Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

/ejem-

27

CATEGORIAS DE CONEXION EN Rere

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a :

LEONARDO SALMERON CASTRO

Becario del Instituto de Matemáticas de la UNAM.

México, D.F. 1979

INDICE.

INTRODUCCION.

En [6] se estudian subcategorías cociente-reflexivas y subcategorías de conexión de categorías concretas topológicas. En [5] y [8] resultan de particular importancia las categorías topológicas que son cociente-hereditarias, uno de cuyos ejemplos es la categoría <u>Rere</u> de conjuntos con relaciones reflexivas. En este trabajo estudiaremos la categoría <u>Rere</u> desde un punto de vista categórico-topológico. Trataremos principalmente conexidad y conceptos que tienen que ver con ésta.

La sección 0 contiene una corta exposición de conceptos de topología categórica y algunos resultados que serán utilizados en el desarrollo del trabajo. Al mismo tiempo se aprovecha la oportunidad para introducir la notación que se mantendrá a lo largo de toda la tesis. En la siguiente sección, que tambien tiene un carácter introductorio, se muestra la estructura topológica de <u>Rere</u> y se analizan algunas relaciones con subcategorías importantes.

En la sección 2 se definen objetos de adjunción en Rere y se demuestran propiedades análogas a las que valen para espacios de adjunción en Top. En la misma sección se introducen Rere-objetos S_n y $T_{n,k}$, y se prueban resultados que son aplicados más tarde en la clasificación de subcategorías generadas por los primeros, en las secciones 3 y 4. También se presentan Rere-objetos A_n^{2k} y un par de lemas técnicos que resultan útiles en la sección 4.

Se incluyen en la sección 3 resultados aparecidos en [4] y en [5] que junto con algunos nuevos aquí probados nos proporcionan una clasificación de las subcategorías cociente-reflexivas de Rere; en particular, de las generadas por los objetos S_n y $T_{n,k}$. Se obtiene también una estimación de la abundancia de subcategorías cociente-reflexivas de Rere.

La sección 4 se dedica al estudio y clasificación de las subcategorías de conexión de Rere, especialmente las generadas por los objetos

S_n y $T_{n,k}$. Se muestran tambien clases propias de categorías de conexión que son constantes a la izquierda y de otras que no lo son. Al final de la misma sección se presenta una forma de describir y generar categorías de conexión que no coincide con la descrita en [6] y que en algunos casos puede ser mas fácil de manejar.

Dado que una categoría de conexión empieza por ser invariante bajo morfismos, es natural preguntarse cuales morfismos reflejan conexidad. En la sección 5 se caracterizan estos morfismos y se estudian algunas de sus propiedades.

Por último, en la sección 6 definimos y estudiamos morfismos cubrientes y fuertemente cubrientes (F-cubrientes). El primero de estos conceptos corresponde a las "aplicaciones cubrientes" definidas en [10] para gráficas y el segundo es un poco más cercano al de "aplicación cubriente" en Top. Las dos clases de morfismos comparten propiedades importantes como la de levantamiento único de algunas trayectorias y la de ser preservados por cuadrados cartesianos (pull-backs). La segunda propiedad apenas mencionada nos permite definir, en algunos casos, funtores contravariantes de Rese en Set. En la misma sección se encuentra una cota superior para el número de morfismos cubrientes $\tilde{X} \xrightarrow{f} X$ de multiplicidad k ($k \in \mathbb{N}$) distintos para un Rese-objeto X dado. Parte de los resultados obtenidos en esta última sección pueden pensarse como generalizaciones de resultados aparecidos en [9].

0.- PRELIMINARES.

<u>0-1 DEFINICIONES</u>: Una categoría $\underline{K}$ es <u>concreta</u> si se cumplen las condiciones:

(a) Los objetos de $\underline{K}$ son parejas (X,ξ), donde X es un conjunto que se llama el <u>conjunto subyacente</u> de (X,ξ) y ξ es un elemento de una clase de objetos que se llaman las <u>$\underline{K}$-estructuras</u> en X.

(b) Para cada pareja $((X,\xi),(Y,\eta))$ de $\underline{K}$-objetos, se tiene $\underline{K}((X,\xi),(Y,\eta)) \subset (\underline{Set}(X,Y)) \times ((\xi,\eta))$ y se cumplen las condiciones:

(i) Para cada $\underline{K}$-objeto (X,ξ), $(1_X,(\xi,\xi))$ coincide con $1_{(X,\xi)}$

(ii) Si $f\in \underline{Set}(X,Y)$ y $g\in \underline{Set}(Y,Z)$ son tales que $(f,(\xi,\eta))\in \underline{K}((X,\xi),(Y,\eta))$ y $(g,(\eta,\zeta))\in \underline{K}((Y,\eta),(Z,\zeta))$ entonces $(gf,(\xi,\zeta)) = (g,(\eta,\zeta))(f,(\xi,\eta))$.

<u>NOTA</u>.- Cuando no hay peligro de confusión, un $\underline{K}$-morfismo $(f,(\xi,\eta))$ se denota simplemente por f.

<u>0-2 DEFINICIONES</u>: Sean $\underline{K}$ una categoría concreta, X un conjunto, $(Y_i,\eta_i)_{i\in I}$ una familia de $\underline{K}$-objetos y $(f_i : X \longrightarrow Y_i)_{i\in I}$ una fuente en $\underline{Set}$. Una $\underline{K}$-estructura ξ de X se llama <u>inicial respecto a</u> $(f_i,\eta_i)_{i\in I}$ si y sólo si se satisfacen las condiciones:

(a) Para cada $i\in I$,

$f_i : (X, \xi) \longrightarrow (Y_i, \eta_i) \in \underline{K}((X,\xi),(Y_i,\eta_i)).$

(b) Si (Z, ζ) es un $\underline{K}$-objeto y $g : Z \longrightarrow X$ es una función tal que para cada $i \in I$,

$$f_i g : (Z,\zeta) \longrightarrow (Y_i, \eta_i) \in \underline{K}((Z,\zeta),(Y_i,\eta_i))$$

entonces $g \in \underline{K}((Z,\zeta),(X,\xi))$.

Dualmente, si $(g_i : Y_i \longrightarrow X)_{i\in I}$ es un sumidero en $\underline{Set}$, decimos que una $\underline{K}$-estructura ξ de X es <u>final respecto a</u> $(g_i, \eta_i)_{i\in I}$ si y sólo si se cumplen las condiciones:

(a*) Para cada $i \in I$,

$$g_i : (Y_i, \eta_i) \longrightarrow (X,\xi) \in \underline{K}((Y_i,\eta_i),(X,\xi))$$

(b*) Si (Z,ζ) es un $\underline{K}$-objeto y $f : X \longrightarrow Z$ es una función tal que para cada $i \in I$,

$$f g_i : (Y_i, \eta_i) \longrightarrow (Z,\zeta) \in \underline{K}((Y_i,\eta_i),(Z,\zeta))$$

entonces $f \in \underline{K}((X,\xi),(Z,\zeta))$.

<u>0-3 PROPOSICION.</u>([6]). Si $\underline{K}$ es una categoría concreta, $(f_i : (Y_i,\eta_i) \longrightarrow (X,\xi))_{i\in I}$ es un $\underline{K}$-sumidero y $(k_{ji} : (Y_i,\eta_i) \longrightarrow (Z_j, \theta_j)_{i\in I_j},\ g_j : (Z_j,\theta_j) \longrightarrow (X,\xi)_{j\in J})$ es una factorización de $(f_i)_{i\in I}$ en $\underline{K}$, entonces, si θ_j es final respecto a $(k_{ji}, \eta_i)_{i\in I_j}$ para cada $j \in J$ y ξ es final respecto a $(g_j, \theta_j)_{j\in J}$ entonces ξ es final respecto a $(f_i, \eta_i)_{i\in I}$.

<u>0-4 DEFINICIONES.</u> Si $f:(X,\xi)\rightarrow(Y,\eta)$ es un $\underline{K}$-morfismo en una categoría concreta $\underline{K}$, entonces f se llama: (a) <u>$\underline{K}$-inmersión</u> si f es inyectiva y ξ es inicial con respecto a (f,η).

(b) <u>$\underline{K}$-cociente</u> si f es supráyectiva y η es final con respecto a (f,ξ).

<u>0-5 DEFINICIONES.</u> Sea K una categoría concreta tal que para cada conjunto X con cardinalidad menor que dos existe exactamente una $\underline{K}$-estructura en X. Se dice que $\underline{K}$ es <u>topológica</u> si dada una familia $(Y_i,\eta_i)_{i\in I}$ de $\underline{K}$-objetos y una familia $(f_i: X\rightarrow Y_i)_{i\in I}$ de funciones, existe una $\underline{K}$-estructura ξ de X que es inicial respecto a $(f_i,\eta_i)_{i\in I}$. Obsérvese que esta estructura es única salvo por un isomorfismo que es la identidad en los conjuntos subyacentes. Se dice que $\underline{K}$ es <u>cotopológica</u> si dada una familia $(Y_i,\eta_i)_{i\in I}$ de $\underline{K}$-objetos y una familia $(f_i: Y_i\rightarrow X)_{i\in I}$ de funciones, existe una $\underline{K}$-estructura ξ de X que es final respecto a $(f_i,\eta_i)_{i\in I}$. Si (X,ρ) es un $\underline{K}$-objeto, se dice que ρ es <u>discreta</u> si para cada función $f: X\longrightarrow Y$, y cada $\underline{K}$-estructura η de Y, $f:(X,\rho)\longrightarrow(Y,\eta)$ es $\underline{K}$-morfismo. Se dice que ρ es <u>indiscreta</u> si para cada función $f: Y\longrightarrow X$

y cada $\underline{K}$-estructura η de Y, se cumple que $f: (Y, \eta) \longrightarrow (X, \rho)$ es $\underline{K}$-morfismo.

Ejemplos de categorías topológicas son $\underline{Top}$ y $\underline{Unif}$, y son ejemplos de categorías no topológicas $\underline{Grp}$ y $\underline{R\text{-}Mod}$.

<u>0-6 OBSERVACIONES</u> ([6]). Si $\underline{K}$ es una categoría concreta, entonces $\underline{K}$ es topológica si y sólo si $\underline{K}$ es cotopológica.

Si $\underline{K}$ es topológica entonces $\underline{K}$ es completa y cocompleta.

<u>0-7 DEFINICIONES.</u> Si $\underline{K}$ es una categoría concreta topológica y $\mathcal{U}: \underline{K} \longrightarrow \underline{Set}$ es el funtor que olvida, se dice que $\underline{K}$ es <u>debilmente fibrada</u> si para cada conjunto X, $\mathcal{U}^{-1}X$ tiene un conjunto representativo; y es <u>propiamente fibrada</u> si para cada conjunto X, $\mathcal{U}^{-1}X$ es un conjunto.

<u>0-8 PROPOSICION. ([6])</u>. Si $\underline{K}$ es una categoría concreta topológica, entonces son equivalentes las afirmaciones:

(a) $\underline{K}$ es debilmente fibrada.

(b) $\underline{K}$ es localmente pequeña.

(c) $\underline{K}$ es colocalmente pequeña.

<u>0-9 NOTACION</u>. Si $\underline{K}$ es una categoría concreta topológica, $(X, \xi) \in |\underline{K}|$ y $X' \subset X$, denotaremos por $\xi_{|X'}$ a la $\underline{K}$-estructura inicial de X' respecto a la inclusión y a ξ.

<u>0-10 DEFINICIONES</u>. Si $\underline{K}$ es una categoría concreta topológica y $f: (X, \xi) \longrightarrow (Y, \eta)$ es un $\underline{K}$-morfismo, las <u>$\underline{K}$-fibras</u> de f son los $\underline{K}$-objetos de la forma $(f_y^{-1}, \xi_{|f_y^{-1}})$ donde $y \in Y$. Si $\underline{B} \subset |\underline{K}|$ y $f: (X, \xi) \longrightarrow (Y, \eta)$ es un $\underline{K}$-morfismo, diremos que f es <u>$\underline{B}$-monótono</u> si las fibras de f estan en $\underline{B}$.

<u>0-11 DEFINICIONES</u>. Si $\underline{K}$ es una categoría y $\underline{B}$ es una clase de $\underline{K}$-objetos, <u>la categoría constante a la izquierda definida por</u> $\underline{B}$, que se denota por $N\underline{B}$, es la subcategoría plena de $\underline{K}$ cuyos objetos X son los que tienen la propiedad de que para cada $Y \in \underline{B}$, si $f: X \longrightarrow Y$ es $\underline{K}$-morfismo, entonces f es constante. <u>La categoría constante a la derecha definida por</u> $\underline{B}$, que se denota por $I\underline{B}$, es la subcategoría plena de $\underline{K}$ cuyos objetos X son los que tienen la propiedad de que para cada $Y \in \underline{B}$, si $f: Y \longrightarrow X$ es $\underline{K}$-morfismo, entonces f es constante.

0-12 OBSERVACIONES. Si $\underline{K}$ es una categoría concreta topológica, a cada subcategoría $\underline{B}$ de $\underline{K}$ plena y repleta le corresponde una mínima subcategoría cociente-reflexiva $Q(\underline{B})$ que contiene a $\underline{B}$. Además, $X \in Q(\underline{B})$ si y sólo si existe una $\underline{K}$-monofuente $(m_i : X \longrightarrow B_i)_{i \in I}$ con $B_i \in \underline{B}$ para cada $i \in I$ (8-24, [6]), (1-2-9, [4]). Si $\underline{B}$ es plena y repleta, $\underline{B}$ es cociente reflexiva si y sólo si $\underline{B}$ está cerrada bajo productos pequeños y para cada $B \in \underline{B}$, si $f: Z \longrightarrow B$ es monomorfismo entonces $Z \in \underline{B}$ (7-14, [6]).

0-13 PROPOSICION. (7-21, [6]). Si $\underline{K}$ es una categoría concreta topológica y $\underline{B} \subset |\underline{K}|$ entonces, $I\underline{B}$ es subcategoría cociente-reflexiva de $\underline{K}$.

0-14 DEFINICION. Sean $\underline{K}$ una categoría concreta topológica y $\underline{B}$ una subcategoría plena de $\underline{K}$ con algún objeto no vacío. $\underline{B}$ es invariante bajo $\underline{K}$-morfismos si junto con cada $(X,\xi) \in |\underline{B}|$, $\underline{B}$ contiene a todas las imágenes por $\underline{K}$-morfismos de él. $\underline{B}$ es de componentes si para cada $\underline{B}$-objeto (X,ξ) y cada familia $\{(X_i, \xi_{/X_i})\}_{i \in I}$ de $\underline{B}$-subobjetos de (X,ξ) cuya intersección es no vacía, se tiene que $(\bigcup_{i \in I} X_i, \xi_{/\bigcup_{i \in I} X_i}) \in |\underline{B}|$. Una categoría de componentes e invariante bajo $\underline{K}$-morfismos se llamará <u>de conexión</u> (Nótese que en este caso, $(\phi,-)\in\underline{B}$).

<u>0-15 OBSERVACION</u>. Si $\underline{K}$ es concreta topológica, a cada $\underline{B}\subset|\underline{K}|$ que contenga algún objeto no vacío le corresponde una mínima subcategoría de conexión $L(\underline{B})$ que contiene a $\underline{B}$.

<u>0-16 DEFINICIONES.</u> Si $\underline{K}$ es concreta topológica, $(X,\xi),(Y,\eta)$ son $\underline{K}$-objetos, $x\in X$, $y\in Y$, $(X\amalg Y,\tau)$ es el $\underline{K}$-coproducto de (X,ξ) y (Y,η), y $(X\amalg Y,\tau)\to(X,\xi)\vee(Y,\eta)$ es el $\underline{K}$-cociente que identifica $\{x,y\}$ en un punto, entonces $(X,\xi)\vee(Y,\eta)$ es una <u>cuña</u> en $\underline{K}$ de (X,ξ) y (Y,η). Si $\underline{A}$ es una clase de $\underline{K}$-objetos, se dice que un $\underline{K}$-objeto (X,ξ) es una <u>cadena finita con eslabones en</u> $\underline{A}$ si existen $(A_i,\alpha_i)_{i=1}^{n}\subset|\underline{A}|$ y $(X_i,\xi_i)_{i=1}^{n}$ tales que $(X_1,\xi_1)=(A_1,\alpha_1)$, $(X_n,\xi_n)=(X,\xi)$ y para cada $j\in\{2,\dots,n\}$, $(X_j,\xi_j)=(X_{j-1},\xi_{j-1})\vee(A_j,\alpha_j)$. Diremos que un $\underline{K}$-morfismo $f:(X,\xi)\longrightarrow(Y,\eta)$ es una <u>$\underline{A}$-trayectoria de</u> y <u>a</u> y' <u>en</u> (Y,η) si (X,ξ) es una cadena finita con eslabones en $\underline{A}$ y $\{y,y'\}\subset f(X)$.

<u>0-17 PROPOSICION</u> (9-9 [6]). Si K es concreta topológica y $\underline{A}\subset|\underline{Rere}|$ tiene un objeto no vacío, entonces $(X,\xi)\in L(\underline{A})$ si y sólo si para cada $x,x'\in X$ existe una $\underline{A}$-trayectoria de x a x' en (X,ξ).

<u>0-18 PROPOSICION</u>. (9-10, [6]). Si $\underline{K}$ es concreta topológica y $\underline{B} \subset |\underline{K}|$ entonces, $N(\underline{B})$ es subcategoría de conexión de $\underline{K}$.

<u>0-19 DEFINICION</u>. Si $\underline{K}$ es concreta topológica, se dice que $\underline{K}$ es <u>cociente hereditaria</u> si para cada $\underline{K}$-cociente $q:(X,\xi)\longrightarrow(Y,\eta)$ y cada $Y'\subset Y$, la restricción $q|^{Y'}_{q^{-1}Y'} : (q^{-1}Y', \xi|_{q^{-1}Y'}) \longrightarrow (Y', \eta|_{Y'})$ es $\underline{K}$-cociente.

<u>0-20 TEOREMA</u> (2-20, [8]). Si $\underline{K}$ es concreta topológica cociente hereditaria y $\underline{B}$ es una subcategoría plena y repleta de $\underline{K}$, entonces, $\underline{B}$ es constante a la izquierda si y sólo si $\underline{B}$ es de conexión y si $q:(X,\xi)\longrightarrow(Y,\eta)$ es cociente $\underline{B}$-monótono con $(Y,\eta)\in|\underline{B}|$ entonces $(X,\xi)\in|\underline{B}|$.

<u>0-21 DEFINICIONES</u>. Sean $\underline{K}$ una categoría concreta topológica y $\underline{B}$ una subcategoría de conexión de $\underline{K}$. Dado un $\underline{K}$-objeto (X,ξ), llamaremos <u>$\underline{B}$-componentes de</u> (X,ξ) a los $\underline{K}$-subobjetos máximos del conjunto formado por todos aquellos que son de la forma $(X', \xi|_{X'})$ con $X'\subset X$ y que pertenecen a $\underline{B}$. Obsérvese que los conjuntos subyacentes de las $\underline{B}$-componentes de (X,ξ) constituyen una partición de X. Diremos que un $\underline{K}$-objeto es <u>totalmente $\underline{B}$-inconexo</u> si sus $\underline{B}$-componentes son singulares.

1- ESTRUCTURA TOPOLOGICA DE Rere Y ALGUNAS SUBCATEGORIAS IMPORTANTES.

1-1 DEFINICIONES.

(1) Rere es la categoría cuyos objetos son las parejas (X,ρ) donde X es un conjunto y ρ es una relación reflexiva en X; un Rere-morfismo de (X,ρ) en (Y,η) es una función $f: X \longrightarrow Y$ tal que si $(x,x') \in \rho$ entonces $(f(x), f(x')) \in \eta$. La composición en Rere es la composición usual de funciones.

(2) Denotaremos por Graf a la categoría de gráficas cuyos objetos son ternas $G=(\mathcal{V}_G, A_G, \psi_G)$ donde $\mathcal{V}_G$ es un conjunto (de vértices de G), A_G es un conjunto (de aristas de G) tales que $\mathcal{V}_G \cap A_G = \phi$, $\psi_G : A_G \longrightarrow \{\{u,v\} / u,v \in \mathcal{V}_G\}$ es una función (de incidencia); cuyos morfismos $f: G \longrightarrow H$ son parejas (f_1,f_2) de funciones $f_1 : A_G \longrightarrow A_H$ y $f_2 : \mathcal{V}_G \longrightarrow \mathcal{V}_H$ tales que si $\psi_G(a) = \{u,v\}$, entonces $\psi_H(f_2(a)) = \{f_1(u), f_1(v)\}$; la composición esta dada por $(g_1,g_2)\cdot(f_1,f_2) = (g_1f_1, g_2f_2)$.

(3) Denotaremos por DiGraf a la categoría de gráficas dirigidas cuyos objetos son ternas $D=(\mathcal{V}_D, A_D, \psi_D)$ donde $\mathcal{V}_D$ es un conjunto (de vértices de D), A_D es un conjunto (de arcos de D) tales que $\mathcal{V}_D \cap A_D = \phi$, $\psi_D : A_D \longrightarrow \mathcal{V}_D \times \mathcal{V}_D$ es una función (de incidencia); cuyos morfismos $f: D \longrightarrow E$ son

parejas (f_1, f_2) de funciones $f_1 : A_D \longrightarrow A_E$ y $f_2 : \mathcal{V}_D \longrightarrow \mathcal{V}_E$ tales que si $\psi_D(a) = (u, v)$, entonces $\psi_E(f_2(a)) = (f_1(u), f_1(v))$; la composición está dada por $(g_1, g_2) \circ (f_1, f_2) = (g_1 f_1, g_2 f_2)$.

1-2 OBSERVACIONES. La categoría Rere es concreta y puede pensarse como subcategoría de Graf o bien de la categoría de los complejos celulares de dimensión 1 (1-CW); tambien puede pensarse como subcategoría plena de DiGraf, es decir, existen inmersiones Rere $\longrightarrow$ Graf, Rere $\longrightarrow$ 1-CW y Rere $\longrightarrow$ DiGraf, y esta última es un funtor pleno.

1-3 PROPOSICION (Rere es Topológica).

Si $(X_i; \rho_i)_{i \in I}$ es una familia de Rere-objetos, X es un conjunto, $(f_i : X \longrightarrow X_i)_{i \in I}$ es una familia de funciones y ρ es la relación en X tal que $(x, x') \in \rho$ si y sólo si para cada $i \in I$, $(f_i(x), f_i(x')) \in \rho_i$, entonces (X, ρ) tiene la Rere-estructura inicial respecto a $(f_i; \rho_i)_{i \in I}$.

Demostración: Claramente, $(X, \rho) \in$ Rere y para cada $i \in I$, $f_i : (X, \rho) \longrightarrow (X_i, \rho_i) \in$ Rere $((X, \rho), (X_i, \rho_i))$. Sean $(Z, \tau) \in |$Rere$|$ y $g : Z \longrightarrow X$ una función tal que para cada $i \in I$,

$f_i g : (Z, \tau) \longrightarrow (X_i, \rho_i) \in$ Rere $((Z, \tau), (X_i, \rho_i))$. Si

$(z,z') \in \zeta$, entonces $(f_i(g(z)), f_i(g(z'))) = (f_i g(z), f_i g(z')) \in \rho_i$ para cada $i \in I$ $\therefore$ $(g(z), g(z')) \in \rho$ y en consecuencia, $g : (Z,\zeta) \longrightarrow (X,\rho)$ es Rere-morfismo ∎

Como se observó en 0-6, Rere tiene también estructuras finales, es completa y cocompleta. Daremos a continuación la descripción explícita de algunas estructuras importantes.

1-4 COROLARIO. Si $(X_i, \rho_i)_{i\in I}$ es una familia de Rere-objetos, entonces el conjunto $\prod_I X_i$ con la Rere-estructura inicial respecto a las proyecciones $(\pi_i)_{i\in I}$ es el Rere-producto $\prod_I (X_i, \rho_i)$.

