UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

1 ejem.

26

COHOMOLOGIA DE ALGEBRAS DE LIE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

CARLOS JOSE ENRIQUE SIGNORET POILLON

MEXICO, D. F. 1979

INDICE

INTRODUCCIÓN

En la teoría de las representaciones inducidas en los grupos de Lie analíticos conexos complejos, la cohomología de sus álgebras de Lie ha desempeñado un papel fundamental, dando lugar a la generalización del famoso teorema de Borel-Weil obtenida simultáneamente por R. Bott[1] y B. Kostant[2].

La teoría de representaciones infinitas de grupos de Lie semisimples reales desarrollada principalmente por Harish-Chandra es eminentemente analítica y muy compleja; recientemente D. Vogan[3] reformuló algebraicamente —y enriqueció, según opinión de Armand Borel— una gran parte de esta teoría. El trabajo de Vogan partió de la teoría de cohomología

(1) Bott Raoul. Homogeneous vector bundles. Annals of Math, 66 (1957) p.p 203-247.

(2) Kostant Bertram. Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem. Annals of Math, 74 (1961) p.p. 329-387.

(3) Vogan David A, Jr. The algebraic structure of the representation of semisimple Lie Groups I. Annals of Math, 109 (1979) pp. 1-60.

de algebras de Lie semisimples delineada por B. Kostant.

Esta tesis tiene por objeto presentar con todo detalle los fundamentos de la cohomología de las álgebras de Lie como acceso a los trabajos arriba mencionados, y está basada en las exposiciones sobre cohomología de álgebras de Lie de P. Cartier en su célebre "Séminaire Sophus Lie" de la Escuela Normal Superior de París.

Deseo expresar mi agradecimiento al Dr. Félix Recillas Juárez por haberme asesorado en la elaboración de la presente tesis y por haber escuchado pacientemente mis exposiciones, así como a mis compañeros Enriqueta Rodríguez Carrington, Rogelio Aguilar y Carlos Álvarez del grupo de trabajo dirigido por el Dr. Recillas. Asimismo quiero agradecer a todas las personas que directa o indirectamente me ayudaron en la realización de este trabajo.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES SOBRE ÁLGEBRAS.

En este capítulo se estudiarán algunas álgebras necesarias para la construcción del complejo fundamental, principalmente el álgebra universal envolvente y el álgebra exterior de un álgebra de Lie, así como teoremas relacionados con éllas, que serán utilizados como herramienta en el desarrollo de capítulos posteriores.

Consideraremos un álgebra de Lie $\mathcal{G}$ sobre un anillo K.

§I.1 ÁLGEBRA TENSOR.

Definición I.1.1.

El "álgebra tensor" de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un álgebra asociativa (con unidad) T sobre K y un morfismo de módulos

$$\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow T \quad \ni$$

(i) Si A es un álgebra asociativa sobre K y φ es un morfismo de módulos $\varphi : \mathfrak{g} \to A$, entonces existe un único morfismo $f : T \to A$ $\ni$ $f \circ \psi = \varphi$.

Lema I.1.1.

Si (T, ψ) y (T', ψ') son álgebras tensor de $\mathfrak{g}$, entonces $\exists$ J un isomorfismo $J : T \longrightarrow T'$ $\ni$ $J \circ \psi = \psi'$.

Dem:

Por la propiedad universal de (T, ψ), existe $J : T \longrightarrow T'$ $\ni$ $J \circ \psi = \psi'$.

Para ver que J es isomorfismo, consideremos la propiedad universal de (T', ψ'), entonces existe $J' : T' \to T \ni J' \circ \psi' = \psi$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, shift left, "J"] & & T' \arrow[ll, shift left, "J'"] \\ & \mathcal{G} \arrow[ul, "\psi"] \arrow[ur, "\psi'"'] & \end{tikzcd}$$

$J \circ (J' \circ \psi') = \psi' \Rightarrow (J \circ J') \circ \psi' = \psi'$

$\Rightarrow J \circ J' = 1_{\psi'(\mathcal{G})}$

Demostraremos que $\psi'(\mathcal{G})$ genera a T':

Sea T'' la subálgebra de T' generada por $\psi'(\mathcal{G})$

$\psi' : \mathcal{G} \to T''$ es morfismo y por lo tanto existe $f : T' \to T'' \ni f \circ \psi' = \psi'$, pero

$I_{T'} \circ \psi' = \psi'$ y por la unicidad, $f = I_{T'}$

$\Rightarrow T' = T''$

$\Rightarrow J \circ J' = 1_{T'}$; análogamente $J' \circ J = 1_T$ ∤

<u>Lema I.1.2.-</u> Existencia de (T, ψ).

<u>Dem:</u>

Para cada $n \geq 0$, definimos $T_0 = K$ y

$T_n = \bigotimes_{k=1}^{n} \mathcal{G}_k$ con $\mathcal{G}_k \cong \mathcal{G}$ $\forall\, k = 1, \ldots, n$

Sea $T = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T_n$

Tenemos para cada $n \geq 0$, un mapeo n-lineal $\tau_n : \mathcal{G} \overbrace{\times \cdots \times}^{n} \mathcal{G} \longrightarrow T_n$ ∋ (T_n, τ_n) es un producto tensorial de n copias de $\mathcal{G}$.

Definamos una multiplicación en T:

Hay un isomorfismo $\Theta_{m,n} : T_m \otimes T_n \longrightarrow T_{m+n}$ ∋

$\Theta_{m,n}(\tau_m(x_1, \dots, x_m), \tau_n(x_1', \dots, x_n')) = \tau_{m+n}(x_1, \dots, x_m, x_1', \dots, x_n')$.

(por la propiedad universal).

$T \otimes T = \bigoplus_{m,n=0}^{\infty} T_m \otimes T_n$, sea Θ el morfismo de $T \otimes T$ que extiende a todos los $\Theta_{m,n}$ y definimos $x \cdot y = \Theta(x \otimes y)$ con $x, y \in T$ que es claramente bilineal.

Demostraremos ahora que es una multiplicación asociativa:

Sea $P_n = \{ x \in T_n \ni x = \tau_n(x_1, \dots, x_n) \}$, P_n genera claramente a T_n. Sea $P = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$, será suficiente probar que $x(yz) = (xy)z$ si $x, y, z \in P$.

Sean, pues, $x = \tau_m(x_1, \dots, x_m)$, $y = \tau_n(y_1, \dots, y_n)$ y $z = \tau_p(z_1, \dots, z_p)$

$xy = \tau_{m+n}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$,

$yz = \tau_{n+p}(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_p)$

$\Rightarrow \; x(yz) = (xy)z.$

T tiene unitario:

Sea $e = \tau_0(\phi)$, claramente $ex = xe = x \;\; \forall x \in T.$

Sea ahora $i : G \hookrightarrow T$ la inclusión; afirmamos que (T, i) es álgebra tensor de G.

Sea A un álgebra sobre K y φ un morfismo de G en A; sea $\varphi_n : G \overset{n}{\overbrace{\times \cdots \times}} G \longrightarrow A$ definido por $\varphi_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots\cdots x_n$; φ_n es multilineal y por la propiedad universal que caracteriza al producto tensorial, existe

$f_n : T_n \longrightarrow A \;\; \ni \;\; f_n \circ \tau_n = \varphi_n$

Sea f un morfismo de T en A que extiende a todos los f_n; demostraremos que f es un morfismo de álgebras.

Si $x, y \in P$, P.D. $f(xy) = f(x) f(y)$

Sean $x = \tau_m(x_1, \dots, x_m)$ y $y = \tau_n(y_1, \dots, y_n)$,

$xy = \tau_{m+n}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$

$f(xy) = (f_{m+n} \circ \tau_{m+n})(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) =$

$= \varphi_{m+n}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = x_1 \cdots x_m \cdot y_1 \cdots y_n =$

$$\varphi_m(x_1,\dots,x_m)\cdot\varphi(y_1,\dots,y_n) = (f_m\circ \mathcal{Z}_m)(x_1,\dots,x_m)\cdot$$
$$\cdot (f_n\circ \mathcal{Z}_n)(y_1,\dots,y_n) =$$
$$= f(x)\cdot f(y).$$

Como $i=\mathcal{Z}_1$, tenemos $f\circ i=\varphi$.

Demostraremos ahora que f es único.

Para ésto, es suficiente demostrar que $i(\mathcal{G})=T_1$ es un conjunto de generadores algebraicos de T.

Sean $x_1,\dots,x_n\in\mathcal{G}$, probaremos

$$i(x_1)\cdots i(x_n) = \mathcal{Z}_n(x_1,\dots,x_n)$$

Ésto es cierto si $n=0$; supongamos que vale para $n-1$.

$$i(x_1)\cdots i(x_n) = i(x_1)\cdots i(x_{n-1})\cdot i(x_n) = \mathcal{Z}_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1})\cdot$$
$$\cdot\,\mathcal{Z}_1(x_n) =$$
$$= \mathcal{Z}_n(x_1,\dots,x_n).$$

Tenemos que la subálgebra T' de T generada por $i(\mathcal{G})$ contiene a P_n $\forall n\geq 0$ y por lo tanto $P\subset T'$; como P es un conjunto de generadores del módulo T, entonces $T'=T$. $\dagger$

§ I.2. ALGEBRA EXTERIOR

Definición I.2.1.

El "álgebra exterior" del álgebra de Lie $\mathcal{G}$ es un álgebra Λ sobre K y un morfismo

$$\psi : \mathcal{G} \longrightarrow \Lambda \quad \ni$$

(i) $\psi(x)^2 = 0 \quad \forall x \in \mathcal{G}$

(ii) Si A es un álgebra sobre K y φ es un morfismo tal que $\varphi(x)^2 = 0 \quad \forall x \in \mathcal{G}$, entonces existe un único morfismo de álgebras
$f : \Lambda \longrightarrow A \ni f \circ \psi = \varphi$.

Lema I.2.1.

Si (Λ, ψ) y (Λ', ψ') son álgebras exteriores del álgebra de Lie $\mathcal{G}$, entonces existe un único isomorfismo $J : \Lambda \longrightarrow \Lambda' \ni J \circ \psi = \psi'$. Mas aún $\psi(M)$ es un conjunto de generadores del álgebra exterior Λ.

Dem:

La demostración es análoga a la del lema I.1.1.

Lema I.2.2 Existencia de (Λ, ψ)

Dem:

Sea (T,θ) el álgebra tensor de $\mathcal{Y}$ y sea F el ideal de T generado por los elementos de la forma $\theta(x)^2$ con $x \in \mathcal{Y}$; sea $\Lambda = T/F$ con π el natural al cociente y $\psi = \pi \circ \theta$.

(Λ, ψ) es el álgebra exterior de $\mathcal{Y}$:

Sea A un álgebra sobre K y $\varphi : \mathcal{Y} \to A$ un morfismo $\ni$ $\varphi(x)^2 = 0$ $\forall x \in \mathcal{Y}$. Como (T,θ) es álgebra tensor, existe $g : T \to A \ni g \circ \theta = \varphi$. Si $x \in \mathcal{Y}$, $g(\theta(x)^2) = \varphi(x^2)^2 = 0 \Rightarrow \theta(x)^2 \in \operatorname{Ker} g$. $\Rightarrow F \subset \operatorname{Ker} g$, entonces por el lema del morfismo existe $f : \Lambda \to A \ni f \circ \pi = g$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, equal] & \Lambda \arrow[r] \arrow[d, dashed, "F"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} g \arrow[r] & T \arrow[r, "g"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Tenemos que $f \circ \psi = f \circ \pi \circ \theta = g \circ \theta = \varphi$.

Como $(\theta(\mathcal{Y}))$ es un conjunto de generadores del álgebra T, $\pi(\theta(\mathcal{Y})) = \psi(\mathcal{Y})$ es un conjunto de generadores de Λ y por lo tanto F es único.

$\dagger$

Observaciones:

1-) El álgebra exterior Λ es anticonmutativa: si $x, y \in \mathcal{Y}$, $\psi(x)^2 = 0 = \psi(y)^2$ y

$0 = \psi(x+y)^2 = \psi(x)^2 + \psi(y) + \psi(x)\psi(y) + \psi(y)\psi(x)$

$\Rightarrow \psi(x)\psi(y) = -\psi(y)\psi(x)$ y como $\psi(\mathcal{Y})$ genera a Λ, se obtiene lo deseado.

2-) Λ es un álgebra graduada con $\mathbb{Z}$ como su grupo de grados. $\Lambda_n = 0$ si $n<0$ y si $n \geq 0$, Λ_n es el conjunto de productos de n elementos en $\Lambda_1 \cong \mathcal{Y}$ y sus combinaciones lineales. Esta graduación es la que se hereda de la del álgebra tensor pues F es un ideal homogéneo.

Definición I. 2. 2.-

Sean M y P dos módulos sobre el mismo anillo conmutativo K y $n \in \mathbb{Z}^+$; si denotamos con M^n a $M \overset{n}{\overbrace{\times \cdots \times}} M$ y $\varphi : M^n \to P$ es una función multilineal, diremos de φ que es "alternada" si $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ siempre que exista un índice $i < n \ni x_i = x_{i+1}$.

Teorema I.2.1.

Sea Λ el álgebra exterior de un algebra de Lie $\mathfrak{g}$, Λ_n el subespacio homogéneo de grado n de Λ y λ un mapeo lineal de Λ_n en P (otro módulo sobre el mismo anillo), entonces

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \lambda(x_1 \cdots x_n), \ (x_i \in \mathfrak{g},\ 1 \leq i \leq n)$$

define un mapeo multilineal alternado de $\mathfrak{g}^n$ en P.

Recíprocamente, si φ es un mapeo multilineal alternado de $\mathfrak{g}^n$ en P, entonces existe una única función lineal λ de Λ_n en $P \ni$

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \lambda(x_1 \cdots x_n) \quad \forall\, x_i \ i = 1, \dots, n.$$

Dem:

La afirmación directa es clara.

Para el recíproco:

Sea (T,θ) el álgebra tensor de $\mathcal{Y}$, existe por lo tanto $f: T \to \Lambda$ morfismo $\ni$ $f\circ\theta = 1_M$ y $\operatorname{Ker} f = \langle \theta(x)^2 \rangle = K$.

Sea T_n el submódulo de elementos homogéneos de grado n de T; f induce un epimorfismo $f_n: T_n \to \Lambda_n$ cuyo Kernel es $K \cap T_n$; Los elementos de K son de la forma $a(\theta(x)^2)b$ con $a,b \in T$. Mas aún, los elementos de T son sumas de elementos en T_j, y por lo tanto $K = \{ a\,\theta(x)^2 b \,,\ a,b \in T_j \ \text{p.a } j \}$.

Si $z \in T_n \cap K$, z es de la forma $\sum_{i=1}^{n} a_i \theta(x_i)^2 b_i$ donde $x_i \in \mathcal{Y}$, $a_i \in T_k$, $b_i \in T_l$ $\ni$ $k+l+2=n$.

Por lo tanto $K \cap T_n = \langle \theta(y_1)\cdots\theta(y_n) \rangle$ con $y_1,\dots,y_n \in \mathcal{Y}$ $\ni$ $y_i = y_{i+1}$ para al menos un índice $i<n$.

Si $\mathcal{Z}_n : \mathcal{Y}^n \to T_n$, $\mathcal{Z}_n(z_1,\dots,z_n) = \theta(z_1)\cdots\theta(z_n)$, entonces existe $\phi: T_n \to P$ $\ni$ $\varphi = \phi\circ\mathcal{Z}_n$ puesto que $(T^n, \mathcal{Z}_n)$ es un producto tensorial de n copias de $\mathcal{Y}$.

Si $y_1,\dots,y_n \in \mathcal{Y}$ $\ni$ $y_i = y_{i+1}$ para al menos un índice $i<n$, entonces $\varphi(y_1,\dots,y_n) = \phi(\theta(y_1)\dots\theta(y_n)) = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Ker}\phi \supset \operatorname{Ker} f_n = T_n \cap K$

$\Rightarrow \exists\, \lambda : \Lambda_n \longrightarrow P \ni \phi = \lambda \circ f_n$.

