

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

Hejem.
25

ALGUNAS RELACIONES ENTRE TAXONOMIA
NUMERICA Y CONJUNTOS BORROSOS

Tesis presentada por
Jorge Alejandro Sierra González
para la obtención de la licenciatura
en matemáticas
México D. F.

Diciembre de 1979

6711



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PREFACIO

La idea de este trabajo surgió de la posibilidad de desarrollar y formalizar los métodos de taxonomía numérica, utilizando la teoría de conjuntos borrosos.

En un principio se pensó trabajar sobre el artículo de Yeh y Bang [6] para desarrollar, a partir de ahí, lo que fuera posible. Desafortunadamente este material no tuvo el contenido esperado, por lo que se decidió sólo presentar las contribuciones de estos autores y partir de otro punto para cumplir con el objetivo inicial.

Para hacer lo anterior se revisaron los trabajos de Jardine y Sibson [2], de Kaufmann [3] y de López y Espinosa [4].

Con base en este último se decidió que los métodos B_K de clasificación, propuestos por Jardine y Sibson, eran buenos candidatos para ser manejados por medio de conjuntos borrosos y ahí se centró la atención.

El trabajo de Kaufmann se escogió por ser de hecho una compilación de lo manejado sobre conjuntos borrosos hasta el momento de su publicación, por lo que además resulta una buena guía para evaluar el trabajo de Yeh y Bang en ese aspecto.

El presente material consta de cuatro capítulos, divididos a su vez en varias secciones, y de un apéndice.

El capítulo I está basado fundamentalmente en Jardine y Sibson y presenta los elementos necesarios para comprender los métodos B_K .

El capítulo II se basa en material de Kaufmann y pretende introducir al lector con la teoría de conjuntos borrosos, de la cual se presentan aquellos elementos relacionados con la exposición de los capítulos siguientes.

El artículo de Yeh y Bang se comenta en el capítulo III, presentándose solamente lo relacionado con los métodos expuestos en el capítulo I. También se replantean algunos resultados de Kaufmann, aprovechando elementos introducidos por Yeh y Bang.

En el capítulo IV se llega a una expresión, en términos de relaciones borrosas, que coincide con los métodos B_k y se muestran varias propiedades de éstos.

Para terminar, en el apéndice se presentan una serie de propiedades concernientes a máximos y mínimos que permiten trabajar más fluidamente en los capítulos II, III y IV.

Los elementos de teoría de gráficas que se manejan a lo largo del trabajo pueden consultarse más ampliamente en Harary [1].

Quiero agradecer al doctor Jaime Litvak King, director del Instituto de Investigaciones Antropológicas de la UNAM, las facilidades que se me prestaron para la elaboración de este trabajo; al actuario Manuel Román Enríquez y a las matemáticos Margarita Chávez Cano y Guadalupe Ibarguengoitia González por haberlo revisado; al actuario Arturo López Pérez por su valiosa cooperación en el desarrollo del mismo; y por último y de manera muy especial, al matemático Guillermo Espinosa Velasco, director de esta tesis, por el interés, la paciencia y la valiosa ayuda que en todo momento me prestó.

Agradezco también a mis amigos y a todas aquellas personas que de un modo u otro me impulsaron a terminar esta obra, muy particularmente quiero referirme a mis padres y a mi esposa, a quienes la dedico con cariño.

INDICE

	pag.
CAPITULO I. METODOS B_K	
1. Introducción	1
2. Métodos Jerárquicos	2
3. El Método de Conexión Simple	10
4. Métodos B_K	15
5. Notación y Definiciones Principales	24
CAPITULO II. SUBCONJUNTOS BORROSOS	
1. Introducción	27
2. Subconjuntos Borrosos	28
3. Relaciones Borrosas	34
4. Relaciones Borrosas en un Conjunto V	38
5. Relaciones y Gráficas Borrosas Finitas en V	47
CAPITULO III. CONTRIBUCIONES DE YEH Y BANG EN LA APLICACION DE RELACIONES BORROSAS A TAXONOMIA NUMERICA	
1. Introducción	55
2. Desarrollo	56
2.1 Relaciones Borrosas Debilmente Reflexivas y Simétricas	56
2.2 Relaciones Borrosas Reflexivas y Finitas	66
2.3 Relaciones Borrosas y Taxonomía Numérica	72
3. Comentarios Generales	73
CAPITULO IV. METODOS B_K Y RELACIONES BORROSAS	
1. Introducción	82
2. Métodos de Conexión Simple Y relaciones Borrosas	82
3. Métodos B_K y Relaciones Borrosas	87

4. Ultimos comentarios	109
APENDICE. PROPIEDADES DE MAXIMOS Y MINIMOS	115
BIBLIOGRAFIA	122

CAPITULO I. METODOS B_k

1. Introducción

La idea de este capítulo es presentar de manera breve, y un tanto informal, los métodos de clasificación llamados B_k propuestos por Jardine y Sibson.¹

Se pretende dar al lector una visión rápida de los pormenores de tales métodos para facilitar así la lectura del capítulo IV, en el cual se tratarán los mismos desde el punto de vista de la teoría de conjuntos borrosos y se demostrarán los resultados que aquí se enuncian.

En la sección 2 se presentan los llamados "métodos jerárquicos" entre los que se encuentran el "conexión simple" o 'single-linkage', el "conexión completa" o 'complete-linkage' y otros denominados "de promedios". Estos últimos pueden ser de varios tipos y su comportamiento es ligeramente distinto a lo que se expone en este capítulo, aunque la idea general no varía.

El objeto de presentar los métodos jerárquicos es que el conexión simple, que se detalla en la sección 3, sirvió de base a Jardine y Sibson para definir los metodos B_k como una generalización de él.

La sección 4 muestra los métodos B_k , los cuales incluyen al de conexión simple y no son en general métodos jerárquicos.

Las secciones 2,3 y 4 cuentan con un resumen acompañado de un

¹ Para un desarrollo más completo y formal de tales métodos consulte Jardine y Sibson [2] y Martínez [5].

diagrama y se pretende que junto con la sección 5, donde aparecen las principales definiciones y convenciones de notación, sean una guía clara y concisa del material expuesto en este capítulo.

2. Métodos jerárquicos

Los métodos jerárquicos consisten en producir un árbol o dendrograma a partir de una tabla o matriz llamada coeficiente de disimilaridad.

Esta tabla mide la disimilaridad entre cada pareja de los objetos que se desean clasificar y formalmente se define así:

Definición I.1 Un coeficiente de disimilaridad d , en el conjunto $P = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, es una función $d: P \times P \rightarrow R$ tal que, para toda $a, b \in P$

1. $d(a, a) = 0$
2. $d(a, b) \geq 0$
3. $d(a, b) = d(b, a)$.

Se denotará con $CD(P)$ al conjunto de tales coeficientes.

En un primer paso, los métodos descomponen la tabla dato d por niveles, que son los distintos valores que aparecen en d , asociando a cada nivel $h \in [0, \infty)$ la relación

$$R_d(h) = \{(a, b) \mid d(a, b) \leq h\}.$$

Al pensar en esta relación como una gráfica, los vértices son los elementos de P , es decir los objetos a clasificar, y las

aristas unen aquellos vértices para los cuales la disimilaridad d no excede el valor h .

Como segundo paso, de la gráfica asociada a un nivel h se forman los grupos o 'clusters' para ese nivel. Los diferentes criterios para formar estos grupos son los que originan los distintos métodos jerárquicos.

En general el mecanismo no es tan sencillo como se presenta y algunos de estos métodos no se pueden visualizar fácilmente por medio de gráficas o por medio de R_d , sin embargo, para la finalidad del presente trabajo conviene mostrarlo así.

El utilizar gráficas ofrece dos ventajas: permite dar una idea general de los métodos bastante clara y sencilla, en especial para los que tratan con éstos por primera vez, y proporciona una introducción natural al método de conexión simple, que es el único que se verá con detalle.

Considere pues las relaciones $R_d(h)$, asociadas a cada nivel h de la tabla dato d , y sus respectivas gráficas. Los métodos jerárquicos se basan en un criterio de conexidad, aplicado a cada gráfica, para determinar si en el nivel correspondiente dos elementos de P pertenecen a un mismo grupo o cluster.

Tales criterios deben formar en cada nivel grupos ajenos dos a dos, es decir, particiones de P . A medida que h crece los grupos se van uniendo entre sí, formando grupos mayores, hasta llegar a un nivel en que todos los puntos forman un solo grupo. Lo anterior se debe a la construcción de R_d , ya que conforme h aumenta se van añadiendo parejas a la relación, es decir, a-

ristas a la gráfica correspondiente, lo cual ocasiona que los puntos se presenten más ligados unos con otros.

El nivel en el que todos los puntos de P forman un solo grupo depende de cada método pero en todos los casos resulta menor o igual a la mayor de las entradas de la tabla dato d .

Como se dijo en un principio, el resultado de aplicar un método jerárquico a un coeficiente de disimilaridad es un dendrograma el cual resulta, entonces, una forma gráfica de representar esa evolución o anidamiento sucesivo de los grupos a medida que la h crece.

Sea $E(P)$ el conjunto de relaciones de equivalencia en P .

Definición I.2 Un dendrograma c , en P , es una función

$c: [0, \infty) \rightarrow E(P)$ tal que

1. $0 \leq h \leq h' \Rightarrow c(h) \subset c(h')$
2. Existe $h < \infty$ tal que $c(h) = P \times P$
3. Dado h , existe $\delta > 0$ tal que
 $c(h+\delta) = c(h)$.

Observe que la definición corresponde a la situación descrita en relación al anidamiento de los grupos. Es posible además representar cualquier dendrograma en forma de árbol y de ahí su nombre.

Ahora bien, dado un dendrograma c , es posible construir a partir de él la matriz T_c definida por

$$T_c(a,b) = \inf \{h \mid (a,b) \in c(h)\} \text{ para toda } a,b \in P.$$

Se puede demostrar que T_c es un coeficiente de disimilaridad

en P que satisface la desigualdad ultramétrica.

Sea $D(P)$ el conjunto de dendrogramas definidos en $E(P)$.

Proposición I.1 Sea $c \in D(P)$, entonces

$$T_c \in CD(P) \quad \text{y para toda } a, b, x \in P$$

$$T_c(a, b) \leq \max [T_c(a, x), T_c(b, x)].$$

Esta última es la desigualdad ultramétrica y a los coeficientes de disimilaridad que la cumplen se les llama coeficientes de disimilaridad ultramétricos. En lo sucesivo se denotará con $CDU(P)$ al conjunto de tales coeficientes.

Hasta ahora se ha dicho que los métodos jerárquicos producen un dendrograma a partir de un coeficiente de disimilaridad y que ese dendrograma, a su vez, da lugar a un coeficiente de disimilaridad ultramétrico. En realidad es posible identificar los conjuntos $D(P)$ y $CDU(P)$.

Proposición I.2 La función $T: D(P) \rightarrow CDU(P)$, donde

$$T(c) = T_c, \text{ es biyectiva y su}$$

$$\text{inversa es } T^{-1}(d) = R_d.$$

Este resultado permite replantear los métodos jerárquicos de clasificación, de tal forma que, cada método asocia a un coeficiente de disimilaridad d un coeficiente de disimilaridad ultramétrico d' , ésto es, los métodos jerárquicos modifican la tabla dato para convertirla en ultramétrica y poder obtener así, una representación gráfica sencilla que facilite el análisis de las relaciones entre los objetos a clasificar.

Es claro que la idea implica deformar la disimilaridad original entre los objetos. Los distintos métodos producen distintas deformaciones y cada uno resalta diferentes estructuras inmersas en la información original.

Pedir que la tabla resultante sea ultramétrica equivale a modificar las disimilaridades originales de modo que, pensándolas como distancias, resulte posible representar los elementos de P como puntos de R^{n-1} , donde $n = |P|$.¹

Tal representación cumple que cualquier terna de puntos siempre forma, en el hiperplano que los une, un triángulo equilateral o uno isósceles con el lado desigual menor que los otros, es decir, la desigualdad ultramétrica implica que entre cada tres puntos la mayor de las distancias no debe ser única.

Al pensar en la restricción anterior y considerar que dado el coeficiente de disimilaridad original no es posible, en general, representar los elementos de P como puntos de R^1 , obtener una tabla ultramétrica puede ser una deformación grande de la tabla dato; sin embargo, el hecho de poder representar el resultado en forma de dendrograma y el contar con varios métodos, resulta de gran utilidad en taxonomía numérica.

Resumen de los métodos jerárquicos:

MJ1. Dado $d \in CD(P)$, $R_d(h)$ es reflexiva y simétrica para toda h .

¹ Ver López y Espinosa [4].

MJ2. Dado $d \in \text{CDU}(P)$, $R_d(h)$ es de equivalencia para toda h .

MJ3. Dado $d \in \text{CD}(P)$, entonces

$$1. \quad h \leq h' \Rightarrow R_d(h) \subset R_d(h')$$

$$2. \quad R_d(h) = P \times P \quad \text{para alguna } h < \infty$$

3. Dado h existe $\delta > 0$ tal que

$$R_d(h) = R_d(h+\delta).$$

Observe que las condiciones 1,2 y 3 se desprenden de la definición de coeficiente de disimilaridad y de la construcción de la relación R_d . Tales condiciones son equivalentes a las pedidas en la definición de dendrograma, salvo por el hecho de que en ésta, las $R_d(h)$ no son de equivalencia y en los dendrogramas $c(h)$ sí lo es.

MJ4. Los métodos jerárquicos transforman $R_d(h)$ en $R_{d'}(h)$, la cual es de equivalencia para toda h y satisface los puntos 1,2 y 3 de MJ3. Expresado de otro modo:

MJ5. Los métodos jerárquicos producen un coeficiente de disimilaridad ultramétrico a partir de un coeficiente de disimilaridad cualquiera, es decir

MJ6. El resultado de aplicar un método jerárquico a un coeficiente de disimilaridad es un dendrograma.

MJ7. Observe por último que lo expuesto para coeficientes de disimilaridad es fácil de reinterpretar cuando la información original es un coeficiente de similitud o parecido entre los objetos de P .

Los coeficientes de similitud deben cumplir con:

Definición I.3 Un coeficiente de similaridad en P , es una función $s: P \times P \rightarrow R$ tal que para toda $a, b \in P$ se cumple

1. $s(a, a) = h_s > 0$
2. $0 \leq s(a, b) \leq h_s$
3. $s(a, b) = s(b, a)$.

Ahora bien, dado un coeficiente de similaridad existen dos caminos para aplicar un método jerárquico de clasificación, y ambos son equivalentes:

1. Transformar s en un coeficiente de disimilaridad d_s mediante la función $d_s(a, b) = h_s - s(a, b)$, donde h_s es la máxima similaridad entre los objetos de P . El resto es aplicar el método deseado a d_s .

2. El segundo camino no es usual ya que los algoritmos no lo contemplan, pero es perfectamente válido y como se verá en los siguientes capítulos, tiene una relación directa con la aplicación de conjuntos borrosos en este campo.

La idea consiste en replantear varios conceptos:

La relación $R_d(h)$ se debe sustituir por la relación

$$R_s(h) = \{(a, b) \mid s(a, b) \geq h\} .$$

A continuación se obtienen las gráficas asociadas a R_s y se les aplica el criterio de conexidad del método seleccionado, lo cual produce un árbol que no es exactamente un dendrograma. La diferencia consiste en que los grupos se van uniendo entre sí al disminuir el valor de h , es

decir, habría que modificar el punto 1 de la definición de dendrograma de la siguiente forma

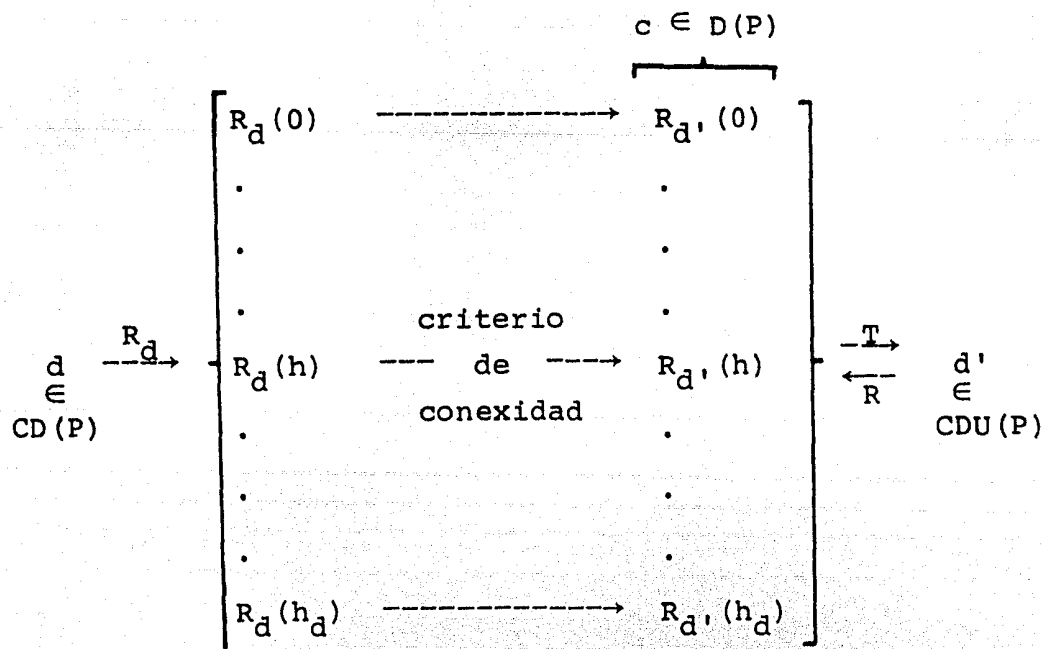
$$1'. \quad 0 \leq h \leq h' \Rightarrow c(h') \subset c(h) .$$

Cambios análogos habría que hacer a la función T y reinterpretar el concepto de ultrametría.

Desde luego, las dos formas de proceder son equivalentes y lo único importante es saber distinguirlas.

Diagrama de los métodos jerárquicos:

Sean $h_d \equiv$ mayor entrada (o nivel) de la tabla dato d y $SR(P) \equiv$ conjunto de las relaciones reflexivas y simétricas en P



Donde para toda h , $R_d(h) \in SR(P)$ y $R_{d'}(h) \in E(P)$.

Observe que T se pudo haber aplicado a las $R_d(h)$ recuperando d .

3. El método de conexión simple

El método de conexión simple es un método jerárquico y se presenta aquí detalladamente porque los métodos B_k , de mayor interés para este trabajo, resultan una extensión natural de él. Como se dijo en la sección anterior, los métodos jerárquicos se basan en la aplicación de un criterio de conexidad para formar los grupos a un nivel h .¹

Tales criterios se aplican a la gráfica determinada por $R_d(h)$ de manera que los grupos sean los elementos de una partición de P . Por lo tanto, los dendrogramas asociados a cada nivel h una relación de equivalencia.

El criterio dado por el método de conexión simple (de ahí su nombre) para que dos elementos de P sean de un mismo grupo al nivel h es que ambos pertenezcan a una misma componente conexa de la gráfica determinada por $R_d(h)$.²

Al analizar dicho criterio se puede decir lo siguiente:

Sea $d \in CD(P)$ y sea $d_1 \in CDU(P)$ la tabla asociada a d por el método de conexión simple.

Considere la gráfica determinada por $R_d(h)$ para algún nivel h . El asociar a h una partición de P donde los grupos, o elementos de la partición, son los vértices de las componentes conexas de la gráfica correspondiente, es equivalente a construir una relación $R_{d_1}(h)$ en la cual se aumentaron el mínimo número

¹ Recuerde que no todos se pueden visualizar así fácilmente.

² Los conceptos de teoría de gráficas aparecen en Harary [1].

3. El método de conexión simple

El método de conexión simple es un método jerárquico y se presenta aquí detalladamente porque los métodos B_k , de mayor interés para este trabajo, resultan una extensión natural de él. Como se dijo en la sección anterior, los métodos jerárquicos se basan en la aplicación de un criterio de conexidad para formar los grupos a un nivel h .¹

Tales criterios se aplican a la gráfica determinada por $R_d(h)$ de manera que los grupos sean los elementos de una partición de P . Por lo tanto, los dendrogramas asocian a cada nivel h una relación de equivalencia.

El criterio dado por el método de conexión simple (de ahí su nombre) para que dos elementos de P sean de un mismo grupo al nivel h es que ambos pertenezcan a una misma componente conexa de la gráfica determinada por $R_d(h)$.²

Al analizar dicho criterio se puede decir lo siguiente:

Sea $d \in CD(P)$ y sea $d_1 \in CDU(P)$ la tabla asociada a d por el método de conexión simple.

Considere la gráfica determinada por $R_d(h)$ para algún nivel h .

El asociar a h una partición de P donde los grupos, o elementos de la partición, son los vértices de las componentes conexas de la gráfica correspondiente, es equivalente a construir una relación $R_{d_1}(h)$ en la cual se aumentaron el mínimo número

¹ Recuerde que no todos se pueden visualizar así fácilmente.

² Los conceptos de teoría de gráficas aparecen en Harary [1].

de parejas (a,b) de $P \times P$ necesarias para convertir $R_d(h)$ en una relación transitiva. La gráfica asociada a $R_{d_1}(h)$ es aquella donde se convirtieron en subgráficas maximales completas las componentes conexas de la gráfica original.

Ya que la idea es bastante sencilla se precisará con más detalle en el siguiente resumen.

Resumen del método de conexión simple:

- CS1. Los grupos en un nivel h son los vértices de las componentes conexas de la gráfica asociada a $R_d(h)$.
- CS2. Lo anterior equivale a construir una nueva gráfica, añadiendo el mínimo número de aristas para convertir en subgráficas maximales completas las componentes conexas.
- CS3. Al pensar en $R_d(h)$, se están agregando elementos de $P \times P$ para producir una relación transitiva $R_{d_1}(h)$ cuya gráfica asociada es la producida según CS2. Por construcción, se tiene que
- CS4. Proposición I.3 $R_{d_1}(h)$ es la mínima relación transitiva que contiene a $R_d(h)$.

Debido a las definiciones de coeficiente de disimilaridad y de $R_d(h)$ ésta resulta reflexiva y simétrica para toda h , por lo que se tiene:

- CS5. Proposición I.4 $R_{d_1}(h)$ es la mínima relación de equivalencia que contiene a $R_d(h)$.

Por lo que

CS6. Proposición I.5 Sea d_1 el resultado de aplicar el método de conexión simple a la tabla d .

$$d \in \text{CDU}(P) \Rightarrow d_1 = d.$$

Note que d_1 es generado por el conjunto de relaciones $R_{d_1}(h)$, las cuales constituyen, de hecho, un dendrograma. Este último resultado indica que el método de conexión simple no modifica las tabla que ya son ultramétricas, es decir, las que se pueden representar como árbol.

CS7. Dado que $R_d(h) \subset R_{d_1}(h)$ para toda h debido a que la segunda se formó añadiendo elementos de $P \times P$ a la primera, se sigue que:

Proposición I.6 $d_1(a,b) \leq d(a,b)$ para toda $a,b \in P$.

Lo anterior se denota por $d_1 \leq d$ y se lee " d_1 está dominado por d " o " d domina a d_1 ".

CS8. El coeficiente de disimilaridad d_1 es ultramétrico, es decir, para toda $a,b,c \in P$

$$d_1(a,b) \leq \max \{d_1(a,c), d_1(b,c)\}.$$

CS9. Lo anterior equivale a decir que la máxima de las disimilaridades d_1 entre cualesquiera tres puntos de P no es única.

