Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

"Anillo Clásico de Cocientes"

Tesis

que para obtener el título de:

MATEMATICO

presenta:

MARIA DE LOURDES PALACIOS FABILA.

México D.F. 1979

Indice

Introducción

En la mayor parte de este estudio, nos dedicaremos al problema de encontrar condiciónes necesarias y suficientes para que un anillo A tenga un anillo clásico de cocientes de una cierta clase, digamos Artiniano o Casi-Frobenius.

§ 1. Ideales Semiprimos y el Radical Primo.

Definición: Un anillo A es semiprimo si no tiene ideales nilpotentes distintos del cero.

Definición: Un ideal bilateral $\mathfrak{a} \subset A$ es semiprimo si $A/\mathfrak{a}$ es un anillo semiprimo.

Lema 1.1.

Un ideal $\mathfrak{a}$ es semiprimo si y sólo si es una intersección de ideales primos.

Dem.

Ya que hay una correspondencia biyectiva entre los ideales primos de A que contienen a $\mathfrak{a}$ y los ideales primos de $A/\mathfrak{a}$.

$$A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{a}$$

es suficiente demostrar el lema para el caso $\mathfrak{a} = (0)$.

Supongamos que el cero es una intersección de primos. Sea $\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in K}$ una familia de ideales primos de A y sea $I \subset A$ un ideal nilpotente, entonces $I^n = 0$ para alguna n. $I^n \subset \mathfrak{a}_i$ $\forall i \in K$, además $\mathfrak{a}_i$ es primo por lo tanto, por inducción, se tiene que $\mathbf{I} \subset \mathfrak{a}_i$ $\forall i \in K$, de donde $\mathbf{I} \subset \bigcap_{i \in K} \mathfrak{a}_i = 0$.

Ahora supongamos que $\mathbf{A}$ es un anillo semiprimo. Si probamos que para cada elemento $a \neq 0$ en $\mathbf{A}$, existe un ideal primo, al cual denotaremos con $\mathfrak{P}$, que no contiene a a entonces la intersección de estos ideales será el cero y así habremos probado que $0 = \bigcap_{i \in K} \mathfrak{P}_i$ donde $\mathfrak{P}_i$ es primo $\forall i \in K$. Como $\mathbf{A}$ es un anillo semiprimo no tiene ideales nilpotentes distintos del cero. $\mathbf{A}a\mathbf{A} = \{\sum ras \mid r, s \in \mathbf{A}\}$ es un ideal bilateral de $\mathbf{A}$, entonces no es nilpotente. De aquí que existe $a_1 \in a\mathbf{A}a$ tal que $a_1 \neq 0$. (a_1 existe porque si no existiera $a\mathbf{A}a = 0$ luego $a = 0$ lo cual es una contradicción). Procediendo inductivamente obtenemos $a_i \neq 0$ $i = 1, 2, \ldots$ tal que $a_0 = a$ y $a_i \in a_{i-1} A_{i-1}$ donde $A_{i-1} = Aa_{i-1}$. Consideramos $\{a_{i-1}\}$ y a todos los primos que no intersectan a dicha familia. $0 \in \mathbf{S}$. Ordenamos parcialmente dicho conjunto por inclusión y tomamos una cadena ascendente $\mathbf{T}$, esta cadena tiene cota superior, a saber la unión, que es ideal por ser T una cadena ascendente. Entonces la familia tiene un elemento máximo $\mathfrak{p}$ tal que $a_i \notin \mathfrak{p}$ $\forall i$. Mostraremos que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo. Notemos que si I es un ideal y $a_i \in I$ entonces $a_{i+1} \in I$. Supongamos que $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son ideales no contenidos en $\mathfrak{p}$. Entonces por la maximalidad de $\mathfrak{p}$ tenemos que $a_i \in \mathfrak{a} + \mathfrak{p}$, para alguna i, $a_j \in \mathfrak{b} + \mathfrak{p}$ para alguna j. Sea $k = \max(i,j)$, entonces $a_{k+1} \in a_k A a_k \subset (\mathfrak{a}+\mathfrak{p})\cdot(\mathfrak{b}+\mathfrak{p}) \subset (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}) + \mathfrak{p}$. Como $a_{k+1} \notin \mathfrak{p}$ entonces $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \not\subset \mathfrak{p}$, por lo tanto $\mathfrak{p}$ es un ideal primo.

Definición: La intersección de todos los ideales primos de A se llama el radical primo de A, y se denota por $N(A)$.

Es claro que $N(A)$ es el ideal más pequeño de A t.q. $A/N(A)$ es semiprimo. En particular A es semiprimo $\iff$ $N(A)=0$. Claramente $N(A)$ contiene a todos los ideales nilpotentes de A.

Proposición 1.2.

$N(A)$ es un nilideal.

Dem.

Para que $N(A)$ sea un nilideal necesitamos ver que todo elemento de $N(A)$ es nilpotente. Supongamos que existe $a \in A$ tal que a no es nilpotente, consideremos un ideal $\mathfrak{p}$ máximo respecto a a^n, $a^n \notin \mathfrak{p}$ $\forall n$. En forma análoga a la del lema anterior se prueba que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo. Entonces $a \notin \mathfrak{p}$ y por lo tanto $a \notin N(A)$.

Corolario 1.3.

$N(A) \subset J(A)$

Sabemos que todo ideal máximo es primo, entonces la intersección de todos los ideales primos está contenida en la intersección de todos los ideales máximos que por definición es el radical de Jacobson.

Proposición 1.4.

Si A satisface la condición ascendente de cadena en ideales bilaterales, entonces $N(A)$ es un ideal nilpotente.

Dem.

Como A satisface la C.A.C en ideales bilaterales existe un ideal máximo nilpotente $\mathfrak{a}$ tal que $\mathfrak{a}^n = 0$ para alguna n

contenido en todo primo y por lo tanto en la intersección de todos los primos; por inducción tenemos que $\mathfrak{a} \subset N(A)$. Sólo falta ver que $N(A) \subset \mathfrak{a}$. Sabemos que $\mathfrak{a}$ es máximo entonces $A/\mathfrak{a}$ es un anillo semiprimo ya que si I es un ideal nilpotente de $A/\mathfrak{a}$ entonces es un ideal nilpotente de A que contiene a $\mathfrak{a}$ (por la correspondencia que existe entre los ideales de A y $A/\mathfrak{a}$); pero $\mathfrak{a}$ es máximo, por lo tanto $I = \mathfrak{a}$, entonces $\mathfrak{a}$ es semiprimo y $\mathfrak{a}$ es la intersección de ideales primos, $N(A) \subset \mathfrak{a}$ por consiguiente $\mathfrak{a} = N(A)$.

Ejemplos:

1. Anillos Semiprimarios

Por definición sabemos que A es semiprimario si $J(A)$ es un ideal nilpotente y $A/J(A)$ es un anillo semisimple. Sabemos que $N(A) \subset J(A)$, pero $N(A)$ contiene a cualquier nilpotente entonces $J(A) \subset N(A)$, y por el corolario tenemos $J(A) = N(A)$.

2. Anillos Conmutativos

Cuando A es conmutativo, $N(A)$ está formado por todos los elementos nilpotentes de **A**, ya que si **a** es un elemento nilpotente, entonces **Aa** es un ideal nilpotente y entonces **Aa** $\subset N(A)$.

Otra manera de ver ésto es probarlo directamente, es decir, primero ver que todos los elementos nilpotentes de **A** forman un ideal **N** y que **A/N** no tiene ningún elemento nilpotente distinto del cero.

Dem.

Si $x \in N$, claramente $ax \in N \quad \forall a \in A$. Sean $x, y \in N$ entonces existen **m** y **n** tales que $x^m = 0$, $y^n = 0$, como el anillo es conmutativo, vale el teorema del binomio, y tendremos que $(x+y)^{m+n-1}$ es una suma de múltiplos enteros de productos $x^r y^s$ donde $r+s = m+n-1$; no puede suceder que $r<m$ y $s<n$ al mismo tiempo, entonces cada uno de los productos se anula, por lo tanto $(x+y)^{m+n-1} = 0$; es decir, $x+y \in N$ luego **N** es un ideal.

Ahora sea $x \in A$ un representante de $\bar{x}$ en **A/N** Entonces $\bar{x}^n$ estará representado por x^n y $\bar{x}^n = 0$, de donde $x^n \in N$ y $(x^n)^k = 0$ para alguna $k>0$, lo cual implica que

$x \in N$ y por lo tanto $\bar{x} = 0$.

