuación son las mismas.

2.8.1 Ejemplo:

Sea Ω = {alimentos}, y sean V = {alimentos que contienen vitaminas}, M = {alimentos que contienen minerales} y P = {alimentos que contienen proteínas} tres conjuntos en Ω. Podemos entonces formar el conjunto $V\cap(M\cup P)$, formando primero la unión $M\cup P$ e intersectándola después con V; el conjunto resultante es el conjunto de los alimentos que contienen vitaminas y algo más, ya sea minerales o proteínas (primer diagrama). Podemos también formar el conjunto $(V\cap M)\cup P$, formando primero la intersección $V\cap M$ y uniéndola después con P; el conjunto resultante es el conjunto de los alimentos que contienen proteínas, o minerales y vitaminas (segundo diagrama). Obsérvese que $V\cap(M\cup P) \neq (V\cap M)\cup P$.





También es necesario recalcar que los diagramas de Venn sirven para *ilustrar* una propiedad, *no* para *demostrarla*, porque una propiedad puede ser verdadera en un diagrama particular y falsa en general. ¿Cómo se demuestran entonces las propiedades de las operaciones de conjuntos? Es frecuente que las propiedades adopten una de estas formas:

1) Un conjunto es subconjunto de otro. Demostrar esto equivale a demostrar que todos los elementos del primero pertenecen al segundo (2.7.3); para esto podemos tomar un elemento genérico del primero y demostrar que está en el segundo.

2) Dos conjuntos son iguales. Para demostrar esto se puede demostrar que cada uno es subconjunto del otro (2.7.7) o bien demostrar que las proposiciones lógicas que las definen son equivalentes (2.1.31).

3) Dos relaciones son equivalentes. Para demostrar esto se demuestra que cada una de ellas implica a la otra (1.7), o sea que cada vez que se cumple una se cumple la otra, y viceversa.

En general, cualquier demostración puede basarse en una propiedad ya demostrada de la Lógica o de conjuntos.

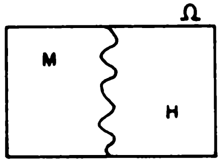
A continuación, enunciaremos una serie de propiedades de las operaciones de conjuntos, demostrando sólo unas cuantas como muestra (las demás demostraciones quedan como ejercicios). Muchas de estras propiedades van "por pares" (es decir: son propiedades duales); cuando es así, ejemplificamos sólo un miembro de cada par (el otro ejemplo queda como ejercicio).

La primera propiedad se refiere al complemento de un complemento:

2.8.2 $\boxed{\text{Si } A \text{ es un conjunto en un conjunto universo } \Omega,\ \overline{\overline{A}} = A}$

2.8.3 Ejemplo:

En Ω = {seres humanos}, sea M = {mujeres} Entonces $\overline{M} = H$ = {hombres}. Además, $\overline{H} = M$, o sea $\overline{\overline{M}} = M$.



2.8.4 **Demostración:**

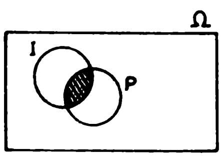
Si A es un conjunto en un conjunto universo Ω, entonces $\bar{A} = \{x \in \Omega | \sim (x \in A)\}$ (2.3.3). Como $\bar{A}$ es a su vez un conjunto en Ω, podemos formar su complemento: $\bar{\bar{A}} = \{x \in \Omega | \sim (x \in \bar{A})\}$. Ahora bien, para cualquier $x \in \Omega$, sucede que $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \sim(x \in A)$, de donde $\sim(x \in \bar{A}) \Leftrightarrow \sim(\sim(x \in A))$. Por 1.9.1, que dice que dos negaciones se cancelan, $\sim(\sim(x \in A)) \Leftrightarrow x \in A$, y de ahí que $\sim(x \in \bar{A}) \Leftrightarrow x \in A$. O sea que $\bar{\bar{A}} = \{x \in \Omega | \sim (x \in \bar{A})\} = \{x \in \Omega | x \in A\} = A$. Aquí hemos demostrado que $\bar{\bar{A}} = A$ demostrando que las proposiciones que los definen ($\sim(x \in \bar{A})$ y $x \in A$ respectivamente) son equivalentes.

Las siguientes dos propiedades se refieren a las posiciones respectivas de dos conjuntos con su intersección y su unión:

2.8.5 Si A y B son dos conjuntos en un conjunto universo Ω, entonces $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$

2.8.6 **Ejemplo:**

En Ω = {seres vivos} sean I = {insectos} y P = {parásitos}. Entonces $I \cap P$ = {insectos parásitos}, y $I \cap P \subset I$ (o sea, todos los insectos parásitos son insectos), y $I \cap P \subset P$ (o sea, todos los insectos parásitos son parásitos).



2.8.7 Demostración:

Sean A y B dos conjuntos en un conjunto universo Ω, y sea $x \in A \cap B$. Como $A \cap B = \{x \in \Omega | x \in A \wedge x \in B\}$ (2.4.3) y $x \in A \cap B$, entonces $x \in A \wedge x \in B$. Además, $x \in A \wedge x \in B \Longrightarrow x \in A$ (1.11.17). Por lo tanto, $x \in A$. O sea, que si un elemento x está en $A \cap B$, entonces está en A: $x \in A \cap B \Longrightarrow x \in A$. O sea, $A \cap B \subset A$. Análogamente, $A \cap B \subset B$.

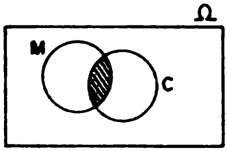
2.8.8 Si A y B son dos conjuntos en un conjunto universo Ω, entonces: $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$

El siguiente par de propiedades se refiere a la conmutatividad de la intersección y de la unión, misma que está relacionada con la conmutatividad de la conjunción (1.9.4) y de la disyunción (.1.9.9), respectivamente:

2.8.9 Si A y B son dos conjuntos en un conjunto universo Ω, entonces: $A \cap B = B \cap A$

2.8.10 Ejemplo:

En Ω = {animales}, sean M = {mamíferos} y C = {carnívoros}. Entonces $M \cap C$ = {mamíferos que son carnívoros} = {carnívoros que son mamíferos} = $C \cap M$



2.8.11 Si A y B son dos conjuntos en un conjunto universo Ω, entonces: $A \cup 3 = B \cup A$

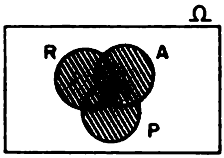
Resulta también que, así como la conjunción y la disyunción son asociativas (1.9.7 y 1.9.11 respectivamente), podemos hablar de la asociatividad de la intersección y de la unión:

2.8.12 Si A,B y C son tres conjuntos en un conjunto universo Ω, entonces: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

2.8.13 | Si A, B y C son tres conjuntos en un conjunto universo Ω, entonces: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ |

2.8.14 Ejemplo:

En Ω = {personas entrevistadas en un censo sobre su alimentación la semana anterior}, sean:
$R = \{x|x$ comió carne de res$\}$, $A = \{x|x$ comió pollo$\}$ y
$P = \{x|x$ comió pescado$\}$. Entonces $R \cup (A \cup P) =$
$R \cup \{x|x$ comió pollo o pescado$\} = \{x|x$ comió res, o pollo o pescado$\}$. Por otra parte, $(R \cup A) \cup P = \{x|x$ comió res o pollo$\} \cup P = \{x|x$ comió res o pollo, o pescado$\}$. Por lo tanto, $R \cup (A \cup P) = (R \cup A) \cup P$. Podemos escribir $R \cup A \cup P$.

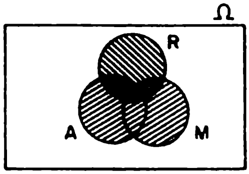


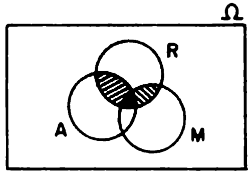
La siguiente pareja de proposiciones se refiere a la <u>distributividad</u>: la intersección distribuye a la unión y viceversa, así como la conjunción distribuye a la disyunción (1.9.13) y viceversa (1.9.15):

2.8.15 | Si A, B y C son tres conjuntos en un conjunto universo Ω, entonces $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |

2.8.16 Ejemplo:

En Ω = {personas que tienen gripa}, sean R = {personas que guardan reposo}, A = {personas que toman aspirinas}, y M = {personas que usan otros medicamentos}. Entonces $R \cap (A \cup M)$ es el conjunto de las personas que, además de guardar reposo, usan algún medicamento. Formamos este conjunto calculando primero $(A \cup M)$ e intersectándolo después con R (primer diagrama). Por otra parte, $(R \cap A) \cup (R \cap M)$ es el conjunto de las personas que guardan reposo y toman aspririnas, o que guardan reposo y usan otros medicamentos. Lo formamos calculando primero $R \cap A$ y $R \cap M$, y uniéndolos después (segundo diagrama).

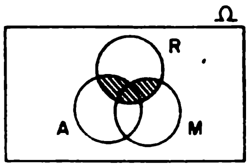




R $\quad R \cap (A \cup M)$ $\quad R \cap A$ $\quad R \cap M$

$A \cup M$

En cualquiera de los dos casos, el resultado final es el que se ilustra en el tercer diagrama: $R \cap (A \cup M) = (R \cap A) \cup (R \cap M)$.



2.8.17 | Si A, B y C son tres conjuntos en un conjunto universo Ω, entonces: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

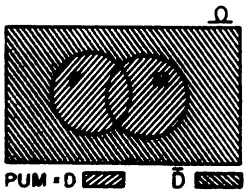
Veamos también la expresión en el lenguaje de Conjuntos de las leyes de De Morgan: el complemento de la intersección es la unión de los complementos (ver 1.9.17), y el complemento de la unión es la intersección de los complementos (ver 1.9.19):

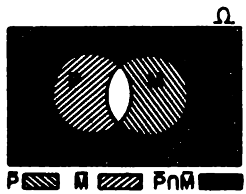
2.8.18 | Si A y B son dos conjuntos en un conjunto universo Ω, entonces: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

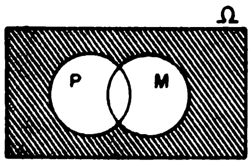
2.8.19 | Si A y B son dos conjuntos en un conjunto universo Ω, entonces: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

2.8.20 Ejemplo:

En el ejemplo 2.5.5, en el que hablabamos de la herencia del color de los ojos, teníamos, en Ω = {personas}, los conjuntos P = {personas que heredan del padre el alelo - dominante}, M = {personas que heredan de la madre el alelo dominante} y D = {personas que tienen el fenotipo dominante}. Teníamos entonces que $D = P \cup M$. El primer diagrama muestra D y $\bar{D}$. Observemos que los complementos de los conjuntos D, P y M vienen a ser: $\bar{D}$ = {personas que tienen el fenotipo recesivo}, $\bar{P}$ = {personas que heredan del padre el alelo recesivo}, y $\bar{M}$ = {personas que heredan de la madre el alelo recesivo}. El segundo diagrama ilustra $\bar{P}$, $\bar{M}$ y $\bar{P} \cap \bar{M}$ ={personas que heredan de ambos progenitores el alelo recesivo}. Es bien sabido que las - personas que están en $\bar{P} \cap \bar{M}$ son precisamente las que están en $\bar{D}$: son las de ojos claros. Observemos que esto coincide con los diagramas. $\bar{D}$ en el primero y $\bar{P} \cap \bar{M}$ en el segundo son el mismo conjunto, sombreado en el tercer diagrama. Entonces: $\bar{D} = \overline{P \cup M} = \bar{P} \cap \bar{M}$





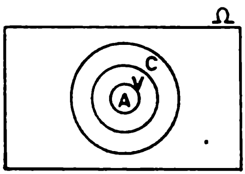


Veamos ahora algunas propiedades de la relación de contención. La primera es la transitividad que, como es natural, está relacionada con la de la relación de implicación lógica (1.9.21):

2.8.21 Si A, B y C son tres conjuntos en un conjunto universo Ω, entonces: $(A \subset B \wedge B \subset C) \Longrightarrow A \subset C$

2.8.22 Ejemplo:

En Ω = {animales}, sean A = {aves}, V = {vertebrados} y C = {cordados}. Entonces $A \subset V$ (todas las aves son vertebrados), $V \subset C$ (todos los vertebrados son cordados) y $A \subset C$ (todas las aves son cordados).



La siguiente propiedad es una lista de cinco maneras equivalentes de expresar la contención. Como muestra, demostraremos la primera y ejemplificaremos la última.

2.8.23 Si A y B son dos conjuntos en un conjunto universo Ω, entonces son equivalentes las siguientes relaciones:

$A \subset B$

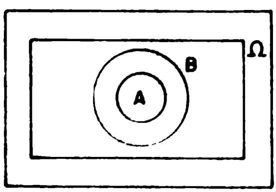
$A \cap \bar{B} = \emptyset$

$\bar{A} \cup B = \Omega$

$A \cap B = A$

$A \cup B = B$

$\bar{B} \subset \bar{A}$



2.8.24 <u>Demostración de $A \subset B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \phi$</u>

Como tenemos que demostrar que dos relaciones son equivalentes, demostraremos que cada una de ellas implica a la otra.

1) demostración de $A \subset B \Rightarrow A \cap \overline{B} = \phi$

Debemos demostrar que $A \cap \overline{B} = \phi$ cuando es cierto que $A \subset B$. Por lo tanto, supongamos que $A \subset B$; ahora bien $A \cap \overline{B} = \phi$ es una igualdad de conjuntos, que demostraremos probando que cada uno es subconjunto del otro:

a. demostración de $A \cap \overline{B} \subset \phi$. Imaginemos que existe un elemento $x \in A \cap \overline{B}$. Entonces $x \in A \wedge x \in \overline{B}$ (2.4.3), o sea $x \in A \wedge x \notin B$ (2.3.3). Ahora bien, como estamos suponiendo que $A \subset B$, y como $x \in A$, entonces $x \in B$ (2.7.3). O sea que $x \in B \wedge x \notin B$, lo cual es una contradicción, ya que no puede haber un elemento que simultáneamente esté y no esté en un conjunto: por lo tanto, no hay elementos en $A \cap \overline{B}$, o sea que $A \cap \overline{B} \subset \phi$.

b. demostración de $\phi \subset A \cap \overline{B}$. Esto es una trivialidad: ver 2.7.10

Hemos demostrado entonces que $A \cap \overline{B} = \phi$ cuando $A \subset B$:

$A \subset B \Rightarrow A \cap \overline{B} = \phi$

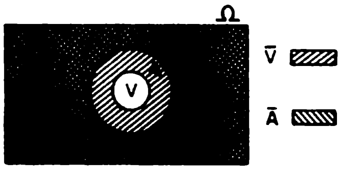
2) demostración de $A \cap \overline{B} = \phi \Rightarrow A \subset B$. Debemos demostrar que $A \subset B$ cuando es cierto que $A \cap \overline{B} = \phi$. Supongamos entonces que $A \cap \overline{B} = \phi$; sea un elemento $x \in A$ (debemos demostrar que entonces $x \in B$). Si $x \in A$, entonces $x \notin \overline{B}$, porque si x sí fuera elemento de $\overline{B}$, se tendría que $x \in A \wedge x \in \overline{B}$, o sea $x \in A \cap \overline{B}$, o sea $A \cap \overline{B} \neq \phi$, lo cual contradice nuestra suposición. Así, pues, $x \notin \overline{B}$, o sea: $x \in B$, y tenemos que $x \in A \Rightarrow x \notin \overline{B} \Rightarrow x \in B$. Por lo tanto $x \in A \Rightarrow x \in B$, con lo que hemos demostrado que $A \subset B$ cuando $A \cap \overline{B} = \phi$: $A \cap \overline{B} = \phi \Rightarrow A \subset B$.

Con esto último finalizamos la demostración:

$A \subset B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \phi$

2.8.25 Ejemplo de $A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$

En Ω = {personas}, sean V = {personas mayores de 60 años} y A = {personas mayores de 25 años}. Entonces $V \subset A$ - (todas las personas mayores de 60 años son también mayores de 25 años). Además, $\bar{A}$ = {personas menores de 25 años} y $\bar{V}$ = {personas menores de 60 años}, y $\bar{A} \subset \bar{V}$ (todas las personas menores de 25 años son también menores de 60 años) (ver 1.9.23).