Si $x_1,\dots,x_n \in \mathcal{Y}$, tenemos:

$$\varphi(x_1,\dots,x_n) = \phi(\tau_n(x_1,\dots,x_n)) = \lambda \circ f_n \circ \tau_n(x_1,\dots,x_n) =$$

$$= \lambda(f_n(\theta(x_1)\cdots\theta(x_n))) = \lambda(x_1\cdots x_n)$$

λ es único pues $\Lambda_n = \langle x_1\cdots x_n \rangle$ con $x_1,\dots,x_n \in \mathcal{Y}$.

$\dagger$

§ I.3. ÁLGEBRA UNIVERSAL ENVOLVENTE.

Definición I.3.1:-

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre K. Un "álgebra universal envolvente" de $\mathfrak{g}$ es una pareja (U, γ) donde U es un álgebra asociativa sobre K y γ un morfismo $\mathfrak{g} \longrightarrow U \ni$

(i) $\gamma(\mathfrak{g})$ genera U

(ii) $\gamma[x,y] = \gamma(x)\gamma(y) - \gamma(y)\gamma(x) \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$

(iii) si (U', γ') es otra pareja que cumple (i) y (ii), entonces existe un único morfismo de álgebras $\phi : U \longrightarrow U' \ni \gamma' = \phi \circ \gamma$.

Observaciones:

1.) La unicidad de ϕ se sigue de (i).

2.) Dos álgebras universales envolventes de $\mathfrak{g}$ son isomorfas; ésto es análogo a los lemas I.1.1. y I.2.1.

Teorema I.3.1.- Existencia de (U,γ)

Dem:

Sea $(T,\otimes)$ el álgebra tensor de $\mathcal{G}$. (Como $\otimes$ puede ser considerada una inclusión $\mathcal{G}\subset T$, nos referiremos a T como el álgebra tensor de $\mathcal{G}$).

Sean $x,y\in\mathcal{G}$, denotamos por $v_{x,y}$ a

$$v_{x,y} = x\cdot y - y\cdot x - [x,y] \in T$$

Sea $\mathcal{L}$ el submódulo de T generado por los elementos de la forma $t\cdot v_{x,y}\cdot t'$ $(x,y\in\mathcal{G},\ t,t'\in T)$ i.e.

$$\mathcal{L} = \sum_{x,y\in\mathcal{G}} T\cdot v_{x,y}\cdot T .$$

Como $v_{x,y}\in T_1+T_2$ $\forall x,y\in\mathcal{G}$, $\mathcal{L}\subseteq\sum_{m\geq 1} T_m$.

$\mathcal{L}$ es un ideal bilateral propio de T, consideramos $U = T/\mathcal{L}$ y $\gamma: T\longrightarrow U$ la proyección canónica. Denotamos con γ también a la composición $\mathcal{G}\xrightarrow{i} T\xrightarrow{\gamma} U$.

Como $\mathcal{G}$ genera T, $\gamma(\mathcal{G})$ genera a U y se cumple la condición (i)

Como $\gamma(v_{x,y})=0$ (pues $v_{x,y}\in\mathcal{L}$),

$$\gamma(x\cdot y - y\cdot x - [x,y]) = \gamma(x)\gamma(y) - \gamma(y)\gamma(x) - \gamma[x,y] = 0$$

y se cumple (ii).

Sea (U', γ') otra pareja que cumple (i) y (ii),

Sea $\overline{\gamma'} : T \to U \ni \overline{\gamma'}(x) = \gamma(x) \ \forall x \in \mathfrak{g}$, es decir $\overline{\gamma'}$ es el morfismo que arroja la caracterización universal del álgebra tensor T.

Se tiene que $\overline{\gamma'}(v_{x,y}) = \overline{\gamma'}(x\cdot y - y\cdot x - [x,y]) = 0$ por lo tanto $\overline{\gamma'} = 0$ en $\mathcal{L}$.

El paso al cociente $\phi : U \to U' \ni \overline{\gamma'} = \phi \circ \gamma$ termina la demostración. +

<u>observación:</u>

Si $\mathfrak{g}$ es abeliana (i.e: $[x,y]=0 \ \forall x,y \in \mathfrak{g}$), U es el álgebra simétrica de $\mathfrak{g}$. Referencia: [8].

A continuación enunciaremos tres teoremas importantes relacionados con (U,γ), el primero de ellos, el teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, es fundamental en el estudio de las álgebras de Lie pues constituye la principal herramienta para convertir problemas de álgebras de Lie en problemas de álgebras asociativas. Este teorema es generalmente enunciado para álgebras de Lie sobre un campo; sin-embargo para nuestros fines será necesario para álgebras de Lie sobre un anillo con unitario; la restricción necesaria es que $\mathcal{G}$ sea un módulo libre.

La demostración de estos teoremas requiere de un desarrollo más amplio que no será considerado aquí; como referencias damos [5] y [8].

<u>Teorema I.3.2.-</u> (Poincaré - Birkhoff - Witt).
~~Sea~~ $\mathcal{G}$ un álgebra de Lie sobre K (anillo con 1) que es un K-módulo libre, J un conjunto lineal mente ordenado, $\{X_i ; i \in J\}$ una base de $\mathcal{G}$, (U, γ) el álgebra universal envolvente de $\mathcal{G}$. Entonces los elementos de la forma

1 y $\gamma(X_{i_1})\cdots\gamma(X_{i_n})$ $(n\geq 1,\ i_1\leq\cdots\leq i_n)$ forman una base para U; en particular γ es una inyección.

Teorema I.3.3:

$\mathcal{G}$, (U,γ) como en el anterior;

(i) sea (π, V) una representación de $\mathcal{G}$ en V; entonces existe una única representación π' de U en V $\ni$ $\pi(x)=\pi'(x)$ $\forall x\in\mathcal{G}$. En otras palabras π se extiende en forma única a U

(ii) Sea α un automorfismo (antiautomorfismo) de $\mathcal{G}$. Entonces existe un único automorfismo (antiautomorfismo) $\tilde{\alpha}$ de U que extiende a α. $\tilde{\alpha}^{-1}=\widetilde{\alpha^{-1}}$ y si α,β son dos automorfismos (antiautomorfismos) de $\mathcal{G}$, entonces $\widetilde{\alpha\beta}=\tilde{\alpha}\tilde{\beta}$.

(iii) Sea D una derivación de $\mathcal{G}$; entonces existe una única derivación $\tilde{D}$ de U que extiende a D. Si D_1 y D_2 son dos derivaciones de $\mathcal{G}$, entonces $\widetilde{[D_1,D_2]}=[\tilde{D}_1,\tilde{D}_2]$; en particular

$\forall x \in \mathfrak{g}$, $\widetilde{ad\,x}$ es la derivación $a \mapsto xa - ax$ de U.

Teorema I.3.4:

Sean $\mathfrak{g}$ y (U, σ) como antes; entonces si $\mathfrak{a}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ y si $\mathcal{B}$ es la subálgebra de U generada por $\mathfrak{a}$, entonces $\mathcal{B}$ y la inyección $\mathfrak{a} \subset \mathcal{B}$ es álgebra universal envolvente de $\mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{a}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ y $\mathcal{B} = U\mathfrak{a}U$, entonces $\mathcal{B}$ es un ideal bilateral de U y $U/\mathcal{B}$ junto con el mapeo natural de $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ en $U/\mathcal{B}$ es álgebra universal envolvente de $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$.

A continuación filtraremos el álgebra U y enunciaremos un teorema importante relacionado con ésta filtración.

El álgebra tensor T es un álgebra graduada de forma natural: $T_n = \overbrace{\mathfrak{g} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{g}}^{n}$; definimos una filtración natural

$$T^{(m)} = \sum_{0 \leq k \leq m} T_k \quad \text{en } T.$$

Sea γ el morfismo (U,γ) , $\gamma : T \to U$;
el kernel de γ es el ideal generado por los elementos de la forma $X\otimes Y - Y\otimes X - [X,Y]$.
Este ideal no es homogéneo (i.e. $I \neq \sum_{m\geq 1} I \cap T_m$)
y por lo tanto U puede no ser graduada, pero sí es filtrada con $U^{(n)} = \gamma(T^{(n)})$ $(n\geq 0)$.

<u>Teorema I.3.5:</u>

(i) $U^{(0)} = K\cdot 1$; $U^{(1)} = U^{(0)} \oplus \mathfrak{g}$; $\forall n \geq 0$

$$U^{(n)} = \langle 1, z_1 \cdots z_s \rangle \text{ con } 1 \leq s \leq n \text{ y } z_i \in \mathfrak{g} \ \forall i.$$

(ii) Si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es base de $\mathfrak{g}$, los elementos de la forma $x_1^{r_1} \cdots x_m^{r_m}$ con $r_1 + \ldots + r_m \leq n$ forman una base de $U^{(n)}$.

(iii) Si $\overline{U}$ es el álgebra graduada asociada a U, entonces $\overline{U}$ es conmutativa; más aún, el mapeo natural $x \mapsto \overline{x}$ de $\mathfrak{g} \subseteq U^{(1)}$ en $\overline{U}$ se extiende a un isomorfismo de álgebras de S, el álgebra simétrica de $\mathfrak{g}$, sobre $\overline{U}$.

CAPÍTULO II

CONSTRUCCIONES Y COHOMOLOGÍA

§ II.1 PRELIMINARES SOBRE COMPLEJOS

Para el estudio de la cohomología de álgebras de Lie, es necesario tener un complejo libre y acíclico. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre un anillo K.

Definición II.1.1.-

Un complejo C es un K-módulo unitario que cumple:

1.) $C = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} C_p$ con C_p submódulos y $C_p = 0$ si $p<0$.

2.) Hay en C un operador lineal d ∋

$$d\,C_p \subset C_{p-1} \quad y \quad d^2 = d \circ d = 0$$

3.) Hay un proyector ε de C_0 en un subespacio de dimensión 1 de C_0 ∋

$$\varepsilon \circ d = 0 \qquad (y \therefore d \circ \varepsilon = 0) \quad y$$

ε se extiende a C_p como el morfismo cero en $p>0$.

Definición II.1.2.-

Si $a \in C_p$ es tal que $da=0$, a será llamado un "p-ciclo."

Si $a \in C_p$ es tal que $a=db$ para algún $b \in C_{p+1}$, a será llamado una "p-frontera."

Como notación: $Z_p = \{p\text{-ciclos}\}$, $B_p = \{p\text{-fronteras}\}$.

Observaciones:

1-) Claramente toda frontera es un ciclo pues $d^2=0$. Recíprocamente si los ciclos anulados por ε son fronteras, C será llamado un "complejo acíclico".

2-) Para mostrar que un complejo C es acíclico, una forma sencilla es construir un "operador de homotopía" k en C ∋:

$$k C_p \subset C_{p+1} \quad \text{y} \quad kd+dk = 1-\varepsilon.$$

En ese caso tendríamos $(kd+dk)(a) = a - \varepsilon a$

$\Rightarrow a = d(ka)$ si a es ciclo anulado por ε.

Lema II.1.1:

Si C' y C'' son complejos con operadores d', d'', ε' y ε'', entonces $C = C' \otimes_K C''$, $d = d' \otimes 1 + \alpha \otimes d''$ (α el operador $\sum c_p \mapsto \sum (-1)^p c_p$), $\varepsilon = \varepsilon' \otimes \varepsilon''$ y $C_p = \sum_{r=0}^{p} C_r' \otimes C_{p-r}''$, constituyen un complejo. Mas aún si C' y C'' son acíclicos, C es acíclico.

Dem:

i-) $C = \bigoplus_p C_p$ claramente.

ii-) $d\, C_p = (d' \otimes 1 + \alpha \otimes d'')(\sum_{r=0}^{p} C_r' \otimes C_{p-r}'') =$

$= \sum_{r=0}^{p} (d' \otimes 1)(C_r' \otimes C_{p-r}'') + \sum_{r=0}^{p} (\alpha \otimes d'')(C_r' \otimes C_{p-r}'') =$

$= \sum_{r=0}^{p} d' C_r' \otimes C_{p-r}'' + \sum_{r=0}^{p} \alpha C_r' \otimes d'' C_{p-r}''$

Como $d' C_r' \subset C_{r-1}'$; $\alpha C_r' \subset C_r'$ y $d'' C_{p-r}'' \subset C_{p-r-1}''$,

$d C_p \subset \sum_{r=0}^{p} C_{r-1}' \otimes C_{p-r}'' + \sum C_r' \otimes C_{p-r-1}'' =$

$= \sum_{s=0}^{p-1} C_s' \otimes C_{p-s}'' = C_{p-1}$

iii-) si $a = \sum_p c_p'$ con $c_p' \in C_p'$,

$(d'\alpha + \alpha d')(a) = (d'\alpha)(\sum_p c_p') + (\alpha d')(\sum_p c_p') =$

$= d'(\sum_p (-1)^p c_p') + \alpha(\sum_p d' c_p') =$

$= \sum (-1)^p d c_p' + \sum (-1)^{p-1} d c_p' = 0$

$\Rightarrow d^2 = d'^2 \otimes 1 + d'\alpha \otimes d'' + \alpha d' \otimes d'' + \alpha\alpha \otimes d''^2 =$

$= (d'\alpha + \alpha d') \otimes d'' = 0$

(IV.) $\varepsilon d = (\varepsilon' \otimes \varepsilon'')(d' \otimes 1 + \alpha \otimes d'') = \varepsilon' d' \otimes \varepsilon'' +$
$+ \varepsilon' \alpha \otimes \varepsilon'' d'' = 0$

C es un complejo.

Si C' y C'' son acíclicos, existen k' y k'' operadores de homotopía en C' y C'' ∋:

$k' C_p' \subset C'_{p+1}$, $k'' C_p'' \subset C''_{p+1}$, $k'd' + d'k' = 1 - \varepsilon'$ y
$k''d'' + d''k'' = 1 - \varepsilon''$.

Sea $k = k' \otimes 1 + \varepsilon' \otimes k''$

Si $\sum_r c_r' \otimes c''_{p-r} \in C_p$,

$k(\sum_r c_r' \otimes c''_{p-r}) = (k' \otimes 1 + \varepsilon' \otimes k'')(\sum_r c_r' \otimes c''_{p-r}) =$
$= \sum_r k' c_r' \otimes c''_{p-r} + \sum_r \varepsilon' c_r' \otimes k'' c''_{p-r} \in C_{p+1}$.

También

$kd + dk = (k' \otimes 1 + \varepsilon' \otimes k'')(d' \otimes 1 + \alpha \otimes d'') + (d' \otimes 1 + \alpha \otimes d'')(k' \otimes 1 + \varepsilon' \otimes k'')$
$= k'd' \otimes 1 + k'\alpha \otimes d'' + \varepsilon' d' \otimes k'' + \varepsilon' \alpha \otimes k''d'' + d'k' \otimes 1 +$
$+ d'\varepsilon' \otimes k'' + \alpha k' \otimes d'' + \alpha \varepsilon' \otimes d''k'' =$
$= (k'd' + d'k') \otimes 1 + (k'\alpha + \alpha k') \otimes d'' + (\varepsilon' d' + d'\varepsilon') \otimes k'' +$
$\alpha \varepsilon' \otimes d''k'' + \varepsilon' \alpha \otimes k''d'' =$
$= (1 - \varepsilon') \otimes 1 + \varepsilon' \otimes (1 - \varepsilon'') = 1 \otimes 1 - \varepsilon' \otimes 1 + \varepsilon' \otimes 1 - \varepsilon' \otimes \varepsilon''$
$= 1 - \varepsilon$ y C es acíclico

+

Lema II.1.2.-

Sea A un grupo abeliano dotado de un endomorfismo d ∋ $d^2=0$ y B un subgrupo estable bajo d. Si dotamos a A/B del morfismo $\bar{d}$ de paso al cociente de d, entonces si B y A/B son acíclicos, A también lo es.
(suponemos $\varepsilon=0$).