Por último podemos probar que $N = N(A)$. Para ello tomemos $a \in A$ tal que a es nilpotente. Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo, entonces $a^n = 0 \in \mathfrak{p}$ para alguna $n > 0$, por lo tanto $a \in N(A)$ y $N \subset N(A)$.

Para probar la segunda contención, supongamos que a no es nilpotente y sea $S = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a}$ es ideal de A y para $n > 0$, $a^n \notin \mathfrak{a}\}$. Entonces S es no vacío porque $0 \in S$, podemos aplicar el lema de Zorn a S, ordenando por inclusión, entonces S tiene un elemento máximo. Sea $\mathfrak{p}$ un elemento máximo de S. Debemos probar que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo. Para ello tomemos $x, y \notin \mathfrak{p}$, entonces los ideales $\mathfrak{p} + (x)$ y $\mathfrak{p} + (y)$ contienen a $\mathfrak{p}$ y por lo tanto no pertenecen a S, de aquí deducimos que

$$a^m \in \mathfrak{p} + (x)$$

$$a^n \in \mathfrak{p} + (y)$$

para algún m y n. Entonces $a^{m+n} \in \mathfrak{p} + (xy)$, es decir, el ideal $\mathfrak{p} + (xy) \notin S$, por lo tanto $xy \notin \mathfrak{p}$, de ahí que $\mathfrak{p}$ es primo y $a \notin \mathfrak{p}$, luego $a \notin N(A)$.

Ahora, probaremos que cada ideal primo contiene un ideal primo minimo de **A**.

Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de **A** y consideremos la siguente familia $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}_i$ es primo$\}$; $\mathfrak{F}$ es no vacía ya que $\mathfrak{p} \in \mathfrak{F}$. Sea T una cadena descendente de $\mathfrak{F}$ y consideremos $\bigcap_{\mathfrak{p}_i \in T} \mathfrak{p}_i$; $\bigcap_{\mathfrak{p}_i \in T} \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}$ y veremos que es primo. Sean $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ideales tales que $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \bigcap_{\mathfrak{p}_i \in T} \mathfrak{p}_i$ y supongamos que $\mathfrak{a} \not\subset \bigcap_{\mathfrak{p}_i \in T} \mathfrak{p}_i$ entonces $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}_i$ para alguna i, lo cual implica que $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}_i$. Si $\mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{p}_i$ entonces $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}_j$, por lo tanto $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}_j \ \forall \mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{p}_i$ y $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}_k \quad \forall \mathfrak{p}_k \supset \mathfrak{p}_i$, de donde $\mathfrak{b} \subset \bigcap_{\mathfrak{p}_i \in T} \mathfrak{p}_i$. Luego $\bigcap_{\mathfrak{p}_i \in T} \mathfrak{p}_i$ es primo y es mínimo.

Entonces $N(A)$ es la intersección de primos mínimos de **A**. Si **A** es noetheriano, $N(A)$ es la intersección de un número finito de ideales primos.

3. El Ideal Singular

Si **A** satisface la condición ascendente de cadena sobre anuladores derechos, entonces el ideal singular derecho $Z(A)$ es nilpotente.

Dem.

Se tiene $Z(A) = \{a \in \mathbf{A} \mid r(a)$ es un ideal esencial de $\mathbf{A}\}$. Demostraremos que la cadena ascendente $r(Z) \subset r(Z^2) \subset \ldots\ldots$ es estricta si Z no es nilpotente. Si $Z^n \neq 0$, sea $a \in Z$ tal que $Z^{n-1}a \neq 0$ y tal que tenga un anulador derecho máximo. Para cada $b \in Z$ tenemos que $r(b) \cap a\mathbf{A} \neq 0$ ya que $r(b)$ es esencial en $\mathbf{A}$. Entonces existe $c \in \mathbf{A}$ tal que $ac \neq 0$, pero $bac = 0$. Entonces $r(ba)$ es mayor que $r(a)$, pero por la forma en que escogimos a a tenemos $Z^{n-1}ba = 0$. Como $b \in Z$ es arbitrario, tenemos $Z^n a = 0$ y entonces $r(Z^{n-1}) \neq r(Z^n)$.

Tenemos entonces $Z(A) \subset N(A)$. En general no sucede que $Z(A) = N(A)$, por ejemplo, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$

Para un anillo arbitrario $\mathbf{A}$, tenemos que $N(A) \subset Z(A)$ ya que si $\mathbf{a} \in N(A)$, entonces para cualquier ideal $\mathfrak{a} \neq 0$, existe $n > 0$ tal que $\mathbf{a}^n \mathfrak{a} = 0$ pero $\mathbf{a}^{n-1} \mathfrak{a} \neq 0$ (es decir tomamos n como el mínimo entero con esa propiedad); ahora $0 \neq \mathbf{a}^{n-1} \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$ ya que $\mathfrak{a}$ es un ideal y $a^{n-1} \mathfrak{a} \subset \mathrm{Ann}(a)$ porque $a(a^{n-1} \mathfrak{a}) = 0$, entonces $\mathrm{Ann}(\mathbf{a}) \cap \mathfrak{a} \neq 0$ y $\mathrm{Ann}(\mathbf{a})$ es ideal, por lo tanto $\mathrm{Ann}(a)$ es un ideal esencial, es decir $\mathbf{a} \in Z(A)$, luego $Z(A) \supset N(A)$; de donde $Z(A) = N(A)$.

§2. Anillos de Cocientes de Cocientes de Anillos

En esta sección haremos observaciones acerca de las relaciones entre $Q_{cl}(A)$ y $Q_{cl}(A/\mathfrak{a})$ para un ideal bilateral $\mathfrak{a}$ de A. Para cada elemento $a \in A$, designaremos con $\bar{a}$ la imagen de a en $A/\mathfrak{a}$.

Definición: A es $\mathfrak{a}$-reflexivo si satisface la condición:

$$a \in A \text{ es regular} \iff \bar{a} \text{ es regular en } A/\mathfrak{a}.$$

La $\mathfrak{a}$-reflexividad tiene como consecuencia que una condición de Ore derecha para A sea heredada por $A/\mathfrak{a}$. En efecto, si A satisface dicha condición entonces para a, $s \in A$, tal que s es regular, existen b, $t \in A$ con t regular tales que $at = sb$. Sean $\bar{a}$ y $\bar{s} \in A/\mathfrak{a}$, $\bar{s}$ regular; sean a, s representantes de dichas clases, entonces existen b, t en A con t regular tales que $at = sb$, de donde $\bar{a}\bar{t} = \bar{s}\bar{b}$.

Proposición 2.1

Si $Q_{cl}(A)$ existe y A es $\mathfrak{a}$-reflexivo, entonces:

(i) $Q_{cl}(A/\mathfrak{a})$ existe.

(ii) $\mathfrak{a}\, Q_{cl}(A)$ es un ideal bilateral de $Q_{cl}(A)$

(iii) $Q_{cl}(A/\mathfrak{a}) \cong Q_{cl}(A)/\mathfrak{a}\, Q_{cl}(A)$

Dem.

(i) Sabemos que $Q_{cl}(A)$ existe $\Longleftrightarrow$ A satisface la condición derecha de Ore, es decir, $Q_{cl}(A/\mathfrak{a})$ existe $\Leftrightarrow$ $A/\mathfrak{a}$ satisface la condición de Ore derecha; pero si A es $\mathfrak{a}$-reflexivo entonces $A/\mathfrak{a}$ hereda la condición y por lo tanto $Q_{cl}(A/\mathfrak{a})$ existe.