1-5 PROPOSICION. Si $(X_i; \rho_i)_{i\in I}$ es una familia de Rere-objetos, X es un conjunto, $(f_i : X_i \longrightarrow X)_{i\in I}$ es una familia de funciones que cubre puntos y ρ es la relación en X tal que $(x,x') \in \rho$ si y sólo si existen $i \in I$, $x_i \in f_i^{-1}x$ y $x_i' \in f_i^{-1}x'$ tales que $(x_i, x_i') \in \rho_i$, entonces (X,ρ) tiene la Rere-estructura final respecto a $(f_i; \rho_i)_{i\in I}$.

Demostración: como $(f_i)_I$ cubre puntos, $(X,\rho) \in |\text{Rere}|$. Claramente, para cada $i \in I$, $f_i : (X_i, \rho_i) \longrightarrow (X,\rho)$ es Rere-morfismo. Sean $(Z,\zeta) \in |\text{Rere}|$ y $g : X \longrightarrow Z$ una función tal que para cada $i \in I$,

$g f_i : (X_i, \rho_i) \longrightarrow (Z,\zeta)$ es Rere-morfismo.

Sean $x, x' \in X$ tales que $(x,x') \in \rho$ $\therefore$ existen $i \in I$, $x_i \in f_i^{-1}x$ y $x_i' \in f_i^{-1}x'$ tales que $(x_i, x_i') \in \rho_i$ $\therefore$ $(gf_i(x_i), gf_i(x_i')) \in \tau$ $\therefore$ $(g(x), g(x')) \in \tau$ y entonces, $g : (X,\rho) \longrightarrow (Z,\tau)$ es Rese-morfismo ■

<u>1-6 PROPOSICION</u>. Si $(X', \rho') \in |\underline{Rese}|$, $X' \subset X$ y ρ es la relación $\rho' \cup \{(y,y') \in X \times X \,/\, y = y'\}$, entonces (X,ρ) tiene la <u>Rese</u>-estructura final con respecto a la inclusión y ρ'.

<u>Demostración</u>: Sean $(Z,\tau) \in |\underline{Rese}|$ y $g : X \longrightarrow Z$ una función tal que $gi : (X', \rho') \longrightarrow (Z,\tau)$ es <u>Rese</u>-morfismo. Sean $y, y' \in X$ tales que $(y,y') \in \rho$ $\therefore$ $(y,y') \in \rho'$ ó $y = y' \in X - X'$ $\therefore$ $g : (X,\rho) \longrightarrow (Z,\tau)$ es <u>Rese</u>-morfismo ■

Nótese que de 1-6, 1-5 y 0-3 puede deducirse que <u>Rese</u> es cotopológica.

<u>1-7 COROLARIO</u>. Si $(X_i, \rho_i)_{i \in I}$ es una familia de <u>Rese</u>-objetos, el conjunto $\coprod_I X_i$ con la <u>Rese</u>-estructura final respecto a las inyecciones $(j_i)_{i \in I}$ es el <u>Rese</u>-coproducto $\coprod_I (X_i, \rho_i)$

<u>1-8 PROPOSICION</u>. Si $F = (f_i : (X,\rho) \longrightarrow (Y_i, \eta_i))_I$ es una <u>Rese</u>-fuente, $S = (g_i : (X_i, \rho_i) \longrightarrow (Y,\eta))_I$ es un <u>Rese</u>-sumidero y $f : (X,\rho) \longrightarrow (Y,\eta)$ es un <u>Rese</u>-morfismo, entonces :

(a) F es Rese-monofuente si y sólo si $(f_i : X \longrightarrow Y_i)_I$ separa puntos.

(b) S es Rese-episumidero si y sólo si $(g_i : X_i \longrightarrow Y)_I$ cubre puntos.

(c) f es Rese-monomorfismo si y sólo si $f: X \longrightarrow Y$ es inyectiva.

(d) f es Rese-epimorfismo si y sólo si $f: X \longrightarrow Y$ es supráyectiva.

(e) f es Rese-bimorfismo si y sólo si $f: X \longrightarrow Y$ es biyectiva.

(f) f es Rese-constante si y sólo si $f: X \longrightarrow Y$ es función constante.

(g) f es Rese-coconstante si y sólo si $X = \phi$

Demostración: Por (3-10, [6]) ■

1-9 PROPOSICION. Si $f: (X, \rho) \longrightarrow (Y, \eta)$ es un Rese-morfismo, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(a) $f: X \longrightarrow Y$ es supráyectiva y para cada $(y, y') \in \eta$, existe $(x, x') \in \rho$ tal que $f(x) = y$ y $f(x') = y'$.

(b) f es Rese-cociente.

(c) f es Rese-epimorfismo regular.

(d) f es Rese-epimorfismo extremado.

Demostración: (a) $\Leftrightarrow$ (b) por 1-5. (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d) por 3-22 de [6] ■

1-10 PROPOSICION. Si $f:(X,\rho)\longrightarrow(Y,\eta)$ es un Rese-morfismo, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(a) $f:X\longrightarrow Y$ es inyectiva y si $(f(x),f(x'))\in\eta$ entonces $(x,x')\in\rho$.

(b) f es Rese-inmersión.

(c) f es Rese-monomorfismo regular.

(d) f es Rese-monomorfismo extremado.

Demostración: (a)$\Leftrightarrow$(b) por 1-3. (b)$\Leftrightarrow$(c)$\Leftrightarrow$(d) por 3-21 de [6] ■

1-11 PROPOSICION. Si f es Rese-morfismo, entonces:

(a) si f es retracción, entonces f es cociente.

(b) si f es sección, entonces f es inmersión.

(c) f es isomorfismo $\Leftrightarrow$ f es inmersion suprayectiva $\Leftrightarrow$ f es cociente inyectivo.

Demostración: por 2-11 y 2-13 de [6] ■

1-12 PROPOSICION. Rese es cociente hereditaria.

Demostración: Si $q:(X,\rho)\longrightarrow(Y,\eta)$ es un cociente y $Y'\subset Y$, entonces, $q^{/Y'}_{/q^{-1}Y'}$ es suprayectiva y si $(y,y')\in\eta_{/Y'}=\eta\cap(Y'\times Y')$, como q es cociente, existe $(x,x')\in\rho$ tal que $q(x)=y$ y $q(x')=y'$, entonces $(x,x')\in\rho\cap(q^{-1}Y'\times q^{-1}Y')=\rho_{/q^{-1}Y'}$; hemos probado que $q^{/Y'}_{/q^{-1}Y'}:(q^{-1}Y';\rho_{/q^{-1}Y'})\longrightarrow(Y';\eta_{/Y'})$ es cociente ■

<u>1-13 OBSERVACION</u>. Si $f: X \longrightarrow Y$ es una función constante, entonces, $f: (X,\rho) \longrightarrow (Y,\gamma)$ es <u>Rese</u>-morfismo para cualquier pareja ρ, γ de <u>Rese</u>-estructuras de X y Y respectivamente.

<u>1-14 PROPOSICION</u>. Si $(X,\rho) \in |\underline{Rese}|$, entonces:

(a) $\rho = \{(x,x) / x \in X\} \Leftrightarrow \rho$ es discreta $\Leftrightarrow (X,\rho)$ es proyectivo.

(b) $\rho = X \times X \Leftrightarrow \rho$ es indiscreta.

(c) (X,ρ) es inyectivo $\Leftrightarrow \rho$ es indiscreta y $X \neq \phi$.

(d) (X,ρ) es inicial $\Leftrightarrow X = \phi$.

(e) (X,ρ) es final $\Leftrightarrow X$ es singular.

(f) (X,ρ) es separador $\Leftrightarrow X \neq \phi$

(g) (X,ρ) es coseparador $\Leftrightarrow$ existe $X' \subset X$ tal que $\overline{\overline{X'}} > 1$ y $X' \times X' \subset \rho$.

<u>Demostración</u>: <u>(a)</u> la primera equivalencia es obvia y la segunda es por (3-5, [6]); <u>(b)</u> es inmediato; <u>(c)</u> es por (3-6, [6]); <u>(d)</u> y <u>(e)</u> valen por (3-15, [6]); <u>(f)</u> vale por (e) y (3-16, [6]); <u>(g)</u> "$\Rightarrow$" Supongamos que (X,ρ) es coseparador, denotemos por S_2 al <u>Rese</u>-objeto $(\{1,2\}, i)$ donde i es la <u>Rese</u>-estructura indiscreta para $\{1,2\}$, y sea $\underline{1} := (\{0\}, \{(0,0)\}) \in |\underline{Rese}|$. Sean $\hat{1}, \hat{2}: \underline{1} \longrightarrow S_2$ los morfismos constantes de valores 1 y 2 respectivamente $\therefore$ existe $h: S_2 \longrightarrow (X,\rho)$ <u>Rese</u>-morfismo tal que $h\hat{1} \neq h\hat{2}$ $\therefore$ $|Im h| > 1$ y

$\mathrm{Im}\, h \times \mathrm{Im}\, h \subset \rho$. "$\Leftarrow$" Supongamos, ahora, que existe $Y \subset X$ tal que $\overline{\overline{Y}} > 1$ y $Y \times Y \subset \rho$; Consideremos $f, g : (W, \gamma) \longrightarrow (\mathcal{U}, \delta)$ Rese-morfismos distintos $\therefore$ existe $a \in W$ tal que $f(a) \neq g(a)$; sean $y, y' \in Y$ distintos, sea $k : \mathcal{U} \longrightarrow X$ tal que $k(t) = y$ si $t = f(a)$ y $k(t) = y'$ si $t \in \mathcal{U} - \{f(a)\}$; como $Y \times Y \subset \rho$, entonces $k : (\mathcal{U}, \delta) \longrightarrow (X, \rho)$ es un Rese-morfismo tal que $kf \neq kg$ ■

<u>1-15 PROPOSICION</u>. Rese es propiamente fibrada ($\therefore$ tambien es localmente y colocalmente pequeña).

<u>Demostración</u>: Si X es un conjunto, la clase de todas las Rese-estructuras de X está contenida en $\mathcal{P}(X \times X)$ que es un conjunto $\therefore$ $\mathcal{U}^{-1}X$ es un conjunto ■

<u>1-16 OBSERVACION</u>. (Rese posee un funtor Hom interno). Consideremos en $\hom((X, \xi), (Y, \eta))$ la relación σ formada por las parejas (f, g) tales que para cada $x \in X$ se tiene que $(f(x), g(x)) \in \eta$, $\mathcal{H}om((X, \xi), (Y, \eta)) = (\hom((X, \xi), (Y, \eta)), \sigma)$ es entonces un Rese-objeto. Sean $p : (X', \xi') \longrightarrow (X, \xi)$, $q : (Y, \eta) \longrightarrow (Y', \eta')$ Rese-morfismos, σ' la Rese-estructura correspondiente en $\mathcal{H}om((X', \xi'), (Y', \eta'))$, $f, g : (X, \xi) \longrightarrow (Y, \eta)$ tales que $(f, g) \in \sigma$ y $x' \in X'$ $\therefore$ $p(x') \in X$ y como $(f, g) \in \sigma$, se tiene que $(fp(x'), gp(x')) \in \eta$; como q es Rese-morfismo, entonces, $(qfp(x'), qgp(x')) \in \eta'$ $\therefore$ $(\hom(p, q)(f), \hom(p, q)(g)) \in \sigma'$

de donde se sigue que $\mathcal{H}om(\rho,\varphi)=(hom(\rho,\varphi),(\sigma,\sigma'))$ es Rere-morfismo. Se tiene, pues, un funtor $\mathcal{H}om: \underline{Rere}^{*}\times \underline{Rere} \longrightarrow \underline{Rere}$ tal que si $\mathcal{U}: \underline{Rere} \longrightarrow \underline{Set}$ es el funtor que olvida, $\mathcal{U}\circ\mathcal{H}om = hom$.

1-17 NOTACION. Pasaremos ahora a estudiar algunas propiedades de las siguientes subcategorías plenas y repletas de Rere :

QOS de todos los conjuntos preordenados (quasi-ordenados).
ASRere de todos los conjuntos con relaciones reflexivas antisimétricas.
SRere de todos los conjuntos con relaciones reflexivas simétricas.
ERere de todos los conjuntos con relaciones de equivalencia.
POS de todos los conjuntos parcialmente ordenados.

1-18 PROPOSICION. QOS, SRere y ERere son subcategorías birreflexivas de Rere.

Demostración:

+ Sean $E: \underline{QOS} \hookrightarrow \underline{Rere}$ la inclusión y $(X,\rho)\in|\underline{Rere}|$. Sea ρ' la mínima relación transitiva en X que contiene a ρ, es decir, $\rho'=\{(x,x')\in X\times X/ \text{existen } (x,x_1),(x_1,x_2),\cdots,(x_n,x')\in\rho\}$ $\therefore$ $(X,\rho')\in|\underline{QOS}|$ y $u=1_X:(X,\rho)\longrightarrow(X,\rho')=E(X,\rho')$ es Rere-bimorfismo. Sean $(Y,\eta)\in|\underline{QOS}|$ y $f:(X,\rho)\longrightarrow(Y,\eta)$ un Rere-morfismo, por la definición de ρ', es claro que $f:(X,\rho')\longrightarrow(Y,\eta)$ es QOS-morfismo y es el único tal que $fu=f$ $\therefore$ $(u,(X,\rho'))$ es E-morfismo universal para (X,ρ) $\therefore$ <u>QOS</u> es birreflexiva en <u>Rere</u>.

+ Sean F: <u>SRere</u> $\hookrightarrow$ <u>Rere</u> la inclusión y $(X,\rho) \in |$<u>Rere</u>$|$. Sea ρ' la mínima relación simétrica en X que contiene a ρ, es decir, $\rho' = \{(x,x') \in X \times X \,/\, (x,x') \in \rho$ ó $(x',x) \in \rho\}$ $\therefore$ $(X,\rho') \in |$<u>SRere</u>$|$ y $u = 1_X : (X,\rho) \longrightarrow (X,\rho') = F(X,\rho')$ es <u>Rere</u>-bimorfismo. Sean $(Y,\eta) \in |$<u>SRere</u>$|$ y $f : (X,\rho) \to (Y,\eta)$ un <u>Rere</u>-morfismo, es claro que $f(X,\rho') \longrightarrow (Y,\eta)$ es <u>SRere</u>-morfismo y es el único tal que $fu = f$ $\therefore$ $(u,(X,\rho'))$ es F-morfismo universal para (X,ρ) $\therefore$ <u>SRere</u> es birreflexiva en Rere.

+ Por (37-6, [3]) y su dual, <u>ERere</u> = <u>SRere</u> $\cap$ <u>QOS</u> es birreflexiva en <u>Rere</u> ∎

<u>1-19 PROPOSICION</u>. <u>ASRere</u> y <u>POS</u> son subcategorías epireflexivas de <u>Rere</u>.

<u>Demostración</u>. En la siguiente sección se verá (como parte de un resultado mas general) que <u>ASRere</u> es constante a la derecha, lo cual, por 0-13, implica que <u>ASRere</u> es epireflexiva. Por (37-6, [3]) y lo anterior, <u>POS</u> = <u>ASRere</u> $\cap$ <u>QOS</u> es subcategoría epireflexiva de <u>Rere</u> ∎

<u>1-20 COROLARIO</u>. Las subcategorías <u>QOS</u>, <u>ASRere</u>, <u>SRere</u>, <u>ERere</u> y <u>POS</u> son fuertemente cerradas bajo la formación de límites y Además son

categorías completas y cocompletas.

<u>Demostración</u>. Es una aplicación directa de 36-14, 36-18 y 36-16 de [3] ■

2.- OBJETOS DE ADJUNCION, S_n y $T_{n,k}$.

2-1 DEFINICION. Sean (X,ρ), $(Y,\eta) \in |\underline{Rese}|$, $A \subset X$ y $f: (A, \rho_{|A}) \longrightarrow (Y,\eta)$ un $\underline{Rese}$-morfismo. Sea $\sim$ la relación de equivalencia en $X \amalg Y$ generada por $\{(a,f(a)) / a \in A\}$. Si $(X \amalg Y, \sigma)$ es el $\underline{Rese}$-coproducto de (X,ρ) y (Y,η), sea $(X,\rho) \cup_f (Y,\eta)$ el $\underline{Rese}$-objeto con conjunto subyacente $X \amalg Y/\sim$ y con la $\underline{Rese}$-estructura final respecto a σ y a la proyección natural $p: X \amalg Y \longrightarrow X \amalg Y/\sim$. Entonces, $(X,\rho) \cup_f (Y,\eta)$ se llama el objeto de adjunción que resulta de pegar (X,ρ) con (Y,η) por medio de f.

2-2 OBSERVACION. Si $p: (X,\rho) \amalg (Y,\eta) \longrightarrow (X,\rho) \cup_f (Y,\eta)$ es la identificación natural, entonces:

(i) para cada $y \in Y$, $\bar{p}^1 p(y) = \{y\} \cup f^{-1} y$

(ii) para cada $x \in X - A$, $\bar{p}^1 p(x) = \{x\}$

(iii) para cada $a \in A$, $\bar{p}^1 p(a) = f(a) \cup f^{-1} f(a)$

2-3 PROPOSICION. Si $p: (X,\rho) \amalg (Y,\eta) \longrightarrow (X,\rho) \cup_f (Y,\eta)$ es la identificación natural, entonces:

(i) $p_{|Y} : (Y,\eta) \longrightarrow (X,\rho) \cup_f (Y,\eta)$ es inmersión.

(ii) $p_{|X-A} : (X-A, \rho_{|X-A}) \longrightarrow (X,\rho) \cup_f (Y,\eta)$ es inmersión.

Demostración: De la definición de p se sigue que $p_{|Y}$, $p_{|X-A}$ son monomorfismos. Sea ξ la relación reflexiva de $(X,\rho) \cup_f (Y,\eta)$. "ii)" Sean $x, x' \in X - A$ tales que $(p(x), p(x')) \in \xi$; como p es cociente, por 2-2 ii), se tiene que $(x, x') \in \rho|_{X-A}$ $\therefore$ $p|_{X-A}$ es inmersión.

"ii)" Sean $y, y' \in Y$ tales que $(p(y), p(y')) \in \xi$. Sea σ la Rese-estructura de $(X,\rho) \amalg (Y,\eta)$. Como p es cociente, existen $z \in p^{-1}p(y) = \{y\} \cup f^{-1}y$ y $z' \in p^{-1}p(y') = \{y'\} \cup f^{-1}y'$ tales que $(z, z') \in \sigma$. Si $(z,z') = (y,y')$ entonces $(y,y') \in \eta$; si $(z,z') \neq (y,y')$, como $(z,z') \in \sigma = \rho \dot{\cup} \eta$, se tiene que $(z,z') \in \rho|_A$ y por ser f Rese-morfismo, $(f(z), f(z')) = (y,y') \in \eta$. En consecuencia, $p|_Y$ es tambien una inmersión ■

<u>2-4 PROPOSICION</u>. Si $f : (A, \rho|_A) \longrightarrow (Y,\eta)$ es cociente, entonces, $p|_X : (X,\rho) \longrightarrow (X,\rho) \vee_f (Y,\eta)$ es cociente.

<u>Demostración</u>: Por la definición de p, como f es epimorfismo, se tiene que $p|_X$ es epimorfismo. Sean ξ, σ las Rese-estructuras de $(X,\rho) \vee_f (Y,\eta)$ y $(X,\rho) \amalg (Y,\eta)$ respectivamente. Sea $(z,z') \in \xi$; como p es cociente, existe $(t,t') \in \sigma = \rho \dot{\cup} \eta$ tal que $p(t) = z$ y $p(t') = z'$. Si $(t,t') \notin \rho$ entonces $(t,t') \in \eta$ y como f tambien es cociente, existe $(a,a') \in \rho|_A \subset \rho$ tal que $f(a) = t$ y $f(a') = t'$ $\therefore$ $z = p(t) = p(f(a)) = p(a)$ y análogamente, $z' = p(a')$ $\therefore$ $p|_X$ es cociente ■

<u>2-5 COROLARIO</u>. Si $q : (X,\rho) \longrightarrow (X,\rho)/A$ es el cociente que identifica a A en un punto y

$f:(A,\rho|_A)\longrightarrow\{y\}$ es la constante, entonces:

$$(X,\rho)/_A \cong (X,\rho)\cup_f\{y\}$$

Demostración: Por 2-4, q y la composición pi, donde $i:(X,\rho)\longrightarrow(X,\rho)\amalg(Y,\eta)$ es la inclusión, son cocientes con las mismas fibras $\therefore$ $(X,\rho)/_A\cong(X,\rho)\cup_f\{y\}$ ∎

2-6 OBSERVACION. Si $f:(\{x\},\rho|_{\{x\}})\longrightarrow(Y,\eta)$, entonces: $(X,\rho)\amalg(Y,\rho)/_{\{x,f(x)\}}=(X,\rho)\vee(Y,\eta)\cong(X,\rho)\cup_f(Y,\eta)$.

2-7 PROPOSICION. Si $\underline{K}$ es subcategoría de conexión de Rexe, $(X,\rho),(Y,\eta)\in|\underline{K}|$, $f:(A,\rho|_A)\longrightarrow(Y,\eta)$ es Rexe-morfismo y $A\neq\phi$, entonces $(X,\rho)\cup_f(Y,\eta)\in|\underline{K}|$.

Demostración: Como $(X,\rho),(Y,\eta)\in|\underline{K}|$ y es Rexe-morfismo $p:(X,\rho)\amalg(Y,\eta)\longrightarrow(X,\rho)\cup_f(Y,\eta)$, entonces $(p(X),\xi|_{p(X)})$, $(p(Y),\xi|_{p(Y)})\in|\underline{K}|$ donde ξ es la Rexe-estructura de $(X,\rho)\cup_f(Y,\eta)$. Como $A\neq\phi$, $p(X)\cap p(Y)\neq\phi$ $\therefore$ $(p(X)\cup p(Y),\xi|_{p(X)\cup p(Y)})=(X,\rho)\cup_f(Y,\eta)\in|\underline{K}|$ ∎

2-8 DEFINICIONES. Para cada natural $n\geq2$, S_n denota al objeto (X,ρ) en Rexe tal que $X=\{1,\cdots,n\}$ y ρ es la relación reflexiva en X generada por $\{(i,i+1)/1\leq i\leq n-1\}\cup\{(n,1)\}$. Un n-ciclo en un objeto (X,ρ) en Rexe es un monomorfismo $m:S_n\longrightarrow(X,\rho)$, y será denotado, algunas veces, por su imagen $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. Diremos que un objeto (X,ρ) en Rexe es <u>libre de ciclos</u> si no admite n-ciclos para $n \geq 2$.

<u>2-9 PROPOSICION</u>. Si para algun natural $n \geq 2$ $f: S_n \longrightarrow (Y, \eta)$ es <u>Rere</u>-morfismo no constante, entonces (Y,η) admite un m-ciclo para algún m tal que $2 \leq m \leq n$.

