INYECTIVIDAD EN VARIEDADES DE GRUPOS

TESIS PROFESIONAL

FRANCISCO LARRION RIVEROLL*

FACULTAD DE CIENCIAS

U.N.A.M. Febrero de 1979

*becario del Instituto de Matemáticas

Finalmente haremos un par de aclaraciones: en todo el reporte se entiende por "subcategoría", "subcategoría plena" y, si $f: X \to Y$ es una función, el núcleo de f es la relación de equivalencia $\ker f$ en X definida por

$$(x, x') \in \ker f \iff f(x) = f(x').$$

Sólo en (9.8) se interpreta $\ker f$ como es usual en Teoría de Grupos.

Teoría de Grupos, además nuestro resultado básico (ver (6·1) y (6·2)) es válido para variedades más generales que las de grupos y para enunciarlo es necesario introducir antes la notación y los conceptos requeridos.

El segundo capítulo es también introductorio: en él se hace explícita la conexión entre el Algebra Universal y la teoría de Variedades de grupos, se fijan notación y terminología y se enuncian algunos resultados que se utilizarán más tarde.

El tercer capítulo es la parte principal de este reporte y contiene los resultados mencionados al principio de esta introducción.

Como regla general damos los enunciados de todos los resultados empleados que pudieran ser poco familiares al lector no especialista. Sin embargo, por razones de brevedad omitimos, también sistemáticamente, toda demostración que pueda encontrarse en la literatura (conocida por el autor).

tenemos que si el exponente mínimo de $\mathcal{V}$ es libre de cuadrados y $\mathcal{V}_k$ es una variedad abeliana, entonces $\mathcal{V}$ tiene inyectivos no triviales y además podemos dar explícitamente todos los inyectivos abelianos de $\mathcal{V}$ (ver (9.14)); el segundo nos dice que cualquier variedad de exponente finito puede sumergirse en una variedad (de exponente finito) con inyectivos no triviales, o sea que hay "muchas" variedades de exponente finito con inyectivos no triviales (tantas como variedades de exponente finito, ver (9.15)).

Ahora unas palabras sobre la organización del material:

Nos ha parecido conveniente dar, en el primer capítulo, una introducción rápida y elemental a los conceptos de Algebra Universal que tienen que ver con lo que se hará después; esto se explica porque la teoría de Variedades de Grupos es una aplicación del Algebra Universal (en enfoque y técnicas) a la

Introducción

El presente trabajo puede verse, de alguna manera, como una continuación del artículo de O.C. García, "Injectivity in Categories of Groups and Algebras" (ver lista de referencias), en el que se demuestra para cierto número de variedades (y categorías) de grupos que éstas no poseen inyectivos no triviales.

La técnica aquí empleada es, sin embargo, diferente: se trata de estudiar la inyectividad de una variedad de grupos $\mathfrak{V}$ (de exponente finito), a partir de la información disponible sobre ciertas subvariedades importantes: las que aparecen en la descomposición de $\mathfrak{V}$ como producto de variedades inescindibles $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_2 \cdots \mathfrak{V}_k$. Desde luego, este enfoque no puede producir resultados para variedades inescindibles pero simplifica el estudio de las que no lo son: a estas últimas nos limitaremos.

Los resultados obtenidos dan dos tipos de información: como ejemplo del primero

INDICE

Quiero dedicar estas primicias de mi actividad en Matemáticas al Dr. Octavio García R., quien no sólo dirigió este trabajo, sino que durante toda mi carrera supervisó mis estudios e influyó, de manera determinante, en mi formación como matemático.

CAPITULO I

ALGEBRA UNIVERSAL

§1.- Preliminares

Un <u>tipo de álgebras</u> es una familia de ordinales finitos $\tau = (\tau_i)_{i<\lambda}$ donde λ es un ordinal.

Un <u>sistema algebraico tipo τ</u> ó <u>τ-álgebra</u> es una pareja $\mathfrak{A} = (A, (f_i)_{i<\lambda})$ donde A es un conjunto y para cada $i<\lambda$ f_i es una operación τ_i-aria en A, esto es, una función $f_i : A^{\tau_i} \to A$. (Observemos que toda operación cero-aria se caracteriza por su imagen y la podemos interpretar como un "elemento distinguido" de A.)

Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ son τ-álgebras, un <u>homomorfismo</u> (<u>τ-morfismo</u>) h de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{A}'$ (denotado por $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$) es una función $h : A \to A'$ Tal que, si $i<\lambda$:

$$h(f_i(a)) = f_i'(h \circ a)$$

para toda familia $a \in A^{\tau_i}$.

Tenemos entonces una categoría <u>τ-Alg</u> cuyos objetos son las τ-álgebras, sus morfismos son los τ-morfismos y la composición de morfismos es la composición usual de funciones.

En este capítulo mantendremos fijo el tipo $\tau = (\tau_i)_{i<\lambda}$.

Si $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ son τ-álgebras, $\mathfrak{A}$ es <u>sub-τ-álgebra</u>

de $\mathfrak{A}'$ si la inclusión $A \hookrightarrow A'$ es un τ-morfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{A}'$. Cualquier subconjunto $S \subseteq A$ <u>genera</u> una sub-τ-álgebra ΓS de $\mathfrak{A}$, que es la intersección de todas las sub-τ-álgebras de $\mathfrak{A}$ que contienen a S.

Una <u>congruencia</u> de $\mathfrak{A}$ es una relación de equivalencia en A que respeta las operaciones; equivalentemente, es el núcleo (la relación "núcleo de equivalencia") de algún τ-morfismo $h: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$. En efecto, si la relación de equivalencia $\sim \subseteq A^2$ respeta las operaciones, hay una única estructura tipo τ en $A/\sim$ tal que la proyección natural $A \to A/\sim$ es τ-morfismo.

Si $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ es una familia de τ-álgebras, podemos definir las operaciones en $\prod A_i$ (por coordenadas) de manera que la τ-álgebra resultante, $\prod \mathfrak{a}_i$, junto con las proyecciones naturales, sea el producto categórico de la familia dada.

En <u>τ-Alg</u> son válidos los Teoremas de isomorfía de Emmy Noether:

(1.1). <u>Teorema</u> [C. (II.3.8)] : Si θ es una congruencia de $\mathfrak{A}$, $h: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ es τ-morfismo y $\theta \subseteq \ker h$, existe un único τ-morfismo $g: \mathfrak{A}/\theta \to \mathfrak{B}$ que hace conmutar el triángulo :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \arrow[r, "\nu"] \arrow[dr, "h"'] & \mathfrak{A}/\theta \arrow[d, "g"] \\ & \mathfrak{B} \end{tikzcd}$$

donde ν es la proyección natural. Además, si $\theta = \ker h$, g es función inyectiva. //

(1.2). <u>Teorema</u> [C. (II.3.9)] : Si $\mathfrak{A}' \hookrightarrow \mathfrak{A}$ y θ es una congruencia de $\mathfrak{A}$, definamos $\theta' := \theta \cap A'^2$; entonces existe un único τ-morfismo inyectivo $\psi: \mathfrak{A}'/\theta' \to \mathfrak{A}/\theta$ que hace conmutar el cuadrado :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A}' \arrow[r, hook] \arrow[d, "\nu'"] & \mathfrak{A} \arrow[d, "\nu"] \\ \mathfrak{A}'/\theta' \arrow[r, hook, "\psi"] & \mathfrak{A}/\theta \end{tikzcd}$$

donde ν y ν' son las proyecciones naturales. En consecuencia, se tiene que $\nu\mathfrak{A}' \cong \mathfrak{A}'/\theta'$. //

Antes de enunciar el tercer teorema de isomorfía, observemos que si $\theta \subseteq \psi$ son congruencias de $\mathfrak{A}$, $[a] \sim [b] \Leftrightarrow a \psi b$ define una congruencia $\sim$ de $\mathfrak{A}/\theta$ que denotaremos por ψ/θ.