Por último, veamos dos propiedades que relacionan al conjunto universo y al conjunto vacío con la intersección y la unión, respectivamente:

2.8.26 Si A y B son dos conjuntos en un conjunto universo Ω, entonces: $(A \cap B = \Omega) \Leftrightarrow (A = \Omega \wedge B = \Omega)$

2.8.27 Demostración

1) Demostraremos que $(A \cap B = \Omega) \Longrightarrow (A = \Omega \wedge B = \Omega)$

Tenemos que demostrar que $A = \Omega$ y que $B = \Omega$ cuando $A \cap B = \Omega$; haremos la prueba para A, y la de B es análoga: demostremos entonces que $A = \Omega$.

a. demostración de $A \subset \Omega$. Esto es trivial, porque en un conjunto universo todos los conjuntos son sus subconjuntos.

b. demostración de $\Omega \subset A$. Sea $x \in \Omega$: x es un elemento cualquiera del universo, y queremos demostrar que está en A. Como $A \cap B = \Omega$, que es lo que estamos suponiendo en esta primera parte de la demostración, $x \in \Omega \Leftrightarrow x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$, pero $(x \in A \wedge x \in B) \Longrightarrow x \in A$ (ver 1.11.17).

Por lo tanto $x \in \Omega \Longrightarrow x \in A$, o sea que $\Omega \subset A$.
Con esto queda demostrado que $(A \cap B = \Omega) \Longrightarrow A = \Omega$
Análogamente $(A \cap B = \Omega) \Longrightarrow B = \Omega$, o sea que $(A \cap B = \Omega) \Longrightarrow (A = \Omega \wedge B = \Omega)$

2) Demostraremos que $(A = \Omega \wedge B = \Omega) \Longrightarrow (A \cap B = \Omega)$
Tenemos que demostrar que $A \cap B = \Omega$ cuando $A = \Omega$ y $B = \Omega$:

a. demostración de $A \cap B \subset \Omega$. Esto es trivial
b. demostración de $\Omega \subset A \cap B$. Sea $x \in \Omega$:
x es un elemento cualquiera del universo, y queremos demostrar que está en $A \cap B$. Como $A = \Omega$, $x \in \Omega \Leftrightarrow x \in A$; como $B = \Omega$, $x \in \Omega \Leftrightarrow x \in B$.
Por lo tanto, $x \in \Omega \Longrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A \cap B$. O sea que $x \in \Omega \Longrightarrow x \in A \cap B$, y por lo tanto $\Omega \subset A \cap B$.

Con esto queda demostrado que $(A = \Omega \wedge B = \Omega) \Longrightarrow (A \cap B = \Omega)$. Junto con la primera parte de la demostración, queda demostrado que $(A \cap B = \Omega) \Leftrightarrow (A = \Omega \wedge A = \Omega)$

2.8.28 Si A y B son dos conjuntos en un conjunto universo Ω, entonces: $(A \cup B = \phi) \Leftrightarrow (A = \phi \wedge B = \phi)$

2.9 CONJUNTOS DE NUMEROS

Unos de los conjuntos que manejamos más frecuentemente son los conjuntos de números. En la mayoría de los casos, no los manejamos explícitamente como conjuntos, pero vamos a considerarlos así ahora para agruparlos según sus cualidades, que nos permiten contar, ponderar, medir, etc.

A los primeros números que aprendemos de niños los vamos a llamar "números naturales", y los representaremos por la letra $\mathbb{N}$:

2.9.1 El conjunto de los números naturales es:
$\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\ldots,\ldots 15,16,\ldots\ldots\ldots\}$

2.9.2 Ejemplo:
Los números naturales son típicamente usados para contar

dientes, casas, vacas, estrellas, elementos de un conjunto, etc.

Dados dos números naturales a y b siempre es cierto que su suma (a + b) y su producto (a x b) es un número natural, pero no siempre es cierto que la resta de uno menos el otro (a - b ó b - a) sea un número natural. Esto sí se cumple en un conjunto que contenga también los números negativos, y que llamaremos el conjunto de los "números enteros", simbolizado por $\mathbb{Z}$:

2.9.3 El conjunto de los números enteros es:

$$\boxed{\mathbb{Z} = \{......-16,-15....,0,1,2,3,.....\}}$$

2.9.4 Ejemplo:
Los números enteros son usados frecuentemente en contabilidad (los pagos o las deudas son números negativos), en biomedicina cuando se hacen comparaciones con respecto a un valor estándar (y entonces los valores por debajo de ese valor son números negativos), etc.

$\mathbb{Z}$ nos resuelve el problema de la resta: si a y b son números enteros (o sea $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$), $a-b \in \mathbb{Z}$ y $b-a \in \mathbb{Z}$. Sin embargo, la división de dos enteros no es siempre un entero: necesitamos entonces un conjunto que contenga los resultados de todas las divisiones posibles entre enteros; a los elementos de este conjunto, que simbolizamos mediante la letra $\mathbb{Q}$, los llamaremos "números racionales".

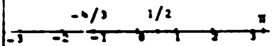
2.9.5 El conjunto de los números racionales es:

$$\boxed{\mathbb{Q} = \{\ldots\frac{-16}{3}, \frac{-16}{2}, \frac{-16}{1}, 0, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \ldots\ldots\}}$$

2.9.6 Ejemplo:
Los números racionales son las "fracciones" y son usados cuando hablamos de $\frac{1}{2}$ pastel, $\frac{1}{4}$ de hora, la fracción $\frac{2}{3}$ de una separación química, etc.

Los números racionales son usados muy ampliamente; en la mayoría de los casos los usamos en su forma decimal (1/2 = 0.5, etc.). Tienen muchas cualidades: si $a \in Q$ y $b \in Q$, entonces $a + b \in Q$, $a \times b \in Q$, $a - b \in Q$, y $a/b \in Q$ salvo cuando $b = 0$. Sin embargo, no siempre es cierto que si $a \in Q$, $\sqrt{a} \in Q$: esta propiedad la cumplen los "números reales", simbolizados por R :

2.9.7 El conjunto de los números reales R es el conjunto de todos los puntos de una recta e incluye, aparte de Q, todos los números con expresión decimal infinita, como π, $\sqrt{2}$, etc.



2.9.8 Ejemplo:

Como los números reales son los que "llenan" una recta, son los que corresponden con exactitud a la medición de muchos fenómenos biológicos, como la estatura, el peso, etc.

Es pertinente hacer aquí una observación: aunque la medición de un fenómeno (por ejemplo, la estatura de un individuo) corresponda en realidad a R , usamos como instrumento de medición más manejable Q : decimos que un individuo mide 1.71 m (o sea 171/100 m), pero en realidad la estatura del individuo puede ser de 1.7114298645..... Este instrumento de medición (Q), puede ser casi tan exacto como queramos: siempre podemos aproximarnos al número real con cuantas cifras decimales queramos con un número racional (podemos hablar de 1.71 m ó 1.711 m, ó 1.7114 m, etc).

Por último, observemos que:

$$N \subsetneq Z \subsetneq Q \subsetneq R$$

2.10 EJERCICIOS

2.10.1 Describir simbólicamente los conjuntos de los ejemplos 2.1.1 a 2.1.4.

2.10.2 ¿Está bien definido el conjunto A = {calcio, oxitocina, 8, metamorfosis,...}? ¿Por qué?

2.10.3 ¿Cuáles de los conjuntos de los ejemplos 2.1.13 a 2.1.24 son iguales entre sí?

2.10.4 ¿Hay conjuntos de conjuntos? Si no, decir por qué; si sí, dar dos ejemplos.

2.10.5 ¿Qué significa el símbolo $\{(r,t)\}$?

2.10.6 Sea E = {enzima, producto, {enzima, sustrato}}.

¿Es cierto que:

a) producto $\in$ E ?

b) enzima $\in$ E ?

c) sustrato $\in$ E ?

2.10.7 Expresar, en términos de conjuntos y elementos, los nive les de complejidad en los organismos vivos: organismo, sistema, órgano, tejido, célula, organelo, etc.

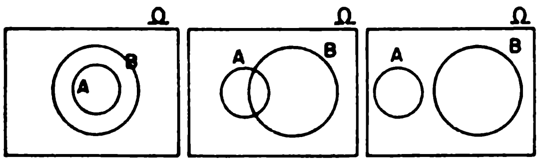
2.10.8 Expresar $\emptyset$ de tres maneras distintas a 2.2.15 y 2.2.16.

2.10.9 Hacer los diagramas de Venn de los ejemplos 2.2.6 y 2.2.7.

2.10.10 Dar un ejemplo de un elemento que esté en B en el ejemplo 2.4.1.

2.10.11 Calcular la unión de los conjuntos considerados en los - ejemplos 2.4.1, 2.4.2, 2.4.4, 2.4.5 y 2.4.7; calcular la intersección de los conjuntos considerados en los ejemplos 2.5.1., 2.5.2, 2.5.4, 2.5.5 y 2.5.7. En cada caso revisar el diagrama de Venn y ejemplificar.

2.10.12 Sean los siguientes diagramas de Venn:



En cada uno de ellos marcar las áreas correspondientes a:

a) $\bar{A}$	d) $\bar{A} \cap \bar{B}$	g) $\bar{A} \cup \bar{B}$	j) $\overline{A - B}$
b) $\bar{B}$	e) $\overline{A \cap B}$	h) $\overline{A \cup B}$	k) $\bar{B} - \bar{A}$
c) $A \cap B$	f) $A \cup B$	i) $A - B$	l) $B - A$

2.10.13 Sea $\Omega = \mathbb{N}$ (ver 2.9.1), y sean los siguientes conjuntos en Ω:

$A = \{n | n \text{ es múltiplo de 2 y } n < 10\}$

$B = \{n | 2 < n < 7\}$

$C = \{n | n \leq 4 \text{ ó } n = 9\}$

Escribir los siguientes conjuntos, enumerando sus elementos:

a) A	g) $A \cap B$	m) $B - A$	s) $B \cup A$
b) B	h) $A \cap C$	n) $C - A$	t) $C \cup A$
c) C	i) $B \cap C$	ñ) $C - B$	u) $C \cup B$
ch) $A \cup B$	j) $B \cap B$	o) $C - C$	v) $A \cup B \cup C$
d) $A \cup C$	k) $A - B$	p) $B \cap A$	w) $A \cap B \cap C$
e) $B \cup C$	l) $A - C$	q) $C \cap A$	x) $A \cup (B \cap C)$
f) $A \cup A$	ll) $B - C$	r) $C \cap B$	y) $C \cap (B \cup A)$

2.10.14 Sea Ω = {moléculas orgánicas}, y N = {DNA, RNA}. Decir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:
a) RNA $\in N$; b) RNA $\subset N$; c) {RNA} $\in N$; d) {RNA} $\subset N$

2.10.15 En $\Omega = \{*, \&, ¿\}$ sea $E = \{*\}$. Decir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

a) $* \in \{*\}$	c) $* \subset \{*\}$	e) $* = \{*\}$	g) $\phi \subset E$
b) $* = E$	d) $\{*\} \in E$	f) $E \subset \{*\}$	h) $\phi \subset *$

2.10.16 En Ω = {fenómenos celulares} sea B = {anabolismo, catabolismo, mitosis, síntesis de DNA}. Decir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

a) síntesis de DNA $\in B$	e) metabolismo $\in B$
b) profase $\in B$	f) anabolismo $\subset B$
c) telofase $\subset B$	g) DNA $\in B$
d) metabolismo $\subset B$	h) DNA $\subset B$

2.10.17 En Ω = {cifras} sea $T = \{0, 1\}$. Decir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

a) $\{0\} \in T$	c) $0 \subset T$	e) $0 \in T$	g) $\{0\} \subset T$
b) $\{\phi\} \subset T$	d) $\phi \in T$	f) $\{\phi\} \in T$	h) $\phi \subset T$

2.10.18 En Ω = {moléculas orgánicas o conjuntos de iones} sea N = {ATP, ADP, $\{Na^+, K^+\}$, $\{Cl^-\}$} . Decir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

a) $\{Na+, K+\} \subset N$
b) $\{Na+, K+\} \in N$
c) $Cl^- \subset N$
d) $\{ATP\} \in N$
e) $\{\{Cl^-\}\} \subset N$
f) $ATP \in N$
g) $\{\{Na+, K+\}\} \subset N$
h) $Cl^- \in N$
i) $ADP \subset N$
j) $\{Cl^-\} \subset N$
k) $\{\{ATP\}\} \subset N$
l) $\{Cl^-\} \in N$
m) $\{\{Na+, K+\}, ATP\} \subset N$
n) $\{ATP, ADP\} \subset N$
o) $\{ATP\} \subset N$
p) $NA+ \in N$

2.10.19 En Ω = {elementos químicos} sean los siguientes conjuntos:

$A = \{x | x$ interviene en $CH_3\ CH_2\ OH\}$
$B = \{x | x$ interviene en $H_2O\}$
$C = \{x | x$ interviene en $C_6\ H_{12}\ O_6\}$
$D = \{C, H, O, N\}$
$E = \{x | x$ interviene en la molécula de hemoglobina$\}$
$F = \{H, C, H, O, H, O, C, H\}$

¿Entre cuáles de estos conjuntos existen las relaciones de contención o de igualdad?

2.10.20 Sea, como en el ejemplo 2.7.12, $\Omega = \{a, g, t, c, u\}$, y sean $P = \{a,g\}$ y $M = \{t,c,u\}$. Sean además los siguientes conjuntos:

bases de puente doble: $B = \{a, t, u\}$
bases de puente triple: $T = \{g, c\}$
bases de DNA: $D = \{a, g, t, c\}$
base exclusiva de RNA: $R = \{u\}$
bases pirimídicas de DNA: $C = \{t, c\}$

Decir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

a) $P \subset D$
b) $B \cap T = \emptyset$
c) $D = M$
d) $C \cap B = \emptyset$
e) $P \cap R \neq \emptyset$
f) $T \cap R = \emptyset$
g) $R \subset B$
h) $B \cap D = \emptyset$
i) $M \neq T$
j) $R \subset M$

k) $P \cap M = \emptyset$	p) $B \neq P$
l) $T \subset D$	q) $R \cap D \neq \emptyset$
m) $C \neq B$	r) $M \subset B$
n) $R \cap C \neq \emptyset$	s) $P \cap C \neq \emptyset$
o) $T \subset P$	t) $C \subset D$

2.10.21 Hacer un diagrama de Venn con tres conjuntos no vacíos A, B y C en un conjunto universo de modo que A, B y C tengan las siguientes características:

a) $A \subset B$; $C \subset B$; $A \cap C = \emptyset$

b) $A \subset B$; $C \not\subset B$* ; $A \cap C \neq \emptyset$

c) $A \subsetneq C$; $B \cap C = \emptyset$

d) $A \subset (B \cap C)$; $B \subsetneq C$; $A \neq C$,

* o sea, C no es subconjunto de B.

2.10.22 Hacer el diagrama de Venn del ejemplo 2.7.12.

2.10.23 Sea, como en el ejemplo 2.7.12, $\Omega = \{a, g, t, c, u\}$, y sea $D = \{a, g, t, c\}$. Calcular $P(\Omega)$, $P(D)$, $P(\emptyset)$.

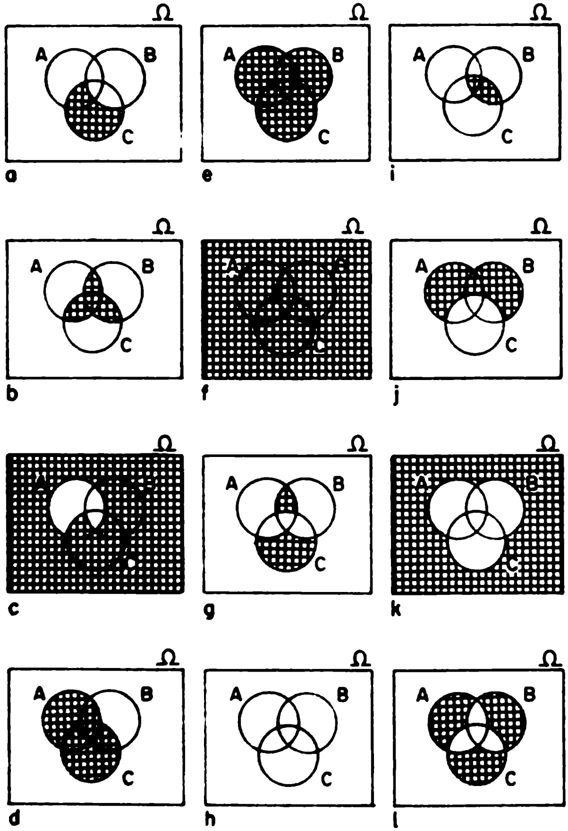
2.10.24 Las parejas de la ciudad de Macondo fueron catalogadas de acuerdo a su uso de métodos para control de la natalidad de la manera siguiente:

A = conjunto de las parejas que usan métodos de barrera

B = conjunto de las parejas que usan espermicidas locales

C = conjunto de las parejas que usan métodos tradicionales

En base a lo anterior, describir verbal y simbólicamente (usando los símbolos $\bar{}$, $\cap$, $\cup$, $-$) las áreas marcadas en los siguientes diagramas de Venn:


Ω
A
B
C
a
e
i
b
f
j
c
g
k
d
h
l

2.10.25 En un laboratorio especializado en el análisis y la identificación de hormonas protéicas se manejan varias técnicas de bioquímica. Considérense en particular los siguientes conjuntos, en Ω = {hormonas trabajadas en el laboratorio}.