<u>Demostración</u>: Se hará por inducción sobre n. Si $n=2$ y $f: S_2 \longrightarrow (Y,\eta)$ es <u>Rere</u>-morfismo no constante, entonces f es monomorfismo $\therefore$ (Y,η) admite un 2-ciclo. Sea $n \geq 2$ y supongamos que para cada k tal que $n \geq k \geq 2$ y cada $f: S_k \longrightarrow (Y,\eta)$ en <u>Rere</u> no constante, se cumple la afirmación. Sea $g: S_{n+1} \longrightarrow (Y,\eta)$ un <u>Rere</u>-morfismo no constante y no inyectivo $\therefore$ existen $i,j \in \{1,\cdots,n+1\}$ tales que $g(i) = g(j)$; supondremos, sin pérdida de generalidad, que $i=1$; como f no es constante, existe $k \in \{2,\cdots,n+1\}$ tal que $f(k) \neq f(1)$. Consideraremos dos casos. <u>1^er caso</u>: Si $1, j$ no son adyacentes (es decir $(1,j), (j,1) \notin \rho_{S_{n+1}}$), supondremos sin pérdida de generalidad que $1 < k < j$; si a la relación de S_{n+1} le agregamos la pareja $(j,1)$ y denotamos por S'_{n+1} al nuevo objeto obtenido, se tiene que $g: S'_{n+1} \longrightarrow (Y,\eta)$ es <u>Rere</u>-morfismo, ademas $\{1,\cdots,j\}$ con la relación inducida por S'_{n+1} es precisamente S_j $\therefore$ $g|_{\{1,\cdots,j\}}: S_j \longrightarrow (Y,\eta)$ es <u>Rere</u>-morfismo

no constante y $j < n+1$ lo que por hipótesis de inducción implica que (Y,η) admite un m-ciclo para algún m con $2 \leq m \leq j < n+1$. <u>2° caso</u>: Si $1, j$ son adyacentes, suponemos, una vez mas sin pérdida de generalidad, que $j = n+1$. Como $q: S_{n+1} \longrightarrow S_n$ tal que $q(x) = x$ si $x < n+1$ y $q(n+1) = n$ es cociente y g es compatible con q, entonces existe $h: S_n \longrightarrow (Y,\eta)$ <u>Rese</u>-morfismo tal que $g = hq$; como g no es constante, h tampoco lo es y por tanto, (Y,η) admite un m-ciclo con $2 \leq m \leq n < n+1$ ■

<u>2-10 NOTACION</u>. Para cada natural $n \geq 3$ y cada cardinal $k \geq 2$, $X_{n,k}$ denotará al conjunto: $(\{\alpha / \alpha$ es ordinal y $0 < \alpha < k\} \times \{1,2\}) \cup \{1,\dots,n-2\}$, $\rho_{n,k}$ denotará la relación reflexiva en $X_{n,k}$ generada por:

$$\{((\alpha,i),(\alpha',i')) / \alpha<\alpha' \text{ ó } (\alpha=\alpha' \text{ y } i<i')\} \cup$$
$$\cup \{(i,i+1)/1 \leq i \leq n-3\} \cup \{((\alpha,2),1)/\alpha<k\} \cup \{(n-2,(\alpha,1))/\alpha<k\}$$

y $T_{n,k}$ denotará al objeto $(X_{n,k}, \rho_{n,k})$ en <u>Rese</u>.

<u>2-11 PROPOSICION</u> ([4]). Para cada natural $n \geq 3$ y cada cardinal $k \geq 2$, si $f: T_{n,k} \longrightarrow (Y,\eta)$ es un <u>Rese</u>-morfismo y (Y,η) no admite m-ciclos para toda $n > m \geq 2$, entonces f es inyectiva o bien es constante.

<u>Demostración:</u> Bastará probar que si f no es

inyectiva entonces para cada $\beta<k$, $f|\{(\beta,1),(\beta,2),1,\cdots,n-2\}$ es constante. Veremos primero que si f no es inyectiva entonces existe $\alpha<k$ tal que $f|\{(\alpha,1),(\alpha,2),1,\cdots,n-2\}$ es constante. Sean $x,x'\in X_{n,k}$ distintos tales que $f(x)=f(x')$. Si $\{x,x'\}=\{(\alpha,2),(\alpha',2)\}$ con $\alpha<\alpha'$ entonces $f|\{(\alpha,2),(\alpha',1),(\alpha',2)\}$ tiene que ser constante (se sugiere al lector seguir la demostración en la figura 1 al final de esta),
$\therefore$ $f|\{(\alpha',1),(\alpha',2),1,\cdots,n-2\}$ es constante. Si $\{x,x'\}=\{(\alpha,1),(\alpha',1)\}$ con $\alpha<\alpha'$ entonces $f|\{(\alpha',1),(\alpha,1)(\alpha,2)\}$ tiene que ser constante $\therefore$ $f|\{(\alpha,1),(\alpha,2),1,\cdots,n-2\}$ es constante. Si para algunas $\alpha<\alpha'$, $\{x,x'\}=\{(\alpha,2),(\alpha',1)\}$, entonces $f(\{(\alpha,2),(\alpha',1),1,\cdots$ $\cdots,n-2\})$ tiene que ser un punto porque si no lo fuera (Y,η) tendría un m-ciclo para alguna $2\leq m<n$; como $\{(n-2,(\alpha,1)),((\alpha,1),(\alpha,2))\}\subset\rho_{n,k}$ y $f(n-2)=f(\alpha,2)$ entonces, $f(\alpha,1)=f(n-2)$ $\therefore$ $f|\{(\alpha,1),(\alpha,2),1,\cdots,n-2\}$ es constante. Si $\{x,x'\}$ no tiene ninguna de las formas consideradas antes, entonces $\{x,x'\}$ debe estar contenido en un n-ciclo $((\alpha,1),(\alpha',2),1,\cdots,n-2)$ (con $\alpha'\geq\alpha$) $\therefore$ $f|\{(\alpha,1),(\alpha',2),1,\cdots,n-2\}$ es constante; si $\alpha'\neq\alpha$ entonces $\alpha<\alpha'$ y entonces, como $\{((\alpha,1),(\alpha,2)),((\alpha,2),(\alpha',2))\}\subset\rho_{n,k}$ y $f(\alpha,1)=f(\alpha',2)$, se tiene que $f(\alpha,2)=f(\alpha,1)$ $\therefore$ $f|\{(\alpha,1),(\alpha,2),1,\cdots,n-2\}$ es constante. En cualquiera de los casos anteriores, existe $\alpha<k$ tal que $f|\{(\alpha,1),(\alpha,2),1,\cdots,n-2\}$ es constante.

Veamos ahora que para cada $\beta<k$ se cumple que $f_{/\{(\beta,1),(\beta,2),1,\dots,n-2\}}$ es constante. Sea $\beta<k$; si $\beta<\alpha$, como $\{((\beta,1),(\alpha,1)),(n-2,(\beta,1))\}\subset \rho_{n,k}$ y $f(\alpha,1)=f(n-2)$, entonces $f(\beta,1)=f(\alpha,1)$, además, $\{((\beta,1),(\beta,2)),((\beta,2),(\alpha,1))\}\subset \rho_{n,k}$ y $f(\beta,1)=f(\alpha,1)$ $\therefore$ $f(\beta,1)=f(\beta,2)$ $\therefore$ $f_{/\{(\beta,1),(\beta,2),1,\dots,n-2\}}$ es constante; si $\beta>\alpha$, como $\{((\alpha,2),(\beta,2)),((\beta,2),1)\}\subset \rho_{n,k}$ y $f(\alpha,2)=f(1)$ entonces $f(\beta,2)=f(\alpha,2)$, además se tiene que $\{((\beta,1),(\beta,2)),(n-2,(\beta,1))\}\subset \rho_{n,k}$ y $f(\beta,2)=f(n-2)$ $\therefore$ $f(\beta,2)=f(\beta,1)$ $\therefore$ $f_{/\{(\beta,1),(\beta,2),1,\dots,n-2\}}$ es constante ■

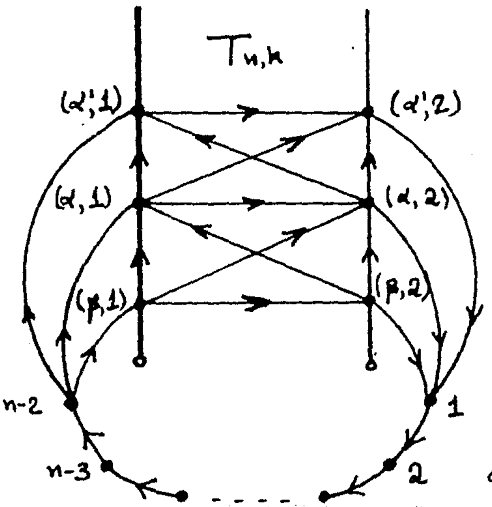


FIGURA 1. $(\beta<\alpha<\alpha'<k)$ (claramente, en el dibujo faltan algunas "flechas" de $T_{n,k}$).

2-12 PROPOSICION. Para cada natural $n\geq 3$ y cada par de cardinales k,k' tales que $2\leq k'<k$, si $t\in X_{n,k}$ entonces existe $f:T_{n,k'}\longrightarrow T_{n,k}$ monomorfismo tal que $1,t\in \operatorname{Im} f$.

<u>Demostración</u>: Bastará considerar sólo dos casos, para elementos de $X_{n,k}$ de la forma $t=(\alpha,i)$ con $\alpha<k$, $i\in\{1,2\}$. <u>Primer caso</u>: $\omega\leq k'<k$ ó $2\leq k'<k=\omega$. Sea $\varphi: X_{n,k'}\longrightarrow X_{n,k}$ tal que $\varphi(t)=t$ si $t\in\{1,\dots,n-2\}$, $\varphi(\beta,j)=(\alpha+(\beta-1),j)$ si $0<\beta<\omega$, $\beta<k'$ y $j\in\{1,2\}$, $\varphi(\beta,j)=(\alpha+\beta,j)$ si $\omega\leq\beta<k'$ y $j\in\{1,2\}$. Sea $\beta<k'$, como $k'<k$, $\alpha<k$ y k es cardinal entonces $|k'|<|k|$ y $|\alpha|<|k|$. Si $\omega\leq k'<k$ entonces $|\alpha+k'|=\max\{|\alpha|,|k'|\}<|k|$; si $2\leq k'<k=\omega$ entonces $|\alpha+k'|=|\alpha|+|k'|$ ya que $\alpha<k=\omega$ y en consecuencia $|\alpha+k'|<|\omega|=|k|$. En cualquiera de los dos subcasos anteriores, $|\alpha+k'|<|k|$ $\therefore$ $\alpha+\beta<\alpha+k'<k$ de donde se sigue que φ es función. Debido a que vale la cancelación por la izquierda en la suma de ordinales, φ es inyectiva. Recordando que $\beta_1<\beta_2\Rightarrow\alpha+\beta_1<\alpha+\beta_2$ es claro que φ es <u>Rese</u>-morfismo $\therefore$ φ es monomorfismo y además, $\varphi(1)=1$ y $\varphi(1,i)=(\alpha,i)$. <u>Segundo caso</u>: $2\leq k'<k<\omega$, este caso es fácil de ver ∎

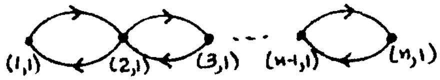
<u>2-13 NOTACION.</u> Para cada par de naturales $n,k\geq 2$, $A_{n-1}^{2(k-1)}$ denotará al objeto (Y,η) en <u>Rese</u> tal que:
$Y=\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,k-1\}\cup\{1,\dots,n\}\times\{-(k-1),\dots,-2\}$ y η es la relación reflexiva en Y generada por:

$$\{((i,j-1),(i,j)),((i,k-1),(i+1,1)),((i+1,1),(i,-(k-1)))/1\leq i\leq n-1 \text{ y } 2\leq j\leq k-1\}$$
$$\cup\{((i,-2),(i,1)),((i,-(j+1)),(i,-j))/1\leq i\leq n-1 \text{ y } 2\leq j\leq k-2\}.$$

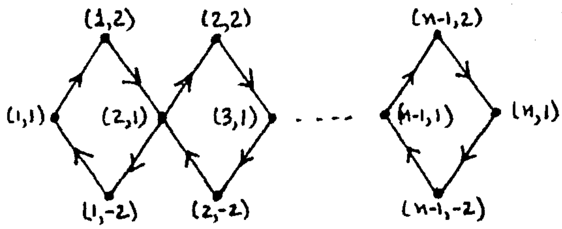
Nótese que $A_{n-1}^{2(k-1)}$ es isomorfo a una cadena finita de $n-1$ eslabones en $\{S_{2(k-1)}\}$.

FIGURA 2

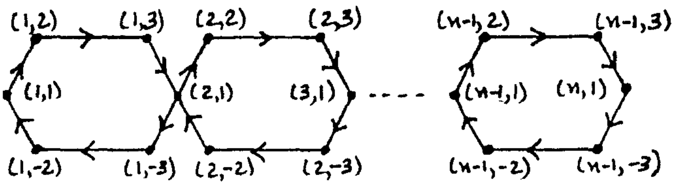
Si $k=2$

$A_{n-1}^{2} =$ 

Si $k=3$

$A_{n-1}^{4} =$ 

Si $k=4$

$A_{n-1}^{6} =$ 

2-14 LEMA. Para cada natural k, si x, x' son puntos adyacentes en S_{2k+1} entonces existe $f: A_2^{2k+2} \longrightarrow S_{2k+1}$ Rexe-morfismo tal que $f(1,1)=x$ y $f(3,1)=x'$.

Demostración: Si x, x' son puntos adyacentes en S_{2k+1}, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x=1$ y $x'=2$. Si $k=1$, el Lema es obvio. Si $k \geq 2$, sea $f: A_{3-1}^{2((k+2)-1)} \longrightarrow S_{2k+1}$ tal que $f(1,i)=i$ si $1 \leq i \leq k+1$, $f(2,1)=k+2$, $f(1,-i)=2k+4-i$ si $3 \leq i \leq k+1$, $f(1,-2)=1$, $f(2,i)=k+i+1$ si $1 \leq i \leq k$, $f(2,k+1)=1$, $f(3,1)=2$, y

$f(2,-i) = k+4-i$ si $2 \le i \le k+1$ $\therefore$ f es Rext-morfismo tal que $f(1,1)=1$ y $f(3,1)=2$ (ver figura 3) ■

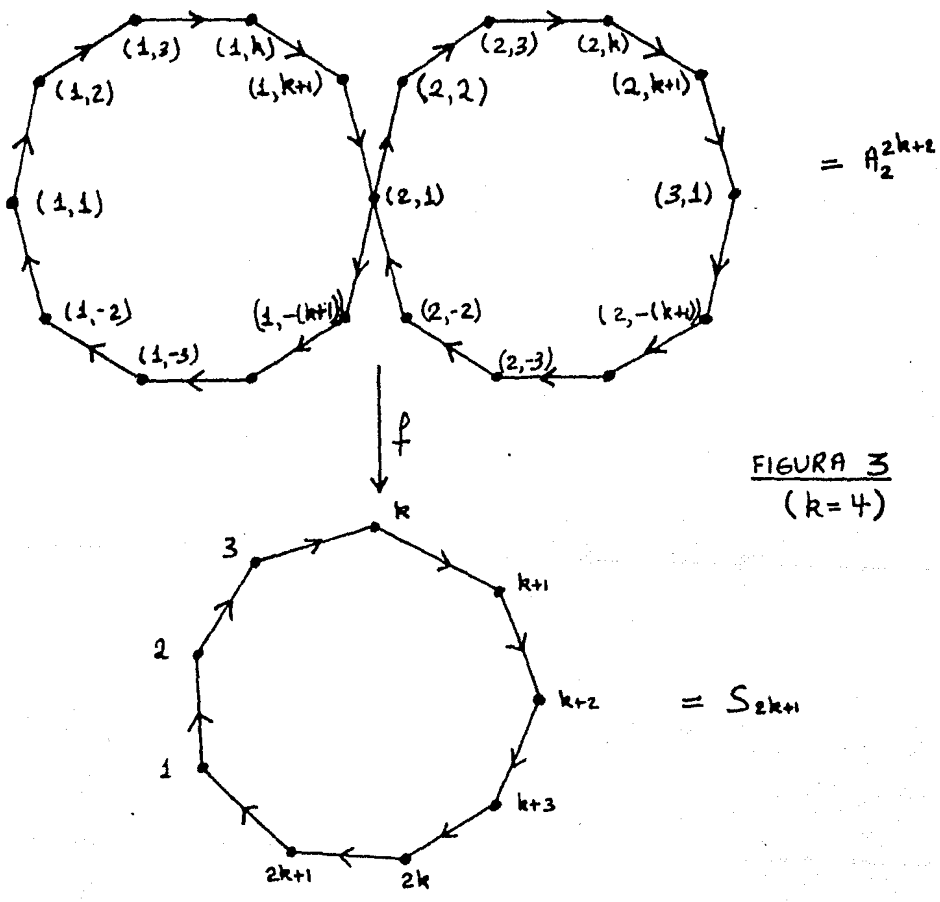


FIGURA 3
$(k=4)$

2-15 LEMA. Para cada par de naturales k, n, si $f: A_n^{2k} \longrightarrow S_{2k}$ es un Rext-morfismo, entonces $f(1,1)$, $f(n+1,1)$ son vértices iguales u opuestos de S_{2k}.

Demostración: Notemos primero que si (X,ρ) es isomorfo a S_{2k}, entonces cada Rext-morfismo

$f:(X,\rho)\longrightarrow S_{2k}$ es isomorfismo ó constante. Si $j\in\{1,\dots,n\}$ y E_j^{2k} es el subobjeto de A_n^{2k} determinado por su conjunto subyacente:

$$\{j\}\times\{1,\dots,k\}\cup\{j\}\times\{-k,\dots,-2\}\cup\{(j+1,1)\},$$

es claro que E_j^{2k} y S_{2k} son isomorfos $\therefore$ como se hizo notar anteriormente, $f|_{E_j^{2k}}:E_j^{2k}\longrightarrow S_{2k}$ es isomorfismo ó constante y en consecuencia $f(j,1)$, $f(j+1,1)$ son vértices iguales u opuestos de S_{2k}. Debido a que lo anterior vale para cada $j\in\{1,\dots,n\}$, se tiene que $f(1,1)$, $f(n+1,1)$ son vértices iguales u opuestos de S_{2k} $\blacksquare$

3. SUBCATEGORIAS COCIENTE-REFLEXIVAS EN $\underline{Rere}$.

3-1 DEFINICION. Denotaremos por B_∞ a la subcategoría de $\underline{Rere}$ cuyos objetos son todos aquellos (X,ρ) que son libres de ciclos. Para cada $n\geq 3$, B_n denota a la subcategoría de $\underline{Rere}$ cuyos objetos son todos aquellos (X,ρ) que no admiten m-ciclos para m tal que $2\leq m<n$. Nótese que $\underline{ASRere}=B_3$.

3-2 PROPOSICION. Para cada natural $n\geq 2$, B_{n+1} es la categoría constante a la derecha definida por S_n, es decir $IS_n=B_{n+1}$.

Demostración: Por 2-9, $B_{n+1}\subset IS_n$. Sea $(X,\rho)\in|\underline{Rere}|$ tal que $(X,\rho)\notin B_{n+1}$ $\therefore$ existe un $\underline{Rere}$-monomorfismo $j:S_m\longrightarrow(X,\rho)$ donde $2\leq m<n+1$; si $f:S_n\to(X,\rho)$ es tal que $f(i)=j(i)$ si $1\leq i\leq m$ y $f(i)=j(m)$ si $m\leq i\leq n$, como $f(1)\neq f(2)$, entonces f es un morfismo no constante en $\underline{Rere}$ $\therefore$ $(X,\rho)\notin IS_n$ $\therefore$ $IS_n=B_{n+1}$ ∎

3-3 NOTACION. (1) Denotaremos por $(1,2)$ al objeto (X,ρ) en $\underline{Rere}$ con $X=\{1,2\}$ y ρ discreta.

(2) $(1\longrightarrow 2)$ denota al objeto (X,ρ) en $\underline{Rere}$ con $X=\{1,2\}$ y $\rho=\{(1,1),(2,2),(1,2)\}$.

(3) $\underline{D}$ denota la subcategoría de todos los objetos discretos en $\underline{Rere}$

(4) $\underline{\mathring{R}ere}$ denota la subcategoría de $\underline{Rere}$

cuyos objetos son los (X,ρ) tales que $|X| \leq 1$.

(5) Una subcategoría cociente reflexiva de $\underline{Rese}$ es trivial si y sólo si coincide con $\underline{D}$, $\underline{\mathring{Rese}}$ ó $\underline{Rese}$.

3-4 PROPOSICION. ([4]) (Recordemos 0-12)

$$\underline{Rese} = Q(S_2) \supsetneq Q(S_3) \supsetneq \cdots \supsetneq \bigcap_2^\infty Q(S_n) = B_\infty$$
$$\wedge$$
$$B_\infty = Q((1 \to 2)) \supsetneq \underline{D} = Q((1,2)) \supsetneq \underline{\mathring{Rese}} = Q(\phi)$$

Demostración: Como S_2 es indiscreto, $Q(S_2) = \underline{Rese}$. Para cada $n \geq 2$, la función $f: S_{n+1} \longrightarrow S_n \pi S_n$ tal que $f(i) = (i,i)$ para $1 \leq i \leq n-1$, $f(n) = (n,n-1)$ y $f(n+1) = (n,n)$ es un monomorfismo en $\underline{Rese}$ de donde se sigue que $S_{n+1} \in Q(S_n)$ y por tanto $Q(S_{n+1}) \subset Q(S_n)$. Como cualquier morfismo $f: S_n \longrightarrow S_{n+1}$ es constante, se tiene que $S_n \in Q(S_n) \setminus Q(S_{n+1})$. Entonces, $Q(S_n) \supsetneq Q(S_{n+1})$ y $\bigcap_2^\infty Q(S_n) \subset B_\infty$. Si $(X,\rho) \in B_\infty$, podemos hallar una monofuente $(m_i : (X,\rho) \longrightarrow (1 \to 2))_{i \in I}$ en $\underline{Rese}$ $\therefore$ $B_\infty \subset Q((1 \longrightarrow 2))$; como, además, para cada $n \geq 2$ la inclusión $(1 \longrightarrow 2) \longrightarrow S_n$ es $\underline{Rese}$-monomorfismo, se tiene que $\bigcap_2^\infty Q(S_n) = B_\infty = Q((1 \to 2))$. El resto es fácil de ver usando, nuevamente, 0-12 ∎

3-5 PROPOSICION. ([4]) Para cada natural $n \geq 3$, $\{Q(T_{n,k}) \mid k \text{ cardinal}, k \geq 2\}$ es una clase propia linealmente ordenada de subcategorías cociente-reflexivas de $\underline{Rese}$ tal que si $2 < k' < k$ entonces:

$$Q(S_n) = Q(T_{n,2}) \subsetneq Q(T_{n,k'}) \subsetneq Q(T_{n,k}) \subsetneq B_n$$

<u>Demostración:</u> S_n es isomorfo a $T_{n,2}$ y obviamente $T_{n,k} \in B_n$ para cada $n \geq 3$ $\therefore$ $Q(S_n) = Q(T_{n,2})$ y $Q(T_{n,k}) \subset B_n$. Si $2 \leq k' < k$ entonces la inclusión $X_{n,k'} \longrightarrow X_{n,k}$ define un monomorfismo $m: T_{n,k'} \longrightarrow T_{n,k}$ en <u>Rere</u> $\therefore$ $Q(T_{n,k'}) \subset Q(T_{n,k})$. Por 2-11, cada morfismo $f: T_{n,k} \longrightarrow T_{n,k'}$ es constante y en consecuencia $T_{n,k} \in Q(T_{n,k}) \setminus Q(T_{n,k'})$, de donde se sigue que $Q(T_{n,k'}) \subsetneq Q(T_{n,k}) \subsetneq B_n$ ■

<u>3-6 PROPOSICION</u>. ([4]).

$$\underline{\text{ASRere}} = B_3 \supsetneq B_4 \supsetneq \cdots \supsetneq \bigcap_3^{\infty} B_n = B_\infty$$

<u>Demostración:</u> Para cada $n \geq 3$, $S_n \in B_n \setminus B_{n+1}$ $\therefore$ $B_{n+1} \subsetneq B_n$. El resto es consecuencia inmediata de la definición de B_∞ ■

<u>3-7 PROPOSICION</u> (mencionada en la prueba de 2-12 [5]).

