UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

1 ejem.
13

# ANALISIS NO - STANDARD:
# UNA ALTERNATIVA

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A:

MA. DE LOURDES GUERRERO ZARCO

MEXICO, D. F. 1979

INDICE

Pag.

# Introducción.

El problema de los infinitesimales data desde la época griega, y sólo se le ha dado solución satisfatoria (Robinson 1961) con los nuevos métodos proporcionados por la Lógica Matemática al considerarse un modelo no-standard de $\mathbb{R}$.

Los infinitésimos surgen con los griegos en el cálculo de áreas, pero su uso no era considerado riguroso y todo cálculo que involucrará su uso debía ser reestablecido prescindiendo de ellos, dado que este cálculo lo consideraban como un método y no una prueba. Para evitar el uso de los infinitesimos, Eudoxo aporta la primera rigurosa técnica matemática conocida con el nombre del método de exhaución, la cual resulta ser extraordinariamente fecunda en el cálculo exacto de áreas y volúmenes.

Durante mucho tiempo se les usó en forma indebida; a mediados del siglo XVII con el surgimiento del "método de fluxiones" de Newton y el "cálculo infinitesimal" de Leibniz volvieron a la escena. Leibniz, quien los usó con mas convicción consideraba a los infinitesimales algunas veces como cantidades distintas de cero no obstante sumamente pequeñas, y en otras ocasiones como cantidades constantes nulas, lo cual da pie a grandes críticas por el carácter contradictorio de este manejo. Siglo y medio despues de la creación del cálculo infinitesimal Weirstrass los excluye mediante la técnica del $\varepsilon$-$\delta$ que ya había sido usada por Couchy.

Dada la arquimedianidad de $\mathbb{R}$, ningún uso de la noción de infinitesimal en $\mathbb{R}$ puede ser consistente, mas sin embargo la construcción de un modelo no-standard de $\mathbb{R}$ (no arquimediana) dada por Robinson nos permite hablar de ellos y, con el concepto de internalidad podemos establecer cuales son las propiedades comunes a los reales e infinitésimos y cuales no. Por ejemplo; sea $\varphi: \forall x \, \forall y \, (x>0, y>0, x>y \Rightarrow \exists \, n \in \mathbb{N}$ t.q. $ny > x)$ es verdadero en $x, y \in \mathbb{R}$, pero no sucede lo mismo si tomamos $x$ un real infinito (es decir $x^{-1}$ infinitesimal). Leibniz ya había tratado a los infinitésimos como si tuvieran las mismas propiedades que los números reales, y es precisamente el no saber cuales de esas propiedades comparten, uno de los factores que introduce contradicción en su uso.

El propósito de este trabajo es presentar las distintas construcciones de estos modelos no-standard de $\mathbb{R}$ y mostrar cómo se puede solucionar en forma no-standard algunos problemas relativos a $\mathbb{R}$.

# Capítulo I

## Construcción Lógica (Robinson)

## 1.- Lenguajes de Primer Orden con Igualdad, Generalizadas. Estructuras de Primer Orden.

Definición.- Un lenguaje formal $\mathcal{L}$ es una pareja $\langle S, \Phi \rangle$, donde $S$ es un conjunto no-vacío de símbolos y $\Phi$ un conjunto de reglas, llamadas reglas de formación.

Una expresión en un lenguaje $\mathcal{L}$, es una sucesión de elementos de $S$. Sea $E$ el conjunto de todas las expresiones de $\mathcal{L}$, aplicando las reglas de formación a $E$, obtenemos el llamado conjunto de fórmulas bien formadas (f.b.f) del lenguaje $\mathcal{L}$.