Las consideraciones hechas hasta ahora permiten definir el método de conexión simple tal como lo hicieron Jardí-

ne y Sibson:

CS10. Definición I.4 El método de conexión simple es una función $F: CD(P) \rightarrow CDU(P)$ con $F(d) \equiv d_1$ definido por

$$d_1(a,b) = \sup \{d' \in CDU(P) \mid d' \leq d\}(a,b)$$

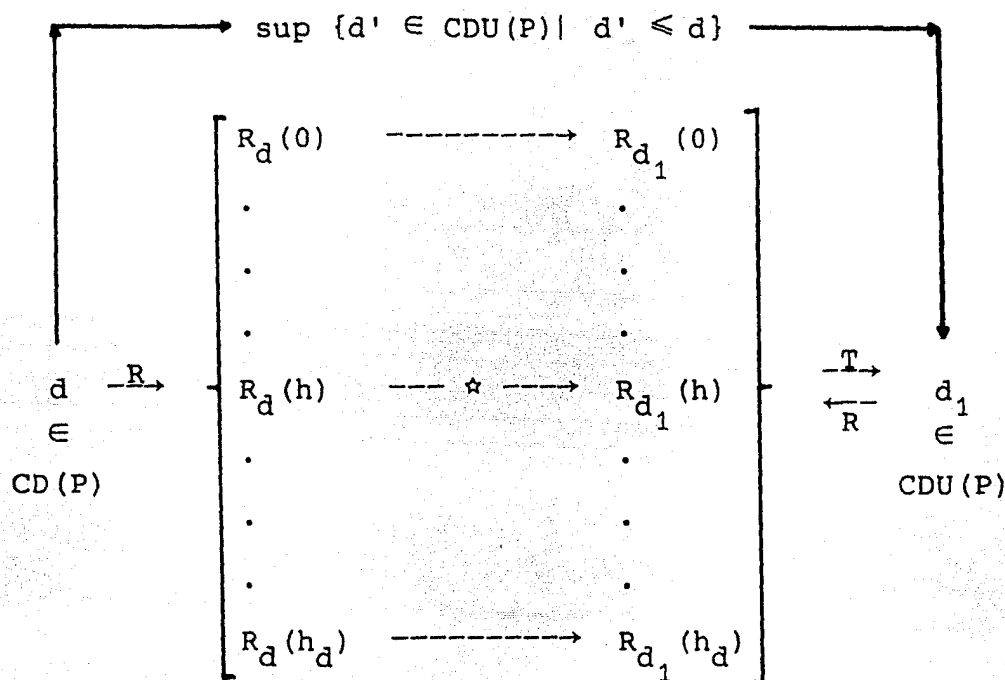
donde dado $Y \subset CDU(P)$, se define

$$\sup Y(a,b) = \sup \{d(a,b) \mid d \in Y\}.$$

Se puede probar que esta definición produce el efecto esperado del método de conexión simple y de hecho se puede entrever de los puntos CS4 y CS7.

En realidad se requieren ciertas condiciones para que la definición sea válida y se comentarán en la siguiente sección, pues de ellas surge una familia de métodos llamados subdominantes, propuestos por Jardine y Sibson, entre los cuales se encuentran los métodos B_k .

Diagrama del método de conexión simple:



Donde para toda h $R_d(h) \in SR(P)$ y $R_{d_1}(h) \in E(P)$.

★ El criterio de conexidad implica añadir el mínimo número de aristas a la gráfica asociada a $R_d(h)$, de tal forma que se conviertan en subgráficas maximales completas las componentes conexas. La gráfica obtenida determina la relación $R_{d_1}(h)$. En otras palabras, $R_{d_1}(h)$ es el resultado de agregar a la relación $R_d(h)$ el mínimo número de parejas (a,b) de $P \times P$ para obtener una relación transitiva.

4. Métodos B_k

En las secciones anteriores se dijo que los métodos jerárquicos deforman un coeficiente de disimilaridad en un coeficiente de disimilaridad ultramétrico con el fin de obtener una representación gráfica sencilla, acerca de las relaciones entre los objetos a clasificar.

Jardine y Sibson proponen la familia de métodos B_k que permiten controlar, en cierta medida, el grado de deformación a la tabla dato, a costa de perder sencillez en la representación gráfica de la tabla resultante.

Tales métodos incluyen al de conexión simple y de acuerdo a su definición forman parte de otra familia de métodos llamados subdominantes, los cuales requieren ciertas condiciones:

Un subconjunto A de $CD(P)$ define el método A -subdominante siempre que para todo subconjunto acotado H de A , la tabla $\sup H$ sea elemento de A , donde $\sup H$ es el definido anteriormente y H es acotado si existe $d \in A$ tal que para todo $d' \in H$ $d' \leq d$.

Sin entrar en más detalles sobre esta cuestión, baste comentar que $CDU(P)$ satisface la condición anterior y por tanto, debido a la definición I.4, al método de conexión simple se le llama el método CDU -subdominante.

En cuanto a los métodos B_k , se dijo que son subdominantes, y la manera en que reducen la deformación causada por el método de conexión simple consiste en relajar la condición de ultrametría, sustituyéndola por la de k -ultrametría:

Definición I.5 Un coeficiente de disimilaridad d es k -ultramétrico si para toda $a, b \in P$ y para todo $Q \subset P$ tal que $|Q| = k$, se cumple que

$$d(a, b) \leq \max [d(a, Q), d(b, Q), d(Q)]$$

donde

$$d(a, Q) = \max \{d(a, q) \mid q \in Q\} \quad y$$

$$d(Q) = \max \{d(q, q') \mid q, q' \in Q\} .$$

Se denotará con $U_k(P)$ al subconjunto de $CD(P)$ de coeficientes k -ultramétricos. Note que $U_1(P) = CDU(P)$.

La definición formal de los métodos B_k es la siguiente:

Definición I.6 El método de clasificación B_k es una función

$$B_k: CD(P) \rightarrow U_k(P) \quad \text{tal que}$$

$$B_k(d) \equiv d_k = \sup \{d' \in U_k(P) \mid d' \leq d\} .$$

Ahora bien, se ha dicho que los métodos B_k reducen la deformación causada por el método B_1 , que es el de conexión simple, al relajar la condición de ultrametría; las proposiciones y los comentarios siguientes muestran qué implicaciones acarrea tal cambio.

Pedir que una tabla sea ultramétrica equivale a pedir que la máxima de las disimilaridades entre cada tres puntos no sea única. Las tablas k -ultramétricas cumplen que la máxima de las disimilaridades entre cada $k+2$ puntos no es única.

Proposición I.6 $U_k(P) \subset U_{k+1}(P)$.

Por lo tanto, a medida que k aumenta, el contradominio de B_k

es un subconjunto de $CD(P)$ cada vez mayor, hasta el punto de que para $k = |P| - 1$ la k -ultrametría se cumple para todo $d \in CD(P)$, es decir:

Proposición I.7 $U_{n-1}(P) = CD(P)$, donde $n = |P|$.

Por lo anterior, es claro que esta familia de métodos produce una deformación gradual de la tabla original d , desde $d_{n-1} = d$ hasta d_1 , según sea el valor de k . La idea consiste en ir transformando la tabla d de k -ultramétrica en $(k-1)$ -ultramétrica, hasta llegar a un valor de k en el cual resulte posible interpretar las gráficas resultantes. Conocer este valor da una buena medida del grado de deformación que hubo que hacer a d para llegar a un resultado.

Respecto al tipo de deformación que producen dos valores de k es interesante el próximo resultado, muy útil además en la creación de algoritmos.

Proposición I.8 $d_{k-1} = (d_k)_{k-1}$.

Por lo anterior, no es necesario volver a la tabla original d cada vez que se quiere reducir k , sino que basta tomar el resultado de la última k y aplicarle el método con la nueva k , esto evita muchos cálculos y significa que de algún modo, las deformaciones de todos los métodos van en la misma dirección. Al analizar el comportamiento de los métodos B_k en términos de las relaciones y gráficas obtenidas para cada nivel la situación es la siguiente:

Se dijo que el método B_1 asocia a cada relación $R_d(h)$ la relación $R_{d_1}(h)$ obtenida al aumentar el mínimo número de elementos de $P \times P$ necesarios para que ésta sea transitiva, o equivalentemente, las aristas necesarias para convertir en subgráficas maximales completas a las componentes conexas de la gráfica asociada a $R_d(h)$.

Como ésta es siempre reflexiva y simétrica, la nueva relación es de equivalencia y al variar h se genera un dendrograma. Considere la gráfica asociada a $R_d(h)$, pedir la k -ultrametría implica formar una nueva gráfica en la cual dos puntos se deben unir si existen k puntos conectados todos entre sí y a los que ambos puntos están unidos. Cada vez que se añada una arista el proceso debe repetirse hasta que ya no sea posible agregar aristas en ese nivel h . La gráfica resultante es la asociada a $R_{d_k}(h)$ y los grupos en ese nivel son los vértices de las subgráficas maximales completas. Al variar el valor de h se producen las relaciones que generan el coeficiente de disimilaridad k -ultramétrico d_k .

Observe que el procedimiento seguido evita que en d_k aparezcan $k+2$ puntos entre los cuales la mayor de sus disimilaridades sea única, ya que en los casos en que eso ocurría en la tabla original, se redujeron sus disimilaridades en d_k al amentar aristas en las gráficas asociadas a ésta. De ahí que d_k esté dominado por d , es decir $d_k \leq d$.

Note que los grupos formados en un nivel h no son, en general, ajenos dos a dos. Lo que se está regulando de hecho, con los

diferentes valores de k , es el número de elementos en la intersección de dos grupos en cualquier nivel h , de tal forma que el método B_k produce, para cada nivel, grupos con a lo más $k-1$ puntos en común. Es justamente el traslape entre los grupos lo que dificulta la interpretación de los resultados, a costa de reducir la deformación a la tabla original.

Por otro lado, el hecho de posibles traslapes entre los grupos implica que las relaciones $R_{d_k}(h)$, salvo para $k = 1$, no son de equivalencia, es decir, para $k \geq 2$ los métodos B_k no producen particiones de P en cada nivel y por tanto no son métodos jerárquicos.

La siguiente definición permite precisar y formalizar la situación en cada nivel.

Definición I.7 Sean $a, b, c_1, c_2, \dots, c_k \in P$. Una relación R en P es k -transitiva si

$$\begin{aligned} \{(a, c_i) \mid i = 1, 2, \dots, k\} &\subset R, \\ \{(c_i, b) \mid i = 1, 2, \dots, k\} &\subset R \quad \text{y} \\ \{(c_i, c_j) \mid i, j = 1, 2, \dots, k\} &\subset R \\ \Rightarrow (a, b) &\in R.^1 \end{aligned}$$

El efecto del método B_k es convertir $R_d(h)$ en la mínima relación k -transitiva que la contenga, a saber $R_{d_k}(h)$. En esta perspectiva es posible generalizar la definición de dendrogra-

¹ Algunos autores llaman a esta propiedad k -transitividad débil, por el hecho de incluir la condición última, es decir $\{(c_i, c_j) \mid i, j = 1, 2, \dots, k\} \subset R$.

ma.

Sea $E_k(P)$ el conjunto de relaciones reflexivas, simétricas y k -transitivas en P , que en lo sucesivo se llamarán de k -equivalencia.

Definición I.8 Un k -dendrograma es una función

$c: [0, \infty) \rightarrow E_k(P)$ tal que

1. $0 \leq h \leq h' \Rightarrow c(h) \subset c(h')$
2. Existe $h < \infty$ tal que $c(h) = P \times P$
3. Dado h , existe $\delta > 0$ tal que

$$c(h+\delta) = c(h).$$

Observe que aunque los métodos B_k son una extensión natural del método de conexión simple (B_1), la idea surge de la posibilidad de definir a este último como una función de $CD(P)$ a un subconjunto de él mismo. Al hacer cada vez mayor dicho subconjunto, se deforma menos el coeficiente original.

Resumen de los métodos B_k :

Bk1. A partir de la gráfica determinada por $R_d(h)$, los grupos en ese nivel h son los vértices de las subgráficas maximales completas obtenidas mediante el siguiente procedimiento:

Si dos subgráficas maximales completas tienen k o más vértices en común, añádanse las aristas necesarias para que formen una sola subgráfica maximal completa. Repítase lo anterior con la gráfica resultante hasta que ya no

ocurran cambios.

- Bk2. Lo anterior equivale a asociar a $R_d(h)$ la relación $R_{d_k}(h)$ correspondiente a la nueva gráfica. Dado que sólo se añadieron aristas se tiene que $R_d(h) \subset R_{d_k}(h)$.
- Bk3. $R_{d_k}(h)$ es el resultado de convertir $R_d(h)$ en una relación k -transitiva y por lo tanto de k -equivalencia, aumentando para ello el menor número posible de elementos de $P \times P$.
- Bk4. Proposición I.9 $R_{d_k}(h)$ es la mínima relación de K -equivalencia que contiene a $R_d(h)$.
- Bk5. Otra manera de decir lo anterior es:

Proposición I.10 $R_{d_k}(h)$ es la mínima relación k -transitiva que contiene a $R_d(h)$.

De ahí que el método B_k no modifica a los coeficientes de disimilaridad k -ultramétricos, para los cuales $R_d(h)$ es una relación k -transitiva para toda h .

- Bk6. Proposición I.11 $d \in U_k(P) \Rightarrow d_k = d$.
- Bk7. Por otro lado, es posible identificar los k -dendrogramas con $U_k(P)$, ya que si $d \in U_k(P)$ entonces $R_d(h)$ es de k -equivalencia para toda h .
- Bk8. $R_d(h) \subset R_{d_k}(h)$ para toda h , implica $d_k(a,b) \leq d(a,b)$ para toda $a, b \in P$, es decir, d_k está dominado por d .

Bk9. d_k es k -ultramétrica, es decir, la máxima de las disimilitudes entre cada $k+2$ puntos no es única.

Bk10. El método de clasificación B_k es una función

$$B_k: CD(P) \rightarrow U_k(P) \text{ tal que } B_k(d) \equiv d_k, \text{ donde} \\ d_k = \sup \{d' \in U_k(P) \mid d' \leq d\} .$$

Bk11. Observe que $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_{n-1} = d$, donde $n = |P|$,
 $CDU(P) = U(P) \subset U_2(P) \subset \dots \subset U_{n-1}(P) = CD(P)$ y por
 último $B_{k-1}(d) = B_{k-1}(d_k)$.

Todo lo anterior implica que es posible deformar la tabla original d en forma gradual hasta obtener d_1 y además, cada deformación contribuye para el cálculo de la siguiente.

Diagrama de los métodos B_k :

En el siguiente diagrama se dan estas situaciones:

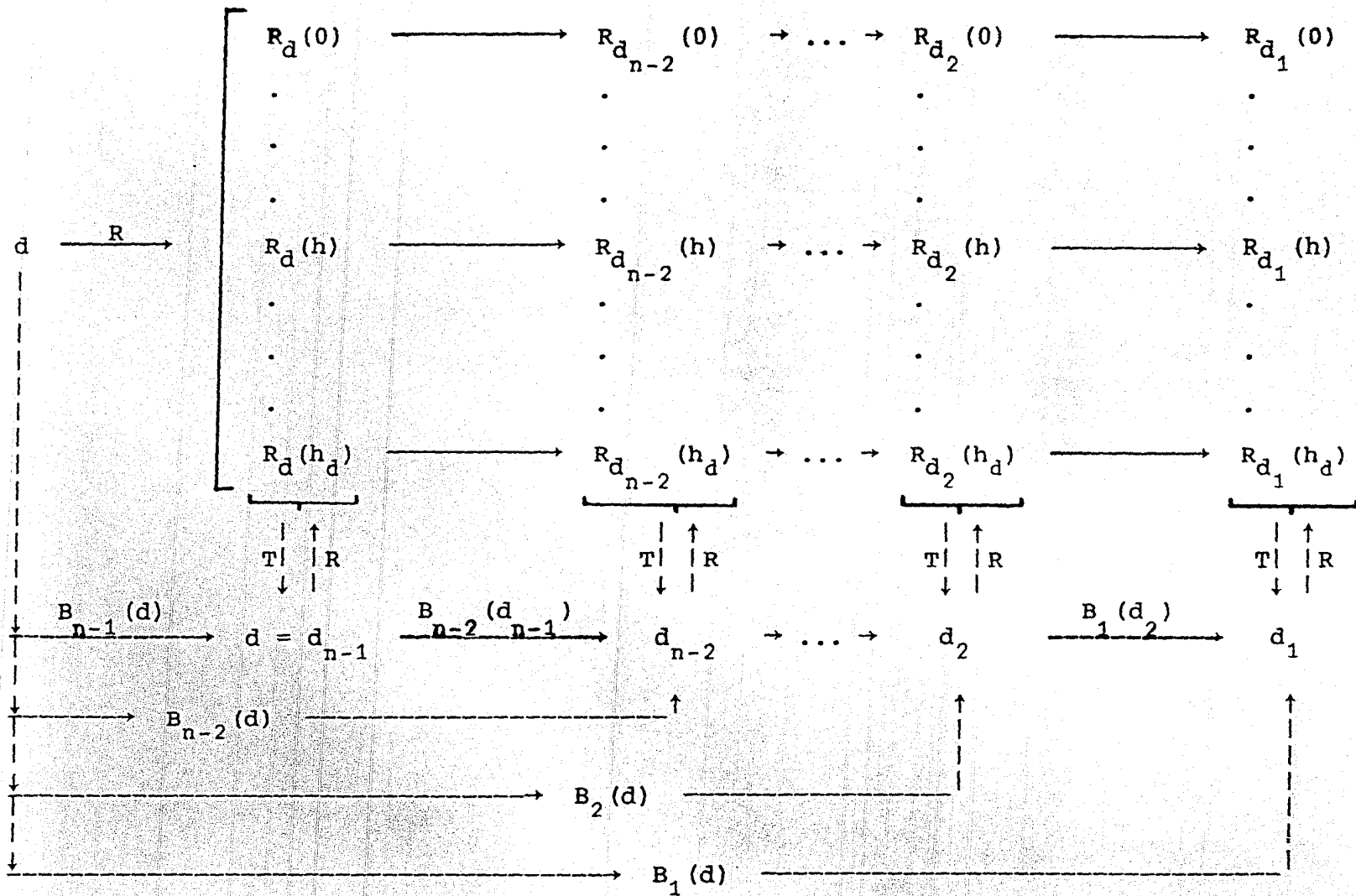
$$d_k \in U_k(P) \text{ para } k = 1, 2, \dots, n-1 \text{ donde } n = |P| .$$

$$B_k(d) = B_k(d_{k+1}) = d_k = \sup \{d' \leq d \mid d' \in U_k(P)\} .$$

$$R_{d_k}(h) \in E_k(P)$$

$$R_{d_k}(h) = \min \{R \in E_k(P) \mid R_d(h) \subset R\} .$$

$$d \in CD(P) = U_{n-1}(P)$$



5. Notación y definiciones principales

El objeto de esta sección es complementar los resúmenes y diagramas de las secciones anteriores, para proporcionar al lector una guía de consulta rápida.

Los conceptos se presentan prácticamente en orden alfabético. Aquellos que comienzan con k , por ser generalización de otros, se ordenaron sin considerar la k .

$CD(P) \cong$ conjunto de coeficientes de disimilaridad en P .

$CDU(P) \cong U_1(P)$.

$d \cong$ elemento de $CD(P)$, es decir,

$d: P \times P \rightarrow R$ y para toda $a, b \in P$

1. $d(a, a) = 0$
2. $d(a, b) \geq 0$
3. $d(a, b) = d(b, a)$.

$d' \leq d \cong d'(a, b) \leq d(a, b)$ para toda $a, b \in P$ y se lee " d domina a d' ".

$d_1 \cong$ resultado de aplicar el método de conexión simple, o equivalentemente el método B_1 , al coeficiente de disimilaridad d .

$d_k \cong$ resultado de aplicar el método B_k a la tabla d , es decir, $d_k = \sup \{d' \in U_k(P) \mid d' \leq d\}$.

Además $d_k \in U_k(P)$, i.e., $B_k: CD(P) \rightarrow U_k(P)$.

5. Notación y definiciones principales

El objeto de esta sección es complementar los resúmenes y diagramas de las secciones anteriores, para proporcionar al lector una guía de consulta rápida.

Los conceptos se presentan prácticamente en orden alfabético. Aquellos que comienzan con k , por ser generalización de otros, se ordenaron sin considerar la k .

$CD(P) \cong$ conjunto de coeficientes de disimilaridad en P .

$CDU(P) \cong U_1(P)$.

$d \cong$ elemento de $CD(P)$, es decir,

$d: P \times P \rightarrow R$ y para toda $a, b \in P$

1. $d(a, a) = 0$
2. $d(a, b) \geq 0$
3. $d(a, b) = d(b, a)$.

$d' \leq d \cong d'(a, b) \leq d(a, b)$ para toda $a, b \in P$ y se lee " d domina a d' ".

$d_1 \cong$ resultado de aplicar el método de conexión simple, o equivalentemente el método B_1 , al coeficiente de disimilaridad d .

$d_k \cong$ resultado de aplicar el método B_k a la tabla d , es decir, $d_k = \sup \{d' \in U_k(P) \mid d' \leq d\}$.

Además $d_k \in U_k(P)$, i.e., $B_k: CD(P) \rightarrow U_k(P)$.

k-dendrograma \cong es una función

$$c: [0, \infty) \rightarrow E_k(P) \quad \text{tal que}$$

1. $0 \leq h \leq h' \rightarrow c(h) \subset c(h')$
2. Existe $h < \infty$ tal que $c(h) = P \times P$
3. Dado h , existe $\delta > 0$ tal que

$$c(h+\delta) = c(h).$$

$D_k(P)$ \cong conjunto de k-dendrogramas definidos en $E_k(P)$.

$E_k(P)$ \cong conjunto de relaciones de k-equivalencia en P. Son relaciones reflexivas, simétricas y k-transitivas.

h \cong un valor de la tabla d. También se le dice un nivel de d.

h_d \cong máximo de los valores o entradas de la tabla d.

P \cong conjunto de objetos a clasificar. Es finito.

$R_d(h)$ \cong relación definida por $\{(a,b) \mid d(a,b) \leq h\}$.

RS(P) \cong conjunto de relaciones reflexivas y simétricas en P.

sup H \cong dado un subconjunto H de CD(P), sup H es el coeficiente de disimilaridad definido por

$$\text{sup H } (a,b) = \text{sup } \{d(a,b) \mid d \in H\}.$$

T \cong es una función de $D(P)$ a $CD(P)$ tal que para toda

$$a, b \in P \quad \text{y} \quad c \in D(P)$$

$$T(c) \cong T_c = \inf \{h \mid (a,b) \in c(h)\}.$$

T es biyectiva de $D_k(P)$ a $U_k(P)$ y su inversa es R.

k -transitividad \cong Una relación R en P es k -transitiva si

dados $a, b, c_1, c_2, \dots, c_k \in P$, entonces

$$\{(a, c_i) \mid i = 1, 2, \dots, k\} \subset R,$$

$$\{(c_i, b) \mid i = 1, 2, \dots, k\} \subset R \quad \text{y}$$

$$\{(c_i, c_j) \mid i, j = 1, 2, \dots, k\} \subset R$$

$$\Rightarrow (a, b) \in R.$$

k -ultrametría \cong Un coeficiente de disimilaridad d es k -ul-

tramétrico si para toda $a, b \in P$ y $Q \subset P$

con $|Q| = k$, se cumple que

$$d(a, b) \leq \max [d(a, Q), d(b, Q), d(Q)]$$

donde

$$d(a, Q) = \max \{d(a, q) \mid q \in Q\} \quad \text{y}$$

$$d(Q) = \max \{d(q, q') \mid q, q' \in Q\}.$$

$U_k(P) \cong$ conjunto de coeficientes de disimilaridad k -ultramétricos.

CAPITULO II. SUBCONJUNTOS BORROSOS

1. Introducción

En los últimos años se ha venido desarrollando la teoría de conjuntos borrosos, como una generalización de la teoría de conjuntos, que permite hacer aplicaciones en campos muy diversos incluyendo las ciencias exactas, las biológicas, las humanísticas, etc.

Como se verá más adelante, las reglas para operar o manipular conjuntos borrosos resultan a primera vista un tanto extrañas y quizá esta sea la causa por la cual dicha teoría no se ha difundido en forma más amplia, sin embargo, tanto la teoría como sus aplicaciones continúan desarrollándose y Arnold Kaufmann parece haber asumido la tarea de reunir y dar difusión a estos avances.

En 1973 aparece el primer volumen de su obra [3], actualmente se han publicado tres más y están por publicarse otros doce, lo cual constituye una obra de 16 volúmenes en menos de diez años.

El material que aquí se presenta, con excepción de algunas proposiciones y de la mayoría de las demostraciones, está tomado del primer volumen y aporta una buena base para la lectura de los capítulos III y IV.

Para ambientar al lector que se encuentra por primera vez con los conjuntos borrosos, se presentan demostradas muchas de las proposiciones. Algunas demostraciones incluyen, además,

al margen izquierdo, una serie de números entre paréntesis, mismos que reaparecen al pie de la demostración con una nota que justifica el paso de una expresión a otra.

La intención de estas notas poco usuales es evitar al lector releer párrafos anteriores mientras se familiariza con la notación y las definiciones principales. Algunas de ellas van precedidas por una A y se refieren a resultados que se demuestran en el apéndice.

2. Subconjuntos borrosos

Definición II.1 Dado un conjunto V , un subconjunto borroso A de V está definido por una función

$$\mu_A: V \rightarrow [0,1].$$

A la función μ_A se le llama función característica de pertenencia y se dice que $\mu_A(v)$ es el grado de pertenencia del elemento v de V al subconjunto borroso A .

Al intervalo $[0,1]$ de los reales se le llama conjunto de pertenencia y en realidad se puede sustituir por algún otro conjunto M , obteniéndose una definición más general. Observe que al sustituir el intervalo $[0,1]$ por el conjunto $\{0,1\}$, el resultado es un subconjunto de V en el sentido ordinario o usual.