Para cada natural $n \geq 3$, $\{I(T_{n,k}) / k \text{ cardinal}, k \geq 2\}$ es una clase propia linealmente ordenada de subcategorías constantes a la derecha de <u>Rere</u> tal que si $2 < k' < k$ entonces:

$$B_{n+1} = I(S_n) = I(T_{n,2}) \subsetneq I(T_{n,k'}) \subsetneq I(T_{n,k})$$

<u>Demostración:</u> Si $2 \leq k' < k$ y $n \geq 3$, Sean $(X, \rho) \in I(T_{n,k'})$, $f: T_{n,k} \longrightarrow (X, \rho)$ en <u>Rere</u> y $t, t' \in X_{n,k}$; por 2-12, existen $\sigma, \sigma' : T_{n,k'} \longrightarrow T_{n,k}$ monomorfismos en <u>Rere</u>

tales que $1,t \in \operatorname{Im}\sigma$ y $1,t' \in \operatorname{Im}\sigma'$. Puesto que $f\sigma, f\sigma' : T_{n,k'} \longrightarrow (X,\rho)$ son <u>Rere</u>-morfismos, entonces $f\sigma, f\sigma'$ son constantes. Como $1 \in \operatorname{Im}\sigma \cap \operatorname{Im}\sigma'$, $f(t)=f(1)=f(t')$ $\therefore$ f es constante $\therefore$ $(X,\rho) \in I(T_{n,k})$ $\therefore$ $I(T_{n,k'}) \subset I(T_{n,k})$. Por 2-11, si $h : T_{n,k} \longrightarrow T_{n,k'}$ es un morfismo en <u>Rere</u>, h debe ser constante $\therefore$ $T_{n,k'} \in I(T_{n,k})$; sin embargo, $1_{T_{n,k'}}$ no es constante y en consecuencia $T_{n,k'} \notin I(T_{n,k'})$ ∎

<u>3-8 PROPOSICION.</u> Para cada natural $n \geqslant 3$ y cada cardinal $k \geqslant 2$, se tiene que:

(a) $Q(T_{n+1,k}) \subsetneq Q(T_{n,k})$

(b) $I(T_{n+1,k}) \subsetneq I(T_{n,k})$

<u>Demostración:</u> "<u>(a)</u>" La función $\varphi : X_{n+1,k} \longrightarrow X_{n,k} \times X_{n,k}$ tal que $\varphi(z) = (z,(1,2))$ si $z \notin \{n-1, n-2\}$, $\varphi(n-2) = (n-2,(1,1))$ y $\varphi(n-1) = (n-2,(1,2))$ define un <u>Rere</u>-monomorfismo $\varphi : T_{n+1,k} \longrightarrow T_{n,k} \amalg T_{n,k}$ $\therefore$ $T_{n+1,k} \in Q(T_{n,k})$ $\therefore$ $Q(T_{n+1,k}) \subseteq Q(T_{n,k})$. Como cada morfismo $f : T_{n,k} \longrightarrow T_{n+1,k}$ (por 2-11), entonces $T_{n,k} \in Q(T_{n,k}) \setminus Q(T_{n+1,k})$. "<u>(b)</u>" Sean $(X,\rho) \in I(T_{n+1,k})$ y $f : T_{n,k} \longrightarrow (X,\rho)$ un <u>Rere</u>-morfismo. Si $g : T_{n+1,k} \longrightarrow T_{n,k}$ es el cociente que identifica $n-1$ con $n-2$, entonces fg es constante, ya que $(X,\rho) \in I(T_{n+1,k})$; $\therefore$ f es constante $\therefore$ $I(T_{n+1,k}) \subseteq I(T_{n,k})$. Nuevamente, por 2-11, todo morfismo $h : T_{n,k} \longrightarrow T_{n+1,k}$ en <u>Rere</u> es constante $\therefore$ $T_{n+1,k} \in I(T_{n,k})$, pero $1_{T_{n+1,k}}$ no es constante $\therefore$ $T_{n+1,k} \notin I(T_{n+1,k})$ ∎

Nótese que algunas de las afirmaciones en 3-4 y 3-6 pueden verse como casos particulares de 3-8 (tomando en cuenta que $T_{n,2}$ y S_n son isomorfos).

<u>3-9 PROPOSICION</u>. Para cada cardinal $k \geq 2$

$$\bigcap_{n=3}^{\infty} Q(T_{n,k}) = B_\infty$$

<u>Demostración</u>: Por 3-4, 3-5 y 3-6 se tiene que:

$$B_\infty = \bigcap_{2}^{\infty} Q(S_n) \subseteq \bigcap_{n=3}^{\infty} Q(T_{n,k}) \subseteq \bigcap_{3}^{\infty} B_n = B_\infty \quad \blacksquare$$

<u>3-10 PROPOSICION.</u> ([4]). Para cada $n \geq 3$ y cada $B \in B_n$,

$$B_n \neq Q(B)$$

<u>Demostración</u>: Si $B \in B_n$, sea k un cardinal tal que $k > |B|$. Por 2-11, cada morfismo $f: T_{n,k} \longrightarrow B$ es constante y esto implica que $T_{n,k} \in B_n \setminus Q(B)$ $\blacksquare$

<u>3-11 PROPOSICION.</u> ([4]) Si $\underline{B}$ es una subcategoría cociente reflexiva no trivial de <u>Rel</u> entonces $B_\infty \subseteq \underline{B}$, y si $B_\infty \neq \underline{B}$ y n es el mínimo natural para el cual existe un n-ciclo $m: S_n \longrightarrow B$ con $B \in \underline{B}$, entonces $n \geq 3$ y $Q(S_n) \subseteq \underline{B} \subseteq B_n$.

<u>Demostración</u>: Como $\underline{B}$ no es trivial, $\underline{D} \not\subseteq \underline{B}$; sea $(X,\rho) \in \underline{B} \setminus \underline{D}$, entonces existe un monomorfismo $m: (1 \longrightarrow 2) \longrightarrow (X,\rho)$ y por lo tanto, $Q(1 \rightarrow 2) = B_\infty \subseteq \underline{B}$. Si (X,ρ) pertenece a $\underline{B}$ y $m: S_n \longrightarrow (X,\rho)$ es un monomorfismo, entonces $Q(S_n) \subseteq \underline{B}$ y como $\underline{B}$ no es trivial, $n \geq 3$. Obviamente $\underline{B} \subseteq B_n$ $\blacksquare$

Este diagrama resume algunos de los resultados obtenidos en esta sección.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
&&&&&&&&\vdots&&\vdots&&&&\vdots&&&& \\
&&&&&&&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&&& \\
&&&&&&\cdots&\subsetneq&I(T_{n,k})&\subsetneq&I(T_{n-1,k})&\subsetneq&\cdots&\subsetneq&I(T_{3,k})&&&& \\
&&&&&&&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&&& \\
&&&&&&\cdots&\subsetneq&I(T_{n,k'})&\subsetneq&I(T_{n-1,k'})&\subsetneq&\cdots&\subsetneq&I(T_{3,k'})&&&& \\
&&&&&&&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&&& \\
&&&&&&&&\vdots&&\vdots&&&&\vdots&&&& \\
&&&&&&&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&&& \\
&&&&&&\cdots&\subsetneq&I(T_{n,3})&\subsetneq&I(T_{n-1,3})&\subsetneq&\cdots&\subsetneq&I(T_{3,3})&&&& \\
&&&&&&&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&&& \\
&&&&&&&&I(T_{n,2})&&I(T_{n-1,2})&&&&I(T_{3,2})&&\underline{ASRec}&& \\
&&&&&&&&\Vert&&\Vert&&&&\Vert&&\Vert&& \\
&&&&&&&&I(S_n)&&I(S_{n-1})&&&&I(S_3)&&I(S_2)&& \\
&&&&&&&&\Vert&&\Vert&&&&\Vert&&\Vert&& \\
\underline{Rec}&\subsetneq&Q((1,2))&\subsetneq&Q((1\to 2))&\subsetneq&\cdots&\subsetneq&B_{n+1}&\subsetneq&B_n&\subsetneq&\cdots&\subsetneq&B_4&\subsetneq&B_3&\subsetneq&Q(S_2)=\underline{Rec} \\
&&\Vert&&\Vert&&&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&&&&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&& \\
&&\underline{D}&&B_\infty&&&&\vdots&&\vdots&&&&&&\vdots&& \\
&&&&&&&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&&&&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&& \\
&&&&&&\cdots&\subsetneq&Q(T_{n+1,k})&\subsetneq&Q(T_{n,k})&\subsetneq&\cdots&&&\subsetneq&Q(T_{3,k})&& \\
&&&&&&&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&&&&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&& \\
&&&&&&\cdots&\subsetneq&Q(T_{n+1,k'})&\subsetneq&Q(T_{n,k'})&\subsetneq&\cdots&&&\subsetneq&Q(T_{3,k'})&& \\
&&&&&&&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&&&&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&& \\
&&&&&&&&\vdots&&\vdots&&&&&&\vdots&& \\
&&&&&&&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&&&&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&& \\
&&&&&&\cdots&\subsetneq&Q(T_{n+1,4})&\subsetneq&Q(T_{n,4})&\subsetneq&\cdots&&&\subsetneq&Q(T_{3,4})&& \\
&&&&&&&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&&&&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&& \\
&&&&&&\cdots&\subsetneq&Q(T_{n+1,3})&\subsetneq&Q(T_{n,3})&\subsetneq&\cdots&&&\subsetneq&Q(T_{3,3})&& \\
&&&&&&&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&&&&&&\rotatebox{90}{$\subsetneq$}&& \\
&&&&&&\cdots&\subsetneq&Q(T_{n+1,2})&\subsetneq&Q(T_{n,2})&\subsetneq&\cdots&&&\subsetneq&Q(T_{3,2})&& \\
&&&&&&&&\Vert&&\Vert&&&&&&\Vert&& \\
&&&&&&&&Q(S_{n+1})&&Q(S_n)&&&&&&Q(S_3)&&
\end{array}
$$

Este diagrama resume algunos de los resultados obtenidos en esta sección.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \\
 & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & \\
 & \cdots\subsetneq & I(T_{n,k}) & \subsetneq & I(T_{n-1,k}) & \subsetneq\cdots\subsetneq & I(T_{3,k}) & & & \\
 & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & \\
 & \cdots\subsetneq & I(T_{n,k'}) & \subsetneq & I(T_{n-1,k'}) & \subsetneq\cdots\subsetneq & I(T_{3,k'}) & & & \\
 & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \\
 & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & \\
 & \cdots\subsetneq & I(T_{n,3}) & \subsetneq & I(T_{n-1,3}) & \subsetneq\cdots\subsetneq & I(T_{3,3}) & & & \\
 & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & \\
 & & I(T_{n,2}) & & I(T_{n-1,2}) & & I(T_{3,2}) & & \underline{\mathrm{ASRese}} & \\
 & & \| & & \| & & \| & & \| & \\
 & & I(S_n) & & I(S_{n-1}) & & I(S_3) & & I(S_2) & \\
 & & \| & & \| & & \| & & \| & \\
\underline{\mathrm{Rese}} \subsetneq \underset{\underline{D}}{\underset{\|}{Q((1,2))}} \subsetneq \underset{B_\infty}{\underset{\|}{Q((1\to 2))}} \subsetneq & \cdots\subsetneq & B_{n+1} & \subsetneq & B_n & \subsetneq\cdots\subsetneq & B_4 & \subsetneq & B_3 & \subsetneq Q(S_2) = \underline{\mathrm{Rese}} \\
 & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & \\
 & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \\
 & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & \\
 & \cdots\subsetneq & Q(T_{n+1,k}) & \subsetneq & Q(T_{n,k}) & \subsetneq \quad \cdots & & \subsetneq & Q(T_{3,k}) & \\
 & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & \\
 & \cdots\subsetneq & Q(T_{n+1,k'}) & \subsetneq & Q(T_{n,k'}) & \subsetneq \quad \cdots & & \subsetneq & Q(T_{3,k'}) & \\
 & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & \\
 & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \\
 & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & \\
 & \cdots\subsetneq & Q(T_{n+1,4}) & \subsetneq & Q(T_{n,4}) & \subsetneq \quad \cdots & & \subsetneq & Q(T_{3,4}) & \\
 & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & \\
 & \cdots\subsetneq & Q(T_{n+1,3}) & \subsetneq & Q(T_{n,3}) & \subsetneq \quad \cdots & & \subsetneq & Q(T_{3,3}) & \\
 & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & \\
 & \cdots\subsetneq & Q(T_{n+1,2}) & \subsetneq & Q(T_{n,2}) & \subsetneq \quad \cdots & & \subsetneq & Q(T_{3,2}) & \\
 & & \| & & \| & & & & \| & \\
 & & Q(S_{n+1}) & & Q(S_n) & & & & Q(S_3) & \\
\end{array}
$$

4. SUBCATEGORIAS DE CONEXION EN Rere.

4-1 DEFINICIONES Y NOTACION. (1) Si ρ es una relación en un conjunto X, ρ^{-1} es la relación $\{(y,x)/ (x,y)\in\rho\}$; $\rho^1=\rho$ y $\rho^n=\{(x,z)/$existe $y\in X$ tal que $(x,y)\in\rho \wedge (y,z)\in\rho^{n-1}\}$ si $n\geq 2$. (2) Denotaremos por $\mathcal{C}$ a la subcategoría plena de Rere cuyos objetos son todos aquellos (X,ρ) tales que para cada $x,x'\in X$ existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $(x,x')\in(\rho\cup\rho^{-1})^n$. (3) Denotaremos por $D\mathcal{C}$ a la subcategoría plena de Rere cuyos objetos son aquellos (X,ρ) tales que para cada $x,x'\in X$, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $(x,x')\in\rho^n$.

(Para lo siguiente, recuérdese 0-11 y de 0-14 en adelante de la sección 0).

4-2 PROPOSICION. $\mathcal{C}$ es la máxima subcategoría de conexión y $L(1\to 2)=\mathcal{C}=N(1,2)=N(\underline{D})\subsetneq$ Rere.

Demostración: claramente $\mathcal{C}\in N(1,2)$. Sea $(X,\rho)\in|$Rere$|$ tal que existen $x,x'\in X$ con la propiedad de que para cada $n\in\mathbb{N}$, $(x,x')\notin(\rho\cup\rho^{-1})^n$; Consideremos el conjunto $C_x=\{y\in X/$ existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $(x,y)\in(\rho\cup\rho^{-1})^n\}$. La función $f:X\longrightarrow\{1,2\}$ tal que $f(z)=1$ si $z\in C_x$ y $f(z)=2$ si $z\in X-C_x$ define un Rere-morfismo no constante $f:(X,\rho)\longrightarrow(1,2)$ $\therefore$ $\mathcal{C}=N(1,2)$. Como $(1\to 2)\in\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ es de conexión, $L(1\to 2)\subseteq\mathcal{C}$; es fácil ver que $L(1\to 2)\supseteq\mathcal{C}$ $\therefore$ $L(1\to 2)=\mathcal{C}$. Por

(9-14, [6]) $\mathcal{C}$ es la máxima subcategoría de conexión de $\underline{Rer}$, y por (9-15, [6]), $N(1,2)=N(\underline{D})$ ■

4-3 OBSERVACIONES. Los objetos totalmente $\mathcal{C}$-inconexos coinciden con los discretos $\therefore$ $I(\mathcal{C})=\underline{D}$.

Por ser $\mathcal{C}$ constante a la izquierda y $\underline{Rerc}$ cociente hereditaria, por 0-20, si $q:(X,\rho)\longrightarrow(Y,\gamma)$ es un cociente $\mathcal{C}$-monótono y $(Y,\gamma)\in\mathcal{C}$, entonces $(X,\rho)\in\mathcal{C}$.

4-4 PROPOSICION. $L(\{S_n/n\geq 2\})=D\mathcal{C}=N(1\longrightarrow 2)\subsetneq\mathcal{C}$ y $D\mathcal{C}$ es la siguiente subcategoría máxima de conexión, es decir, si $\underline{B}$ es subcategoría de conexión distinta de $\underline{Rer}$ y de $\mathcal{C}$ entonces $\underline{B}\subseteq D\mathcal{C}$.

Demostración: Veremos primero que: $D\mathcal{C}\subseteq L(\{S_n/n\geq 2\})\subseteq N(1\longrightarrow 2)\subseteq D\mathcal{C}$. Si $(X,\rho)\in D\mathcal{C}$ entonces, para cada $x,x'\in X$ existe un ciclo σ en (X,ρ) tal que $x,x'\in Im\sigma$ $\therefore$ $(X,\rho)\in L(\{S_n/n\geq 2\})$. Es claro que para cada $n\geq 2$, todo morfismo $f:S_n\longrightarrow(1\longrightarrow 2)$ tiene que ser constante $\therefore$ $\{S_n/n\geq 2\}\subseteq N(1\longrightarrow 2)$ y en consecuencia, por 0-18, $L(\{S_n/n\geq 2\})\subseteq N(1\longrightarrow 2)$. Si (X,ρ) no pertenece a $D\mathcal{C}$, entonces existen $x,x'\in X$ tales que para cada $m\in\mathbb{N}$, $(x',x)\notin\rho^m$; consideremos el conjunto $C_{x'}=\{z\in X/\text{existe } n\in\mathbb{N} \text{ tal que } (x',z)\in\rho^n\}$. Sea $f:X\longrightarrow\{1,2\}$ la función tal que $f(z)=2$ si $z\in C_{x'}$ y $f(z)=1$ si $z\in X-C_{x'}$. Si $f:(X,\rho)\longrightarrow(1\longrightarrow 2)$

no fuera Rere-morfismo, existirían $z \in C_{x'}$ y $z' \in X - C_{x'}$ tales que $(z, z') \in \rho$ $\therefore$ habría un natural k tal que $(x', z) \in \rho^k$ $\therefore$ $(x', z') \in \rho^{k+1}$ y entonces $z' \in C_{x'}$, lo cual es una contradicción. Entonces f tiene que ser Rere-morfismo y como $f(x) = 1 \neq 2 = f(x')$, f no es constante $\therefore$ $N(1 \to 2) \subseteq \mathcal{D}\mathcal{C}$. Puesto que $(1 \to 2) \in \mathcal{C} \setminus N(1 \to 2)$, $L(\{S_n / n \geq 2\}) = \mathcal{D}\mathcal{C} = N(1 \to 2) \subsetneq \mathcal{C}$.
Si $\underline{B}$ es subcategoría de conexión de Rere distinta de Rere y de $\mathcal{C}$, entonces $\underline{B} \subsetneq \mathcal{C} = L(1 \to 2)$ y en consecuencia, por (9-13, [6]), $\underline{B} \subseteq N(1 \to 2)$ ■

4-5 OBSERVACIONES. El objeto $(1 \to 2)$ es totalmente $\mathcal{D}\mathcal{C}$-inconexo pero no discreto $\therefore$ $\underline{D} \subsetneq I(\mathcal{D}\mathcal{C})$.

Puesto que $\mathcal{D}\mathcal{C}$ es constante a la izquierda y Rere es cociente hereditaria, por 0-20, si se tiene $q : (X, \rho) \longrightarrow (Y, \eta)$ cociente $\mathcal{D}\mathcal{C}$-monótono con $(Y, \eta) \in \mathcal{D}\mathcal{C}$, entonces $(X, \rho) \in \mathcal{D}\mathcal{C}$.

4-6 DEFINICIONES. (1) Si $k \in \mathbb{N}$, una 2k-trayectoria en un objeto (X, ρ) en Rere es un morfismo en Rere $t : A_n^{2k} \longrightarrow (X, \rho)$ (véase 2-13). Diremos que t 2k-conecta a $t(1,1)$ con $t(n+1, 1)$; y $x, x' \in X$ están 2k-conectados si existe t 2k-trayectoria que 2k-conecta a x con x'.

(2) Denotaremos por $\mathcal{C}_{2k}$ a la subcategoría

plena de __Rese__ cuyos objetos son aquellos (X,ρ) tales que para cada $x,x' \in X$, x,x' están $2k$-conectados.

__4-7 PROPOSICION.__ Para cada natural k, $\mathcal{C}_{2k}$ es subcategoría de conexión de __Rese__.

__Demostración:__ Si $f:(X,\rho)\longrightarrow(Y,\eta)$ es __Rese__-epimorfismo, $(X,\rho)\in\mathcal{C}_{2k}$ y $y,y'\in Y$, elijamos $x\in f^{-1}y$ y $x'\in f^{-1}y'$ $\therefore$ existe t $2k$-trayectoria en (X,ρ) que $2k$-conecta a x con x' $\therefore$ ft es una $2k$-trayectoria en (Y,η) que $2k$-conecta a y con y'. Sea $\{(A_i,\xi_{|A_i})\}_I$ una familia de subobjetos $\mathcal{C}_{2k}$-conexos de (Z,ξ) tal que $\bigcap_I A_i\neq\phi$ y sean $x,x'\in\bigcup_I A_i$ $\therefore$ existen $i,j\in I$ tales que $x\in A_i$ y $x'\in A_j$; sea $x_0\in\bigcap_I A_i$ $\therefore$ existen $t: A_n^{2k}\longrightarrow(A_i,\xi_{|A_i})$, $t': A_m^{2k}\longrightarrow(A_j,\xi_{|A_j})$ $2k$-trayectorias que conectan a x con x_0 y a x_0 con x' respectivamente $\therefore$ existe $\varphi: A_{n+m}^{2k}\longrightarrow(\bigcup_I A_i,\xi_{|\bigcup_I A_i})$ $2k$-trayectoria que ek-conecta a x con x' $\therefore$ $\mathcal{C}_{2k}$ es de componentes, pero ya habíamos visto que también es invariante bajo morfismos y en consecuencia, es de conexión ■

__4-8 PROPOSICION.__ Para cada $k,m\in\mathbb{N}$ con $m\geq 2$:

(a) $m>k\geq 2 \Rightarrow S_m\notin L(S_k)$

(b) $m\leq k \Rightarrow S_m\in L(S_k)$

(c) $m > 2k+1 \Rightarrow S_m \notin \mathcal{C}_{2(k+1)}$

(d) $m \leq 2k+1 \Rightarrow S_m \in \mathcal{C}_{2(k+1)}$

Demostración: "(a)" Puesto que $S_m \in I(S_k)$ y $I(S_k) \cap L(S_k) = \mathring{\underline{Rere}}$, entonces $S_m \notin L(S_k)$. "(b)" Es claro que $S_k \in L(S_k)$ y si $m \leq k$, hay un epimorfismo $S_k \longrightarrow S_m$ $\therefore$ $S_m \in L(S_k)$. "(c)" como $2k+2 \geq 4$, por el lema 2-15, se tiene que los vértices adyacentes de S_{2k+2} no están $2k+2$-conectados $\therefore$ $S_{2k+2} \notin \mathcal{C}_{2k+2}$. Como $\mathcal{C}_{2(k+1)}$ es de conexión y para cada $m > 2k+1$ hay un epimorfismo $S_m \longrightarrow S_{2k+2}$ en $\underline{Rere}$, entonces $S_m \notin \mathcal{C}_{2k+2}$. "(d)" Por el lema 2-14, cada pareja de vértices adyacentes en S_{2k+1} están $2k+2$-conectados $\therefore$ $S_{2k+1} \in \mathcal{C}_{2k+2}$ y si $m \leq 2k+1$, hay un epimorfismo $S_{2k+1} \longrightarrow S_m$ $\therefore$ $S_m \in \mathcal{C}_{2k+2}$ ∎

4-9 PROPOSICION. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_{2k} \subseteq L(S_{2k})$.