(1.3). <u>Teorema</u> [C. (II.3.11), (II.3.12)]: Si θ es una congruencia de $\mathfrak{A}$, la asociación $\psi \mapsto \psi/\theta$ es un isomorfismo del retículo de congruencias de $\mathfrak{A}$ que contienen a θ sobre el retículo de congruencias de $\mathfrak{A}/\theta$. Además, para cada congruencia ψ de $\mathfrak{A}$ que contenga a θ, existe un único isomorfismo $\varphi: \mathfrak{A}/\psi \to (\mathfrak{A}/\theta)/(\psi/\theta)$ que hace conmutativo el cuadrado:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A} & \longrightarrow & (\mathfrak{A}/\theta) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathfrak{A}/\psi) & \xrightarrow{\varphi} & (\mathfrak{A}/\theta)/(\psi/\theta) \end{array}$$

en donde las demás flechas son las proyecciones naturales. //

Si $\mathfrak{C}$ es cualquier subcategoría de <u>τ-Alg</u> y B es un conjunto, una τ-álgebra <u>$\mathfrak{C}$-libre sobre B</u> ó <u>$\mathfrak{C}$-libre generada por B</u> es un $\mathfrak{C}$-objeto $\mathfrak{A}$ junto con una función $\psi: B \to A$ tal que, para cualquier $\mathcal{C}$-objeto $\mathfrak{A}'$ y cualquier función φ: $B \to A'$, existe un único $\mathcal{C}$-morfismo $\bar{\varphi}: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ tal que $\bar{\varphi}\psi = \varphi$. El siguiente resultado es caso particular de un teorema de Garret Birkhoff.

(1.4). <u>Teorema</u>: Para cualquier conjunto B existe una τ-álgebra <u>τ-Alg</u>-libre generada por B. Esta es única hasta isomorfía y se denota por L_B. //

La demostración (constructiva) de (1.4) puede encontrarse en [B.M. (2.2)] ó en [B.H.N. (Cap. IV)]. L_B puede describirse -informalmente- como la colección de todas las expresiones formales obtenidas a partir de los elementos de B "aplicando" un número finito de veces las operaciones $(f_i)_{i<\lambda}$. Una τ-álgebra que sea <u>τ-Alg</u>-libre sobre algún conjunto se llama <u>absolutamente libre</u> ó <u>libre anárquica</u>.

§2.- Ecuaciones y Variedades.

Sea V un conjunto numerable, a cuyos elementos llamaremos "variables", y denotemos por $\mathfrak{T}$ a la τ-álgebra absolutamente libre generada por V. $\mathfrak{T}$ se llama la τ-álgebra de términos, y una ecuación es una pareja de términos $(s,t) \in \mathfrak{T}^2$. Decimos que una ecuación (τ, s) es válida en $\mathfrak{A}$ si para cualquier función $f: V \to A$ el τ-morfismo inducido $\bar{f}: \mathfrak{T} \to \mathfrak{A}$ es tal que $\bar{f}(s) = \bar{f}(t)$. (i.e., si cualquier sustitución de las variables por elementos de A identifica los términos s y t.)

Una variedad de τ-álgebras es una subcategoría plena $\mathcal{V}$ de τ-Alg que ha sido definida mediante un sistema de ecuaciones, esto es, existe $S \subseteq \mathfrak{T}^2$ tal que $\mathcal{V} = V(S)$. (Esta igualdad significa: $\mathfrak{A}$ es un objeto en $\mathcal{V}$ si y sólo si todas las ecuaciones de S son válidas en $\mathfrak{A}$.)

El siguiente teorema se debe también a G. Birkhoff:

(2.1).- Teorema: Una subcategoría plena $\{\emptyset\} \neq \mathcal{V}$

de $\underline{\tau\text{-Alg}}$ es variedad si y sólo si HSP $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$, o sea: $\mathcal{V}$ es cerrada bajo la formación de productos, subobjetos e imágenes homomorfas en $\underline{\tau\text{-Alg}}$. // (ver prueba en [C. (IV.3.1)].)

Si S es un conjunto de ecuaciones y $\mathfrak{A}$ es una τ-álgebra, definimos $\theta_S^{\mathfrak{A}}$ como la congruencia de $\mathfrak{A}$ generada por el conjunto:

$$\{(f(s), f(t)) \mid (s,t) \in S \text{ y } f: \mathfrak{T} \to \mathfrak{A}\}.$$

Entonces $\theta_S^{\mathfrak{A}}$ es la intersección de todas las congruencias de $\mathfrak{A}$ que contienen a dicho conjunto. $\theta_S^{\mathfrak{A}}$ mide que tan alejada está $\mathfrak{A}$ de pertenecer a la variedad $\mathcal{V} = V(S)$:

(2.2). Proposición: $\mathfrak{A}/\theta_S^{\mathfrak{A}} \in \mathcal{V}$ y $\theta_S^{\mathfrak{A}}$ es la mínima congruencia de $\mathfrak{A}$ con esta propiedad.

Demostración: Denotemos por $\nu_{\mathfrak{A}}: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/\theta_S^{\mathfrak{A}}$ a la proyección natural; sea (t,s) una ecuación en S y $f: \mathfrak{T} \to \mathfrak{A}/\theta_S^{\mathfrak{A}}$ un τ-morfismo. Como $\mathfrak{T}$ es absolutamente libre, es proyectivo en $\underline{\tau\text{-Alg}}$ y entonces existe $g: \mathfrak{T} \to \mathfrak{A}$ tal que $f = \nu_{\mathfrak{A}}\, g$. Como

$(g(t), g(s)) \in \theta_S^{\mathfrak{A}}$, $f(t) = \nu_{\mathfrak{A}} g(t) = \nu_{\mathfrak{A}} g(s) = f(s)$ y resulta $\mathfrak{A}/\theta_S^{\mathfrak{A}} \in \mathcal{V}$. Si ψ es una congruencia de $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A}/\psi \in \mathcal{V}$, sean $(s,t) \in S$ y $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{A}$; consideremos la composición $qf: \mathfrak{X} \to \mathfrak{A}/\psi$, donde $q: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/\psi$ es la proyección natural. Por ser $\mathfrak{A}/\psi \in \mathcal{V}$, $qf(t) = qf(s)$ y $(f(t), f(s)) \in \ker q = \psi$; en consecuencia, $\theta_S^{\mathfrak{A}} \subseteq \psi$. //

(2.3) <u>Teorema</u>: Cualquier variedad $\mathcal{V}$ es epirreflexiva en toda subcategoría $\mathcal{C}$ de <u>τ-Alg</u> que la contenga; o sea: para todo $\mathcal{C}$-objeto $\mathfrak{A}$ existe un $\mathcal{V}$-objeto $\mathfrak{A}^{\#}$ y un epimorfismo $\nu_{\mathfrak{A}}: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}^{\#}$ con la propiedad de que, dado cualquier τ-morfismo $h: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ con $\mathfrak{B} \in \mathcal{V}$, existe un (necesariamente único) $\mathcal{V}$-morfismo $g: \mathfrak{A}^{\#} \to \mathfrak{B}$ tal que $h = g\nu_{\mathfrak{A}}$.