A lo largo del trabajo se usará el símbolo \sim para denotar a los subconjuntos borrosos en la forma A y distinguirlos de los subconjuntos ordinarios.

Definición II.2 Una relación borrosa R de un conjunto V a un conjunto W es un subconjunto borroso del producto cartesiano $V \times W$, caracterizado por $\mu_R: V \times W \rightarrow [0,1]$.

Se dice que $\mu_R(v,w)$ es la intensidad de la relación R entre v y w .

Note que es posible asociar a R una matriz en la que la entrada (i,j) vale $\mu_R(v_i, w_j)$.

Análogamente, R admite una representación en términos de teoría de gráficas como una "digráfica borrosa" en la que, el conjunto de vértices es el asociado a $V \cup W$ y las aristas van de los vértices de V a los de W con un peso de $\mu_R(v,w)$. A esta forma de ver R se volverá en la última sección del capítulo.

Kaufmann proporciona definiciones más amplias tanto de conjuntos como de relaciones borrosas; aquí se han restringido por el interés de la conexión con taxonomía numérica.

Por la misma razón, el resto del material que se presenta en esta sección se haya enfocado desde el punto de vista de relaciones borrosas, sin embargo, todos los conceptos son aplicables a subconjuntos borrosos en general.

En el resto del trabajo se usarán los símbolos \vee y \wedge para denotar máximo y mínimo respectivamente y se usarán en forma indistinta para conjuntos finitos o infinitos. Asimismo, el máximo entre dos cantidades A y B se denotará $A \vee B$, o $\vee[A,B]$, siendo análogo para el mínimo.

Sean \mathcal{R} y \mathcal{S} relaciones borrosas de U a V .

Definición II.3 \mathcal{R} está contenida en \mathcal{S} , denotado por $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ si $\mu_{\mathcal{R}}(u,v) \leq \mu_{\mathcal{S}}(u,v)$ para todo $(u,v) \in U \times V$.

Definición II.4 La unión $(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})$ de \mathcal{R} y \mathcal{S} es la relación borrosa definida por

$$\mu_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}(u,v) = \mu_{\mathcal{R}}(u,v) \vee \mu_{\mathcal{S}}(u,v) \quad \text{para todo } (u,v) \in U \times V.$$

Definición II.5 La intersección $(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})$ de \mathcal{R} y \mathcal{S} es la relación borrosa caracterizada por

$$\mu_{\mathcal{R} \cap \mathcal{S}}(u,v) = \mu_{\mathcal{R}}(u,v) \wedge \mu_{\mathcal{S}}(u,v) \quad \text{para todo } (u,v) \in U \times V.$$

Definición II.6 El complemento $(\bar{\mathcal{R}})$ de \mathcal{R} es la relación borrosa caracterizada por

$$\mu_{\bar{\mathcal{R}}}(u,v) = 1 - \mu_{\mathcal{R}}(u,v) \quad \text{para todo } (u,v) \in U \times V.$$

Definición II.7 Sea $\alpha \in [0,1]$. La relación ordinaria de nivel α inducida por \mathcal{R} , es $R_{\alpha} \subset U \times V$, donde

$$R_{\alpha} = \{(u,v) \mid \mu_{\mathcal{R}}(u,v) \geq \alpha\}.$$

Proposición II.0 Sean \mathcal{R} , \mathcal{S} y \mathcal{T} relaciones borrosas de U a V , entonces

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{S} \text{ y } \mathcal{S} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{R} \subset \mathcal{T}.$$

Proposición II.1 Sean \mathcal{R} y \mathcal{S} relaciones borrosas de U a

V , entonces $R \subset (R \cup S)$.

Proposición II.2 Sean R y S relaciones borrosas de U a V , entonces $(R \cap S) \subset R$.

Proposición II.3 $R \cup S = \bigwedge \{T \mid R \subset T \text{ y } S \subset T\}$, donde R , S y T son relaciones borrosas de U a V .

Demostración. Sean $(u, v) \in U \times V$ y

$$H = \bigwedge \{T \mid R \subset T \text{ y } S \subset T\}$$

\Rightarrow Por construcción de H y por definición de contención (II.3)

$$\mu_R(u, v) \leq \mu_H(u, v) \quad \text{y} \quad \mu_S(u, v) \leq \mu_H(u, v)$$

$$\Rightarrow \mu_R(u, v) \vee \mu_S(u, v) \leq \mu_H(u, v)$$

$$(1) \quad \Rightarrow \mu_{R \cup S}(u, v) \leq \mu_H(u, v)$$

$$\Rightarrow R \cup S \subset H$$

\Leftarrow Por la proposición II.1

$$R \subset (R \cup S) \quad \text{y} \quad S \subset (R \cup S)$$

$$(2) \quad \Rightarrow H \subset (R \cup S)$$

$$\therefore R \cup S = H$$

1. Por definición de unión (II.4).

2. Por construcción de H .

Proposición II.4 Sean R , S y T relaciones borrosas de U a V , entonces $R \cap S = \bigvee \{T \mid T \subset R \text{ y } T \subset S\}$.

Proposición II.5 Sean R , S y T relaciones borrosas de U a V ,

entonces $R \cup (S \cap T) = (R \cup S) \cap (R \cup T)$.

Demostración. Sea $(u, v) \in U \times V$. Por definición de unión (II.4)

$$\begin{aligned}
 \mu_{R \cup (S \cap T)}(u, v) &= \mu_R(u, v) \vee \mu_{S \cap T}(u, v) \\
 (1) \quad &= \mu_R(u, v) \vee [\mu_S(u, v) \wedge \mu_T(u, v)] \\
 (2) \quad &= [\mu_R(u, v) \vee \mu_S(u, v)] \wedge [\mu_R(u, v) \vee \mu_T(u, v)] \\
 &= \mu_{R \cup S}(u, v) \wedge \mu_{R \cup T}(u, v) \\
 &= \mu_{(R \cup S) \cap (R \cup T)}(u, v)
 \end{aligned}$$

1. Por definición de intersección (II.5)

2. Por la proposición A10.

Proposición II.6 Sean R , S y T relaciones borrosas de U a V ,

entonces $R \cap (S \cup T) = (R \cap S) \cup (R \cap T)$.

Proposición II.7 Sea R una relación borrosa de U a V y sea I

un conjunto de índices, entonces $\bigcup_{i \in I} R_i = R$.

Proposición II.8 Sea I un conjunto de índices y sean R_i , S_i

con $i \in I$ relaciones borrosas de U a V ,

entonces $R_i \subset S_i$ para toda $i \in I$

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} R_i \subset \bigcup_{i \in I} S_i.$$

Demostración. Sea $(u, v) \in U \times V$. Por la definición de conten-

ción (II.3) $R_i \subset S_i$ para toda $i \in I$

$\Rightarrow \mu_{R_i}(u, v) \leq \mu_{S_i}(u, v)$ para toda $i \in I$

$$\Rightarrow \bigvee_{i \in I} [\mu_{R_i}(u, v)] \leq \bigvee_{i \in I} [\mu_{S_i}(u, v)]$$

$$(1) \quad \Rightarrow \quad \mu_{\bigcup_{i \in I} R_i}(u, v) \leq \mu_{\bigcup_{i \in I} S_i}(u, v)$$

$$\Rightarrow \quad \bigcup_{i \in I} R_i \subset \bigcup_{i \in I} S_i$$

1. Por definición de unión (II.4).

Proposición II.9 Sea R una relación borrosa de U a V , entonces $\alpha_1 \geq \alpha_2 \Rightarrow R_{\alpha_1} \subset R_{\alpha_2}$.

Demostración. Sea $(u, v) \in U \times V$ y sean $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ tales que $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Por definición de relación ordinaria de nivel α (II.7)

$$\begin{aligned} (u, v) \in R_{\alpha_1} &\Rightarrow \mu_R(u, v) \geq \alpha_1 \\ &\Rightarrow \mu_R(u, v) \geq \alpha_2 \\ &\Rightarrow (u, v) \in R_{\alpha_2} \end{aligned}$$

A continuación se presenta un importante teorema de descomposición.

Teorema II.1 Toda relación borrosa R puede caracterizarse en la forma

$$\mu_R(u, v) = \bigvee_{\alpha} \alpha \cdot \mu_{R_{\alpha}}(u, v) \quad , \text{ con } 0 < \alpha \leq 1$$

Donde $\mu_{R_{\alpha}}$ es la función característica de la relación ordinaria R_{α} y por tanto toma sus valores en el conjunto $\{0, 1\}$, es decir

$$\mu_{R_{\alpha}}(u, v) = 1 \quad \text{si} \quad \mu_R(u, v) \geq \alpha$$

$$\text{y } \mu_{R_\alpha}(u,v) = 0 \quad \text{si } \mu_R(u,v) < \alpha$$

$$\text{Demostración. } \bigvee_{\alpha} [\alpha \cdot \mu_{R_\alpha}(u,v)] = \bigvee_{\alpha \leq \mu_R(u,v)} \alpha = \mu_R(u,v)$$

3. Relaciones borrosas

En esta sección se verán propiedades de las relaciones borrosas que no son aplicables, en general, a cualquier subconjunto borroso.

Definición II.8 La recíproca de una relación borrosa R de U a V , es la relación borrosa R' de V a U , caracterizada por $\mu_{R'}(v,u) = \mu_R(u,v)$.

Definición II.9 Sean R y S relaciones borrosas de U a V y de V a W respectivamente. La composición de R y S , denotada por $R \circ S$ o simplemente RS , es una relación borrosa de U a W caracterizada para todo $(u,w) \in U \times W$ por

$$\mu_{R \circ S}(u,w) = \bigvee_{v \in V} [\mu_R(u,v) \wedge \mu_S(v,w)] .^1$$

Observe que al pensar en matrices, la composición resulta una especie de multiplicación donde las operaciones usuales de suma y producto se sustituyen por \bigvee y \bigwedge respectivamente.

¹ Kaufmann define varios tipos de composición, la que aquí se presenta se llama composición max-min.

Proposición II.10 La composición de relaciones borrosas es asociativa.

Demostración. Sean \mathcal{R} , \mathcal{S} y \mathcal{T} relaciones borrosas de U a V , de V a W y de W a X respectivamente. Por definición de composición (II.9)

$$\begin{aligned}
 \mu_{\mathcal{R} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{T})}(u, x) &= \bigvee_{v \in V} [\mu_{\mathcal{R}}(u, v) \wedge \mu_{\mathcal{S} \circ \mathcal{T}}(v, x)] \\
 &= \bigvee_{v \in V} [\mu_{\mathcal{R}}(u, v) \wedge (\bigvee_{w \in W} [\mu_{\mathcal{S}}(v, w) \wedge \mu_{\mathcal{T}}(w, x)])] \\
 (1) \quad &= \bigvee_{v \in V} [\bigvee_{w \in W} [\mu_{\mathcal{R}}(u, v) \wedge \mu_{\mathcal{S}}(v, w) \wedge \mu_{\mathcal{T}}(w, x)]] \\
 (2) \quad &= \bigvee_{w \in W} [(\bigvee_{v \in V} [\mu_{\mathcal{R}}(u, v) \wedge \mu_{\mathcal{S}}(v, w)]) \wedge \mu_{\mathcal{T}}(w, x)] \\
 &= \bigvee_{w \in W} [\mu_{\mathcal{R} \circ \mathcal{S}}(u, w) \wedge \mu_{\mathcal{T}}(w, x)] \\
 &= \mu_{(\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{T}}(u, x)
 \end{aligned}$$

1. Por la proposición A9.1 .
2. Por las proposiciones A4.3 y A9.1 .

Proposición II.11 Sea \mathcal{R} una relación borrosa de U a V y sean \mathcal{S} y \mathcal{T} relaciones borrosas de V a W , entonces $\mathcal{S} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{R} \circ \mathcal{S} \subset \mathcal{R} \circ \mathcal{T}$.

Demostración. Por definición de contención (II.3) $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \mu_{\mathcal{R}}(u, v) \wedge \mu_{\mathcal{S}}(v, w) \leq \mu_{\mathcal{R}}(u, v) \wedge \mu_{\mathcal{T}}(v, w) \\
 (1) \quad &\Rightarrow \mathcal{R} \circ \mathcal{S} \subset \mathcal{R} \circ \mathcal{T}
 \end{aligned}$$

1. Por definición de composición (II.9).

Proposición II.12 Sean \mathcal{S} y \mathcal{T} relaciones borrosas de U a V y sea \mathcal{R} una relación borrosa de V a W , entonces

$$\text{ces } \underline{S} \subset \underline{T} \Rightarrow \underline{S} \circ \underline{R} \subset \underline{T} \circ \underline{R} .$$

Proposición II.13 Sea \underline{R} una relación borrosa de U a V y sean \underline{S} y \underline{T} relaciones borrosas de V a W , entonces $\underline{R} \circ (\underline{S} \cup \underline{T}) = (\underline{R} \circ \underline{S}) \cup (\underline{R} \circ \underline{T})$.

Demostración. Por definición de composición (II.9)

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{R} \circ (\underline{S} \cup \underline{T})}(u, w) &= \bigvee_{v \in V} [\mu_{\underline{R}}(u, v) \wedge \mu_{\underline{S} \cup \underline{T}}(v, w)] \\ (1) \quad &= \bigvee_{v \in V} [\mu_{\underline{R}}(u, v) \wedge [\mu_{\underline{S}}(v, w) \vee \mu_{\underline{T}}(v, w)]] \\ (2) \quad &= \bigvee_{v \in V} [[\mu_{\underline{R}}(u, v) \wedge \mu_{\underline{S}}(v, w)] \vee \\ &\quad [\mu_{\underline{R}}(u, v) \wedge \mu_{\underline{T}}(v, w)]] \\ (3) \quad &= [\bigvee_{v \in V} [\mu_{\underline{R}}(u, v) \wedge \mu_{\underline{S}}(v, w)]] \vee \\ &\quad [\bigvee_{v \in V} [\mu_{\underline{R}}(u, v) \wedge \mu_{\underline{T}}(v, w)]] \\ (4) \quad &= \mu_{\underline{R} \circ \underline{S}}(u, w) \vee \mu_{\underline{R} \circ \underline{T}}(u, w) \\ (1) \quad &= \mu_{(\underline{R} \circ \underline{S}) \cup (\underline{R} \circ \underline{T})}(u, w) \end{aligned}$$

1. Por definición de unión (II.4).
2. Por la proposición A9 .
3. Por la proposición A4.2 .
4. Por definición de composición (II.9).

Vale la pena mencionar que el resultado anterior no se cumple con la intersección (ver proposiciones A4.2 y A9.2).

Proposición II.14 Sean \underline{S} y \underline{T} relaciones borrosas de U a V y sea \underline{R} una relación borrosa de V a W , entonces $(\underline{S} \cup \underline{T}) \circ \underline{R} = (\underline{S} \circ \underline{R}) \cup (\underline{T} \circ \underline{R})$.

Proposición II.13' Sea \mathcal{R} una relación borrosa de U a V y sea $\{\mathcal{S}_i\}$ con $i \in I$ (un conjunto de índices), una familia de relaciones borrosas de V a W , entonces

$$\mathcal{R} \circ \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{S}_i \right) = \bigcup_{i \in I} (\mathcal{R} \circ \mathcal{S}_i) .$$

Demostración. Sean $u \in U$ y $w \in W$. por definición de composición (II.9)

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{R} \circ \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{S}_i \right)}(u, w) &= \bigvee_{v \in V} [\mu_{\mathcal{R}}(u, v) \wedge \mu_{\bigcup_{i \in I} \mathcal{S}_i}(v, w)] \\ (1) \quad &= \bigvee_{v \in V} [\mu_{\mathcal{R}}(u, v) \wedge [\bigvee_{i \in I} \mu_{\mathcal{S}_i}(v, w)]] \\ (2) \quad &= \bigvee_{v \in V} [\bigvee_{i \in I} [\mu_{\mathcal{R}}(u, v) \wedge \mu_{\mathcal{S}_i}(v, w)]] \\ (3) \quad &= \bigvee_{i \in I} [\bigvee_{v \in V} [\mu_{\mathcal{R}}(u, v) \wedge \mu_{\mathcal{S}_i}(v, w)]] \\ (4) \quad &= \bigvee_{i \in I} \mu_{\mathcal{R} \circ \mathcal{S}_i}(u, w) \\ (1) \quad &= \mu_{\bigcup_{i \in I} (\mathcal{R} \circ \mathcal{S}_i)}(u, w) \end{aligned}$$

1. Por definición de unión (II.4).
2. Por la proposición A9.1 .
3. Por la proposición A4.3 .
4. Por definición de composición (II.9).

Proposición II.14' Sea $\{\mathcal{S}_i\}$, $i \in I$, una familia de relaciones borrosas de U a V y sea \mathcal{R} una relación borrosa de V a W , entonces

$$\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{S}_i \right) \circ \mathcal{R} = \bigcup_{i \in I} (\mathcal{S}_i \circ \mathcal{R}) .$$

4. Relaciones borrosas en un conjunto V

A las relaciones borrosas de V a V se les llamará simplemente relaciones borrosas en V.

Si R es una relación borrosa en V, se denotará con R^n a la n-composición $R \circ R \circ \dots \circ R$ (n-veces).

Proposición II.15 Sea R una relación borrosa en V, entonces

$$\mu_{R^n}(v_0, v_n) = \bigvee_{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}} \left[\bigwedge_{0 \leq i \leq n-1} [\mu_R(v_i, v_{i+1})] \right]$$

Demostración. Por inducción sobre n:

Para $n=2$ se cumple por definición de composición (II.9).

Supóngase cierto para $n=k$, entonces

$$\begin{aligned} \mu_{R^{k+1}}(v_0, v_{k+1}) &= \mu_{R^k \circ R}(v_0, v_{k+1}) \\ (1) \quad &= \bigvee_{v_k} [\mu_{R^k}(v_0, v_k) \wedge \mu_R(v_k, v_{k+1})] \\ (2) \quad &= \bigvee_{v_k} \left[\left[\bigvee_{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}} \left[\bigwedge_{0 \leq i \leq k-1} \mu_R(v_i, v_{i+1}) \right] \right] \right. \\ &\quad \left. \wedge \mu_R(v_k, v_{k+1}) \right] \\ (3) \quad &= \bigvee_{v_k} \left[\bigvee_{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}} \left[\left[\bigwedge_{0 \leq i \leq k-1} \mu_R(v_i, v_{i+1}) \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \wedge \mu_R(v_k, v_{k+1}) \right] \right] \\ (4) \quad &= \bigvee_{v_1, v_2, \dots, v_k} \left[\bigwedge_{0 \leq i \leq k} [\mu_R(v_i, v_{i+1})] \right] \end{aligned}$$

1. Por definición de composición (II.9).
2. Por hipótesis de inducción.
3. Por la proposición A9.1 .
4. Por la proposición A4.3 .

Proposición II.16 Sean \mathcal{R} y \mathcal{S} relaciones borrosas en V , entonces $\mathcal{R} \subset \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{R}^n \subset \mathcal{S}^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Por inducción sobre n :

Sea $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$, entonces para $n=1$ la proposición se cumple.

Supóngase cierta para $n=k$, entonces

- (1) $\mathcal{R}^{k+1} = \mathcal{R}^k \circ \mathcal{R} \subset \mathcal{S}^k \circ \mathcal{R}$, pero
- (2) $\mathcal{S}^k \circ \mathcal{R} \subset \mathcal{S}^k \circ \mathcal{S} = \mathcal{S}^{k+1}$
- (3) $\therefore \mathcal{R}^{k+1} \subset \mathcal{S}^{k+1}$

1. Por hipótesis de inducción y por la proposición II.12.
2. Por la proposición II.11 .
3. Por la proposición II.0 .

Definición II.10 Una relación borrosa \mathcal{R} en V es reflexiva si

$$\mu_{\mathcal{R}}(v, v) = 1 \quad \text{para todo } v \in V .$$

Definición II.11 Una relación borrosa \mathcal{R} en V es simétrica si

$$\mu_{\mathcal{R}}(u, v) = \mu_{\mathcal{R}}(v, u) \quad \text{para todo } u, v \in V .$$

Definición II.12 Una relación borrosa \mathcal{R} en V es transitiva si

$\mathcal{R}^2 \subset \mathcal{R}$, es decir, si para todo $u, v, w \in V$

$$\mu_{\mathcal{R}}(u, w) \geq \bigvee_v [\mu_{\mathcal{R}}(u, v) \wedge \mu_{\mathcal{R}}(v, w)] .$$

Observe que esta última definición es congruente con la definición de transitividad en relaciones formales: $(u,v) \in G$ y $(v,w) \in G \Rightarrow (u,w) \in G$.

Definición II.13 Una relación borrosa en V es de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.¹

A continuación se presenta la versión del teorema de descomposición para relaciones de equivalencia.

Teorema II.2 Una relación borrosa \underline{R} en $V \neq \emptyset$ es de equivalencia \Leftrightarrow para toda $u,v \in V$

$$\mu_{\underline{R}}(u,v) = \bigvee_{\alpha} \alpha \cdot \mu_{R_{\alpha}}(u,v) \quad , \quad 0 < \alpha \leq 1$$

donde las R_{α} son las relaciones ordinarias de nivel α inducidas por \underline{R} y cumplen con:

1. R_{α} es de equivalencia, $\alpha \in [0,1]$

2. $\alpha_1 > \alpha_2 \Rightarrow R_{\alpha_1} \subset R_{\alpha_2}$.²

Demostración. En vista de la proposición II.9 y del teorema II.1, sólo falta checar el punto 1.

Sea $\alpha \in [0,1]$. Por la definición de relación

¹ En teoría de conjuntos borrosos es usual llamar relaciones de similitud a las de este tipo, en este trabajo no se usa ese término porque tiene otro significado en taxonomía numérica.

² En [3] p.142 este resultado se enuncia con un error de impresión, dice $R_{\alpha_2} \subset R_{\alpha_1}$. Ver también p.28 y 66.

ordinaria de nivel α (II.7) se tiene:

\Rightarrow Sea \mathcal{R} de equivalencia, entonces para todo $u, v, w \in V$

$$i) \mathcal{R} \text{ reflexiva} \Rightarrow \mu_{\mathcal{R}}(v, v) = 1$$

$$\Rightarrow (v, v) \in R_{\alpha}$$

$$ii) (u, v) \in R_{\alpha} \Rightarrow \mu_{\mathcal{R}}(u, v) \geq \alpha$$

y por simetría de \mathcal{R}

$$\Rightarrow \mu_{\mathcal{R}}(v, u) \geq \alpha \Rightarrow (v, u) \in R_{\alpha}$$

$$iii) (u, v) \in R_{\alpha} \text{ y } (v, w) \in R_{\alpha}$$

$$\Rightarrow \mu_{\mathcal{R}}(u, v) \geq \alpha \text{ y } \mu_{\mathcal{R}}(v, w) \geq \alpha$$

y por transitividad de \mathcal{R}

$$\Rightarrow \mu_{\mathcal{R}}(u, w) \geq \alpha \Rightarrow (u, w) \in R_{\alpha}$$

$\therefore R_{\alpha}$ es de equivalencia.

\Leftarrow Sea R_{α} , $\alpha \in [0, 1]$ de equivalencia, entonces

i) R_1 reflexiva

$$\Rightarrow (v, v) \in R_1 \text{ para toda } v \in V$$

$$\Rightarrow \mu_{\mathcal{R}}(v, v) = 1 \text{ para toda } v \in V$$

$$ii) \mu_{\mathcal{R}}(u, v) = \bigvee_{\alpha} \alpha \cdot \mu_{R_{\alpha}}(u, v)$$

$$= \bigvee_{\alpha} \alpha \cdot \mu_{R_{\alpha}}(v, u) = \mu_{\mathcal{R}}(v, u)$$

iii) Sean $u, v, w \in V$, $\mu_{\mathcal{R}}(u, v) = \alpha$ y

$$\mu_{\mathcal{R}}(v, w) = \beta, \text{ entonces}$$

para $\gamma = \alpha \wedge \beta$ se tiene que

$$(u, v) \in R_\gamma \quad \text{y} \quad (v, w) \in R_\gamma$$

$$\Rightarrow (u, w) \in R_\gamma$$

$$\Rightarrow \mu_{\underline{R}}(u, w) \geq \gamma = \mu_{\underline{R}}(u, v) \wedge \mu_{\underline{R}}(v, w)$$

$\therefore \underline{R}$ es de equivalencia.

Observe que el teorema anterior se puede descomponer, de hecho, en tres resultados. La reflexividad de las R_α se prueba a partir de la reflexividad de \underline{R} y viceversa, la simetría a partir de la simetría y lo mismo ocurre con la transitividad.

A continuación se analiza el comportamiento de las relaciones borrosas al jugar con las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad. Algunos de estos resultados se replantean en el próximo capítulo, aprovechando un concepto que introducen Yeh y Bang.