Demostración: Sea $(X, \rho) \in \mathcal{C}_{2k}$, sean $x, x' \in X$ entonces existe t $2k$-trayectoria de x a x', como t es $\{S_{2k}\}$-trayectoria, $(X, \rho) \in L(S_{2k})$ ∎

4-10 PROPOSICION. Sea $\underline{I}$ la subcategoría de todos los objetos indiscretos en $\underline{Rere}$, entonces:

$N(\underline{I}) = N(S_2) = \mathring{\underline{Rere}} \subsetneq \mathcal{C}_2 = L(S_2) = L(\underline{I})$ y $\mathcal{C}_2$ es la mínima subcategoría de conexión (distinta de $\mathring{\underline{Rere}}$).

Demostración: Por (9-15, [6]), $N(\underline{I}) = N(S_2) = \mathring{\underline{Rere}}$.

como $S_2 \in \mathcal{C}_2$ entonces $\underline{\mathring{R}ere} \subsetneq \mathcal{C}_2 \supseteq L(S_2)$ y por 4-9, $\mathcal{C}_2 = L(S_2)$. Como $S_2 \in \underline{I}$ y $\underline{I} \subseteq L(S_2)$, entonces $L(S_2) = L(\underline{I})$. Si $\underline{B}$ es subcategoría de conexión distinta de $\underline{\mathring{R}ere}$, $\underline{I} \subseteq L(\underline{B})$ $\therefore$ $\mathcal{C}_2 = L(\underline{I}) \subseteq L(\underline{B}) = \underline{B}$ ∎

<u>4-11 PROPOSICION.</u> *Para cada natural $k \geq 2$,*

(a) $\mathcal{C}_{2k} \subsetneq L(S_{2k})$

(b) $L(S_k) \subsetneq L(S_{k+1})$

(c) $L(S_{2k+1}) \subsetneq \mathcal{C}_{2(k+1)}$

<u>Demostración</u>: "<u>(a)</u>" Por 4-9, $\mathcal{C}_{2k} \subseteq L(S_{2k})$ y por 4-8, $S_{2k} \in L(S_{2k}) \setminus \mathcal{C}_{2k}$. "<u>(b)</u>" Por 4-8, $S_k \in L(S_{k+1})$ $\therefore$ $L(S_k) \subseteq L(S_{k+1})$ y tambien por 4-8, $S_{k+1} \in L(S_{k+1}) \setminus L(S_k)$. "<u>(c)</u>" Por 4-8, $S_{2k+1} \in \mathcal{C}_{2(k+1)}$ $\therefore$ $L(S_{2k+1}) \subseteq \mathcal{C}_{2(k+1)}$. Sea $E_1 = S_{2k+2}$ $\therefore$ $E_1 \in B_{2k+2}$. Supongamos que hemos construido $E_n \in B_{2k+2}$. Consideremos el conjunto $D_n = \{(x,x') \in E_n \,/\, x, x' \text{ no estan } 2k+2\text{-conectadas}\}$. Para cada $\xi \in D_n$, sean $A_\xi = A_2^{2k+2}$, $F_\xi = \{(1,1),(3,1)\} \subset A_\xi$ y $\phi_\xi : F_\xi \longrightarrow E_n$ tal que $\phi_\xi(1,1) = x$ y $\phi_\xi(3,1) = x'$ si $\xi = (x,x')$. Sean $F_n = \coprod_{\xi \in D_n} F_\xi$, $A_n = \coprod_{\xi \in D_n} A_\xi$ y $f_n = \coprod_{\xi \in D_n} \phi_\xi$ $\therefore$ $f_n : F_n \longrightarrow E_n$ es $\underline{Rere}$-morfismo. Sean E_{n+1} el objeto de adjunción que se obtiene de pegar A_n con E_n por medio de f_n, y $q_n : A_n \amalg E_n \longrightarrow E_{n+1}$ la identificación natural; por 2-3, $q_n|_{E_n} : E_n \longrightarrow E_{n+1}$ es una inmersión y claramente $E_{n+1} \in B_{2k+2}$. Podemos

suponer, abusando del lenguaje, que $E_n \subseteq E_{n+1}$. Sea $E = \bigcup_{\mathbb{N}} E_n$ con la Rere-estructura final con respecto a $\{E_n \hookrightarrow E\}_{\mathbb{N}}$. Por la forma en que construimos a E, se tiene que $E \in \mathcal{B}_{2k+2}$ y $E \in \mathcal{C}_{2k+2}$. Puesto que $E \in \mathcal{B}_{2k+2} = \mathcal{I}(S_{2k+1})$, $E \notin L(S_{2k+1})$ ■

4-12 COROLARIO. Si $k \geq 2$,

$$\mathcal{C}_2 = L(S_2) \subsetneq L(S_3) \subsetneq \mathcal{C}_4 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{C}_{2k} \subsetneq L(S_{2k}) \subsetneq L(S_{2k+1}) \subsetneq \mathcal{C}_{2k+2} \subsetneq \cdots \subsetneq D\mathcal{C} \subsetneq \mathcal{C}.$$

4-13 OBSERVACION. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_{2k}$ no es subcategoría constante a la izquierda de Rere.

Demostración: Sea (X, ρ) el Rere-objeto que se obtiene de $S_{k+1} \amalg S_{k+1}$ al agregarle a su Rere-estructura las parejas $((k+1,1),(1,2))$ y $((k+1,2),(1,1))$; sea $q : (X,\rho) \to S_2$ el Rere-cociente tal que $q(S_{k+1} \times \{1\}) = \{1\}$ y $q(S_{k+1} \times \{2\}) = \{2\}$ $\therefore$ q es un cociente $\mathcal{C}_{2k}$-monótono tal que su codominio pertenece a $\mathcal{C}_{2k}$; sin embargo, es fácil ver que en (X,ρ), los puntos $(1,2), (1,1)$ no estan $2k$-conectados (ver figura 4). Por 0-20, $\mathcal{C}_{2k}$ no es subcategoría constante a la izquierda ■

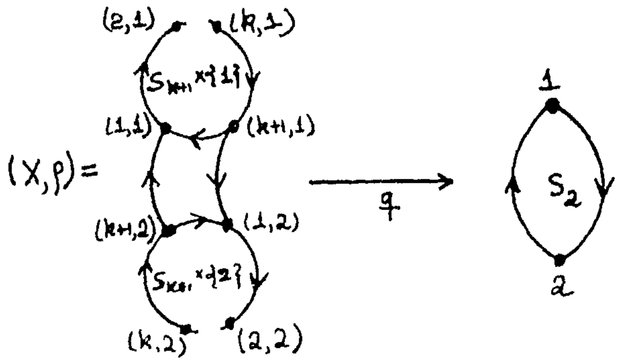


FIGURA 4.

4-14 PROPOSICION. Para cada natural $n \geq 2$, $N(S_n) \subsetneq N(S_{n+1})$.

Demostración: Sean $(X,\rho) \in N(S_n)$ y $g : (X,\rho) \to S_{n+1}$ un Rexe-morfismo. Supongamos que existen $x, x' \in X$ tales que $g(x) \neq g(x')$; supongamos también, sin pérdida de generalidad que $\{g(x), g(x')\} \neq \{1, n+1\}$. Sea $q : S_{n+1} \to S_n$ el cociente que identifica a $n+1$ con 1; puesto que $(X,\rho) \in N(S_n)$, $qg : (X,\rho) \to S_n$ debe ser constante lo cual es contradictorio $\therefore$ $(X,\rho) \in N(S_{n+1})$ $\therefore$ $N(S_n) \subseteq N(S_{n+1})$. Como cada morfismo $S_n \to S_{n+1}$ en Rexe es constante, $S_n \in N(S_{n+1})$ pero claramente, $S_n \notin N(S_n)$ ■

4-15 PROPOSICION. Para cada natural $n \geq 3$ y cada cardinal $k \geq 2$, se tiene que:

(a) $L(T_{n,k}) \subsetneq L(T_{n+1,k})$

(b) $N(T_{n,k}) \subsetneq N(T_{n+1,k})$

Demostración: Para el caso $k=2$, Por 4-11(b) y 4-14 se cumplen (a) y (b). Supongamos que $k \geq 3$.

"(a)" La función $f : X_{n+1,k} \to X_{n,k}$ tal que $f(x)=x$ si $x \in X_{n+1,k} - \{n-1, n-2\}$ y $f(\{n-1,n-2\}) = \{n-2\}$ define un Rexe-epimorfismo $f : T_{n+1,k} \to T_{n,k}$ $\therefore$ $T_{n,k} \in L(T_{n+1,k})$ y en consecuencia $L(T_{n,k}) \subseteq L(T_{n+1,k})$. Por 2-11, $T_{n+1,k} \in I(T_{n,k})$; por (9-18, [6]), $I(T_{n,k}) = I(L(T_{n,k}))$ $\therefore$ Se tiene que $T_{n+1,k} \in L(T_{n+1,k}) \setminus L(T_{n,k})$ de donde se sigue (a).

"(b)" Sean $(X,\rho)\in N(T_{n,k})$ y $f:(X,\rho)\longrightarrow T_{n+1,k}$ un Rese-morfismo. Consideraremos dos casos. Primer caso: Si $f(X)\subseteq U=\{(\alpha,i)/0<\alpha<k,\ i\in\{1,2\}\}$, entonces $\bar{f}:(X,\rho)\longrightarrow T_{n,k}$ tal que para cada $x\in X$, $\bar{f}(x)=f(x)$ es un Rese-morfismo $\therefore$ $\bar{f}$ es constante $\therefore$ f es constante. Segundo caso: Si $f(X)\not\subseteq U$, sea $f(y)\in f(X)\setminus U$; supongamos que existe $y'\in X$ tal que $f(y)\neq f(y')$ y $f(y'),f(y)$ no son adyacentes, elijamos $t\in\{j/1\leq j\leq n-1\}\subset X_{n+1,k}$ tal que $t,f(y)$ son distintos y adyacentes $\therefore$ $f(y')\neq t\neq f(y)$. Si $q:T_{n+1,k}\longrightarrow T_{n,k}$ es el cociente que identifica a t con $f(y)$ entonces, $qf:(X,\rho)\longrightarrow T_{n,k}$ es Rese-morfismo no constante. Siendo esto último una contradicción, se tiene que para cada $y'\in X$, $f(y)=f(y')$ o bien $f(y'),f(y)$ son adyacentes y en consecuencia, la imagen de f está contenida en la imagen del $n+1$-ciclo $j=(1,2,\cdots,n-1,(1,1),(1,2))$ en $X_{n+1,k}$. Entonces existe $f':(X,\rho)\longrightarrow S_{n+1}$ Rese-morfismo tal que $jf'=f$. Si f no fuera constante, existiría una identificación $p:S_{n+1}\longrightarrow S_n$ de tal manera que, si $\sigma:S_n\longrightarrow T_{n,k}$ es el n-ciclo $(1,2,\cdots,n-2,(1,1),(1,2))$, $\sigma pf:(X,\rho)\longrightarrow T_{n,k}$ no sería constante. Entonces f es constante $\therefore$ $N(T_{n,k})\subseteq N(T_{n+1,k})$. Por 2-11, $T_{n,k}\in N(T_{n+1,k})$, y claramente $T_{n,k}\notin N(T_{n,k})$ de donde se sigue (b) ∎

4-16 PROPOSICION. Para cada natural $n \geq 3$, $\{N(T_{n,k}) / k \text{ cardinal}, k \geq 2\}$ es una clase propia linealmente ordenada de subcategorías constantes a la izquierda de Rere tal que si $2<k'<k$ entonces:

$$N(T_{n,k}) \subsetneq N(T_{n,k'}) \subsetneq N(T_{n,2}) = N(S_n) \subsetneq D\mathcal{V}_6.$$

Demostración: Si $2 \leq k' < k$ y $n \geq 3$, sean $(X,\rho) \in N(T_{n,k})$ y $g : (X,\rho) \longrightarrow T_{n,k'}$ un Rere-morfismo. Como la inclusión $X_{n,k'} \hookrightarrow X_{n,k}$ define un Rere-morfismo $j : T_{n,k'} \longrightarrow T_{n,k}$ entonces $jg : (X,\rho) \longrightarrow T_{n,k}$ es constante y por ser j monomorfismo, g es constante $\therefore$ $(X,\rho) \in N(T_{n,k'})$ y entonces $N(T_{n,k}) \subseteq N(T_{n,k'})$. Por 2-11, $T_{n,k} \in N(T_{n,k'})$ y claramente $T_{n,k} \notin N(T_{n,k})$ ∎

4-17 PROPOSICION. Para cada natural $n \geq 3$, $\{L(T_{n,k}) / k \text{ cardinal}, k \geq 2\}$ es una clase propia linealmente ordenada de subcategorías de conexión de Rere que no son constantes a la izquierda tal que si $2<k'<k$ entonces:

$$L(T_{n,k}) \subsetneq L(T_{n,k'}) \subsetneq L(T_{n,2}) = L(S_n).$$

Demostración: Si $2 \leq k' < k$ y $n \geq 3$, por 2-12, para cada $t, t' \in X_{n,k}$ existen $\{T_{n,k'}\}$-trayectorias en $T_{n,k}$ de t en 1 y de 1 en t' $\therefore$ hay una $\{T_{n,k'}\}$-trayectoria de t en t' $\therefore$ $T_{n,k} \in L(T_{n,k'})$ $\therefore$ $L(T_{n,k}) \subseteq L(T_{n,k'})$. Como cada morfismo $f : T_{n,k} \longrightarrow T_{n,k'}$ es constante, por 2-11, entonces todas las $\{T_{n,k}\}$-trayectorias en $T_{n,k'}$ son constantes y en consecuencia $T_{n,k}' \notin L(T_{n,k})$. Veamos ahora que: si $k \geq 2$, entonces $L(T_{n,k})$ no es constante a la izquierda. Sean (X,ρ) el Rese-objeto que se obtiene de $T_{n,k} \amalg T_{n,k}$ al agregarle a su Rese-estructura las parejas $(((1,1),1),((1,2),2))$, $(((1,1),2),((1,2),1))$, y $q:(X,\rho) \longrightarrow S_2$ el cociente tal que $q(X_{n,k} \times \{1\}) = \{1\}$ y $q(X_{n,k} \times \{2\}) = \{2\}$ $\therefore$ q es un cociente $L(T_{n,k})$-monótono con codominio en $L(T_{n,k})$, sin embargo, es fácil ver, los puntos $(1,1)$, $(1,2)$ de X no están $L(T_{n,k})$-conectados (ver figura 5). Entonces, $(X,\rho) \notin L(T_{n,k})$ y eso implica, por 0-20, que $L(T_{n,k})$ no es constante a la izquierda ■

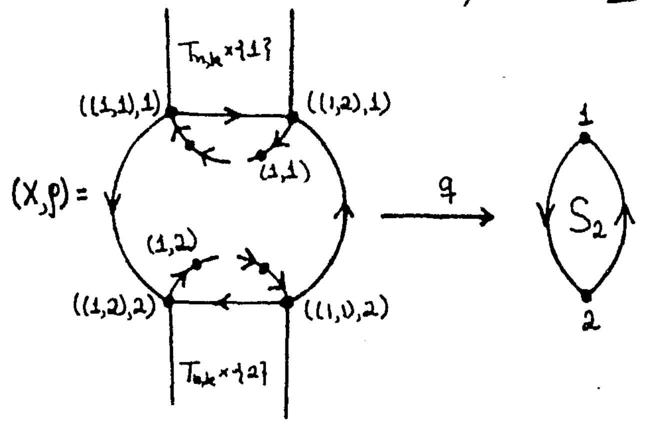


FIGURA 5.

4-18 PROPOSICION. Para cada natural $n \geq 3$, y cada cardinal $k \geq 2$, $L(S_n) \subsetneq N(T_{n+1,k})$.

Demostración. Por 2-9, todo morfismo $S_n \longrightarrow T_{n+1,k}$ es constante $\therefore$ $S_n \in N(T_{n+1,k})$ y puesto que $N(T_{n+1,k})$ es de conexión, $L(S_n) \subseteq N(T_{n+1,k})$. Por 4-17,

$L(S_n) = L(T_{n,2})$ no es constante a la izquierda y entonces
$L(S_n) \neq N(T_{n+1,k})$ ∎

El siguiente diagrama resume algunos de los resultados obtenidos, hasta ahora, en esta sección. Nótese la analogía ("dualidad") entre el diagrama de la sección anterior y este último.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & N(S_3) & & & & N(S_{n+1}) & & N(S_{n+2}) & & & & & \\
 & \| & & & & \| & & \| & & & & & \\
 & N(T_{3,2}) & \subsetneq \cdots & & \cdots \subsetneq & N(T_{n+1,2}) & \subsetneq & N(T_{n+2,2}) & \subsetneq \cdots & & & & \\
 & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & & & \\
 & N(T_{3,3}) & \subsetneq \cdots & & \cdots \subsetneq & N(T_{n+1,3}) & \subsetneq & N(T_{n+2,3}) & \subsetneq \cdots & & & & \\
 & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & & & \\
 & N(T_{3,4}) & \subsetneq \cdots & & \cdots \subsetneq & N(T_{n+1,4}) & \subsetneq & N(T_{n+2,4}) & \subsetneq \cdots & & & & \\
 & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & & & \\
 & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & & & & \\
 & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & & & \\
 & N(T_{3,k'}) & \subsetneq \cdots & & \cdots \subsetneq & N(T_{n+1,k'}) & \subsetneq & N(T_{n+2,k'}) & \subsetneq \cdots & & & & \\
 & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & & & \\
 & N(T_{3,k}) & \subsetneq \cdots & & \cdots \subsetneq & N(T_{n+1,k}) & \subsetneq & N(T_{n+2,k}) & \subsetneq \cdots & & & & \\
 & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & & & \\
 & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & & & & \\
 & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & & & \\
\underline{\text{Rêve}} \subsetneq L(I) = & L(S_2) & \subsetneq & L(S_3) & \subsetneq \cdots \subsetneq & L(S_n) & \subsetneq & L(S_{n+1}) & \subsetneq \cdots \subsetneq & N(1 \to 2) & \subsetneq & N(1,2) & \subsetneq \underline{\text{Rese}} \\
 & & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| & \\
 & & & L(T_{3,2}) & & L(T_{n,2}) & & L(T_{n+1,2}) & & D\mathcal{C} & & \mathcal{C} & \\
 & & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & & & \\
 & & & L(T_{3,3}) & \subsetneq \cdots \subsetneq & L(T_{n,3}) & \subsetneq & L(T_{n+1,3}) & \subsetneq \cdots & & & & \\
 & & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & & & \\
 & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & & \\
 & & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & & & \\
 & & & L(T_{3,k'}) & \subsetneq \cdots \subsetneq & L(T_{n,k'}) & \subsetneq & L(T_{n+1,k'}) & \subsetneq \cdots & & & & \\
 & & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & & & \\
 & & & L(T_{3,k}) & \subsetneq \cdots \subsetneq & L(T_{n,k}) & \subsetneq & L(T_{n+1,k}) & \subsetneq \cdots & & & & \\
 & & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & & & \\
 & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

4-19 DEFINICIONES. Un *objeto orientado* en **Rese** será una terna (X, x_1, x_2) donde $X \in |\mathbf{Rese}|$ y $x_1, x_2 \in X$; si (X, x_1, x_2), (Y, y_1, y_2) son objetos orientados, denotaremos por $(X, x_1, x_2) \overset{+}{\vee} (Y, y_1, y_2)$ a la *cuña orientada* $(X \amalg Y/_{\{x_2, y_1\}}, x_1, y_2)$. Si $\underline{A}$ es una clase de **Rese**-objetos orientados, diremos que un **Rese**-objeto orientado X es una *cadena finita orientada con eslabones en* $\underline{A}$; si existen $\{A_i\}_1^n \subseteq |\underline{A}|$ y $\{X_i\}_1^n$ tales que $X_1 = A_1$, $X_n = X$ y para cada $j \in \{2, \cdots, n\}$, $X_j = X_{j-1} \overset{+}{\vee} A_j$. Diremos que un **Rese**-morfismo $f : X \longrightarrow Y$ es una *$\underline{A}$-trayectoria orientada en Y que empieza en y_1 y termina en y_2* si para algunos $x_1, x_2 \in X$ (X, x_1, x_2) es una cadena finita orientada con eslabones en $\underline{A}$ y se cumple que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Una $\underline{A}$-trayectoria orientada es un *camino* si $\underline{A} = \{((1 \to 2), 1, 2), ((1 \to 2), 2, 1)\}$.

4-20 PROPOSICION. Si $\underline{A}$ es una clase de **Rese**-objetos orientados y denotamos por $O(\underline{A})$ a la subcategoría plena de **Rese** cuyos objetos son todos aquellos $X \in |\mathbf{Rese}|$ tales que para cada $x_1, x_2 \in X$, existe una $\underline{A}$-trayectoria orientada que empieza en x_1 y termina en x_2, entonces $O(\underline{A})$ es subcategoría de conexión.

4-21 EJEMPLOS.

i) $\mathscr{C} = O(\{((1 \to 2), 1, 2), ((1 \to 2), 2, 1)\})$.

ii) $D\mathscr{C} = O(\{((1 \to 2), 1, 2)\})$.

iii) $\mathscr{C}_{2k} = O(\{(S_{2k}, 1, k+1)\})$, $(k \in \mathbb{N})$.

<u>4-22 OBSERVACIONES.</u> Cualquier categoría de conexión $L(\underline{A})$ tiene una descripción de este tipo, mas precisamente: $L(\underline{A}) = O(\{(A, a_1, a_2) / A \in \underline{A}$ y $a_1, a_2 \in A\})$, y algunas veces ésta es mas simple que la que puede obtenerse usando 0-17. Si $\underline{B}$ es una clase de $\underline{\mathscr{C}ex}$-objetos orientados, entonces:

$$O(\underline{B}) \subseteq L(\{X / \text{existen } x_1, x_2 \in X \text{ tales que } (X, x_1, x_2) \in \underline{B}\})$$

y algunas veces la inclusión es propia, por ejemplo: si $k \geq 2$, $\mathscr{C}_{2k} \subsetneq L(S_{2k})$.

5. MORFISMOS CONTRACTIVOS.

5-1 PROPOSICION. Si $\mathcal{A} \subseteq |\underline{Rexl}|$ tiene un objeto no vacío y $f:(X,\rho) \longrightarrow (Y,\eta)$ es un $\underline{Rexl}$-epimorfismo, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(a) Para cada $E \subseteq Y$ tal que $(E, \eta_{|E}) \in L(\mathcal{A})$ se tiene que $(f^{-1}E, \rho_{|f^{-1}E}) \in L(\mathcal{A})$.

(b) Para cada σ $\underline{\mathcal{A}}$-trayectoria de y a y' en (Y,η) y cada $x \in f^{-1}_y$, $x' \in f^{-1}_{y'}$ existe una $\underline{\mathcal{A}}$-trayectoria τ de x a x' en $(f^{-1}\mathrm{Im}\,\sigma, \rho_{|f^{-1}\mathrm{Im}\,\sigma})$.

(c) f es $L(\mathcal{A})$-monótono y para cada $\underline{\mathcal{A}}$-trayectoria σ de y a y' en (Y,η), existen $x \in f^{-1}_y$, $x' \in f^{-1}_{y'}$ y una $\underline{\mathcal{A}}$-trayectoria τ de x a x' en $(f^{-1}\mathrm{Im}\,\sigma, \rho_{|f^{-1}\mathrm{Im}\,\sigma})$.