<u>Demostración</u>: Sea S el sistema de ecuaciones que define a $\mathcal{V}$ y definamos $\mathfrak{A}^{\#}$ como $\mathfrak{A}/\theta_S^{\mathfrak{A}}$, $\nu_{\mathfrak{A}}: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}^{\#}$ como la identificación natural. Si $h: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ es un τ-morfismo y $\mathfrak{B} \in \mathcal{V}$, la imagen de h es una sub-τ-álgebra de $\mathfrak{B}$ que,

por (2.1), está en $\mathcal{V}$. Aplicando (1.1), se obtiene que $\mathrm{Im}\, h \cong \mathfrak{A}/\ker h$ y por (2.2) resulta $\theta_S^{\mathfrak{a}} \subseteq \ker h$; nuevamente por (1.1) existe un único $g: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ tal que $h = g\, \nu_{\mathfrak{a}}$, lo cual termina la prueba. //

Una consecuencia importante de (2.3) es:

(2.4). Proposición: Con la notación de (2.3), existe un funtor $R: \mathcal{G} \to \mathcal{V}$ (que llamaremos el reflector canónico) tal que $R\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{\#}$ para todo $\mathcal{G}$-objeto $\mathfrak{A}$ y tal que, si $h: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ es un $\mathcal{G}$-morfismo, $Rh: R\mathfrak{A} \to R\mathfrak{A}'$ es el único morfismo que hace conmutar el cuadrado:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A} & \xrightarrow{h} & \mathfrak{A}' \\ \downarrow \nu_{\mathfrak{a}} & & \downarrow \nu_{\mathfrak{a}'} \\ R\mathfrak{A} & \xrightarrow{Rh} & R\mathfrak{A}' \end{array} \qquad //$$

También utilizaremos el siguiente resultado:

(2.5). Proposición: Si $\mathcal{V}$ es una variedad de τ-álgebras y B es un conjunto, existe (única hasta isomorfía) una τ-álgebra $\mathcal{V}$-libre sobre B.

Demostración: Por (1·4) existe una τ-álgebra absolutamente libre $\mathcal{L}$ generada por B con morfismo universal $\varphi: B \to L$; probaremos que $R\mathcal{L}$, con el morfismo $\psi :: B \xrightarrow{\varphi} L \xrightarrow{\nu_L} R\mathcal{L}$ es $\mathcal{V}$-libre sobre B (Aquí $R: \tau\text{-}\underline{Alg} \to \mathcal{V}$). Sea $\mathfrak{A}$ cualquier $\mathcal{V}$-objeto y consideremos una función $f: B \to A$; entonces existe $\bar{f}: \mathcal{L} \to \mathfrak{A}$ tal que $\bar{f}\varphi = f$. Por (2·3) existe $\bar{\bar{f}}: R\mathcal{L} \to \mathfrak{A}$ tal que $\bar{f} = \bar{\bar{f}}\nu_L$, de donde $\bar{\bar{f}}\psi = \bar{\bar{f}}\nu_L\varphi = \bar{f}\varphi = f$. Si $g: R\mathcal{L} \to \mathfrak{A}$ es tal que $g\psi = f$, entonces $f = g\nu_L\varphi = \bar{\bar{f}}\nu_L\varphi$ de donde $g\nu_L = \bar{\bar{f}}\nu_L$ y entonces $g = \bar{\bar{f}}$. La unicidad hasta isomorfía es consecuencia inmediata de la propiedad universal. //

Para finalizar el capítulo, daremos una caracterización de los monomorfismos en variedades que utilizaremos en el capítulo III.

(2·6) Proposición: Si $\mathcal{V}$ es una variedad de τ-álgebras, un morfismo $f: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ en $\mathcal{V}$ es $\mathcal{V}$ monomorfismo si y sólo si es función inyectiva.

__Demostración__ : La suficiencia de la condición es clara. Para probar la necesidad tomemos dos elementos $x, y \in A$, denotemos por $\mathcal{L}$ a la τ-álgebra $\mathcal{V}$-libre generada por $\{x,y\}$ y definamos las funciones f_1, f_2 de $\mathcal{L}$ en $\mathfrak{A}$ mediante $f_1(x)=x$, $f_1(y)=y$; $f_2(x)=f_2(y)=x$. Supongamos ahora que $f(x)=f(y)$, entonces $ff_1=ff_2$ y por ser f monomorfismo $f_1=f_2$, de donde $x=y$. //

CAPITULO II

VARIEDADES DE GRUPOS

§3.- Subvariedades de Gru

Hagamos, en este capítulo, $\tau=(2,1,0)$. La categoría Gru de los grupos es una subcategoría plena de τ-Alg : la multiplicación en un grupo es una operación binaria, la asociación de cada elemento x con su inverso x^{-1} es una operación unaria y el elemento neutro para la multiplicación, 1, es una operación cero-aria. Más aún: Gru es una variedad de τ-álgebras: la definida por el sistema $\{((xy)z, x(yz)), (x1, x), (1x, x), (x^{-1}x, 1), (xx^{-1}, 1)\}$ donde x, y, z denotan tres elementos distintos de V.

Esas las subvariedades de Gru en las que estamos interesados y para estudiarlas desarrollaremos aquí una herramienta derivada de la del capítulo anterior. Sea $\mathcal{T}$ como en la sección 2 y sea F el grupo libre generado por V; denotemos por $\psi: \mathcal{T} \to F$ a la proyección $\psi_{\mathcal{T}}$ de (2.5). Dada una palabra $p \in F$ y un grupo G, diremos que p es válida en G si para todo homomorfismo $h: F \to G$ se tiene $h(p)=1$. Consideremos ahora una ecuación $(t, s) \in \mathcal{T}^2$ y la palabra asociada $\psi(t)\psi(s)^{-1}$; para cualquier grupo G se tiene:

(3.1).- <u>Proposición</u>: (t,s) es válida en G si y sólo si $\psi(t)\psi(s)^{-1}$ es válida en G.

<u>Demostración</u>: Si (t,s) es válida en G y $h: F \to G$, tenemos $h\psi: \mathcal{T} \to G$ y por lo tanto $h\psi(t) = h\psi(s)$ y entonces $h(\psi(t)\psi(s)^{-1}) = 1$. Recíprocamente, si $\psi(t)\psi(s)^{-1}$ es válida en G y $f: \mathcal{T} \to G$, por (2.2) resulta ser $\ker\psi \subseteq \ker f$ y por (1.1) existe $h: F \to G$ tal que $h\psi = f$. Entonces $f(t)f(s^{-1}) = h(\psi(t)\psi(s)^{-1}) = 1$, de donde $f(t) = f(s)$. //

Como ψ es sobre, las variedades de grupos son precisamente las categorías de grupos definidas por conjuntos de palabras de F. Veremos ahora que no es necesario considerar todos los conjuntos de palabras de F.

Recordemos que un subgrupo H de un grupo G se llama <u>totalmente invariante</u> en G si $fH \subseteq H$ para todo endomorfismo f de G.

Así como en Geometría Algebraica dos conjuntos distintos $S, T \subseteq k[x_1,\dots,x_n]$ pueden definir el mismo conjunto algebraico afín V, pero hay un único ideal radical de $k[x_1,\dots,x_n]$ que lo define, tenemos en variedades de grupos un resultado análogo (del que hay una versión general para τ-álgebras de cualquier tipo: [C.(IV.1.2.)])

(3.2). Teorema [H.N. (14.31)]: La asociación $H \mapsto V(H)$ establece una correspondencia biunívoca entre el conjunto de subgrupos totalmente invariantes de F y el conjunto de subvariedades de Gru, cuya inversa está dada por $\mathfrak{V} \mapsto E(\mathfrak{V})$, donde $E(\mathfrak{V})$ es el conjunto de todas las palabras de F que son válidas en todos los grupos de $\mathfrak{V}$. Esta correspondencia es un antiisomorfismo de retículos. //

Damos ahora algunos ejemplos de variedades de grupos:

(3.3). Ejemplos:

(i). Ab, la variedad de los grupos abelia nos, definida por la palabra $[x,y]$ $(=x^{-1}y^{-1}xy)$.