(ii) Consideremos la siguiente función

$$\varphi : Q_{cl}(A) \longrightarrow Q_{cl}(A/\mathfrak{a})$$
$$\varphi(as^{-1}) = \bar{a}\,(\bar{s})^{-1} = \bar{a}\,\bar{s}^{-1}$$

Veremos que φ es un morfismo de anillos.

$$\varphi(as^{-1}+bt^{-1}) = \overline{as^{-1}+bt^{-1}} = \overline{as^{-1}} + \overline{bt^{-1}} = \bar{a}\,\bar{s}^{-1} + \bar{b}\,\bar{t}^{-1} =$$
$$= \varphi(as^{-1}) + \varphi(bt^{-1})$$

$$\varphi((as^{-1})\cdot(bt^{-1})) = \overline{as^{-1}\,bt^{-1}} = \overline{as^{-1}}\;\overline{bt^{-1}} = \bar{a}\,\bar{s}^{-1}\,\bar{b}\,\bar{t}^{-1} =$$
$$= \varphi(as^{-1})\,\varphi(bt^{-1}) \quad , \quad as^{-1} \text{ y } bt^{-1} \in Q_{cl}(A)$$

φ es claramente suprayectiva ya que $\bar{a}\,\bar{s}^{-1} = \bar{a}\,\bar{s}^{-1} = \varphi(as^{-1})$

Sólo falta ver que $\operatorname{Ker}\varphi = \mathfrak{a}\, Q_{cl}(A)$. Un elemento en $\mathfrak{a}\, Q_{cl}(A)$ es de la forma $\sum a\, b_a$, $b_a \in Q_{cl}(A)$

tal que $ba = 0 \ \forall a$. Demostremos primero que $\operatorname{Ker}\varphi \subset \mathfrak{a} Q_{cl}(A)$.
Sea $as^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi$, entonces $\varphi(as^{-1}) = \bar{0} = \bar{a}\,\bar{s}^{-1} \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{0}$.
De donde $\operatorname{Ker}\varphi \subset \mathfrak{a} Q_{cl}(A)$. Ahora, sea $\sum_{a\in\mathfrak{a}} a b_a$, $b_a \in Q_{cl}(A)$, $\varphi(\sum a b_a) = \sum \varphi(a b_a) = \sum \varphi(axs^{-1}) = \sum \overline{axs^{-1}} = \sum \bar{a}\,\bar{x}\,\bar{s}^{-1} = 0$, luego $\mathfrak{a} Q_{cl}(A) \subset \operatorname{Ker}\varphi$, entonces $\operatorname{Ker}\varphi = \mathfrak{a} Q_{cl}(A)$

Para poder llevar una condición de Ore de $A/\mathfrak{a}$ a A, necesitamos tener algunas condiciones para $\mathfrak{a}$.

Definición: Decimos que A es **$\mathfrak{a}$-quorite** si, dada $a \in \mathfrak{a}$ y s regular en A, existen $b \in \mathfrak{a}$ y t regular en A tales que $at = sb$.

Proposición: 2.2

Si A es $\mathfrak{a}$-reflexivo y $\mathfrak{a}$-quorite, y si $Q_{cl}(A/\mathfrak{a})$ existe, entonces $Q_{cl}(A)$ existe.

Dem.

Consideremos elementos $a, s \in A$ con s regular. Como A es $\mathfrak{a}$-quorite, sólo falta ver el caso $a \notin \mathfrak{a}$.
$A/\mathfrak{a}$ satisface la condición de Ore, entonces existen

$b, t \in A$ tales que $at - sb = c \in \mathfrak{a}$ con t regular. Ya que A es $\mathfrak{a}$-quorida, podemos escribir $cu = sd$ para alguna $d \in \mathfrak{a}$ y u regular en A. Entonces $(at - sb)u = sd$ $\Rightarrow atu - sbu = sd \Rightarrow atu = s(d + bu)$, de donde a y s satisfacen la condición de Ore, por lo tanto $Q_{cl}(A)$ existe.

Ejemplos:

1. $J(A)$-reflexividad

Es de particular interés determinar condiciónes para que A sea $J(A)$-reflexivo, donde $J(A)$ es el radical de Jacobson de A. Por ejemplo:

Proposición 2.3.

Cada anillo perfecto A es $J(A)$-reflexivo

Dem.

Entonces como $\mathbf{A}$ es perfecto izquierdo, satisface la condición descendente de cadena sobre ideales principales derechos.

Lema 2.5

Supongamos que $\mathbf{A}$ satisface la condición descendente de cadena en ideales principales derechos. Entonces, para $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, son equivalentes:

(a) $\mathbf{a}$ es invertible

(b) $\mathbf{a}$ es regular

(c) $r(\mathbf{a}) = 0$

Dem.

(a) $\Rightarrow$ (b) Trivial.

(b) $\Rightarrow$ (c) Trivial.

(c) $\Rightarrow$ (a)

Supongamos que $\mathbf{a}$ satisface (c) y consideremos una cadena descendente de ideales derechos $\mathbf{a}\mathbf{A} \supset \mathbf{a}^2\mathbf{A} \supset \dots$. Por hipótesis tenemos que $\mathbf{a}^n\mathbf{A} = \mathbf{a}^{n+1}\mathbf{A}$ para alguna n. Entonces $a^n = a^{n+1}b$ para alguna $b \in \mathbf{A}$, y $a^n(1-ab) = 0$, de donde $1 = ab$. También tenemos

$aba = 1a = a$, entonces $aba - a = 0 \iff a(ba-1) = 0 \iff$ $ba = 1$ porque $r(a) = 0$. Lo cual termina la demostración.

Ahora probemos la Proposición 2.5.. Si A es perfecto y tomamos un elemento regular en A, éste es invertible por el lema , entonces $\bar{a}$ es regular en $A/J(A)$. Inversamente, sea $\bar{a}$ regular en $A/J(A)$, $\bar{a}$ es invertible, por lo tanto existe $b \in A$ tal que $ab - 1 \in J(A)$. Como $J(A)$ es un nilideal, $(ab-1)^n = 0$ para alguna n, entonces $ac = 1$ para alguna $c \in A$. Ahora $r(c) = 0$, luego c es invertible y por lo tanto a también lo es.

2. Anillos Conmutativos Noetherianos

Proposición 2.6.

Un anillo conmutativo noetheriano A es $N(A)$ reflexivo, si y sólo si, todos los ideales primos en $Ass(A)$ son ideales primos mínimos.

Dem.

Recordemos que Ass(A) es el conjunto de todos los ideales primos asociados a $\mathbf{A}$. Si $\mathbf{A}$ es un anillo, decimos que un ideal bilateral $\mathfrak{a}$ es asociado a $\mathbf{A}$ si existe un ideal $\mathbf{L} \neq 0$ de $\mathbf{A}$ tal que $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}(\mathbf{L}')$ para todo $0 \neq \mathbf{L}' \subset \mathbf{L}$ ideal de $\mathbf{A}$. Además el ideal $\mathfrak{a}$ debe ser primo, ya que si $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ son ideales de $\mathbf{A}$ tales que $\mathfrak{b}\mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b} \not\subset \mathfrak{a}$, entonces $\mathbf{L}\mathfrak{b} \neq 0$ debido a que si $\mathbf{L}\mathfrak{b} = 0$ implica $\mathfrak{b} \subset \mathrm{Ann}(\mathbf{L}) = \mathfrak{a}$ lo cual es una contradicción. También tenemos que $\mathfrak{c} \subset \mathrm{Ann}(\mathbf{L}\mathfrak{b})$ porque $(\mathbf{L}\mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathbf{L}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) \subset \mathbf{L}\mathfrak{a} = 0$. $\mathfrak{c} \subset \mathrm{Ann}(\mathbf{L}\mathfrak{b}) = \mathrm{Ann}\,\mathbf{L} = \mathfrak{a}$ ya que $\mathbf{L}\mathfrak{b} \subset \mathbf{L}$.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que Ass$(\mathbf{A})$ consiste de todos los ideales primos mínimos $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$, entonces $N(A) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$. Si $\mathbf{a}$ es regular en $\mathbf{A}$, $\mathbf{a} \notin \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n$ porque $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$ y $N(A)$ consta de todos los elementos nilpotentes. Luego, si $\mathbf{ab} \in N(A)$ entonces $b \in N(A)$, por lo tanto $\bar{a}$ es regular en $A/N(A)$.

Por otro lado, si $\mathbf{a} \in \mathfrak{p}_i$ y tomamos $\mathbf{b} \in \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$ tal que $b \notin \mathfrak{p}_i$, entonces $ab \in N(A)$, por lo tanto $\bar{a}$ es divisor del cero. Si $\bar{a}$ es regular, $a \notin \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ y a es regular en A.

$\Rightarrow$)) Supongamos que hay un ideal primo $\mathfrak{q}$ en $\mathrm{Ass}(A)$ que no es mínimo. Sea $a \in \mathfrak{q}$ tal que a no pertenece a ningún ideal primo; como $\mathfrak{q} = \mathrm{Ann}(L')$, $\forall\, 0 \neq L' \subset L$ ideal de A, entonces $\forall\, l' \in L'$, $al' = 0$; por lo tanto a no es regular en A, y si $ab \in N(A)$, b pertenece a todos los ideales primos mínimos, por lo tanto $b \in N(A)$ y A no sería $N(A)$ reflexivo.

§3. Ordenes en un Anillo Semiprimario.

El resultado siguiente, debido a Robson, caracteriza aquellos anillos que son órdenes derechos en anillos semiprimarios.

Proposición 3.1.

A tiene un anillo clásico de cocientes semiprimario $\Longleftrightarrow$ A satisface las siguientes condiciones:

(1) A es $N(A)$ reflexivo y $N(A)$-quorite.