Demostración: "a) $\Rightarrow$ b)" Sean σ una $\mathcal{A}$-trayectoria de y a y' en (Y,η) y $x \in f^{-1}_y$, $x' \in f^{-1}_{y'}$ $\therefore$ $(\mathrm{Im}\,\sigma, \eta_{|\mathrm{Im}\,\sigma}) \in L(\mathcal{A})$, y por (a), $(f^{-1}\mathrm{Im}\,\sigma, \rho_{|f^{-1}\mathrm{Im}\,\sigma}) \in L(\underline{\mathcal{A}})$ de donde se sigue (b).
"b) $\Rightarrow$ c)" Sea $z \in Y$, sea $\phi \neq G \in \underline{\mathcal{A}}$ $\therefore$ el morfismo constante $\sigma_z : G \longrightarrow (Y,\eta)$ de valor z es una $\underline{\mathcal{A}}$-trayectoria de z a z y, por (b), $(f^{-1}_z, \rho_{|f^{-1}_z}) \in L(\mathcal{A})$ $\therefore$ f es $L(\mathcal{A})$-monótono. Como f es suprayectiva, si σ es una $\underline{\mathcal{A}}$-trayectoria de y a y' en (Y,η), entonces existen $x \in f^{-1}_y$, $x' \in f^{-1}_{y'}$, y por (b) se tiene la segunda parte de (c).
"c) $\Rightarrow$ a)" Sea $E \subseteq Y$ tal que $(E, \eta_{|E}) \in L(\underline{\mathcal{A}})$, sean $z, z' \in f^{-1}E$ $\therefore$ existe una $\underline{\mathcal{A}}$-trayectoria σ' de $f(z)$ a

$f(z')$ en $(E, \mathcal{Y}|_E)$ y, si $j:(E,\mathcal{Y}|_E)\longrightarrow(Y,\mathcal{Y})$ es la inclusión, $\sigma = j\sigma'$ es $\underline{A}$-trayectoria de $f(z)$ a $f(z')$ en $(Y,\mathcal{Y})$. Por (c), existen $x\in f^{-1}f(z)$, $x'\in f^{-1}f(z')$ y una $\underline{A}$-trayectoria τ' de x a x' en $(f^{-1}\mathrm{Im}\,\sigma, \rho|_{f^{-1}\mathrm{Im}\,\sigma})$. Puesto que $x,z\in f^{-1}f(z)$, $x',z'\in f^{-1}f(z')$ y f es $L(\underline{A})$-monótono, entonces existen τ_1', τ_2' $\underline{A}$-trayectorias de x a z en $(f^{-1}f(z), \rho|_{f^{-1}f(z)})$ y de x' a z' en $(f^{-1}f(z'),\rho|_{f^{-1}f(z')})$ respectivamente. Se tienen entonces $\underline{A}$-trayectorias τ,τ_1,τ_2 en $(f^{-1}E,\rho|_{f^{-1}E})$ de z a x, de x a x' y de x' a z' respectivamente $\therefore$ existe una $\underline{A}$-trayectoria δ: $\mathrm{dom}\,\tau\vee\mathrm{dom}\,\tau_1\vee\mathrm{dom}\,\tau_2\longrightarrow(f^{-1}E,\rho|_{f^{-1}E})$ de z a z' ∎

5-2 DEFINICION. Si $A\subseteq|\underline{\mathrm{Rex}}|$ tiene un objeto no vacío, diremos que un cociente f en $\underline{\mathrm{Rex}}$ es un morfismo $\underline{A}$-contractivo si f cumple con cualquiera de las afirmaciones (a), (b), (c) de 5-1.

5-3 EJEMPLOS.

i) Si $f:(X,\rho)\longrightarrow(Y,\mathcal{Y})$ es epimorfismo con ρ indiscreta y $\underline{A}\subseteq|\underline{\mathrm{Rex}}|$ es tal que existe $z\in\underline{A}\setminus\mathring{\underline{\mathrm{Rex}}}$, entonces f es $\underline{A}$-contractivo.

ii) Si $\underline{A}=|\underline{\mathrm{Rex}}|$, los cocientes coinciden con los morfismos $\underline{A}$-contractivos.

iii) Si interpretamos los $\underline{\mathrm{Rex}}$-objetos como gráficas (ver 1-1 y 1-2), los "mapeos contractivos" definidos por

Tutte en [11] pag 45, entre $\underline{Rexe}$-objetos son ejemplos de morfismos $(1 \to 2)$-contractivos.

<u>5-4 PROPOSICION.</u> Si $L(\underline{A})$ es subcategoría constante a la izquierda de $\underline{Rexe}$ y $f:(X,\rho) \longrightarrow (Y,\eta)$ es un cociente en $\underline{Rexe}$, entonces f es $\underline{A}$-contractivo si y sólo si f es $L(\underline{A})$-monótono. Recíprocamente, si $L(\underline{A})$ es subcategoría de conexión de $\underline{Rexe}$ tal que los morfismos $\underline{A}$-contractivos coinciden con los cocientes $L(\underline{A})$-monótonos entonces $L(\underline{A})$ es constante a la izquierda.

<u>Demostración:</u> Si $L(\underline{A})$ es constante a la izquierda y f es morfismo $\underline{A}$-contractivo entonces claramente es cociente $L(\underline{A})$-monótono. Si f fuera $L(\underline{A})$-monótono y cociente, por 0-20 y 1-12, tambien sería morfismo $\underline{A}$-contractivo. La recíproca es tambien fácil de ver por 0-20 ∎

<u>5-5 COROLARIO.</u> Si $f:(X,\rho) \longrightarrow (Y,\eta)$ en $\underline{Rexe}$, entonces:

(a) f es $(1 \to 2)$-contractivo $\Leftrightarrow$ f es cociente $\mathcal{C}$-monótono.

(b) f es $\{S_n / n \geq 2\}$-contractivo $\Leftrightarrow$ f es cociente $\mathcal{D}\mathcal{C}$-monótono.

<u>Demostración:</u> Es inmediata por 5-4, 4-2 y 4-4 ∎

<u>5-6 PROPOSICION.</u> Si $f:(X,\rho) \longrightarrow (Y,\eta)$ es $\underline{A}$-contractivo, y $E \subseteq Y$, entonces $f|^{E}_{f^{-1}E} : (f^{-1}E, \rho|_{f^{-1}E}) \longrightarrow (E, \eta|_E)$ es $\underline{A}$-contractivo.

<u>Demostración:</u> Como $\underline{Rexe}$ es cociente hereditaria, $f|^{E}_{f^{-1}E}$ es cociente. Si σ' es una $\underline{A}$-trayectoria de y a y' en $(E,\eta|_E)$, hay una $\underline{A}$-trayectoria σ de y a y' en (Y,η) tal

que $Im\sigma = Im\sigma'$ y por ser f $\underline{A}$-contractivo, si $x \in f\bar{y}^{1}$ y $x' \in f\bar{y}'^{1}$ existe τ $\underline{A}$-trayectoria de x a x' en $(f^{-1}_{Im\sigma}, \rho|f^{-1}_{Im\sigma})$ $= (f^{-1}_{Im\sigma'}, \rho|f^{-1}_{Im\sigma'})$ $\therefore$ $f|^{E}_{|f^{-1}E}$ es $\underline{A}$-contractivo ■

<u>5-7 PROPOSICION.</u> Si $f:(X,\rho) \longrightarrow (Y,\eta)$ y $g:(Y,\eta) \rightarrow (Z,\zeta)$ son $\underline{A}$-contracciones entonces $g \circ f:(X,\rho) \rightarrow (Z,\zeta)$ es $\underline{A}$-contracción.

<u>5-8 PROPOSICION.</u> Si $f:(X,\rho) \longrightarrow (Y,\eta)$ es $\underline{A}$-contracción, entonces:

(a) Si $(B, \rho|_B)$ es $L(A)$-componente de (X,ρ), entonces $(fB, \eta|fB)$ es $L(\underline{A})$-componente de (Y,η).

(b) Si $(E, \eta|_E)$ es $L(\underline{A})$-componente de (Y,η) entonces, $(f^{-1}E, \rho|f^{-1}_E)$ es $L(\underline{A})$-componente de (X,ρ) y es la única tal que $ff^{-1}E = E$.

<u>Demostración:</u> Para simplificar la notación, omitiremos la estructura de los <u>Rese</u>-objetos. "<u>a)</u>" Si $\underline{B}$ es $L(\underline{A})$-componente de X entonces $fB \in L(\underline{A})$; sea E la $L(\underline{A})$-componente de Y que contiene a fB $\therefore$ $f^{-1}E \in L(\underline{A})$; como B es componente y $B \subseteq f^{-1}fB \subseteq f^{-1}E$ entonces $B = f^{-1}E$ $\therefore$ $f(B) = ff^{-1}E = E$ es $L(A)$-componente de Y. "<u>b)</u>" Si E es $L(A)$-componente de Y, entonces $f^{-1}E \in L(\underline{A})$; sea B la componente de X que contiene a $f^{-1}E$. Por a), fB es $L(A)$-componente de Y, además, como E es componente y $E = ff^{-1}E \subset fB$, se tiene que $E = fB$. Debido a que B es componente y a que $B \subseteq f^{-1}fB = f^{-1}E$,

sabemos que $f^{-1}E = B$ es componente de X. Si B' es una $L(A)$-componente de X tal que $f(B') = E$ entonces, como $B' \subseteq f^{-1}fB' = f^{-1}E = B$, $B' = B$ ∎

<u>5.9 OBSERVACION.</u> Sea $\underline{H}$ subcategoría de conexión y $\Gamma_{\underline{H}} : \underline{Rex} \longrightarrow \underline{Set}$ tal que: si $(X,\rho) \in |\underline{Rex}|$, $\Gamma_{\underline{H}}(X,\rho)$ es el conjunto de las $\underline{H}$-componentes de (X,ρ) y si $f : (X,\rho) \longrightarrow (Y,\eta)$ en $\underline{Rex}$, $\Gamma_{\underline{H}}(f) : \Gamma_{\underline{H}}(X,\rho) \longrightarrow \Gamma_{\underline{H}}(Y,\eta)$ es la función tal que para cada $x \in X$, $\Gamma_{\underline{H}}(f)(C_{(x)}) = C_{(f(x))}$ donde $C_{(x)}$, $C_{(f(x))}$ denotan las $\underline{H}$-componentes que contienen a x y a $f(x)$ respectivamente. Entonces, $\Gamma_{\underline{H}}$ es un funtor y la proposición anterior puede enunciarse de la siguiente manera:

Si f es $\underline{A}$-contractivo, entonces $\Gamma_{L(A)}(f)$ es biyectiva.

6. MORFISMOS CUBRIENTES.

6-1 DEFINICION. Si $(X,\rho) \in |\underline{Rexe}|$, $x \in X$ y $B(x)$ es el conjunto $\{x' \in X \mid (x,x') \in \rho \cup \rho^{-1}\}$, denotaremos por $E(x)$ al $\underline{Rexe}$-objeto $(B(x), \{(x',x'') \in \rho_{|B(x)} \mid x \in \{x',x''\} \vee x' = x''\})$, y por $\bar{E}(x)$ a $(B(x), \rho_{|B(x)})$. Si $\underline{H}$ es una subcategoría de conexión de $\underline{Rexe}$, diremos que (X,ρ) es localmente $\underline{H}$-conexo si para cada $x \in X$, $\bar{E}(x) \in \underline{H}$.

Nótese que todo $\underline{Rexe}$-objeto es localmente $\mathscr{C}$-conexo.

6-2 PROPOSICION. Si (X,ρ) es localmente $\underline{H}$-conexo y $q:(X,\rho) \longrightarrow (Y,\eta)$ es un cociente, entonces (Y,η) es localmente $\underline{H}$-conexo.

Demostración: Sean $y \in Y$, $z_1, z_2 \in B(y)$, entonces $(z_1,y),(z_2,y) \in \eta \cup \eta^{-1}$ y por ser q cociente, existen $(z_1',y_1),(z_2',y_2) \in \rho \cup \rho^{-1}$ tales que $q(z_1') = z_1$, $q(z_2') = z_2$ y $q(y_1) = y = q(y_2)$ $\therefore$ $z_1' \in B(y_1)$, $z_2' \in B(y_2)$. Como (X,ρ) es localmente $\underline{H}$-conexo, existen σ_1', σ_2' $\underline{H}$-trayectorias de z_1' a y_1 en $\bar{E}(y_1)$ y de z_2' en y_2 en $\bar{E}(y_2)$ respectivamente. Nótese que siempre que $x \in X$, $q\,B(x) \subset B(q(x))$ $\therefore$ existen σ_1, σ_2 $\underline{H}$-trayectorias de z_1 a y y de y a z_2 en $\bar{E}(y)$ $\therefore$ podemos hallar una $\underline{H}$-trayectoria de z_1 a z_2 en $\bar{E}(y)$ $\therefore$ $\bar{E}(y) \in \underline{H}$ ∎

De aquí en adelante, se hallarán en el texto algunos abusos de lenguaje como el siguiente:

Si $(X,\rho) \in |\underline{Rese}|$ y $B \subset X$, frecuentemente identificaremos a $(B, \rho_{|B})$ con B. Introducimos la siguiente notación: si (M,ρ), (N,ξ) son $\underline{Rese}$-objetos, escribiremos $(M,\rho)\subset(N,\xi)$ siempre que $M\subset N$ y $\rho=\xi_{|M}$ (en donde, para evitar ambigüedades, aparecerá al menos uno de los dos objetos explícitamente como $\underline{Rese}$-objeto).

<u>6-3 PROPOSICION.</u> Si $\underline{H} \neq \underline{Rese}$, (X,ρ) es localmente $\underline{H}$-conexo y $\phi \neq B \subset X$, entonces B es $\underline{H}$-componente de X si y sólo si $B \in \underline{H}$ y para cada $x \in B$, $\overline{E}(x) \subset B$.

<u>Demostración:</u> "$\Rightarrow$" Inmediata por ser X localmente $\underline{H}$-conexo. "$\Leftarrow$" como $B \in \underline{H}$, existe una $\underline{H}$-componente $(G, \rho_{|G})$ de X tal que $B \subset (G, \rho_{|G})$. Si $x_n \in G$, podemos hallar $x_0 \in B$ y una $\underline{H}$-trayectoria σ de x_0 a x_n en X. Como $\underline{H} \neq \underline{Rese}$, entonces $\underline{H} \subseteq \mathscr{C}$. Claramente $\operatorname{Im}\sigma \in \underline{H} \subseteq \mathscr{C}$ $\therefore$ existen $x_1, \dots, x_{n-1} \in \operatorname{Im}\sigma$ tales que $(x_0,x_1), \dots, (x_{n-1},x_n) \in \rho \cup \rho^{-1}$. Por hipótesis, $\overline{E}(x_0) \subset B$; si $x_0, \dots, x_{n-1} \in B$ entonces $x_n \in \overline{E}(x_{n-1}) \subset B$ $\therefore$ $G \subset B$ $\therefore$ $G = B$ es $\underline{H}$-componente de X ∎

Con una demostración muy parecida, se tiene:

<u>6-4 PROPOSICION.</u> Si $\phi \neq B \subset (X,\rho) \in |\underline{Rese}|$, entonces, B es $\mathscr{C}$-componente de X si y sólo si $B \in \mathscr{C}$ y para cada $x \in B$, $\overline{E}(x) \subset B$.

6-5 DEFINICION. Diremos que un *Rese*-morfismo $q:(\tilde{X},\tilde{\rho})\longrightarrow(X,\rho)$ es morfismo cubriente (ver [9], [10]) si para cada $x\in X$, se cumple que:
si $\underline{q^{-1}B(x)}:=(q^{-1}B(x),\{(\tilde{x},\tilde{x}')\in\tilde{\rho}_{/q^{-1}B(x)} / \{q(\tilde{x}),q(\tilde{x}')\}\ni x \vee \tilde{x}=\tilde{x}'\})$,
entonces $\underline{q^{-1}B(x)} \cong \coprod_{\tilde{x}\in q^{-1}x} E(\tilde{x})$ y para cada $\tilde{x}\in q^{-1}x$, $q^{/E(x)}_{/E(\tilde{x})}$ es isomorfismo. Diremos que q es fuertemente cubriente (ó F-cubriente) si para cada $x\in X$, $q^{-1}B(x) \cong \coprod_{\tilde{x}\in q^{-1}x} \overline{E}(\tilde{x})$ y para cada $\tilde{x}\in q^{-1}x$, $q^{/\overline{E}(x)}_{/\overline{E}(\tilde{x})}$ es isomorfismo. Un morfismo cubriente (F-cubriente) se llama de multiplicidad k si todas sus fibras tienen exactamente k elementos ($k\in\mathbb{N}$).

6-6 OBSERVACIONES.

1) Todo morfismo F-cubriente es cubriente.

2) Todo morfismo cubriente es cociente $\underline{D}$-monótono.

3) Si $q:\tilde{X}\longrightarrow X$ es F-cubriente y $\overline{E}(x)\in\underline{H}$, entonces, $\{\overline{E}(\tilde{x})\}_{\tilde{x}\in q^{-1}x}$ es la familia de $\underline{H}$-componentes de $q^{-1}B(x)$.

4) Si $q:\tilde{X}\longrightarrow X$ es F-cubriente (cubriente) y $A\subset X$, entonces, $q^{/A}_{/q^{-1}A}$ es F-cubriente (cubriente).

5) Si $\{q_i:\tilde{X}_i\longrightarrow X_i\}_{i\in I}$ es una familia de *Rese*-morfismos, entonces, $\coprod q_i$ es cubriente (F-cubriente) si y sólo si para toda $i\in I$, q_i es cubriente (F-cubriente).

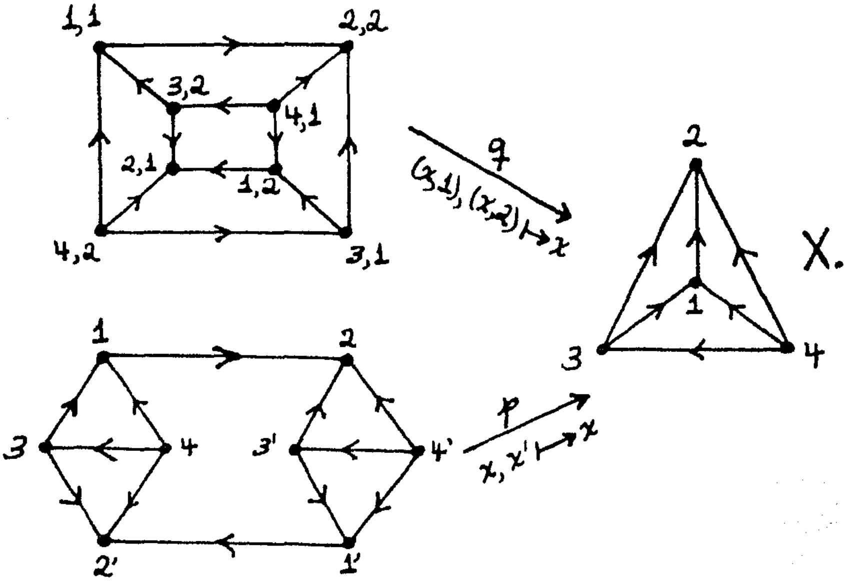
6-7 EJEMPLOS.

1) Todo isomorfismo es F-cubriente de multiplicidad 1.

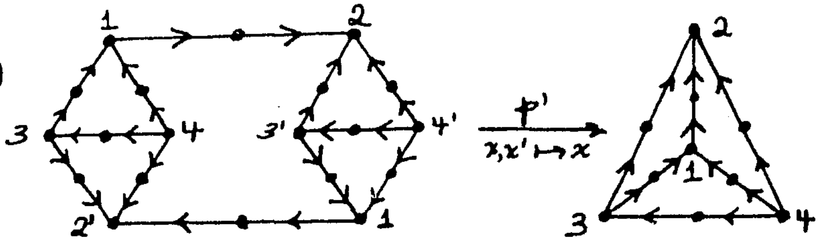
2) Si $B \in |\underline{Rese}|$ y $F \in \underline{D}$, entonces, la proyección $\pi : B \times F \longrightarrow B$ es un morfismo F-cubriente que llamaremos <u>morfismo cubriente trivial.</u>

3) Si $q_n : S_{2n} \longrightarrow S_n$ es tal que para cada $i \in \{1,\dots,n\}$, $q_n(i) = i = q_n(n+i)$ (es el cociente que identifica puntos antípodas de S_{2n}) entonces se tiene que: para $n \geq 4$, q_n es F-cubriente de multiplicidad 2 ; q_3 es cubriente pero no es F-cubriente y q_2 es un cociente $\underline{D}$-monótono que no es morfismo cubriente.

4) Son morfismos cubrientes que no son F-cubrientes: ([9]).

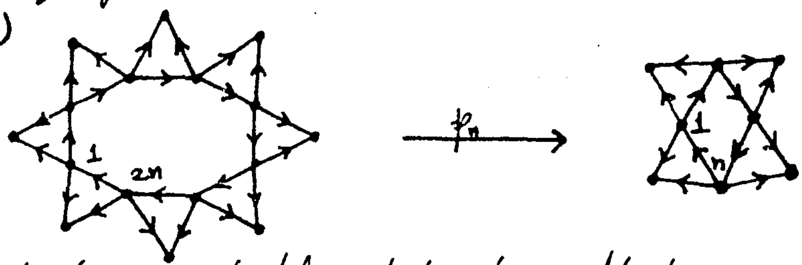


5)



es un morfismo F-cubriente (nótese la analogía con el ejemplo anterior).

6)



donde p_n identifica triángulos antípodas, es morfismo F-cubriente con codominio localmente $L(\triangle)$-conexo para toda $n \geq 4$.

7) Sean $T = (\mathbb{Z}, \{(i,i+1),(i,i) / i \in \mathbb{Z}\})$, $n \geq 4$ y $q_n : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ la proyección natural. Si $e_n : T \longrightarrow S_n$ es tal que $e_n(j) = q_n(j)+1$ para todo $j \in \mathbb{Z}$, entonces e_n es F-cubriente. En general, si $m \in \mathbb{N}$ y definimos $R_n^m = (Y, \eta)$ donde $Y = \{(nz_1, \dots, nz_{i-1}, z_i, nz_{i+1}, \dots, nz_m) / z_1, \dots, z_m \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq m\}$ y η es la relación reflexiva en Y generada por: $\{((nz_1, \dots, z_i, \dots, nz_m), (nz_1, \dots, z_i+1, \dots, nz_m)) / z_1, \dots, z_m \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq m\}$, $Y_n^m = \coprod_{n=1}^{m} S_n / \{(1,i) / 1 \leq i \leq m\}$, y $e_n^m : R_n^m \longrightarrow Y_n^m$ es tal que $e_n^m(nz_1, \dots, z_i, \dots, nz_m) = (q_n(z_i)+1, i)$ para cada $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq m$, entonces, e_n^m es morfismo F-cubriente.

<u>6-8 OBSERVACIONES Y NOTACION</u>. Denotaremos por <u>Rése</u> a la subcategoría de <u>Rese</u> tal que $|\underline{\text{Rése}}| = |\underline{\text{Rese}}|$ y cuyos morfismos son todos los <u>Rese</u>-morfismos <u>D</u>-monótonos. Si $(X_i, \rho_i)_I$ es una familia de <u>Rese</u>-objetos, X es un conjunto, $(f_i : X \longrightarrow X_i)_I$ es una familia de funciones y ρ es la relación en X tal que $(x,x') \in \rho$ si y sólo si $x = x'$, o bien, para cada $i \in I$, $(f_i(x), f_i(x')) \in \rho_i$ y $f_i(x) \neq f_i(x')$, entonces (X, ρ) tiene la <u>Rése</u>-estructura inicial con respecto a $(f_i, \rho_i)_I$. En consecuencia, <u>Rése</u> tambien es topológica y en particular, si $(X_i, \rho_i)_I \subset |\underline{\text{Rese}}|$, entonces el conjunto $\prod_I X_i$ con la <u>Rése</u>-estructura inicial respecto a las proyecciones $(\pi_i)_I$ es el <u>Rése</u>-producto de la familia $(X_i, \rho_i)_I$ que denotaremos por $\underset{I}{\Delta}(X_i, \rho_i)$.