(ii).- Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{B}_n$, la variedad de Burnside de exponente n, definida por la palabra x^n. (En este trabajo, un grupo G es de <u>exponente n</u> si $G \in \mathfrak{B}_n$; una variedad $\mathfrak{V}$ de grupos es de <u>exponente n</u> si $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{B}_n$ y es de <u>exponente finito</u> si $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{B}_k$ para algún natural k.)

(iii).- Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A}_n$, la variedad de los grupos abelianos de exponente n, definida por las palabras x^n, $[x,y]$. ($\mathfrak{A}_n = \underline{\mathfrak{Ab}} \cap \mathfrak{B}_n$)

(iv).- Si $c \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{N}_c$, la variedad de los grupos nilpotentes de clase c (ó menor), definida por la palabra $[x_1, x_2, \dots, x_{c+1}]$. (Se define $[x_1, \dots, x_n] := [[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n]$).

(v).- Si $l \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{S}_l$, la variedad de los grupos solubles de longitud de solubilidad l (ó menor), determinada por la palabra $s_l(x_1, \dots, x_{2^l}) \in F$ que se define inductivamente: $s_1(x_1, x_2) := [x_1, x_2]$; $s_{k+1}(x_1, \dots, x) = [s_k(x_1, \dots, x_{2^k}), s_k(x_{2^k+1}, \dots, x_{2^{k+1}})]$. En particular, $\mathfrak{S}_2$ es la variedad de los grupos metaabelianos

(vi).- La variedad $\mathcal{T}$ de los grupos triviales, definida por todo F.

§4.- Subgrupos Verbales

Sea $S \subseteq \mathfrak{T}^2$ un conjunto de ecuaciones donde $\mathfrak{T}$ es la $(2,1,0)$-álgebra absolutamente libre sobre V y supongamos que S contiene a las "ecuaciones de grupo"; entonces S define una variedad $\mathcal{V}$ de grupos que, como vimos en la sección anterior, puede definirse también por el conjunto de palabras $P := \{\psi(s)\psi(t)^{-1} / (s,t) \in S\}$ donde $\psi : \mathfrak{T} \to F$ es la proyección canónica.

Consideremos ahora un grupo G y definamos $P(G)$ como el subgrupo de G generado por todos los elementos de la forma $h(p)$ con $h : F \to G$ y $p \in P$. $P(G)$ se llama el <u>subgrupo verbal</u> de G definido por P. Claramente, si $g : G \to \bar{G}$ es un homomorfismo de grupos, se tiene que $g\,P(G) \subseteq P(gG) \subseteq P(\bar{G})$, y haciendo g un endomorfismo de G, resulta que $P(G)$ es un subgrupo totalmente invariante (en particular normal) de G y por lo tanto la relación de equivalencia definida por $P(G)$ ($a \sim b$ si y solo si $ab^{-1} \in P(G)$) es una congruencia en G. También hemos definido, en la sección

2, una congruencia θ_S^G; observemos ahora lo siguiente:

Si $(f(s),f(t))\in\theta_S^G$, con $(s,t)\in S$ y $f:\mathfrak{X}\to G$, como $\ker\psi\leq\ker f$, existe $h:F\to G$ tal que $h\psi=f$, de donde $\psi(s)\psi(t)^{-1}\in P$ y $f(s)f(t)^{-1}=h(\psi(s)\psi(t)^{-1})\in P(G)$; recíprocamente, si $a=h(p)\in P(G)$ con $p=\psi(t)\psi(s)^{-1}\in P$, $(t,s)\in S$ y $h:F\to G$, haciendo $f=h\psi$ obtenemos $a\cdot f(s)=f(t)$ y como $(f(s)^{-1},f(t)^{-1})\in\theta_S^G$, resulta $(a,1)\in\theta_S^G$.

De lo anterior se sigue que $\sim$ coincide con θ_S^G y consecuentemente, con la notación introducida en (2.3), $G^{\#}=G/P(G)$.

Damos ahora algunos ejemplos de subgrupos verbales.

(4.1). Ejemplos:

(i).- Si $P=\{[x,y]\}$, $P(G)$ es el subgrupo derivado (ó conmutador) G' de G.

(ii).- Si $P=\{x^n\}$, $nG:=P(G)$ es el subgrupo generado por las potencias n-ésimas, entonces $1G=G$ y, por (2.2), $G'\leq 2G$, ya que $G/2G\in\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_2=\mathcal{O}\!\mathcal{l}_2$.

(iii).- Si $P=\{\delta_l\}$ (ver (3-3)(v)), $P(G)=:G^{(l)}=(G^{(l-1)})'$ es el l-ésimo término de la serie derivada de G (ver [R. pág. 111]).

(iv).- Si $P=\{[x_1,\dots,x_n]\}$ (ver (3-3)(iv)), $P(G)=\gamma_n(G)$ es el n-ésimo término de la serie central descendente de G (ver [R. pág. 117]).

(7.2) Proposición: Si $G \in \mathfrak{W}\mathfrak{V}$, $RG = G^{\#}$ y en consecuencia R es la restricción a $\mathfrak{W}\mathfrak{V}$ de $\#$.

Demostración: Por ser $G \in \mathfrak{W}\mathfrak{V}$ existe un subgrupo normal K de G tal que K está en $\mathfrak{W}$ y el cociente G/K está en $\mathfrak{V}$. Por (7.1), $K \leq mG$ y por el tercer teorema de isomorfía (1.3) tenemos que $G^{\#} = G/mG \cong (G/K)/(mG/K)$ de donde, por (2.1), $G^{\#} \in \mathfrak{V}$. Entonces, por (2.2) y la sección 4, resulta que $E(\mathfrak{V})(G) \leq mG$; pero como $x^m \in E(\mathfrak{V})$, también $mG \leq E(\mathfrak{V})(G)$, de donde $RG = G^{\#}$. Ahora es claro que R coincide también con $\#$ en los morfismos. //

Necesitaremos, dado un grupo $H \in \mathfrak{W}\mathfrak{V}$, aún otra descripción del subgrupo $mH = E(\mathfrak{V})(H)$. Sabemos que H es extensión de un subgrupo $K \in \mathfrak{W}$ por un grupo de $\mathfrak{V}$.

(7.3) Lema: $mH = K$.

Demostración: Como se vió en la prueba de (7.2), por (7.1) $K \leq mH$. Tomemos aho

§5.– Producto de Variedades

Recordemos que un grupo <u>G es extensión de K por Q</u> si G tiene un subgrupo normal $K' \cong K$ tal que $G/K' \cong Q$. Consideremos ahora dos variedades de grupos $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$. <u>El producto $\mathfrak{V}\mathfrak{W}$</u> es la variedad de todos los grupos que sean extensión de un grupo en $\mathfrak{V}$ por un grupo en $\mathfrak{W}$. $\mathfrak{V}\mathfrak{W}$ es efectivamente una variedad y además, si $H = E(\mathfrak{V})$ y $K = E(\mathfrak{W})$ (ver (3·2)), entonces $E(\mathfrak{V}\mathfrak{W})$ es el subgrupo verbal $H(K)$ de K (ver [H.N. (21·11),(21·12)]), o sea que "las ecuaciones de $\mathfrak{V}\mathfrak{W}$ se obtienen sustituyendo las variables por leyes de $\mathfrak{W}$ en las leyes de $\mathfrak{V}$".