(2) $N(A)$ es un ideal nilpotente

(3) El anillo $A/N(A)$ es de rango finito derecho y satisface la condición ascendente de cadena en anuladores derechos.

Dem.

($\Leftarrow$) Supongamos que A satisface las condiciones (1) a (3). La condición (3) y el Teorema de Goldie implican que $A/N(A)$ tiene un anillo clásico de cocientes derecho semisimple, al cual

designaremos con $\overline{Q}$. Por la proposición 2.2, sabemos que $Q = Q_{cl}(A)$ existe y $\overline{Q} \cong Q/N(A)Q$.
Como $\overline{Q}$ es semisimple, $N(A)Q$ es un ideal semiprimo, por lo tanto $N(Q) \subset N(A)Q$. Si demostramos que $N(A)Q$ es nilpotente tendremos que $N(A)Q = N(Q)$, luego $Q/N(Q)$ será semisimple.
Cada elemento de $(N(A)Q)^2$ es una suma de elementos de la forma $as^{-1}bt^{-1}$, $a, b \in N(A)$ y s, t regulares en A. Como A es $N(A)$-quorite, existen $c \in N(A)$ y u regular en A tales que $bu = sc$. Entonces $as^{-1}bt^{-1} = ac(tu)^{-1} \in N(A)^2Q$; por lo tanto $(N(A)Q)^2 \subset N(A)^2Q$, y por inducción obtenemos que $(N(A)Q)^n \subset N(A)^nQ$, de donde $N(A)Q$ es nilpotente.

Para poder afirmar que Q es semiprimario sólo falta probar que $J(Q) = N(Q)$.
Sabemos que $N(Q) \subset J(Q)$, entonces existe un epimorfismo $\alpha: Q/N \twoheadrightarrow Q/J(Q)$, por lo tanto $Q/J(Q)$ es semisimple. $\operatorname{Ker}\alpha = J(Q)/N(Q)$

que es sumando directo de $Q/N(Q)$, por lo tanto existe $K/N(Q)$ tal que $Q/N(Q) = J(Q)/N(Q) \oplus K/N(Q)$, de donde $Q = J(Q) + K$; por el lema de Nakayama $J(Q)$ es pequeño, entonces $K = Q$, así $J(Q) = N(Q)$.

$\Rightarrow$)

Supongamos ahora que A tiene un anillo de cocientes semi-primario derecho Q. Entonces $N(Q) = J(Q)$ es un ideal nilpotente de Q, por lo tanto $N(Q) \cap A \subset N(A)$ y Q es $N(Q)$-reflexivo por la propiedad 2.6. Demostramos ahora que A es $(N(Q) \cap A)$ reflexivo. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & A/(N(Q) \cap A) \arrow[d] \\ Q \arrow[r] & Q/N(Q) \end{tikzcd}$$

Es suficiente mostrar que $\bar{a}$ es regular en $A/N(Q) \cap A$ $\Leftrightarrow$ $\bar{a}$ es regular en $Q/N(Q)$.

Supongamos que $\bar{a}$ es regular en $A/(N(Q) \cap A)$ y $aq \in N(Q)$ para alguna $q = bs^{-1} \in Q$, entonces $abs^{-1} \in N(Q)$ por lo tanto $ab \in N(Q) \cap A$, luego

$ab + N(Q) \cap A = \bar{0}$, $b + N(Q) \cap A = \bar{0}$, de donde $b \in N(Q) \cap A$; $q = bs^{-1} \in N(Q)$ lo cual implica que $a + N(Q)$ es regular por el lema 2.5. Recíprocamente, si $a \in A$ y $\bar{a}$ es regular en $Q/N(Q)$ entonces $\bar{a}$ es regular en el subanillo $A/N(Q \cap A)$. En efecto, si $a \in A$, $a + N(Q) \cap A$ es regular en $A/N(Q) \cap A$, entonces $a + N(Q)$ es regular en $Q/N(Q)$ y por lo tanto a es regular en Q, de donde a es regular en A. Ahora supongamos que a es regular en A, $bs^{-1} \in Q$ y son tales que $abs^{-1} = 0$, entonces $ab = 0$, lo cual implica $b = 0$ y por lo tanto $bs^{-1} = 0$. Por consiguiente a es regular en Q, $a + N(Q)$ es regular en $Q/N(Q)$ y $a + N(Q) \cap A$ es regular en $A/N(Q) \cap A$. De aquí concluimos que A es $(N(Q) \cap A)$-reflexivo.

Observemos que si tomamos $as^{-1} + N(Q)$ con $a, s \in A$, s regular, como sabemos que $s + N(Q) \cap A$ es regular $\Longleftrightarrow$ $s + N(Q)$ es regular, entonces

$as^{-1} + N(Q) = (a + N(Q)) + (s^{-1} + N(Q)) = (a + N(Q))(s + N(Q))^{-1} =$

$(a + N(Q) \cap A)(s + N(Q) \cap A)^{-1}$ ya que $(s + N(Q))(s^{-1} + N(Q)) = \bar{1}$.

Entonces vemos que en particular el anillo semisimple $Q/N(Q)$ es un anillo clásico de cocientes de $A/N(Q)\cap A$. Entonces por el teorema de Goldie tenemos que $A/N(Q)\cap A)$ es de rango finito derecho, y satisface la condición ascendente de cadena sobre anuladores derechos y es además semiprimo.

Como es semiprimo $N(A)\subset N(Q)\cap A$ por lo tanto $N(Q)\cap A = N(A)$. Sólo resta demostrar que A es $N(A)$-quorite Sea $a\in N(A)$, s regular en A, entonces existen $c\in A$ y u regular en A tales que $au = sc$. Por lo tanto $\overline{au} = \overline{sc} = \bar{s}\,\bar{c} = \bar{0}$ porque $a\in N(A)$, entonces $\bar{s}\bar{c} = \bar{0}$ pero s es regular en A, por lo tanto $\bar{c} = \bar{0}$, de donde $c\in N(A)$ y A es $N(A)$-quorite

Corolario 3.2.

Si A es un orden derecho en un anillo semiprimario, entonces $N(A) = A\cap N(Q)$.

Dem.

Es una parte de la prueba del teorema anterior.

Ejemplos:

1. Anillo Clásico de Cocientes Artiniano.

Q_{cl} es noetheriano derecho $\Leftrightarrow$ la latiz de ideales derechos saturados de **A** es noetheriano. Entonces un anillo **A** tiene anillo clásico de cocientes derecho artiniano $\Leftrightarrow$ **A** satisface las condiciones (1), (2) y (3) de la proposición 5.1 más la condición (4) **A** satisface la condición ascendente de cadena sobre ideales saturados derechos.

2. Anillos Noetherianos.

Cuando **A** es noetheriano derecho, las condiciones (2), (3), (4), se satisfacen automáticamente, entonces **A** tiene un anillo clásico de cocientes artiniano $\Leftrightarrow$ **A** es N(A) reflexivo y N(A) quorite

Hasta ahora sólo podemos concluir que si **A** es conmutativo y noetheriano, entonces $Q_{cl}(A)$ es artiniano $\Leftrightarrow$ **A** es N(A) reflexivo, es decir todos los ideales primos en Ass(**A**) son mínimos.

§ 4. Ordenes Noetherianos en un Anillo Artiniano

A lo largo de esta sección supondremos que A es un anillo noetheriano derecho. Entonces $A/N(A)$ es un anillo semiprimo, noetheriano derecho, semi simple derecho. Para cada subconjunto S (o elementos) de A, denotaremos con $\overline{S}$ (o $\overline{s}$) su imagen en $A/N(A)$.

Definición. Un subconjunto S de A es PRERREGULAR si satisface:

(1) S es multiplicativamente cerrado (multiplicativo)

(2) $r(s)=0$ para cada $s \in S$.

(3) $\overline{S} = \{\overline{s} \in A/N(A) \mid \overline{s}$ es regular$\}$.

Lema 4.1.

Sea S un subconjunto prerregular de A. Si $a \in \ell(N(A)) \cap N(A)$ y $s \in S$ entonces existen $t \in S$ y $b \in A$ tales que $at = sb$.

Dem.