Proposición. Una relación borrosa \underline{R} en V es simétrica si y sólo si $\underline{R} = \underline{R}'$ (la recíproca de \underline{R}).

Teorema II.3 Sea \underline{R} una relación borrosa en V simétrica y transitiva, entonces para todo $u, v, w \in V$

$$\mu_{\underline{R}}(u, v) \geq \wedge [\mu_{\underline{R}}(u, w), \mu_{\underline{R}}(v, w)] .$$

Al pensar en gráficas borrosas, el resultado anterior dice que si la gráfica (se considera la simetría al no decir digráfica)

fica) es transitiva, entonces el mínimo de los pesos entre cualesquiera tres aristas no es único. Al recordar la desigualdad ultramétrica, tomando en cuenta que aquí se habla de parecidos y no de disimilitudes, el teorema anterior resulta interesante por su conexión con taxonomía numérica.

Proposición II.17 Sea \mathbb{R} una relación borrosa reflexiva en V , entonces para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} .$$

Demostración. Por inducción sobre n :

$$(1) \quad \mu_{\mathbb{R}}(u, w) = \mu_{\mathbb{R}}(u, u) \wedge \mu_{\mathbb{R}}(u, w)$$

$$(2) \quad \leq \bigvee_v [\mu_{\mathbb{R}}(u, v) \wedge \mu_{\mathbb{R}}(v, w)] = \mu_{\mathbb{R}^2}(u, w)$$

Supóngase cierto para $n=k-1$, entonces

$$(3) \quad \mathbb{R} \circ \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R} \circ \mathbb{R}^{k-1} = \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R} \circ \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{k+1}$$

$$(4) \quad \therefore \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$$

1. Por reflexividad de \mathbb{R} .
2. Por definición de composición (II.9).
3. Por la proposición II.11 .
4. Por la proposición II.0 .

Proposición II.18 Una relación borrosa \mathbb{R} en V es transitiva

$$\Leftrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R} \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Por la definición II.12, \mathbb{R} es transitiva \Leftrightarrow

$\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}$. El resto se sigue fácilmente por inducción puesto que, por la proposición II.11

$$\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \circ \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R} \circ \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}, \text{ etc.}$$

Teorema II.4 Sea R una relación borrosa reflexiva y transitiva en V , entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, $R^n = R$.

Definición II.14 La cerradura transitiva de una relación borrosa R en V , es la relación borrosa \hat{R} en V , tal que $\hat{R} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$

Los siguientes teoremas justifican el nombre de \hat{R} .

Teorema II.5 Sea R una relación borrosa en V , entonces \hat{R} es transitiva.

Demostración. $\hat{R}^2 = \hat{R} \circ \hat{R}$

$$(1) \quad = \hat{R} \circ \left(\bigcup_i R^i \right), \quad i \in \mathbb{N}$$

$$(2) \quad = \bigcup_i (\hat{R} \circ R^i), \quad i \in \mathbb{N}$$

$$(1) \quad = \bigcup_i [\left(\bigcup_j R^j \right) \circ R^i], \quad i, j \in \mathbb{N}$$

$$(3) \quad = \bigcup_i [\bigcup_j (R^j \circ R^i)], \quad i, j \in \mathbb{N}$$

$$(4) \quad = \bigcup_{n \geq 2} R^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(5) \quad \subset \left[\bigcup_{n \geq 2} R^n \right] \cup R, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(1) \quad = \hat{R}$$

1. Por definición de cerradura transitiva (II.14).
2. Por la proposición II.13'.
3. Por la proposición II.14'.
4. Por la proposición II.7, es posible simplificar los términos de la forma $\bigcup_{k=1}^{n-1} R^k$.
5. Por la proposición II.1.

Teorema II.6 Sean \mathcal{R} y \mathcal{T} relaciones borrosas en V , entonces

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{T} \text{ y } \mathcal{T} \text{ transitiva} \Rightarrow \hat{\mathcal{R}} \subset \mathcal{T}.$$

Demostración. Se hará en dos partes.

Sea $\hat{\mathcal{T}}$ la cerradura transitiva de \mathcal{T} , entonces

i) Por la proposición II.16

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \subset \mathcal{T} &\Rightarrow \mathcal{R}^n \subset \mathcal{T}^n \text{ para toda } n \in \mathbb{N} \\ (1) \quad &\Rightarrow \bigcup_n \mathcal{R}^n \subset \bigcup_n \mathcal{T}^n, \quad n \in \mathbb{N} \\ (2) \quad &\Rightarrow \hat{\mathcal{R}} \subset \hat{\mathcal{T}} \end{aligned}$$

ii) Por la proposición II.18

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \text{ transitiva} &\Rightarrow \mathcal{T}^n \subset \mathcal{T} \text{ para toda } n \in \mathbb{N} \\ (1) \quad &\Rightarrow \bigcup_n \mathcal{T}^n \subset \bigcup_n \mathcal{T}, \quad n \in \mathbb{N} \\ (3) \quad &\Rightarrow \hat{\mathcal{T}} \subset \mathcal{T} \end{aligned}$$

De i) e ii) se concluye, aplicando la proposición II.0 que $\hat{\mathcal{R}} \subset \mathcal{T}$.

1. Por la proposición II.8 .
2. Por definición de cerradura transitiva (II.14).
3. Por (2) y por la proposición II.7 .

El siguiente resultado es consecuencia de los anteriores.

Proposición II.19 Sea \mathcal{R} una relación borrosa en V , entonces

$$\mathcal{R} \text{ es transitiva} \Leftrightarrow \mathcal{R} = \hat{\mathcal{R}}.$$

Teorema II.7 Sea \mathcal{R} una relación borrosa reflexiva y transitiva en V , entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, $\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{R}^n$.

Teorema II.8 Sea \mathbb{R} una relación borrosa en V . Si existe k tal que $\mathbb{R}^{k+1} = \mathbb{R}^k$, entonces

$$\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^2 \cup \dots \cup \mathbb{R}^k .$$

Demostración. i) Se demuestra fácilmente por inducción que

$$\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{k+1} \Rightarrow \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{k+n} \text{ para toda } n \in \mathbb{N}$$

ii) Por definición de cerradura transitiva

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{R}} &= \bigcup_n \mathbb{R}^n \\ &= \left[\bigcup_{n=1}^{k-1} \mathbb{R}^n \right] \cup \left[\bigcup_{n \geq k} \mathbb{R}^n \right] \\ (1) \quad &= \left[\bigcup_{n=1}^{k-1} \mathbb{R}^n \right] \cup \left[\bigcup_{n \geq k} \mathbb{R}^k \right] \\ (2) \quad &= \left[\bigcup_{n=1}^{k-1} \mathbb{R}^n \right] \cup \mathbb{R}^k \\ &= \bigcup_{n=1}^k \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

1. Por lo que se dijo en i) .
2. Por la proposición II.7 .

Vale la pena mencionar que el recíproco del teorema anterior no se cumple. Kaufmann ([3] p.91-92) da un contraejemplo con una relación borrosa de período dos, para la cual se consigue la cerradura transitiva después de unir la tercera potencia, sin embargo nunca ocurre que dos potencias consecutivas sean iguales.

5. Relaciones y gráficas borrosas finitas en V

Definición II.15 Una relación borrosa en V es finita si
 $|V| < \infty$.

Teorema II.9 Sea \mathbb{R} una relación borrosa finita en V , entonces la sucesión $\{\mathbb{R}^i\}$ es eventualmente periódica.

Demostración. Sea $n=|V|$ y sea $A = \{x \in [0,1] \mid \text{existe } (u,v) \in V \times V \text{ tal que } \mu_{\mathbb{R}}(u,v) = x\}$.

Es claro que $|A| \leq n^2 = |V \times V|$. Por otro lado, de la definición de composición (II.9), es claro también que todas las potencias de \mathbb{R} toman sus valores en A , es decir, para todo $i \in \mathbb{N}$ y $(u,v) \in V \times V$, $\mu_{\mathbb{R}^i}(u,v) \in A$.

Como existen a lo más $(n^2)^{n^2}$ tablas distintas, con n^2 elementos, que tomen sus valores en A , se tiene que

existe $1 \leq h < k \leq (n^2)^{n^2} + 1$ tal que $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^h$

$\Rightarrow \mathbb{R}^{k+i} = \mathbb{R}^k \circ \mathbb{R}^i = \mathbb{R}^h \circ \mathbb{R}^i = \mathbb{R}^{h+i}$ para todo i

$\therefore \{\mathbb{R}^i\}$ es periódica a partir de la primera

k tal que $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^h$ con $h < k$ y su período es justamente $k-h$.

El siguiente resultado es consecuencia del teorema anterior y de la proposición II.17 .

Teorema II.10 Sea \mathbb{R} una relación borrosa en V , entonces
 \mathbb{R} reflexiva y finita \Rightarrow existe k tal que

$$\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{k+1} .$$

Corolario II.1 Sea \mathbb{R} una relación borrosa en V , entonces
 \mathbb{R} reflexiva y finita \Rightarrow existe k tal que

$$\hat{\mathbb{R}} = \bigcup_{n=1}^k \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k .$$

Como se verá más adelante (teorema II.14), la k del resultado anterior resulta menor o igual que $|V|$. Para llegar a eso, es conveniente cambiar el enfoque que se ha dado hasta ahora y pensar en las relaciones borrosas en términos de gráficas borrosas, en el sentido expuesto después de la definición de relación borrosa (p.29).

Por intereses de taxonomía numérica y por seguir el desarrollo de Kaufmann, los conceptos que a continuación se presentan se refieren al caso finito, sin embargo, algunos de ellos se pueden generalizar al caso no finito para lo cual se incluyen las consideraciones pertinentes.

Dado que la simetría tampoco se pide, las gráficas de que se habla son, de hecho, digráficas borrosas.

Definición II.16 Un camino C , entre dos elementos u y v de

de V , en la gráfica borrosa finita R en V ,
es una s -ada ordenada

$$C = (u=w_1, w_2, \dots, w_{s-1}, w_s=v) \quad , \quad \text{donde}$$

para $1 \leq i \leq s-1$ se tiene que

$$\mu_R(w_i, w_{i+1}) > 0 \quad \text{y} \quad w_i \in V.$$

Observe que los elementos de un camino no son necesariamente diferentes entre sí, por lo que se puede tener $s > |V|$.

Definición II.17 La longitud de un camino es igual al número de elementos que lo forman menos uno.

Definición II.18 El valor de un camino $C = (w_1, w_2, \dots, w_s)$ es $\vartheta(C) = \bigwedge_i [\mu_R(w_i, w_{i+1})]$, $1 \leq i \leq s-1$.

Este valor se puede interpretar como "la mejor" fuerza de la relación R entre los puntos u y v , a través del camino C . Al pensar en flujos de u a v , los próximos resultados son bastante interesantes.

Observe además que $\vartheta(C)$ se puede asociar a cualquier camino, independientemente de su longitud, es decir, las definiciones II.16 a II.18 no requieren que la gráfica R sea finita.

Se denotará con $\Gamma_k(u, v)$ al conjunto ordinario de todos los caminos de longitud k de u a v , y con $\Gamma(u, v)$ al conjunto de todos los caminos de u a v (sin importar su longitud).

Definición II.19 Un camino más fuerte de longitud k de u a v

en la gráfica borrosa finita R , denotado $C_k^*(u,v)$, es un camino tal que

$$\vartheta[C_k^*(u,v)] = \bigvee_{C \in \Gamma_k(u,v)} \vartheta(C) .$$

Definición II.20 Un camino más fuerte de u a v en la gráfica borrosa finita R , denotado $C^*(u,v)$, es un camino tal que $\vartheta[C^*(u,v)] = \bigvee_{C \in \Gamma(u,v)} \vartheta(C)$.

Observe que los caminos más fuertes de u a v , sean o no de una longitud dada, no son necesariamente únicos. Asimismo, no se puede garantizar su existencia en el caso no finito.

Existen resultados, sin embargo, que no requieren de la existencia de un camino más fuerte entre dos puntos de V . Tal es el caso de los próximos dos teoremas, los cuales se pueden generalizar al caso no finito hablando del "valor óptimo" de los caminos entre u y v , sin requerir la existencia de un camino que alcance tal valor.

Lo anterior significa que es posible generalizar varios resultados al caso no finito, definiendo

$$\vartheta_k^*(u,v) = \bigvee_{C \in \Gamma_k(u,v)} \vartheta(C) \quad \text{y} \quad \vartheta^*(u,v) = \bigvee_{C \in \Gamma(u,v)} \vartheta(C) ,$$

como el valor óptimo de caminos de longitud k de u a v y el valor óptimo de todos los caminos de u a v , respectivamente.

Teorema II.11 Sea R una relación borrosa finita en V , entonces $\mu_{R^k}(u,v) = \vartheta[C_k^*(u,v)]$.

Demostración. Sean $w_0 = u$ y $w_k = v$. Por definición de camino más fuerte de longitud k (II.19)

$$\begin{aligned} \vartheta[C_k^*(u, v)] &= \bigvee_{C \in \Gamma_k(u, v)} \vartheta(C) \\ (1) \quad &= \bigvee_{w_1, w_2, \dots, w_{k-1}} \vartheta[(w_0, w_1, \dots, w_{k-1}, w_k)] \\ (2) \quad &= \bigvee_{w_1, w_2, \dots, w_{k-1}} \left[\bigwedge_{0 \leq i \leq k-1} \mu_{\mathcal{R}}(w_i, w_{i+1}) \right] \\ (3) \quad &= \mu_{\mathcal{R}^k}(w_0, w_k) = \mu_{\mathcal{R}^k}(u, v) \end{aligned}$$

1. Por significado de $\Gamma_k(u, v)$.
2. Por definición de valor de un camino (II.18).
3. Por la proposición II.15.

Teorema II.12 Sea \mathcal{R} una relación borrosa en V finita, entonces $\mu_{\hat{\mathcal{R}}}(u, v) = \vartheta[C^*(u, v)]$.

Demostración. Por definición de camino más fuerte (II.20)

$$\begin{aligned} \vartheta[C^*(u, v)] &= \bigvee_{C \in \Gamma(u, v)} \vartheta(C) \\ (1) \quad &= \bigvee_k \left[\bigvee_{C \in \Gamma_k(u, v)} \vartheta(C) \right], \quad k \in \mathbb{N} \\ (2) \quad &= \bigvee_k \vartheta[C_k^*(u, v)], \quad k \in \mathbb{N} \\ (3) \quad &= \bigvee_k \mu_{\mathcal{R}^k}(u, v), \quad k \in \mathbb{N} \\ (4) \quad &= \mu_{\bigcup_k \mathcal{R}^k}(u, v), \quad k \in \mathbb{N} \\ (5) \quad &= \mu_{\hat{\mathcal{R}}}(u, v) \end{aligned}$$

1. Por significado de $\Gamma(u,v)$ y de $\Gamma_k(u,v)$.
2. Por definición de camino más fuerte de longitud k .
3. por el teorema II.11.
4. Por definición de unión.
5. Por definición de cerradura transitiva.

Teorema II.13 Sea \mathcal{R} una relación borrosa en V finita, con $|V| = n$, entonces dados $u, v \in V$ y $m \in \mathbb{N}$ con $m > n$, existe $k \leq n$ tal que

$$\vartheta[C_m^*(u,v)] \leq \vartheta[C_k^*(u,v)].$$

Demostración. $m > n = |V|$ implica que los caminos de longitud m de u a v tienen uno o más elementos que se repiten, es decir, en tales caminos existen circuitos (caminos cerrados) o lazos (si para alguna i $w_i = w_{i+1}$).

Es claro que dado cualquier camino de longitud m es posible obtener de él otro camino de longitud menor o igual a n , al retirar uno o más de esos circuitos o lazos.

Sea $C_m^*(u,v)$ un camino más fuerte de longitud m de u a v y sea $C_k(u,v)$, con $k \leq n$, un camino de longitud k de u a v obtenido al reducir $C_m^*(u,v)$ en la forma arriba mencionada.

Por definición de valor de un camino (II.18) y por construcción de $C_k(u,v)$ se tiene que

$$\vartheta[C_m^*(u,v)] \leq \vartheta[C_k(u,v)]$$

$$\leq \bigvee_{C \in \Gamma_k(u,v)} \vartheta(C) = \vartheta[C_k^*(u,v)] \text{ , p.a. } k \leq n$$

El resultado anterior indica que, en toda gráfica borrosa finita, el camino más fuerte entre cualquier pareja de puntos se puede obtener pasando por a lo más $n-1$ puntos, donde $n = |V|$. Al pensar ésto, en relación a los teoremas II.11 y II.12, es posible plantear el resultado al cual se hizo alusión después del corolario II.1.

Teorema II.14 Sea R una relación borrosa en V finita, entonces

$$\text{existe } k \leq |V| \text{ tal que } \hat{R} = \bigcup_{i=1}^k R^i$$

Demostración. Sea $n = |V|$. Por el teorema II.12

$$\begin{aligned} \mu_{\hat{R}}(u,v) &= \vartheta[C^*(u,v)] \\ (1) \quad &= \bigvee_i \vartheta[C_i^*(u,v)] \text{ , } i \in N \\ (2) \quad &= \bigvee_{i \leq k} \vartheta[C_i^*(u,v)] \text{ , p.a. } k \leq n \\ (3) \quad &= \bigvee_{i \leq k} \mu_{R^i}(u,v) \text{ , p.a. } k \leq n \\ (4) \quad &= \mu_{\bigcup_{i=1}^k R^i}(u,v) \text{ , p.a. } k \leq n \end{aligned}$$

1. Por significado de $C^*(u,v)$ y de $C_i^*(u,v)$.
2. Por el teorema II.13. Observe que la k que aquí se propone sirve para todo $(u,v) \in V \times V$ y para toda $m > n$, mientras que la k del teorema II.13 servía para (u,v) y m dados. Lo anterior no representa problema puesto que se está considerando la unión sobre las k 's.
3. Por el teorema II.11.

4. Por definición de unión (II.4).

Por último, se replantea el corolario II.1 considerando el resultado anterior.

Corolario II.2 Sea \mathcal{R} una relación borrosa reflexiva y finita en V , entonces existe $k \leq |V|$ tal que

$$\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{R}^k .$$

CAPITULO III. CONTRIBUCIONES DE YEH Y BANG EN LA APLICACION DE CONJUNTOS BORROSOS A TAXONOMIA NUMERICA

1. Introducción

En general no resulta sencillo precisar la contribución de un trabajo en determinada área. Para evaluar el artículo de Yeh y Bang [6] se escogieron dos obras: la de Kaufmann [3] en lo referente a conjuntos borrosos y la de Jardine y Sibson [2] con relación a taxonomía numérica.

Una gran parte del trabajo de Yeh y Bang está dedicada a presentar, aunque en forma no muy explícita, el método de conexión simple en términos de relaciones borrosas. Dicho material se expone en la siguiente sección de este capítulo, con excepción del manejo algebraico de relaciones borrosas presentado en el capítulo anterior, parte del cual aparece en el artículo de Yeh y Bang pero no se puede considerar contribución de éstos. Por lo demás, se procuró mantener el orden original de su exposición y se insertaron comentarios personales fácilmente distinguibles porque aparecen sangrados y precedidos por una C.

Por otro lado, Yeh y Bang manejan tres métodos de clasificación basados en propiedades de conexidad de gráficas: uno relacionado con el grado de los vértices, otro con los conjuntos de corte (conexidad por líneas) y el último basado en la conexida por vértices.¹

¹ Para información sobre éstos conceptos vea Harary [1] .

Este material no se presentará por no tener relación con los métodos B_k , sin embargo se hará referencia a él en la sección tres de este capítulo, en la cual se comenta el artículo de Yeh y Bang en general.

2. Desarrollo

Antes de exponer el contenido del artículo en cuestión, es necesario establecer la intención de los autores.

Yeh y Bang se proponen demostrar que la aplicación de conjuntos borrosos a taxonomía numérica presenta dos ventajas:

La primera consiste en que es posible manejar una sola gráfica, con lo cual los pesos de las aristas reciben un tratamiento "más justo".¹

La segunda ventaja es que los métodos obtenidos por medio de conjuntos borrosos resultan "más poderosos" que los métodos usuales.

2.1 Relaciones borrosas debilmente reflexivas y simétricas

Definición III.1 Una relación borrosa R en V es α -reflexiva si para todo $u \in V$ $\mu_R(u, u) > \alpha$.

Observe que las relaciones reflexivas (definición II.10) son las 1-reflexivas.

¹ Se refieren a que es posible sustituir las gráficas ordinarias de los diferentes niveles por una sola gráfica borrosa.

Definición III.2 Una relación borrosa R en V es debilmente reflexiva si para todo $u, v \in V$

$$\mu_R(u, u) \geq \mu_R(u, v) .$$

Proposición III.1 Sea R una relación borrosa de V a W , entonces $R \circ R'$ es debilmente reflexiva y simétrica.

Demostración. Por definición de relación recíproca (II.8)

$$\begin{aligned} \text{i) } \mu_{RR'}(u, v) &= \bigvee_{w \in W} [\mu_R(u, w) \wedge \mu_{R'}(w, v)] \\ &\leq \bigvee_{w \in W} [\mu_R(u, w)] \\ &= \bigvee_{w \in W} [\mu_R(u, w) \wedge \mu_{R'}(w, u)] \\ &= \mu_{RR'}(u, u) \end{aligned}$$

$\therefore RR'$ es debilmente reflexiva.

$$\begin{aligned} \text{ii) } \mu_{RR'}(u, v) &= \bigvee_{w \in W} [\mu_R(u, w) \wedge \mu_{R'}(w, v)] \\ &= \bigvee_{w \in W} [\mu_R(v, w) \wedge \mu_{R'}(w, u)] \\ &= \mu_{RR'}(v, u) \end{aligned}$$

$\therefore RR'$ es simétrica.

Definición III.3 Dada una relación borrosa R en V , un subconjunto ordinario $K \subset V$ es α -completo con respecto a R si para todo $u, v \in K$

$$\mu_R(u, v) \geq \alpha .$$

Definición III.4 Un subconjunto ordinario $K \subset V$ es maximal

α -completo con respecto a \underline{R} si no existe ningún subconjunto ordinario α -completo con respecto a \underline{R} que lo contenga propiamente.

En lo sucesivo se llamará a estos subconjuntos de V por α -completos o maximales α -completos, salvo cuando haya que precisar V o \underline{R} . La falta del signo \sim basta para indicar que se trata de subconjuntos ordinarios.

Definición III.5 Dada una relación borrosa \underline{R} en V , debilmente reflexiva y simétrica, se denotará con F^{R_α} a la familia de subconjuntos de V que son maximales α -completos.

Definición III.6 Dada una relación borrosa \underline{R} en V , debilmente reflexiva y simétrica, se define

$$F^R = \bigcup_{\alpha} F^{R_\alpha} .$$

C. Observe la conexión entre la familia de subconjuntos F^{R_α} y la relación ordinaria de nivel α (R_α). Los elementos de la primera son los vértices de las subgráficas maximales completas de la gráfica asociada a R_α , es decir, los maximales α -completos son los vértices de tales subgráficas. Esto permite pensar en F^R como la familia de subgráficas maximales completas de la sucesión de gráficas asociadas a la sucesión de relaciones ordinarias $\{R_\alpha\}$, $\alpha \in [0,1]$.

Note que al pedir que \mathcal{R} sea debilmente reflexiva y simétrica todas las gráficas están bien definidas como tales, sin embargo, por no pedir reflexividad, es posible que para algunos valores de α , la gráfica asociada a R_α no tenga como vértices a todos los elementos de V .

El siguiente resultado es consecuencia de la proposición II.9 y de la construcción de la familia F^{R_α} .

Proposición III.2 Sea \mathcal{R} una relación borrosa debilmente reflexiva y simétrica en V , entonces

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \Rightarrow \text{dado } K_2 \in F^{R_{\alpha_2}}, \text{ existe } K_1 \in F^{R_{\alpha_1}} \text{ tal que } K_2 \subset K_1.$$

C. Lo que ocurre, al pensar en gráficas, es que la gráfica asociada a R_{α_2} es una subgráfica de la gráfica asociada a R_{α_1} , es decir, a medida que los valores de α descienden desde α_2 hasta α_1 se van añadiendo aristas (y quizá vértices) a las gráficas correspondientes.

Observe también que se comienza a manejar un modelo parecido a los del capítulo I, en donde se trabajan sucesiones de gráficas que van completándose hasta formar la gráfica completa (todos los puntos unidos entre sí). La diferencia principal con aquellos modelos es que el valor que aquí de crece (α) allá era creciente (h) puesto que se hablaba de disimilaridades y no de similaridades, como es el caso de las relaciones borrosas.