Observemos que, para cualquier variedad $\mathfrak{V}$ se tiene:

$$\mathfrak{V}\,\underline{\mathrm{Gru}} = \underline{\mathrm{Gru}}\,\mathfrak{V} = \underline{\mathrm{Gru}} \quad , \text{y:}$$

$$\mathfrak{V}\mathfrak{T} = \mathfrak{T}\mathfrak{V} = \mathfrak{V} \qquad \text{(ver (3·3)(vii))}.$$

Una variedad $\mathfrak{V}$ es <u>inescindible</u> si sólo admite la descomposición $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}\mathfrak{T} = \mathfrak{T}\mathfrak{V}$ como producto de variedades.

El siguiente teorema se debe a Hanna

Neumann:

(5.1)_ Teorema [H.N. (21.51)]: El producto de variedades es asociativo, es decir, $\mathfrak{V}(\mathfrak{W}\mathfrak{X})=(\mathfrak{V}\mathfrak{W})\mathfrak{X}$ para cualesquiera tres variedades de grupos $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ y $\mathfrak{X}$. //

La importancia del producto de variedades y de las variedades inescindibles radica en el siguiente resultado:

(5.2)_ Teorema [H.N. (23.32)]: Cualquier variedad $\mathfrak{V}$ diferente de $\mathfrak{E}$, Gru, es el producto (en forma única) $\mathfrak{V}=\mathfrak{V}_1\mathfrak{V}_2\cdots\mathfrak{V}_n$ de un número finito de variedades inescindibles $\mathfrak{V}_1,\ldots,\mathfrak{V}_n$ todas diferentes de $\mathfrak{E}$. //

No se conocen aún todas las variedades inescindibles, pero se conocen bastantes ejemplos:

(5.3).- <u>Ejemplos</u>. Son inescindibles:

(i).- [H.N. (24.34)]: Las variedades nilpotentes (i.e., contenidas en $\mathfrak{N}_c$ para algún $c \in \mathbb{N}$). En particular:

(ii).- las variedades $\underline{Ab}$, $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{N}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) y también las variedades $\mathfrak{B}_n \cap \mathfrak{N}_c$ ($c, n \in \mathbb{N}$).

(iii).- [H.N. (24.41)]: Si p es primo, cualquier variedad de exponente p.

(iv).- [H.N. (24.43)]: Cualquier variedad de exponente finito n que contenga a todos los grupos metaabelianos de exponente n; en particular:

(v).- Las variedades $\mathfrak{B}_n$ y $\mathfrak{B}_n \cap \mathfrak{S}_l$ ($n \in \mathbb{N}$, $l \geq 2$).

Terminamos esta sección con una observación que será de utilidad:

(5.4).- <u>Lema</u>: Si $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ son variedades de grupos de exponentes finitos m y n respectivamente, entonces $\mathfrak{V}\mathfrak{W}$ es de exponente mn. //

CAPITULO III

INYECTIVIDAD EN VARIEDADES DE GRUPOS

§6.- Un resultado en τ-Alg

En esta sección, τ es un tipo de álgebras arbitrario.

Recordemos que, si $\mathcal{V}$ es una variedad de τ-álgebras e $I \in \mathcal{V}$, I es $\mathcal{V}$-inyectivo si para cualquier monomorfismo $m: X \rightarrowtail X'$ en $\mathcal{V}$ (τ-morfismo inyectivo por (2·6)) y cualquier τ-morfismo $f: X \to I$ existe una extensión $\bar{f}: X' \to I$ de f a X', esto es $\bar{f}m = f$.

Consideremos dos variedades $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ de τ-álgebras y el reflector canónico de (2·4) $R: \mathcal{W} \to \mathcal{V}$.

(6·1).- Proposición: Si R preserva monomorfismos, entonces todo objeto $\mathcal{V}$-inyectivo es también $\mathcal{W}$-inyectivo.

Demostración: Sean I un objeto $\mathcal{V}$-inyectivo, $i: X \rightarrowtail Y$ un $\mathcal{W}$-monomorfismo y $\psi: X \to I$ cualquier $\mathcal{W}$-morfismo. Por hipótesis $Ri: RX \to RY$ es monomorfismo en $\mathcal{V}$ y sabemos que $v_Y i = (Ri) v_X$ donde $v_X: X \to RX$, $v_Y: Y \to RY$ son las proyecciones naturales. Por (2·3) existe $\varphi: RX \to I$ tal que $\varphi v_X = \psi$ y por ser I $\mathcal{V}$-inyec_ tivo existe $\bar{\varphi}: RY \to I$ tal que $\bar{\varphi}(Ri) = \varphi$. Entonces $\bar{\varphi}\nu_Y i = \bar{\varphi}(Ri)\nu_X = \varphi\nu_X = \psi$, esto es, $\bar{\varphi}\nu_Y$ es extensión de ψ a Y. //

La siguiente proposición nos dice cuando se cumple la hipótesis de (6.1) en términos de las congruencias θ_S^{σ}, introducidas en la sección 2.

(6.2). <u>Proposición</u>: Si $\mathcal{V} = V(S)$, R preserva monomorfismos si y sólo si para cualesquiera dos objetos $X \subset Y$ de $\mathcal{W}$ se tiene que

$$\theta_S^X = X^2 \cap \theta_S^Y .$$

<u>Demostración</u>: Si R preserva monomorfismos y $m: X \hookrightarrow Y$ es una inclusión con $X, Y \in \mathcal{W}$, como $\nu_Y m = (Rm)\nu_X$ y Rm es monomorfismo, entonces $\theta_S^X = \ker((Rm)\nu_X) = \ker(\nu_Y m) = \ker(\nu_Y) \cap X^2 = \theta_S^Y \cap X^2$, de donde la condición es necesaria. La suficiencia es consecuencia inmediata del segundo teorema de isomorfía, (1.2). //

§7.- Inyectivos en productos de variedades

Consideremos dos variedades de grupos $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ de exponentes finitos m y n respectivamente.

Supondremos, en toda la sección, que m y n son primos entre sí, entonces $1 = rm + sn$ para ciertos enteros r, s.

Como $\mathcal{V}$ es subvariedad de $\mathcal{W}\mathcal{V}$, tenemos, por (2.4), el reflector canónico $R : \mathcal{W}\mathcal{V} \to \mathcal{V}$. Nos interesa calcular este funtor.

(7.1). <u>Lema</u>: Si G es un grupo y $a \in G$ es tal que $a^n = 1$, entonces $a = b^m$ para algún elemento b de G.

<u>Demostración</u>: Esto es trivial, pues $a = a^1 = a^{rm+sn} = a^{rm}a^{sn} = (a^r)^m$. //

Definamos, para cualquier grupo G, el grupo cociente $G^{\#} := G/mG$ (ver (4.1)(ii)). Entonces $G^{\#}$ no es sino la reflexión de G en $\mathcal{B}_m$ y lo que veremos a continuación es que R es la restricción de $^{\#} : \underline{\mathrm{Gru}} \to \mathcal{B}_m$.

ra un generador h^m de mH. Por (5.4), H es de exponente mn, de donde h^mK es un elemento de H/K cuyo orden divide a n, y como $H/K \in \mathfrak{V} \leq \mathfrak{B}_m$, deberemos tener $h^mK = K$, esto es, $h^m \in K$. Entonces también $mH \leq K$. //

El siguiente resultado nos garantiza la existencia de inyectivos no triviales en $\mathfrak{W}\mathfrak{V}$ cuando los haya en $\mathfrak{V}$.

(7.4).- <u>Teorema</u>: Todo grupo $\mathfrak{V}$-inyectivo es también $\mathfrak{W}\mathfrak{V}$-inyectivo.