B = {x|x es sometida a bioensayo}

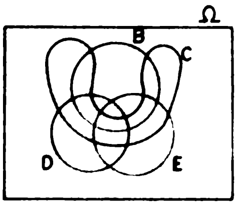
C = {x|x es sometida a centrifugación}

D = {x|x es sometida a cromatografía en columna de DEAE-celulosa}

E = {x|x es sometida a electroforesis}

Expresar simbólicamente y marcar en diagramas como el de abajo los conjuntos de hormonas que son sometidas a:

a) exactamente un método
b) todos los métodos
c) por lo menos dos métodos
d) cuando mucho tres métodos
e) cuando mucho dos métodos, ninguno de los cuales puede ser centrifugación.
f) todos los métodos que consideren carga eléctrica de la molécula, y únicamente esos
g) algún método que considere carga eléctrica de la molécula
h) cromatografía en columna de DEAE-celulosa solamente
i) bioensayo después de cualquier otro método
j) centrifugación seguida sólo de bioensayo
k) cromatografía en DEAE-celulosa o electroforesis seguida de centrifugación
l) cromatografía en DEAE-celulosa o electroforesis seguidas de centrifugación



2.10.26 En una población de provincia, se cataloga a los derechohabientes hospitalizados en una clínica del Seguro Social de acuerdo con los siguientes conjuntos:

Ω = {derechohabientes hospitalizados}

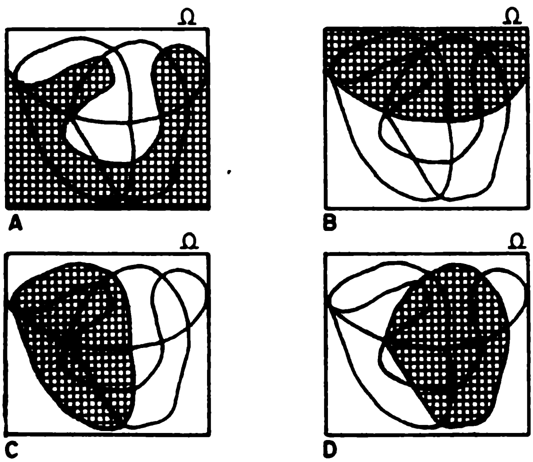
A = $\{x \in \Omega | x$ tiene menos de 30 años$\}$

B = $\{x \in \Omega | x$ es de sexo masculino$\}$

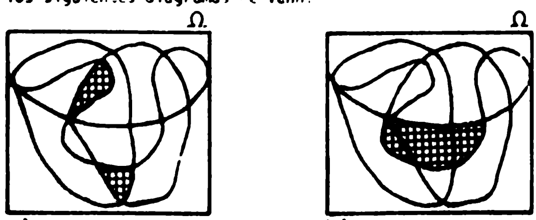
C = $\{x \in \Omega | x$ está muy grave$\}$

D = $\{x \in \Omega | x$ es trabajador(a)$\}$

Los cuatro conjuntos A, B, C, D se grafican en un diagrama repetido cuatro veces para ilustrar (sombreándolos) cada uno de ellos.



Describir verbal y simbólicamente las áreas marcadas en los siguientes diagramas de Venn:



a) b)

Expresar simbólicamente los siguientes conjuntos y marcar las áreas correspondientes en diagramas como los que se ilustran aquí.

c) El conjunto de las mujeres hospitalizadas moribundas mayores de 30 años.

d) El conjunto de los hombres jóvenes trabajadores hospitalizados.

Describir verbal y gráficamente (en diagramas similares) los siguientes conjuntos:

e) $(B-A)\cap(D-C)$ f) $C\cap\bar{A}\cap(\overline{B\cup D})$

Resolver el siguiente problema:

Un obrero (v) de 30 años, va a la clínica a recoger a su esposa (w), también obrera y un poco mayor que él, que acaba de dar a luz a una niña (x). En la clínica se encuentran también el hermano menor (y) de v, quien tuvo un pequeño accidente de trabajo, y el padre de ambos (z), viejo campesino que está agonizando. Expresar con precisión a qué conjunto pertenecen v, w, x, y, z, de manera simbólica y colocando las letras en un diagrama de Venn similar a los anteriores.

2.10.27 Demostrar las siguientes relaciones, cuando $A \subset \Omega$:

a) $\bar{A} = \Omega - A$ b) $\bar{\phi} = \Omega$

2.10.28 Demostrar las siguientes relaciones, cuando $A \subset \Omega$:

a) $A\cap A = A$ e) $A\cap\phi = \phi$

B) $A\cup A = A$ f) $A\cup\Omega = \Omega$

c) $A\cap\Omega = A$ g) $A\cap\bar{A} = \phi$

d) $A\cup\phi = A$ h) $A\cup\bar{A} = \Omega$

2.10.29 Demostrar las relaciones 2.8.8, 2.8.9, 2.8.11, 2.8.12, 2.8.13, 2.8.17, 2.8.18, 2.8.19, 2.8.21, 2.8.23 (lo que falta) y 2.8.28.

2.10.30 Ilustrar con ejemplos biomédicos, las propiedades 2.8.8, 2.8.11, 2.8.12, 2.8.15, 2.8.17, 2.8.18, 2.8.23 (los que faltan), 2.8.26 y 2.8.28.

2.10.31 Demostrar que si A, B y C son conjuntos en un conjunto universo Ω , entonces:

a) $A-B \subset A$ d) $A-B = \bar{B}-\bar{A}$

b) $(A-B) \cap B = \emptyset$ e) $A-B \neq B-A$

c) $(A-B) \cap (A \cap B) = \emptyset$ f) $(A-B) - C \neq A-(B-C)$

Los incisos e) y f) se demuestran mostrando un caso (un ejemplo biomédico, un diagrama de Venn, etc.) en el que así suceda: éste es el único caso en el que se puede usar un ejemplo o un diagrama para demostrar algo: demuestra la falsedad de una relación ($A-B = B-A$, y $(A-B) - C = A - (B-C)$, respectivamente), sirviendo de "contra-ejemplo"

2.10.32 Demostrar que si A y B son conjuntos en un conjunto universo Ω , entonces:

a) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A - B = A$

b) $A \cup B = \Omega \Leftrightarrow \dot{A} - B = \emptyset$

(sugerencia: usar las leyes de De Morgan)

2.10.33 Entre los 950 asistentes a un congreso de hispanistas, se sabe que: 620 hablan inglés, 400 hablan francés y 220 hablan alemán. Además, se sabe que 240 de ellos hablan por lo menos inglés y francés; 130 inglés y alemán (por lo menos), y 60 francés y alemán (por lo menos). Por último, se sabe que sólo 30 de los asistentes hablan las tres lenguas. Hacer un diagrama de Venn y describir simbólicamente cada subconjunto, indicando cuántos elementos tiene.

2.10.34 Dar ejemplos de números a, b tales que:

a) $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, $a-b \notin \mathbb{N}$

b) $a \in \mathbb{N}$. $b \in \mathbb{N}$, $a/b \notin \mathbb{N}$

c) $a \in \mathbb{N}$, $\sqrt{a} \notin \mathbb{N}$

d) $a \in \mathbb{Z}$. $b \in \mathbb{Z}$, $a/b \notin \mathbb{Z}$

e) $a \in \mathbb{Z}$, $\sqrt{a} \notin \mathbb{Z}$

f) $a \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$

2.10.35 Dados dos conjuntos A y B en un conjunto universo Ω, se puede hablar del conjunto de parejas de elementos de A y de B: $A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$ se llama el <u>producto cartesiano de los conjuntos A y B</u>. Las parejas de elementos (a, b) así definidas son <u>parejas ordenadas</u>: el orden en el que se den los dos elementos de una pareja indica a qué conjunto pertenece cada uno. Por ejemplo, si $(x, z) \in N \times M$, eso quiere decir que $x \in N$ y $z \in M$.

En $\Omega = \{1, 2, \alpha, \beta\}$ sean $A = \{1, 2\}$ y $B = \{\alpha, \beta\}$. Entonces $A \times B = \{(1, \alpha), (1, \beta), (2, \alpha), (2, \beta)\}$. Obsérvese que $A \times B \neq B \times A = \{(\alpha, 1), (\alpha, 2), (\beta, 1), (\beta, 2)\} = \{(\alpha, 1), (\beta, 1), (\alpha, 2), (\beta, 2)\}$.

Calcular $A \times B$ y $B \times A$ cuando A y B son, respectivamente:

a) $A = \{1\}$ $B = \{\beta\}$
b) $A = \{1\}$ $B = \{\alpha, \beta\}$
c) $A = \{1, 2, \alpha\}$ $B = \{\beta\}$
d) $A = \{1, 2, \alpha\}$ $B = \{\alpha, \beta\}$
e) $A = \{1, 2, \alpha\}$ $B = \{\alpha, \beta, 2\}$
f) $A = \Omega$ $B = \Omega$

Obsérvese que si A tiene n elementos y B tiene m elementos, entonces $A \times B$ tiene $n \times m$ elementos.

2.11 BIBLIOGRAFIA

Lipschutz, S. *Teoría de conjuntos y temas afines*. Colección Schaum, McGraw-Hill, México (1969).

Martínez, J. *Conjuntos y funciones*. ANUIES, México (1973).

National Council of Teachers of Mathematics # 1. *Conjuntos*. Editorial Trillas, México (1967).

Romo, G.A. *Matemáticas 2*. Colegio de Bachilleres, Edicol, México (1976).

CAPITULO 3

FUNCIONES Y GRAFICAS

La palabra "función" es una palabra que usamos frecuentemente, en frases como las siguientes: "la función del médico en la sociedad es ocuparse y preocuparse de la salud de los seres humanos", "la primera función en este cine comienza a las cuatro de la tarde", "la salud de una persona está en función de la calidad de su alimentación". A lo largo de este capítulo vamos a trabajar con este último sentido de la palabra, un sentido que expresa dependencia: de hecho, podríamos replantear la última frase, sin cambiar para nada su sentido, como sigue: "la salud de una persona depende de la calidad de su alimentación".

El que una condición (en este caso, la salud de una persona) dependa de otra (en este caso, la calidad de la alimentación) es un fenómeno que puede ser de gran interés dentro de cualquier rama de la Ciencia, ya que el conocimiento que se tenga de la segunda puede contribuir a iluminar el conocimiento de la primera.

Estas relaciones de dependencia o funciones son objeto de estudio de las Matemáticas, que se encargan de abstraer, formalizar y obtener conclusiones generales que pueden ayudar a comprender y manejar más fácilmente una gran cantidad de fenómenos científicos. Las Matemáticas proveen una herramienta que permite la descripción de la relación de dependencia y la predicción del valor de la condición (variable) dependiente cuando se conoce el valor de la otra. En este capítulo, veremos los aspectos elementales del estudio matemático de las funciones, así como algunas maneras de exponerlas gráficamente.

Desgraciadamente, las relaciones de dependencia o funciones en fenómenos biomédicos son en general bastante complicadas, ya que, como involucran muchísimas variables, no se puede afirmar con precisión nada acerca de ellas; por ejemplo la salud de una persona depende de la calidad de su alimentación, sí, pero también de otras condiciones (variables), como el número de horas de sue ño diario, la ubicación y el tipo de habitación, la estabilidad emocional, la ocupación, la edad, incluso la cantidad de comida, etc., por lo que no basta conocer la calidad de la alimentación de una persona para saber si su salud es buena o no. La herramienta matemática para describir y analizar estas relaciones de dependencia es un poco más complicada de lo que veremos aquí, pero este capítulo debe ser una ayuda para la comprensión de los métodos de descripción y análisis de funciones biomédicas complejas.

3.1 FUNCIONES

Consideremos los siguientes ejemplos:

Ejemplos:

3.1.1 El número de anillos de crecimiento de cada pino está en función de sus años de vida.

3.1.2 La etapa en el ciclo de vida de la tenia (*Taenia solium*) está en función del tejido en el que se encuentra.

En estos dos ejemplos de funciones vemos cómo se están asociando elementos de un conjunto con elementos de otro conjunto: a cada número de años de vida se le asocia un número de anillos de crecimiento; a cada tejido en el que se puede encontrar la tenia se le asocia una etapa en su ciclo de vida. Para definir una *función* necesitamos, entonces, un conjunto "de partida" (el conjunto de los números de años de vida y el conjunto de los tejidos en los que se puede encontrar la tenia, en los ejemplos 3.1.1 y 3.1.2 respectivamente) y un conjunto "de llegada" (el conjunto de los números de anillos de crecimiento de los pinos y el conjunto de las etapas del ciclo de vida de la tenia, en los ejemplos 3.1.1 y 3.1.2 respectivamente).

Sin embargo, no basta con estos dos conjuntos para definir una función: necesitamos también algo que nos diga cómo se van a asociar los elementos de uno con los del otro. Para ilustrar esta necesidad, retomemos el ejemplo 3.1.2, formando con los mismos conjuntos dos funciones distintas (introducimos aquí la notación de flechas que indican cuál elemento está asociado con cuál):

Ejemplos:

3.1.3 A los elementos del conjunto {intestino porcino, músculo porcino, intestino humano} les asociamos los elementos del conjunto {tenia adulta, embrión, cisticerco} de la siguiente manera:

intestino porcino $\longmapsto$ embrión
músculo porcino $\longmapsto$ cisticerco
intestino humano $\longmapsto$ tenia adulta

3.1.4 A los elementos del conjunto {intestino porcino, músculo porcino, intestino humano} les asociamos los elementos del conjunto {tenia adulta, embrión, cisticerco} de la siguiente manera:

intestino porcino $\longmapsto$ cisticerco
músculo porcino $\longmapsto$ tenia adulta
intestino humano $\longmapsto$ embrión

De las funciones de los ejemplos 3.1.3 y 3.1.4 sólo la primera refleja el caso real, pero ambas son funciones en el sentido matemático de la palabra. Ambas tienen el mismo conjunto "de partida" ({intestino porcino, músculo porcino, intestino humano})y el mismo conjunto "de llegada" ({tenia adulta, embrión, cisticerco}), pero difieren en el modo de asociar los elementos. Por eso, si queremos describir la etapa en el ciclo de vida de la tenia en función del tejido en el que se encuentra debemos, para reflejar el caso real, decir _qué_ tejidos quedan asociados con _qué_ etapas del ciclo, y _cómo_ quedan asociados.

Hemos visto, entonces, que para que una función esté totalmente caracterizada, se necesitan dos conjuntos (uno "de partida" y uno "de llegada") y una regla de asociación entre los elementos de ambos. Definamos formalmente estos conceptos:

3.1.5

Una <u>función</u> consta de:
- un conjunto "de partida" llamado <u>dominio</u>
- un conjunto "de llegada" llamado <u>codominio</u>
- una <u>regla de correspondencia</u> que asocia a cada elemento del dominio uno y sólo uno - del codominio, que se llama <u>imagen</u> del primero bajo la función

3.1.6 Ejemplo:

Tomemos como dominio el conjunto de individuos machos de una especie de mamíferos, como codominio el conjunto de hembras de la misma especie, y como regla de correspondencia la que asocia a cada macho con su madre. Hemos - así definido una función. La imagen bajo la función de cada macho es su madre.

Hagamos una observación importante sobre la definición 3.1.5. En ella aparece la expresión "uno y sólo uno": la regla de correspondencia "asocia a cada elemento del dominio <u>uno y sólo uno</u> del codominio". Esto quiere decir - que <u>todos</u> los elmentos del dominio tienen <u>exactamente una</u> imagen, o sea que ninguno se queda sin imagen, y que ninguno tiene dos o más imágenes. Esto es un requisito para que una función quede bien definida.

Ejemplos:

3.1.7 No se puede asociar en una función al conjunto de individuos machos con el conjunto de todos los individuos de - la misma especie de tal manera que se asocie a cada macho con sus progenitores, ya que a cada macho le corresponderían dos individuos: su padre y su madre (comparar con 3.1.6).