Dem:

Hay que demostrar que todo ciclo es frontera en A.
Sea $\bar{a} \in A/B$ y supongamos $da=0$ (en A)
$\Rightarrow \bar{d}\bar{a} = \overline{da} = 0 \Rightarrow \bar{a}$ es ciclo en A/B y por lo tanto, por hipótesis, una frontera en A/B.
$\Rightarrow \exists\ \bar{b} \in A/B$ ∋ $\bar{d}\bar{b} = \bar{a}$ i.e. $a-db \in B$, pero $a-db$ es ciclo en B pues $d(a-db)=0$
$\Rightarrow a-db$ es frontera en $B \Rightarrow \exists\, c \in B$ ∋ $dc = a-db \Rightarrow a = dc+db = d(b+c) \Rightarrow a$ es frontera en A.

$\dagger$

Definición II.1.3:-

Un complejo C será llamado un U-complejo si es también un U-módulo izquierdo, los submódulos C_p son U-submódulos de C y d y ε son U-morfismos. El complejo C será U-libre si los C_p tienen una base sobre el anillo U.

El complejo que vamos a construir tendrá una estructura adicional, a saber, será una K-álgebra. La multiplicación en C mandará $C_p \times C_q$ en C_{p+q} y el morfismo d será una antiderivación, es decir

$$d(cc') = dc \cdot c' + \kappa(c) \cdot dc' \qquad c, c' \in C.$$

Si el complejo resulta libre, para checar alguna propiedad en C bastará hacerlo en un conjunto de generadores, así por ejemplo tenemos el siguiente

Lema II.1.3:-

Sea C una K-álgebra y S un sistema de generadores de C; un operador lineal d será una antiderivación en C siempre que se tenga

$$d(cc') = dc\cdot c' + \alpha(c)\cdot dc'$$

$\forall\, c \in C$ y $c' \in S$.

Dem:

Sea $T = \{c' \in S \ni d(c\cdot c') = dc\cdot c' + \alpha(c)\cdot dc' \ \forall c \in C\}$.

T es K-módulo: $a \in K$, c' y $c'' \in T$,

$$d(c\,(ac'+c'')) = d(acc' + cc'') = d(acc') + d(cc'') =$$

$$= a\,d(cc') + d(cc'') = a(dc\cdot c' + \alpha(c)dc') + dc\cdot c'' + \alpha(c)dc''$$

$$= dc\,(ac'+c'') + \alpha(c)\,(d\,(ac'+c''))$$

$$\Rightarrow ac'+c'' \in T$$

T es subálgebra: c' y $c'' \in T$,

$$d(c\,c'c'') = d(cc'\cdot c'') = d(cc')\cdot c'' + \alpha(cc')\,dc'' =$$

$$= (dc\cdot c' + \alpha(c)\,dc')\,c'' + \alpha(c)\,\alpha(c')\,dc'' =$$

$$= (dc)\,(c'c'') + \alpha(c)\,(dc' + \alpha(c')\,dc'') =$$

$$= (dc)\,(c'c'') + \alpha(c)\,d(c'c'') \quad \Rightarrow c'c'' \in T$$

Como $T \supset S$, $T = C$ $\qquad +$

§ II.2. CONSTRUCCIÓN DEL COMPLEJO.

Construiremos C en dos etapas: primero C y su estructura de álgebra, sus submódulos, y luego el operador d.

Sea A una K-álgebra unitaria; suponemos dado un homomorfismo $x \xmapsto{\theta} \theta(x)$ de $\mathcal{G}$ en el álgebra de Lie de las derivaciones de A.

Sea U el álgebra universal envolvente de $\mathcal{G}$ y sea $C = U \otimes_K A$. Identificamos $u \in U$ con $u \otimes 1 \in C$ y $a \in A$ con $1 \otimes a \in C$.

Teorema II.2.1.-

En C existe un producto que hace de C una K-álgebra y tal que $u \otimes a = u \cdot a$ y si $x \in \mathcal{G}$, $\theta(x)a = x \cdot a - a \cdot x$.

Dem:

Sean $\psi : \mathcal{G} \to \mathrm{End}(U)$; $\psi(x)(u) = ux$ $(x \in \mathcal{G}, u \in U)$

$\psi' : \mathcal{G} \to \mathrm{End}(A)$; $\psi'(x)(a) - \theta(x)a$ $(x \in \mathcal{G}, a \in A)$

(Nótese que en la definición de ψ hemos hecho uso de que $\mathcal{G} \subset U$ y U es un álgebra asociativa, de ahí el sentido de ux.).

Tanto ψ como ψ' son antirepresentaciones de $\mathcal{G}$: son lineales y si $x, y \in \mathcal{G}$, $u \in U$ y $a \in A$:

$$\psi[x,y]u = u[x,y] = uxy - uyx = \psi(y)\psi(x)u - \psi(x)\psi(y)u.$$

$$\psi'[x,y]a = -\theta[x,y]a = -(\theta(x)\theta(y) - \theta(y)\theta(x))\, a =$$

$$= (\theta(y)\theta(x) - \theta(x)\theta(y))\, a = \psi'(y)\psi'(x)a - \psi'(x)\psi'(y)a.$$

Formamos el producto tensorial $\psi \otimes \psi'$

$\psi \otimes \psi' : \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{End}(U \otimes A)$ que también es una antirepresentación:

$$(\psi \otimes \psi')[x,y](u \otimes a) = \psi[x,y]u \otimes a + u \otimes \psi'[x,y]a =$$

$$= (\psi(y)\psi(x) - \psi(x)\psi(y))u \otimes a + u \otimes (\psi'(y)\psi'(x) - \psi'(x)\psi'(y))a =$$

$$= \psi(y)\psi(x)u \otimes a - \psi(x)\psi(y)u \otimes a + u \otimes \psi'(y)\psi'(x)a - u \otimes \psi'(x)\psi'(y)a =$$

$$= \psi(y)\psi(x)u \otimes a - \psi(x)\psi(y)u \otimes a + u \otimes \psi'(y)\psi'(x)a - u \otimes \psi'(x)\psi'(y)a +$$

$$+ u \otimes \psi'(y)1 - u \otimes \psi'(x)1 + \psi(y)1 \otimes a - \psi(x)1 \otimes a =$$

$$= (\psi \otimes \psi')(y)(\psi \otimes \psi')(x)(u \otimes a) - (\psi \otimes \psi')(x)(\psi \otimes \psi')(y)(u \otimes a)$$

$$\Rightarrow (\psi \otimes \psi')[x,y] = (\psi \otimes \psi')(y)(\psi \otimes \psi')(x) - (\psi \otimes \psi')(x)(\psi \otimes \psi')(y).$$

Lo que tenemos es:

$$(\psi \otimes \psi')(x)(u \otimes a) = ux \otimes a - u \otimes \theta(x)a.$$

Extendemos ahora esta antirepresentación a una representación lineal derecha de U en C de la siguiente manera:

$\varphi : U \to End(U \otimes A)$ def por:

$\varphi(x_1 \cdots x_n) = (\psi \otimes \psi')(x_n) \circ \cdots \circ (\psi \otimes \psi')(x_1)$

donde $x_1 \cdots x_n$ es un generador de U. (recordemos que si $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una colección de generadores de $\mathcal{G}$, entonces los monomios estándar $x_{s_1}, \cdots x_{s_n}$ con $s_1 \leq \cdots \leq s_n$ y $\{x_{s_j}\}_{j=1}^{n} \subset \{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. forman un conjunto de generadores de U.).

En efecto, φ es representación lineal derecha pues es lineal por construcción, $\varphi(1) = 1_C$ y

$\varphi(vw)(u \otimes a) = \varphi(w)\varphi(v)(u \otimes a)$ con $u, v \in U$ y $a \in A$.

Por otro lado definimos una representación lineal derecha de A en C de la siguiente manera: $\rho : A \longrightarrow End(U \otimes A)$ def por:

$\rho(a)(u \otimes b) = u \otimes ba$. $a, b \in A$, $u \in U$.

Claramente $\rho(1) = 1_C$ y

$\rho(ac)(u\otimes b) = u\otimes bac = \rho(c)\rho(a)(u\otimes b)$

Por último definimos un operador

$$\pi : C\times C \to C \quad \text{así:}$$

$\pi(u\otimes a) = \rho(a)\circ\varphi(u)$.

Demostraremos que la asignación

$$u\otimes a \longmapsto \pi(u\otimes a)$$

es una biyección entre C y la familia de operadores $\{\pi(c)\}_{c\in C}$.

Sea $c = u\otimes a$ con $a\in A$ y $u = x_1\cdots x_n$ generador de U. Si

$$\pi(c)(1\otimes 1) = (\rho(a)\circ\varphi(u))(1\otimes 1) =$$

$$= \rho(a)(\varphi(x_1\cdots x_n)(1\otimes 1))$$

$$= \rho(a)((\psi\otimes\psi')(x_n)\circ\cdots\circ(\psi\otimes\psi')(x_1)(1\otimes 1)) =$$

$$= \rho(a)(x_1\cdots x_n\otimes 1) = x_1\cdots x_n\otimes a = c$$

entonces $\pi(c)(1\otimes 1) = c \Rightarrow$ la asignación es inyectiva pues si $\pi(c) = 0 \Rightarrow \pi(c)(1\otimes 1) = c = 0$. Como asignamos en la imágen, la asignación es biyección.

Demostraremos ahora que la familia $\{\pi(c)\}_{c\in C}$ es un álgebra.

Para demostrar que $\{\pi(c)\}_{c\in C}$ es cerrada bajo la multiplicación a la izquierda, basta probar que es cerrada sólo por los $\rho(a)$ y los $\varphi(u)$ (por construcción) y, más aún, sólo por los $\rho(a)$ y los $(\psi\otimes\psi')(x)$ (pues U está algebraicamente generada por $\mathcal{G}$ y φ está construída como extensión algebráica a U).

Sean, entonces, $x\in\mathcal{G}$, $a,b\in A$ y $u\in U$:

$$\rho(a)\cdot\pi(u\otimes b)=\rho(a)\circ(\rho(b)\circ\varphi(u))=\rho(a)\circ\rho(b)\circ\varphi(u)=$$
$$=\rho(ba)\cdot\varphi(u)=\pi(u\otimes ba).$$

$$(\psi\otimes\psi')(x)\circ\pi(u\otimes b)=(\psi\otimes\psi')(x)\circ(\rho(b)\circ\varphi(u))=$$
$$=[(\psi\otimes\psi')(x)\circ\rho(b)]\circ\varphi(u)=[\rho(b)\circ(\psi\otimes\psi')(x)-$$
$$-\rho(\theta(x)b)]\circ\varphi(u)=$$
$$=\rho(b)\circ(\psi\otimes\psi')(x)\circ\varphi(u)-\rho(\theta(x)b)\circ\varphi(u)=$$
$$=[\rho(b)\circ(\varphi(ux))]-\rho(\theta(x)b)\circ\varphi(u)=$$
$$=\pi(ux\otimes b)-\pi(u\otimes\theta(x)b)$$

Entonces C es isomorfo como módulo al módulo $\{\pi(c)\}_{c\in C}$ que además es álgebra. Dotando del único producto en C que hace de ese isomorfismo de módulos un isomorfismo de álgebras, obtenemos lo deseado.

En efecto C es ya un álgebra, solo resta checar la última afirmación; Sean $v \in V, a \in A$:

$$va = (v\otimes 1)(1\otimes a) = \pi^{-1}(\pi(1\otimes a)\circ\pi(v\otimes 1)) =$$

$$= \pi^{-1}(\rho(a)\circ\varphi(1)\circ\rho(1)\circ\varphi(v)) = \pi^{-1}(\rho(a)\circ\varphi(v)) =$$

$$= \pi^{-1}(\pi(v\otimes a)) = v\otimes a$$

Si $x \in \mathcal{G}, a \in A$:

$$xa - ax = (x\otimes 1)(1\otimes a) - (1\otimes a)(x\otimes 1) =$$

$$= \pi^{-1}(\pi(1\otimes a)\circ\pi(x\otimes 1)) - \pi^{-1}(\pi(x\otimes 1)\circ\pi(1\otimes a)) =$$

$$= \pi^{-1}(\rho(a)\circ\varphi(1)\circ\rho(1)\circ\varphi(x) - \rho(1)\circ\varphi(x)\circ\rho(a)\circ\varphi(1)] =$$

$$= \pi^{-1}(\rho(a)\circ\varphi(x) - \varphi(x)\rho(a)] = \pi^{-1}(\rho(a)\circ(\psi\otimes\psi')(x)) -$$

$$- \pi^{-1}((\psi\otimes\psi')(x)\circ\rho(a)) =$$

$$= \pi^{-1}(\rho(a)\circ(\psi(x)\otimes 1 + 1\otimes\psi'(x)) - (\psi(x)\otimes 1 + 1\otimes\psi'(x))\circ\rho(a))$$

$$= \pi^{-1}(\psi(x)\otimes a - 1\otimes\theta(x)(\cdot)a - (\psi(x)\otimes 1 - 1\otimes\theta(x)(\cdot a))) =$$

$$= \pi^{-1}(1\otimes\cdot\ \theta(x)a) = \pi^{-1}(\rho(\theta(x)a)\circ\varphi(1)) =$$

$$= \pi^{-1}(\pi(1\otimes\theta(x)a)) = 1\otimes\theta(x)a = \theta(x)a. \quad \dagger$$

<u>observación:</u>

Se puede pensar a π como una representación lineal derecha de C en los operadores de C.

Lema II.2.1.-

Sea Λ el álgebra exterior del módulo subyacente a $\mathcal{G}$, B un álgebra asociativa que contiene a Λ como subálgebra y con misma unidad. Para que una aplicación lineal $h : \Lambda^1 = \mathcal{G} \longrightarrow B$ se extienda a una antiderivación de Λ en B, es necesario y suficiente que x conmute con $h(x)$ $\forall x \in \mathcal{G}$.

Dem:

$\Rightarrow$-) sea $d : \Lambda \to B$ una antiderivación que extiende a $h : \mathcal{G} \to B$;

Como $x^2 = 0$ en Λ, si $x \in \mathcal{G}$:

$$0 = d(0) = d(x^2) = d(x \cdot x) = dx \cdot x + \alpha(x)\, dx =$$
$$= h(x) \cdot x - x \cdot h(x) \quad \text{pues } \alpha(x) = -x \text{ y}$$
$$d/_{\mathcal{G}} = h.$$

$\Leftarrow$-) Tenemos una aplicación lineal $h : \mathcal{G} \to B$

Sea $\bar{h} : \mathcal{G}^n \longrightarrow B$ así:

$$\bar{h}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_1 \cdots x_{i-1} h(x_i) x_{i+1} \cdots x_n .$$

$\bar{h}$ es lineal y también es alternada:

Si $x_j = x_{j+1}$ en $\mathcal{G}$ y recordando que $x_j^2 = 0$:

$\bar{h}(x_1,\dots,x_j,x_{j+1},\dots,x_n)=$

$$= \sum_{i\neq j,j+1} (-1)^{i-1} x_1\cdots x_{i-1}\, h(x_i)\, x_{i+1}\cdots x_n + (-1)^{j-1} x_1\cdots x_{j-1} h(x_j)\, x_j\cdot x_{j+2}\cdots x_n$$
$$+(-1)^j x_1\cdots x_j\, h(x_j)\, x_{j+2}\cdots x_n =$$

$= \pm\, x_1\cdots x_{j-1}\,[h(x_j),x_j]\, x_{j+2}\cdots x_n = 0$ pues por hipótesis $[h(x_j),x_j]=0$ $\Rightarrow$ $\bar{h}$ es alternada.