<u>Demostración</u>: Por (7.2), (6.1) y (6.2) nos basta con demostrar que, dados dos grupos $G \leq H$ en $\mathfrak{W}\mathfrak{V}$, se tiene que $mG = G \cap mH$. La primera contención es trivial, y si $a \in G \cap mH$, resulta, por (7.3), que $a^n = 1$, de donde por (7.1) $a = b^m$ para algún $b \in G$ y por lo tanto $a \in mG$. //

Hemos hecho, en toda esta sección, la

suposición de que los exponentes de $\mathfrak{W}$ y $\mathfrak{V}$ son finitos y coprimos; la siguiente afirmación nos dice cuando se da esta situación.

(7.5)_ Proposición: Para cualesquiera dos variedades no triviales de grupos $\mathfrak{V}$ y $\mathfrak{W}$ son equivalentes las afirmaciones:

(i)_ $\mathfrak{V}$ y $\mathfrak{W}$ son de exponentes finitos y coprimos.

(ii)_ $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{W} = \mathfrak{T}$

(iii)_ $E(\mathfrak{V}) \cup E(\mathfrak{W})$ genera a F.

Demostración: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) : [H.N. (21.32)], (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) : Consecuencia inmediata de (3.2). //

§8.- Inyectivos en $\mathfrak{A}_n$

Todo grupo abeliano de exponente n puede considerarse como un módulo sobre $\mathbb{Z}_n$ y recíprocamente; con esta convención resulta que $\mathfrak{A}_n$ "es" la categoría de los $\mathbb{Z}_n$-módulos.

Lo anterior hace que el estudio de la inyectividad en $\mathfrak{A}_n$ sea particularmente fácil, pues hay toda una teoría de módulos inyectivos sobre cualquier anillo con unidad. Enunciamos a continuación los resultados que utilizaremos; por comodidad supondremos que A es un anillo conmutativo con unidad.

Recordemos que si $M \subset N$ son A-módulos, N es <u>extensión esencial</u> de M si $M \cap H \neq \{0\}$ para todo submódulo $H \neq \{0\}$ de N. El teorema de Eckmann-Schöpf [C.R. (57.13),(57.8)] nos garantiza que si M es un A-módulo, existe una extensión esencial $M \hookrightarrow N$ donde N es inyectivo en la categoría de A-módulos. Recordemos también que un producto de A-módulos es inyectivo si y sólo si cada factor es inyectivo [H.S. (I.6.3)] (La prueba es categórica y por tanto este resultado vale en cualquier variedad de τ-álgebras). También se tiene que un A-módulo M es inyectivo si y sólo si para todo ideal $\mathfrak{a}$ de A y todo morfismo $\varphi : \mathfrak{a} \to M$ existe una extensión $\bar{\varphi}$ de φ a A. [C.R. (57.14)]. Sabemos también que si M es inyectivo, M es retracto (y por tanto sumando) de cualquier A-módulo que lo contenga [C.R. (57.9)].

Utilizaremos también la siguiente:

(8.1).- __Proposición__: Si A es finito, cualquier suma directa $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ de A-módulos es inyectiva cuando todos los sumandos lo son.

__Demostración__: Sea $\mathfrak{a}$ un ideal de A y sea $\varphi : \mathfrak{a} \to M$ un homomorfismo. Como la imagen de φ es finita, está contenida en un submódulo de M de la forma $\prod_{i\in J} M_i$ con $J \subseteq I$ finito y como los productos de inyectivos son inyectivos podemos extender φ a un $\bar{\varphi} : A \to \prod_{i\in J} M_i$

Componiendo con la inclusión $\prod_{i\in S} M_i \hookrightarrow M$ se obtiene una extensión de φ a $\mathbf{A}$. //

Dedicaremos esta sección a calcular los grupos $\mathfrak{A}_n$-inyectivos, empezando por el caso en que n es potencia de un primo, digamos $n=p^m$.

(8.2). <u>Proposición</u> : $\mathbb{Z}_{p^m}$ es $\mathfrak{A}_{p^m}$-inyectivo.

<u>Demostración</u>: Sabemos que existe una extensión esencial inyectiva N de $\mathbb{Z}_{p^m}$, probaremos por reducción al absurdo que $N=\mathbb{Z}_{p^m}$:

Supongamos que tenemos un $g\in N\setminus\mathbb{Z}_{p^m}$ y definamos H como el subgrupo de N generado por $\mathbb{Z}_{p^m}\cup\{g\}$, entonces $\bar{\bar{H}}>p^m$ y por lo tanto H no es cíclico; aplicando el teorema fundamental de grupos abelianos finitamente generados se obtiene $H=\mathbb{Z}_{p^m}\oplus M$ para cierto subgrupo $M\neq\{0\}$ de H, pero en estas condiciones no puede ser N una extensión esencial de $\mathbb{Z}_{p^m}$. //

Aplicando (8.1), obtenemos:

(8.3) Corolario: Para todo conjunto S, la suma directa $\mathbb{Z}_{p^m}^{(S)}$ es $\mathfrak{A}_{p^m}$-inyectiva. //

(8.4) Lema: Si G es un grupo $\mathfrak{A}_{p^m}$-inyectivo no trivial, G tiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}_{p^m}$.

Demostración: Escojamos un elemento $g \in G$ cuyo orden, digamos p^k, sea máximo entre los órdenes de los elementos de G. Definamos un homomorfismo $\varphi: \mathbb{Z}_{p^k} \to G$ mediante $\varphi(1) = g$ y consideremos la inmersión de $\mathbb{Z}_{p^k}$ en $\mathbb{Z}_{p^m}$ dada por $j: 1 \mapsto p^{m-k}$. Entonces existe un homomorfismo $\bar{\varphi}: \mathbb{Z}_{p^m} \to G$ tal que $\bar{\varphi} j = \varphi$ y entonces $g = \varphi(1) = \bar{\varphi} j(1) = \bar{\varphi}(p^{m-k}) = p^{m-k}\bar{\varphi}(1)$. Si l es el orden de $\bar{\varphi}(1)$, como $lg = 0$, $p^k | l$; pero como $l \leq p^k$ resulta que $\bar{\varphi}(1)$ y g tienen el mismo orden, y como $g = p^{m-k} \cdot \bar{\varphi}(1)$, se debe tener $m = k$. //

(8.5). <u>Proposición</u>: Los grupos $\mathfrak{A}_{p^m}$-inyectivos son precisamente los de la forma $\mathbb{Z}_{p^m}^{(S)}$, con S conjunto.

<u>Demostración</u>: Por (8.3), ya tenemos la mitad de la afirmación; para terminar la prueba consideremos un grupo G que sea $\mathfrak{A}_{p^n}$-inyectivo. Podemos suponer que $G \neq \{0\}$, de donde, por (8.4), la familia $\mathcal{F}$ definida a continuación, es no vacía: $\mathcal{F}$ es la familia de todos los conjuntos S de subgrupos de G que tienen la propiedad siguiente: todo elemento de S es isomorfo a $\mathbb{Z}_{p^m}$ y cada elemento de S intersecta trivialmente al subgrupo de G generado por los restantes. Por el Lema de Zorn, podemos elegir un $S \in \mathcal{F}$ maximal con respecto a la inclusión. Observemos que el subgrupo H de G generado por $\cup S$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_{p^m}^{(S)}$ y por (8.3) es inyectivo. Supongamos ahora que H es un subgrupo propio de G. Entonces $G = H \oplus B$ donde B es inyectivo y no trivial. Aplicando (8.4)

obtenemos un subgrupo T de B isomorfo a $\mathbb{Z}_{p^m}$ y tal que $S \cup \{T\} \in \mathcal{C}$ y contiene propiamente a $\mathcal{C}$. Esta contradicción demuestra que $G = H \cong \mathbb{Z}_{p^m}^{(S)}$. //

Ahora estudiaremos el caso general; en la siguiente afirmación supondremos que $p^m | n$ y $p^{m+1} \nmid n$.