Definición.- Llamamos lenguaje de 1er orden con igualdad (=) a toda $\mathcal{L} = \langle S, \Phi \rangle$ donde $S$ consta de:

a) Un conjunto de constantes individuales (C.I.) $\{c_i, i \in I\}$. Este conjunto es arbitrario pero fijo.

b) $\{x_j\}_{j \in J}$ Conjunto de variables individuales, el cual debe ser infinito numerable.

c) $\{P_k^{\delta(k)}, k \in K\}$ conjunto de predicados donde $\delta : K \to \mathbb{N}$ y $\delta(k)$ es la aridad de cada predicada $P_k$. Este conjunto es finito o numerable pero no-vacío.

d) $\{f_\ell,\ \ell \in L\}$ conjunto de símbolos funcionales, eventualmente vacío

e) Un conjunto de símbolos lógicos:

Los conectivos:

i) $\sim$ (negación)

ii) $\vee$ (disyunción)

iii) $\wedge$ (conjunción)

iv) $\rightarrow$ (implicación)

v) $\longleftrightarrow$ (equivalencia)

Los cuantificadores:

vi) $\forall x$ (cuantificador universal)

vii) $\exists x$ (cuantificador existencial)

El símbolo de igualdad:

viii) $=$

f) Un conjunto de símbolos auxiliares puntuación.

( (paréntesis izquierdo) – ) (paréntesis derecho) – , (coma) – .... (puntos suspensivos).

En $\Phi$ tenemos las siguientes reglas de formación:

a) Todo predicado n-ario seguido de n-símbolos individuales o ~~de símbolos funcio~~

~~nota~~ es una f. b. f.

b) Si $\varphi$ y $\psi$ son f. b. f. y $x_i$ una variable individual, entonces; $\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \longleftrightarrow \psi$, $(\forall x_i)\varphi$, $(\exists x_i)\varphi$ son f. b. f.

c) Una expresión es una f. b. f. sii se puede construir por medio de a) ó b).

Las f. b. f de a) se llaman fórmulas atómicas.

<u>Definición</u>.- Cualquier ocurrencia de la variable $x_i$ en una expresión de la forma "$(\forall x_i)\varphi$" ó "$(\exists x_i)\varphi$", diremos que es acotada. Una ocurrencia de una variable se dice que es libre si no es acotada. Una f. b. f en la cual ninguna variable ocurre libre la llamaremos un enunciado.

Convenimos en escribir "$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$" indicando que $\varphi$ es una f. b. f. en la cual a lo sumo, las variables $x_1, \ldots, x_n$ tienen ocurrencia libres en $\varphi$. Si $c_1, \ldots, c_n$ son constantes individuales, denotamos por "$\varphi[c_1, \ldots, c_n]$" al enunciado obtenido de reemplazar todas las ocurrencias libres de $x_i$ por $c_i$ en $\varphi$.

El lenguaje formal $\mathcal{L}$ descrito anteriormente se llama; lenguaje de Predicados de

$1^{er}$ orden con igualdad.

Definición.- Un lenguaje de $1^{er}$ orden con igualdad se dice que es generalizado, si el conjunto de constantes individuales es infinito.

Denotaremos a los lenguajes de $1^{er}$ orden con igualdad generalizados por $\mathcal{L}^{=}$.

Definición.- Sean $\mathcal{L}^{=} = \langle S, \Phi \rangle$, $\mathcal{L}' = \langle S', \Phi' \rangle$ lenguajes de primer orden con "=", generalizados. Decimos que $\mathcal{L}'$ es una extensión de $\mathcal{L}^{=}$ sii $S \subseteq S'$ y $\Phi = \Phi'$.

Nota.- Llamamos metalenguaje, al lenguaje que utilizamos para describir al lenguaje $\mathcal{L}^{=}$, en éste caso el español.

Definición.- Una estructura de $1^{er}$ orden $M$, es un par $\langle A, \{R_i^{\mu(i)}, i \in I\} \rangle$, con $A$ un conjunto no vacío de símbolos llamado conjunto de individuos de $M$, o base de $M$, y para cada $i \in I$, $R_i^{\mu(i)}$ es un subconjunto de $A^{\mu(i)}$.
A $\mu(i)$ se le llama la aridad de la relación $R_i$.

Ejemplo.- Un campo ordenado es un par $C = \langle A, \{R_1^2, R_2^2, R_1^3, R_2^3\} \rangle$ donde $A$ es el conjunto de individuos de $C$, $R_1^2$ y $R_2^2$ son relaciones binarias, $R_1^3$ y $R_2^3$ son relaciones ternarias donde $(a,b)\in R_1^2$ sii $a=b$; $(a,b)\in R_2^2$ sii $a<b$; $(a,b,c)\in R_1^3$ sii $a+b=c$ y $(a,b,c)\in R_2^3$ sii $a\cdot b=c$.