Proposición III.3 Sea R una relación borrosa debilmente reflexiva y simétrica en V , entonces

$$\mu_R(u,v) \geq \alpha \Rightarrow \text{existe } K \in F^{R_\alpha} \text{ tal que } u, v \in K .$$

Demostración. Sea $\mu_R(u,v) \geq \alpha$ entonces

$$\mu_R(v,u) = \mu_R(u,v) \geq \alpha$$

$\Rightarrow \{u,v\}$ es α -completo

\Rightarrow existe un maximal α -completo $K \in F^{R_\alpha}$ tal que $u, v \in K$.

Definición III.7 Dada una relación borrosa R debilmente reflexiva y simétrica en V , R_α es una relación ordinaria de V a F^R caracterizada por

$$\mu_{R_\alpha}(v,k) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in K \text{ y } K \in F^{R_\alpha} \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Definición III.8 Dada una relación borrosa R debilmente reflexiva y simétrica en V , la relación borrosa \underline{R} de V a F^R está caracterizada por

$$\mu_{\underline{R}}(v,K) = \bigvee_{\alpha} \alpha \cdot \mu_{R_\alpha}(v,K) .$$

C. Observe que R_α es la relación ordinaria que asocia cada elemento v de V con aquellas subgráficas maximales completas de la gráfica inducida por R_α de las cuales v es un

vértice. También las R_α resultan ser las relaciones ordinarias de nivel α (definición II.7) de la relación borrosa \mathcal{R} , debido a la definición de ésta última.

Por otro lado, dado $K \in F^R$ es posible asociarle dos valores de α :

$$\alpha_1(K) = \max \{ \alpha \mid K \in F^{R_\alpha} \} \quad \text{y} \quad \alpha_2(K) = \min \{ \alpha \mid K \in F^{R_\alpha} \}.$$

Note que al variar α desde 1 hasta 0, la subgráfica maximal completa, K , "se forma" en la gráfica asociada a la relación ordinaria $R_{\alpha_1}(K)$. En la gráfica asociada a $R_{\alpha_2}(K)$

la subgráfica completa K deja de ser maximal, para quedar contenida en otra subgráfica maximal completa K' , salvo cuando K es la gráfica completa (todos los puntos unidos entre sí), en cuyo caso $\alpha_2(K) = 0$.

Lo anterior permite ver a la relación borrosa \mathcal{R} , como la que asocia a cada elemento v de V con las subgráficas maximales completas a las cuales pertenece, con un valor igual al de la α en la cual éstas se forman, es decir, si $v \in K$

$$\mu_{\mathcal{R}}(v, K) = \alpha_1(K).$$

Proposición III.4 Dada una relación borrosa \mathcal{R} en V , debilmente reflexiva y simétrica, existen un conjunto W y una relación borrosa \mathcal{S} de V a W tales que $\mathcal{R} = \mathcal{S}\mathcal{S}'$.

Demostración. Sean $W = F^R$ y $\mathcal{S} = \mathcal{R}$, entonces $\mathcal{R}\mathcal{R}'$ es una relación borrosa en V y para todo $u, v \in V$ se tiene que

$$\begin{aligned}\mu_{\underline{R}\underline{R}'}(u,v) &= \bigvee_{K \in F^R} [\mu_{\underline{R}}(u,K) \wedge \mu_{\underline{R}'}(K,v)] \\ &= \bigvee_{K \in F^R} [\mu_{\underline{R}}(u,K) \wedge \mu_{\underline{R}}(v,K)]\end{aligned}$$

Sea $\mu_{\underline{R}}(u,v) = \beta$, Por la proposición III.3,

existe $J \in F^{R_\beta}$ tal que $u, v \in J$

$$\Rightarrow \mu_{R_\beta}(u,J) = \mu_{R_\beta}(v,J) = 1$$

$$\Rightarrow \mu_{\underline{R}}(u,J) = \bigvee_{\alpha} \alpha \cdot \mu_{R_\alpha}(u,J) \geq \beta \quad \text{y}$$

$$\text{análogamente } \mu_{\underline{R}}(v,J) \geq \beta$$

$$\therefore \mu_{\underline{R}\underline{R}'}(u,v) \geq \mu_{\underline{R}}(u,v) = \beta$$

Ahora bien, suponga que $\mu_{\underline{R}\underline{R}'}(u,v) = \delta > \beta$

y sea $2\epsilon = \delta - \beta$, entonces existe $K \in F^R$

$$\text{tal que } \beta + \epsilon \leq [\mu_{\underline{R}}(u,K) \wedge \mu_{\underline{R}}(v,K)] \leq \delta$$

$$\Rightarrow u, v \in K \quad \text{y} \quad K \in \bigcup_{\alpha=\beta+\epsilon}^{\delta} F^{R_\alpha}$$

$$\Rightarrow \mu_{\underline{R}}(u,v) \geq \beta + \epsilon \quad \text{que es una contradicción,}$$

$$\therefore \underline{R} = \underline{R}\underline{R}'$$

El siguiente resultado es consecuencia de la proposición anterior y de la proposición III.1.

Teorema III.1 Una relación borrosa R en V es debilmente reflexiva y simétrica \Leftrightarrow existen un conjunto W y una relación borrosa S de V a W , tales que

$$R = SS'$$

C. Observe que los resultados anteriores son, de hecho, una variación del teorema de descomposición (II.1), en el cual se muestra que toda relación borrosa se puede expresar en términos de sus relaciones ordinarias de nivel α .

Este último teorema además de presentar una caracterización de las relaciones borrosas debilmente reflexivas y simétricas, lleva implícita, de alguna manera, la construcción de \mathcal{R} , es decir, la idea de sustituir las R_α por las relaciones, también ordinarias, \mathcal{R}_α . Lo anterior significa expresar las primeras en función de las subgráficas máxima les completas de sus gráficas asociadas.

La relación entre el teorema anterior y el teorema II.1 se verá con más detalle en la sección 3, pues resulta interesante para evaluar el trabajo de Yeh y Bang.

Definición III.9 Una relación borrosa \mathcal{R} de V a W es α -determinada, si dado $v \in V$ existe a lo más un $w \in W$ tal que $\mu_{\mathcal{R}}(v, w) \geq \alpha$.

Definición III.10 Una relación borrosa \mathcal{R} de V a W es α -productiva, si dado $v \in V$ existe $w \in W$ tal que $\mu_{\mathcal{R}}(v, w) \geq \alpha$.

Definición III.11 Una relación borrosa \mathcal{R} de V a W es α -función, si es α -determinada y α -productiva.

Si $\alpha=1$ sólo se dirá determinada, productiva, etc.

Proposición III.5 Si \underline{R} es una relación borrosa debilmente reflexiva, simétrica y α -reflexiva en V , entonces para toda $\epsilon \leq \alpha$, \underline{R} es ϵ -productiva y $F^{\underline{R}}_{\epsilon}$ es una cubierta de V .

Demostración. Sea $0 \leq \epsilon \leq \alpha$, entonces $\mu_{\underline{R}}(v,v) \geq \alpha \geq \epsilon$

\Rightarrow existe $K \in F^{\underline{R}}_{\epsilon}$ tal que $v \in K$ y como eso ocurre para todo $v \in V$, $F^{\underline{R}}_{\epsilon}$ es una cubierta de V .

También, por definición de \mathcal{R}_{ϵ} se tiene que

$\mu_{\mathcal{R}_{\epsilon}}(v,K) = 1$ y por tanto $\mu_{\underline{R}}(v,K) \geq \epsilon$

$\Rightarrow \underline{R}$ es ϵ -productiva.

Corolario III.1 Sea \underline{R} una relación borrosa reflexiva y simétrica en V , entonces \underline{R} es productiva y para toda $\alpha \in [0,1]$ $F^{\underline{R}}_{\alpha}$ es una cubierta de V .

Proposición III.6 Una relación borrosa \underline{R} en V es reflexiva y simétrica \Leftrightarrow existen un conjunto W y una relación borrosa productiva \underline{S} , de V a W , tales que $\underline{R} = \underline{S}\underline{S}'$.

Demostración. \Rightarrow) Es consecuencia de la proposición III.4 y del corolario anterior.

\Leftarrow) Por la proposición III.1 \underline{R} es debilmente reflexiva y simétrica. Ahora bien, sea \underline{S}

productiva y $v \in V$, entonces

existe $w \in W$ tal que $\mu_{\underline{R}}(v, w) = 1$

$$\Rightarrow 1 = \mu_{\underline{R}}(v, w) \wedge \mu_{\underline{R}'}(w, v)$$

$$\leq \mu_{\underline{R}'}(v, v) \leq 1$$

$$\Rightarrow \mu_{\underline{R}}(v, v) = 1$$

Proposición III.7 Sea \underline{R} una relación borrosa debilmente reflexiva, simétrica y transitiva en V , entonces dado $\alpha \in [0, 1]$, \mathcal{R}_α es determinada y los elementos de F^{R_α} son ajenos dos a dos.

Demostración. Sean $K, K' \in F^{R_\alpha}$ y supóngase $K \cap K' \neq \phi$.

Sea $v \in V$ tal que $v \in K \cap K'$, entonces para toda $w \in K$ y para toda $w' \in K'$

$$\mu_{\underline{R}}(v, w) \geq \alpha \quad \text{y} \quad \mu_{\underline{R}}(v, w') \geq \alpha$$

$$\Rightarrow \mu_{\underline{R}}(w, w') \geq \alpha \quad (\text{debido a que } \underline{R} \text{ es simétrica y transitiva})$$

$\therefore K \cap K'$ es α -completo, pero como ambos son maximales, se concluye que $K = K'$, es de

cir, los elementos de F^{R_α} son ajenos entre sí.

Por lo anterior, si $\mu_{\mathcal{R}_\alpha}(v, K) = 1$, entonces

para toda $K' \in F^{R_\alpha}$ tal que $K \neq K'$, se tie-

ne $\mu_{\mathcal{R}_\alpha}(v, K') = 0$, i.e., \mathcal{R}_α es determinada.

C. Al pensar en gráficas, los resultados anteriores se pueden interpretar así:

1. Si \underline{R} es debilmente reflexiva, simétrica y α -reflexiva, entonces las gráficas asociadas a R_ϵ , con $\epsilon \leq \alpha$, tienen como conjunto de vértices a todo V .
2. Si \underline{R} es simétrica y transitiva¹ entonces, en las gráficas asociadas a R_α , las subgráficas maximales completas son equivalentes a una partición de un subconjunto (no necesariamente propio) de V , a saber, el subconjunto formado por aquellos elementos $v \in V$ para los que $\mu_{\underline{R}}(v,v) > \alpha$.

Corolario III.2 Sea \underline{R} una relación borrosa de equivalencia en V , entonces F^{R_α} es una partición de V para todo $\alpha \in [0,1]$.

2.2 Relaciones borrosas reflexivas y finitas

Yeh y Bang presentan el siguiente material pensando en términos de gráficas, en la forma expuesta después de la definición II.2. Al no trabajar la simetría, se manejarán, de hecho, digráficas borrosas.

Definición III.12 Sea \underline{R} una relación borrosa reflexiva y fi-

¹ En la sección 3 se verá que no es necesario pedir que \underline{R} sea debilmente reflexiva.

nita en V . Un elemento v de V es α -alcanzable desde otro elemento u de V , para $\alpha \in [0,1]$, si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu_{\mathbb{R}^k}(u,v) \geq \alpha .$$

Definición III.13 Dada una relación borrosa \mathbb{R} en V , reflexiva y finita, la matriz de alcanzabilidad de \mathbb{R} , denotada por \mathbb{A} , es la matriz asociada a \mathbb{R}^k , donde k es el menor entero tal que $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{k+1}$.

C. El teorema II.10 garantiza la existencia de dicha k .

Definición III.14 Dada una relación borrosa \mathbb{R} en V , reflexiva y finita, la matriz de α -alcanzabilidad de \mathbb{R} , denotada por A_α , es la relación ordinaria de nivel α de \mathbb{A} .

C. Observe la relación entre los conceptos anteriores y las ideas sobre caminos de u a v presentadas por Kaufmann. En realidad, en vista del corolario II.2, $\mathbb{A} = \hat{\mathbb{R}}$, es decir, \mathbb{A} es la cerradura transitiva de \mathbb{R} .

No se incluyó esta idea en las definiciones por respetar la exposición de Yeh y Bang, sin embargo, conviene unificar la notación de este trabajo por lo que se sustituirán \mathbb{A} por $\hat{\mathbb{R}}$ y A_α por \hat{R}_α . También es claro que v es α -alcanza-

ble desde u si $\mu_{\underline{R}}(u,v) \geq \alpha$ y esta idea es la que se usará en lo sucesivo.

Por tratarse aquí de una evaluación del trabajo de Yeh y Bang, conviene aclarar que ellos no manejan el concepto de relaciones ordinarias de nivel α , sin embargo por las mismas razones de uniformidad, siempre que coincida con las intenciones de Yeh y Bang será usado.

Algoritmo III.1 Determinación de la entrada (i,j) de la matriz de alcanzabilidad \hat{R} , de una relación boroosa reflexiva y finita en V .

1. Sean $\underline{R}(i)$ el i -ésimo renglón de \underline{R} y $x=1$.

2. Calcule $\underline{R}^{x+1}(i)$, el i -ésimo renglón de

\underline{R}^{x+1} , con la fórmula

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{R}^{x+1}}(i,j) &= \mu_{\underline{R}^x \underline{R}}(i,j) \\ &= \bigvee_v [\mu_{\underline{R}^x}(i,v) \wedge \mu_{\underline{R}}(v,j)] \end{aligned}$$

3. Si $\underline{R}^x(i) = \underline{R}^{x+1}(i)$ entonces

$\hat{R}(i) = \underline{R}^x(i)$. En caso contrario incremente la x en uno y regrese al punto 2.

C. Observe que el algoritmo calcula en realidad todo el renglón i de \hat{R} . Por otro lado, es posible que dicho renglón deje de variar en potencias de \underline{R} menores a la potencia para la cual $\underline{R}^k = \underline{R}^{k+1}$, lo que puede ahorrar muchos cálculos.

los innecesarios.

Definición III.15 Sea R una relación borrosa reflexiva y finita en V . La conexidad entre dos elementos u y v de V , denotada por $C(u,v)$, es el mínimo de las alcanzabilidades entre u y v , es decir, $C(u,v) = \mu_{\hat{R} \cap \hat{R}^r}(u,v)$

Definición III.16 Sea R una relación borrosa reflexiva y finita en V . La matriz de conexidad de R es $\zeta = \hat{R} \cap \hat{R}^r$.

Definición III.17 Sea R una relación borrosa reflexiva y finita en V . La matriz de α -conexidad de R denotada por C_α , es la relación ordinaria de nivel α de ζ .

C. Observe que $C(u,v) = \mu_{\zeta}(u,v)$ es un tipo de simetrización de \hat{R} y que es fácil, a partir de ésta, calcular ζ y C_α , cosa que se requiere para asociar a R una relación borrosa de equivalencia lo cual, como se verá más adelante, es comparable con los modelos de taxonomía numérica.

Definición III.18 Sea R una relación (gráfica) borrosa reflexiva y finita en V . Una subgráfica K de R es fuertemente α -conexa si para todo $u,v \in K$ se tiene que $\mu_{\zeta}(u,v) \geq \alpha$.

C. En este punto se está abusando de la notación, pero se espera que no cause confusión el hecho de hablar de \mathcal{R} como gráfica y como relación indistintamente. Asimismo, vale la pena aclarar que por una subgráfica se está entendiendo, fundamentalmente, el conjunto de elementos de V que son vértices de la subgráfica, es decir, en la definición anterior K es un subconjunto de V . Estrictamente, se deberían precisar más estos conceptos pero eso haría más pesada la exposición y no se ganaría gran cosa.

Definición III.19 Sea \mathcal{R} una relación borrosa reflexiva y finita en V . Una subgráfica maximal fuertemente α -conexa de \mathcal{R} es una subgráfica fuertemente α -conexa que no está contenida propiamente en ninguna otra.

Teorema III.2 Sea \mathcal{R} una relación borrosa reflexiva y finita. Una subgráfica K de \mathcal{R} es fuertemente α -conexa
 \Leftrightarrow existe $u \in K$ tal que para todo $v \in K$
 $\mu_{\mathcal{C}}(u, v) \geq \alpha$.

Demostración. \Rightarrow) Es inmediata.

\Leftarrow) Sea $u \in K$ tal que $\mu_{\mathcal{C}}(u, v) \geq \alpha$ para todo $v \in K$ y sean $v, w \in K$, entonces
 $\mu_{\mathcal{C}}(u, v) \geq \alpha$ y $\mu_{\mathcal{C}}(u, w) \geq \alpha$
 $\Rightarrow \mu_{\mathcal{R}}(u, v) \geq \alpha$, $\mu_{\mathcal{R}}(v, u) \geq \alpha$ y

$$\mu_{\hat{R}}(u,w) \geq \alpha \quad , \quad \mu_{\hat{R}}(w,u) \geq \alpha$$

como \hat{R} es transitiva (teorema II.5)

$$\Rightarrow \mu_{\hat{R}}(v,w) \geq \alpha \quad \text{y} \quad \mu_{\hat{R}}(w,v) \geq \alpha$$

$$\Rightarrow \mu_{\hat{C}}(v,w) \geq \alpha$$

$\therefore K$ es fuertemente α -conexa.

Algoritmo III.2 Determinación de las subgráficas maximales fuertemente α -conexas de una relación borrosa R en V , reflexiva y finita.

1. Construya $\mathcal{C} = \hat{R} \cap \hat{R}^r$.
2. Construya la relación ordinaria C_α .
3. El número de renglones distintos en C_α es el número de subgráficas maximales fuertemente α -conexas y para cada uno de estos renglones, la subgráfica maximal correspondiente está dada por los elementos de V cuya entrada es 1.

C. El último punto del algoritmo puede resultar confuso. Lo que ocurre es que al simetrizar \hat{R} , en el momento de calcular \mathcal{C} , se obtiene una relación borrosa de equivalencia ya que tanto \hat{R} como \hat{R}^r son reflexivas y transitivas. El teorema II.2 garantiza que las relaciones ordinarias C_α son de equivalencia y, para cada α , las subgráficas maximales fuertemente α -conexas son los elementos de la partición inducida por C_α .

2.3 Relaciones borrosas y taxonomía numérica

C. El material correspondiente a esta sección, a pesar de ser muy breve, permite hacer numerosas observaciones, las cuales se pospondrán a la siguiente sección para ser integradas a los comentarios generales sobre el artículo que se está analizando.

Lo que a continuación se presenta, incluyendo las observaciones, se ha tomado con apego a dicho artículo.

Sea V el conjunto de objetos a clasificar y la relación borrosa R una medida de la similaridad entre cada pareja de elementos de V .

Definición III.20 Un α -cluster es un subconjunto maximal W de V , tal que cada pareja de elementos de W es mutuamente α -alcanzable.

Algoritmo III.3 Determinación de los α -clusters.

1. Calcule R^2, R^3, \dots, R^k donde k es el menor entero tal que $R^k = R^{k+1}$.

2. Sea $\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^k R^i$ (note que \mathcal{S} es de equivalencia).

3. Construya $F^{\mathcal{S}_\alpha}$. Entonces cada elemento de $F^{\mathcal{S}_\alpha}$ es un α -cluster.

Los α -clusters son iguales a los grupos obtenidos por el método

do de conexión simple. La diferencia entre ambos métodos radica en que los α -clusters se pueden obtener directamente de \mathcal{R} , después de a lo más $|V| - 1$ multiplicaciones de matrices (en el sentido de conjuntos borrosos), mientras que el método de conexión simple requiere producir tantas gráficas como entradas distintas tenga la relación original \mathcal{R} .

3. Comentarios generales

Antes de hacer las observaciones globales sobre el artículo, se hablará con cierto detalle de lo presentado en la sección 2.

La sección 2.1 gira en torno a la idea de que es posible expresar, o recuperar, una relación borrosa R por medio de F^R , es decir, \mathcal{R} genera y puede ser generada por una serie de subconjuntos de V que satisfacen ciertas propiedades.

A lo largo de la sección se exhiben algunas de estas propiedades, se establecen relaciones entre los elementos de V y esos subconjuntos, se presentan algunas caracterizaciones y se juega, principalmente, con los conceptos de α -reflexividad y transitividad a fin de precisar el comportamiento de tales subconjuntos y relaciones.

La diferencia esencial entre este material y el que presenta Kaufmann consiste en no trabajar directamente con las relaciones ordinarias de nivel α sino con las subgráficas maximales completas de las gráficas asociadas a éstas.

Esta variación, aunque permite caracterizar a las relaciones borrosas debilmente reflexivas y simétricas, introduce elementos que dificultan el manejo de \mathcal{R} y que en realidad, como se verá más adelante, no aportan un avance en lo que a taxonomía numérica se refiere.

Conectando las relaciones \mathcal{R}_α propuestas por Yeh y Bang con las relaciones ordinarias de nivel α (R_α), es posible demostrar las siguientes igualdades:

$$\mu_{\mathcal{R}}(u, v) = \bigvee_{\alpha} \alpha \cdot \mu_{R_\alpha}(u, v) = \bigvee_{\alpha} \alpha \cdot \mu_{\mathcal{R}_\alpha \mathcal{R}_\alpha^*}(u, v) = \mu_{\mathcal{R}\mathcal{R}^*}(u, v)$$

Lo anterior significa que $R_\alpha = \mathcal{R}_\alpha \mathcal{R}_\alpha^*$, donde a pesar de tratarse de relaciones ordinarias la composición es en el sentido de conjuntos borrosos; dicho de otra manera, se está descomponiendo R_α por medio de sus cliques.

Observe que es más sencillo trabajar directamente con R_α para llegar a los resultados de Yeh y Bang. Por ejemplo, si \mathcal{R} es de equivalencia, por el teorema II.2 las R_α también lo son y,

como se comentó en su oportunidad, los elementos de $F^{\mathcal{R}_\alpha}$ son las clases de equivalencia de la partición inducida por R_α . Si \mathcal{R} no es transitiva, las R_α tampoco lo son y por tanto, los elementos de $F^{\mathcal{R}_\alpha}$ pueden presentar traslapos. Si \mathcal{R} es α -reflexiva, para $\epsilon \leq \alpha$ las R_ϵ son reflexivas, etc.

Este último concepto de α -reflexividad no es común en problemas de taxonomía numérica. Yeh y Bang, aunque no lo hacen explícito, parecen intentar combinarlo con el concepto de refle

xividad debil para obtener un sustituto de la reflexividad. Presentan una definición de relaciones borrosas de α -equivalencia, que resulta ambigua al no aclarar nada sobre la reflexividad debil, como relaciones α -reflexivas, simétricas y transitivas, después de la cual proponen como inmediato un teorema que es falso:

Teorema (2). Una relación borrosa \mathcal{R} es de α -equivalencia

$$(0 \leq \alpha \leq 1) \Leftrightarrow \text{existen } W \text{ y una } \alpha\text{-función } \mathcal{F} \text{ de } V \text{ a } W \text{ tales que } \mathcal{R} = \mathcal{F}\mathcal{F}^*.$$

La falsedad se debe a que \mathcal{F} no es α -función. Lo que ocurre es que para cada $\epsilon \leq \alpha$ $\mathcal{R}_\epsilon = \mathcal{R}_\epsilon \mathcal{R}_\epsilon^*$, donde \mathcal{R}_ϵ es función en los términos que ellos lo definen, es decir, \mathcal{R}_ϵ es determinada y productiva. Sin embargo, \mathcal{F} que es igual a la relación borrosa generada por las \mathcal{R}_α , i.e., $\mathcal{F} = \mathcal{R}$ es α -productiva pero no α -determinada. Lo anterior con base en las demostraciones hechas por Yeh y Bang, pues aunque el resultado es más general, en el sentido de que no se habla de \mathcal{R} , en las demostraciones se utilizó precisamente \mathcal{R} , como la relación de V a W que satisface los requisitos pedidos, siendo $W = F^R$.

Quizá el concepto más interesante que manejan Yeh y Bang es el de reflexividad debil. El conjunto de relaciones borrosas en V que satisfacen la reflexividad está contenido en el de las debilmente reflexivas y, de hecho, varias propiedades que Kaufmann atribuye a las primeras se pueden extender a las segundas. En este caso se encuentran la proposición II.17 y sus

consecuentes o derivados: teoremas II.4 , II.7 y II.10 , así como los corolarios II.1 y II.2 .

La proposición II.17 se puede replantear así:

Proposición II.17' Sea R una relación borrosa en V debilmente reflexiva, entonces para toda $k \in \mathbb{N}$ se tiene $R \subset R^k \subset R^{k+1}$.

La demostración es exactamente igual a la de la proposición II.17 , de manera que es posible replantear los teoremas y corolarios mencionados en forma análoga.

Otro resultado interesante, al que ya se hizo alusión, y que seguramente Yeh y Bang no advirtieron (ver el enunciado de la proposición III.7) o al menos nunca lo aclararon, haciendo imprecisa la definición de relaciones de α -equivalencia, es el siguiente:

Proposición. Sea R una relación borrosa en V simétrica y transitiva, entonces R es debilmente reflexiva.