Sea $a \in \ell(N(A))$ entonces $N(A) \subset (sA : a)$. Para encontrar $t \in (sA : a) \cap S$, es suficiente, por la propiedad (3) de conjuntos prerregulares demostrar que $(sA:a)/N(A)$ contiene elementos regulares. Por el teorema de Goldie esto es equivalente a probar que $(sA:a)/N(A)$ es esencial en $A/N(A)$. Para ello, sea $\mathfrak{a}$ un ideal derecho de A tal que $\mathfrak{a} \not\subset N(A)$, debemos probar que $\mathfrak{a} \cap (sA:a) \not\subset N(A)$. Si $a\mathfrak{a}=0$, entonces $\mathfrak{a} \subset (sA:a)$, por lo tanto $\mathfrak{a} \cap (sA:a) = \mathfrak{a} \not\subset N(A)$. Si $a\mathfrak{a} \neq 0$, A tiene rango finito derecho y $r(s)=0$ entonces sA es un ideal esencial derecho. En efecto, sea $\mathfrak{a}$ un ideal derecho tal que $sA \cap \mathfrak{a} = 0$, veremos que $\mathfrak{a}=0$. Supongamos que $\mathfrak{a} \neq 0$, entonces podemos obtener una suma directa de la forma

$\mathfrak{a} \oplus s\mathfrak{a} \oplus s^2\mathfrak{a} \oplus \cdots \oplus s^n\mathfrak{a} \oplus \cdots\cdots$ en A donde

$s^i\mathfrak{a} \neq 0 \quad \forall i=0,1,\ldots$ porque $r(s)=0$. Además

si $l \in s^n\mathfrak{a} \cap \sum_{i=0}^{n-1} s^i\mathfrak{a}$, $l = s^n x = \sum_{i=0}^{n-1} s^i y_i$ con $x, y_i \in \mathfrak{a}$ $i=0,\ldots,n-1$, entonces $y_0 = s^n x - s y_1 - \cdots - s^{n-1} y_{n-1} = s(s^{n-1}x - y_1 - \cdots - s^{n-2} y_{n-1})$, pero $y_0 \in \mathfrak{a}$ y $s(s^{n-1}x - y_1 - \cdots - s^{n-2}y_{n-1})$ es elemento de sA y $\mathfrak{a} \cap sA = 0$; por lo tanto $y_0 = 0 = s^{n-1}x - y_1 - \cdots - s^{n-2}y_{n-1}$, por inducción $y_0 = y_1 = \cdots = x = 0$.

Entonces $\mathfrak{a} \oplus s\mathfrak{a} \oplus \cdots \oplus s^n\mathfrak{a} \oplus \cdots\cdots \subset A$!. Luego $\mathfrak{a}=0$

Por lo tanto sA es un ideal esencial en A y entonces $sA \cap \mathfrak{a} \neq 0$. En consecuencia existe $c \in \mathfrak{a}$ tal que $c \in \mathfrak{a} \cap (sA:a)$ y $ac \neq 0$. Como $a \in \ell(N(A))$, entonces $c \in N(A)$, por lo tanto $\mathfrak{a} \cap (sA:a) \not\subset N(A)$. De donde $(sA:a)/N(A)$ es esencial en $A/N(A)$.

Denotaremos el anillo $A/\ell(N(A)) \cap N(A)$ con A_1, a_1 será la imagen de $a \in A$ en A_1. Análogamente escribiremos S_1 para la imagen de $S \subset A$ en A_1. El radical primo de A_1 será $N(A_1) = N(A)/(\ell(N(A)) \cap N(A))$ y $A_1/N(A_1) \cong A/N(A)$.

Lema 4.2.

Si S es un conjunto pierregular en A, entonces S_1 es prerregular en A_1.

Dem.

S_1 es claramente multiplicativo. La imagen de S_1 en $A_1/N(A_1) \cong A/N(A)$ es $\bar{S}$ y por lo tanto igual al conjunto de los elementos regulares de $A_1/N(A_1)$. Sólo falta verificar que $r(s_1) = 0$ para cada $s \in S$. Supongamos que $s_1 a_1 = 0$ para alguna $a \in A$. Entonces $sa \in \ell(N(A)) \cap N(A)$. Pero

$\bar{s} \in A/N(A)$ es regular, entonces $a \in N(A)$. $sa \in l(N(A))$ quiere decir $sa\,N(A)=0$, y $r(s)=0$ entonces $a\,N(A)=0$. Por lo tanto $a \in l(N(A)) \cap N(A)$ y $a_1=0$.

Proposición 4.3.

Cada subconjunto prerregular S de A es un conjunto denominador derecho.

Dem.

S es un conjunto denominador derecho cuando es multiplicativo y satisface:

S1. Si $s \in S$ y $a \in A$, existe $t \in S$ y $b \in A$ tales que $sb = at$.

S2. Si $sa=0$, $s \in S$, entonces $at=0$ para alguna $t \in S$.

La demostración la haremos por inducción sobre el índice de nilpotencia de $N(A)$.

Si $k=1$, $N(A)=0$ y el resultado es claro. Supongamos que el índice es $n+1$, entonces el índice de $N(A_1)$ es n, ya que $N(A_1)^n = (N(A/l(N(A)) \cap N(A)))^n$ $\cong (N(A)/l(N(A)) \cap N(A))^n \cong N(A)^n / l(N(A)) \cap N(A) = 0$ porque $N(A)^n \subset N(A)$ y $N(A)^n\,N(A) = N(A)^{n+1} = 0$, i.e. $N(A)^n \subset l(N(A))$, por lo tanto $N(A)^n \subset l(N(A)) \cap N(A)$.

Vemos ahora que n es el entero mínimo con esa propiedad. Sea k tal que $N(A_1)^k = 0 = N(A)^k / \ell(N(A)) \cap N(A)$ entonces $N(A)^k \subset \ell(N(A))$, eso implica que $N(A)^k \, N(A) = 0 = N(A)^{k+1}$, por lo tanto $k+1 \geq n+1$, luego $k \geq n$.

Como S_1 es perregular en A_1, por hipótesis de inducción S_1 satisface el axioma **S1**. Supongamos que $a \in A$, $s \in S$, entonces existen $b \in A$, $t \in S$ tales que $a_1 t_1 = s_1 b_1$. Como $(at - sb) \in \ell(N(A)) \cap N(A)$ entonces por el lema 4.1, podemos encontrar $u \in S$, $c \in A$ tales que $(at - sb)u = sc$. De aquí que $atu - sbu = sc \Rightarrow atu = s(c + bu)$, $tu \in S$. Entonces S satisface **S1**. Como **S2.** se satisface trivialmente, S es un conjunto denominador derecho.

$A[S^{-1}]$ es claramente noetheriano derecho, entonces tiene un ideal nilpotente máximo $N(A[S^{-1}])$.

Proposición 4.4.

Si S es perregular, entonces $A[S^{-1}]$ es un anillo artiniano derecho.

Dem.

Definimos el morfismo

$$A[S^{-1}]/N(A[S^{-1}]) \xrightarrow{\phi} (A/N(A))[S^{-1}]$$

como sigue

$$\overline{as^{-1}} \xrightarrow{\phi} \bar{a}\,\bar{s}^{-1}$$

Es claro que ϕ está bien definido, y que tiene un inverso bien definido $\bar{a}\bar{s}^{-1} \longrightarrow \overline{as^{-1}}$. Entonces ϕ es un isomorfismo. Sabemos que $A/N(A)$ es un anillo semiprimo noetheriano derecho y $\bar{S}$ es el conjunto de todos sus elementos regulares, entonces $A/N(A)[S^{-1}]$ es el anillo clásico de cocientes de $A/N(A)$ y por el teorema de Goldie es semisimple. Afirmamos que:

$N(A[S^{-1}]) = J(A[S^{-1}])$; en efecto, como $N = N(A[S^{-1}]) \subset J(A[S^{-1}]) = J$ existe un epimorfismo $\beta : A[S^{-1}]/N \twoheadrightarrow A[S^{-1}]/J$ por lo tanto $A[S^{-1}]/J$ es semisimple. $\ker\beta = J/N$ es sumando directo de $A[S^{-1}]/N$, entonces existe K/N tal que $A[S^{-1}]/N = J/N \oplus K/N$, por lo tanto

$A[S^{-1}] = J + K$, de donde $K = A[S^{-1}]$ (porque J es pequeño), así que $J = N$. De aquí podemos afirmar que $A[S^{-1}]$ es un anillo noetheriano semiprimario derecho. Por el teorema de Hopkins **A** es artiniano derecho.

Definición: Decimos que **A** satisface la condición de regularidad si cada elemento $a \in A$ para el cual $\bar{a} \in A/N(A)$ es regular, es también regular.

Teorema 4.5.

Si **A** es un anillo noetheriano derecho que satisface la condición de regularidad, entonces **A** tiene un anillo clásico de cocientes derecho que es artiniano derecho.

Dem.