(8.6). <u>Proposición</u>: $\mathbb{Z}_{p^m}^{(S)}$ es inyectivo en $\mathfrak{A}_n$ para todo conjunto S.

<u>Demostración</u>: Por (8.1), bastará probar que $\mathbb{Z}_{p^m}$ es inyectivo en $\mathfrak{A}_n$. Para esto consideremos dos grupos $M \subset N$ en $\mathfrak{A}_n$ y un homomorfismo $\varphi: M \to \mathbb{Z}_{p^m}$. Si descomponemos M [R.(9.3)] como suma de sus componentes q-primarias $M = \bigoplus_{q|n} M_q$ tenemos que, si $q \neq p$, $\varphi|M_q = 0$. Descompongamos también N como suma de componentes primarias: $N = \bigoplus_{q|n} N_q$, entonces tenemos $M_p \subset N_p \in \mathfrak{A}_{p^m}$ y por (8.2) existe un homomorfismo $\bar{\varphi}: N_p \to \mathbb{Z}_{p^m}$ tal que $\bar{\varphi}|M_p = \varphi|M_p$.

Si definimos $\psi : N \to \mathbb{Z}_{p^m}$ mediante $\psi|N_p = \bar{\varphi}$ y $\psi|N_q = 0$ para $q \neq p$, es claro que $\psi|M = \varphi$. //

(8.7)_ <u>Teorema</u>: Sea n un número natural con descomposición en primos distintos $n = p_1^{\varepsilon_1} \cdots p_k^{\varepsilon_k}$. Entonces los grupos $\mathfrak{A}_n$-inyectivos son precisamente los grupos de la forma $G = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{Z}_{p_i^{\varepsilon_i}}^{(S_i)}$ donde $S_1, \ldots, S_k$ son conjuntos.

<u>Demostración</u>: Por (8.6) y el hecho de que los productos de inyectivos son inyectivos, todos los grupos de esta forma son inyectivos. Supongamos ahora que G es un grupo $\mathfrak{A}_n$-inyectivo y sea $G = \prod_{i=1}^{k} G_{p_i}$ su descomposición primaria. Entonces cada G_{p_i} es $\mathfrak{A}_{p_i^{\varepsilon_i}}$-inyectivo y, por (8.5), cada G_{p_i} es de la forma $G_{p_i} = \mathbb{Z}_{p_i^{\varepsilon_i}}^{(S_i)}$ para algún conjunto S_i. //

§9.- Algunas Aplicaciones.

De (8.7) se obtiene una prueba que no usa la teoría de anillos semisimples (pero que sigue dependiendo del axioma de elección) de la proposición 4.1 de [O.C.G]:

(9.1).- Proposición: Todos los $\mathfrak{A}_n$-grupos son $\mathfrak{A}_n$-inyectivos si y solo si n es libre de cuadrados. //

El siguiente resultado se debe a P. Hall:

(9.2).- Proposición: En una variedad nilpotente $\mathfrak{V}$ de exponente finito $m = p_1^{\varepsilon_1} p_2^{\varepsilon_2} \cdots p_k^{\varepsilon_k}$, los grupos $\mathfrak{V}$-proyectivos son precisamente los de la forma $G = \prod_{i=1}^{k} G_i$ donde G_i es libre en $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{B}_{p^{\varepsilon_i}}$. (ver [H.N. (44.34)]). //

Usando (8.7) y (9.2) se obtiene:

(9.3).- Proposición: En $\mathfrak{A}_{p^n}$ son equivalentes los conceptos: libre, proyectivo e inyectivo. Proyectivo e inyectivo equivalen en $\mathfrak{A}_n$. //

Consecuencia inmediata de (7.4) y (7.5) es:

(9.4). Proposición: Si las variedades de grupos $\mathfrak{V}$ y $\mathfrak{W}$ tienen intersección trivial, los grupos $\mathfrak{V}$-inyectivos son $\mathfrak{U}$-inyectivos para cualquier variedad $\mathfrak{U}$ con $\mathfrak{V} \leq \mathfrak{U} \leq \mathfrak{W}\mathfrak{V}$. //

Los resultados de las secciones 7 y 8 nos permiten caracterizar los inyectivos abelianos en algunas variedades de exponente finito. Daremos antes los preliminares necesarios.

(9.5). Definición y Teorema [R. (Cap. VII)]: Dados dos grupos K, Q y un homomorfismo $\theta: Q \to \mathrm{Aut}(K)$ se obtiene un grupo $K \times_{\theta} Q$ (llamado el producto semidirecto de K por Q mediante θ) definiendo, en el producto cartesiano $K \times Q$, la operación $(k,x)(k',y) = (k\,\theta(x)(k'), xy)$. $K \times_{\theta} Q$ es extensión de K por Q y si K y Q son abelianos, $K \times_{\theta} Q$ es abeliano si y sólo si θ es trivial. //

(9.6).- Teorema [H.N. (12.12)]: Si $w \in F$, existen $m \geq 0$ y $c \in F'$ tales que $\{w\}$ y $\{c, x^m\}$ son equivalentes en el sentido de que definen la misma variedad de grupos. //

(9.7).- Corolario: $\mathfrak{A}_n$ es subvariedad de todas las variedades no triviales de exponente finito (mínimo) n.

Demostración: Si $\mathfrak{W}$ es no trivial, $\mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{B}_n$ y $\mathfrak{W} \not\subseteq \mathfrak{B}_{n-1}$, podemos escribir, por (9.6): $\mathfrak{W} = V(P \cup \{x^n\})$ con $P \subseteq F'$. Claramente todas las palabras de P son válidas en cualquier grupo abeliano, de donde $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{W}$. //

(9.8).- Lema: Si q es primo, para cualquier $n \neq 1$, $\mathbb{Z}_n$ no es inyectivo en $\mathfrak{A}_n \mathfrak{A}_q$.

Demostración: Como el producto de inyectivos es inyectivo, basta ver que $\mathbb{Z}_n^q$ no es inyectivo en $\mathfrak{A}_n \mathfrak{A}_q$. Si σ es una permutación cíclica de la base canónica de $\mathbb{Z}_n^q$ como $\mathbb{Z}_n$-módulo libre, σ induce un auto_ morfismo $\bar{\sigma} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n^q)$ cuyo orden es q. Entonces podemos definir un homomorfismo no trivial $\theta: \mathbb{Z}_q \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n^q)$ mediante $\theta(1)=\bar{\sigma}$. Por (9.5), $G := \mathbb{Z}_n^q \times_\theta \mathbb{Z}_q$ es elemento de $\mathfrak{A}_n\mathfrak{A}_q$ y no es abeliano. Consideremos ahora la inmersión $j: \mathbb{Z}_n^q \hookrightarrow G$; si existiera $r: G \to \mathbb{Z}_n^q$ tal que $rj=1$, tendríamos $\overline{\overline{\ker}}(r) = \bar{\bar{G}}/\bar{\bar{\mathbb{Z}}}_n^q = q$, de donde $\ker(r)$ sería un subgrupo abeliano normal en G con $\mathbb{Z}_n^q \ker(r) = G$ y $\mathbb{Z}_n^q \cap \ker(r) = \{1\}$, esto es, $G \cong \mathbb{Z}_n^q \times \ker(r)$ sería abeliano. Entonces, como $1: \mathbb{Z}_n^q \to \mathbb{Z}_n^q$ no puede extenderse a G, resulta que $\mathbb{Z}_n^q$ no es $\mathfrak{A}_n\mathfrak{A}_q$-inyectivo. //

(9.9). <u>Proposición</u>: Si $\mathfrak{V}$ y $\mathfrak{W}$ son variedades no triviales de exponente finito, entonces el único $\mathfrak{W}$-grupo abeliano que es inyectivo en $\mathfrak{W}\mathfrak{V}$ es el trivial.