La demostración es consecuencia inmediata del teorema II.3 y de la definición III.2 .

Este resultado junto con la proposición II.17' permite también modificar algunos resultados del capítulo II. Por ejemplo, es interesante observar que en los teoremas II.4 y II.7 las condiciones de reflexividad y transitividad se pueden cambiar por las de simetría y transitividad obteniéndose los mismos resultados, los cuales aparentemente dependían en gran me

dida de la hipótesis de reflexividad, siendo en realidad la reflexividad debil la condición requerida.

Con respecto a la sección 2.2 , donde se manejan relaciones reflexivas y finitas, se puede decir que la idea central es lo que Kaufmann llama caminos más fuertes entre dos puntos. La idea de α -alcanzabilidad, como se mencionó anteriormente, es tan solo otra forma de pensar en la cerradura transitiva y no se puede considerar una aportación.

Por otro lado, en lo que a taxonomía numérica se refiere, se introduce la posibilidad de partir de una relación no simétrica, proponiéndose a cambio una simetrización de \hat{R} en el momento de construir la matriz de conexidad.

Los problemas que se presentan para aceptar lo que proponen Yeh y Bang son varios. En primer lugar, no es usual que se presenten problemas que donde no se considere o se solicite la simetría, pero en caso de que esto ocurra hay que discutir el procedimiento a seguir más ampliamente, cosa que Yeh y Bang no hacen. Por ejemplo, es casi inmediato proponer tres tipos de solución: simetrizar la relación original primero y después aplicar los métodos tradicionales, trabajar con la relación original para simetrizar al final, o bien, no simetrizar, es decir, llegar a un resultado no simétrico y proponer una interpretación adecuada para el mismo.

El siguiente es un ejemplo en el cual las dos primeras posibilidades no son equivalentes:

Sea $V = \{a,b,c,d\}$ y R la relación reflexiva cuya matriz es

	a	b	c	d
a	1	.1	.5	.1
b	.1	1	.1	.2
c	.1	.3	1	.1
d	.6	.1	.1	1

Simétrizar R en un principio equivale a calcular una relación borrosa $\mathcal{S} = R \cap R'$ y después calcular la cerradura transitiva de \mathcal{S} , i.e., \mathcal{S} .

Haciendo las operaciones correspondientes se ve que

$\mu_{\hat{R} \cap \hat{R}'}(a,b) = \mu_{\hat{C}}(a,b) = .2$, mientras que trabajando con \mathcal{S} se llega a $\mu_{\mathcal{S}}(a,b) = .1$ todo lo cual indica que es necesario analizar con más detenimiento el caso no simétrico. Los comentarios sobre la sección 2.3 se dejaron pendientes, en parte, porque Yeh y Bang no precisan las características de la relación R . En las primeras secciones jugaron con los conceptos de reflexividad y simetría y en ambos casos tuvieron tropiezos, el de la simetría se acaba de comentar y el de la reflexividad es patente al analizar su intento de caracterizar las relaciones de α -equivalencia.

En este caso los problemas vuelven a surgir por la imprecisión mencionada:

De acuerdo a la definición III.20 los α -clusters son las subgráficas maximales fuertemente α -conexas, las cuales se pueden calcular con el algoritmo III.2, sin embargo, presentan un nuevo algoritmo para calcular los α -clusters como si se tratara de conceptos distintos. Además, la definición parece implicar que R no necesita ser simétrica y como no se precisa esta situación el algoritmo aparece un tanto confuso. En él

se relacionan los α -clusters con los elementos de la familia F^S_α pero no se dá ningún algoritmo para calcular dichos elementos, ni se menciona la equivalencia con el algoritmo III.2. Por otro lado, el punto 1 sugiere que \mathcal{R} es reflexiva y finita, el punto 2 sugiere la simetría (por el comentario de que \mathcal{S} es de equivalencia), sin embargo no es necesario el punto 2 pues por reflexividad se tiene que la k del punto uno es la potencia de \mathcal{R} igual a la cerradura transitiva, es decir, no es necesario calcular la unión de las potencias de \mathcal{R} sino que basta considerar $\mathcal{S} = \mathcal{R}^k = \hat{\mathcal{R}}$.

En otro orden de ideas, la afirmación de que es más sencillo calcular los α -clusters que los grupos producidos por el método de conexión simple es falsa, ya que los algoritmos usuales para calcular dicho método requieren también de a lo más $n-1$ pasos (donde $n = |V|$) y no de tantos pasos como valores distintos tenga \mathcal{R} .

Los comentarios que se pueden hacer sobre el trabajo de Yeh y Bang, en general, no son halagadores. El artículo está salpicado de errores, imprecisiones y falta de coherencia entre un material y otro.

Ejemplos de lo primero son el teorema(2), comentarios sobre la ventaja de utilizar conjuntos borrosos y una variada colección de errores tipográficos que van desde numerar mal los capítulos (o divisiones del artículo) hasta la omisión o el cambio de símbolos en definiciones y demostraciones.

Ejemplo de imprecisión y falta de hilación o coherencia, además de los ya comentados, es la definición (no presentada en este trabajo) de suma de dos gráficas y el uso posterior que de ella se hace.

Con relación a los objetivos que Yeh y Bang se plantean la situación no varía.

Por un lado, se pretende hacer ver que la utilización de conjuntos borrosos es conveniente por permitir manejar la relación como una unidad, en lugar de descomponerla en las gráficas de cada nivel, lográndose así un tratamiento más "justo" para los pesos de las aristas. Es evidente, sin embargo, que la α que continuamente se utiliza no es otra cosa que un "corte" en la relación, para estudiar su comportamiento en ese nivel, por lo cual el tratamiento a las aristas es equivalente, situación que comprueba el hecho de que los α -clusters y los grupos producidos por el método de conexión simple son iguales.

El segundo objetivo también pretende demostrar la conveniencia de usar conjuntos borrosos, en esta ocasión, para hacer ver que los métodos que proponen (que aquí tampoco se presentaron), son más "poderosos" (o potentes) que sus correspondientes métodos tradicionales.

Para tal efecto, Yeh y Bang presentan tres teoremas (uno por cada método) y las demostraciones de cada teorema consisten en presentar un ejemplo donde se calculan los clusters producidos por el método que proponen y los producidos por su co-

respondiente método tradicional o usual. Lo más "poderoso" consiste en que su método produce clusters que no produce el método usual (?). Lo interesante del caso es que en sus mismos ejemplos los métodos usuales TAMBIEN producen clusters que no producen los métodos que ellos proponen(!!).

En resumen, el artículo de Yeh y Bang deja la impresión de ser un trabajo hecho con mucha premura, poca meditación y gran descuido, donde se trata de justificar (injustificadamente) el uso de relaciones borrosas en taxonomía numérica.

Cabe aquí la pregunta que se hace Guillermo Espinosa: ¿Conjuntos borrosos sirve como herramienta para trabajar con elementos de taxonomía numérica, o aún estamos en una etapa en la que ésta última sirve como modelo para pensar en conjuntos borrosos?

CAPITULO IV. METODOS B_k Y RELACIONES BORROSAS

1. Introducción

En el capítulo I se explicaron los métodos B_k y se vió cómo resultan una generalización del método de conexión simple; éste último se expresó en términos de relaciones borrosas en el capítulo anterior y ahora se construirá, en la sección 3, la expresión correspondiente para los métodos B_k .

En vista de que la exposición del capítulo anterior no fué muy explícita con respecto al método de conexión simple, en la sección 2 se presenta un análisis más detallado de su relación con conjuntos borrosos, tomando como base el artículo de López y Espinosa [4].

Por último, se consideró importante incluir una cuarta sección a este capítulo para comentar algunas características de la expresión obtenida para los B_k .

2. Método de conexión simple y relaciones borrosas

López y Espinosa muestran que el método de conexión simple, a plicado a un coeficiente de disimilaridad, es equivalente a la función que asocia a una relación borrosa reflexiva, simétrica y finita con su cerradura transitiva.

Para llegar a ese resultado conviene hacer antes varias observaciones aplicables a los métodos jerárquicos en general.

Sea V el conjunto finito de puntos a clasificar y $n = |V|$.

Debido a la naturaleza de los métodos de clasificación, resulta equivalente aplicarlos a un coeficiente de disimilaridad d que a un múltiplo d' de d , es decir, si $x > 0$, entonces el coeficiente definido por $d'(u,v) = x \cdot d(u,v)$ para todo $u, v \in V$, produce un dendrograma semejante al producido por d al aplicar a ambos un método de clasificación. La única diferencia es la "escala" ya que los grupos asociados a d en un nivel h se obtienen con d' al nivel $x \cdot h$, por lo cual las proporciones que interesan se mantienen.

Por lo anterior, para clasificar los objetos de V basta considerar los coeficientes de disimilaridad normalizados en V , que son aquellos que toman sus valores entre 0 y 1. Por supuesto la situación es análoga para los coeficientes de similitud.

Ahora bien, ya que dado un coeficiente de similitud s en V se le puede asociar un y sólo un coeficiente de disimilaridad d_s en V mediante la fórmula $d_s(u,v) = 1 - s(u,v)$, si se denota con $CDN(V)$ y $CSN(V)$ al conjunto de coeficientes de disimilaridad normalizados en V y al de coeficientes de similitud normalizados en V respectivamente, éstos resultan equivalentes desde el punto de vista de taxonomía numérica, ya que por lo comentado en MJ7 (p.7) s y d_s producen los mismos resultados, dependiendo de que se decida trabajar con similitudes o con disimilaridades.

Por otro lado, observando las definiciones correspondientes, es claro que los coeficientes de similitud normalizados en

V son precisamente las relaciones borrosas reflexivas y simétricas en V .

Tomando en cuenta las observaciones anteriores, el punto MJ7 del resumen de los métodos jerárquicos y el resumen del método de conexión simple (p.11) se relacionará éste último con la teoría de conjuntos borrosos.

Sea $d \in CD(V)$, $d_1 \in CDU(V)$ la tabla obtenida al aplicar a d el método de conexión simple y \underline{S} la relación borrosa reflexiva y simétrica en V definida por $\mu_{\underline{S}}(u,v) = 1 - d(u,v)$.

Manejando \underline{S} conforme a la opción 2 de MJ7 se verá que

$\mu_{\underline{S}}(u,v) = 1 - d_1(u,v)$, o sea, que el coeficiente de similitud correspondiente a d_1 es justamente la cerradura transitiva de \underline{S} .

Observe que dado $\alpha \in [0,1]$ se tiene

$d(u,v) \leq \alpha \iff \mu_{\underline{S}}(u,v) \geq 1 - \alpha$, por lo tanto comparando la relación R_d (p.2) con la relación ordinaria de nivel α de \underline{S} se tiene que $R_d(\alpha) = S_{1-\alpha}$.

Por CS4 y CS5 $R_{d_1}(\alpha)$ es la mínima relación transitiva (y de equivalencia) que contiene a $R_d(\alpha)$ ya que su gráfica se construyó agregando el mínimo número de parejas a la de $R_d(\alpha)$, para convertir en subgráficas maximales completas a las componentes conexas (CS1 a CS3).

En vista de que \underline{S} es de hecho un coeficiente de similaridad, hay que tener en cuenta que la "escala" está invertida y para

seguir el método congruentemente hay que asociar a $S_{1-\alpha}$ la mínima relación transitiva que la contenga, la cual automáticamente resultará de equivalencia. Sea $T_{1-\alpha}$ esa relación, entonces es claro que $T_{1-\alpha} = R_{d_1}(\alpha)$ y por la proposición II.9 (p.33)

$$\begin{aligned} \alpha_1 \geq \alpha_2 &\Rightarrow S_{\alpha_1} \subset S_{\alpha_2} \\ &\Rightarrow T_{\alpha_1} \subset T_{\alpha_2} . \end{aligned}$$

Al considerar la relación borrosa \underline{T} generada por las T_α , o sea que $\mu_{\underline{T}}(u,v) = \bigvee_{\alpha} \alpha \cdot \mu_{T_\alpha}(u,v)$ para todo $u,v \in V$, ésta resulta ser de equivalencia (en términos de conjuntos borrosos) debido al teorema II.2 (p.40).

Si se prueba que $\underline{T} = \underline{\hat{S}}$, se habrá demostrado que

$R_{d_1}(\alpha) = \hat{S}_{1-\alpha}$, es decir, $d_1(u,v) = 1 - \mu_{\hat{S}}(u,v)$ y por lo tanto, que el método de conexión simple aplicado al coeficiente de disimilaridad d es equivalente a encontrar la cerradura transitiva de la relación borrosa \underline{S} , donde d es normalizado y $\mu_{\underline{S}}(u,v) = 1 - d(u,v)$.

Antes de probarlo, observe que la cerradura transitiva de \underline{S} asocia a cada par de vértices u y v de V el valor del camino más fuerte que los une, es decir, el mayor valor de β para el cual existe un camino de u a v en la gráfica de S_β .

Por otro lado, si \underline{S} es el complemento de d (con respecto a 1) y R_d se construye a la inversa que S_α (volteando la desigualdad), el mayor valor arriba mencionado es justamente $1 - \alpha$, donde α es el menor valor en d tal que existe un camino de u

a v en la gráfica de $R_d(\alpha)$, es decir, la menor α tal que u y v están en una componente conexa de la gráfica $R_d(\alpha)$. Observe que estos valores son precisamente $\mu_{\underline{S}}(u,v)$ y $d_1(u,v)$.

Por la forma de construir T_α (de acuerdo al método de conexión simple), demostrar que $\underline{T} = \underline{S}$ equivale a demostrar el siguiente resultado:

Proposición IV.0 Sea \underline{S} una relación borrosa finita en V, entonces \hat{S}_α es la mínima relación transitiva que contiene a S_α , $\alpha \in [0,1]$.

Demostración. Se sigue de varios resultados del capítulo II:

1. \hat{S} es transitiva.
2. \underline{R} transitiva $\Leftrightarrow R_\alpha$ transitiva para toda α .
(Ver demostración del teorema II.2)
3. $\underline{S} \subset \hat{S}$ (por definición de \hat{S}).
4. $\underline{S} \subset \underline{T}$ y \underline{T} transitiva $\Rightarrow \hat{S} \subset \underline{T}$.
5. $\underline{R} \subset \underline{H} \Rightarrow R_\alpha \subset H_\alpha$ para toda $\alpha \in [0,1]$
(No se ha demostrado pero es inmediato).

Ahora bien, por 3, 5 y 2, dado $\alpha \in [0,1]$

$$S_\alpha \subset \hat{S}_\alpha \text{ y } \hat{S}_\alpha \text{ es transitiva.}$$

Falta ver que es la mínima.

Sea \underline{T} la relación borrosa construida anteriormente, entonces para toda α , $S_\alpha \subset T_\alpha$ y por 5 se tiene que $\underline{S} \subset \underline{T}$.

Por 2 y 4 $\hat{S} \subset \underline{T}$ y por 5 $\hat{S}_\alpha \subset T_\alpha$, pero como las T_α eran las mínimas se concluye $\hat{S}_\alpha = T_\alpha$.

Por último, observe que asociar a d el mayor de los coeficientes de disimilaridad ultramétricos menores o iguales que él, que es el efecto de aplicarle el método de conexión simple, es equivalente a encontrar el menor coeficiente de similitud transitivo mayor o igual que el coeficiente de similitud asociado a d .

López y Espinosa [4] muestran la equivalencia entre los coeficientes de disimilaridad ultramétricos y las relaciones borrosas de equivalencia, apoyados en la idea anterior, misma que se puede ver en forma directa del teorema II.3 .

3. Métodos B_k y relaciones borrosas

En la sección 4 del capítulo I se vió que los métodos B_k son una generalización del método de conexión simple, los cuales producen coeficientes de disimilaridad k -ultramétricos, es decir, coeficientes que satisfacen la desigualdad k -ultramétrica: $d(u,v) \leq \bigvee [d(u,J), d(v,J), d(J)]$ para todo $u,v \in V$ y $J \subset V$, donde $|J| = k$, $d(u,J) = \bigvee \{d(u,w) \mid w \in J\}$ y $d(J) = \bigvee \{d(w,w') \mid w,w' \in J\}$.

Se vió que tales coeficientes corresponden a una matriz para la cual las gráficas asociadas a cualquier nivel nunca tienen subgráficas maximales completas que se intersecten en k o más puntos.

Se estableció, además, que el método B_k asocia a $R_d(h)$ la mínima relación k -transitiva (en el sentido de la definición I.7) que la contiene.

Expresar el comportamiento anterior por medio de relaciones borrosas parece equivalente, en vista de lo ocurrido con el método de conexión simple, a definir una nueva composición que contemple la k -transitividad y encontrar la cerradura transitiva en términos de esa composición.

Como se verá a continuación, el problema no resultó tan inmediato y no fué posible encontrar una composición que llenara los requisitos (situación que se comenta con más detalle en la sección 4), sin embargo, se llegó a una expresión recursiva que acaso facilite la construcción de algoritmos para calcular los métodos B_k .

Sea $K = \{ J \subset V \mid k = |J| \}$.

Definición IV.1 Una relación borrosa R en un conjunto V es k -transitiva, con $1 \leq k \leq |V|$, si para todo $u, v \in V$

$$\mu_R(u, v) \geq \bigvee_{J \in K} [\mu_R(u, J) \wedge \mu_R(J, v) \wedge \mu_R(J)]$$

donde

$$\mu_R(u, J) = \bigwedge_{w \in J} [\mu_R(u, w)] \quad \text{y}$$

$$\mu_R(J) = \bigwedge_{w, w' \in J} [\mu_R(w, w')] .$$

Observe la correspondencia con la definición de desigualdad k -ultramétrica, tomando en cuenta que aquí no se está pidiendo simetría y que se manejan similaridades.

Observe además que para $k > |V|$ no tiene sentido la defini-

ción, o bien, podría decirse que la propiedad siempre se cumple.

Definición IV.2 Una relación borrosa en V es de k -equivalencia, con $1 \leq k \leq |V|$, si es reflexiva, simétrica y k -transitiva.

Con base en el teorema II.2 y en la definición de relaciones ordinarias k -transitivas (I.7), se puede enunciar el siguiente resultado.

Teorema IV.1 Una relación borrosa R en $V \neq \emptyset$ es de k -equivalencia, con $1 \leq k \leq |V|$, si y sólo si

$$\mu_R(u,v) = \bigvee_{\alpha} \alpha \cdot \mu_{R_{\alpha}}(u,v) \quad \text{donde las } R_{\alpha} \text{ son}$$

relaciones ordinarias en V tales que:

1. R_{α} es de k -equivalencia, $\alpha \in [0,1]$.
2. $\alpha_1 \geq \alpha_2 \Rightarrow R_{\alpha_1} \subset R_{\alpha_2}$.

Demostración. En vista de la demostración del teorema II.2 sólo falta checar la k -transitividad en ambos sentidos.

Sean $I = \{1, 2, \dots, k\}$ y $u, v, w_i \in V$, con $i \in I$

\Rightarrow Dado $\alpha \in [0,1]$, suponga que para todo $i, j \in I$ se tiene

$$(u, w_i) \in R_{\alpha}, (v, w_i) \in R_{\alpha} \text{ y } (w_i, w_j) \in R_{\alpha}$$

$$\Rightarrow \mu_R(u, w_i) \geq \alpha, \mu_R(v, w_i) \geq \alpha \text{ y}$$

$$\mu_R(w_i, w_j) \geq \alpha \quad \text{para todo } i, j \in I$$

$$\Rightarrow \bigvee_{J \in K} [\mu_{\mathcal{R}}(u, J) \wedge \mu_{\mathcal{R}}(v, J) \wedge \mu_{\mathcal{R}}(J)] \geq \alpha \quad (\text{ya})$$

que al menos para $J = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ se cumple y por simetría $\mu_{\mathcal{R}}(v, J) = \mu_{\mathcal{R}}(J, v)$

$$\Rightarrow \mu_{\mathcal{R}}(u, v) \geq \alpha \quad (\text{por ser } \mathcal{R} \text{ k-transitiva})$$

$$\Rightarrow (u, v) \in R_{\alpha}$$

$\therefore R_{\alpha}$ es k-transitiva.

$$\Leftrightarrow \text{Sea } \alpha = \bigvee_{J \in K} [\mu_{\mathcal{R}}(u, J) \wedge \mu_{\mathcal{R}}(v, J) \wedge \mu_{\mathcal{R}}(J)] \text{ entonces}$$

ces dado $\delta > 0$, existe $J \in K$ tal que

$$[\mu_{\mathcal{R}}(u, J) \wedge \mu_{\mathcal{R}}(v, J) \wedge \mu_{\mathcal{R}}(J)] \geq \alpha - \delta.$$

Suponga que $\mu_{\mathcal{R}}(u, v) = \beta < \alpha$ y sean

$$\delta = (\alpha - \beta) / 2 \quad \text{y} \quad J = \{w_1, w_2, \dots, w_k\} \in K,$$

tales que para todo $i, j \in I$

$$\mu_{\mathcal{R}}(u, w_i) \geq \alpha - \delta, \quad \mu_{\mathcal{R}}(v, w_i) \geq \alpha - \delta \quad \text{y}$$

$$\mu_{\mathcal{R}}(w_i, w_j) \geq \alpha - \delta$$

$$\Rightarrow (u, w_i) \in R_{\alpha - \delta}, \quad (v, w_i) \in R_{\alpha - \delta} \quad \text{y}$$

$$(w_i, w_j) \in R_{\alpha - \delta} \quad \text{para todo } i, j \in I$$

$$\Rightarrow \mu_{\mathcal{R}}(u, v) \geq \alpha - \delta > \beta \quad \text{lo cual no es posi}$$

ble y se debe concluir que $\mu_{\mathcal{R}}(u, v) \geq \alpha$

$$\therefore \mu_{\mathcal{R}}(u, v) \geq \bigvee_{J \in K} [\mu_{\mathcal{R}}(u, J) \wedge \mu_{\mathcal{R}}(v, J) \wedge \mu_{\mathcal{R}}(J)] \quad \text{y}$$

$\therefore \mathcal{R}$ es k-transitiva

El hecho de que si \mathcal{R} es k-transitiva entonces las R_{α} también

lo son, aunque en el sentido ordinario, permite comparar las relaciones borrosas de k -equivalencia con los k -dendrogramas normalizados, o lo que es análogo, con los coeficientes de d_i similaridad k -ultramétricos normalizados. Sólo recuerde que \mathbb{R} mide similaridades y hay que hacer algunos ajustes de interpretación, pero es claro que \mathbb{R} admite una representación en forma semejante a la de un k -dendrograma.

La revisión de otras afirmaciones relativas a los métodos B_k sugiere varios resultados:

Proposición IV.1 Si una relación borrosa en V es k -transitiva, $1 \leq k < |V|$, entonces es $(k+1)$ -transitiva.

Demostración. Sea $K_1 = \{J \subset V \mid |J| = k+1\}$, entonces dado $J_1 = \{w_1, w_2, \dots, w_k, w_{k+1}\} \in K_1$, existe $J \in K$, a saber $J = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$, tal que

$$\mu_{\mathbb{R}}(J) \geq \mu_{\mathbb{R}}(J_1) \quad \text{y para todo } u \in V$$

$$\mu_{\mathbb{R}}(u, J) \geq \mu_{\mathbb{R}}(u, J_1) .$$

Por lo tanto, si \mathbb{R} es k -transitiva, entonces

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{R}}(u, v) &\geq \bigvee_{J \in K} [\mu_{\mathbb{R}}(u, J) \wedge \mu_{\mathbb{R}}(J, v) \wedge \mu_{\mathbb{R}}(J)] \\ &> \bigvee_{J \in K_1} [\mu_{\mathbb{R}}(u, J) \wedge \mu_{\mathbb{R}}(J, v) \wedge \mu_{\mathbb{R}}(J)] \end{aligned}$$

$\therefore \mathbb{R}$ es $(k+1)$ -transitiva.

Corolario IV.1 Si una relación borrosa en V es de k -equivalencia, $1 \leq k < |V|$, entonces es de $(k+1)$ -

equivalencia.

El problema que se desea resolver es el de encontrar la mínima relación borrosa k -transitiva que contenga a una relación borrosa dada, sin embargo y a pesar de que algunos de los próximos resultados se pueden generalizar más, la exposición se concretará al caso finito para agilizarla.