Esto da lugar a la existencia de una aplicación lineal $d:\Lambda^n \longrightarrow B$ (Teorema I.2.1) $\ni$

$d(x_1\cdots x_n) = \bar{h}(x_1,\dots,x_n)$ y $d(1)=0$ si $n=0$

Esta aplicación es una antiderivación de Λ en B: si $a = x_1\cdots x_n$ y $x = x_{n+1}$ $(x_i \in \mathcal{G})$,

$$d(ax) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_1\cdots x_{i-1}\, h(x_i)\, x_{i+1}\cdots x_n\cdot x_{n+1} +$$
$$+ (-1)^n x_1\cdots x_n\, h(x_{n+1}) = (da)\,x + (-1)^n d x =$$

$= da\cdot x + \alpha(a)\, dx$; como $\mathcal{G}$ genera a Λ, por el lema II.1.3, obtenemos lo deseado.

$\dagger$

Ahora tomamos $A=\Lambda$ en lo anterior, es decir $C = U\otimes\Lambda$ y consideramos $\theta(x)$ la extensión a Λ de la representación adjunta de $\mathcal{G}$:

si $\lambda \in \Lambda$, $\lambda = \sum_{j=1}^{m} x_{j_1} \cdots x_{j_j} \in \Lambda$, $x \in \mathfrak{g}$:

$\theta(x)(\lambda) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{j} (x_{j_1} \cdots (\operatorname{ad} x(x_{j_l})) \cdots x_{j_j})$ si

$m = \dim \mathfrak{g}$.

Para evitar confusiones usaremos la siguiente notación: $x \in \mathfrak{g}$, $x \in \Lambda$ y $\underline{x} \in U$ es decir, considerar a x como elemento de Λ ó como elemento de U. Asimismo no explicitaremos la multiplicación usada en ningún caso, el contexto hará claro si se trata de la ley de composición de U, Λ ó C.

Lema II.2.2.

Si $x, y \in \mathfrak{g}$, tenemos:

(i) $\underline{x}\,\underline{y} - \underline{y}\,\underline{x} = \underline{[x,y]}$, (ii) $\underline{x}\, y - y\, \underline{x} = \theta(x)\, y = [x,y]$,

(iii) $xy + yx = 0$ y (iv) $x^2 = 0$.

Dem:

(i) es sólo el producto de Lie en $\mathfrak{g} \subset U$.

(ii) consecuencia inmediata del teorema II.2.1 y la definición de θ.

(iii) Ésto es propiedad del álgebra exterior.

(IV-) Esto también es propiedad del álgebra exterior. $+$

Observación:

Los x y los $\underline{x}$ $(x \in \mathcal{G})$ generan algebraicamente a C.

Teorema II.2.2.

En C existe un operador d ∋ si $C_p = U \otimes \Lambda^p$ se tiene:
(i) $dC_p \subset C_{p-1}$, (ii) $d^2 = 0$ y (iii) d es una antiderivación en C.

Dem:

Sea $h: \mathcal{G} \to C$ la inyección $\mathcal{G} \subset U \subset C$, i.e: $h(x) = \underline{x}$

Como $0 = [x, x] = x\underline{x} - \underline{x}x = x h(x) - h(x) x$ por el lema II.2.2.(ii), entonces aplicamos el lema II.2.1 y obtenemos una extensión $w: \Lambda \to C$ de h que es una antiderivación.

Extendemos ahora w a C definiendo

$d: C \longrightarrow C$ por $d(u \otimes a) = u\, w(a)$ con
$u \in U$ y $a \in \Lambda$.

Nótese que si $x \in \mathcal{Y}$, $d\underline{x} = d(x \otimes 1) = x \cdot w(1) = x \cdot 0 = 0$

Para ver que se cumple que d es una antideri-vación en C, basta checar que se cumple para un producto por la derecha de x y $\underline{x}$, i.e

(1) $d(uax) = d(ua)\, x + \alpha(ua)\, dx$ y

(2) $d(ua\underline{x}) = d(ua)\, \underline{x} + \alpha(ua)\, d\underline{x}$ $(u \in U, a \in \Lambda, x \in \mathcal{Y})$.

Para la primera notamos que $\alpha(ua) = u\,\alpha(a)$ pues $C_p = U \otimes \Lambda^p$ y obtenemos:

$$d(uax) - d(ua)\,x - \alpha(ua)\,dx =$$
$$= u\,w(ax) - u\,w(a) \cdot x - u\,\alpha(a)\,w(x) =$$
$$= u\,(w(ax) - w(a) \cdot x - \alpha(a)\,w(x)) = u(0) = 0$$

Para la segunda

$$d(ua\underline{x}) - d(ua)\,\underline{x} - \alpha(ua)\,d\underline{x} =$$
$$= u\,(d(a\underline{x}) - w(a) \cdot \underline{x}) \quad \text{pues } d\underline{x} = 0$$

Para que d resulte antiderivación, i.e, para que se cumpla (2), es necesario que

$$d(a\underline{x}) = w(a) \cdot \underline{x}.$$

Para ésto, definimos una derivación en C

que extienda a $\theta(x)$; llamemosle también θ: $\theta(x)(c) = \underline{x}c - c\underline{x}$ extiende a θ.

Consideramos la aplicación

$(w\theta(x) - \theta(x)w) : \Lambda \to C$ es una anti-derivación: si $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, $x \in \mathcal{G}$:

$$(w\theta(x) - \theta(x)w)(\lambda_1 \cdot \lambda_2) = w\theta(x)(\lambda_1 \cdot \lambda_2) - \theta(x)w(\lambda_1 \cdot \lambda_2) =$$
$$= w[\theta(x)\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_1 \cdot \theta(x)\lambda_2] - \theta(x)[w\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \alpha(\lambda_1) \cdot w\lambda_2] =$$
$$= w\theta(x)\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \alpha(\theta(x)\lambda_1) \cdot w\lambda_2 + w\lambda_1 \cdot \theta(x)\lambda_2 +$$
$$+ \alpha(\lambda_1) \cdot w(\theta(x)\lambda_2) - \theta(x)w\lambda_1 \cdot \lambda_2 - w\lambda_1 \cdot \theta(x)\lambda_2 -$$
$$- \theta(x)\alpha(\lambda_1) \cdot w\lambda_2 - \alpha(\lambda_1) \cdot \theta(x)w\lambda_2 =$$
$$= (w\theta(x)\lambda_1 - \theta(x)w\lambda_1) \cdot \lambda_2 + \alpha(\lambda_1) \cdot (w\theta(x)\lambda_2 - \theta(x)w\lambda_2)$$
$$+ (\alpha(\theta(x)\lambda_1) - \theta(x)\alpha(\lambda_1)) \cdot w\lambda_2 =$$
$$= (w\theta(x) - \theta(x)w)\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \alpha(\lambda_1) \cdot (w\theta(x) - \theta(x)w)\lambda_2$$

pues $\theta(x)\alpha = \alpha\theta(x)$ en C.

La antiderivación $w\theta(x) - \theta(x)w$ se anula en $\Lambda^1 = \mathcal{G}$: $(w\theta(x) - \theta(x)w)(y) = w\theta(x)y - \theta(x)wy =$ $w[x,y] - \theta(x)\underline{y} = w[x,y] - (\underline{x}\,\underline{y} - \underline{y}\,\underline{x}) = \underline{[x,y]} - (\underline{x}\,\underline{y} - \underline{y}\,\underline{x}) = 0$

Como $\mathcal{G}$ genera Λ, $w\theta(x) = \theta(x)w$ en Λ

Tenemos entonces: $x \in \mathcal{Y}$, $a \in \Lambda$,

$$d(a\underline{x}) = d(\underline{x}a - \theta(x)a) = d(\underline{x}a) - d\theta(x)a =$$
$$= d(\underline{x}a) - w\theta(x)a = \underline{x}wa - \theta(x)wa = wa \cdot x$$

pues por definición $\theta(x)wa = \underline{x}wa - wa\underline{x}$.
Aplicando a las igualdades (1) y (2) el lema II.1.3, obtenemos (iii).

Para ver (ii); $x \in \mathcal{Y}$,

$$d^2 x = d(dx) = d\underline{x} = 0 \quad y \quad d^2\underline{x} = d(d\underline{x}) = d(0) = 0$$
$$\Rightarrow d^2 \equiv 0 \text{ en } C \text{ pues } x \text{ y } \underline{x} \text{ generan } C.$$

Para (i); sea $u \in U$, $a = x_1 \cdots x_p$ $(x_i \in \mathcal{Y})$ un generador de Λ^p; $ua \in C_p$ y es generador;

$$d(ua) = u\,w(a) = u(w(x_1)(x_2 \cdots x_p)) +$$
$$+ \alpha(x_1)\,w(x_2 \cdots x_p) =$$
$$= (u \cdot \underline{x}) \cdot x_2 \cdots x_p + u \cdot \alpha(x_1) \cdot w(x_2 \cdots x_p) \in C_{p-1}$$

Y el teorema está demostrado $\dagger$.

Hemos terminado la construcción del complejo (C, d, ε) donde ε es el proyector aumentación de $C_0 = U \otimes \Lambda^0 \equiv U \otimes K \cong U$.
Además C es un U-módulo de forma

natural ($U(v \otimes a) = Uv \otimes a$) y los C_p son U-submódulos así como d es un U-morfismo.

§ II.3. PROPIEDADES DEL COMPLEJO.

Hemos de suponer que $\mathcal{G}$ tiene una base sobre K. Por lo tanto Λ^p tiene una base sobre K con lo que $C_p = U \otimes \Lambda^p$ tiene una base sobre U:

Si $\{x_i^r\}_{i \in I^p}$ es base de Λ^p sobre K, con la estructura natural de C de U-módulo, ésta familia constituye una base de C_p sobre U pues $U(v \otimes a) = Uv \otimes a \Rightarrow$ si $u \otimes a \in C_p$, entonces $v \otimes a = v(1 \otimes a)$ y $a \in \sum_{(i_1,\dots,i_n) \in I^p} x_{i_1} \cdots x_{i_n}$.

C es entonces un U-complejo libre.

Lema II.3.1.

Bajo estas hipótesis C es un complejo acíclico.

Dem:

Primero filtramos a C de la siguiente manera:

$\bar{C}_p = \sum_{r=0}^{p} U_{p-r} \otimes \Lambda^r$; como $\Lambda = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \Lambda^r$, tenemos

$\bar{C}_p = \bigoplus_{r=0}^{p} U_{p-r} \otimes \Lambda^r$

También $\overline{C}_p \subset \overline{C}_{p+1}$ pues $U_\ell \subset U_{\ell+1}$ (U es filtrada)

Para probar que $\overline{C}_p \overline{C}_q \subset \overline{C}_{p+q}$ es suficiente demostrar

(1) $\overline{C}_p x \subset \overline{C}_{p+1}$ y

(2) $\overline{C}_p \underline{X} \subset \overline{C}_{p+1}$

pues cada elemento de $\overline{C}_p$ es suma de productos de $q \leq p$ generadores x y $\underline{X}$ i.e:

$c \in \overline{C}_p \Rightarrow c = \sum_{0 \leq q \leq p} (\underline{X}_{i_1} \cdots \underline{X}_{i_q}) \otimes (x_{j_1} \cdots x_{j_q})$ donde varias $\underline{X}_{i_k}$ ó x_{j_ℓ} pueden ser 1.

Probaremos, pues, las inclusiones (1) y (2);

Para (1): $\left(\sum_{r=0}^{p} U_{p-r} \otimes \Lambda^r\right) x = \left(\sum_{r=0}^{p} U_{p-r} \otimes \Lambda^r\right)(1 \otimes x)$

$\subseteq \sum_{r=0}^{p} U_{p-r} \otimes \Lambda^{r+1} \subseteq \sum_{r=0}^{p+1} U_{p+1-r} \otimes \Lambda^{r+1} = \overline{C}_{p+1}$

Para (2): sean $a \in \Lambda^r$, $u \in U_{p-r}$, $u \otimes a \in \overline{C}_p$,

$(u \otimes a)\underline{X} = u a \underline{X} = u(\theta(x) a + \underline{X} a) = u\theta(x) a + u\underline{X} a =$

$= u \otimes \theta(x) a + u \underline{X} a \in U_{p-r} \otimes \Lambda^r + U_{p-r+1} \otimes \Lambda^r \subseteq$

$\subseteq \overline{C}_{p+1}$.

Hemos bien filtrado al álgebra C con los $\overline{C}_p$. Consideremos ahora el álgebra graduada $\overline{\overline{C}}$ asociada a C; tenemos:

$$\overline{\overline{C}} = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \overline{\overline{C}}_p \quad \text{con} \quad \overline{\overline{C}}_p = \overline{C}_p / \overline{C}_{p-1}$$

$$\overline{\overline{C}}_p = \overline{C}_p / \overline{C}_{p-1} = \sum_{r=0}^{p} U_{p-r} \otimes \Lambda^r \Big/ \sum_{s=0}^{p-1} U_{p-1-s} \otimes \Lambda^s = \sum_{r,s=0}^{p} U_{p-r}/U_{p-1-s} \otimes \Lambda^r/\Lambda^s =$$

$= \sum_{r=0}^{p} S_{p-r} \otimes \Lambda^r$ como puede checarse fácilmente desarrollando las sumas y donde S_{p-r} es el submódulo homogéneo de grado $p-r$ del álgebra simétrica de $\mathcal{G}$, el álgebra graduada asociada a U ó equivalentemente el algebra universal envolvente de un algebra de Lie abeliana (c.f. observación posterior al teorema I.3.1 y teorema I.3.5).

$\overline{C}$ está generada por las clases x' de los x y las x'' de los $\underline{x}$ con $x \in \mathcal{G}$. Por el lema II.2.2, tenemos que $\underline{x}\underline{y} - \underline{y}\underline{x} = \underline{[x,y]}$ y por lo tanto $x''y'' - y''x'' = 0$ pues el álgebra simétrica es conmutativa; por el mismo lema, $\underline{x}y - y\underline{x} = [x,y]$ y por lo tanto $x''y' - y'x'' = 0$ y también $x'^2 = 0$.

Pensemos un momento a S, Λ y $S \otimes \Lambda$ caracterizados por propiedades universales:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \bar{\bar{C}} \\ & S \arrow[u, dashed, "f"'] \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\beta"'] & \bar{\bar{C}} \\ & \Lambda \arrow[u, dashed, "g"'] \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} S\times\Lambda \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\xi"'] & S\otimes\Lambda \arrow[dl, dashed, "h"] \\ \bar{C} & \end{tikzcd}$$

donde (S,α) y (Λ,β) son el álgebra simétrica y exterior de $\mathfrak{g}$ respectivamente y $(S\otimes\Lambda,\gamma)$ el producto tensorial de S y Λ.

Tenemos: $\alpha(x)\alpha(y)=\alpha(y)\alpha(x)$, $\beta(x)^2=0$ y γ bilineal. Si φ y ψ son las inyecciones naturales de $\mathfrak{g}$ en $\bar{\bar{C}}$; i.e, $\varphi(x)=x''$ y $\psi(x)=x'$, las propiedades universales nos dan f y g que hacen conmutativos los tirángulos.

Sea $\xi: S\times\Lambda \longrightarrow \bar{\bar{C}}$ así: $\xi(s,\lambda)=f(s)\otimes g(\lambda)$

ξ es biaditiva y bihomogénea por las propiedades del tensor, entonces existe $h: S\otimes\Lambda \longrightarrow \bar{\bar{C}}$ $\ni$ $h\gamma=\xi$; como ξ es sobre (pues $\bar{C}$ está generado por los x' y x''), h es sobre.

$\bar{\bar{C}}$ es entonces un cociente de $S\otimes\Lambda$; pero $\bar{\bar{C}} \leq S\otimes\Lambda$ pues $\bar{C} = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{p} S_{p-r} \otimes \Lambda^r \right)$,

$\Rightarrow \bar{\bar{C}} = S\otimes\Lambda$.