Si A es un anillo noetheriano derecho con la propiedad antes mencionada y $S = \{a \in A \mid \bar{a} \in A/N(A)$ es regular$\}$, entonces S consiste de elementos regulares y por lo tanto es prerregular. Luego $A[S^{-1}]$ existe y es artiniano. Sólo basta demostrar que $A[S^{-1}] = Q_{cl}(A)$. Cada elemento de $A[S^{-1}]$ tiene la forma as^{-1} con $a \in A$ y $s \in S$, s regular. Entonces hay que mostrar que cada elemento regular $a \in A$ es invertible en $A[S^{-1}]$. Supongamos que $aq = 0$ para alguna $q \in A[S^{-1}]$, entonces $q = bs^{-1}$ con $b \in A$, $s \in S$, luego $abs^{-1} = 0$, de donde $ab = 0$ y por lo tanto $b = 0$. De esta manera vemos que el anulador derecho de a en $A[S^{-1}]$ es cero y por el lema 2.5 a es invertible.

Ejemplos

1. Ordenes Hereditarios.

Proposición 4.6

Cada anillo hereditario derecho y noetheriano derecho es un orden derecho en un anillo artiniano derecho.

Dem.

Verificamos la condición de regularidad. Supongamos que $a \in A$, $\bar{a} \in A/N(A)$ es regular. La sucesión exacta $0 \longrightarrow r(a) \longrightarrow A \longrightarrow aA \longrightarrow 0$ se escinde, entonces $r(a) = eA$ para algún idempotente e Pero $\bar{a}$ regular implica que $e \in N(A)$, entonces $r(a) = eA = 0$. Como aA es un ideal esencial derecho de A (Lema 4.1) y A es nosingular derecho, entonces $l(a) = 0$ y por lo tanto **a** es regular.

2. Algebras Finitamente Generadas.

Sea R un anillo conmutativo que tiene un anillo clásico de cocientes artiniano $Q(R)$. Sea A un R-algebra. Supongamos que A es finitamente generado y libre de torsión como R-módulo. Entonces podemos sumergir A como un submódulo de $A\otimes_R Q(R)$. $A\otimes_R Q(R)$ es un $Q(R)$-álgebra con la multiplicación dada por $(a\otimes s^{-1})(b\otimes t^{-1}) = ab\otimes s^{-1}t^{-1}$.
$A\otimes_R Q(R)$ es finitamente generado como $Q(R)$-módulo entonces es un anillo artiniano. Es además el anillo clásico de cocientes de A porque para cada $a\otimes s^{-1} \in A\otimes_R Q(R)$ tenemos:

$$(a\otimes s^{-1})(s\otimes 1) = as\otimes s^{-1} = a\otimes ss^{-1} = a\otimes 1$$

entonces, $a\otimes s^{-1} = (a\otimes 1)(s\otimes 1)^{-1} = as^{-1}$, cuando identificamos A con su imagen en $A\otimes_R Q(R)$, y s no es divisor de cero en A porque A es libre de torsión en R.
Ahora, si $a\in A$ es regular demostraremos que tiene inverso en $A\otimes_R Q(R)$. Sea $q\otimes s^{-1}$ tal que

$$(a\otimes 1)(q\otimes s^{-1}) = 0 = aq\otimes s^{-1} = aq\otimes 1$$

Sea ϕ el monomorfismo

$$\phi : A \longrightarrow A \otimes_R Q(R)$$
$$a \longrightarrow a \otimes 1$$

entonces

$0 = aq \otimes 1 = \phi(aq)$, de donde $aq = 0$, luego $q = 0$
y por lo tanto $q \otimes s^{-1} = 0$.

De esta manera hemos probado:

Proposición 4.7.

Si $\mathbf{R}$ es un anillo conmutativo con anillo clásico de cocientes $Q(R)$, $\mathbf{A}$ es un $\mathbf{R}$-álgebra finitamente generada y libre de torsión, entonces $\mathbf{A \otimes_R Q(R)}$ es un anillo clásico de cocientes de $\mathbf{A}$ derecho e izquierdo artiniano.

Como ilustración de este resultado podemos tomar un grupo finito $\mathbf{G}$ y $\mathbf{R}$ un anillo conmutativo con anillo clásico de cocientes artiniano Q. El anillo de grupo $R[G]$ es finitamente generado y libre de torsión sobre $\mathbf{R}$. $R[G]$ es un orden en el anillo artiniano $Q[G]$.

§.5. Ordenes en Anillos Autoinyectivos

Tres resultados conocidos son:

Teorema $\mathcal{L}$:

Cuando **A** es un anillo autoinyectivo, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) **A** es un anillo derecho de Kasch.

(b) **A** es un cogenerador inyectivo para **A-Mod**.

(c) $r(\ell(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$ para cada ideal derecho $\mathfrak{a}$.

Teorema $\mathfrak{M}$:

Son equivalentes

(a) Q_{max} es un anillo autoinyectivo derecho.

(b) $Q_{max} \cong E(A)$.

(c) Cada ideal derecho $(A : x)$ es denso en **A** para cada $x \in E(A)$.

(d) Para cada ideal derecho $\mathfrak{a}$ de **A** y cada homomorfismo $\alpha : \mathfrak{a} \longrightarrow A$, existe un ideal derecho denso $\mathfrak{b}$ y un homomorfismo $\beta : \mathfrak{b} \longrightarrow A$ t.q. $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ y $\beta|\mathfrak{a} = \alpha$.

(e) Existe un isomorfismo de anillos $\mu: H \to Q_{max}$ tal que $\eta\mu(h) = h(1)$, $\eta: Q_{max} \to E(A)$ inmersión.

Teorema $\mathfrak{J}$:

Si Q_{max} es un anillo autoinyectivo derecho. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) Q_{max} es un anillo casi-Frobenius.

(b) La latiz $Sat_{\mathfrak{D}}(A)$ es noetheriana

(c) Para cada ideal derecho $\mathfrak{a}$ de A existe un ideal derecho finitamente generado $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ tal que

$\ell(\mathfrak{b} : a) = 0 \quad \forall a \in \mathfrak{a}$.

d) A satisface la condición ascendente de cadena sobre anuladores de subconjuntos de $E(A)$.

De esta manera, si **A** tiene un anillo clásico de cocientes derecho autoinyectivo, entonces $Q_{cl}(A) = Q_{max}(A)$ y este anillo coincide con el módulo **E(A)**. Una condición para que esto suceda es que para cada $x \in E(A)$, el ideal derecho $(A : x) = \{a \in A \mid xa \in A\}$ contiene un elemento regular. Una reformulación de esta condición puede ser dada en términos de la familia $\mathcal{J}^{l}$ de ideales derechos $\mathfrak{a}$ para los cuales existe un homomorfismo $\mathfrak{a} \longrightarrow A$ que no puede ser extendido a ideales derechos que contienen propiamente a $\mathfrak{a}$.

Lema 5.1

Si $\mathfrak{a} \in \mathcal{J}^{l}$, entonces existe $x \in E(A)$ tal que $\mathfrak{a} = (A : x)$

Dem.

Sea $\alpha : \mathfrak{a} \longrightarrow A$ un homomorfismo que no puede extenderse a ideales derechos que contienen propiamente a $\mathfrak{a}$. Por la propiedad de $\mathfrak{a}$ de ser máximo tenemos $\mathfrak{a} = \{a \in A \mid xa \in A\}$.

Proposición 5.2.

Las siguientes condiciones son equivalentes:

a) Para cada $x \in E(A)$ existe un elemento regular $s \in A$ tal que $xs \in A$.

b) Cada $\mathfrak{a} \in \mathcal{J}'$ contiene un elemento regular.

Dem.

(a) => (b)

Sea $\mathfrak{a} \in \mathcal{J}'$, por el lema existe $x \in E(A)$ tal que $\mathfrak{a} = (A:x)$, por (a) existe un elemento regular $s \in A$ tal que $xs \in A$, es decir $\mathfrak{a}$ contiene un elemento regular.

(b) => (a)

Probaremos antes el siguiente:

Lema 5.3

Q_{max} es un anillo autoinyectivo derecho, sí y solo sí, $l(\mathfrak{a}) = 0$ para cada $\mathfrak{a} \in \mathcal{J}'$.

Dem.

=>)

Si Q_{max} es autoinyectivo derecho entonces para cada ideal derecho $\mathfrak{a}$ de A y cada homomorfismo $\alpha: \mathfrak{a} \longrightarrow A$ existe un ideal derecho denso $\mathfrak{b}$ y un homomorfismo $\beta : \mathfrak{b} \to A$ tal que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ y $\beta|\mathfrak{a} = \alpha$. Entonces cada $\mathfrak{a} \in \mathcal{H}$ es un ideal derecho denso y por lo tanto $l(\mathfrak{a}) = 0$.