Podemos pensar la categoría de Gráficas (ó Gráficas dirigidas) en un sentido menos amplio que en 1-2, considerando únicamente gráficas finitas sin lazos y sin aristas múltiples, y morfismos $f : G \longrightarrow H$ que son funciones $f : VG \longrightarrow VH$, entre los conjuntos de vértices, que preservan adyacencia (dos vértices son adyacentes si hay una arista que los une $\therefore$ no hay vértices adyacentes a sí mismos). Si denotamos por <u>Graf'</u>, <u>DiGraf'</u> a estas categorías, se tienen inmersiones plenas <u>Graf'</u> $\longrightarrow$ <u>Rése</u> y <u>DiGraf'</u> $\longrightarrow$ <u>Rése</u>. Si $G, H \in |\underline{\text{Graf}'}| \subseteq |\underline{\text{Rése}}|$

entonces $G \wedge H$ es el "producto de Kronecker" de G y H (ver [9]) ó "conjunción" de G y H (ver [1] pag. 45).

6-9 MAS EJEMPLOS. Para cada $G \in |\underline{Rex}|$, la primera proyección $\pi : G \wedge S_2 \longrightarrow G$ es morfismo cubriente de multiplicidad 2 (ver [9]). Un ejemplo de lo anterior es 6-7-4) donde $q = \pi : X \wedge S_2 \longrightarrow X$, nótese que q no es F-cubriente en este caso; en el mismo ejemplo 6-7-4), p es un morfismo cubriente de multiplicidad 2 cuyo dominio no es isomorfo a $X \wedge S_2$. En general, si definimos S_n' como el $\underline{Rex}$-objeto que se obtiene de S_n agregandole a su relación ρ el conjunto ρ^{-1}, y $G \in |\underline{Rex}|$, entonces, la primera proyección $\pi : G \wedge S_n' \longrightarrow G$ es un morfismo cubriente de multiplicidad n. Análogamente, usando T como en 6-7-7), se obtienen morfismos cubrientes $\pi : G \wedge T' \longrightarrow G$.

6-10 PROPOSICION. Si $\underline{H} \neq \underline{Rex}$, X es localmente $\underline{H}$-conexo, $q : \tilde{X} \longrightarrow X$ es F-cubriente y C es una $\underline{H}$-componente de $\tilde{X}$, entonces, $q|_C^{qC}$ es F-cubriente sobre una $\underline{H}$-componente de X.

Demostración: como $C \in \underline{H}$, entonces $qC \in \underline{H}$. Sea $x \in qC$ y sea $\tilde{x} \in C$ tal que $q\tilde{x} = x$. Como q es F-cubriente, $\tilde{X}$ es localmente $\underline{H}$-conexo; y por 6-3, $\bar{E}(\tilde{x}) \subset C$. Por ser $q|_{\bar{E}(\tilde{x})}^{\bar{E}(x)}$ isomorfismo, se tiene que : $\bar{E}(x) = \bar{E}(q(\tilde{x})) = q(\bar{E}(\tilde{x})) \subset qC$ y nuevamente por 6-3, qC es $\underline{H}$-componente de X. Como q es F-cubriente, por lo anterior, sabemos que:

$$\left(q\Big|_{C}^{qC}\right)^{-1}\bar{E}(x) \cong \coprod_{\tilde{x}\in\left(q|_{C}^{qC}\right)^{-1}_{x}} \bar{E}(\tilde{x}) \quad \text{y} \quad \left(q\Big|_{C}^{qC}\right)\Big|_{\bar{E}(\tilde{x})}^{\bar{E}(x)} = q\Big|_{\bar{E}(\tilde{x})}^{\bar{E}(x)} \text{ es}$$

isomorfismo para cada $\tilde{x}\in\left(q|_{C}^{qC}\right)^{-1}_{x}$ $\therefore$ $q|_{C}^{qC}$ es F-cubriente $\blacksquare$

Con una prueba similar a la anterior, usando 6-4 en lugar de 6-3, se tiene:

<u>6-11 PROPOSICION.</u> Si $q: \tilde{X} \longrightarrow X$ es morfismo cubriente y C es una $\mathscr{C}$-componente de $\tilde{X}$, entonces, $q|_{C}^{qC}$ es cubriente sobre una $\mathscr{C}$-componente de X.

<u>6-12 OBSERVACION.</u> Si $q: \tilde{X} \longrightarrow X$ en <u>Rese</u>, entonces, q es cubriente (F-cubriente) si y sólo si $q|_{q^{-1}C}^{C}$ lo es para cada $\mathscr{C}$-componente C de X.

<u>Demostración:</u> Puesto que $X \cong \coprod_{i\in I} X_i$ donde $\{X_i\}_I$ es la familia de $\mathscr{C}$-componentes de X y q es un <u>Rese</u>-morfismo, entonces $\tilde{X} \cong \coprod_{I} q^{-1}X_i$ y en consecuencia, $q = \coprod_{I} q|_{q^{-1}X_i}^{X_i}$. La afirmación se sigue de 6-6-5) $\blacksquare$

<u>6-13 PROPOSICION.</u> Si $\tilde{\tilde{X}} \xrightarrow{q} \tilde{X} \xrightarrow{p} X$ son <u>Rese</u>-morfismos cubrientes (F-cubrientes), entonces, $p\circ q$ es cubriente (F-cubriente).

<u>Demostración:</u> Sea $x \in X$, entonces, $p^{-1}B(x) \cong \coprod_{\tilde{x}\in p^{-1}x} E(\tilde{x})$ y para cada $\tilde{x}\in p^{-1}x$, $p|_{E(\tilde{x})}^{E(x)}$ es isomorfismo,

$\underline{q^{-1}B(\tilde{x})} \cong \coprod_{\tilde{\tilde{x}} \in q^{-1}\tilde{x}} E(\tilde{\tilde{x}})$ y para cada $\tilde{\tilde{x}} \in q^{-1}\tilde{x}$, $q|^{E(\tilde{x})}_{E(\tilde{\tilde{x}})}$ es isomorfismo. Se tiene en consecuencia:

$$\underline{(pq)^{-1}B(x)} \cong \coprod_{\tilde{x} \in p^{-1}x} \underline{q^{-1}B(\tilde{x})} \cong \coprod_{\tilde{x} \in p^{-1}x} \coprod_{\tilde{\tilde{x}} \in q^{-1}\tilde{x}} E(\tilde{\tilde{x}}) \cong \coprod_{\tilde{\tilde{x}} \in (pq)^{-1}x} E(\tilde{\tilde{x}}).$$

Además, si $\tilde{\tilde{x}} \in (pq)^{-1}x$, $pq|^{E(x)}_{E(\tilde{\tilde{x}})} = p|^{E(x)}_{E(q(\tilde{\tilde{x}}))} \circ q|^{E(q(\tilde{\tilde{x}}))}_{E(\tilde{\tilde{x}})}$ es isomorfismo $\therefore$ pq es cubriente. Análogamente se prueba para F-cubrientes ■

Por la afirmación anterior, podemos definir subcategorías <u>Cub</u>, <u>F-Cub</u> de <u>Rexl</u> tales que $|\underline{\text{Cub}}| = |\underline{\text{Rexl}}|$, $|\underline{\text{F-Cub}}| = |\underline{\text{Rexl}}|$ y $\hom_{\text{Cub}}(\tilde{X}, X)$, $\hom_{\text{F-Cub}}(\tilde{X}, X)$ son los conjuntos de morfismos cubrientes y F-cubrientes respectivamente de $\tilde{X}$ en X. Claramente la inclusión <u>F-Cub</u> $\hookrightarrow$ <u>Cub</u> es un funtor, en seguida damos otra forma de comparar estas dos categorías.

<u>6-14 PROPOSICION.</u> Existe una inmersión $'\colon \underline{\text{Cub}} \to \underline{\text{F-Cub}}$ y una familia $(p_X)_{X \in |\underline{\text{Rexl}}|}$ de <u>Rexl</u>-cocientes tal que si $q\colon \tilde{X} \longrightarrow X$ en <u>Cub</u>, entonces conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}' \arrow[r, "q'"'] \arrow[d, "p_{\tilde{X}}"'] & X' \arrow[d, "p_X"] \\ \tilde{X} \arrow[r, "q"'] & X \end{tikzcd}$$

<u>Demostración:</u> Para cada $(X, \rho) \in |\underline{\text{Rexl}}|$, definimos:

$$X' = \rho,\ \rho' = \left\{ ((x,y),(x',y')) \in \rho \times \rho \,\middle/\, \left[\begin{matrix} (x = x' & \wedge & (y,y') \in \rho) \\ \vee & & \\ (y = y' & \wedge & (x,x') \in \rho) \end{matrix}\right] \wedge \left[\begin{matrix} x = y \\ \vee \\ x' = y' \end{matrix}\right] \right\}$$

$\therefore\ (X',\rho') \in |\underline{Rese}|$. Si $q:(\tilde{X},\tilde{\rho}) \longrightarrow (X,\rho)$ en $\underline{Cub}$, sea $q':(\tilde{X}',\tilde{\rho}') \longrightarrow (X',\rho')$ tal que $q'(x,y) = (q(x), q(y))$ para cada $(x,y) \in \tilde{X}'$; claramente q' es $\underline{Rese}$-morfismo y es fácil ver que es F-cubriente (ver ejemplos 6-7-4) y 6-7-5)). Tampoco es difícil ver que $'$ es un funtor fiel que es inyectivo en los objetos $\therefore$ $'$ es inmersión. Para cada $(X,\rho) \in |\underline{Rese}|$, definimos $p_{(X,\rho)}:(X',\rho') \to (X,\rho)$ tal que $p_{(X,\rho)}(x,y) = y$ para cada $(x,y) \in X'$. Entonces $p_{(X,\rho)}$ es $\underline{Rese}$-cociente y si $q:(\tilde{X},\tilde{\rho}) \longrightarrow (X,\rho)$ es cubriente, conmuta:

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{X}',\tilde{\rho}') & \xrightarrow{q'} & (X',\rho') \\ {\scriptstyle p_{(\tilde{X},\tilde{\rho})}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{(X,\rho)}} \\ (\tilde{X},\tilde{\rho}) & \longrightarrow & (X,\rho) \end{array}$$

■

<u>6-15 PROPOSICION.</u> Si conmuta en $\underline{Rese}$ el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_0 & \xrightarrow{q} & \tilde{X}_1 \\ & {\scriptstyle q_0}\searrow \quad X \quad \swarrow{\scriptstyle q_1} & \end{array}$$

donde q_0 y q_1 son F-cubrientes (cubrientes) y q es epimorfismo, entonces, q es F-cubriente (Cubriente).

<u>Demostración:</u> Sea $\tilde{x} \in \tilde{X}_1$ y sea $x = q_1(\tilde{x})$, $\therefore\ q_0^{-1}B(x) = \coprod_{\tilde{x}_0 \in q_0^{-1}x} \bar{E}(\tilde{x}_0)$ y $q_1^{-1}B(x) = \coprod_{\tilde{x}_1 \in q_1^{-1}x} \bar{E}(\tilde{x}_1)$ con $q_0\big|^{E(x)}_{\bar{E}(\tilde{x}_0)}$, $q_1\big|^{E(x)}_{\bar{E}(\tilde{x}_1)}$ isomorfismos siempre que $\tilde{x}_0 \in q_0^{-1}x$, $\tilde{x}_1 \in q_1^{-1}x$. Como el diagrama conmuta,

$$\coprod_{\tilde{x}_0 \in q_0^{-1}x} \bar{E}(\tilde{x}_0) = q_0^{-1}B(x) = q^{-1}q_1^{-1}B(x) = q^{-1}\coprod_{\tilde{x}_1 \in q_1^{-1}x} \bar{E}(\tilde{x}_1)$$ y por

ser q un epimorfismo, $q(\coprod_{\tilde{x}_0 \in q_0^{-1}x} E(\tilde{x}_0)) = \coprod_{\tilde{x}_1 \in q_1^{-1}x} \overline{E}(\tilde{x}_1)$.

Sea $A := \{\tilde{x}_0 \in q_0^{-1}x \,/\, B(\tilde{x}_0) \cap q^{-1}B(\tilde{x}) \neq \phi\} \neq \phi$ y sea $\tilde{x}_0 \in A$ $\therefore$ $qB(\tilde{x}_0) \cap B(\tilde{x}) \neq \phi$; como $qB(\tilde{x}_0) \in \mathcal{V}$, $\overline{E}(\tilde{x})$ es $\mathcal{V}$-componente de $q_1^{-1}B(x)$ y $qB(\tilde{x}_0) \subset q_1^{-1}B(x)$, entonces, $qB(\tilde{x}_0) \subset \overline{E}(\tilde{x})$ $\therefore$ $B(\tilde{x}_0) \subset q^{-1}B(\tilde{x})$ $\therefore$ $q^{-1}B(\tilde{x}) = \coprod_{\tilde{x}_0 \in A} \overline{E}(\tilde{x}_0)$.

Además, si $\tilde{x}_0 \in A$, $\tilde{q}_1 = q_1{}^{|\overline{E}(x)}_{|\overline{E}(\tilde{x})}$, $\tilde{q} = q{}^{|\overline{E}(\tilde{x})}_{|\overline{E}(\tilde{x}_0)}$ y $\tilde{q}_0 = q_0{}^{|\overline{E}(x)}_{|\overline{E}(\tilde{x}_0)}$, entonces, $\tilde{q}_1 \circ \tilde{q} = \tilde{q}_0$ $\therefore$ $\tilde{q}$ es isomorfismo y también, $x = \tilde{q}_0(\tilde{x}_0) = \tilde{q}_1\tilde{q}(x_0)$ $\therefore$ $\tilde{x} = \tilde{q}_1^{-1}(x) = \tilde{q}(\tilde{x}_0)$ $\therefore$ $\tilde{x}_0 \in \tilde{q}^{-1}\tilde{x} \subset q^{-1}\tilde{x}$ $\therefore$ $A \subset q^{-1}\tilde{x}$. Por otra parte, si $\tilde{x}_0 \in q^{-1}\tilde{x}$, entonces, $q(\tilde{x}_0) = \tilde{x}$ $\therefore$ $q_0(\tilde{x}_0) = q_1 q(\tilde{x}_0) = q_1(\tilde{x}) = x$ $\therefore$ $\tilde{x}_0 \in q_0^{-1}x$ y claramente, $B(\tilde{x}_0) \cap q^{-1}B(\tilde{x}) \neq \phi$ $\therefore$ $A = q^{-1}\tilde{x}$ y entonces, q es F-cubriente. La demostración es análoga para morfismos cubrientes ■

<u>6-16 TEOREMA.</u> Si $\underline{A} = \{(\mathbb{1} \to 2), i, j), (S_2, i, j) \,/\, i, j \in \{1, 2\}\}$, $q : \tilde{X} \longrightarrow X$ es un morfismo cubriente y $\sigma : \mathcal{C} \longrightarrow X$ es una $\underline{A}$-trayectoria que empieza en x, entonces, para cada $\tilde{x} \in q^{-1}x$, existe una única $\tilde{\sigma} : \mathcal{C} \longrightarrow \tilde{X}$ $\underline{A}$-trayectoria que empieza en $\tilde{x}$ tal que $q\tilde{\sigma} = \sigma$.

<u>Demostración</u>: Como $\mathcal{C}$ es cadena finita orientada con eslabones en $\underline{A}$, existen $\{(A_i, a_{i-1}, a_i)\}_{i=1}^{n} \subseteq \underline{A}$ y $\{X_i\}_1^n$ tales que $X_1 = A_1$, $X_n = \mathcal{C}$ y para cada $j \in \{2, \dots, n\}$, $X_j = X_{j-1} \overset{+}{\vee} A_j$ y como σ empieza en x, se tiene que $\sigma(a_0) = x$. Sea $\tilde{x} \in q^{-1}x$. Como q es cubriente, $q{}^{|E(x)}_{|E(\tilde{x})}$

es isomorfismo. Sea $\tilde{\sigma}_1 : X_1 \longrightarrow \tilde{X}$ la restricción de la composición $j \circ \left(q\Big|^{E(x)}_{E(\tilde{x})}\right)^{-1} \circ \sigma\Big|^{E(x)}_{E(a_0)}$ donde $j : E(\tilde{x}) \longrightarrow \tilde{X}$ es la inclusión. Supongamos que hemos definido $\tilde{\sigma}_{n-1} : X_{n-1} \longrightarrow \tilde{X}$ en $\underline{Rex}$ tal que $\tilde{\sigma}_{n-1}(a_0) = \tilde{x}$ y $q\tilde{\sigma}_{n-1} = \sigma_{|X_{n-1}}$. Notemos que $\sigma(a_n) \in E(\sigma(a_{n-1}))$ y definamos $\tilde{\sigma}_n : C = X_n \longrightarrow \tilde{X}$ tal que $\tilde{\sigma}_n(a) = \tilde{\sigma}_{n-1}(a)$ si $a \in X_{n-1}$ y

$$\tilde{\sigma}_n(a_n) = \left[q\Big|^{E(\sigma(a_{n-1}))}_{E(\tilde{\sigma}(a_{n-1}))}\right]^{-1} \circ \sigma\Big|^{E(\sigma(a_{n-1}))}(a_n)$$

$\therefore$ $\tilde{\sigma}_n$ es una $\underline{A}$-trayectoria que empieza en $\tilde{x}$ tal que $q\tilde{\sigma}_n = \sigma$. Si $\tilde{\sigma} : C \longrightarrow \tilde{X}$ es otra $\underline{A}$-trayectoria que empieza en $\tilde{x}$ tal que $q\tilde{\sigma} = \sigma$, es fácil ver por inducción que $\tilde{\sigma}_{|X_i} = \tilde{\sigma}_i$ para $1 \leq i \leq n$ $\therefore$ $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_n$ ∎

Con una prueba análoga se tiene:

__6-17 TEOREMA.__ Si $\underline{A}$ es como en el Teorema 6-16, $\underline{A}' = \underline{A} \cup \{(S_3, i, j) \mid i, j \in \{1,2,3\}\}$, $q : \tilde{X} \longrightarrow X$ es un morfismo F-cubriente y $\sigma : C \longrightarrow X$ es una $\underline{A}'$-trayectoria que empieza en x, entonces, para cada $\tilde{x} \in q^{-1}x$, existe una única $\tilde{\sigma} : C \longrightarrow \tilde{X}$ $\underline{A}'$-trayectoria que empieza en $\tilde{x}$ tal que $q\tilde{\sigma} = \sigma$.

__6-18 COROLARIO.__ Si $q : \tilde{X} \longrightarrow X$ es cubriente, $f, g : Y \longrightarrow \tilde{X}$ en $\underline{Rex}$ con $Y \in \mathcal{Y}$ son tales que $qf = qg$ y existe $y_0 \in Y$ donde $f(y_0) = g(y_0)$, entonces, $f = g$.

__Demostración:__ Sea $y \in Y$, sea $\sigma : C \longrightarrow Y$ un camino que empieza en y_0 y que termina en y;

entonces, $f\sigma, g\sigma : \mathbb{I} \longrightarrow \tilde{X}$ son caminos que empiezan en $f(y_0)=g(y_0)$ tales que $qf\sigma = qg\sigma$. Por el Teorema anterior, $f\sigma = g\sigma$ $\therefore$ $f(y)=g(y)$ ∎

<u>6-19 COROLARIO.</u> Si conmuta en <u>Rese</u> el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_0 & \xrightarrow{q} & \tilde{X}_1 \\ & {\scriptstyle q_0}\searrow \; X \; \swarrow{\scriptstyle q_1} & \end{array}$$

donde q_0, q_1 son F-cubrientes (cubrientes) y $\tilde{X}_1 \in \mathcal{C}$, entonces, q es F-cubriente (cubriente).

<u>Demostración.</u> Por 6-15, basta probar que q es epimorfismo. Sean $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}_0$, $\tilde{x}_1 = q\tilde{x}_0$ y $x_0 = q_0\tilde{x}_0$. Sea $\tilde{x}_1' \in \tilde{X}_1$; tomemos un camino $\tilde{\omega}_1$ de $\tilde{x}_1$ a $\tilde{x}_1'$ en $\tilde{X}_1$ $\therefore$ $q_1\tilde{\omega}_1$ es un camino que empieza en $x_0 = q_1 q\tilde{x}_0 = q_0\tilde{x}_0$. Por el Teorema anterior, existe $\tilde{\omega}_0$ camino que empieza en $\tilde{x}_0$ tal que $q_0\tilde{\omega}_0 = q_1\tilde{\omega}_1$. Como el diagrama conmuta, $q_1 q\tilde{\omega}_0 = q_1\tilde{\omega}_1$ y aplicando el teorema anterior (unicidad), se obtiene $q\tilde{\omega}_0 = \tilde{\omega}_1$ $\therefore$ q es suprayectiva ∎

<u>6-20 EJEMPLO: Construcción de un morfismo cubriente universal.</u>

Sean $X \in \mathcal{C} \cap$ <u>SRese</u>, $x_0 \in X$ y sea $C(X,x_0)$ el conjunto $\{((x_0,x_1),(x_1,x_2),\cdots,(x_{n-1},x_n)) / n \in \mathbb{N},\ (x_{i-1},x_i) \in \rho_X\}$. Consideremos las siguientes operaciones elementales sobre $C(X,x_0)$:

i) Reemplazar $((x_0,x_1),\cdots,(x_{n-1},x_n))$ por $((x_0,x_1),\cdots,(x_{i-1},x_i),(z,w),(w,z),(x_{i+1},x_{i+2}),\cdots,(x_{n-1},x_n))$ ó viceversa, (en caso de que $(z,w) \in \rho_X$). ii) Reemplazar $((x_0,x_1),\cdots,(x_{n-1},x_n))$ por $((x_0,x_1)\cdots,(x_{i-1},x_i),(z,z),(x_i,x_{i+1}),\cdots(x_{n-1},x_n))$ ó viceversa, (en caso de que $z \in X$ y $n \neq 0$). Consideremos también la siguiente relación de equivalencia en $C(X,x_0)$: $c \sim c'$ si y sólo si c' se obtiene de c por medio de operaciones elementales. Sea $P(X,x_0) = (C(X,x_0)/\sim, \gamma)$ donde γ es la relación reflexiva en $C(X,x_0)/\sim$ siguiente: $\{([c],[c']) /$ existe $(y,z) \in \rho_X$ tal que $[c'] = [(c,(y,z))]\}$. Definamos $\pi : P(X,x_0) \longrightarrow X$ tal que $\pi[((x_0,x_1),\cdots,(x_{n-1},x_n))] = x_n$. π es función suprayectiva porque $X \in \mathcal{D}\mathcal{C}$ y es Rere-morfismo ya que si $([c],[c']) \in \gamma$, entonces existe $(y,z) \in \rho_X$ tal que $[c'] = [(c,(y,z))]$ $\therefore$ $\pi[c'] = z \wedge \pi[c] = y$ y en consecuencia, $(\pi[c], \pi[c']) \in \rho_X$. En general, π no es morfismo F-cubriente, (como se ve en el caso de $P(S_3^1, 1)$ donde S_3^1 es como en 6-9), sin embargo, siempre es cubriente como veremos ahora: Sean $x \in X$, $y \in B(x)$ $\therefore$ como $X \in$ sRere, $(y,x) \in \rho_X$; Sea $[c] \in P(X,x_0)$ tal que $\pi[c] = y$ $\therefore$ $\pi[(c,(y,x))] = x$ y también $([c], [(c,(y,x))]) \in \gamma$ de donde se sigue que: $\pi^{-1}B(x) \subset \bigcup_{\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)} B(\tilde{x})$ $\therefore$ es claro que $\pi^{-1}B(x) = \bigcup_{\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)} B(\tilde{x})$. Sean $[c], [c'] \in \pi^{-1}(x)$ y $[d] \in B([c])$, $[d'] \in B([c'])$ tales que $[d] = [d']$; como $X \in$ sRere, podemos afirmar que existen $(z,y), (z',y') \in \rho_X$ tales que $[d] = [(c,(z,y))]$ y $[d'] = [(c',(z',y'))]$, pero $[d] = [d']$ y $\pi[c] = x = \pi[c']$ $\therefore$ $z = x = z' \wedge y = y'$ $\therefore$ $[c] = [c']$ $\therefore$ $\pi^{-1}B(x) \cong \coprod_{\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)} B(\tilde{x})$.