3.1.8 Tomando los mismos conjuntos del ejemplo anterior, no se puede definir una función que asocie a cada macho con sus hermanos, ya que hay machos que tienen más de un hermano, y hay machos que no tienen ninguno (comparar con 3.1.6).

Nótese que aquí estamos hablando sólo de los elementos del dominio, y que estas restricciones no operan para los del codominio: en una función, los elementos del codominio pueden ser imagen de uno, de varios o de ninguno de los del dominio.

3.1.9 **Ejemplo:**

En la función del ejemplo 3.1.6, hay hembras que son imagen de un elemento del dominio (las que son madres de exactamente un macho), hembras que son imagen de varios (las que tienen varios hijos machos), y hembras que no son imágen de ninguno (las que no tienen hijos machos).

Como en todo lo que hemos venido viendo hasta ahora, se ha buscado una manera de simplificar el uso repetido de las mismas palabras mediante una notación simbólica. Se conviene en usar las letras minúsculas f, g, h, etc. para simbolizar las funciones, los símbolos ":" y " $\to$ " para marcar el dominio y el codominio respectivamente, y el símbolo " $\mapsto$ " para marcar la regla de correspondencia (véanse los ejemplos 3.1.3 y 3.1.4), como sigue:

3.1.10

> Si f es una función cuyo dominio es A y cuyo codominio es B, entonces se anota:
>
> $$f: A \to B$$
>
> y se lee "f va de A en B".
>
> Si $x \in A$, $y \in B$, y y es la imagen de x bajo f, entonces se anota:
>
> $$\begin{aligned} f: A &\to B \\ x &\mapsto y, \end{aligned}$$
>
> o bien: $f(x) = y$
>
> y se lee "f de x es igual a y", o, más abreviadamente, "f de x es y".

Observemos que aunque ya hemos usado el símbolo ' $\to$ ' en Lógica (ver 1.6.13), esto no puede dar lugar a confusiones, ya que en Lógica se usa entre dos proposiciones (letras minúsculas) y aquí se usa entre dos conjuntos (letras mayúsculas). Asimismo es importante no confundir la notación $f(x)$ con la notación usada frecuentemente para marcar la multiplicación de dos números: aquí, - aunque x puede eventualmente ser un número (si A es un conjunto de números), f es una función, y nunca un número, por lo que no cabría interpretar f (x) como "f multiplica a x".

Ejemplos:

3.1.11 La función que a cada número real (ver 2.9.7) le asocia su cuadrado se simboliza así:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

por ejemplo: $3 \mapsto 9$

(o, lo que es lo mismo, $f(3) = 9$)

Asimismo, $f(2) = 4$, $f(-5) = 25$, etc.

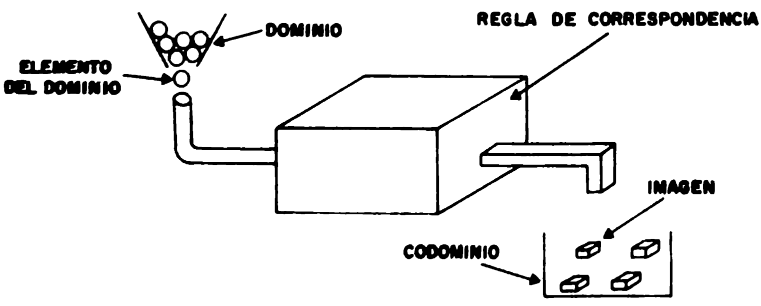
3.1.12 Sea

$$\begin{aligned} g: \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{2x} + 3 \end{aligned}$$

Entonces, por ejemplo, $g(8) = \sqrt{2x8} + 3 = 7$, y $g(1) = \sqrt{2x1} + 3 \approx 4.41$. O sea que la imagen de 8 bajo g es 7, y la imagen de 1 bajo g es (aproximadamente) 4.41.

Podemos visualizar las funciones de la siguiente manera: una función puede ser considerada como una máquina como la que se ilustra en la figura 3.1.13:

3.1.13



En la figura 3.1.13 vemos a una función como una máquina cuya parte central (la regla de correspondencia) recibe específicamente elementos del dominio y los transforma en sus imágenes. Así, en esta figura, la función transforma las bolitas del dominio en cubitos del codominio. De la misma manera, cada función "le hace" algo específicamente a los elementos de su dominio: por ejemplo, la función f de 3.1.11 eleva al cuadrado cada número real, y lo que le hace la función g de 3.1.12 a cada número natural es multiplicarlo por 2, sacar raíz cuadrada del producto y añadir 3 al resultado, obteniendo un número real.

Por último, hagamos una observación. En la introducción a este capítulo mencionamos que una función es una relación entre una variable independiente y una variable dependiente, y el(la) lector(a) se preguntará probablemente qué conexión existe entre esta manera de considerar a las funciones y lo que hemos estado viendo en esta sección. Pues bien:

3.1.14

A los elementos del dominio se les llama también <u>valores de la variable independiente</u>.
A los elementos del codominio se les llama también <u>valores de la variable dependiente</u>.

3.1.15 Ejemplo:

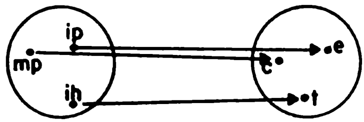
Supongamos que estamos observando el efecto de la temperatura sobre la velocidad de una reacción química. Decimos entonces que la variable independiente es la temperatura, y la variable dependiente es la velocidad de reacción. El dominio de la función es un subconjunto de $\mathbb{R}$ (aquellos valores que corresponden a las temperaturas observadas), y el codominio puede ser todo $\mathbb{R}$.

3.2 GRAFICAS SIMPLES

Existen varias maneras de exponer gráficamente una función. La más sencilla utiliza los diagramas de Venn (ver sección 2.2) para representar al dominio y al codominio, y flechas entre los elementos de ambos para representar la regla de correspondencia. Por convención, se pone siempre a la izquierda el diagrama de Venn del dominio, y a la derecha el del codominio.

Ejemplos:

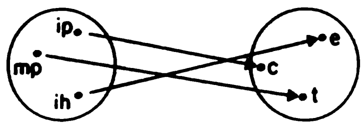
3.2.1 La función del ejemplo 3.1.3 puede graficarse así:



donde:

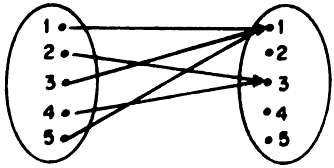
ip = intestino porcino	e = embrión
mp = músculo porcino	c = cisticerco
ih = intestino humano	t = tenia

3.2.2 La función del ejemplo 3.1.4 puede graficarse así:



(con la misma simbología que en 3.2.1)

3.2.3 La función que va del conjunto de números naturales menores que 6 ($\{n \in \mathbb{N} \mid n < 6\}$) en sí mismo, y que le asocia a cada elemento del dominio el número 1 si es non y el número 3 si es par se puede graficar así:



Este tipo de graficación es muy sencillo y puede servir para ilustrar funciones con dominios y codominios pequeños; sin embargo, va resultando cada vez más incómodo y poco práctico a medida que los conjuntos son más grandes (imaginémonos, por ejemplo, lo que sucedería con la gráfica del ejemplo 3.2.3 si el conjunto fuera $\{n \in \mathbb{N} \mid n < 600\}$, o si fuera $\{n \in \mathbb{N} \mid n < 6{,}000{,}000\}$). Este tipo de inconvenientes se presenta sobre todo cuando alguno de los conjuntos (o ambos) es un conjunto de números.

En esta sección presentaremos algunos tipos de gráficas sencillas que solucionan estos problemas cuando por lo menos el codominio es un conjunto de números, y que son muy frecuentemente utilizadas, como las gráficas de barras y las de círculos.

Las gráficas de barras son sobre todo utilizadas cuando el codominio es un conjunto de números naturales (es decir: si B es el codominio, entonces $B \subset \mathbb{N}$).

3.2.4 En una <u>gráfica de barras</u>, se ponen los elementos del dominio sobre una recta horizontal, cada uno ocupando un pequeño segmento, y se eleva sobre cada uno de ellos una barra rectangular con altura proporcional a su imagen. Además se coloca, generalmente a la izquierda, una línea vertical que indica la escala de proporcionalidad para el codominio*.

Ejemplos:

3.2.5 En un experimento mendeliano de cruce entre una planta de flores blancas y una de flores rojas, se obtienen plantas que, a la larga, estarán distribuidas de la siguiente manera: de cada cuatro, una tendrá flores blancas, dos flores rosas y una flores rojas. Este resultado, expresado en forma de función, queda así (para abreviar, decimos "blanco" para referirnos a las "plantas con flores blancas", etc.):

---

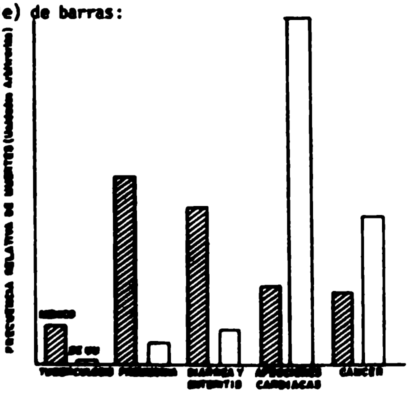
* En algunas disciplinas, como la demografía y la economía, se suele usar esta convención al revés, quedando las barras horizontales en vez de verticales. Este tipo de gráficas pueden encontrarse en Salud Pública.

f: {blanco, rosa, rojo} → {1,2,3,4}
blanco ↦ 1
rosa ↦ 2
rojo ↦ 1

Esta función se puede graficar de la siguiente manera:

Cotéjese esta gráfica con la definición 3.2.4.

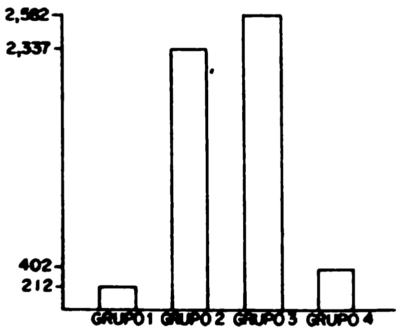
3.2.6 Hace algunos años, la distribución de causas de muerte mostraba diferencias importantes entre la población de México y la de los Estados Unidos de Norteamérica. Las diferencias pueden observarse en la siguiente gráfica (doble) de barras:



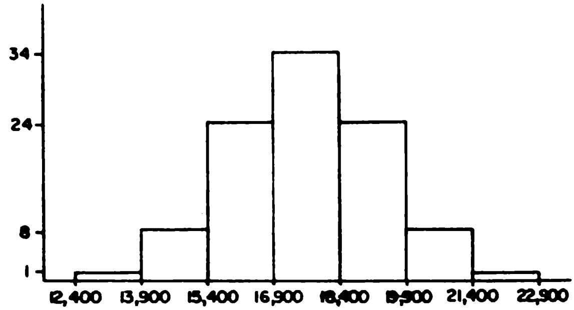
Varias observaciones son pertinentes sobre esta gráfica. En ellas se muestran, en realidad, dos funciones: la que corresponde a México y la que corresponde a EEUU. Podrían haberse mostrado en dos gráficas distintas, pero -

una sola permite hacer visualmente las comparaciones entre México (barras sombreadas) y los EEUU (barras blancas). Por otra parte, en este caso no se muestra con precisión la escala (obsérvese que se anota "unidades arbitrarias), puesto que sólo interesa hacer las comparaciones entre ambos países para cada causa de muerte. (cf. Kirk, p. 756)

3.2.7 Para un amplio y valioso estudio de somatometría pediátrica, el Dr. Ramos Galván estudió a 5,533 niños de la Ciudad de México. Todos ellos pertenecían a la clase media, y en ella el Dr. Ramos G. distinguió cuatro grupos socioeconómicos, que numeró del 1 al 4 de mayor a menor solvencia. Los niños estudiados estaban repartidos en los cuatro grupos de la siguiente manera (Tabla I):



3.2.8 Del mismo estudio del Dr. Ramos Galván mencionado en 3.2.7 tomamos (de la tabla XXI-1), los datos para la gráfica siguiente, que muestra, para cada 100 niñas de 4 años y medio, cómo se distribuyen en relación a sus pesos (en gramos):



Es decir, que de cada 100 niñas de 4 años y medio de la Ciudad de México, a la larga, una pesará entre 12,400 g y 13,900 g, 8 pesarán entre 13,900 g y 15,400 g, etc. (obsérvese que 1 + 8 + 24 + 34 + 24 + 8 + 1 = 100).

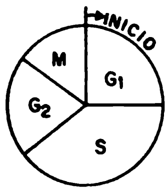
En los ejemplos 3.2.5 a 3.2.8 hemos mostrado cuatro gráficas de barras. Conviene aquí hacer una observación referente a los dominios de cada una de las cuatro funciones graficadas: los elementos de los dominios de 3.2.5 y de 3.2.6 no tienen entre sí ningún orden y el que se escogió para la graficación es arbitrario en cada caso (blanco, rosa, rojo para 3.2.5, y tuberculosis, pneumonía, diarrea y enteritis, afecciones cardiacas, cáncer para 3.2.6); por el contrario, los elementos de los dominios de 3.2.7 y de 3.2.8 sí tienen un orden, por lo que el orden tomado para la graficación no es arbitrario (de mayor a menor solvencia económica en 3.2.7, y de menor a mayor peso en 3.2.8).

Pasemos ahora a las gráficas de círculos. Estas se usan cuando interesa representar la imagen de cada elemento del dominio como parte proporcional (porcentaje) del total del codominio.

3.2.9 En las <u>gráficas de círculos</u> se usan áreas radiales (o sea áreas entre dos radios del círculo) proporcionales a cada imagen, marcando cada una (con letras o sombreados) para indicar a qué elemento del dominio corresponden.

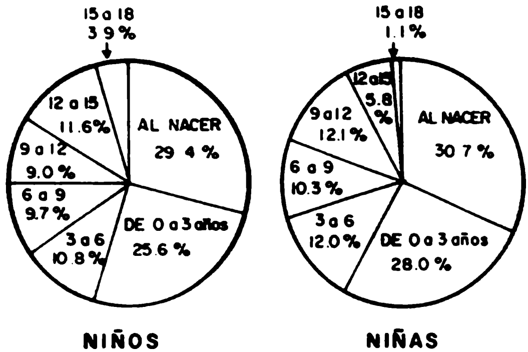
Ejemplos:

3.2.10 El modelo de ciclo celular considera cuatro fases principales en la vida de cada célula: una primera etapa de crecimiento (G_1) una etapa de síntesis de DNA (S), una segunda etapa de crecimiento (G_2) y la mitosis o división celular (M). Aunque los tiempos específicos invertidos por cada célula en estas cuatro etapas son distintas según el tipo de célula y las condiciones en las que se encuentra, un buen modelo general es el siguiente:



Esta gráfica, además de mostrar cuáles son (aproximadamente) los tiempos relativos invertidos por cada célula en las distintas etapas de su ciclo, tiene la ventaja de que ilustra también el hecho de que se trata de un ciclo: después de la mitosis, cada célula lo recorre de nuevo.

3.2.11 Si consultamos de nuevo las tablas elaboradas por el Dr. Ramos Galván, encontramos (en las tablas XIV-14 y XXI-14) los datos referentes al procentaje (sobre la talla total a los 18 años) de crecimiento por edad, que se pueden expresar en las siguientes gráficas:

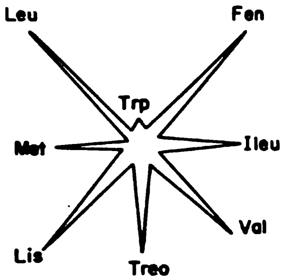


O sea que, por ejemplo, entre los 12 y los 15 años los niños crecen el 11.6% de su talla total (a los 18 años), mientras que las niñas a esa edad ya sólo crecen el 5.8%. Estas gráficas se hicieron calculando los porcentajes correspondientes de los 360° totales del círculo: por ejemplo, a los niños de 12 a 15 años les corresponde un ángulo al centro de (11.6 x 360°)/100 = 41.8°.

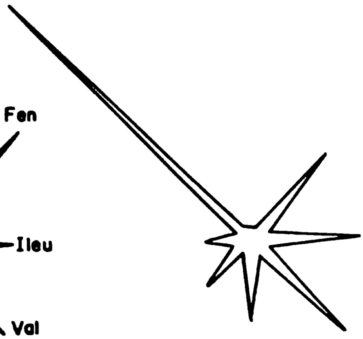
Hasta aquí las gráficas de barras y las de círculos. Como dijimos antes, estos dos tipos de gráficas son muy frecuentemente utilizados; sin embargo, puede haber cuantos tipos distintos de gráficas se le ocurran al investigador: su hallazgo y su aplicación dependerán del ingenio de cada quien.