Si el álgebra $\bar{\bar{C}}$ resulta acíclica, tendremos que el complejo original C es acíclico; ésto se ve de la siguiente manera:

Si $\mathfrak{f}$ es el centro de $\mathfrak{g}$, entonces por el teorema I.3.4., Z, el centro de U, es el ideal generado por $\mathfrak{f}$ en U; más aún, si $p: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{f}$ es el canónico, entonces el inducido por p, digamos $p': U \to U/Z$, es epi con kernel Z y también U/Z es álgebra universal envolventes de $\mathfrak{g}/\mathfrak{f}$.

Por el lema II.1.2, si $S\otimes\Lambda$ y $U\otimes\Lambda/S\otimes\Lambda$ son acíclicos entonces $U\otimes\Lambda$. En todo caso, por lo de arriba, hemos sido llevados a demostrar la aciclicidad cuando el álgebra de Lie es abeliana.

Sea $\{x_i\}_{i\in I}$ una base de $\mathfrak{g}$. Sea $\bar{C}_F$ la subálgebra de $\bar{\bar{C}}$ generada por x_i'' y x_i'' con $i\in F$, siendo F un subconjunto finito cualquiera de I.

Como $dx_i = \underline{x}_i$ y $d\underline{x}_i = 0$, se cumple que

$dx_i' = x_i''$ y $dx_i'' = 0$ con lo que $\bar{C}_F$ es estable bajo d, y como $\bar{\bar{C}}$ es unión de $\bar{C}_F$'s, basta demostrar que $\bar{C}_F$ es acíclica.

Por último $\bar{C}_F$ es producto tensorial izquierdo de las álgebras graduadas $\bar{C}_{\{i\}}$:

$$\bar{C}_F = \bigotimes_{\{i\}\subset F} \overline{C_{\{i\}}} \quad ,$$

y por lo tanto bastará demostrar la aciclicidad (o equivalentemente la existencia de un operador de homotopía) en el caso en que la base de C_J tiene un solo elemento x_0.

La base de $\bar{\bar{C}}$ se ve de la forma: $\{u_n, v_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ con $u_n = x_0''^{\,n}$ y $v_n = u_n x_0'$ tales que:

$$du_n = 0 \quad , \quad dv_n = du_n \cdot x_0' + (-1)^n u_n dx_0' = \pm u_{n+1} \, ,$$

$$\varepsilon u_n = 0 \text{ si } n>0 \, , \quad \varepsilon u_0 = u_0 \qquad (\varepsilon : U \to U_0 \cong K)$$

Sea entonces $k : \bar{\bar{C}} \to \bar{\bar{C}}$ definido en la base como:

$$k u_n = v_{n-1} \quad \text{si } n>0$$

$$k u_0 = 0 \qquad \text{y}$$

$$k v_n = 0$$

Éste es un operador de homotopía:

claramente $k\,\overline{\overline{\overline{C}}}_p \subset \overline{\overline{\overline{C}}}_{p+1}$ y

$(kd+dk)(\mu_n) = kd\mu_n + dk\mu_n = dv_{n-1} = \mu_n = \mu_n - 0 =$

$= (1-\varepsilon)(\mu_n)$. si $n>0$

$(kd+dk)(\mu_0) = kd\mu_0 + dk\mu_0 = 0 = \cancel{0+0} = \mu_0 - \mu_0 =$

$\mu_0 - \varepsilon\mu_0 = (1-\varepsilon)(\mu_0)$

$(kd+dk)(v_n) = kdv_n + dkv_n = k\mu_{n+1} + 0 = v_{n-1} =$

$(1-\varepsilon)(v_n)$.

El teorema ha sido demostrado. $\dagger$

§ II. 4. COHOMOLOGÍA.

Tenemos ahora todas las herramientas necesarias. Sea M un $\mathcal{G}$-módulo (y por lo tanto un U-módulo unitario); llamaremos $C^p(\mathcal{G},M)$ al K-módulo de los U-morfismos de C_p en M: $C^p(\mathcal{G},M) = \mathrm{Hom}_U(C_p, M)$.

Un elemento en $C^p(\mathcal{G},M)$ es llamado una cocadena de grado p con valores en M, brevemente una p-cocadena en M.

Para dar una p-cocadena en M, será suficiente dar una aplicación K-lineal de Λ^p en M; ésto se ve de la siguiente manera:

$C^p(\mathcal{G},M) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Hom}_K(\Lambda^p, M)$ definida por:

$\phi(f)(\lambda) = f(\lambda) = 1\cdot f(\lambda)$ en M y

$\mathrm{Hom}_K(\Lambda^p, M) \xrightarrow{\phi^{-1}} C^p(\mathcal{G},M)$ la inversa:

$\phi^{-1}(g)(u\cdot\lambda) = u\cdot g(\lambda)$ en M

lo que arroja el isomorfismo deseado.

Ahora bién, para dar una aplicación K-lineal de Λ^p en M, por el teorema I.2.1, basta dar una función p-lineal alternada de $\mathcal{G}^p$ en M.

Si $f \in C^p(\mathcal{G}, M)$, i.e. $f: C_p \to M$ U-morfismo, entonces $f \circ d$ es un U-morfismo de C_{p+1} en M, i.e $\in C^{p+1}(\mathcal{G}, M)$

$$\begin{array}{ccc} C_{p+1} & \xrightarrow{d} & C_p \\ {\scriptstyle f\circ d}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ M & = & M \end{array}$$

Éste morfismo será llamado la cofrontera de f y denotado por δf. Hemos construído una aplicación

$$\delta : C^p(\mathcal{G}, M) \longrightarrow C^{p+1}(\mathcal{G}, M).$$

Se definen los p-cociclos como las cocadenas cuya cofrontera es cero y las p-cofronteras como las cocadenas que son cofrontera de alguna cocadena, i.e:

$$\{p\text{-cociclos}\} = \operatorname{Ker} \delta_p \doteq Z^p(\mathcal{G}, M)$$

$$\{p\text{-cofronteras}\} = \operatorname{Im} \delta_{p-1} \doteq B^p(\mathcal{G}, M).$$

Por último definimos el p-ésimo módulo de cohomología asociado a $\mathcal{G}$ en M como

$$H^p(\mathcal{G}, M) = Z^p(\mathcal{G}, M) / B^p(\mathcal{G}, M).$$

Nótese que $\delta\delta = 0$ pues $d \circ d = 0$ y de ahí el sentido del cociente en la definición de H^p.

Si tenemos N ótro $\mathfrak{g}$-módulo y $\varphi : M \to N$ un U-morfismo, se le asocia a φ un homomorfismo $C^p(\varphi)$,

$$C^p(\varphi) : C^p(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow C^p(\mathfrak{g}, N)$$

compatible con la frontera definido por:

$$C^p(\varphi)(f) = \varphi \circ f :$$

$$\begin{tikzcd}
C_p \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] & C_p \arrow[d, "\varphi\circ f = C^p(\varphi)(f)"] \\
N \arrow[r, "\varphi"'] & M
\end{tikzcd}$$

Si f es una p-cofrontera, $f = \delta f' = f' \circ d$, entonces $C^p(\varphi)(f' \circ d) = \varphi \circ f' \circ d = (\varphi \circ f') \circ d =$
$= \delta\left(C^{p-1}(\varphi)(f')\right)$

$$\begin{tikzcd}
C_p \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\varphi\circ f'\circ d"'] \arrow[dr, "f = f'\circ d"] & C_{p-1} \arrow[d, "f'"] \\
N & M \arrow[l, "\varphi"]
\end{tikzcd}$$

Entonces $C^p(\varphi)$ manda cofronteras en cofronteras; por lo tanto se le asocia el morfismo natural

$$\varphi_p^*: H^p(\mathcal{Y}, M) \longrightarrow H^p(\mathcal{Y}, N)$$ definido por:

$\varphi_p^*(\bar{f}) = \overline{C^p(\varphi)(f)}$.

Se checa fácilmente que si $\varphi: M \to N$ y $\psi: Q \to M$ son U-morfismos (y Q un $\mathcal{Y}$-módulo),

$$(\varphi \circ \psi)_p^* = \varphi_p^* \circ \psi_p^* \quad y \quad (1_M)_p^* = 1_{H^p(\mathcal{Y},M)},$$

es decir $H^q(\mathcal{Y}, \cdot\,)$ es un functor covariante.

Si M es $\mathcal{Y}$-submódulo de N, $C^p(\mathcal{Y}, M)$ puede identificarse como submódulo de $C^p(\mathcal{Y}, N)$ y $C^p(\mathcal{Y}, N/M)$ como $C^p(\mathcal{Y}, N)/C^p(\mathcal{Y}, M)$, es decir, por la exactitud del functor Hom (C^p es libre) y la covariancia en la segunda variable, de la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow N/M \longrightarrow 0,$$

obtenemos la sucesión exacta corta

$$0 \to C^p(\mathcal{Y}, M) \longrightarrow C^p(\mathcal{Y}, N) \longrightarrow C^p(\mathcal{Y}, N)/C^p(\mathcal{Y}, M) \to 0$$

De esta situación se deducen el morfismo de conexión $\partial: H^p(\mathcal{Y}, N/M) \longrightarrow H^{p+1}(\mathcal{Y}, M)$ y la sucesión exacta de cohomología

$$0 \to H^0(\mathcal{G},M) \to H^0(\mathcal{G},N) \to H^0(\mathcal{G},N/M) \xrightarrow{\partial} H^1(\mathcal{G},M) \to H^1(\mathcal{G},N) \to \ldots$$

La obtención de estos resultados se deduce a partir del llamado "Lema de la serpiente", como referencia damos [1] ó bién [6].

A continuación explicitaremos la forma de la cofrontera en $C^p(\mathcal{G},M)$ considerando una cocadena como una función p-lineal alternada de $\mathcal{G}^p$ en M:

Sean $g = \delta f$, $a = x_1 \cdots x_p$, $g(x_1,\ldots,x_p) = g(a) = (f \circ d)a$ con $g \in C^p(\mathcal{G},M)$, $f \in C^{p-1}(\mathcal{G},M)$, $a \in \Lambda^p$ y g considerada como $\mathcal{G}^p \to M$ ó como $\Lambda^p \to M$.

Si $a = x_1 \cdots x_p = 1 \otimes x_1 \cdots x_p \Rightarrow da = 1 \otimes w(a)$ con w una antiderivación $\Lambda \to C$ (ver construcción de d) y $w(x) = \underline{x}$ si $x \in \mathcal{G}$.

$$\Rightarrow da = d(x_1 \cdots x_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} x_1 \cdots x_{i-1} w(x_i) \cdot x_{i+1} \cdots x_p =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} x_1 \cdots x_{i-1} \cdot \underline{x_i} \cdot x_{i+1} \cdots x_p =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \left((-1)^{i-1} \underline{x_i} \cdot x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_p - (\theta(x_i)(x_1 \cdots x_{i-1}))\, x_{i+1} \cdots x_p \right)$$

Pero $\theta(x_i)(x_1 \cdots x_{i-1}) = \sum_{j<i} x_1 \cdots [x_i, x_j] \cdots x_{i-1}$

$$\Rightarrow da = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \underline{x_i}\, x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_p - \sum_{j<i} (-1)^{i+j} [x_i, x_j]\, x_1 \cdots \widehat{x_j} \cdots \widehat{x_i} \cdots x_p$$

de donde

$$g(X_1,\dots,X_p) = \sum(-1)^{i+1} X_i f(X_1 \cdots \hat{X}_i \cdots X_p) - \sum_{j<i} (-1)^{i+j} f([X_i, X_j] X_1 \cdots \hat{X}_j \cdots \hat{X}_i \cdots X_p)$$

y la cofrontera está explicitada.

CAPÍTULO III

INTERPRETACIÓN DE MÓDULOS DE COHOMOLOGÍA.

$[\theta(x),\theta(y)] = [\sum_{i=1}^{n}\theta_i(x), \sum_{j=1}^{n}\theta_j(y)] =$

$= \sum_{i,j=1}^{n} [\theta_i(x), \theta_j(y)] = \sum_{i=1}^{n} [\theta_i(x), \theta_i(y)]$ pues por hipótesis $\theta_i(x)\circ\theta_j(y) = \theta_j(y)\circ\theta_i(x)$ si $i\neq j$

$\Rightarrow [\theta(x), \theta(y)] = \sum_{i=1}^{n}[\theta_i(x), \theta_i(y)] = \sum_{i=1}^{n}\theta_i[x,y] =$

$= \sum_{i=1}^{n}\theta_i[x,y] = \theta([x,y]).$

$\dagger$

Si tenemos n representaciones lineales de $\mathcal{G}$, (θ_i, M_i) $(1\leq i\leq n)$, hacemos $M = M_1\otimes\cdots\otimes M_n$ y consideramos

$\theta_i : \mathcal{G} \to \mathrm{End}\, M$ como

$$\theta_i(x)\left(\bigotimes_{k=1}^{n} m_k\right) = \bigotimes_{k=1}^{n} n_k \quad \text{con } n_k = \begin{cases} m_k & ; k\neq i \\ \theta_i(x)(m_i) & ; k=i \end{cases}$$

Claramente $\theta_i(x)\theta_j(y) = \theta_j(y)\theta_i(x)$ si $i\neq j$ con lo que podemos aplicar el lema III.1.1 y obtener una representación lineal

$\theta : \mathcal{G} \to \mathrm{End}\, M$

cuya regla de correspondencia explícita es

$$\theta(x)(m_1\otimes\cdots\otimes m_n) = \sum_{i=1}^{n} m_1\otimes\cdots\otimes\theta_i(x)(m_i)\otimes\cdots\otimes m_n.$$

lo que corresponde a la derivación usual

§ III.1 OPERACIONES SOBRE REPRESENTACIONES LINEALES.

Dadas n representaciones lineales de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, se puede construir una nueva representación de $\mathfrak{g}$; tenemos el siguiente

Lema III.1.1.

Sea M un K-módulo, θ_i $(i=1,\dots,n)$ representaciones lineales de $\mathfrak{g}$ en M tales que
$\theta_i(x)\circ\theta_j(y)=\theta_j(y)\circ\theta_i(x)$ $\forall x,y\in\mathfrak{g}$, $\forall i\neq j$;
entonces la aplicación

$\theta:\mathfrak{g}\longrightarrow \operatorname{End} M$ definida por
$\theta(x)=\sum_{i=1}^{n}\theta_i(x)$, es una representación lineal de $\mathfrak{g}$ en M.

Dem:

θ es lineal: $\theta(\alpha x+y)=\sum_{i=1}^{n}\theta_i(\alpha x+y)=$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\alpha\,\theta_i(x)+\theta_i(y))=\alpha\sum_{i=1}^{n}\theta_i(x)+\sum_{i=1}^{n}\theta_i(y)=$$

$$=\alpha\,\theta(x)+\theta(y)\quad;\ \alpha\in K,\ x,y\in\mathfrak{g}.$$

θ es representación:

de un producto.

Otra construcción puede ser llevada a cabo si tenemos dos representaciones lineales de $\mathcal{G}$: (Θ, M) y (θ', M') considerando el K-módulo $\mathcal{L}(M,M')$ de las aplicaciones de M en M'. Definimos dos representaciones lineales de $\mathcal{G}$ en $\mathcal{L}(M,M')$ de la siguiente manera:

$$\psi(x)f = -f\circ\Theta(x) \quad \text{y} \quad \psi'(x)f = \theta'(x)\circ f$$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ {\scriptstyle \theta(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta'(x)} \\ M & \xrightarrow[f]{} & M' \end{array}$$

ψ y ψ' conmutan:

$$\psi(x)\,\psi'(y)\,f = \psi(x)\,(\theta'(y)\circ f) = -\,\theta'(y)\circ f\circ\Theta(x) =$$
$$= \psi'(y)\,(-f\circ\theta(x)) = \psi'(y)\,\psi(x)\,f.$$

Por el lema III.1.1. obtenemos una representación lineal $\rho: \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{End}\,(\mathcal{L}(M,M'))$ como

$$\rho(x)f = \theta'(x)\circ f - f\circ\Theta(x).$$

Identificando aplicaciones multilineales con aplicaciones lineales por medio del producto tensorial y combinando ambas construcciones, obtenemos lo siguiente:

Si tenemos $(\theta_i, M_i)_{i=1}^{n}$ y (θ, M) representaciones lineales de $\mathcal{G}$, obtenemos la representación lineal

$$\rho : \mathcal{G} \to \mathrm{End}(\mathcal{L}(M_1 \otimes \cdots \otimes M_n, M))$$

$$\rho(x) f(m_1 \cdots m_n) = \theta(x) f(m_1 \cdots m_n) - \sum_{i=1}^{n} f(m_1 \cdots \theta(x_i)(m_i) \cdots m_n).$$

<u>Observaciones:</u>

1-) La representación trivial ó unidad se efectúa en el K-módulo K con los operadores nulos; llamemosla $(0, K)$.