Definición IV.3 Sea \underline{R} una relación borrosa en un conjunto V finito y sea $1 \leq k \leq |V|$. La k -potencia n de \underline{R} , denotada por \underline{R}_k^n , es la relación borrosa en V definida por

$$\mu_{\underline{R}_k^n}(u,v) = \mu_{\underline{R}_k^{n-1}}(u,v) \vee \bigvee_{J \in K} [\mu_{\underline{R}_k^{n-1}}(u,J) \wedge \mu_{\underline{R}_k^{n-1}}(J,v) \wedge \mu_{\underline{R}_k^{n-1}}(J)]$$

donde $\mu_{\underline{R}_k^1}(w,w') = \mu_{\underline{R}}(w,w')$ y consecuentemente

$$\mu_{\underline{R}_k^1}(u,J) = \mu_{\underline{R}}(u,J) = \bigwedge_{w \in J} [\mu_{\underline{R}}(u,w)] ,$$

$$\mu_{\underline{R}_k^1}(J,v) = \mu_{\underline{R}}(J,v) \quad \text{y} \quad \mu_{\underline{R}_k^1}(J) = \mu_{\underline{R}}(J) .$$

Esta es la definición recursiva que se mencionó anteriormente y las siguientes proposiciones aclararán su significado.

Al evaluar la expresión anterior para $n=2$ se obtiene

$$\mu_{\underline{R}_k^2}(u,v) = \mu_{\underline{R}}(u,v) \vee \left[\bigvee_{J \in K} [\mu_{\underline{R}}(u,J) \wedge \mu_{\underline{R}}(J,v) \wedge \mu_{\underline{R}}(J)] \right] ;$$

esta fórmula asocia a $\mu_{R_k^2}(u,v)$ el mayor valor de α para el cual, o bien la arista de u a v se encuentra en la digráfica de R_α , o bien, sin estar presente, en esa digráfica existen k puntos de V unidos todos entre sí (en ambos sentidos), con aristas de u a todos ellos y con aristas de todos ellos a v . Esto significa que dado α , es posible construir la relación ordinaria de nivel α de R_k^2 , denotada $(R_k^2)_\alpha$, añadiendo aristas a la gráfica de R_α siempre que para dos vértices no unidos existan esos k puntos. Observe además que calcular la relación borrosa R_k^2 es equivalente a conocer sus relaciones ordinarias de nivel α para toda α .

Cuando R es simétrica, la gráfica de $(R_k^2)_\alpha$ se forma convirtiendo en subgráfica maximal completa aquellas que en la gráfica de R_α se intersectan en k o más puntos, que es justamente la idea de los métodos B_k (ver BK1 p.20).

Proposición IV.2 Sea R una relación borrosa finita en V y

$$1 \leq k \leq |V|, \text{ entonces}$$

$$R_k^n = (R_k^{n-1})_k^2.$$

Demostración. Basta sustituir la R de la expresión que se acaba de dar para R_k^2 por (R_k^{n-1}) .

Corolario IV.2 Sea R una relación borrosa finita en V y

$$1 \leq k \leq |V|, \text{ entonces}$$

$$\mathbb{R}_k^n = (\dots ((\mathbb{R}_k)_k^2)_k^2 \dots)_k^2 \quad (n-1 \text{ veces}).$$

Estos resultados permiten darle un sentido a \mathbb{R}_k^n en términos de sus relaciones ordinarias de nivel α ya que, por lo apuntado anteriormente, $(\mathbb{R}_k^n)_\alpha$ se construye a partir de \mathbb{R}_α después de $n-1$ pasos. En un primer paso se le añaden los elementos de $V \times V$, de acuerdo al criterio dado, y se obtiene $(\mathbb{R}_k^2)_\alpha$; a esta última se le aplica el mismo criterio y se obtiene ahora $(\mathbb{R}_k^3)_\alpha$ y así sucesivamente.

Proposición IV.3 Sea \mathbb{R} una relación borrosa en un conjunto V finito y $1 \leq k \leq |V|$, entonces para todo

$$n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{R}_k^n \subset \mathbb{R}_k^{n+1}.$$

Demostración.
$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{R}_k^{n+1}}(u, v) &= \mu_{\mathbb{R}_k^n}(u, v) \vee \\ &\quad \bigvee_{J \in K} [\mu_{\mathbb{R}_k^n}(u, J) \wedge \mu_{\mathbb{R}_k^n}(J, v) \wedge \mu_{\mathbb{R}_k^n}(J)] \\ &\geq \mu_{\mathbb{R}_k^n}(u, v) \end{aligned}$$

Observe que la proposición anterior se cumple debido a la definición de \mathbb{R}_k^n , a diferencia de lo manejado anteriormente donde la misma propiedad se cumplía cuando \mathbb{R} era debilmente reflexiva (ver proposición II.17' p.76). Esta situación se comentará con más detalle en la sección 4.

Proposición IV.4 Sea \underline{R} una relación borrosa en un conjunto V finito y sea $1 \leq k \leq |V|$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ $\underline{R}_{k+1}^n \subset \underline{R}_k^n$.

Demostración. Es semejante a la de la proposición IV.1, pero ahora se procederá por inducción sobre n .

Para $n=1$ se cumple pues por definición de \underline{R}_k^n se tiene $\underline{R}_k^1 = \underline{R}_{k+1}^1 = \underline{R}$.

Si se prueba ahora que por cumplirse la propiedad para $n=1$ entonces se cumple para $n=2$, la demostración habrá terminado puesto que, en vista de la proposición IV.2, suponer que se cumple para $n=h$ y probarlo para $n=h+1$ es equivalente a lo hecho para $n=1$ y 2 .

Sea pues $n=2$ y sea

$K_1 = \{J \mid J \subset V \text{ y } |J| = k+1\}$, entonces dado $J_1 \in K_1$ existe $J \in K$ tal que

$$\mu_{\underline{R}}(J) \geq \mu_{\underline{R}}(J_1) \quad \text{y para todo } u \in V$$

$$\mu_{\underline{R}}(u, J) \geq \mu_{\underline{R}}(u, J_1) \quad \text{y} \quad \mu_{\underline{R}}(J, u) \geq \mu_{\underline{R}}(J_1, u).$$

Por ésto y porque $\underline{R}_{k+1}^1 = \underline{R}_k^1$ se tiene

$$\mu_{\underline{R}_{k+1}}^2(u, v) = [\mu_{\underline{R}_{k+1}}^1(u, v)] \vee$$

$$[\bigvee_{J \in K_1} [\mu_{\underline{R}_{k+1}}^1(u, J) \wedge \mu_{\underline{R}_{k+1}}^1(J, v) \wedge \mu_{\underline{R}_{k+1}}^1(J)]]$$

$$\leq [\mu_{\underline{R}_k}^1(u, v)] \vee$$

$$\begin{aligned} & [\bigvee_{J \in K} [\mu_{R_k^1}(u, J) \wedge \mu_{R_k^1}(J, v) \wedge \mu_{R_k^1}(J)]] \\ & = \mu_{R_k^2}(u, v) \end{aligned}$$

En lo sucesivo, a demostraciones de este tipo en las que basta probar la propiedad para $n=2$, se les incluirá una pequeña aclaración haciendo referencia a la proposición IV.2.

Proposición IV.5 Sea R una relación borrosa debilmente reflexiva y finita en V y $1 \leq k \leq |V|$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ R_k^n es debilmente reflexiva.

Demostración. Por la proposición IV.2 basta para $n=2$.

Sean $u, v \in V$ y $J \in K$, entonces

$$\begin{aligned} & \mu_R(u, v) \vee [\mu_R(u, J) \wedge \mu_R(J, v) \wedge \mu_R(J)] \\ & \leq \mu_R(u, v) \vee \mu_R(u, J) \leq \mu_R(u, u) \\ & \Rightarrow \mu_{R_k^2}(u, v) \leq \mu_R(u, u) \leq \mu_{R_k^2}(u, u) \end{aligned}$$

Los resultados anteriores permiten entrever que la 1-potencia n de R , R_1^n , no se comporta igual que la potencia n de R , R^n , obtenida a través de la composición de relaciones definida en el capítulo II. Las próximas dos proposiciones establecen la relación entre una y otra.

Proposición IV.6 Sea R una relación borrosa debilmente reflexiva y finita en V , entonces $R_1^2 = R^2$.

Demostración. Por ser \mathbb{R} debilmente reflexiva se tiene que

$\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ y que para todo $u, v \in V$

$\mu_{\mathbb{R}}(u, u) \geq \mu_{\mathbb{R}}(u, v)$ de ahí que:

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{R}^2}(u, v) &= \mu_{\mathbb{R}}(u, v) \vee \mu_{\mathbb{R}^2}(u, v) \\ &= \mu_{\mathbb{R}}(u, v) \vee [\bigvee_{w \in V} [\mu_{\mathbb{R}}(u, w) \wedge \mu_{\mathbb{R}}(w, v)]] \\ &= \mu_{\mathbb{R}}(u, v) \vee \\ &\quad [\bigvee_{w \in V} [\mu_{\mathbb{R}}(u, w) \wedge \mu_{\mathbb{R}}(w, v) \wedge \mu_{\mathbb{R}}(w, w)]] \\ &= \mu_{\mathbb{R}^2}(u, v) \\ &\quad \mathbb{R}_1 \end{aligned}$$

Advierta que fué necesario pedir la reflexividad debil.

Proposición IV.7 Sea \mathbb{R} una relación borrosa debilmente refle

xiva y finita en V , entonces $\mathbb{R}_1^n = \mathbb{R}^{2^{n-1}}$.

Demostración. Por la proposición IV.5 \mathbb{R}_1^n es debilmente re-
flexiva, entonces aplicando la proposición an-

terior se tiene que $(\mathbb{R}_1^n)_1^2 = (\mathbb{R}_1^n)^2$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_1^n &= (\dots ((\mathbb{R}_1^2)_1^2 \dots)_1^2 \quad (n-1 \text{ veces}) \\ &= (\dots ((\mathbb{R}^2)_1^2 \dots)_1^2 \quad (n-1 \text{ veces}) \\ &= \mathbb{R}^{2^{n-1}} \end{aligned}$$

Según estos resultados, para relaciones reflexivas y finitas,

que son las que normalmente interesan en taxonomía numérica, las 1-potencias de \underline{R} se pueden calcular por medio de la composición de relaciones definida en el capítulo II. Calcule \underline{R}^2 , que coincide con \underline{R}_1^2 y después, en lugar de componer \underline{R}^2 con \underline{R} , se compone \underline{R}^2 consigo misma obteniéndose $\underline{R}_1^3 = \underline{R}_1^4$. Al repetir esta idea se obtienen $\underline{R}_1^4 = \underline{R}^8$, $\underline{R}_1^5 = \underline{R}^{16}$, etcétera.

Observe que el procedimiento apunta a una forma abreviada de llegar a \underline{R} y que, en términos de algoritmos, evita el conservar una matriz. Además, tampoco se requieren más cálculos entre un paso y otro pues $\underline{R}^n \circ \underline{R}$ requiere los mismos que $\underline{R}^n \circ \underline{R}^n$. Una vez establecida la relación del caso $k=1$ con el tratamiento de capítulos anteriores se volverá al caso general.

Proposición IV.8 Sea \underline{R} una relación borrosa simétrica y fini en V y $1 \leq k \leq |V|$, entonces \underline{R}_k^n es simétrica para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Por la proposición IV.2 basta para $n=2$,

$\underline{R}_k^1 = \underline{R}$ por definición de k -potencia, entonces para todo $J \in K$

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{R}_k^1}(u, J) &= \mu_{\underline{R}}(u, J) = \bigwedge_{w \in J} [\mu_{\underline{R}}(u, w)] \\ &= \bigwedge_{w \in J} [\mu_{\underline{R}}(w, u)] = \mu_{\underline{R}}(J, u) = \mu_{\underline{R}_k^1}(J, u) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu_{\underline{R}_k^2}(u, v) = \mu_{\underline{R}_k^2}(v, u)$$

Proposición IV.9 Sean \mathbb{R} y \mathbb{S} relaciones borrosas en un conjunto V finito y $1 \leq k \leq |V|$, entonces

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{S} \Rightarrow \mathbb{R}_k^n \subset \mathbb{S}_k^n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Por la proposición IV.2 basta para $n=2$.

Sean $u, v \in V$ y $J \in K$, entonces

$$\mu_{\mathbb{R}}(u, J) \leq \mu_{\mathbb{S}}(u, J), \quad \mu_{\mathbb{R}}(J, v) \leq \mu_{\mathbb{S}}(J, v) \quad \text{y}$$

$$\mu_{\mathbb{R}}(J) \leq \mu_{\mathbb{S}}(J)$$

$$\Rightarrow \mu_{\mathbb{R}_k^2}(u, v) \leq \mu_{\mathbb{S}_k^2}(u, v)$$

Retomando el concepto de k -transitividad se tiene:

Proposición IV.10 Sea \mathbb{R} una relación borrosa en un conjunto V finito y $1 \leq k \leq |V|$, entonces

$$\mathbb{R} \text{ es } k\text{-transitiva} \Leftrightarrow \mathbb{R}_k^2 = \mathbb{R}.$$

Demostración. \mathbb{R} es k -transitiva

$$\Leftrightarrow \mu_{\mathbb{R}}(u, v) \geq \bigvee_{J \in K} [\mu_{\mathbb{R}}(u, J) \wedge \mu_{\mathbb{R}}(J, v) \wedge \mu_{\mathbb{R}}(J)]$$

$$\Leftrightarrow \mu_{\mathbb{R}}(u, v) = \mu_{\mathbb{R}}(u, v) \vee$$

$$\bigvee_{J \in K} [\mu_{\mathbb{R}}(u, J) \wedge \mu_{\mathbb{R}}(J, v) \wedge \mu_{\mathbb{R}}(J)]$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{R} = \mathbb{R}_k^2$$

Proposición IV.11 Sea \mathbb{R} una relación borrosa en un conjunto V finito y $1 \leq k \leq |V|$, entonces para todo

$$\text{do } m, n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{R}_k^m = \mathbb{R}_k^{m+1} \Rightarrow \mathbb{R}_k^m = \mathbb{R}_k^{m+n}.$$

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$, entonces por la proposición IV.2 basta para $n=2$.

Sea $\underline{R}_k^m = \underline{R}_k^{m+1}$, entonces aplicando la proposición IV.9 se tiene

$$\underline{R}_k^m = \underline{R}_k^{m+1} = (\underline{R}_k^m)_k^2 = (\underline{R}_k^{m+1})_k^2 = \underline{R}_k^{m+2}$$

El siguiente resultado es consecuencia de los dos anteriores.

Corolario IV.3 Sea \underline{R} una relación borrosa finita en V y $1 \leq k \leq |V|$, entonces \underline{R} es k -transitiva \Leftrightarrow para todo $n \in \mathbb{N}$ $\underline{R} = \underline{R}_k^n$.

Proposición IV.12 Sea \underline{R} una relación borrosa en un conjunto V finito y $1 \leq k \leq |V|$, entonces la sucesión de k -potencias de \underline{R} , $\{\underline{R}_k^i\}$ con $i \in \mathbb{N}$, es eventualmente periódica y su período es 1.

Demostración. La periodicidad se prueba en forma análoga a la demostración del teorema II.9 (p.47) y que el período sea 1 es consecuencia de la proposición IV.3.

Los resultados vistos hasta ahora presentan una situación parecida a la del método de conexión simple y han preparado el camino para la definición del concepto que se buscaba.

Definición IV.4 Sea \mathcal{R} una relación borrosa en un conjunto V finito y $1 \leq k \leq |V|$. La cerradura k -transitiva de \mathcal{R} , denotada $\hat{\mathcal{R}}_k$, es la relación borrosa $\hat{\mathcal{R}}_k = \mathcal{R}_k^n$, donde n es el menor entero tal que $\mathcal{R}_k^n = \mathcal{R}_k^{n+1}$.

La proposición anterior garantiza la existencia de dicha n y los próximos dos resultados le dan significado a la definición.

Proposición IV.13 Sea \mathcal{R} una relación borrosa en un conjunto V finito y $1 \leq k \leq |V|$, entonces $\hat{\mathcal{R}}_k$ es k -transitiva.

Demostración. Sea $\hat{\mathcal{R}}_k = \mathcal{R}_k^n$, entonces

$$(\hat{\mathcal{R}}_k)_k^2 = (\mathcal{R}_k^n)_k^2 = \mathcal{R}_k^{n+1} = \mathcal{R}_k^n = \hat{\mathcal{R}}_k$$

Proposición IV.14 Sean \mathcal{R} y \mathcal{S} relaciones borrosas en un conjunto V finito y $1 \leq k \leq |V|$, entonces $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ y \mathcal{S} k -transitiva $\Rightarrow \hat{\mathcal{R}}_k \subset \mathcal{S}$.

Demostración. Sea $\hat{\mathcal{R}}_k = \mathcal{R}_k^n$, entonces por la proposición IV.9 y el corolario IV.3 $\hat{\mathcal{R}}_k = \mathcal{R}_k^n \subset \mathcal{S}_k^n = \mathcal{S}$

Con estos resultados es posible identificar el método B_k de clasificación con la función que asocia a una relación borro-

sa reflexiva y simétrica con su cerradura k-transitiva.

Sea $f: CD(V) \rightarrow CS(V)$ tal que $f(d) = s$, definido por $s(u,v) = 1 - d(u,v)$. Se dijo anteriormente que f es biyectiva, siendo su inversa $f^{-1}(s) = d$ con $d(u,v) = 1 - s(u,v)$. También ocurre que f restringida a $CDN(V)$ es biyectiva y su imágen es $CSN(V)$.

Por otro lado se comentó que, para efectos de taxonomía numérica, es suficiente aplicar los métodos de clasificación a los coeficientes de similaridad (o disimilaridad) normalizados, los cuales son relaciones borrosas reflexivas y simétricas.

En la sección anterior se vió que si d_1 es el resultado de aplicar el método de conexión simple al coeficiente normalizado $d \in CDN(V)$ y $f(d) = \underline{R}$, entonces $f(d_1) = \hat{\underline{R}}$.

Ahora se probará que si $d \in CDN(V)$, $f(d) = \underline{R}$ y $B_k(d) = d_k$ entonces $f(d_k) = \hat{\underline{R}}_k$.

El procedimiento es análogo al de la sección anterior:

Se sabe que $d_k \in U_k(V)$ y que para toda $\alpha \in [0,1]$, $R_{d_k}(\alpha)$ es la mínima relación ordinaria k-transitiva que contiene a $R_d(\alpha)$.

Sea $f(d) = \underline{S}$, es decir, $\mu_{\underline{S}}(u,v) = 1 - d(u,v)$; entonces

$R_d(1-\alpha) = S_\alpha$. Sea $R_{d_k}(1-\alpha) = T_\alpha$.

Si se prueba que la relación borrosa \underline{T} , definida por

$\mu_{\underline{T}}(u,v) = \bigvee_{\alpha} \alpha \cdot \mu_{T_\alpha}(u,v)$, es igual a $\hat{\underline{S}}_k$, se habrá demostrado

que $f(d_k) = \hat{\underline{S}}_k$.

Probar lo anterior equivale a probar lo siguiente:

Proposición IV.15 Sea \mathcal{R} una relación borrosa finita en V y $1 \leq k \leq |V|$, entonces $(\hat{S}_k)_\alpha$ es la mínima relación ordinaria k -transitiva que contenga a S_α .

Demostración. Por la proposición IV.3 $\mathcal{R} \subset \hat{S}_k$, entonces

$$\begin{aligned} (u,v) \in S_\alpha &\Rightarrow \mu_{\mathcal{R}}(u,v) \geq \alpha \\ &\Rightarrow \mu_{\hat{S}_k}(u,v) \geq \alpha \\ &\Rightarrow (u,v) \in (\hat{S}_k)_\alpha \end{aligned}$$

$$\therefore S_\alpha \subset (\hat{S}_k)_\alpha$$

Además, por la demostración del teorema IV.1, $(\hat{S}_k)_\alpha$ es k -transitiva.

Ahora bien, dado $\alpha \in [0,1]$ sea T_α la mínima relación k -transitiva que contiene a S_α y sea \mathcal{T} la relación borrosa generada por las T_α , entonces se tiene

$$\begin{aligned} S_\alpha \subset T_\alpha \subset (\hat{S}_k)_\alpha \quad \text{y} \quad \mathcal{T} \text{ es } k\text{-transitiva} \\ \Rightarrow \mathcal{R} \subset \mathcal{T} \subset \hat{S}_k \quad \text{y} \quad \mathcal{T} \text{ } k\text{-transitiva.} \end{aligned}$$

En vista de la proposición anterior se tiene

$\hat{S}_k \subset \mathcal{T}$ y por lo tanto $\hat{S}_k = \mathcal{T}$ (que es el resultado que interesa).

$\Rightarrow T_\alpha = (\hat{S}_k)_\alpha$ y por tanto $(\hat{S}_k)_\alpha$ es la mínima relación k -transitiva que contiene a S_α .

Este resultado identifica formalmente al método B_k con la función que asocia a una relación borrosa reflexiva y simétrica con su cerradura k -transitiva. Observe además la correspondencia entre la definición formal del método B_k (p.16) y la proposición IV.14, que de hecho establece que la relación \hat{R}_k es la mínima relación k -transitiva que contiene a R . Esta correspondencia indica que la k -ultrametría en coeficientes de disimilitud equivale a la k -transitividad en coeficientes de similitud, lo cual resulta evidente si se comparan ambas definiciones (p.16 y 88).

Ahora sólo falta reinterpretar, y de paso demostrar, algunas afirmaciones hechas en el capítulo I sobre el comportamiento de los métodos B_k .

Desde el teorema IV.1 se apuntó la identificación de las relaciones borrosas de k -equivalencia con los k -dendrogramas normalizados o, lo que es análogo, con los coeficientes de disimilitud k -ultramétricos normalizados. El próximo resultado, en vista de tal identificación, podría servir para definir el método B_k aplicado a un coeficiente de similitud.

Teorema IV.2 Sea R una relación borrosa reflexiva, simétrica y finita en V y $1 \leq k \leq |V|$, entonces \hat{R}_k es la mínima relación de equivalencia que contiene a R .

Demostración. Es consecuencia de las proposiciones IV.5, IV.8 y IV.14.

Del corolario IV.3 se sigue el siguiente.

Corolario IV.4 Sea R una relación borrosa en un conjunto V finito y $1 \leq k \leq |V|$, entonces
 R es k -transitiva $\Leftrightarrow R = \hat{R}_k$

Lo anterior equivale a decir que el método B_k no modifica a los coeficientes de disimilaridad k -ultramétricos.

También se dijo que si $|V| = n$ entonces $d_{n-1} = d$, es decir, $CD(V) = U_{n-1}(V)$. El próximo resultado comprende dicha afirmación.

Proposición IV.16 Sea R una relación borrosa debilmente reflexiva y finita en V , con $|V| = n$, entonces para $k = n, n-1$ R es k -transitiva.

Demostración. Sea $k = n-1$ y sean u y v dos elementos de V no necesariamente distintos. Dado $J \in K$

1. Si $u \in J$ entonces

$$\begin{aligned} \mu_R(u, v) &\geq \mu_R(J, v) \\ &\geq [\mu_R(u, J) \wedge \mu_R(J, v) \wedge \mu_R(J)] \end{aligned}$$

2. Si $u \notin J$ entonces

a) $u \neq v \Rightarrow v \in J$

$$\Rightarrow \mu_R(u, v) \geq \mu_R(u, J)$$

$$\geq [\mu_R(u, J) \wedge \mu_R(J, v) \wedge \mu_R(J)]$$

$$b) u = v \Rightarrow \mu_{\mathbb{R}}(u, u) \geq \mu_{\mathbb{R}}(u, J)$$

$$\Rightarrow \mu_{\mathbb{R}}(u, v) \geq [\mu_{\mathbb{R}}(u, J) \wedge \mu_{\mathbb{R}}(J, v) \wedge \mu_{\mathbb{R}}(J)]$$

\therefore Dados $u, v \in V$ y $J \in K$ se tiene

$$\mu_{\mathbb{R}}(u, v) = \mu_{\mathbb{R}}(u, v) \vee$$

$$[\mu_{\mathbb{R}}(u, J) \wedge \mu_{\mathbb{R}}(J, v) \wedge \mu_{\mathbb{R}}(J)]$$

$$\Rightarrow \mathbb{R} = \mathbb{R}_k^2 = \hat{\mathbb{R}}_{n-1}$$

$\therefore \mathbb{R}$ es $(n-1)$ -transitiva y por la proposición

IV.1 \mathbb{R} es también n -transitiva.¹

Observe que fué necesario pedir la reflexividad débil (en el paso 2.b). Esta situación se presentó anteriormente al comparar el caso $k=1$ con las potencias de \mathbb{R} (obtenidas a partir de la composición definida en el capítulo I) y se comentará en la próxima sección. Con relación a este caso, se dijo que el método B_1 produce los mismos efectos que el método de conexión simple, es decir:

Proposición IV.17 Sea \mathbb{R} una relación borrosa debilmente reflexiva y finita en V , entonces $\hat{\mathbb{R}}_1 = \hat{\mathbb{R}}$.