3.2.12 Ejemplo:

En un estudio sobre la planta de la alegría, J. Aguilar et al. hacen una comparación de las proteínas de varias plantas: hacen un balance relativo de los aminoácidos esenciales (los que el cuerpo humano no puede sintetizar), y comparan con la "proteína ideal" (la que tiene las pro porciones requeridas por el cuerpo humano). De la figura 1 de su artículo tomamos las siguientes gráficas:



PROTEINA IDEAL



PROTEINA DE MAIZ

En ellas se ve claramente que la proteína de maíz tiene un exceso del aminoácido leucina (Leu), cantidades cercanas a lo ideal de los aminoácidos isoleucina (Ileu), valina (Val) y treonina (Treo), y una carencia parcial de lisina (Lis), metionina (Met), triptofano (Trp) y fenilalanina (Fen).

Las gráficas que vimos en esta sección son muy útiles para representar funciones en las que el dominio no es un conjunto de números o en las que el codominio es un conjunto de números naturales o de porcentajes. Sin embargo, cuando ambos conjuntos son conjuntos de números, estos tipos de gráficas resultan mucho menos útiles que las que veremos en la siguiente sección.

3.3 GRAFICAS CARTESIANAS

Uno de los tipos de graficación más utilizados (si no es el que más) es el sistema de graficación llamado <u>cartesiano</u> (en honor a su creador, el matemático francés Descartes). El sistema se utiliza para funciones cuyos dominios y codominios son conjuntos de números, que quedan representados por rectas llamadas ejes de coordenadas (o "ejes cartesianos"). Los ejes de coordenadas se colocan perpendicularmente, y siguen las siguientes convenciones (obsérvese el parecido con 3.2.4):

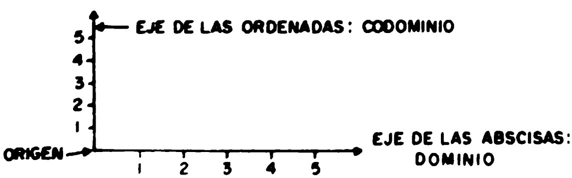
3.3.1

> En el sistema cartesiano:
> - El eje que representa al dominio es horizontal y se llama eje de las abscisas. Los valores suelen ser representados genéricamente por la letra x, y su orden (de menor a mayor) es de izquierda a derecha.
> - El eje que representa el codominio es vertical y se llama eje de las ordenadas. Los valores suelen ser representados genéricamente por la letra y, y su orden (de menor a mayor) es de abajo a arriba.

Los ejes suelen cruzarse en el "cero" de ambos, llamado origen.

3.3.2 Ejemplo:

El dominio y el codominio de la función del ejemplo 3.2.3 (f: $\{n \in \mathbb{N} \mid n < 6\} \to \{n \in \mathbb{N} \mid n < 6\}$), quedan representados de la siguiente manera en un sistema cartesiano:

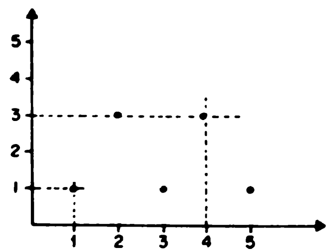


Obsérvese que la escala no necesita (aunque sí puede) ser la misma en ambos ejes de coordenadas.

Hemos descrito, pues, cómo quedan representados el dominio y el codominio de una función en una gráfica cartesiana. Pero falta hablar de la regla de correspondencia. Si ambos ejes "definen" una porción de plano, la regla de correspondencia queda representada por puntos en ese plano, de la siguiente manera: tracemos imaginariamente una línea vertical que pase por un elemento del dominio (o sea, por un punto del eje de las abscisas), y tracemos también imaginariamente una línea horizontal que pase por la imagen en el codominio de ese elemento (o sea, por un punto del eje de las ordenadas); ambas rectas se cruzan en un punto del plano. Si repetimos esta operación para cada elemento del dominio, obtendremos una serie de puntos: el conjunto de todos ellos es la representación de la regla de correspondencia.

Ejemplos:

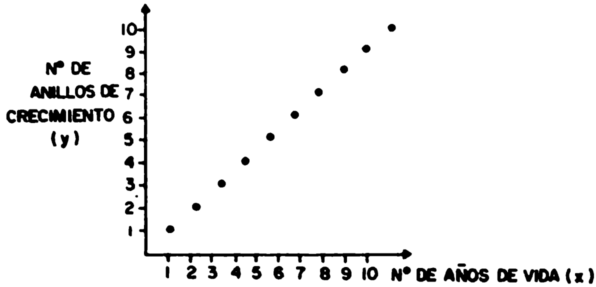
3.3.3 Esta es la gráfica cartesiana de la función del ejemplo 3.2.3 (en ella hemos trazado las líneas imaginarias en punteado para los elementos 1 y 4 del dominio):



3.3.4 En el ejemplo 3.1.1 vimos que el número de anillos de crecimiento de cada pino está en función de sus años de vida. Esta función se simboliza así:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$
$$x \mapsto y = x$$

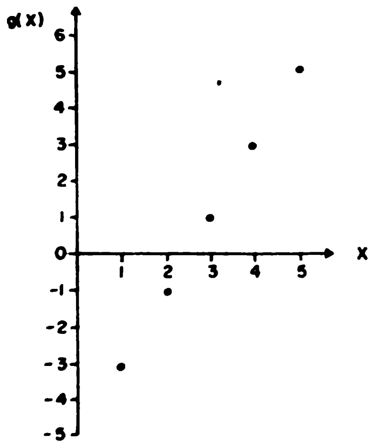
(es decir, el número de anillos de crecimiento y es igual al número de años de vida x: un anillo por cada año), y se grafica así:



3.3.5 Sea la siguiente función:

$$g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 2x - 5$$

La función g se grafica así:

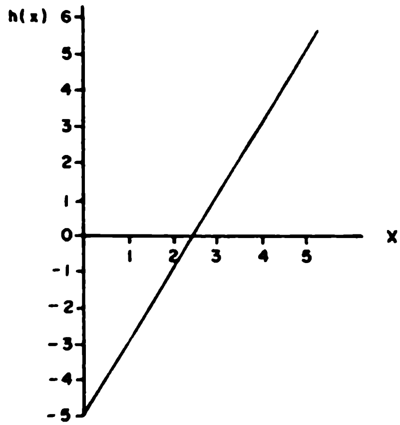


Aquí es pertinente hacer varias observaciones. El eje de las abscisas, como en los dos ejemplos anteriores, sólo se prolonga hacia la derecha, puesto que $\mathbb{N}$ sólo comprende números positivos; sin embargo, como $\mathbb{R}$ comprende números negativos, en este ejemplo el eje de las ordenadas se prolonga hacia abajo. Por otra parte, la gráfica sólo corresponde a los cinco primeros de los (infinitos) elementos de $\mathbb{N}$; la gráfica podría prolongarse más, pero nunca abarcar todo $\mathbb{N}$; sin embargo nos da una buena idea de cómo sigue la función.

3.3.6 Sea $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ (los reales positivos), y sea la siguiente función:

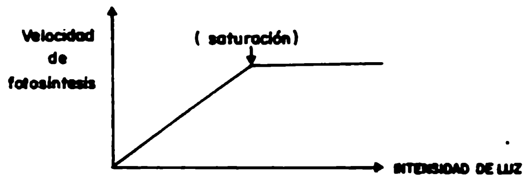
$$\begin{aligned} h: \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x - 5 \end{aligned}$$

La función h se grafica así:



Obsérvese que, aunque la función g del ejemplo anterior y la función h de éste tienen idénticos codominio y regla de correspondencia y sólo difieren en el dominio, - son funciones distintas y su gráfica es distinta.

3.3.7 La velocidad con la que una planta fotosintetiza está en función de la intensidad de la luz (solar) a la que está expuesta, de la siguiente manera: "la velocidad de fotosíntesis es proporcional a la intensidad de la luz pero sólo hasta un punto de saturación; después de ese punto la velocidad es constante, aunque la intensidad luminosa aumente". La gráfica de esta función es así:



Obsérvese que en este ejemplo la función se ha descrito y graficado de manera más cualitativa que cuantitativa. Esto es porque estamos hablando de un comportamiento general que siguen todas las plantas; sólo si estuviéramos hablando específicamente de cierta especie (o variedad) de plantas, podríamos dar los valores numéricos de la proporción, del punto de saturación, etc., así como indicar en la gráfica las escalas de los dos ejes.

En los ejemplos 3.3.3 a 3.3.7 hemos visto varias gráficas cartesianas. La utilidad de éstas para ilustrar fenómenos biológicos es enorme; por ejemplo, en el ejemplo 3.3.7 una sola gráfica abarcable globalmente con una simple mirada, nos da la misma información que 32 palabras (entre comillas en el texto antes de la gráfica). Es por esto que las gráficas cartesianas son muy frecuentemente utilizadas, y por lo que es de enorme importancia saber tanto usarlas como interpretarlas, ya que el uso o la interpretación erróneos pueden confundir mucho. Este conocimiento sólo se adquiere verdaderamente con la práctica: haciendo gráficas por una parte, y observando cuidadosamente las que aparecen en los artículos de investigación, libros, etc., por otra, pero nosotros daremos aquí, como ayuda, varias indicaciones que pueden servir para evitar errores:

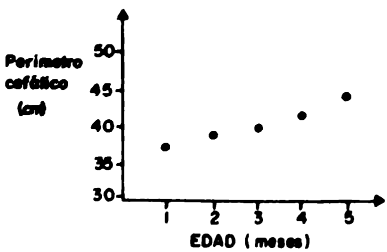
En primer lugar, recordemos que una función consta de tres partes, todas igualmente importantes, y que cada una de ellas queda específicamente representada en el sistema cartesiano: el dominio por el eje de las abscisas, el codominio por el eje de las ordenadas, y la regla de correspondencia por un conjunto de puntos que pueden formar líneas (rectas o curvas). Si se asimila esto, resulta fácil, teniendo claro cuáles son las tres partes de una función, graficarla; y viceversa, resulta también fácil interpretar una gráfica para entenderla como función.

Ejemplos:

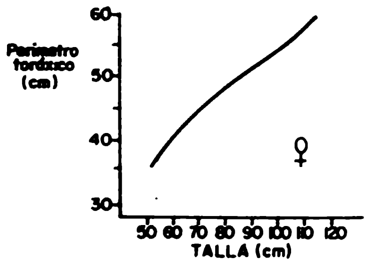
3.3.8 El perímetro cefálico está en función de (entre otros factores) la edad. Reproducimos aquí los datos para niños de 1 a 6 meses, tomados del estudio ya citado del Dr. Ramos Galván (tabla XIV-5):

meses:	1	2	3	4	5	6
perímetro cefálico:	37.0	39.2	40.6	41.8	42.7	43.7 cm

Debe ser claro que la variable independiente es la variable "edad", medida en meses (o sea que el dominio es $\{1,2,3,4,5,6\}$), y que la variable dependiente es la variable "perímetro cefálico", medido en centímetros (el codominio puede ser $\{x \in \mathbb{R} \mid 30 \leq x \leq 50\}$, o sea todos los reales comprendidos entre 30 y 50). Una vez visto esto, es fácil graficar:



3.3.9 En la figura 37-a del mismo estudio encontramos la siguiente gráfica. Observando el eje de las abscisas, podemos ver que la variable independiente es "talla", medida en centímetros, y que el dominio es : $\{x \in \mathbb{R} \mid 50 \leq x \leq 120\}$. Asimismo, observando el eje de las ordenadas, podemos ver que la variable dependiente es "perímetro torácico", medido en centímetros, y que el codominio es $\{x \in \mathbb{R} \mid 30 \leq x \leq 60\}$. Así pues, en esta gráfica se está considerando el perímetro torácico de las niñas en función de la talla (o, como lo expresa el Dr. Ramos Galván, el "perímetro torácico en relación a la talla"). La regla de correspondencia de la función queda expresada globalmente por la curva de la gráfica, y punto por punto podemos ver que, por ejemplo, la imagen de 70 es 45, o sea que las niñas con talla de 70 cm tienen (en promedio) 45 cm de perímetro torácico.

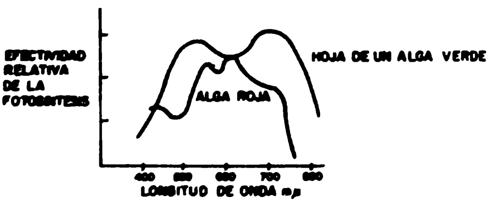


La segunda indicación que haremos se refiere al uso de los ejes de coordenadas. En general, ante un fenómeno biológico en el que interactúan dos variables, no siempre es claro cuál es el dominio y cuál el codominio, cuál es la variable independiente y cuál la dependiente, cuál variable corresponde al eje de las abscisas y cuál al de las ordenadas. Al intercambiar los ejes (es decir, los conjuntos dominio y codominio) de la gráfica de una función, hay casos en los que se obtiene la gráfica de otra función (por ejemplo, en los ejemplos 3.3.4, 3.3.5, 3.3.6, 3.3.8 y 3.3.9), y casos en los que la gráfica obtenida no es la de una función (por ejemplo, en los ejemplos 3.3.3 y 3.3.7:

¿por qué?). En el último caso no hay duda: se debe graficar de tal manera que se obtenga la gráfica de una función; en el primer caso, la duda puede persistir: ¿cuál de las dos variables va al eje de las abscisas y cuál al de las ordenadas? La siguiente clave suele contestar la pregunta: cuando la interacción biológica de ambas variables es de causa - efecto (directa o indirectamente), se usa la variable "causa" como variable independiente, y la variable "efecto" como variable dependiente. Sin embargo, debe quedar claro (y esto es muy importante) que lo inverso no es forzosamente cierto: no porque una variable aparezca como independiente se infiere que es "causa" de la dependiente.

Ejemplos:

3.3.10 En la siguiente gráfica se ha considerado el efecto de la longitud de onda sobre la efectividad de fotosíntesis en dos algas. Para observar esto, se ha manipulado experimentalmente la longitud de onda, y se ha observado la efectividad de fotosíntesis (en cada alga) para cada longitud de onda. De esta manera, la longitud de onda es "causa" y la efectividad de fotosíntesis es "efecto". (cf. Baker, p. 192)

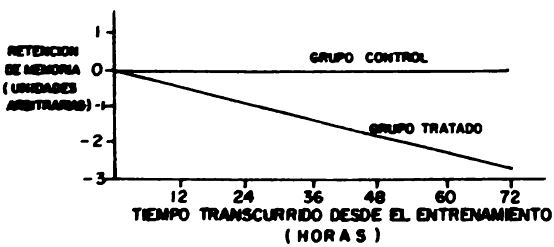


3.3.11 La gráfica del ejemplo 3.3.9 tiene en el eje de las abscisas la talla, y en el de las ordenadas el perímetro torácico, ¡Pero eso no quiere decir que la talla sea causa del perímetro torácico !

La tercera indicación se refiere a la interpretación y al análisis de las líneas de las gráficas. Como vimos antes, éstas corresponden a la regla de correspondencia de la función. Ahora bien, dadas dos variables biológicas, nos puede interesar si están relacionadas (como por ejemplo el peso y la talla) o no (como por ejemplo el peso y la inteligencia), pero lo que nos interesa sobre todo es, si sí están relacionadas, cómo es la relación. La regla de correspondencia de la función y su expresión gráfica, la línea, son lo que nos da la información acerca de la forma de la relación entre las dos variables que integran una función.

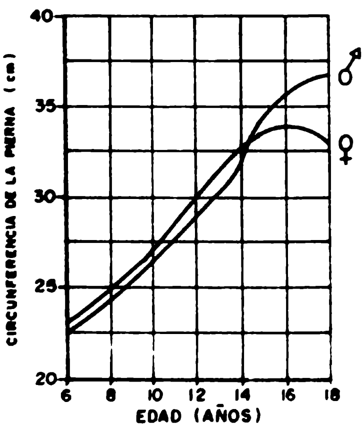
Ejemplos:

3.3.12 En un experimento realizado para observar el efecto de la síntesis de proteínas en la conversión de la memoria reciente en memoria lejana, se entrenó a un grupo de ratas para efectuar una acción sencilla; la mitad del grupo fue dejada como control, y a la otra se le inyectó, un minuto después del entrenamiento, una droga inhibidora de la síntesis protéica (puromicina). Después se observó la retención de memoria a lo largo de tres días. Los resultados obtenidos se ilustran en la siguiente gráfica:



La gráfica nos muestra varias cosas: primero, la línea del grupo control es una recta paralela al eje de las abscisas, lo que indica que la retención de memoria en este grupo no aumentó ni disminuyó a lo largo de los tres días de experimento, sino que fue siempre igual. Esto - nos indica que cualquier cambio observado en el grupo tratado se debe al tratamiento, y no al tiempo transcurrido. En el grupo tratado con puromicina se observa que la retención disminuye con el tiempo: a mayor tiempo transcurrido desde el entrenamiento, menor retención de memoria. Los investigadores que hicieron este experimento - concluyeron que la síntesis de proteínas tiene (probablemente) un efecto sobre la memoria lejana. (cf. Kirk, p. 617).