En efecto, si (θ', M) es una rep. lin. de $\mathcal{G}$,

$\rho : \mathcal{G} \to \mathrm{End}(K \otimes M) \simeq \mathrm{End}(M)$ está dada por

$$\rho(x) = 0(x) + \theta'(x) = \theta'(x)$$

2-) La representación de $\mathcal{G}$ construída en M^* es la dual (θ^*, M^*) de (θ, M):

$\rho : \mathcal{G} \to \mathrm{End}(M^*) \cong \mathrm{End}(\mathcal{L}(M, K))$ dada por

$$\rho(x) f = 0(x) f - f \circ \theta(x) = - f \circ \theta(x) = -{}^t\theta(x) f =$$
$$= \theta^*(x) f.$$

3-) Si (θ_1, M_1) y (θ_2, M_2) son rep. lin. de $\mathcal{G}$, obtenemos la representación en el espacio de formas bilineales en $M_1 \times M_2$:

$$(\rho(x)f)(m_1, m_2) = -f(\theta_1(x)m_1, m_2) - f(m_1, \theta_2(x)m_2).$$

4-) El isomorfismo canónico $\varphi: \bigotimes_k M_k \to \bigotimes_k M_{\sigma(k)}$ donde σ es una permutación, es un isomorfismo de $\mathcal{G}$-módulos. ((θ, M) rep. lin. de $\mathcal{G}$, entonces se puede pensar a M como $\mathcal{G}$-módulo).

En efecto

Si $\theta_k: \mathcal{G} \to \mathrm{End}(M_k)$, $\theta_{\sigma(k)}: \mathcal{G} \to \mathrm{End}(M_{\sigma(k)})$, $\theta: \mathcal{G} \to \mathrm{End}(\bigotimes_k M_k)$ y $\theta': \mathcal{G} \to \mathrm{End}(\bigotimes_k M_{\sigma(k)})$

son como antes, es decir,

$\theta'(x) = \sum_k \theta_{\sigma(k)}$ y $\theta(x) = \sum_k \theta_k$, entonces

$$\varphi \circ \theta_k(x) = \theta_{\sigma(k)} \circ \varphi \quad \text{y por lo tanto}$$

$$\varphi \circ \theta(x) = \theta'(x) \circ \varphi$$

5-) Si $K = \bigcup_{m \in M} K_m$ es una partición de K y $N_m = \bigotimes_{k \in K_m} M_k$, entonces el isomorfismo de K-módulos $\varphi: \bigotimes_{k \in K} M_k \longrightarrow \bigotimes_{m \in M} N_m$ es un isomorfismo de $\mathcal{G}$-módulos; en efecto

Si $\psi_m: \mathcal{G} \to \mathrm{End}(N_m)$, ψ_m es de la forma

$\psi_m(x) = \sum_{k\in K_m} \psi_{m,k}(x)$ con $\psi_{m,k}: \mathcal{G} \longrightarrow End(M_k)$

la representación en $\bigotimes_{m\in M} N_m$ es de la forma:

$$\psi'(x) = \sum_{m\in M} \psi_m(x) \quad y \quad \therefore \quad \psi'(x) = \sum_{m,k} \psi_{m,k}(x).$$

la representación θ en $\bigotimes_{k\in K} M_k$ es de la forma:

$$\theta(x) = \sum_{k\in K} \theta_k(x)$$

$$\therefore \ \varphi\circ\theta_k(x) = \psi_{m,k}\circ\varphi \quad si \quad k\in K_m$$

$$\Rightarrow \varphi\circ\theta(x) = \psi(x)\circ\varphi.$$

6-) Análogamente las aplicaciones

(i) $\bigotimes_k \mathcal{L}(M_k; M_k') \longrightarrow \mathcal{L}(\bigotimes_k M_k; \bigotimes_k M_k')$ y

(ii) $\mathcal{L}(M; \mathcal{L}(N,P)) \longrightarrow \mathcal{L}(M\otimes N; P)$

son $\mathcal{G}$-morfismos.

<u>Definición III.1.1:</u>

Un elemento de M anulado por todos los $\theta(x)$ con $x\in\mathcal{G}$, será llamado un "invariante de (θ, M)". El conjunto de los invariantes de M será denotado por $M^{\natural}$.

<u>Ejemplos:</u>

$\psi_m(x) = \sum_{k \in K_m} \psi_{m,k}(x)$ con $\psi_{m,k} : \mathcal{G} \to End(M_k)$

la representación en $\bigotimes_{m \in M} N_m$ es de la forma:

$\psi'(x) = \sum_{m \in M} \psi_m(x)$ y $\therefore$ $\psi'(x) = \sum_{m,k} \psi_{m,k}(x)$.

la representación θ en $\bigotimes_{k \in K} M_k$ es de la forma:

$\theta(x) = \sum_{k \in K} \theta_k(x)$

$\therefore$ $\varphi \circ \theta_k(x) = \psi_{m,k} \circ \varphi$ si $k \in K_m$

$\Rightarrow \varphi \circ \theta(x) = \psi(x) \circ \varphi$.

6-) Análogamente las aplicaciones

(i) $\bigotimes_k \mathcal{L}(M_k ; M_k') \longrightarrow \mathcal{L}(\bigotimes_k M_k ; \bigotimes_k M_k')$ y

(ii) $\mathcal{L}(M; \mathcal{L}(N,P)) \longrightarrow \mathcal{L}(M \otimes N; P)$

son $\mathcal{G}$-morfismos.

<u>Definición III.1.1:</u>

Un elemento de M anulado por todos los $\theta(x)$ con $x \in \mathcal{G}$, será llamado un "invariante de (θ, M)". El conjunto de los invariantes de M será denotado por $M^{\natural}$.

<u>Ejemplos:</u>

1-) $f \in \mathcal{L}(M, M')$ es invariante (con respecto a la representación arriba construída) si y sólo si f es un $\mathcal{G}$-morfismo:

$$0 = \rho(x) f = \theta'(x) \circ f - f \circ \theta(x) \Leftrightarrow f \text{ es } \mathcal{G}\text{-morfismo.}$$

2-) Una forma bilineal en $M \times M$ es invariante si y sólo si $f(\theta(x) m_1, m_2) + f(m_1, \theta(x) m_2) = 0$

3-) Si m_i es invariante de (θ_i, M_i) $(i=1,2)$, entonces $m_1 \otimes m_2$ es invariante de $(\theta, M_1 \otimes M_2)$:

$$\theta(x)(m_1 \otimes m_2) = \theta_1(x) m_1 \otimes m_2 + m_1 \otimes \theta_2(x) m_2 = 0 + 0 = 0.$$

El conjunto de $\mathcal{G}$-morfismos de M en M' será denotado por $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(M, M')$.

§III.2. EL ELEMENTO DE CASIMIR.

En éste parrágrafo K será un campo de característica cero y tanto $\mathcal{G}$ como los módulos de representación serán de dimensión finita sobre K.

Sea f una forma bilineal, simétrica, invariante ((θ, M) rep. lin de $\mathcal{G}$) y no degenerada (i.e: $f(m,m')=0 \ \forall m' \in M \Rightarrow m=0$).

Asociaremos a f un invariante de $M \otimes M$. Primero notemos que $(M\otimes M)^* \cong \mathcal{L}(M, M^*)$ como se sigue de la observación (6 ii) del parrágrafo anterior; de hecho el isomorfismo es un $\mathcal{G}$-isomorfismo.

A f asociamos $\varphi : M \to M^*$ definida por: $\langle m, \varphi(m') \rangle = f(m,m')$.

<u>Afirmación</u>: φ es $\mathcal{G}$-isomorfismo.

<u>Dem</u>:

Primero φ es $\mathcal{G}$-morfismo:

Como f es invariante tenemos que:

$0 = f(\theta(x)m, m') + f(m, \theta(x)m') =$

$= \langle \theta(x)m, \varphi(m')\rangle + \langle m, \varphi(\theta(x)m')\rangle =$

$= \langle m, {}^t\theta(x)(\varphi(m'))\rangle + \langle m, \varphi(\theta(x)m')\rangle$ por dualidad

$\Rightarrow -{}^t\theta(x)(\varphi(m')) = \varphi(\theta(x)m')$

$\Rightarrow \varphi\circ\theta(x) = \theta^*(x)\circ\varphi$ y φ es $\mathcal{G}$-morfismo

φ es mono pues si $m \longmapsto \varphi(m) = 0$

$\Rightarrow f(m', m) = 0 \quad \forall m' \Rightarrow m = 0.$

φ es epi pues si $g \in M^*$, tomamos $\{e_i\}$ y $\{e^i\}$ dos bases duales de M (i.e: $f(e^i, e_j) = \delta_{ij}$) y si $g(e_i) = k_i$ tomamos $m' = \sum_i k_i e_i$; entonces si $m = \sum_j m_j e^j$,

$\varphi(m')(m) = \varphi(\sum k_i e_i)(m) = \sum_i k_i \varphi(e_i)(m) =$

$= \sum_i k_i \varphi(m)(e_i) = \sum_i k_i \varphi(\sum_j m_j e^j) e_i =$

$= \sum_i k_i \sum_j m_j \varphi(e^j)(e_i) = \sum_i k_i \sum_j m_j f(e_i, e^j) =$

$= \sum_i k_i m_i = \sum_i g(e_i) m_i = \sum_i m_i g(e_i) =$

$= g(\sum_i m_i e_i) = g(m).$

Hemos asociado a f un $\mathcal{G}$-isomorfismo $M \to M^*$, si tomamos el inverso φ^{-1}, es un $\mathcal{G}$-isomorfismo $M^* \to M$ ó sea un invariante de $\mathcal{L}(M^*, M) \cong M^{**} \otimes M \cong M \otimes M$.

Llamemos C al invariante de $M \otimes M$ asociado a f.

Explicitemos la forma de C:

Sean $\{m_i\}$ y $\{n_i\}$ dos bases duales de M, i.e, $f(m_i, n_j) = \delta_{ij}$ y sea $\{m_i'\}$ la base dual a $\{m_i\}$ i.e, $m_j'(m_i) = \delta_{ij}$.

$$\varphi(n_j)(m_i) = f(m_i, n_j) = \delta_{ij} = m_j'(m_i)$$

$$\Rightarrow \varphi(n_j) = m_j' \quad \Rightarrow \varphi^{-1}(m_j') = n_j.$$

pero $n_j = \sum_i \alpha_i n_i$ donde $\alpha_i = \langle m_i, m_j' \rangle$ pues

$$m_j' = \sum_i \langle m_i, m_j' \rangle m_i'$$

$$\Rightarrow C = \sum_i m_i \otimes n_i.$$

Tomemos ahora a M como un ideal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ y $\theta(x)$ la restricción a $\mathfrak{h}$ de $ad(x)$ y f de la forma

$$f(m, m') = Tr(\rho(m)\rho(m')) \qquad m, m' \in \mathfrak{h},$$

donde (ρ, N) es una rep. lin. de $\mathfrak{g}$ tal que f sea no degenerada.

Por propiedades de la traza, f es simétrica; también f es invariante:

$f(\theta(x)m, m') + f(m, \theta(x)m') =$

$= f([x,m], m') + f(m, [x,m']) =$

$= Tr(\rho[x,m]\rho(m')) + Tr(\rho(m)\rho[x,m']) =$

$= Tr(\rho(x)\rho(m)\rho(m') - \rho(m)\rho(x)\rho(m')) +$

$+ Tr(\rho(m)\rho(x)\rho(m') - \rho(m)\rho(m')\rho(x)) =$

$= Tr(\rho(x)\rho(m)\rho(m') - \rho(m)\rho(x)\rho(m') + \rho(m)\rho(x)\rho(m') -$

$- \rho(m)\rho(m')\rho(x)) =$

$= Tr(\rho(x)\rho(m)\rho(m') - \rho(m)\rho(m')\rho(x)) =$

$= -Tr(\rho(x)\rho(m')\rho(m) - \rho(m)\rho(m')\rho(x)) =$

$= Tr(\rho(x)\rho(m')\rho(m) - \rho(\cancel{m})\rho(m)\rho(x)) =$

$= -Tr(\rho(x)\rho(m')\rho(m) - \rho(m')\rho(x)\rho(m)) =$

$= Tr(\rho(x)\rho(m')\rho(m) - \rho(x)\rho(m')\rho(m)) = 0$

Tomamos C_N' el elemento invariante de $\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{h}$ asociado a f y por los morfismos

$$\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g} \longrightarrow U$$

obtenemos un elemento C_N en U.

<u>Afirmación:</u> $C_N \in Z = Cent(U)$.

Como $\mathfrak{g}$ genera U y por el teorema I.3.3.iii la extensión de ad x a U es la derivación $a \longmapsto Xa - aX$ de U, el centro de U es el

conjunto de elementos a que cumplen
$Xa - aX = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}$;

Sea entonces $x \in \mathfrak{g}$ y ρ' la representación en $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ construída a partir de θ;

$$XC_N - C_N X = X\left(\sum_i m_i \otimes n_i\right) - \left(\sum_i m_i \otimes n_i\right) X =$$
$$= \sum_i x \otimes m_i \otimes n_i - \sum_i m_i \otimes n_i \otimes x =$$
$$= \sum_i x \otimes m_i \otimes n_i - \sum_i m_i \otimes x \otimes n_i + \sum_i m_i \otimes x \otimes n_i -$$
$$- \sum m_i \otimes n_i \otimes x =$$
$$= \sum_i (x \otimes m_i \otimes n_i - m_i \otimes x \otimes n_i) + \sum_i (m_i \otimes x \otimes n_i - m_i \otimes n_i \otimes x) =$$
$$= \sum_i [x, m_i] \otimes n_i + \sum m_i \otimes [x, n_i] =$$
$$= \sum_i \operatorname{ad} x\, m_i \otimes n_i + \sum_i m_i \otimes \operatorname{ad} x\, n_i =$$
$$= \sum_i \theta(x) m_i \otimes n_i + \sum m_i \otimes \theta(x) n_i =$$
$$= \sum_i \rho'(x)(m_i \otimes n_i) = \rho'(x)\left(\sum_i m_i \otimes n_i\right) = \rho'(x)(C_N')$$
$$= 0 \text{ pues } C_N' \text{ es } \rho' \text{ invariante.}$$

Observaciones:

1.) Si ρ sigue denotando a la extensión de ρ a U como en el teorema I.3.3(i) entonces $\rho(C_N) \neq 0$ pues

$$Tr(\rho(C_N)) = \sum_i Tr(\rho(m_i)\rho(n_i)) = \sum_i f(m_i, n_i) = \sum_i \delta_{ii} = \dim N$$

2-) si (ρ, N) es irreductible, $\rho(C_N)$ es un automorfismo:

Sea $a \in U$, $aC_N = C_N a$ pues $C_N \in Z$

$\Rightarrow \rho(aC_N) = \rho(C_N a) \Rightarrow \rho(a)\rho(C_N) = \rho(C_N)\rho(a)$

$\forall a$ y por el lema de Schur, $\rho(C_N)$ es invertible.