$\Leftarrow$)

Recíprocamente, si $l(\mathfrak{a}) = 0$ $\forall \mathfrak{a} \in \mathcal{H}$. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal derecho arbitrario de A, con un homomorfismo $\alpha : \mathfrak{a} \to A$. Por el lema de Zorn hay un homomorfismo $\beta : \mathfrak{b} \to A$ t.q. $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, β extiende a α y es máximo. Entonces $\mathfrak{b} \in \mathcal{H}$ y $l(\mathfrak{b}) = 0$. Es suficiente probar que $\mathfrak{b}$ es denso. Sea $a \in A$. Debemos mostrar que $(\mathfrak{b} : a)$ tiene anulador izquierdo nulo y para ello vemos que $(\mathfrak{b} : a) \in \mathcal{H}$. Definimos $\varphi : (\mathfrak{b} : a) \longrightarrow A$ como $\varphi(c) = \beta(ac)$, demostramos ahora que φ no puede ser extendido. Supongamos que existe un ideal derecho $\mathfrak{c} \supsetneq (\mathfrak{b} : a)$ y $\psi : \mathfrak{c} \to A$ es una extensión de φ. Sea $\gamma : \mathfrak{b} + a\mathfrak{c} \longrightarrow A$ tal que $\gamma(b + ac) = \beta(b) + \psi(c)$, esto es posible porque $b + ac = 0 \Rightarrow c \in (\mathfrak{b} : a)$, entonces $\psi(c) = \varphi(c) = \beta(ac)$, por lo tanto $\gamma(b + ac) = \beta(b) + \beta(ac) = 0$. Entonces γ es una extensión de β. Como existe $c \in \mathfrak{c}$ tal que $ac \notin \mathfrak{b}$, tenemos $\mathfrak{b} \subsetneq \mathfrak{b} + a\mathfrak{b}$! porque β era máximo.

Por este lema podemos concluir que Q_{max} es auto inyectivo derecho. Por lo tanto para cada $x \in E(A)$ tenemos que $(A:x)$ es un ideal denso derecho. Como cada $\mathfrak{a} \in \mathcal{J}'$ contiene elementos regulares, es suficiente probar que $(A:x) \in \mathcal{J}'$. Si $(A:x) \notin \mathcal{J}'$, el homomorfismo $\alpha : (A:x) \longrightarrow A$, dado por $\alpha(a) = xa$ puede ser extendido a $\alpha' : \mathfrak{b} \longrightarrow A$ para algún ideal derecho $\mathfrak{b} \supsetneq (A:x)$. Entonces existe $y \in E(A)$ tal que $\alpha'(b) = yb \quad \forall b \in \mathfrak{b}$. De esta manera $(x-y)a = 0$ $\forall a \in (A:x)$, de donde $x - y = 0 \therefore x = y$. Esto contradice el hecho $\mathfrak{b} \neq (A:x)$, luego $(A:x) \in \mathcal{J}'$.

Proposición 5.4.

Las siguientes propiedades de **A** son equivalentes:

(a) A es de rango derecho finito, y cada $\mathfrak{a} \in \mathcal{J}'$ contiene un elemento regular.

(b) Q_{cl} existe y es un anillo autoinyectivo, semiperfecto derecho.

Dem.

b) $\Rightarrow$ a)

Si Q_{cl} existe y es un anillo autoinyectivo entonces $Q_{cl} = Q_{max}$; además $Q_{cl} / J(Q_{cl})$ es semisimple y los idempotentes de Q_{cl} se levantan módulo $J(Q_{cl})$ por ser semiperfecto. A es un orden derecho de Q_{cl}, entonces por el teorema de Goldie, A es de rango finito y cada $\mathfrak{a} \in \mathcal{F}$ contiene un elemento regular por la proposición .

a) $\Rightarrow$ b)

Primero demostramos la siguiente afirmación: Supongamos que Q_{max} es un anillo auto inyectivo derecho. Entonces Q_{max} es un anillo semiperfecto $\Leftrightarrow$ A es de rango finito derecho.

En efecto, $Q_{max} \cong \mathrm{Hom}_A(E(A), E(A))$ y un módulo es de rango finito $\Leftrightarrow$ su anillo de endomorfismos no tiene una familia de idempotentes ortogonales infinita.

Así que (a) implica que Q_{max} es semiperfecto y auto inyectivo derecho. Queda por mostrar que Q_{max} es un anillo clásico de cocientes derecho de A. Para cada $q \in Q_{max}$ tenemos que $0 \neq qa \in A$ para algún regular $a \in A$, entonces falta probar que cada elemento regular $a \in A$ es invertible en Q_{max}. Sea $\varphi : Q_{max} \longrightarrow Q_{max}$ $\ni$ $\varphi(q) = aq$ $\forall q \in Q_{max}$. Como $\operatorname{Ker}\varphi \cap A = 0$ y A es esencial en Q_{max}, φ es un monomorfismo. Entonces $\operatorname{Im}\varphi$ es un submódulo inyectivo de Q_{max} y $Q_{max} = \varphi(Q_{max}) \oplus K$ para algún submódulo K. Como φ es monomorfismo, obtenemos $\varphi(Q_{max}) = \varphi^2(Q_{max}) \oplus \varphi(K)$. Por inducción tenemos $Q_{max} = \varphi^n(Q_{max}) \oplus \varphi^{n-1}(K) \oplus \ldots\ldots \oplus K$ para cada n. Como $E(A)$ es de rango finito entonces $K = 0$. Entonces φ es isomorfismo, por lo tanto a tiene inverso derecho en Q_{max}; para concluir la prueba demostramos el siguiente:

Lema 5.5

Supongamos que A no tiene familias infinitas de idempotentes ortogonales. Si $a \in A$ tiene inverso derecho entonces a es invertible.

Dem.

Supongamos que $ab = 1$ pero $ba \neq 1$. Definimos:

$$e_i = b^i a^i - b^{i+1} a^{i+1} \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots$$

Cada $e_i \neq 0$ porque, $b^i a^i = b^{i+1} a^{i+1}$ implica, $b^i a^i = a b^{i+1} a^{i+1} b = a b^i a^i b = b^{i-1} a^{i-1}$, y por inducción esto dice que $ba = 1$.

También podemos observar que,

$e_i^2 = (b^i a^i - b^{i+1} a^{i+1})(b^i a^i - b^{i+1} a^{i+1}) = b^i a^i b^i a^i - b^{i+1} a^{i+1} b^i a^i - b^i a^i b^{i+1} a^{i+1} + b^{i+1} a^{i+1} b^{i+1} a^{i+1} = b^i \cdot 1 \cdot a^i - b^{i+1} a^{i+1} - b^{i+1} a^{i+1} + b^{i+1} \cdot 1 \cdot a^{i+1} =$

$b^i a^i - b^{i+1} a^{i+1} = e_i$

$e_i \cdot e_j = (b^i a^i - b^{i+1} a^{i+1})(b^j a^j - b^{j+1} a^{j+1})$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $i < j$, i.e., $j = i + n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$e_i \cdot e_j = b^i a^i b^j a^j - b^{i+1} a^{i+1} b^j a^j - b^i a^i b^{j+1} a^{j+1} + b^{i+1} a^{i+1} b^{j+1} a^{j+1} =$

$= b^i b^n a^{i+n} - b^{i+1} b^{n-1} a^{i+n} - b^i b^{n+1} a^{i+n+1} + b^{i+1} b^n a^{i+n+1} =$

$= 0$.

Contrario a nuestra suposición. Entonces **a** es invertible. Con lo cual queda probada la proposición.

Proposición 5.6

Las siguientes propiedades son equivalentes:

a) A es de rango finito derecho con $Z_r(A)$ nilpotente y cada $\mathfrak{a} \in \mathcal{F}'$ contiene un elemento regular.

b) Q_{max} es semiprimario, autoinyectivo derecho y $Z_r(A) = N(A)$

c) Q_{cl} existe y es un anillo autoinyectivo semiprimario derecho.

Dem.