Sea $[c] \in \pi^{-1}(x)$, es claro que $\pi\Big|^{E(x)}_{E([c])}$ es cociente (ya que η es simétrica), y si $[d],[d'] \in B([c])$ son tales que $\pi[d]=\pi[d']$ entonces, $([d],[c]),([d'],[c]) \in \eta$ $\therefore$ existen $(z,y),(z',y') \in \rho_X$ tales que $[d]=[(c,(z,y))]$ y $[d']=[(c,(z',y'))]$; como $\pi[c]=x$ y $\pi[d]=\pi[d']$, se tiene que $z=x=z' \wedge y=y'$ $\therefore$ $[d]=[d']$ $\therefore$ $\pi\Big|^{E(x)}_{E([c])}$ es cociente inyectivo y en consecuencia isomorfismo $\therefore$ π es morfismo cubriente.

(Notación: $q:(\tilde{X},\tilde{x}) \longrightarrow (X,x)$ en Rese significa que $q:\tilde{X}\longrightarrow X$ es Rese-morfismo y que $q(\tilde{x})=x$).

Veamos, ahora, que $\pi:(P(X,x_0),[(x_0,x_0)]) \rightarrow (X,x_0)$ es universal, es decir que para cada morfismo cubriente $q:(\tilde{X},\tilde{x}_0) \longrightarrow (X,x_0)$ existe un único Rese-morfismo $p:(P(X,x_0),[(x_0,x_0)]) \longrightarrow (\tilde{X},\tilde{x}_0)$ tal que:
$$\begin{tikzcd} P(X,x_0) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & \tilde{X} \arrow[dl, "q"] \\ X & \end{tikzcd}$$
es conmutativo.

Sea $q:(\tilde{X},\tilde{x}_0) \longrightarrow (X,x_0)$ cubriente; por 6-16, si $[((x_0,x_1),\cdots,(x_{n-1},x_n))] \in P(X,x_0)$, existe un único $((\tilde{x}_0,\tilde{x}_1),\cdots,(\tilde{x}_{n-1},\tilde{x}_n)) \in C(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ tal que para $1 \leq i \leq n$ vale $q(\tilde{x}_i)=x_i$. Podemos entonces definir $p:P(X,x_0)\rightarrow\tilde{X}$ de modo que $p([(x_0,x_1),\cdots,(x_{n-1},x_n)])=\tilde{x}_n$; p es una función tal que $p([(x_0,x_0)])=\tilde{x}_0$, $qp=\pi$ y es fácil ver que tambien es Rese-morfismo (Nótese que, por 6-19, si $\tilde{X}\in\mathcal{U}$ resulta que p es tambien cubriente).

La unicidad de p se sigue del hecho de que $P(X,x_0)\in\mathcal{C}$ y 6-18.

OBSERVACION. Si $p:(\tilde{X},\tilde{x}_0)\longrightarrow(X,x_0)$, $q:(Y,y_0)\longrightarrow(X,x_0)$ son cubrientes universales tales que $\tilde{X}, Y\in\mathcal{C}$, entonces existe $\sigma:(\tilde{X},x_0)\longrightarrow(Y,y_0)$ Rere-isomorfismo tal que $q\sigma=p$ (En particular, si $X\in$ sRere $\cap\,\mathcal{C}$, $x_0, x_0'\in X$, se tiene que $P(X,x_0)\cong P(X,x_0')$).

Demostración: por hipótesis, existen $\sigma:(\tilde{X},\tilde{x}_0)\to(Y,y_0)$ y $\sigma':(Y,y_0)\longrightarrow(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ en Rere tales que $p=q\sigma\wedge q=p\sigma'$; aplicando 6-18, obtenemos $\sigma\sigma'=1$ y $\sigma'\sigma=1$ y en consecuencia, σ es isomorfismo ■

6-21 OBSERVACION. Si
$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ H \arrow[r, "\alpha"] & X \end{tikzcd}$$
son morfismos en Rere y definimos $\tilde{H}_\alpha=(Z,\rho|Z)$ donde $Z=\{(h,x)\in H\times\tilde{X}\,/\,\alpha(h)=p(x)\}$, ρ es la Rere-estructura de $H\Pi\tilde{X}$, y $p_\alpha=\pi_1|\tilde{H}_\alpha$, $\alpha_p=\pi_2|\tilde{H}_\alpha$, entonces
$$\begin{tikzcd} \tilde{H}_\alpha \arrow[r, "\alpha_p"] \arrow[d, "p_\alpha"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ H \arrow[r, "\alpha"] & X \end{tikzcd}$$
es cuadrado cartesiano (pull-back) en Rere.

6-22 PROPOSICION. Si $p:\tilde{X}\longrightarrow X$ tiene alguna de las siguientes propiedades: ser cubriente (de multiplicidad k), ser F-cubriente (de multiplicidad k); entonces, $p_\alpha:\tilde{H}_\alpha\longrightarrow H$ tambien la tiene.

<u>Demostración</u>: Supongamos que p es F-cubriente. Si $h \in H$, $p_\alpha^{-1}(h) = \{(h,x) / x \in p^{-1}(\alpha(h))\}$ y entonces, $|p_\alpha^{-1}(h)| = |p^{-1}(\alpha(h))|$. Claramente, $\bigcup_{x \in p^{-1}(\alpha(h))} B(h,x) \subset p_\alpha^{-1}B(h)$. Sea $(h',x') \in p_\alpha^{-1}B(h)$; entonces $h' \in B(h)$ y $p(x') = \alpha(h')$; Supongamos sin pérdida de generalidad que $(h,h') \in \rho_H$ $\therefore$ $(\alpha(h),\alpha(h')) \in \rho_X$. Como p es cubriente, existe $x \in p^{-1}(\alpha(h))$ tal que $(x,x') \in \rho_{\tilde{X}}$ y en consecuencia $((h,x),(h',x')) \in \rho_{\tilde{H}_\alpha}$ $\therefore$ $(h',x') \in B(h,x)$ y por consiguiente, $p_\alpha^{-1}B(h) = \bigcup_{x \in p^{-1}(\alpha(h))} B(h,x) = \bigcup_{(h,x) \in p_\alpha^{-1}(h)} B(h,x)$.

Supongamos que $p_\alpha^{-1}B(h) \not\cong \coprod_{(h,x) \in p_\alpha^{-1}(h)} \bar{E}(h,x)$, entonces, existen $x,x' \in p^{-1}(\alpha(h))$ distintos y $(h_x,e_x) \in B(h,x)$, $(h_{x'},e_{x'}) \in B(h,x')$ tales que $((h_x,e_x),(h_{x'},e_{x'})) \in \rho_{\tilde{H}_\alpha} \cup \rho_{\tilde{H}_\alpha}^{-1}$. De lo anterior se sigue que $(e_x,x),(e_{x'},x'),(e_x,e_{x'}) \in \rho_{\tilde{X}} \cup \rho_{\tilde{X}}^{-1}$ y entonces $p^{-1}B(\alpha(h)) \not\cong \coprod_{x \in p^{-1}(\alpha(h))} \bar{E}(x)$; lo cual es una contradicción, ya que p es F-cubriente.

Veremos ahora que $p_\alpha\Big|_{\bar{E}(h,x)}^{\bar{E}(h)}$ es isomorfismo para cada $x \in p^{-1}(\alpha(h))$. Sea $x \in p^{-1}(\alpha(h))$. Supongamos que $(h',h'') \in \rho_H$ con $h',h'' \in B(h)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $(h',h),(h'',h) \in \rho_H$; entonces, $(\alpha(h'),\alpha(h'')),(\alpha(h'),\alpha(h)),(\alpha(h''),\alpha(h)) \in \rho_X$. Como p es F-cubriente, existen $x' \in p^{-1}(\alpha(h'))$ y $x'' \in p^{-1}(\alpha(h''))$ tales que $(x',x''),(x',x),(x'',x) \in \rho_{\tilde{X}}$, de donde se sigue que $(h',x'),(h'',x'') \in B(h,x)$ y tambien que

$((h'_1,x'),(h'',x'')) \in \rho_{\tilde{H}_\alpha}$ y en concecuencia, $p_\alpha\big|^{\bar{E}(h)}_{\bar{E}(h,x)}$ es un cociente. Ahorabien, si $p_\alpha(h',x') = p_\alpha(h'',x'')$ con $(h',x'), (h'',x'') \in B(h,x)$, entonces $h'=h''$ y $(h,x) \in B(h',x')$, $(h,x) \in B(h',x'')$; pero $p_\alpha^{-1} B(h') \cong \coprod_{x \in \bar{p}^{-1}(\alpha(h'))} \bar{E}(h',x)$

$\therefore$ $x'=x''$. Hemos probado que $p_\alpha\big|^{B(h)}_{B(h,x)}$ es inyectiva y, como ya habiamos visto antes, tambien es un cociente, entonces $p_\alpha\big|^{\bar{E}(h)}_{\bar{E}(h,x)}$ es isomorfismo. Lo anterior termina la demostración de que p_α es F-cubriente. La prueba es análoga para morfismos cubrientes ■

<u>6-23 DEFINICION.</u> Un <u>morfismo de morfismos cubrientes sobre X</u> es un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_0 \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "q_0"'] & & \tilde{X}_1 \arrow[dl, "q_1"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

donde q_0, q_1 son morfismos cubrientes. Diremos que q es <u>isomorfismo de morfismos cubrientes sobre X ($q_0 \overset{q}{\cong} q_1$)</u> si el diagrama anterior conmuta y q es <u>Rese</u>-isomorfismo. Denotaremos por $[q_0]$ la clase de isomorfía representada por $q_0 : \tilde{X}_0 \longrightarrow X$ y además: $D(X) = \{[\tilde{X} \xrightarrow{p} X] \,/\, p$ es cubriente$\}$, $\bar{D}(X) = \{[\tilde{X} \xrightarrow{p} X] \,/\, p$ es F-cubriente$\}$, $D^k(X) = \{[\tilde{X} \xrightarrow{p} X] \,/\, p$ es cubriente de multiplicidad $k\}$ y $\bar{D}^k(X) = \{[\tilde{X} \xrightarrow{p} X] \,/\, p$ es F-cubriente de multiplicidad $k\}$.

<u>6-24 OBSERVACIONES.</u> Si p tiene alguna de las siguientes propiedades: ser F-cubriente (de multiplicidad k), ser cubriente (de multiplicidad k), y $p' \in [p]$ entonces p' tambien la tiene.

Es fácil ver que $\mathcal{D}(X), \mathfrak{D}(X)$ son clases propias ya que contienen clases propias de morfismos cubrientes triviales, sin embargo, $\mathcal{D}^k(X)$ y $\mathfrak{D}^k(X)$ son conjuntos. En efecto, si $X \in |\underline{Rex}|$, consideremos un conjunto E tal que $|E| = k|X|$; hemos visto que $\mathcal{U}^{-1}E$ es un conjunto (donde $\mathcal{U}$ es el funtor que olvida) $\therefore$ tiene sentido hablar del conjunto $\mathcal{R} \subset \bigcup_{\tilde{X} \in \mathcal{U}^{-1}E} \hom(\tilde{X}, X)$ de morfismos cubrientes $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ de multiplicidad k sobre X con $\tilde{X} \in \mathcal{U}^{-1}E$.

Si $q : (D, \eta) \longrightarrow X$ es cubriente de multiplicidad k, entonces $|D| = k|X| = |E|$ $\therefore$ hay una biyección $h : E \longrightarrow D$; sea ξ la $\underline{Rex}$-estructura inicial en E respecto a h y η $\therefore$ $h : (E, \xi) \longrightarrow (D, \eta)$ es isomorfismo $\therefore$ $ph \in \mathcal{R}$ y $[q] = [qh]$, por tanto: $\mathfrak{D}^k(X) \subset \mathcal{D}^k(X) \subset \{[p : \tilde{X} \to X] / p \in \mathcal{R}\}$ que es un conjunto.

Si $\alpha : H \longrightarrow X$ en $\underline{Rex}$ y $\tilde{X}_0 \xrightarrow{q_0} X$, $\tilde{X}_1 \xrightarrow{q_1} X$ son morfismos cubrientes tales que $q_0 \in [q_1]$, entonces, $q_{\underset{\alpha}{0}} \in [q_{1\alpha}]$.

Denotaremos por $\underline{QSet}$ a la casicategoría de todas las clases y funciones entre ellas.

<u>6-25 PROPOSICION.</u> Sean $D : \underline{Rere} \longrightarrow \underline{QSet}$, $D^k : \underline{Rere} \longrightarrow \underline{Set}$ tales que si $\alpha : H \longrightarrow X$ entonces:

$$D(\alpha) : D(X) \longrightarrow D(H) \qquad , \qquad D^k(\alpha) : D^k(X) \longrightarrow D^k(H)$$
$$[p] \longmapsto [p_\alpha] \qquad\qquad\qquad [p] \longmapsto [p_\alpha] .$$

Entonces, D, D^k son funtores contravariantes.

(De la misma forma, se definen funtores contravariantes $\bar{D}, \bar{D}^k$).

<u>Demostración:</u> Por la observación anterior, D, D^k son funciones bien definidas. Si $\alpha = 1_X$ y $[p] \in D(X)$, entonces

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_\alpha \arrow[r, "\alpha_p"] \arrow[dr, "p_\alpha"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ & X \end{tikzcd}$$

conmuta y claramente,

$x \longmapsto (p(x), x)$ define un $\underline{Rere}$-morfismo inverso para α_p

$\therefore \; [p_\alpha] = [p] \qquad \therefore \; D(1_X) = 1_{D(X)}$.

Consideremos los siguientes diagramas en $\underline{Rere}$:

$$\begin{tikzcd} \tilde{K}_\beta \arrow[r, "(\beta)_{p_\alpha}"] \arrow[d, "(p_\alpha)_\beta"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & \tilde{H}_\alpha \arrow[r, "\alpha_p"] \arrow[d, "p_\alpha"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ K \arrow[r, "\beta"] & H \arrow[r, "\alpha"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \tilde{K}_{\alpha\beta} \arrow[r, "(\alpha\beta)_p"] \arrow[d, "p_{\alpha\beta}"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ K \arrow[r, "\alpha\beta"] & X \end{tikzcd}$$

Como (1), (2) son cartesianos, el rectángulo exterior tambien es cartesiano y por ser (3) cartesiano, entonces, $D(\beta)D(\alpha)[p] = [(p_\alpha)_\beta] = [p_{\alpha\beta}] = D(\alpha\beta)[p]$

$\therefore$ D es funtor contravariante. Similarmente se tiene que $D^k, \bar{D}, \bar{D}^k$ son funtores contravariantes ∎

<u>6-26 DEFINICIONES.</u> Denotaremos por $\bar{B}_\infty$ a la clase de $\underline{Rere}$-objetos (X, p) tales que no admiten

2-ciclos y $(X, \rho \cup \rho^{-1})$ no admite n-ciclos para $n \geq 3$.
Un <u>árbol</u> en $Y \in |\mathbf{Rex}|$ es un monomorfismo $a : A \longrightarrow Y$ donde $A \in \overline{B}_\infty \cap \mathcal{C}$ y un <u>bosque</u> en Y es un monomorfismo $b : B \longrightarrow Y$ donde $B \in \overline{B}_\infty$. Diremos que un árbol ó un bosque en Y es <u>generador</u> si su imagen coincide con Y.

<u>6-27 PROPOSICION.</u> Si $T \in \overline{B}_\infty \cap \mathcal{C}$, entonces, $\mathcal{D}(T) = \overline{\mathcal{D}}(T) = \{[p : \tilde{T} \longrightarrow T] / p$ es cubriente trivial sobre $T\}$ y $\mathcal{D}^k(T) = \overline{\mathcal{D}}^k(T) = \{[p_0 : \tilde{T} \longrightarrow T]\}$ donde p_0 es cubriente trivial de multiplicidad k.

<u>Demostración:</u> Sea $p : \tilde{T} \longrightarrow T$ cubriente y sea $\{C_i\}_I$ la familia de $\mathcal{C}$-componentes de $\tilde{T}$. Sea $i \in I$. Por 6-11, se tiene que $q_i = p\big|_{C_i}^{pC_i}$ es cubriente sobre una componente de T y como $T \in \mathcal{C}$, $pC_i = T$ $\therefore$ $q_i : C_i \longrightarrow T$ es cubriente y en particular, es cociente. Sean $x, x' \in C_i$ tales que $q_i(x) = q_i(x')$; como $C_i \in \mathcal{C}$, existe σ $(1 \to 2)$-trayectoria de x a x' en C_i. Como $T \in \overline{B}_\infty$, entonces $\operatorname{Im} q_i\sigma$ es un punto y por ser q_i Δ-monótono, $x = x'$ $\therefore$ q_i es inyectiva y en consecuencia, q_i es isomorfismo. Si $p_0 : \coprod_{i \in I} T \longrightarrow T$ es el morfismo cubriente trivial, es claro que conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{T} & \cong & \coprod_I C_i & \xrightarrow[\cong]{\coprod q_i} & \coprod_I T \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & & \swarrow{\scriptstyle p_0} & \\ T & & & & \end{array}$$

$\therefore$ $p \in [p_0]$ ■

6-28 OBSERVACIONES. Decimos que un árbol a en Y es maximal si dado cualquier otro árbol a' en Y tal que $\mathrm{Im}\,a \subset \mathrm{Im}\,a'$ se tiene que $\mathrm{Im}\,a' \subset \mathrm{Im}\,a$. Por el Lema de Zorn, existen árboles maximales en cualquier $Y \in |\underline{Rese}|$, y es fácil ver que si $Y \in \mathcal{C}$, todo árbol maximal en Y es generador. De aquí en adelante, supondremos que $X \in \mathcal{C}$. Sean $A \xrightarrow{a} X$ un árbol generador en X y $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ un morfismo cubriente; como

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A}_a & \xrightarrow{f_a} & A \\ {\scriptstyle a_p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a} \\ \tilde{X} & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

es cartesiano y todo pullback conserva monomorfismos, entonces a_p es monomorfismo. Si $\{C_i\}_I$ es la familia de $\mathcal{C}$-componentes de $\tilde{A}_a$, se tiene que $\tilde{A}_a \cong \coprod_I A$ $\therefore$ $\coprod_I A \xrightarrow{a_p} \tilde{X}$ es un bosque. Si $x \in \tilde{X}$, entonces, $p(x) \in X = \mathrm{Im}\,a$ $\therefore$ existe $v \in A$ tal que $a(v) = p(x)$ y por tanto, $(v,x) \in \tilde{A}_a$ y $a_p(v,x) = x$ $\therefore$ a_p es bosque generador en $\tilde{X}$. Hemos probado que si $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ es cubriente, entonces, $\tilde{X}$ posee un bosque generador constituido por copias de un árbol generador en X. En particular, si p es de multiplicidad k, entonces f_a también lo es y en consecuencia, $\coprod_1^k A \xrightarrow{a_p} \tilde{X}$ es bosque generador en $\tilde{X}$.

6-29 COROLARIO. Si $p:\tilde{X}\longrightarrow X$ es cubriente de multiplicidad k y $\tilde{X}$ tiene k ℓ-componentes, entonces, p es trivial.

Demostración: En la construcción de la observación anterior, $\coprod_{1}^{k} A_i \xrightarrow{a_p} \tilde{X}$ es un bosque generador (con $A_i = A$ para $i=1,\dots,k$). No existen $a_i \in A_i$, $a_j \in A_j$ tales que $(a_p(a_i), a_p(a_j)) \in \rho_{\tilde{X}}$ ya que si existieran, por ser a_p generador, $\tilde{X}$ tendría menos de k componentes. De lo anterior y del hecho de que a es generador en X, se sigue que p es isomorfo al morfismo cubriente trivial $\coprod_{1}^{k} X \longrightarrow X$ ■

6-30 OBSERVACION. Si $a: A\longrightarrow X$ es un árbol generador en X y definimos:
$\gamma(X) := |\{\{a(z),a(z')\} / (a(z),a(z'))\in \rho_X \cup \rho_X^{-1} \wedge (z,z')\notin \rho_A\cup\rho_A^{-1}\}|$, se puede ver que $\gamma(X)$ no depende del árbol generador elegido (en forma análoga a como se hace para gráficas finitas en [1] pp. 37-39).

6-31 PROPOSICION. $1 \leq |\bar{D}^k(X)| \leq |D^k(X)| \leq k!^{\gamma(X)}$.

Demostración: Sea $p:\tilde{X}\longrightarrow X$ cubriente de multiplicidad k. Por 6-28, $\coprod_{1}^{k} A_i \xrightarrow{a_p} \tilde{X}$ con $A_i = A$ $(i=1,\dots,k)$ es bosque generador de $\tilde{X}$. Denotemos por C_a al conjunto de flechas:

$\{(a(z), a(z')) \in \rho_X \cup \rho_X^{-1} \,/\, (z,z') \notin \rho_A \cup \rho_A^{-1}\}$; para "reconstruir" $\tilde{X}$, debemos agregar a Imap k flechas correspondientes a cada elemento de Ca. Es fácil ver que para cada flecha de Ca, hay a lo más $k!$ posibilidades de hacerlo. Si dos flechas de Ca unen los mismos vértices, como p es cubriente, al considerar las $k!$ posibilidades de agregar las k flechas correspondientes a una de ellas, se estan considerando tambien todas las posibilidades que corresponden a la otra flecha. Entonces, podemos reconstruir $\tilde{X}$ a lo mas de $k!^{\gamma(X)}$ maneras distintas ∎

<u>6-32 COROLARIO.</u> (ver 4-8 de [9]).

Si $\gamma(X) = 1$, entonces $|D^2(X)| = 2$

<u>6-33 COROLARIO.</u> Para cada natural $n \geq 2$,

$D^2(S_n) = \{[S_n \amalg S_n \longrightarrow S_n], [S_{2n} \xrightarrow{q_n} S_n]\}$

<u>NOTA</u>. 6-32 nos dá ejemplos donde la cota superior propuesta en 6-31 es alcanzada; sin embargo, esto no es siempre cierto, por ejemplo, es muy fácil ver que $|D^3(S_2)| < 6' = 3!^{\gamma(S_2)}$.

BIBLIOGRAFIA.

[1] Frank Harary, Graph Theory. Addison-Wesley, Reading, Mass. 1969.

[2] Pavol Hell. "An introduction to the Category of Graphs".

[3] H. Herrlich, G.E. Strecker, Category Theory. Allyn and Bacon, 1973.

[4] H. Herrlich, G. Salicrup y R. Vázquez. "Dispersed Factorization Structures", por publicarse en Canadian Journal of Mathematics.

[5] H. Herrlich, G. Salicrup y R. Vázquez. "Light Factorization structures". Preprint.

[6] Graciela Salicrup. "Epirreflexividad y Conexidad en categorías concretas topológicas"; tesis para obtener el grado de Doctor en Ciencias (Matemáticas). Facultad de Ciencias, UNAM. Mimeo, 1978.

[7] G. Salicrup y R. Vázquez. "Categorías de conexión". Anales del Instituto de Matemáticas. Vol. 12, 1972 pp 47-87.

[8] G. Salicrup y R. Vázquez. "Connection and Disconnection", por publicarse en Proceedings of the International Conference on Categorical Topology, Berlin 1978.

[9] Derek A. Waller, "Double covers of Graphs", Bull. Australian Math. Soc. 14 (1976) 233-248

[10] Derek A. Waller, "Quotient structures in Graph Theory". Graph Theory Newsletter. Vol 6. N. 4. (1977) 12-18.

[11] Tutte, Connectivity in Graphs. University of Toronto Press 1966.