§III.3 NULIDAD DE ALGUNOS MÓDULOS DE COHOMOLOGÍA

Recordemos que un $\mathcal{G}$-módulo V es inyectivo $\Leftrightarrow$ la aplicación canónica

$$\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(A,V) \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{G}}(B,V)$$

es suprayectiva donde A es un $\mathcal{G}$-módulo y B un $\mathcal{G}$-submódulo de A.

Lema III.3.15 Si $V = \mathcal{L}(L,N)$ donde L es U-libre, entonces V es inyectivo.

Dem:

Demostraremos primero que $\mathcal{L}(B,\mathcal{L}(L,N)) \cong$
$\cong \mathcal{L}(L,\mathcal{L}(B,N))$:

Sea $f: B \to \mathcal{L}(L,N)$ y sea $\phi: \mathcal{L}(B,\mathcal{L}(L,N)) \to \mathcal{L}(L,\mathcal{L}(B,N))$ definida por $f \longmapsto \phi(f)$

donde $\phi(f)(\ell)(b) = f(b)(\ell)$.

Claramente $\alpha f + g \longmapsto \alpha\phi(f) + \phi(g)$

Si $\phi^{-1}: \mathcal{L}(L,\mathcal{L}(B,N)) \longrightarrow \mathcal{L}(B,\mathcal{L}(L,N))$ definida por $\phi^{-1}(h)(\ell)(b) = h(b)(\ell)$, vemos que ϕ es un isomorfismo.

Sea ahora $f: B \to V$ un $\mathcal{G}$-morfismo; por el ejemplo 1 de la definición III.1.1, f es un invariante de $\mathcal{L}(B,V) = \mathcal{L}(B,\mathcal{L}(L,N)) \cong \mathcal{L}(L,\mathcal{L}(B,N))$ ó sea un $\mathcal{G}$-morfismo de L en $\mathcal{L}(B,N)$.

Como K es un campo, A, B y N son espacios vectoriales que son K-módulos libres, y por lo tanto proyectivos, la aplicación canónica $\mathcal{L}(A,N) \to \mathcal{L}(B,N)$ es suprayectiva.

$\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(B,N)$ es submódulo de $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(A,N)$ por lo de arriba y como L es U libre, es $\mathcal{G}$-proyectivo; obtenemos una suprayección canónica:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(L,\mathcal{L}(A,N)) \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{G}}(L,\mathcal{L}(B,N))$$

y para terminar los isomorfismos

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(L,\mathcal{L}(A,N)) & \longrightarrow & \mathcal{L}_{\mathcal{G}}(L,\mathcal{L}(B,N)) \\
\cong & & \cong \\
\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(A,\mathcal{L}(L,N)) & \longrightarrow & \mathcal{L}_{\mathcal{G}}(B,\mathcal{L}(B,N)) \\
\cong & & \cong \\
\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(A,V) & \longrightarrow & \mathcal{L}_{\mathcal{G}}(B,V)
\end{array}$$

y V es inyectivo $\dagger$

<u>Teorema III.3.1.</u> Si V es inyectivo, entonces
$$H^q(\mathcal{Y},V)=0 \quad \forall q>0$$

<u>Dem:</u>

Sea $f\in Z^q(\mathcal{Y},V)$ $(q>0)$; f es un $\mathcal{Y}$-homomorfismo $f: C_q \to V$ $\ni$ $f\circ d=0$, es decir nulo en $d\,C_{q+1}$.

Como C es acíclico, $d\,C_{q+1} = \operatorname{Ker}(d: C_q\to C_{q-1})$ $(q>0)$

Por ser f nulo en $d\,C_{q+1}$, existe un único $g: dC_q \longrightarrow V$ $\ni$ $f=g\circ d$.

Ahora, como $d\,C_q$ es submódulo de C_{q-1} y V es inyectivo, $\exists\, \bar g: C_{q-1}\to V$ extensión de g

$\Rightarrow f=\bar g\circ d \Rightarrow f$ es cofrontera de $\bar g$

$$\begin{tikzcd}
d(C_{q+1}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "0=d"'] & C_q \arrow[d, "d"] \arrow[ddl, "f"'] \\
d(C_q) \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"'] & C_{q-1} \arrow[dl, dashed, "\bar g"] \\
V &
\end{tikzcd}$$

$f\in B^q(\mathcal{Y},V) \Rightarrow H^q(\mathcal{Y},V)=0$

si $q>0$. $\dagger$

<u>Observación:</u>

Si $c\in \mathcal{Z}=\operatorname{Cent}(U)$ y (θ,M) es una reprentación de $\mathcal{G}$, entonces $\theta(c)$ es un $\mathcal{G}$-endomorfismo de M, pues si $w \in \mathcal{G}$ tendremos $\theta(c) \circ \theta(w) = \theta(w) \circ \theta(c) + \theta([w,c]) = \theta(w) \circ \theta(c)$.

Existe por lo tanto un endomorfismo en $H^q(\mathcal{G}, M)$ que transforma el cociclo f en $\theta(c) \circ f$.

Identificamos $\theta(c) \circ f$ con $c \cdot f$ en $H^q(\mathcal{G}, M)$.

<u>Teorema III.3.2</u>.- Si $c \in \mathcal{Z}$ y c es de aumentación nula, entonces $c \cdot f \equiv 0$ en $H^q(\mathcal{G}, M)$ $\forall q$ y $\forall f \in Z^q(\mathcal{G}, M)$.

<u>Dem</u>:

Si $\gamma \in C_p$, $(c \cdot f)(\gamma) = f(c \cdot \gamma)$ pues f es U-morfismo

Construiremos por recurrencia sobre q, operadores $k_q : C_q \to C_{q+1}$ que sean $\mathcal{G}$-morfismos y $\ni'$

$$c \cdot \gamma = k d\gamma + d k \gamma \quad \text{, es decir,}$$

$$c \cdot \gamma = k_q d\gamma + d k_{q+1} \gamma \quad \text{si } \gamma \in C_q .$$

Comencemos con $q = -1$ y sea $k_{-1} = 0$; sea $\{\gamma_\alpha\}$ una U-base de C_0. Hay que definir k_0 de forma que $d k_0 \gamma_\alpha = c\gamma_\alpha - k_{-1} d\gamma_\alpha = c\gamma_\alpha$.

Como el complejo C es acíclico, $\operatorname{Im} d_1 = \operatorname{Ker} \varepsilon$; observamos que $\varepsilon(c\gamma_\alpha) = \varepsilon(c)\varepsilon(\gamma_\alpha) = 0$ pues $\varepsilon(c) = 0$

y ε es un U-morfismo ; $\Rightarrow c\gamma_\alpha \in \operatorname{Im} d_1$

$\Rightarrow \exists\, w \in C_1 \ni dw = c\gamma_\alpha$; sea $k_0\gamma_\alpha = w$

Tenemos que $dk_0\gamma_\alpha = dw = c\gamma_\alpha$.

Supongamos ahora definidos $(r \leq q)$ los k_r que cumplen lo de arriba. Sea $d(k_{q+1}(\gamma_\alpha)) = c\gamma_\alpha - k_q d\gamma_\alpha$ con $\{\gamma_\alpha\}$ una base sobre U de C_q. Por un razonamiento análogo al de antes, basta checar que $d(c\gamma_\alpha - k_q d\gamma_\alpha) = 0$: $d\gamma_\alpha \in C_{q-1}$,

$d(c\gamma_\alpha - k_q d\gamma_\alpha) = c\, d\gamma_\alpha - dk_q d\gamma_\alpha$ (d es U-morfismo)

pero $c\, d\gamma_\alpha = k_{q-1} dd\gamma + dk_q d\gamma$

$\Rightarrow d(c\gamma_\alpha - k_q d\gamma_\alpha) = k_{q-1} dd\gamma = 0$

Ahora tomemos $f \in Z^q(\mathfrak{g}, M)$

$(c\cdot f)(\gamma) = f(c\cdot\gamma) = f(kd\gamma + dk\gamma) =$

$= (f\circ k)d\gamma + (f\circ d)k\gamma = (f\circ k)(d\gamma)$ pues $f\circ d = 0$

$\Rightarrow (c\cdot f)(\gamma) = ((f\circ k)\circ d)(\gamma)$

$\Rightarrow \delta(f\circ k) = c\cdot f \Rightarrow c\cdot f$ es cofrontera

$\Rightarrow f \longmapsto c\cdot f$ es cero en $H^q(\mathfrak{g}, M)$ +

<u>Corolario:</u> - Si (θ, M) es una representación irreducible de dimensión finita de $\mathfrak{g}$, K es de

característica cero y la forma bilineal de M

$$Tr(\theta(x)\,\theta(y))$$

es no degenerada, entonces, $H^q(\mathcal{G}, M) = 0 \;\; \forall q \geq 0$.

Dem:

El elemento de casimir C_M asociado a (θ, M) es un elemento del centro de U y por la observación 2 posterior a la segunda afirmación del parrágrafo III.2, $\theta(C_M)$ es un automorfismo de M y por lo tanto $f \mapsto C_M \cdot f$ un automorfismo de $H^q(\mathcal{G}, M)$, no pudiendo ser nulo más que si

$$H^q(\mathcal{G}, M) = 0$$

+

§ III.4. INTERPRETACIÓN DE $H^0(\mathfrak{g}, M)$.

Teorema III.4.1.

$$H^0(\mathfrak{g}, M) \cong M^{\mathfrak{g}}.$$

Dem:

Sea (M, θ) rep. lin de $\mathfrak{g}$,

La fórmula de la cofrontera, según vimos, es:

$f \in C^{p-1}(\mathfrak{g}, M)$, $g = \delta f$,

$$g(X_1 \cdots X_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \theta(X_i) f(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots X_p) - \sum_{j<i} (-1)^{i+j} f([X_i, X_j] X_1 \cdots \hat{X}_j \cdots \hat{X}_i \cdots X_p)$$

entonces si $f \in C^0(\mathfrak{g}, M)$,

$$g(X_1) = \theta(X_1) \circ f$$

Como $C_{-1} = 0$, $B^0(\mathfrak{g}, M) = 0 \Rightarrow H^0(\mathfrak{g}, M) = Z^0(\mathfrak{g}, M)$

pero $f \in Z^0(\mathfrak{g}, M) \Leftrightarrow g = 0$ i.e.: $\theta(X_1) \circ f = 0$

$\Leftrightarrow$ f es invariante. $\dagger$

§III.5. INTERPRETACIÓN DE $H^1(\mathcal{G},M)$.

Definición III.5.1.- Una extensión de (Θ,N) por medio de (Θ',M') es un $\mathcal{G}$-módulo (Ψ,P) y dos $\mathcal{G}$-morfismos

$$i: M \longrightarrow P$$
$$\pi: P \longrightarrow N \qquad ;$$

la sucesión $0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi} N \longrightarrow 0$ sea exacta.

Dos extensiones P y P_1 son equivalentes si el diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dr, "\pi"] \arrow[dd] & \\ M \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i_1"'] & & N \\ & P_1 \arrow[ur, "\pi_1"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo con k un $\mathcal{G}$-homomorfismo.

— o —

Al tener la sucesión exacta $0 \to M \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi} N \to 0$ podemos construir otra:

$$0 \to \mathcal{L}(N,M) \xrightarrow{t_\pi} \mathcal{L}(P,M) \xrightarrow{t_i} \mathcal{L}(M,M) \to 0$$

pues $\mathcal{L}$ es un functor contravariante en la primera variable, exacto izquierdo y derecho si M es libre.

En esta sucesión, t_i y t_π son $\mathcal{G}$-morfismos y

$\mathcal{L}(Q,R)$ tiene la estructura de $\mathcal{G}$-módulo deducida de la representación ρ construída en el parrágrafo III.1.

De ésta ultima, obtenemos la sucesión exacta de cohomología:

$$0 \to H^0(\mathcal{L}(N,M)) \xrightarrow{\pi^*} H^0(\mathcal{L}(P,M)) \xrightarrow{i^*} H^0(\mathcal{L}(M,M)) \xrightarrow{\partial} H^1(\mathcal{L}(N,M)) \to$$

donde $H^0(\mathcal{L}(Q,R))$ es el conjunto de $\mathcal{G}$-morfismos de Q en R vista la identificación del parrágrafo anterior.

<u>Definición III.5.2.</u> Sea $j: M \to M$ la aplicación identidad, $j \in \mathcal{L}(M,M)$. llamamos la "obstrucción" de la extensión considerada al elemento

$\partial j \in H^1(\mathcal{L}(N,M))$.

Si esta clase es nula, $j \in \operatorname{Ker}\partial = \operatorname{Im} i^*$, existe un $\mathcal{G}$-morfismo $f: P \to M \ni i^*(f) = j$, i.e,

$f \circ i = j$.

Esto arroja un subespacio $N' = \operatorname{Ker} f$ de $P \ni$

$P = M \oplus N'$

<u>Lema III.5.1.</u> La obstrucción de dos extensiones equivalentes, es la misma.

Dem:

Sean $0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi} N \longrightarrow 0$ y

$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i_1} P_1 \xrightarrow{\pi_1} N \longrightarrow 0$ dos

extensiones de N por M equivalentes; $\Rightarrow \exists\, k_1 \ni$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & P \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "k_1"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_1"] & P_1 \arrow[r, "\pi_1"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

conmuta.

obtenemos:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 0 \arrow[r] & H^0(\mathscr{L}(N,M)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^0(\mathscr{L}(P,M)) \arrow[r] \arrow[d, "(\cdot \circ k_1^{-1})^*"] & H^0(\mathscr{L}(M,M)) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, equal] & H^1(\mathscr{L}(N,M)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & {} \\ 0 \arrow[r] & H^0(\mathscr{L}(N,M)) \arrow[r] & H^0(\mathscr{L}(P_1,M)) \arrow[r] & H^0(\mathscr{L}(M,M)) \arrow[r, "\partial"] & H^1(\mathscr{L}(N,M)) \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

y la obstrucción es la misma. +

Teorema III.5.1.- Hay una correspondencia biunívoca entre las clases de extensiones equivalentes de N por M y los elementos de $H^1(\mathscr{L}(N,M))$.

Dem:

A cada clase de extensiones equivalentes, asociamos la obstrucción de la extensión; esta aplicación está bien definida por el lema III.5.1. Además la obstrucción es nula si y sólo si la extensión es inesencial, es decir existe un subespacio N' de P invariante y $\ni$ $P = M \oplus N'$.

Recíprocamente, representemos a N cubierto por un U-módulo libre L:

$N = L/R$ i.e: $0 \to R \xrightarrow{\pi} L \xrightarrow{\alpha} N \to 0$ exacta.

Aplicando el functor $\mathcal{L}(\cdot, M)$:

$$0 \to \mathcal{L}(N,M) \to \mathcal{L}(L,M) \to \mathcal{L}(R,M) \to 0.$$

Por el lema III.3.1, $\mathcal{L}(L,M)$ es inyectivo y por el teorema III.3.1, $H^1(\mathcal{L}(L,M)) = 0$ por lo que la sucesión exacta de cohomología en este caso se escribe así:

$$0 \to H^0(\mathcal{L}(N,M)) \xrightarrow{\bar{\alpha}^*} H^0(\mathcal{L}(L,M)) \xrightarrow{\pi^*} H^0(\mathcal{L}(R,M)) \xrightarrow{\partial} H^1(\mathcal{L}(N,M)) \to 0$$

y por lo tanto

$$H^1(\mathcal{L}(N,M)) \cong H^0(\mathcal{L}(R,M)) / \operatorname{Im} \pi^* \qquad \text{i.e.}$$

$$H^1(\mathcal{L}(N,M)) \cong \mathcal{L}_g(R,M)/A$$

donde A es el conjunto de g-morfismos $R \to M$ que se pueden extender a L.