<u>Demostración</u>: Supongamos que m y n son los exponentes mínimos de $\mathfrak{V}$ y $\mathfrak{W}$ respectivamente. Supongamos que $G \in \mathfrak{W}$ es un grupo abeliano inyectivo en $\mathfrak{W}\mathfrak{V}$. Sea $G = \prod_{i=1}^{k} G_{p_i}$

la descomposición primaria de G, supongamos que la componente G_p es no trivial y sea p^r la máxima potencia de p que divide a n. Como G_p es factor directo de un $\mathfrak{W}$-inyectivo, G_p es $\mathfrak{W}$-inyectivo y por (9.7), G_p es $\mathfrak{A}_n$-inyectivo. Consecuentemente, como G_p es p-primario, G_p es un inyectivo no trivial en $\mathfrak{A}_{p^r}$; por (8.4) y (8.2), $\mathbb{Z}_{p^r}$ es factor directo de G_p y por lo tanto de G. Entonces $\mathbb{Z}_{p^r}$ es inyectivo en $\mathfrak{W}\mathfrak{V}$. Sea q un primo que divida a m: por (9.7) $\mathfrak{A}_{p^r}\mathfrak{A}_q \leq \mathfrak{W}\mathfrak{V}$ y por lo tanto $\mathbb{Z}_{p^r}$ es inyectivo en $\mathfrak{A}_{p^r}\mathfrak{A}_q$. Esta contradicción a (9.8) nos obliga a aceptar que G es el grupo trivial. //

Recolectamos ahora los resultados en variedades de grupos de [O.C.G]:

(9.10).- <u>Teorema</u> [O.C.G]: En las siguientes variedades, el único grupo inyectivo es el trivial:

(i).- <u>Gru</u>

(ii).- $\mathfrak{N}_c$ $(c \geq 2)$

(iii).- La variedad de los grupos n-metaabelianos $(n>1)$

(iv).- $\mathfrak{B}_n$ $(n>2)$

(v).- $\mathfrak{B}_n \cap \mathfrak{N}_c$ $(n>2,\ c\geq 2)$

(vi).- La variedad de los grupos n-metaabelianos de exponente e $(n>1,\ e\geq 2)$

(vii).- La variedad generada por los grupos metacíclicos. //

Consideremos ahora una variedad no trivial $\mathfrak{V}$ de exponente finito.

Por (5.2) $\mathfrak{V}$ es, en forma única, un producto finito:

$$\boxed{\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_2 \cdots \mathfrak{V}_k}$$

donde cada $\mathfrak{V}_i$ es una variedad inescindible, no trivial y, obviamente, de exponente finito, digamos e_i

En algunos casos podemos caracterizar los inyectivos abelianos de $\mathfrak{V}$:

(9.11).- <u>Proposición</u>: Si $\mathfrak{V}_k \subseteq \mathfrak{V}_i$ para alguna $i<k$,

entonces $\mathcal{V}$ no tiene inyectivos abelianos no triviales.

Demostración: Sea G un grupo abeliano $\mathcal{V}$-inyectivo. Usando descomposición primaria podemos escribir $G = \prod_{i=1}^{k} G_i$, donde cada G_i está en $\mathcal{V}_i$ (y es $\mathcal{V}$-inyectivo). Si $j<k$, como $\mathcal{V}_j \mathcal{V}_k \subseteq \mathcal{V}$, $G_j = \{0\}$ por (9.9) y como $G_k \in \mathcal{V}_k \subseteq \mathcal{V}_i$, también resulta $G_k = \{0\}$. //

Queda por analizar el caso en que $\mathcal{V}_k \nsubseteq \mathcal{V}_i$ para todo $i<k$. Si suponemos además que $(e_i, e_k) = 1$ siempre que $i<k$, obtenemos:

(9.12)_ Proposición: Los inyectivos abelianos de $\mathcal{V}$ son precisamente los inyectivos abelianos de $\mathcal{V}_k$.

Demostración: Los inyectivos de $\mathcal{V}_k$ son $\mathcal{V}$-inyectivos por (7.4). Si G es un inyectivo abeliano en $\mathcal{V}$ resulta, igual que en la prueba de (9.11), que G está en $\mathcal{V}_k$. //

(9.13). Corolario: Si $\mathcal{V}_k$ es alguna de las variedades de (9.10), entonces el único inyectivo abeliano de $\mathcal{V}$ es el grupo trivial. //

(9.14). Corolario: Si $\mathcal{V}_k = \mathfrak{A}_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces los inyectivos abelianos de $\mathcal{V}$ son precisamente los grupos descritos en (8.7). //

Para finalizar, observemos lo siguiente: los resultados de (9.10) podrían hacernos pensar que en variedades no abelianas de grupos es rarísimo que haya inyectivos no triviales; al menos para exponente finito, la situación es muy distinta:

(9.14). Proposición: Para cada variedad $\mathcal{V}$ de exponente finito $e(\mathcal{V})$, sea $p(\mathcal{V})$ el mínimo primo que no divide a $e(\mathcal{V})$. Entonces la asociación $\mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}\mathfrak{A}_{p(\mathcal{V})}$ establece una inyección del conjunto de variedades de exponente finito en su subconjunto de variedades con inyectivos abelianos no triviales.

<u>Demostración</u>: Si $\mathcal{V}$ es de exponente finito, efectivamente existe un primo que no divide a $e(\mathcal{V})$ y por (9.14), $\mathcal{V}\sigma_{p(\mathcal{V})}$ tiene inyectivos abelianos no triviales. Por la unicidad en (5.2), la asociación es inyectiva. //

Lista de Símbolos

$\bar{\bar{A}}$	Cardinalidad de A
$A \setminus B$	Diferencia de conjuntos
$A/\sim$	Conjunto cociente
$x \mapsto y$	"x se aplica en y"
φ/B	restricción de φ a B
<u>Gru</u>	Variedad de los grupos
<u>τ-Alg</u>	p. 1
<u>Ab</u>, $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{N}_c$, $\mathfrak{S}_\ell$, $\mathfrak{T}$	(3.3)
$\mathfrak{V}\mathfrak{W}$	Producto de variedades (§3)
$P(G)$	Subgrupo verbal
G'	Subgrupo derivado (4.1)
nG	$\{x^n\}(G)$ (4.1)
V	Conjunto de las variables (p.6)
$\mathfrak{X}$	(p. 6)
F	(p. 13)
$V(S)$	Variedad definida por S (p.6)
$E(\mathfrak{V})$	Ecuaciones de $\mathfrak{V}$ (3.2)
$:=$	Igual por definición a
$//$	Fin de la prueba (o su ausencia)

Bibliografía

[B.H.N.] "Special Topics in Algebra: Universal Algebra". B.H. Neumann. Courant Inst. of. Math. Sciences, 1962.

[B.M.] "An algebraic introduction to mathematical logic". Barnes-Mack. Springer, GTM-22, 1975

[C] "Universal Algebra". P.M. Cohn. Harper & Row, 1965.

[C.R.] "Representation Theory of finite groups and associative algebras". Curtis-Reiner. Interscience, 1962.

[H.N] "Varieties of Groups". Hanna Neumann. Springer, Ergebnisse... 37, 1967.

[H.S] "A course in Homological Algebra". Hilton-Stammback. Springer, GTM-4, 1970

[O.C.G] "Injectivity in categories of groups and algebras". O.C. García. An. Inst. de Mat. UNAM, 14 (1974) 95-115.

[R] "The Theory of Groups" 2nd Ed. J.J. Rotman. Allyn & Bacon, 1973.