3.3.13 De las tablas somatométricas del Dr. Ramos Galván tomamos ahora los datos de circunferencia de la pierna en función de la edad, para niños y niñas de 6 a 18 años (figuras 8-b y 29-b):

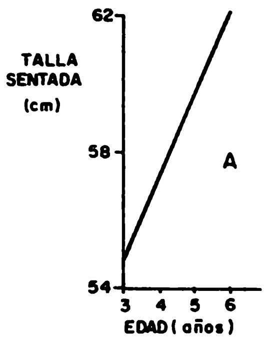


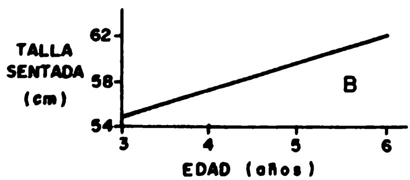
La gráfica nos muestra que, mientras que en los niños la circunferencia de la pierna crece lentamente al principio, y luego más rápidamente alrededor de los 14 años para estabilizarse a los 17, en las niñas el crecimiento lleva a un valor máximo entre los 15 y 16 años, y luego la circunferencia de la pierna decrece. Así, pues, en esta gráfica las dos líneas nos indican la forma de la relación entre la edad y la circunferencia de la pierna, para niños y niñas.

Por último, haremos una observación sobre las escalas de ambos ejes. Cuando se desea graficar una función, surge frecuentemente una duda acerca de cuál o cuáles escalas deben usarse; aunque aquí, como en casi todo, la práctica es la mejor maestra, algunas consideraciones pueden ser útiles: primero, los ejes no necesitan cruzarse en el "cero" de ambos (véase el ejemplo 3.3.13, en el que los ejes se cruzan en 6 años y 20 cm); segundo, las escalas de ambos ejes no necesitan ser iguales, sobre todo si las dos variables se expresan en unidades de distinto tipo (por ejemplo, en la gráfica de 3.3.13 la longitud que corresponde a 1 año en el eje de las abscisas corresponde en el de las ordenadas a 1.25 cm, pero véase también el ejemplo 3.3.2); tercero, lo más práctico suele ser dividir aproximadamente el espacio horizontal disponible entre el intervalo de valores del dominio y el espacio vertical disponible entre el intervalo de valores del codominio, ajustando el "aproximadamente" de manera que las unidades de las variables correspondan de modo manejable a múltiplos o subdivisiones de 1 cm (por ejemplo, para la gráfica de 3.3.13 se tomó en el original 1 cm por cada 2 años en el eje de las abscisas y 2 cm por cada 5 cm en el de las ordenadas). Por otra parte, la interpretación de una gráfica debe hacerse tomando muy en cuenta las escalas, y no sólo la forma de la línea.

3.3.14 Ejemplo:

Las dos gráficas que se muestran a continuación ilustran exactamente la misma función: la "talla sentada" de las niñas en función de la edad, para las niñas de 3 a 6 años (datos tomados de la tabla XXI-2 del estudio del Dr. Ramos Galván). Sin embargo, al verlos, es fácil equivocarse e interpretarlas así: "el crecimiento en A es mucho más - rápido que el crecimiento en B", lo cual es obviamente incorrecto, puesto que el crecimiento es el mismo en ambas gráficas: 7.35 cm en 3 años, dato que se obtiene de cualquiera de las dos gráficas observando las escalas en los ejes: la función es la misma en ambos casos.





3.4 ALGUNAS FUNCIONES IMPORTANTES Y SUS GRAFICAS CARTESIANAS

Muy probablemente, el (la) lector(a) había encontrado en libros o en artículos científicos gráficas con líneas rectas o con líneas que muestran curvas típicas; tal vez inclusive ha tenido que hacer alguna gráfica de estos tipos. En esta sección hablaremos de las funciones cuyas gráficas dan líneas rectas y, más brevemente, de algunas de las que dan líneas curvas típicas.

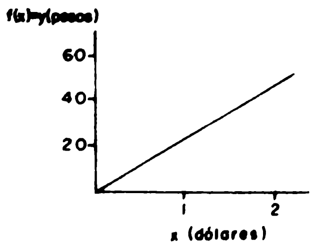
Hablemos primero de proporcionalidad: decimos que dos variables son proporcionales cuando al multiplicar cada valor de una de ellas por un número llamado constante de proporcionalidad se encuentra el valor correspondiente de la otra. La proporcionalidad entre dos variables puede ser expresada mediante una función.

3.4.1 Ejemplo:

Actualmente, un dólar norteamericano vale (aproximadamente) 23 pesos mexicanos. O sea que un extranjero que llegue a México con (x) dólares sabrá cuántos pesos (y) tiene mediante la siguiente función:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{Q}^+ &\to \mathbb{Q}^+ \\ x &\to y = 23x \end{aligned}$$

(donde $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\}$ es el conjunto de los racionales positivos). La función f expresa proporcionalidad: el extranjero tendrá una cantidad de pesos proporcional a la cantidad de dólares que tenga, y la constante de proporcionalidad vale en este caso 23. La función se grafica así:



Obsérvese que:

$f\ (1) = 23 \times 1 = 23$

$f\ (1.5) = 23 \times 1.50 = 34.50$

$f\ (2) = 23 \times 2 = 46$

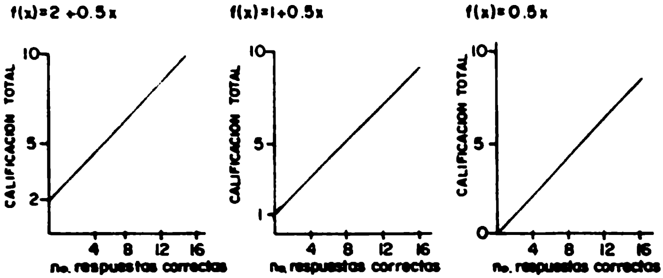
$f\ (0) = 23 \times 0 = 0$, etc.

O sea que si el extranjero llega con 1 dólar, tendrá 23 pesos; si llega con 1.50 dólares, tendrá 34.50 pesos, si llega con 2 dólares, tendrá 46 pesos, y si llega con 0 - dólares, tendrá 0 pesos, etc., todo lo cual está ilustrado por la gráfica.

Ahora bien, es frecuente que dos variables se comporten proporcionalmente sólo después de añadir (o restar) un valor constante a alguna de las dos:

3.4.2 Ejemplo:

Un maestro de secundaria califica a sus alumnos de la siguiente manera: les aplica un examen de 16 preguntas, - dándole a cada una un valor máximo de 0.5 punto, y a la calificación obtenida en el examen añade un punto si el alumno asistió a todas las clases y otro punto más si el alumno entregó todas las tareas. De esta manera obtiene la calificación total en función del número de respuestas correctas en el examen, para cada uno de los siguientes tres casos: alumnos que asistieron a todas las clases y que entregaron todas las tareas (primera gráfica de izquierda a derecha), alumnos que asistieron a todas las - clases o bien que entregaron todas las tareas, pero no ambas cosas (segunda gráfica), y alumnos que no asistieron a todas las clases ni entregaron todas las tareas (tercera gráfica):



La primera gráfica refleja, pues, el caso de los alumnos que asistieron a todas las clases y que entregaron todas las tareas: estos tienen medio punto (0.5) por respuesta correcta más los dos de "premio" (uno por asistencia y otro por tareas): su calificación total es entonces: $f(x) = 2 + 0.5x$. Análogamente, en el segundo caso se tiene $f(x) = 1 + 0.5x$, y en el tercero $f(x) = 0 + 0.5x$. Nótese que los puntos de "premio" se ven en cada caso en el eje de las ordenadas: es decir, cuando un alumno falló en todas las respuestas correctas su calificación total es igual a los puntos de "premio". Obsérvese también que en el último caso, con 0 puntos de "premio", se tiene un ejemplo de proporcionalidad (la calificación total es proporcional al número de respuestas correctas: $f(x) = 0.5x$).

Tanto en el ejemplo 3.4.1 como en el 3.4.2 las gráficas obtenidas ilustran la regla de correspondencia de la función mediante líneas rectas, que pueden "cortar" el eje de las ordenadas en el origen (3.4.1 y tercera gráfica de 3.4.2) cuando hay proporcionalidad, o en cualquier otro punto (3.4.2, primera y segunda gráficas) cuando no la hay. A estas funciones se les llama funciones lineales y están caracterizadas de la siguiente manera:

3.4.3

Una <u>función lineal</u> es una función del tipo:

$$f: D \rightarrow C$$
$$x \mapsto y = a + bx$$

donde: $D \subset \mathbb{R}$, $C \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$

Al valor "a" se le llama <u>intercepto</u> y al valor "b" se le llama <u>pendiente</u>. La gráfica de una función lineal es una <u>recta</u> que corta al eje de las ordenadas en un punto igual al intercepto (a) y cuya inclinación está dada por la pendiente (b). Viceversa, toda gráfica con una línea recta corresponde a una función lineal.

Así, por ejemplo, en 3.4.1 el intercepto a = 0, y la pendiente b = 23, y en 3.4.2 las tres funciones tienen la misma pendiente b= 0.5 e intercepto a = 2, a = 1 y a = 0 respectivamente. Veamos ahora otros casos de funciones lineales:

Ejemplos:

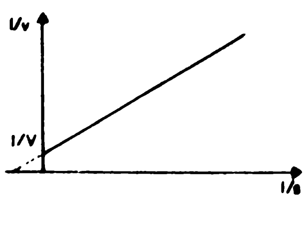
La ecuación de Michaelis-Menten describe la velocidad de una reacción enzimática en función de la concentración de sustrato de la siguiente manera:

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$
$$s \mapsto f(s) = v = Vs/(K+s)$$

donde $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, s representa la concentración de sustrato, v la velocidad de la reacción y V y K son constantes positivas. La ecuación de Michaelis-Menten puede replantearse de cualquiera de las siguientes formas para dar funciones lineales:

3.4.4. La transformación de Lineweaver-Burk es:

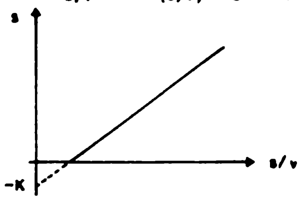
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$1/s \mapsto f(1/s) = 1/v = 1/V + (K/V)(1/s)$$



Obsérvese que ésta es una función lineal del tipo
$f(x) = y = a + bx$, donde:
$x = 1/s$, $y = 1/v$, $a = 1/V$, $b = K/V$
Tanto el intercepto como la pendiente son positivos.

3.4.5 La transformación de Wolf es:

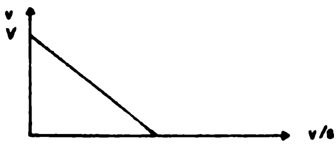
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$s/v \mapsto f(s/v) = s = -K + V\,(s/v)$$



Obsérvese que ésta es una función lineal del tipo
$f(x) = y = a + bx$, donde:
$x = s/v$, $y = s$, $a = -K$, $b = V$
El intercepto es negativo y la pendiente es positiva (inclinación "hacia arriba")

3.4.6 La transformación de Eadie-Hofstee es:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$v/x \mapsto f(v/s) = v = V - K\,(v/s)$$



Obsérvese que ésta es una función lineal del tipo
$f(x) = y = a + bx$, donde:
$x = v/s$, $y = v$, $a = V$, $b = -K$
El intercepto es positivo y la pendiente es negativa (inclinación "hacia abajo").

Así, pues, si el intercepto es positivo ($a > 0$) la recta cruza el eje de las ordenadas arriba del origen, si es negativo ($a < 0$) lo cruza abajo del origen, y si es nulo ($a = 0$) lo cruza en el origen; si la pendiente es positiva ($b > 0$) la recta tiene una inclinación "hacia arriba", si es negativa ($b < 0$) la inclinación es "hacia abajo", y si es nula ($b = 0$) la recta no se inclina: es paralela al eje de las abscisas.

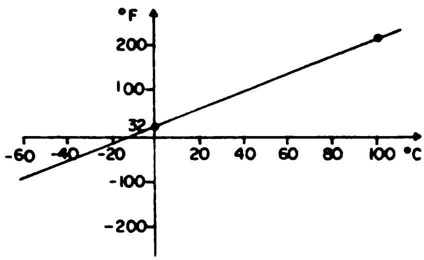
Hemos visto que las funciones lineales pueden ser expresadas equivalentemente de una manera formal o gráficamente. Veamos ahora cómo graficar una función lineal expresada formalmente. Para graficar la recta correspondiente a una función lineal expresada formalmente podríamos sustituir en la fórmula $f(x) = a + bx$ la totalidad (o por lo menos muchos) de los valores x del dominio para encontrar los correspondientes valores $f(x)$ del codominio, pero esto, en el caso de la recta, no es necesario: basta con tener dos parejas de valores (x y su correspondiente $f(x)$), o sea dos puntos en la gráfica, para determinar el resto de la recta (es decir: por dos puntos pasa una y sólo una recta).

3.4.7 Ejemplo:

Podemos expresar la temperatura medida en grados Farenheit en función de la medición en grados centígrados de la siguiente manera:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$°C \mapsto °F = 32 + 1.8\ °C$$

(Obsérvese que ésta es también una función del tipo $f(x) = y = a + bx$, donde $x = °C$, $y = °F$, $a = 32$ y $b = 1.8$). Para graficar la recta correspondiente a esta función necesitamos dos puntos; uno de ellos es fácil de obtener, ya que está dado directamente por el intercepto: cuando $°C = 0$, $°F = 32 + 1.8 \times 0 = 32 + 0 = 32$, o sea que uno de los dos puntos es el punto con abscisa 0 y con ordenada 32. Para obtener el otro punto, escogemos cualquier otro valor del dominio, digamos $°C = 100$, y entonces $°F = 32 + 1.8 \times 100 = 32 + 180 = 212$: el otro punto que determina la recta tiene abscisa 100 y ordenada 212. Una vez obtenido esto, graficamos ambos puntos en un sistema de coordenadas y, colocando una regla de tal modo que coincida con ambos, trazamos el resto de la gráfica:



Obsérvese que en la gráfica hemos prolongado ambos ejes más allá del origen con valores negativos, ya que nos planteábamos que tanto el dominio como el codominio eran $\mathbb{R}$

Las funciones de los ejemplos 3.4.4 a 3.4.7 son todas funciones lineales, pero existe una diferencia entre la última y las tres primeras. La función lineal de 3.4.7 expresa una relación que es sustancialmente matemática (abstracta): es la relación entre dos sistemas de medición, y la función (es decir su expresión formal) es en sí misma la relación entre las dos variables. En cambio, las funciones lineales de 3.4.4, 3.4.5 y 3.4.6 reflejan una relación que es sustancialmente bioquímica (concreta), la relación entre la concentración de sustrato y la velocidad en una reacción enzimática; en cada caso, la función no es más que una manera de reflejar la relación real entre las variables: decimos que la función es un <u>modelo</u> (matemático) de la relación real.

Los modelos matemáticos proveen una herramienta sumamente útil para el estudio y la interpretación de la realidad, de la misma manera que un modelo a escala de un barco permite conocer globalmente el barco, ahorrándonos dos dificultades: primero, no siempre es fácil tener enfrente el barco real, y segundo, aunque lo tuviéramos enfrente y subiéramos a bordo, nos confundiríamos con detalles y con falta de perspectiva.

El estudio de los modelos matemáticos de las relaciones entre variables biológicas merece un libro aparte (véase por ejemplo el de Snedecor y Cochran, citado en la bibliografía de este capítulo), pero aquí quisiéramos hacer una breve indicación al respecto. Cuando estamos observando un fenómeno biológico en el que intervienen dos variables, y queremos ver cómo se relacionan éstas entre sí, la primera pregunta que nos formulamos es si al aumentar los valores de una los de la otra aumentan o disminuyen. La respuesta a esta primera pregunta puede ser expresada mediante una función lineal como modelo (pendiente positiva si la respuesta es "aumentan", negativa si es "disminuyen"), con la ventaja de que además la función lineal puede reflejar la respuesta a la siguiente pregunta: ¿cuánto aumentan o disminuyen? (mediante el valor numérico de la pendiente). Es por esto que las funciones lineales son muy frecuentemente usadas como modelos de las relaciones entre dos variables biológicas, y de hecho en muchos casos reflejan la relación real de una manera bastante precisa y clara (véase por ejemplo el caso reportado en 3.3.12). Sin embargo, las funciones lineales no siempre son el modelo óptimo: hay muchos fenómenos biológicos que se comportan de una manera más compleja y que requieren de modelos más finos para su estudio e interpretación.