Demostración. Sea $|V| = n$. Por el corolario II.2 (p.54)

existe $h \leq n$ tal que $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^h$ y por la reflexividad débil se tiene

$$\mathbb{R}^h = \mathbb{R}^{h+1} = \mathbb{R}^{h+2} = \dots$$

Sea m el menor entero tal que $2^{m-1} \geq h$, en

¹ Se puede probar la n -transitividad sin pedir reflexividad débil.

tonces por la proposición IV.7

$$\mathcal{R}_1^m = \mathcal{R}^{2^{m-1}} = \mathcal{R}^h = \hat{\mathcal{R}}$$

$$\Rightarrow \underline{\mathcal{R}}_1^m = \underline{\mathcal{R}}_1^{m+1} = \underline{\hat{\mathcal{R}}}_1 = \underline{\hat{\mathcal{R}}}$$

Otra afirmación del capítulo I es que al variar k , si $|V| = n$ se tiene $d = d_{n-1} \geq d_{n-2} \geq \dots \geq d_1$. El resultado equivalente con relaciones borrosas es el siguiente:

Proposición IV.18 Sea \mathcal{R} una relación borrosa debilmente reflexiva y finita en V , con $|V| = n$, entonces $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{n-1} \subset \mathcal{R}_{n-2} \subset \dots \subset \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}$.

Demostración. Por la proposición IV.16 y el corolario IV.4

$$\mathcal{R} = \hat{\mathcal{R}}_{n-1} \quad \text{y por la proposición anterior}$$

$$\hat{\mathcal{R}}_1 = \hat{\mathcal{R}}. \quad \text{Ahora bien, sea } m \text{ lo suficientemen}$$

te grande tal que, para $1 \leq k \leq n$ se cumpla

que $\mathcal{R}_k^m = \hat{\mathcal{R}}_k$, entonces por la proposición

IV.4 se tiene $\mathcal{R}_{n-1} \subset \mathcal{R}_{n-2} \subset \dots \subset \mathcal{R}_1$

Este resultado permite ver que mientras mayor sea el valor de k , menor es la deformación que sufre \mathcal{R} .

Otra idea íntimamente ligada con ésta es que, en algún sentido, las deformaciones que se van haciendo a \mathcal{R} al reducir k tienen una misma dirección, es decir, en términos de disimila

ridades $B_k(d_{k+1}) = B_k(d)$.

Proposición IV.19 Sea R una relación borrosa en un conjunto V finito y $1 \leq k \leq |V|$, entonces

$$\mathcal{R} = \hat{R}_{k+1} \Rightarrow \hat{\mathcal{S}}_k = \hat{R}_k.$$

Demostración. i) $\mathcal{R} = \hat{R}_{k+1} \Rightarrow \mathcal{R} \subset \hat{R}_k$

$$\Rightarrow \hat{\mathcal{S}}_k \subset (\hat{R}_k)_k = \hat{R}_k$$

ii) $\mathcal{R} = \hat{R}_{k+1} \Rightarrow \mathcal{R} \subset \mathcal{R}$

$$\Rightarrow \hat{R}_k \subset \hat{\mathcal{S}}_k$$

Por último se verá una proposición muy similar a la anterior y que puede resultar útil en la construcción de algoritmos para calcular la cerradura k -transitiva de una relación borrosa.

Proposición IV.20 Sea R una relación borrosa en un conjunto V finito y $1 \leq k \leq |V|$, entonces para

$$\text{todo } h \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{R} = R_k^h \Rightarrow \hat{\mathcal{S}}_k = \hat{R}_k.$$

Demostración. Dado $h \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{R} = R_k^h$ y sea m tal que

$$\hat{\mathcal{S}}_k = \mathcal{R}_k^m, \text{ entonces}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{S}}_k &= (\dots ((\mathcal{R})_k^2)_k^2 \dots)_k^2 \quad (m-1) \text{ veces} \\ &= (\dots ((R)_k^2)_k^2 \dots)_k^2 \quad (h+m-2) \text{ veces} \\ &= R_k^{h+m-1} \end{aligned}$$

$$\text{Como } \hat{\mathcal{S}}_k = (\hat{\mathcal{S}}_k)_k^2 \text{ se tiene } R_k^{h+m-1} = R_k^{h+m}$$

$$\Rightarrow R_k^{h+m-1} = \hat{R}_k = \hat{\mathcal{S}}_k$$

4. Ultimos comentarios

En la sección anterior se dejó bien asentada una forma de expresar los métodos B_k por medio de relaciones borrosas, sin embargo, vale la pena hacer algunas consideraciones adicionales.

Un problema de orden práctico, que quedó sin resolver, es el de encontrar una cota razonable para el número de k -potencias de R que se necesita calcular para obtener \hat{R}_k .

Los resultados obtenidos a este respecto sirven para relaciones debilmente reflexivas, lo cual no es problema ya que en taxonomía numérica se trabaja con relaciones reflexivas y simétricas; dichos resultados son la proposición IV.16 y la proposición IV.17 que cubren los casos extremos para valores de k : $|V|$, $|V| - 1$ y 1 .

El problema se presenta con los valores de k comprendidos entre 2 y $|V| - 2$, para los cuales no fué posible dar una buena cota ya que la proposición IV.12, que es la que garantiza que basta calcular un número finito de k -potencias para obtener la cerradura k -transitiva, ofrece una cota (extrema) del orden de $(n^2)^{n^2}$, donde $n = |V|$. Obviamente esa cota no es práctica pues al construir un algoritmo para calcular \hat{R}_k se espera dar un número de pasos considerablemente menor.

La situación en realidad no es tan grave y es muy posible que exista una cota del orden de $|V| - k$, al menos para las relaciones reflexivas y simétricas. Esta sensación se basa en

un razonamiento hecho por medio de gráficas y que se muestra a continuación para motivar, en el mejor de los casos, a algún lector para que encuentre una cota práctica con su correspondiente demostración.

El razonamiento es el siguiente:

Dada una relación borrosa R reflexiva y simétrica en un conjunto V finito, con $n = |V|$ y $1 \leq k \leq n$, se tienen los siguientes resultados:

1. Dado $\alpha \in [0,1]$, $(\hat{R}_k)_\alpha$ es la mínima relación k -transitiva que contiene a R_α .
2. Como se vió en el capítulo I (no se demostró), la gráfica de $(R_k^2)_\alpha$ se puede construir a partir de la de R_α agregando aristas (parejas de $V \times V$) para convertir en una sola subgráfica maximal completa (smc) aquellas smc's que tengan k ó más vértices en común, y repitiendo este procedimiento cada vez que se haya añadido una arista, hasta que ya no sea posible añadir más aristas.
3. Al observar la expresión de R_k^2 (p.92), es fácil percatarse (y se puede demostrar) que lo que se hace para cada α es justamente convertir en smc aquellas smc's que tienen al menos k vértices en común.

Calcular $R_k^3 = (R_k^2)_k^2$ es repetir el proceso con la gráfica resultante de cada nivel y así sucesivamente con R_k^4 , R_k^5 y el resto de las k -potencias de R , hasta que se llega a la cerradura k -transitiva.

Ahora bien, dado un nivel ¿Cuántas veces se puede repetir ese procedimiento hasta que ya no existan smc's con al menos k vértices en común, si el total de puntos es n ?

Observe que en cada paso (obtener la nueva k -potencia) la modificación mínima corresponde a aumentar sólo una arista (en caso de haber alguna modificación), lo cual ocurre cuando se tienen dos puntos u y v no unidos entre sí, pero unidos ambos a k o más puntos que sí estén unidos entre sí. Si G es una subgráfica de R_α que representa esa situación se podría ver así:

G:



En este caso se tendrá que $\mu_{R_k^2}(u,v) \geq \alpha$ es decir, en la gráfica de $(R_k^2)_\alpha$ sí debe aparecer la arista de u a v .

En general, suponiendo que es posible que siempre haya algún cambio al calcular la nueva k -potencia y concentrando la atención en un nivel α determinado, el primer paso implica que al menos $k+2$ puntos formen una smc. En el caso mínimo restarían $n-k-2$ puntos para los cuales la situación es la siguiente:

- a) Si no se añadieron aristas entre ellos al calcular la k -potencia 2, entonces tampoco se añadirán en el segundo paso, aunque es posible que se agreguen aristas entre ellos y los otros $k+2$ puntos.
- b) Si en el primer paso se añadió entre ellos alguna arista

entonces también se forma una smc con al menos $k+2$ puntos.

Observe que en el caso a) el máximo número de k -potencias distintas es $n-k$, que sería la situación extrema en la cual, en la k -potencia 2, se formó una smc con $k+2$ puntos y en cada k -potencia sucesiva se va incorporando un nuevo vértice a esa smc, hasta que se obtiene la gráfica de $V \times V$.

Por otro lado, en el caso b) el proceso debe terminar antes, ya que los vértices se irían uniendo a dos o más smc's y éstas a su vez entre sí.

El razonamiento anterior no pretende ser una demostración formal ya que habría que precisar varias situaciones; sin embargo, permite vislumbrar la existencia de una cota razonable. Por otro lado, al intentar pruebas con manejo exclusivamente algebraico se llegó con facilidad a expresiones muy extensas, difícilmente asimilables, que reflejan lo complejo que pueden resultar las relaciones entre n objetos.

Vale la pena mencionar uno de estos intentos:

La idea era probar que dado \mathbb{R} , si $k_1 < k_2$ entonces $\hat{\mathbb{R}}_{k_1}$ requería calcular al menos tantas k_1 -potencias de \mathbb{R} como k_2 -potencias se necesitaran para obtener $\hat{\mathbb{R}}_{k_2}$. Tal idea surgió de los resultados obtenidos para $k = 1, n-1, n$ y de observar que $\mathbb{R} \subset \hat{\mathbb{R}}_{k_2} \subset \hat{\mathbb{R}}_{k_1}$, es decir, que mientras mayor sea el valor de k menos modificaciones o deformaciones hay que hacer a \mathbb{R} para obtener su cerradura k -transitiva. Sin embargo, ni en forma directa, ni buscando contradicciones, se pudo demostrar el re

sultado.

Lo interesante es que de no ser cierto dicho resultado, para valores grandes de n (es suficiente $n = 50$), puede ser muy costoso intentar calcular todas las k -potencias de \mathcal{R} con la idea de que lo hecho para $k=h$ sirve (o adelanta camino) para $k = h-1$, situación que las proposiciones vistas en la sección anterior indican, pero que no guarda relación con los pasos necesarios para obtener $\hat{\mathcal{R}}_h$ ó $\hat{\mathcal{R}}_{h-1}$.

Lo anterior se refiere al número de pasos necesarios para obtener $\hat{\mathcal{R}}_k$; ahora, cambiando un poco de tema, se harán ciertos comentarios sobre la definición de k -potencia con los cuales concluye este trabajo.

Como se dijo al principio de este capítulo, no fué posible encontrar una composición de relaciones borrosas que contemplara la k -transitividad, en forma contraria a lo que ocurre para el método de conexión simple.

Resulta interesante hablar de esto por dos razones: primero, porque Jardine y Sibson se han "quejado" de ciertos algoritmos que supuestamente calculan los métodos B_k y que ellos dicen que calculan otra cosa, siendo muy posible que calculen una especie de cerradura k -transitiva basada en una composición; en segundo lugar, porque vale la pena ver cómo lo que en una teoría se presenta como una extensión muy natural, en otra presenta muchas trabas.

Si se comparan, por un lado, las definiciones de ultrametría

(p.5 , proposición I.1) y de relación borrosa transitiva (p. 39) y, por el otro, las de k-ultrametría (p.26) y de relación borrosa k-transitiva (p.88); parece un tanto artificial la definición de k-potencia (p.92) por el hecho de incluir la expresión $\mu_{\mathbb{R}_k}^{n-1}(u,v)$.

En un principio se trató de llegar a $\hat{\mathbb{R}}_k$ por medio de una definición de k-composición, que era igual a la de k-potencia salvo por el hecho de que se omitía $\mu_{\mathbb{R}_k}^{n-1}(u,v)$. Aparentemen

te, esa definición es la forma de generalizar B_1 a B_k , pero se presentaron problemas como el que tal composición no es asociativa, lo cual impide hablar de \mathbb{R} compuesta n veces consigo misma y requiere definir este concepto como compuesto por la derecha o por la izquierda. Este descubrimiento sirvió para precisar el comportamiento de los métodos B_k por niveles y se vió que para llegar a una expresión de $\hat{\mathbb{R}}_k$ era necesaria una fórmula mucho muy complicada que incluía composiciones por la izquierda, por la derecha y múltiples combinaciones de éstas. Además, para valores de k mayores que 2, el hecho de \mathbb{R} sea debilmente reflexiva no implica que las potencias de \mathbb{R} sean crecientes, cosa que se logró con la definición de k-potencia al incluir $\mu_{\mathbb{R}_k}^{n-1}(u,v)$ que a la vez adelanta pasos en el cálculo de $\hat{\mathbb{R}}_k$.

APENDICE. PROPIEDADES DE MAXIMOS Y MINIMOS

A continuación se presentan varios resultados que tienen aplicación a lo largo de este trabajo. Los diez primeros se tomaron de la obra de Kaufmann y el resto son generalizaciones de las propiedades de asociatividad y distributividad.

Las demostraciones se encuentran al final de la lista de proposiciones y sólo abarcan la mitad de los resultados. La otra mitad no es necesario probarla ya que para cada proposición existe una "dual" obtenida al intercambiar \vee por \wedge e invertir las desigualdades.

Sean $x, y, z \in R$, entonces

A1	$x \wedge y = y \wedge x$	conmutatividad
A2	$x \vee y = y \vee x$	
A3	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$	asociatividad
A4	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	
A5	$x \wedge x = x$	idempotencia
A6	$x \vee x = x$	
A7	$x \wedge (x \vee y) = x$	absorción
A8	$x \vee (x \wedge y) = x$	
A9	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	distributividad
A10	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$	

Sea V un conjunto cualquiera y sean $A \subset V$, $x \in V$, $y \in R$
y $f, g : V \rightarrow R$, entonces

$$A3.1 \quad \bigwedge_{x \in V} f(x) = \left[\bigwedge_{x \in A} f(x) \right] \wedge \left[\bigwedge_{x \in V-A} f(x) \right]$$

$$A4.1 \quad \bigvee_{x \in V} f(x) = \left[\bigvee_{x \in A} f(x) \right] \vee \left[\bigvee_{x \in V-A} f(x) \right]$$

$$A9.1 \quad y \wedge \left[\bigvee_x f(x) \right] = \bigvee_x [y \wedge f(x)]$$

$$A10.1 \quad y \vee \left[\bigwedge_x f(x) \right] = \bigwedge_x [y \vee f(x)]$$

$$A3.2 \quad \bigwedge_x [f(x) \wedge g(x)] = \left[\bigwedge_x f(x) \right] \wedge \left[\bigwedge_x g(x) \right]$$

$$A4.2 \quad \bigvee_x [f(x) \vee g(x)] = \left[\bigvee_x f(x) \right] \vee \left[\bigvee_x g(x) \right]$$

$$A9.2 \quad \left[\bigvee_x f(x) \right] \wedge \left[\bigvee_x g(x) \right] \geq \bigvee_x [f(x) \wedge g(x)]$$

$$A10.2 \quad \left[\bigwedge_x f(x) \right] \vee \left[\bigwedge_x g(x) \right] \leq \bigwedge_x [f(x) \vee g(x)]$$

Observe que en los últimos dos resultados no se cumple la igualdad, por lo cual la siguiente generalización hay que dividirla en dos grupos.

Sea I un conjunto de índices y sean $i \in I$ y $f_i : I \rightarrow R$, entonces

$$A3.3 \quad \bigwedge_x \left[\bigwedge_i f_i(x) \right] = \bigwedge_i \left[\bigwedge_x f_i(x) \right] = \bigwedge_{i,x} [f_i(x)]$$

$$A4.3 \quad \bigvee_x \left[\bigvee_i f_i(x) \right] = \bigvee_i \left[\bigvee_x f_i(x) \right] = \bigvee_{i,x} [f_i(x)]$$

Ahora bien, suponga que algunas de las f_i son constantes, es

decir, sea $A \subset I$ tal que para todo $i \in A$ se tiene $f_i(x) = c_i$ para todo $x \in V$, entonces

$$A9.3 \quad \bigvee_x \left[\bigwedge_{i \in I} f_i(x) \right] = \left[\bigwedge_{i \in A} c_i \right] \wedge \left[\bigvee_x \left[\bigwedge_{i \in I-A} f_i(x) \right] \right]$$

$$A10.3 \quad \bigwedge_x \left[\bigvee_{i \in I} f_i(x) \right] = \left[\bigvee_{i \in A} c_i \right] \vee \left[\bigwedge_x \left[\bigvee_{i \in I-A} f_i(x) \right] \right]$$

Las demostraciones se basarán en los siguientes 5 enunciados.

Sean $a, b, c, d \in R$, entonces

$$1. \quad a \wedge b \leq a \quad y \quad a \wedge b \leq b$$

$$2. \quad a \vee b \geq a \quad y \quad a \vee b \geq b$$

$$3. \quad (a \leq b \quad y \quad a \leq c) \Leftrightarrow a \leq b \wedge c$$

$$4. \quad (a \geq b \quad y \quad a \geq c) \Leftrightarrow a \geq b \vee c$$

$$5. \quad (a \geq b \quad y \quad c \geq d) \Rightarrow a \wedge c \geq b \wedge d \quad y \quad a \vee c \geq b \vee d$$

Demostración de A1.

$$i) \quad (x \wedge y \leq y \quad y \quad x \wedge y \leq x)$$

$$\Rightarrow x \wedge y \leq y \wedge x$$

$$ii) \quad (x \geq y \wedge x \quad y \quad y \geq y \wedge x)$$

$$\Rightarrow x \wedge y \geq y \wedge x$$

Demostración de A3.

$$i) \quad a) \quad x \geq x \wedge y \geq (x \wedge y) \wedge z$$

$$b) \quad (y \geq x \wedge y \quad y \quad z \geq z)$$

$$\Rightarrow y \wedge z \geq (x \wedge y) \wedge z$$

$$\therefore x \wedge (y \wedge z) \geq (x \wedge y) \wedge z$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii) a) } & x \wedge (y \wedge z) \leq y \wedge z \leq z \\
 & \text{b) } (x \leq x \quad y \quad y \wedge z \leq y) \\
 & \quad \Rightarrow x \wedge (y \wedge z) \leq x \wedge y \\
 \therefore & x \wedge (y \wedge z) \leq (x \wedge y) \wedge z
 \end{aligned}$$

Demostración de A5.

$$\begin{aligned}
 \text{i) } & x \geq x \wedge x \\
 \text{ii) } & x \leq x \Rightarrow x \leq x \wedge x
 \end{aligned}$$

Demostración de A7.

$$\begin{aligned}
 \text{i) } & x \wedge (x \vee y) \leq x \\
 \text{ii) } & (x \geq x \quad y \quad x \vee y \geq x) \\
 & \quad \Rightarrow x \wedge (x \vee y) \geq x
 \end{aligned}$$

Demostración de A9.

$$\begin{aligned}
 \text{i) a) } & (x \geq x \wedge y \quad y \quad x \geq x \wedge z) \\
 & \quad \Rightarrow x \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\
 & \text{b) } (y \vee z \geq y \geq x \wedge y \quad y \\
 & \quad y \vee z \geq z \geq x \wedge z) \\
 & \quad \Rightarrow y \vee z \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\
 \therefore & x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)
 \end{aligned}$$

ii) Ahora se procederá un poco distinto

$$\begin{aligned}
 \text{a) Si } & x > y \vee z, \text{ entonces} \\
 & x \wedge (y \vee z) = y \vee z, \quad x > y \quad y \quad x > z \\
 & \quad \Rightarrow x \wedge y = y \quad y \quad x \wedge z = z \\
 & \quad \Rightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = y \vee z
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

b) Si $x \leq y \vee z$, entonces

$$x \leq y \quad \text{ó} \quad x \leq z$$

$$\Rightarrow x \wedge y = x \quad \text{ó} \quad x \wedge z = x$$

$$\Rightarrow x \wedge (y \vee z) = x$$

$$\leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$\therefore x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

Observe que si A3.3 se cumple, entonces A3.2, A3.1 y A3 también se cumplen, siendo análogo para el grupo de proposiciones derivadas de A4. En forma similar, si A9.3 se cumple entonces A9.1 y A9 también se cumplen y lo mismo ocurre con las proposiciones A10.3, A10.1 y A10.

En vista de ello, para dejar asentadas todas las proposiciones basta demostrar A3.3 y A9.3. Con relación a A9.2 y A10.2, basta dar un ejemplo (para A9.3) donde se dé la desigualdad estricta, ya que caso mayor o igual se prueba en la demostración de A9.3.

Caso particular de A9.2.

Sea $V = [0,1] \subset \mathbb{R}$ y considere las funciones

$f, g : V \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x \quad \text{y} \quad g(x) = 1-x, \text{ entonces}$$

$$f(x) \wedge g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1/2 \\ 1-x & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bigvee_x [f(x) \wedge g(x)] = 1/2 \leq 1 \wedge 1$$

$$= \left[\bigvee_x f(x) \right] \left[\bigvee_x g(x) \right]$$

Demostración de A3.3 .

$$\text{Sean } \alpha = \bigwedge_{x,i} f_i(x) , \beta = \bigwedge_x \left[\bigwedge_i f_i(x) \right] \text{ y}$$

$$\gamma = \bigwedge_i \left[\bigwedge_x f_i(x) \right] .$$

i) a) Dado $x \in V$, se tiene que

$$\alpha \leq \bigwedge_i f_i(x) \text{ es decir, } \alpha \text{ es una co-}$$

ta inferior de $\bigwedge_i f_i(x)$ para toda x

$$\Rightarrow \alpha \leq \beta$$

b) Análogamente $\alpha \leq \bigwedge_x \left[\bigwedge_i f_i(x) \right]$ para toda x

$$\Rightarrow \alpha \leq \gamma$$

ii) a) Suponga $\alpha < \beta$, entonces existen

$i \in I$ y $x \in V$ tales que $f_i(x) < \beta$

lo cual no es posible

$$\therefore \alpha \geq \beta$$

b) En forma análoga se tiene $\alpha \geq \gamma$

$$\therefore \alpha = \beta = \gamma$$

Demostración de A9.3 .

$$\text{Sean } \alpha = \bigvee_x \left[\bigwedge_{i \in I} f_i(x) \right] , \beta = \bigwedge_{i \in A} c_i \text{ y}$$

$$\gamma = \bigvee_x \left[\bigwedge_{i \in I-A} f_i(x) \right]$$

i) Dado $x \in V$ se tiene que

$$\bigwedge_{i \in I} f_i(x) \leq \bigwedge_{i \in A} f_i(x) = \bigwedge_{i \in A} c_i = \beta \quad \text{y}$$

$$\bigwedge_{i \in I} f_i(x) \leq \bigwedge_{i \in I-A} f_i(x)$$

$$\Rightarrow \alpha \leq \beta \quad \text{y} \quad \alpha \leq \gamma$$

$$\Rightarrow \alpha \leq \beta \wedge \gamma$$

Observe que lo anterior se cumple aún cuando las f_i con $i \in A$ no sean constantes, por tanto la desigualdad de A9.2 queda probada.

ii) Supóngase $\alpha < \beta \wedge \gamma$, entonces se tiene

$$\alpha < \beta \quad \text{y} \quad \alpha < \gamma$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{i \in I} f_i(x) < \bigwedge_{i \in A} c_i = \bigwedge_{i \in A} f_i(x) \quad \text{para todo}$$

$$x \in V$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{i \in I} f_i(x) = \bigwedge_{i \in I-A} f_i(x) \quad \text{para todo}$$

$$x \in V$$

$$\Rightarrow \alpha = \gamma \quad \text{lo cual no es posible}$$

$$\therefore \alpha \geq \beta \wedge \gamma$$

BIBLIOGRAFIA

1. Harary, Frank,
Graph Theory,
Reading, Massachusetts, Addison-Wesley, 1972.
2. Jardine, Nicholas y Robin Sibson,
Mathematical Taxonomy,
Londres, John Wiley & Sons, 1971.
3. Kaufmann, Arnold,
Introductions a la Théorie des Sous-Ensembles Flous,
Paris, Masson, Vol. 1, 1973.
4. López, Arturo y Guillermo Espinosa,
Fuzzy Relations and Dendrograms,
México, Universidad Nacional Autónoma de México, CIMAS, Co-
municaciones Técnicas, serie B, Vol. 6, No. 103, 1975.
5. Martínez Malo, Luz María,
Algunos Métodos Jerárquicos y otros Subdominantes de Taxo-
nomía Numérica,
México, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad
de Ciencias, tesis profesional, 1979.
6. Yeh, Raymond T. y S. Y. Bang,
Fuzzy Relations, Fuzzy Graphs and their Application to
Clustering Analysis, en Zadeh, Lofti A. et al (Ed.), Fu-
zzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision
Processes,
Nueva York, Academic Press, 1975.