Como en este caso ∂ es epimorfismo, sea

$c' \in \mathcal{L}_{ey}(R,M)$ $\ni$ $c = \partial c'$ con $c \in H^1(\mathscr{C}(N,M))$.

Sea $P' = (M+L)/Q$ donde Q es el submódulo formado por las parejas $(c'(r), -r)$ $(r \in R)$.

Sean también k la aplicación canónica $M \times L$ sobre P', $i : M \to P'$ definida por: $i(m) = k(m,0)$ y $\pi : P' \to N$ definida por: $\pi(k(m,l)) = \mathcal{H}(l)$ (ésta última tiene sentido, pues $0 \to R \to L \xrightarrow{\mathcal{H}} N \to 0$ es exacta y por lo tanto $\pi(Q) = 0$ pues $\mathcal{H}(R) = 0$).

Hemos construido la sucesión:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} P' \xrightarrow{\pi} N \longrightarrow 0$$

Veamos que es exacta:

i es mono: $0 = i(m_1) - i(m_2) \Rightarrow k(m_1 - m_2, 0) = 0$

$\Rightarrow (m_1 - m_2, 0) \in Q \Rightarrow m_1 - m_2 = c'(0) = 0$.

π es sobre: $\mathcal{H}$ es sobre.

$\operatorname{Ker}\pi \supset \operatorname{Im} i$: $\pi \circ i(m) = \pi(k(m,0)) = \mathcal{H}(0) = 0$.

$\operatorname{Ker}\pi \subset \operatorname{Im} i$: si $p \in \operatorname{Ker}\pi$, i.e, $\pi(p) = \pi(k(m,l)) =$

$= \mathcal{H}(l) = 0 \Rightarrow l \in \operatorname{Ker}\mathcal{H} = \operatorname{Im}\mathcal{K} \Rightarrow \exists\ r' \in R \ni$

$\mathcal{K}(r') = l$, i.e, $l \in R$ $\therefore$ $p = k(m,r)$; pero

$k(m + c'(r), 0) = (m + c'(r) + r - r) + Q = (m+r) + Q = k(m,r)$

$\Rightarrow p = k(m+c'(r), 0) = i(m + c'(r))$

$\Rightarrow p \in \operatorname{Im} i$.

$\therefore$ la sucesión es exacta.

Hemos construído una extensión P' de N por M.

Ahora ~~mos~~ queremos demostrar que c es la obstrucción de P'.

Sea $q : L \to P'$ así : $q(\ell) = k(0, \ell)$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\mathcal{H}"] \arrow[d, "c'"'] & L \arrow[r, "\mathcal{X}"] \arrow[d, "q"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] & P' \arrow[r, "\pi"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$ conmuta:

$r \in R$; $(q \circ \mathcal{H})(r) = q(\mathcal{H}(r)) = k(0, \mathcal{H}(r)) = k(0 + c'(r), 0) =$

$= k(c'(r), 0) = i(c'(r)) = (i \circ c')(r)$ y

$\ell \in L$; $(1_N \circ \mathcal{X})(\ell) = \mathcal{X}(\ell) = \pi(k(0,\ell))$.

Aplicando el functor $\mathcal{L}$ y luego en cohomología:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(\mathcal{L}(N,M)) \arrow[r, "\mathcal{X}^*"] & H^0(\mathcal{L}(L,M)) \arrow[r, "\mathcal{H}^*"] & H^0(\mathcal{L}(R,M)) \arrow[r, "\partial"] & H^1(\mathcal{L}(N,M)) \arrow[r] & {} \\
0 \arrow[r] & H^0(\mathcal{L}(N,M)) \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[u, equal] & H^0(\mathcal{L}(P',M)) \arrow[r, "i^*"] \arrow[u, "q^*"] & H^0(\mathcal{L}(M,M)) \arrow[r, "\partial"] \arrow[u, "c'^*"] & H^1(\mathcal{L}(N,M)) \arrow[r] \arrow[u, equal] & {}
\end{tikzcd}$$

ó sea el diagrama conmutativo:

$\Rightarrow p = k(m+c'(r),0) = i(m+c'(r))$

$\Rightarrow p \in \operatorname{Im} i$.

$\therefore$ la sucesión es exacta.

Hemos construído una extensión P' de N por M.

Ahora ~~mos~~ queremos demostrar que c es la obstrucción de P'.

Sea $q : L \to P'$ así : $q(l) = k(0,l)$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & R & \xrightarrow{\mathcal{H}} & L & \xrightarrow{\mathcal{K}} & N & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle c'}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & M & \xrightarrow{i} & P' & \xrightarrow{\pi} & N & \to & 0 \end{array}$$ conmuta:

$r \in R$; $(q \circ \mathcal{H})(r) = q(\mathcal{H}(r)) = k(0,\mathcal{H}(r)) = k(0+c'(r),0) =$

$= k(c'(r),0) = i(c'(r)) = (i \circ c')(r)$ y

$l \in L$; $(1_N \circ \mathcal{K})(l) = \mathcal{K}(l) = \pi(k(0,l))$.

Aplicando el functor $\mathcal{Z}$ y luego en cohomología:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & H^0(\mathcal{Z}(N,M)) & \xrightarrow{\mathcal{K}^*} & H^0(\mathcal{Z}(L,M)) & \xrightarrow{\mathcal{H}^*} & H^0(\mathcal{Z}(R,M)) & \xrightarrow{\partial} & H^1(\mathcal{Z}(N,M)) & \to \\ & \| & & \uparrow{\scriptstyle q^*} & & \uparrow{\scriptstyle c'^*} & & \| & \\ 0 \to & H^0(\mathcal{Z}(N,M)) & \xrightarrow{\pi^*} & H^0(\mathcal{Z}(P',M)) & \xrightarrow{i^*} & H^0(\mathcal{Z}(M,M)) & \xrightarrow{\partial} & H^1(\mathcal{Z}(N,M)) & \to \end{array}$$

ó sea el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} H^0(\mathcal{L}(R,M)) \arrow[r, "\partial"] & H^1(\mathcal{L}(N,M)) \\ H^0(\mathcal{L}(M,N)) \arrow[u, "c'^*"] \arrow[r, "\partial"] & H^1(\mathcal{L}(N,M)) \arrow[u, equal] \end{tikzcd}$$

si tomamos $1_M \in \mathcal{L}(M,M)$ vemos que:

$\partial(c'^*)(1_M) = \partial(1_M)$ pero

$\partial(c'^*)(1_M) = \partial(1_M \circ c') = \partial(c') = c$

$\Rightarrow$ la obstrucción de ρ' es c.

Hasta el momento hemos asociado a una clase de extensiones equivalentes de N por M un elemento de $H^1(\mathcal{L}(N,M))$ y a cada elemento en éste, una extensión de N por M de forma que la primera asignación es la inversa de la segunda; sólo falta probar que la segunda asignación cubre todas las extensiones.

Sea $0 \longrightarrow M \xrightarrow{j} P \xrightarrow{\omega} N \longrightarrow 0$ una extensión de N por M; como L es proyectivo, obtenemos:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, dashed, "q"'] \arrow[d, "\alpha"] & \\ P \arrow[r, "\omega"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$ conmutativo.

y talque R va al núcleo de w, ó sea a M:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "H"] \arrow[d, "c'"'] & L \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "q"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "j"] & P \arrow[r, "w"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Definimos una aplicación $M+L \longrightarrow P$ así

$$k'(m,l) = j(m) + q(l)$$

k' es nula en Q: $\quad k'(c'(r), -r) = j(c'(r)) + q(-r) =$

$$= q(H(r)) + q(-r) = q(r) - q(r) = 0.$$

Por lo tanto $\bar{k}: P' \longrightarrow P$, el paso al cociente, arroja:

$$\begin{tikzcd}
 & & P' \arrow[dd, "\bar{k}"] \arrow[dr, "\pi"] & & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & N \arrow[r] & 0 \\
 & & P^{*} \arrow[ur, "w"'] & &
\end{tikzcd}$$

que es conmutativo:

$(\bar{k} \circ i)(m) = \bar{k}(i(m)) = j(m) + 0 = j(m) \quad$ y

$(w \circ \bar{k})(k(m,l)) = w(j(m) + q(l)) = (w \circ j)(m) + (w \circ q)(l)$

$$= 0 + \mathcal{H}(l) = \pi(k(m,l)).$$

El teorema ha sido probado $\quad\dagger$.

Hagamos explícita la correspondencia entre $H^1(\mathscr{L}(N,M))$ y las clases de extensiones equivalentes de N por M.

Si (N,θ) y (M,θ') son $\mathcal{G}$-módulos y

$$0 \to M \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi} N \to 0$$

es una extensión de N por M, tomamos $1_M \in Z^0(\mathscr{L}(M,M))$,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & C^0(\mathscr{L}(N,M)) & \xrightarrow{t_\pi} & C^0(\mathscr{L}(P,M)) & \xrightarrow{t_i} & C^0(\mathscr{L}(M,M)) & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow \delta & & \downarrow & \\ 0 \to & C^1(\mathscr{L}(N,M)) & \xrightarrow{t_\pi} & C^1(\mathscr{L}(P,M)) & \xrightarrow{t_i} & C^1(\mathscr{L}(M,M)) & \to 0 \end{array}$$

$1_M \in Z^0(\mathscr{L}(M,M))$ pues $C^0(\mathscr{L}(M,M)) = \{\varphi : U \to \mathscr{L}(M,M),$ φ U-morfismo$\} \cong \mathscr{L}(M,M)$ pues M es U-módulo, y $\delta 1_M = 0$ porque 1_M es $\mathcal{G}$-morfismo $\Rightarrow 1_M \in H^0 = Z^0$.

Tomamos ahora $f \in C^0(\mathscr{L}(P,M)) \ni f \circ i = 1_M$, $f : P \to M$, y aplicamos la cofrontera.

Sea $g = \delta f$, $g(x) = \rho(x) f = \theta'(x) \circ f - f \circ \theta(x)$

$g \in Z^1(\mathscr{L}(N,M))$ pues ${}^t i(g) = 0$. La obstrucción de la extensión es la clase de cohomología de g, que no depende de f.

La estructura de $\mathfrak{g}$-módulo de P estaría dada por los operadores:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \theta'(x) & g(x) \\ 0 & \theta(x) \end{pmatrix}$$

ψ es representación sí y sólo si

$$[\psi(x), \psi(y)] - \psi[x,y] = 0$$

pero $[\psi(x), \psi(y)] - \psi[x,y] = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donde

$$\alpha = \theta'(x) g(x) + g(x)\theta(y) - \theta'(y) g(x) - g(y)\theta(x) + g[x,y] =$$

$$= \rho(x)(g(y)) - \rho(y)(g(x)) + g[x,y] = (\delta g)(x,y)$$

Como g es cociclo, se cumple.

Recíprocamente si $\delta g = 0$, definimos una representación de $\mathfrak{g}$ en $M \times N$ por las matrices $\psi(x)$.

Teorema III.5.2.-

Son equivalentes las proposiciones siguientes:

1-) $\forall$ $\mathfrak{g}$-módulo simple M, $H^1(\mathfrak{g}, M) = 0$

2-) $\forall$ $\mathfrak{g}$-módulo M, $H^1(\mathfrak{g}, M) = 0$

3-) $\forall$ $\mathfrak{g}$-homomorfismo $\varphi : M \longrightarrow N$ que sea sobre,

$\varphi(M^{\natural}) = N^{\natural}$

4-) Toda representación es completamente reducible.

<u>Dem:</u>

1 ⇒ 2) Como $\dim M < \infty$, M tiene una serie de Jordan-Hölder $0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_{n-1} \subset M_n = M$ donde M_{i+1}/M_i es simple $\forall i$.

M_1 es simple pues $M_1/M_0 \cong M_1$ es simple $\Rightarrow H^1(\mathfrak{g}, M_1) = 0$ por hipótesis. La sucesión exacta de cohomología se escribe entonces:

$$0 \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{H^1(\mathfrak{g}, M_1)} \to H^1(\mathfrak{g}, M_2) \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{H^1(\mathfrak{g}, M_2/M_1)} \to \cdots$$

$\Rightarrow H^1(\mathfrak{g}, M_2) = 0$, continuando el proceso, $H^1(\mathfrak{g}, M) = 0$

2 ⇒ 3) $M^{\natural} = H^0(\mathfrak{g}, M)$ y $N^{\natural} = H^0(\mathfrak{g}, N)$.

Sea $Q = \operatorname{Ker} \varphi$; $0 \to Q \to M \xrightarrow{\varphi} N \to 0$ exacta, su cohomología $0 \to H^0(\mathfrak{g}, Q) \to H^0(\mathfrak{g}, M) \to H^0(\mathfrak{g}, N) \to 0$ pues $H^1(\mathfrak{g}, Q) = 0$ por hipótesis

$\Rightarrow \varphi(M^{\natural}) = N^{\natural}$.

$3 \Rightarrow 4$) Usamos la equivalencia siguiente:

$\rho : \mathcal{G} \to \operatorname{End} P$ es representación completamente reductible (o semisimple) $\Leftrightarrow$ dado N $\mathcal{G}$-submódulo de P, $\exists$ M $\mathcal{G}$-submódulo de $P \ni$ $M \oplus N \cong P$ (o equivalentemente $M \cong P/N$) con M invariante

Sea entonces (P, ρ) $\mathcal{G}$-módulo y N $\mathcal{G}$-submódulo de P; sea $M = P/N$, tenemos

$$0 \to N \to P \xrightarrow{\pi} M \to 0 \text{ exacta}$$

como por hipótesis $\mathcal{L}(M,P)^{\mathcal{G}} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{L}(M,M)^{\mathcal{G}}$ con $\varphi(g) = \pi \circ g$, es sobre, existe un $\mathcal{G}$-morfismo $f : M \to P \ni$ $1_M = \pi \circ f \Rightarrow P = M \oplus N$.

$4 \Rightarrow 1$) Por 4, toda extensión es inesencial $\Rightarrow H^1(\mathcal{L}(N,M)) = 0 \quad \forall N$

Sea K el K-módulo de la representación nula (ver observación 1, §III.1), entonces

$$\mathcal{L}(K,M) \cong M \Rightarrow H^1(\mathcal{L}(K,M)) = H^1(\mathcal{G},M) = 0$$

$\dagger$

BIBLIOGRAFÍA

[1] CARTAN, H y EILENBERG, S. Homological Algebra. Princeton University Press. Princeton, New Jersey. Princeton Mathematical Series # 19. 1956.

[2] CARTIER, P. Cohomologie des Algebres de Lie. En "Seminaire Sophus Lie". Ecole Normale Superieure. Paris. 1954/55.

[3] CHEVALLEY, C. Fundamental Concepts of Algebra. Academic Press Inc. New York. Pure and Applied Mathematics VII. 1956.

[4] CHEVALLEY, C. Theory of Lie Groups I. Princeton University Press. Princeton, New Jersey. Princeton Mathematical Series # 8. Octava edición. 1970.

[5] DIXMIER, J. Enveloping Algebras. North-Holland. Amsterdam. North-Holland Mathematical library #14. 1977.

[6] ROTMAN, J. Notes on Homological Algebra. Van Nostrand Reinhold C. New York. Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies. 1970.

[7] SERRE, J.P. Lie Algebras and Lie Groups. W.A. Benjamin Inc. Reading, Massachussets. Mathematical Lecture Notes Series. 3ª Impresión. 1974.

[8] VARADARAJAN, V.S. Lie Groups, Lie Algebras and their Representations. Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall series in Modern Analysis. 1974.

[6] ROTMAN, J. Notes on Homological Algebra.
Van Nostrand Reinhold C. New York.
Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies.
1970.

[7] SERRE, J.P. Lie Algebras and Lie Groups.
W.A. Benjamin Inc. Reading, Massachussets.
Mathematical Lecture Notes Series. 3ª Impresión.
1974.

[8] VARADARAJAN, V.S. Lie Groups, Lie Algebras
and their Representations. Prentice-Hall Inc.
Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall series
in Modern Analysis. 1974.