En lo que queda de esta sección hablaremos muy brevemente de tres funciones que suelen servir como buenos modelos para fenómenos biológicos. Desde luego, estas funciones, como las lineales, pueden también expresar relaciones de tipo matemático (como en 3.4.7).

Las primeras funciones de las que hablaremos son las de tipo cuadrático:

3.4.8

Una <u>función cuadrática</u> es una función del tipo:

$$f: D \to C$$
$$x \mapsto y = a + bx + cx^2$$

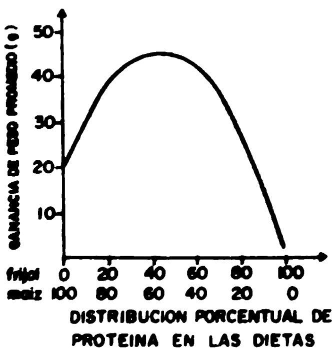
donde: $D \subset \mathbb{R}$, $C \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$

3.4.9 Ejemplo:

Cuando se somete a ratas de experimentación a dietas -- con proteínas de diversas procedencias, su crecimiento (medido como ganancia de peso) varía. La gráfica que - mostramos aquí ilustra lo que sucede cuando se combinan distintos porcentajes de proteína de frijol y proteína de maíz en una dieta. La función es:

$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto y = 19.97 + 1.20x - 0.01\,x^2$$

donde x = porcentaje de la proteína de frijol, y y = ganancia de peso promedio en gramos. (Los valores de a, b y c son aproximados). La gráfica muestra claramente que la ganancia de peso aumenta cuando el porcentaje de proteína de frijol aumenta desde cero, llega a un valor máximo (dieta óptima) cuando los porcentajes de ambas proteínas son (aproximadamente) iguales, y vuelve a disminuir a medida que el porcentaje de proteína de frijol sigue aumentando. (Datos tomados de Gómez Brenes et al., p. 266).



Otro tipo de función que resulta frecuentemente ser un buen modelo es el de la función exponencial:

3.4.10

> Una __función exponencial__ es una función del tipo:
> $$f: D \to C$$
> $$x \mapsto a \cdot b^x$$
> donde: $D \subset \mathbb{R}$, $C \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}^+$

3.4.11 Ejemplo:

En condiciones adecuadas, una bacteria se reproduce cada 20 minutos (aproximadamente), dando dos células idénticas, cada una de las cuales se reproducirá a su vez a los 20 minutos de la misma manera. Una bacteria, pues, será origen de 2 bacterias después de un ciclo, de 2 x 2 = 4 bacterias después de dos ciclos, de 4 x 2 = 8 bacterias después de 3 ciclos, etc. Esto es, para saber cuántas - bacterias habrá después de x ciclos en las condiciones adecuadas, multiplicamos 2 por sí mismo tantas veces como x, lo que se puede ejemplificar en la siguiente tabla:

después de	x	ciclos habrá	$\underbrace{2x\ldots x2}_{x \text{ veces}}$ =	2^x	bacterias
	1		2 =	2^1	
	2		2 x 2 =	2^2	
	3		2 x 2 x 2 =	2^3	

Lo que hacemos entonces es usar x (el número de ciclos) como exponente de 2 (el número de células que resultan de cada división), obteniendo 2^x. Supongamos ahora que ponemos en un cultivo 4 bacterias, y que observamos el crecimiento. Cada bacteria se comportará de la misma manera, y se obtendrán:

después de 1 ciclo, $4 \times 2^1 = 4 \times 2 = 8$ células,

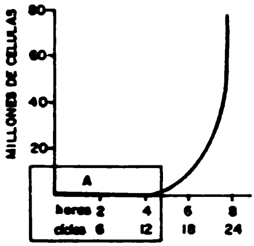
después de 2 ciclos, $4 \times 2^2 = 4 \times 4 = 16$ células,

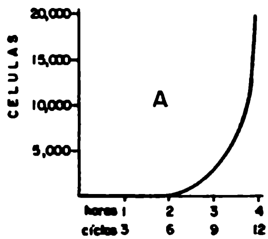
después de 3 ciclos, $4 \times 2^3 = 4 \times 8 = 32$ células,

después de x ciclos, 4×2^x células

La función es entonces: $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$
$$x \mapsto y = 4 \times 2^x$$

donde x = número de ciclos (uno cada 20 min: 3 por hora), y = número de células. Obsérvese que ésta es una función del tipo $y = a \cdot b^x$, donde a = 4 (número inicial de bacterias), y b = 2 (número de células que resultan de cada división). La gráfica resultante después de 8 horas se muestra a continuación (se llega a 67'108,864 células al cabo de las 8 horas):



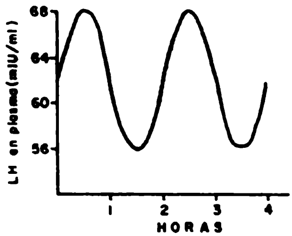


La primera de las gráficas ilustra cómo crece el cultivo en las primeras ocho horas; en ella parece que el crecimiento en las primeras cuatro es nulo, pero eso se debe sólo a la escala: la segunda gráfica ("A") muestra que en esas primeras cuatro horas el cultivo crece de 4 a 16,384 células.

Por último, hablaremos de unas funciones llamadas <u>circulares</u> o <u>senoides</u>. No daremos su expresión formal porque involucra conceptos trigonométricos, de los que no hemos hablado. Estas funciones son particularmente útiles para describir los fenómenos de biorritmo.

3.4.12 Ejemplo:

Se sabe que las hormonas gonadotrópicas en mujeres tienen variaciones circadianas (o sea, con ciclos de 24 horas). Medina et al. corroboraron la existencia de un subciclo de 2 horas. Para ello, estudiaron mujeres postmenopáusicas, tomando muestras de plasma cada minuto, y obtuvieron gráficas como la siguiente, que describe las variaciones de la hormona LH a lo largo de cuatro horas (dos ciclos de dos horas):



Para terminar, haremos una observación sobre las gráficas de las últimas funciones: a menos de contar con instrumentos de dibujo, éstas deben hacerse punto por punto: calculando las imágenes de varios valores del dominio, y luego uniendo los puntos mediante una línea. O sea que es un poco más complicado hacer las gráficas de estas funciones que las de funciones lineales.

3.5 EJERCICIOS

3.5.1 Dar 5 ejemplos de variables biomédicas que estén en función de otras. En cada caso, describir el dominio, el codominio y la regla de correspondencia de la función.

3.5.2 El aspecto físico de los manzanos está en función de las estaciones del año. Describir el dominio y el codominio de esta función, y desglosar su regla de correspondencia.

3.5.3 Un niño nace cuando su padre tiene 25 años. Expresar formalmente las tres partes de la función que considera la edad del hijo en función de la del padre (hasta los 75 años de éste).

3.5.4 Decir si las siguientes relaciones son funciones. Si sí, dar el dominio y el codominio de la función.

a) la que asocia a cada persona con su abuelo paterno
b) la que asocia a cada persona con sus hijos
c) la que asocia a cada persona con cada uno de sus progenitores
d) la que asocia a cada persona con la pareja formada por sus progenitores
e) la que asocia a cada persona con su "media naranja"
f) la que asocia a cada persona con su familia

3.5.5 Decir si las siguientes son funciones bien definidas:

a) $f: \{0,1,2\} \to \{0,1,2\}$, $x \mapsto 2 - x$

b) $f: \{0,1,2\} \to \{0,1,2\}$, $x \mapsto x - 2$

c) $f: \{0,1,2\} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto x - 2$

d) $f: \{0,1,2\} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto 1/x$

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[3]{(2+\pi x)^2}$

f) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto 0$

g) $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto x$

h) $f: \phi \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 5.3$

3.5.6 Fijándonos en el codominio de las funciones, podemos ver ciertas características. Llamamos <u>sobreyectivas</u> aquellas funciones en las que todos los elementos del codominio son imagen de por lo menos un elemento del dominio; llamamos <u>inyectivas</u> aquellas funciones en las que los elementos del codominio que son imagen de alguno del dominio lo son de sólo uno; llamamos <u>biyectivas</u> aquellas funciones que son sobreyectivas e inyectivas. Así, por ejemplo, la función de 3.1.3 es sobreyectiva porque cada uno de los elementos del codominio es imagen de alguno de los del dominio, y como lo es de sólo uno, la función es inyectiva; por lo tanto, es biyectiva.

a) decir, de las funciones de los ejemplos 3.1.4, 3.1.6, 3.1.11 y 3.1.12 cuáles son sobreyectivas, cuáles inyectivas, cuáles biyectivas.

Encontrar un ejemplo de función biomédica para cada uno de los siguientes casos:

b) la función no es sobreyectiva ni inyectiva

c) la función es sobreyectiva y no es inyectiva

d) la función no es sobreyectiva y sí es inyectiva

e) la función es biyectiva

La doble característica de ser inyectivas y sobreyectivas confiere a las funciones biyectivas la siguiente característica: cada elemento del codominio es imagen de uno y sólo uno del dominio. Si se confronta esto con 3.1.5, se verá que estas funciones permiten la definición de otra función cuyo dominio sea el codominio de la anterior, cuyo codominio sea el dominio de la anterior y cuya regla de correspondencia sea la misma tomada al revés: esta función se llama función inversa.

f) Describir la función inversa de 3.1.3 y la de la encontrada en el inciso e) de este ejercicio.

3.5.7 Calcular la imagen de cada uno de los elementos del dominio bajo las funciones cuyo dominio es $\{0,1,2\}$, cuyo codominio es $\mathbb{R}$, y cuya regla de correspondencia es:

a) $f(x) = x + 8$	e) $f(x) = 2$	i) $f(x) = 10^x$
b) $f(x) = x - 1$	f) $f(x) = x$	j) $f(x) = x^2 - x$
c) $f(x) = 10x$	g) $f(x) = x^2$	k) $f(x) = (10x - 2)^2$
d) $f(x) = x/3$	h) $f(x) = \sqrt{x}$	l) $f(x) = (x + x^2)^2/2$

3.5.8 Describir las variables independiente y dependiente, y los conjuntos dominio y codominio en los ejemplos 3.1.1, 3.1.2 y 3.1.6.

3.5.9 Expresar formalmente la función del ejemplo 3.2.3.

3.5.10 Graficar con diagramas de Venn todas las posibles funciones entre el conjunto $\{*, \#\}$ tomado como dominio y el conjunto $\{4,2,7\}$ tomado como codominio.

3.5.11 Hacer por separado las dos gráficas superpuestas en 3.2.6

3.5.12 Hacer las gráficas de 3.2.5 y 3.2.6 poniendo en otro orden los elementos del dominio.

3.5.13 Observar a 20 personas y hacer gráficas de barras que ilustren cómo se distribuyen las personas observadas en relación a:

a) el color de ojos

b) el sexo

En cada caso, expresar formalmente la función resultante.

3.5.14 Hacer una gráfica de círculo que ilustre cómo distribuye su tiempo diario entre sus diversas actividades una persona determinada. Expresar formalmente la función resultante.

3.5.15 De los modos de graficación expuestas en la sección 3.2, escoger el más apropiado y graficar cada una de las siguientes funciones:

a) $$\begin{array}{rcl} f: \{a,b,c\} & \to & \{1,2,3\} \\ a & \mapsto & 2 \\ b & \mapsto & 1 \\ c & \mapsto & 3 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcl} f: \{M,X,T,A\} & \to & \mathbb{Q}' \\ M & \mapsto & 1/2 \\ X & \mapsto & 1/6 \\ T & \mapsto & 1/12 \\ A & \mapsto & 1/4 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{rcl} f: \{1,2,3,4\} & \to & \{a,b,d\} \\ 1 & \mapsto & d \\ 2 & \mapsto & b \\ 3 & \mapsto & a \\ 4 & \mapsto & b \end{array}$$

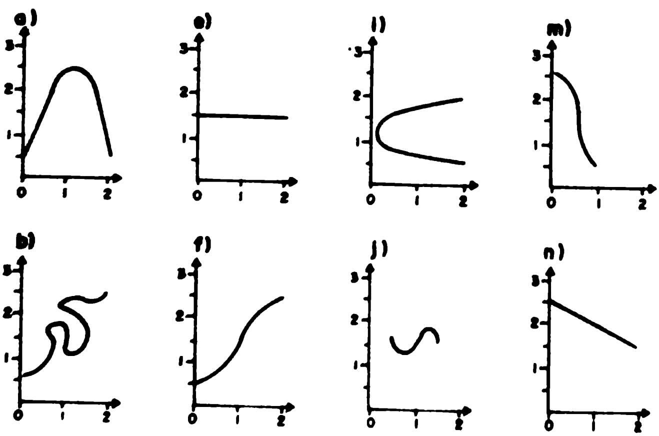
d) $$\begin{array}{rcl} f: \{\alpha,\beta\} & \to & \{\delta\} \\ \alpha & \mapsto & \delta \\ \beta & \mapsto & \delta \end{array}$$

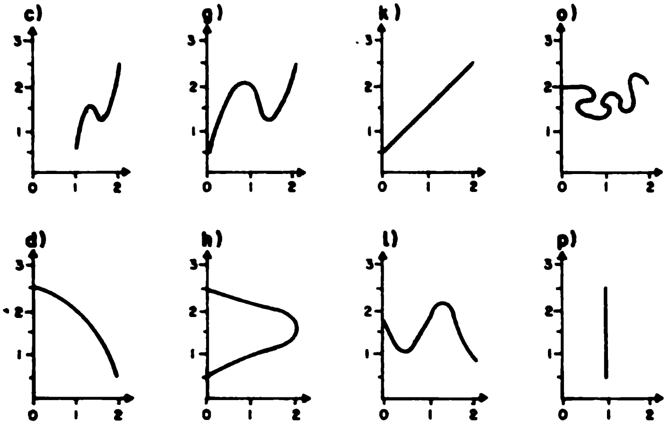
3.5.16 Hacer la gráfica cartesiana del ejemplo 3.2.3.

3.5.17 Cambiar el dominio de la función del ejemplo 3.3.8 de $\{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq 5\}$ a $\{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 5\}$ y hacer la gráfica cartesiana de la nueva función, <u>interpolando</u> para los nuevos valores (es decir, uniendo mediante segmentos de recta los puntos conocidos). Interpretar la gráfica y deducir el perímetro cefálico de los niños de dos meses y medio.

3.5.18 Tomando como base la gráfica de 3.3.9, deducir las imágenes de los siguientes elementos del dominio: $x = 50$, $x = 85$, $x = 120$. Interpretar los resultados.

3.5.19 Existe un método muy sencillo para verificar que una gráfica cartesiana es la de una función bien definida (véase 3.1.5), llamado la <u>prueba de la vertical</u>, que consiste en imaginar una línea recta vertical que recorra horizontalmente todo el dominio: en cada lugar la vertical debe cruzar la línea de la gráfica una y sólo una vez. Usando la prueba de la vertical, decir si las siguientes gráficas son de funciones (en cada caso, el dominio es $\{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 2\}$ y el codominio es $\{y \in \mathbb{R} | 0.5 \leq y \leq 2.5\}$):





Nota: si se resolvió el ejercicio 3.5.6, decir también para las gráficas que sí son de función, si ésta es sobreyectiva o inyectiva.

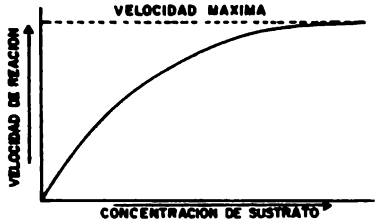
3.5.20 En cada uno de los siguientes ejemplos: 3.3.4, 3.3.5, 3.3.6, 3.3.8 y 3.3.9, intercambiar el dominio y el codominio, y formalizar y graficar la nueva función. (Sugerencia: véase el ejercicio 3.5.6).

3.5.21 Explicar por qué, al intercambiar el dominio y el codominio en los ejemplos 3.3.3 y 3.3.7, no se obtiene una función (Sugerencia: véase el ejercicio 3.5.6).