Primero notemos que $Z_r(A) = A \cap Z_r(Q_{max})$ para cualquier anillo A. Es más $Z_r(Q_{max}) = J(Q_{max})$ cuando Q_{max} es auto inyectivo.

a) $\Rightarrow$ c)

Por la propiedad 5.4, sólo queda mostrar que $J(Q_{cl})$ es nilpotente. Supongamos que $Z_r(A)^n = 0$. Si $q_1, \ldots, q_n \in J(Q_{max})$ podemos escribir $q_i = a_i s_i^{-1}$ con $a_i \in Z(Q_{max}) \cap A = Z_r(A)$ y s_i regular en A. Usando la condición de Ore obtenemos $q_1 \cdot \cdots \cdot q_n = b_1 \cdot \cdots \cdot b_n t^{-1}$, con $b_i, t \in A$, t regular. También $b_i \in Z_r(A)$ porque $at = sb$ con s regular, implica $r(b) = (r(a) : t)$. Entonces $J(Q_{max})^n = 0$.

c) $\Rightarrow$ b)

Por el corolario 3.2, $Z_r(A) = A \cap Z_r(Q_{max}) = A \cap N(Q_{max}) =$

$= N(A) \qquad \therefore\ Z_r(A) = N(A)$.

b) $\Rightarrow$ c)

Q_{max} es un anillo derecho de Kasch, además $N(A) = Z_r(A) = A \cap Z_r(Q_{max}) = A \cap N(Q_{max})$

Entonces por el teo. de Tachikawa $Q_{cl} = Q_{max}$

c) $\Rightarrow$ a)

Se sigue de la proposición 5.4, y del hecho de que $Z_r(A) \subset Z_r(Q_{cl}) = J(Q_{cl})$.

Nota: Recordemos que una condición suficiente para que $Z_r(A)$ sea nilpotente es que **A** satisfaga la condición ascendente de cadena sobre anuladores derechos.

Teorema 5.7

Las siguientes propiedades son equivalentes:

(a) **A** satisface la condición ascendente de cadena sobre anuladores de subconjuntos de **E(A)**, y cada $\alpha \in \mathcal{J}$ contiene un elemento regular.

(a') A satisface la condición ascendente de cadena sobre ideales saturados derechos, y cada $\mathfrak{a} \in \mathfrak{J}'$ contiene un elemento regular.

(b) Q_{max} es casi-Frobenius, y $Z_r(A)=N(A)$

(c) Q_{cl} existe y es un anillo casi-Frobenius.

Dem.

(a) $\Longleftrightarrow$ (a') es consecuencia del Teorema J .

(a) $\Longrightarrow$ (c)

Por el Teorema J . Q_{max} es un anillo casi-Frobenius, por la proposición 5.4 es necesario probar que cada elemento regular $a \in A$ es invertible en Q_{max} y para ésto, por el lema 2.4 , sólo hay que ver que $r(a)=0$ en Q_{max}. Supongamos que $aq=0$ para algun $q \neq 0$, $q \in Q_{max}$. Entonces existe $b \in A$ ∋. $0 \neq qb \in A$. Entonces $a(qb)=0$ ↯ porque a es regular en A.

(c) $\Longrightarrow$ (a)

Es claro del Teorema .

(b) $\Longleftrightarrow$ (c) Es consecuencia de la proposición 5.6.

§6. Anillos de Cocientes de Algebras de Grupo.

Sea K un campo y G un grupo arbitrario. El algebra de grupo G sobre K se denotará por $K[G]$. Si G es un grupo finito, $\dim(K(G)) < \infty$, entonces es artiniano y por lo tanto un anillo de cocientes. Entonces el caso interesante es cuando G es infinito.

Sea $G^* = \{g \in G \mid i_G(C(g)) < \infty\}$.

Lema 6.1.

Sea Q un anillo donde todo elemento regular es invertible y sea F un Q-módulo derecho libre finitamente generado. Entonces cada endomorfismo inyectivo de F es un isomorfismo.

Dem.

Sea $\varphi: F \to F$ monomorfismo, y $|\varphi|$ la matriz asociada a φ respecto a alguna base de F. Como φ es monomorfismo, $\det|\varphi|$ es regular en Q $\therefore$ invertible. Entonces $|\varphi|$ es invertible, es decir, φ es epimorfismo.

Teorema 6.2. (Herstein y Small)

Si G^* tiene índice finito en G, entonces $K[G]$ tiene un anillo clásico de cocientes izquierdo y derecho.

Dem.

Por simetría es suficiente verificar la condición derecha de Ore para $K[G]$. Sean $a, s \in K[G]$ con s regular. a y s son combinaciones lineales sobre K. Entonces $a, s \in K[H]$ donde H es un subgrupo finitamente generado de G. $G^* \cap H \subset H^*$ $\therefore$ H^* tiene índice finito en H. Supongamos que podemos probar que existen b y t en $K[H]$ tales que t es regular en $K[H]$ y $at = sb$. Ahora t es regular también en $K[G]$, porque $[K[G]]_{K[H]}$ es libre. Entonces la condición de Ore derecha se satisfaría por $a, s \in K[G]$.

De lo anterior podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que G es un grupo finitamente generado. Como G^* es de índice finito en G, también G^* es un grupo finitamente generado por el teorema clásico de Schreier. Sean $g_1, \ldots, g_n$ generadores de G^*. Cada $C(g_i)$ tiene índice finito en G, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} C(g_i)$ es de índice finito en G. Pero $\bigcap_{i=1}^{n} C(g_i)$ es el centro de $G^{\star}$ $\therefore$ es un subgrupo característico de $G^{\star}$. Como $G^{\star} \triangleleft G$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} C(g_i) \triangleleft G$. Por esta razón hemos reducido el problema a mostrar:

Proposición 6.3.

Si $\mathbf{G}$ es un grupo y contiene un subgrupo normal abeliano $\mathbf{N}$ de índice finito, entonces $\mathbf{K[G]}$ tiene un anillo clásico de cocientes izquierdo y derecho.

Dem.

Sea $\mathbf{S} = \{s \in K[N] \mid s \text{ es regular}\}$. $\mathbf{S}$ es un subconjunto multiplicativamente cerrado en $K[G]$, y mostraremos que $K[G]$ es un anillo derecho de fracciones con respecto a $\mathbf{S}$. Para ello verificaremos las propiedades S1 y S2.

S2 es clara puesto que antes hemos hecho notar que cada elemento regular en $K[N]$ es regular en $K[G]$. Entonces sólo falta verificar S1. Sea $\mathbf{a} \in K[G]$ y $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$. Sea $\{g_i, i=1, \dots, r \mid g_i \text{ representante de clases laterales de } \mathbf{N} \text{ en } G\} = R$

R es una base para $[K[N]]_{K[G]}$. Sea $a = g_1c_1 + \dots + g_rc_r$ con $c_i \in K[N]$ $i=1,\dots,r$, sean $s_i = g_i^{-1}sg_i$ para $i=1,\dots,r$. Como $N \triangleleft G$, cada $s_i \in K[N]$, de hecho $s_i \in S$. Como $K[N]$ es un anillo conmutativo, tenemos para $b_i = c_i \prod_{i \neq j} s_j$, $t = s_1 \dots s_r$; $c_i t = s_i b_i \; \forall i$. Sea $b = g_1 b_1 + \dots + g_r b_r$, entonces

$$at = \sum g_i c_i t = \sum g_i s_i b_i = \sum g_i g_i^{-1} s g_i b_i =$$
$$= \sum s g_i b_i = sb$$

$\therefore$ se cumple S1.

Sean $K[N]_S = (K[N])(S^{-1})$ y $K[G]_S = (K[G])(S^{-1})$. Afirmamos que $K[G]_S$ es el anillo clásico de cocientes de $K[G]$. Para probar esto, tenemos que ver que cada elemento regular $u \in K[G]_S$ es invertible en $K[G]_S$. $(K[G]_S)_{K[N]_S}$ es libre de tipo finito. Sea $u \in S$ y consideremos $\varphi_u : K[G]_S \longrightarrow K[G]_S$ $\ni \varphi_u(x) = ux$. Como u es regular, φ_u es mono. Por el lema 6.1, φ_u es epimorfismo entonces existe $y \in K[G]_S \ni uy = 1$, como u es regular $u(1-yu)=0$ $\Rightarrow yu = 1$ y entonces u es invertible en $K[G]_S$ y el teorema está demostrado.

Bibliografiá

[1] ATIYAH, M.F. y MACDONALD I.G. Introducción al álgebra conmulativa. Editorial Reverté S.A. Universidad de Oxford. 1973.

[2] CARDENAS, H. y LLUIS, E. Módulos Semisimples y representaciones de Grupos finitos. Editorial F. Trillas S.A. 1970.

[3] CARTAN, H y EILENBERG, S. Homological Algebra. Princeton University Press. Princeton, New Jersey. Princeten Mathematical Series #19, 1956.

[4] STENSTRÖM, Bo. Rings of Quotients. Springer Verlag New York Heidelberg Berlin. 1975. Grundlehrender mathematishen Wissenschaften Band 217.

[5] ROTMAN, J. Notes on Homological Algebra. Van Nostrand Reinhold C. New York. Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies. 1970.