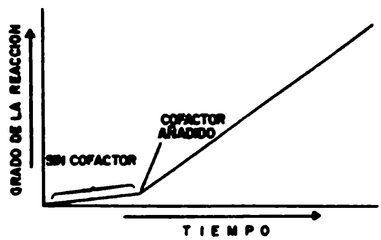
3.5.22 De acuerdo con los datos publicados por el Dr. Ramos Galván (tabla XXI-5), las niñas tienen en promedio un perímetro cefálico de 36.7 cm al primer mes de edad, de 38.5 cm al segundo, de 39.9 cm al tercero, de 40.9 al cuarto, de 41.7 al quinto y de 42.5 al sexto. Formalizar y hacer la gráfica cartesiana de la función correspondiente.

3.5.23 Interpretar las siguientes gráficas, que ilustran algunas de las maneras por las que es regulada la actividad enzimática en la célula (Kirk, p. 258)

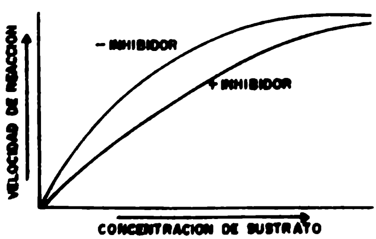
a) Efecto de la concentración de sustrato



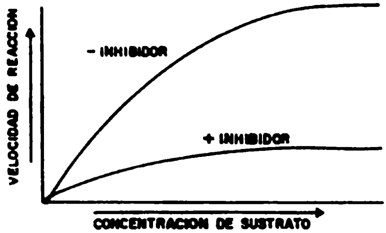
b) Efecto de un cofactor



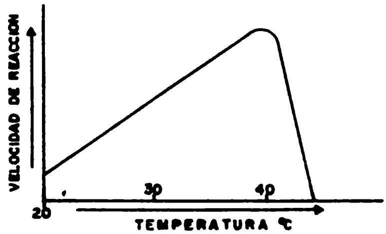
c) Efecto de un inhibidor competitivo



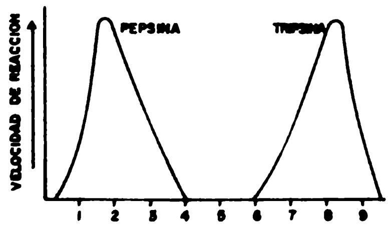
d) Efecto de un inhibidor no competitivo



e) Efecto de la temperatura



f) Efecto del pH



3.5.24 En relación al ejemplo 3.4.2:

a) determinar formal y gráficamente cuál es la calificación máxima en cada caso.

b) ¿cómo puede un alumno obtener una calificación final de 6?

3.5.25 Decir si las siguientes funciones son lineales o no; si lo son, dar el valor del intercepto y de la pendiente. Todas las funciones son $f: R \rightarrow R$, y $f(x) = y$, donde:

a) $y = 3 \times 10x$
b) $y = 3 \times 10^x$
c) $y = 3 + 10x$
d) $y = 3 + 10^x$
e) $y = 2(1 + x)$
f) $y = x(1 + 2)$
g) $y = (1 + x)^2$
h) $y = (1 + 2)^x$
i) $y = 5 - x$
j) $y = -5 + x$
k) $y = -x + 5$
l) $y = -5 - x$
m) $y = x + 2$
n) $y = x + \sqrt{2}$
o) $y = \sqrt{x} + 2$
p) $y = \sqrt{x + 2}$

3.5.26 Graficar las siguientes funciones. Todas son $f: R \rightarrow R$, y $f(x) = y$, donde:

a) $y = 0$
b) $y = 5$
c) $y = 5x$
d) $y = x$
e) $y = 5 + x$
f) $y = 5 + 5x$
g) $y = -5 + x$
h) $y = 5 - 5x$
i) $y = -5 - 5x$
j) $y = 4 + 3x$
k) $y = -10 + 2x$
l) $y = -3 - x$

3.5.27 En un ensayo hipotético para determinar las características de cierta enzima, se obtuvo K = 0.57 mM y V = 0.23 µmoles/min. Sustituir estos valores en 3.4.4, 3.4.5 y 3.4.6, y hacer las gráficas correspondientes. (Nota: en cinética enzimática, K se conoce como Km, la constante de Michaelis-Menten, y está dado en las unidades de concentración de sustrato, mientras que V es Vmax, la velocidad máxima de la reacción, dada en cantidad de producto formado por unidad de tiempo).

3.5.28 Indicar cómo son con respecto a cero (mayores, menores, iguales) la pendiente y el intercepto de las dos rectas graficadas en 3.3.12.

3.5.29 Toda función lineal con pendiente distinta de cero es invertible; esto es, si x es un elemento del dominio, y y es su imagen ($y = a + bx$), se puede también expresar a x en función (lineal) de y ($x = a' + b'y$). El nuevo intercepto está dado por $a' = -a/b$, y la nueva pendiente es $b' = 1/b$. Graficar y en función de x y x en función de y en los siguientes casos:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = 1 + 2x$

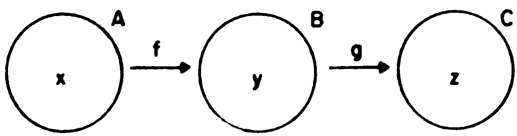
c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = 1 - 2x$

b) $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$
$x \mapsto y = x$

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = -1 + 2x$

3.5.30 (Nota: para resolver este ejercicio se necesita haber resuelto el 2.10.33). La regla de correspondencia de una función puede entenderse como un subconjunto del producto cartesiano del dominio por el codominio (esto es: $f: A \to B \Rightarrow f \subset A \times B$), de tal manera que en este subconjunto haya una y sólo una pareja ordenada por cada elemento del dominio: cada pareja ordenada está constituida por un elemento del dominio y su imagen. Expresar como subconjunto del producto cartesiano del dominio por el codominio las reglas de correspondencia de las funciones de 3.1.3 y 3.1.4.

3.5.31 El codominio de una función puede servir como dominio de otra función, como se ilustra en la siguiente figura:



En la figura se tiene $f: A \to B$ y $g: B \to C$. Supongamos que $x \in A$ y que $f(x) = y$: entonces $y \in B$, y supongamos que $g(y) = z$. Entonces $z \in C$, y $z = g(y) = g(f(x))$, o -

sea que estamos operando sobre x para convertirlo en z. De hecho, podríamos plantearnos una sola función que hiciera esto, digamos $h: A \to C$ tal que $h(x) = z$. A esta función h se le llama composición de las funciones f y g, y se escribe $h = g \circ f$ (obsérvese que el orden de f y g en esta expresión, que corresponde a $h(x) = g(f(x))$, es distinto al de la figura). Para poder formar la composición $g \circ f$ se necesita que el codominio de f sea subconjunto del dominio de g. Sean ahora las siguientes funciones:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = x^2$

$g: \mathbb{R} \to \{-1\}$ tal que $g(x) = -1$

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = 2x$

La composición $f \circ h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ es posible porque $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$, y la regla de correspondencia es $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(2x) = (2x)^2 = 4x^2$.

Decir si las siguientes composiciones de funciones son posibles; si lo son, describir el dominio, el codominio y la regla de correspondencia:

a) $f \circ f$	d) $f \circ g$	g) $g \circ h$
b) $g \circ f$	e) $g \circ g$	i) $h \circ h$
c) $h \circ f$	f) $h \circ g$	j) $h \circ g \circ f$

3.6 BIBLIOGRAFIA

Batschelet, E. *Matemáticas básicas para biocientíficos (biólogos, médicos, veterinarios, bioquímicos, etc.)*. Ed. Dossat, Madrid (1978).

Martínez, J. *Conjuntos y funciones*. ANUIES, México (1973).

National Council of Teachers of Mathematics #13. *Gráficas, relaciones y funciones*. Editorial Trillas, México (1977).

Rangel, L.M. *Funciones y Relaciones, Partes 1 y 2*. ANUIES, México (1975).

Snedecor, G.W. y W.C. Cochran. *Métodos estadísticos*. C.E.C.S.A., México - (1971).

SOLUCIONES A EJERCICIOS ESCOGIDOS

Capítulo 1

1.11.1 b) sí

1.11.3 b) simple; c) compuesta

1.11.5 a) "no es cierto que los elefantes no vuelan"
("los elefantes vuelan")

1.11.6 d) $(q \vee r) \wedge \sim (q \wedge r)$; h) Luis sabe francés y japonés

1.11.10 e) F; g) V; k) V; q) F; s) V; t) F; u) V; x) F

1.11.11 b) V; d) V; g) F

1.11.12 c) $n \rightarrow (m \vee p)$; e) "Si Natalia tiene ojos oscuros, alguno de sus padres también" (porque $\sim(p \wedge m) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim m)$: ver 1.9.17)

1.11.13 a) $f \wedge g \rightarrow \sim r$; d) $\sim r \rightarrow \sim g$

1.11.14 Sí: ¿por qué?

1.11.15 En el ejemplo, p es V, q es V y r es F, por lo que, en a), $(q \wedge r)$ es F, y $p \vee (q \wedge r)$ es V, mientras que $(p \vee q)$ es V y $(p \vee q) \wedge r$ es F

1.11.17 a)

	p	∧	q	→	p
	V	V	V	V	V
	V	F	F	V	V
	F	F	V	V	F
	F	F	F	V	F
Paso No.	1	2	1	3	1

1.11.21 b) Sea p "todos los mexicanos comen carne a diario" y q "yo soy el Papa". Entonces b) es $p \rightarrow q$. Como es obvio que $(\sim q)$, se tiene $(p \rightarrow q) \wedge (\sim q)$, lo que por 1.10.8 (mtt) implica $(\sim p)$: es una manera rebuscada de decir que no es cierto que todos los mexicanos comen carne diario.

Capítulo 2

2.10.1 En 2.1.4, subfilum = {clases}

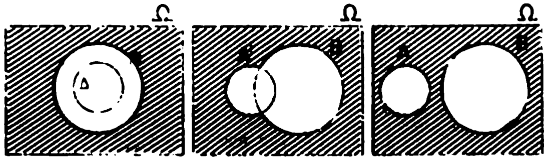
2.10.2 No

2.10.6 a) sí

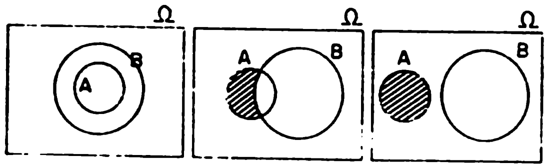
2.10.10 La ballena, ¿cuál otro?

2.10.11 En 2.4.2, $F \cup R$ = {hortalizas de las que se come el fruto o la flor}; en 2.5.2, $R \cap V$ = {frutos que son rojos y verdes} , y sandía $\in R \cap V$, pero aguacate $\notin R \cap V$, y jitomate $\notin R \cap V$.

2.10.12 d)



i)



2.10.13 a) {2,4,6,8}; b) {3,4,5,6}; c) {1,2,3,4,9}; e) {1,2,3,4,5,6,9}; g) {4,6}; l) {6,8}; o) $\emptyset$; y) {2,3,4}

2.10.14 c) F

2.10.15 a) V; h) F

2.10.16 b) F; d) V

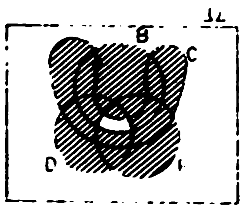
2.10.20 b) V; h) F; r) F

2.10.23 $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

2.10.24 c) $\bar{A} \cup (A \cap C - B)$ = {parejas que no usan métodos de barrera o que usan métodos de barrera y espermicidas locales sin usar métodos tradicionales}; 1) $A \cup B \cup C - [(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)]$ = {parejas que usan sólo un método}.

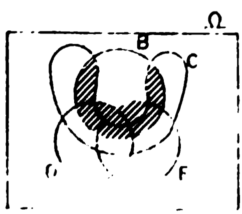
2.10.25

d)



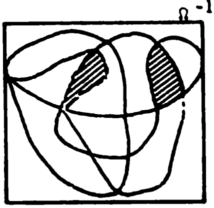
$B \cup C \cup D \cup E - B \cap C \cap D \cap E$

i)



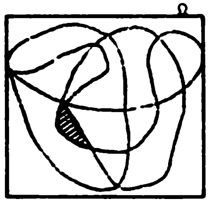
$B \cap (C \cup D \cup E)$

2.10.26 d)



$A \cap B \cap D$

f)



(mujeres mayores de 30 años graves no trabajadoras)

2.10.28 d) $A \subset A \cup \phi$ por 2.8.8. Demostración de $A \cup \phi \subset A$: Sea $x \in A \cup \phi$; entonces $x \in A \vee x \in \phi$. Como $x \in \phi$ es una contradicción (es decir: $x \notin \phi$), entonces $x \in A$. Por lo tanto $x \in A \cup \phi \Longrightarrow x \in A$, o sea que $A \cup \phi \subset A$, o sea que $A \cup \phi = A$.

2.10.32 b) $\bar{A} - B = \phi \Leftrightarrow \bar{A} \cap \bar{B} = \phi \Leftrightarrow$
$\overline{A \cup B} = \phi \Leftrightarrow \overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\phi} \Leftrightarrow$.
$A \cup B = \Omega$

2.10.34 b) $a = 1$, $b = 2$

2.10.35 b) $A \times B = \{(1,\alpha), (1,\beta)\}$
$B \times A = \{(\alpha,1), (\beta,1)\}$

Capítulo 3

3.5.3 $f: \{x \in R \mid 25 \leq x \leq 75\} \to \{y \in R \mid 0 \leq y \leq 50\}$
$x \mapsto y = x - 25$

3.5.4. c) no; d) sí: el dominio es {personas} y el codominio es {parejas de personas}

3.5.5 a) sí; b) no; h) sí: ¿por qué?

3.5.6 a) la función de 3.1.4 es biyectiva

3.5.7 a) $f(0) = 8$, $f(1) = 9$, $f(2) = 10$;
k) $f(0) = 4$, $f(1) = 64$, $f(2) = 324$

3.5.9 $f: \{n \in N \mid n < 6\} \to \{n \in N \mid n < 6\}$

$$n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es non} \\ 3 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

3.5.15 b) hacer una gráfica de círculo

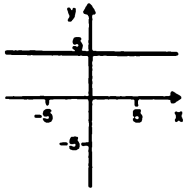
3.5.17 El perímetro cefálico de los niños de dos meses y medio es de 39.9 cm por interpolación.

3.5.19 a) es función, y sobreyectiva; c) no; l) sí; o) no

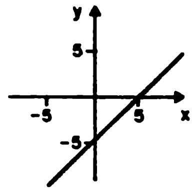
3.5.23 c) el inhibidor competitivo hace que se necesite más concentración de sustrato para alcanzar la velocidad máxima, pero sí se llega a alcanzar esta última.

3.5.25 a) sí: $a = 0$, $b = 30$; g) no; l) sí: $a = -5$, $b = -1$; o) no

3.5.26



b)



g)

3.5.30 En 3.1.3, $f = \{(ip,e), (mp,c), (ih,t)\}$
(de acuerdo con la simbología de 3.2.1)

3.5.31 d) $f \circ g: R \to R^+$ tal que $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-1) = 1$;
j) $h \circ g \circ f: R \to R$ tal que $(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x))) = h(g(x^2)) = h(-1) = -2$

BIBLIOGRAFIA BIOMEDICA

Aguilar, J. y G. Alatorre. Monografía de la planta de la alegría. *Memoria del Grupo de Estudios Ambientales*, México, pp. 157-203 (1978).

Baker, J.J.W. y G.E. Allen. *Biología e investigación científica*. Fondo Educativo Interamericano, U.S.A. (1970).

Gómez-Brenes, R.A., L.G. Elías y R. Bressani. Mejoramiento de la calidad proteínica de dietas de bajo valor nutritivo a través del uso de maíz fortificado y del opaco - 2. En: *Mejoramiento nutricional del maíz*. R. Bressani, J.E. Braham y M. Béhar editores. Instituto de Nutrición de Centro América y Panamá, Guatemala (1972).

Hempel, C.G. *Filosofía de la ciencia natural* (segunda edición). Alianza Editorial, Madrid (1976).

Kirk, D., editor. *Biology Today* (second edition). Random House, New York (1975).

Lehninger, A.L. *Biochemistry* (second edition). Worth Publishers, New York (1975).

Medina, M., H.E. Scaglia, G. Vázquez, S. Alatorre y G. Peréz-Palacios. Rapid Oscillation of Circulating Gonadotropins in Postmenopausal Women. *J. Clin. Endocrinol. Metab.*, 43:1015 (1976).

Ramos Galván, R. Somatometría pediátrica; estudio semilongitudinal en niños de la ciudad de México. *Arch. Invest. Méd. (Méx.)* 6: Supl. 1(1975).