<u>c.- Interpretación de $\mathcal{L}^=$.</u>

Consideremos una estructura de 1er orden M, y un $\mathcal{L}^=$; definimos un mapeo $g: A\cup\{R_i^{\mu(i)}, i\in I\}\to S$ 1-1 tal que, $\forall x\in A$, $g(x)$ es una C.I. y $\forall i\in I$ $g(R_i^{\mu(i)})=P_k^{\delta(k)}$ sii $\mu(i)=\delta(k)$.

<u>Nota</u>.- $g$ no necesariamente es sobre.

<u>Definición</u>.- Una f.b.f. $\varphi$ de $\mathcal{L}^=$ está definida en M sii todas las C.I. y los predicados que ocurren en $\varphi$ son imagen de individuos y relaciones de M bajo $g$.

Definimos recursivamente, "El enunciado $\varphi$ definido en M es verdadero en M bajo un mapeo $g$", que denotamos $M\models_g\varphi$, de la siguiente manera:

1) si $\varphi$ es enunciado atómico, $\varphi: P_k^{\delta(k)}(c_1,\dots,c_{\delta(k)})$. $M\models_g\varphi$ sii $R_i^{\mu(i)}(a_1,\dots,a_{\mu(i)})$ donde $g(R_i^{\mu(i)})=P_k^{\delta(k)}$ y $g(a_j)=c_j$ para $j=1,2,\dots,\mu(i)=\delta(k)$

2) $\varphi: \sim\Psi$. $M\models_g\varphi$ sii $M\not\models_g\Psi$

3) $\varphi: \psi \vee \chi$. $M \models_g \varphi$ sii $M \models_g \psi$ ó $M \models_g \chi$

4) $\varphi: \psi \wedge \chi$. $M \models_g \varphi$ sii $M \models_g \psi$ y $M \models_g \chi$

5) $\varphi: \psi \rightarrow \chi$. $M \models_g \varphi$ sii $M \not\models_g \psi$ ó $M \models_g \chi$

6) $\varphi: \psi \leftrightarrow \chi$. $M \models_g \varphi$ sii $M \models_g \psi \rightarrow \chi$ y $M \models_g \chi \rightarrow \psi$

7) $\varphi: (\forall x_i)\, \psi(x_i)$. $M \models_g \varphi$ sii $M \models_g \psi[c_i]$ para toda C.I. $c_i$ de $\mathcal{L}^=$ que sea imagen de algún individuo de $M$ bajo $g$.

8) $\varphi: (\exists x_i)\, \psi(x_i)$. $M \models_g \varphi$ sii $M \models_g \psi[c_i]$ para alguna C.I. $c_i$ de $\mathcal{L}^=$ que corresponda a algún individuo de $M$ bajo $g$.

Definición.- Sea $simb\{\varphi\} = simb(\varphi) = \{x \mid x$ es C.I. o predicado que ocurre en el enunciado $\varphi\}$.

Nota.- Podemos definir $M \models_{g'} \varphi$ (relativamente a $g'$) conociendo sólo $g_\varphi = g_{|\{x \mid g(x) \in simb(\varphi)\}}$. Dado $g_\varphi$ mapeo parcial, podemos extenderlo a $g'$ mapeo total de $A \cup \{R_i^{\mu(i)}, i \in I\}$ en $S$, sin modificar el valor de verdad de $\varphi$ en $M$. Cuando afirmemos que $M \models_{g'} \varphi$, implícitamente estableceremos que estamos en el caso en que tenemos una extensión $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{L}^=$, en la cual $g_\varphi$ se puede extender a $g'$.

Lo anterior también se puede generalizar para un conjunto de enunciados $K$ de $\mathcal{L}^=$.

Definición.- Sea $\langle S_K, \phi_K \rangle = \mathcal{L}(K)$ un lenguaje formal tal que simb $(K) \subset S_K$. Sea $g: A \cup \{R_i^{\mu(i)}, i \in I\} \to S_K$ un mapeo 1-1. Si $\mathcal{L}' = \langle S', \phi' \rangle$ y $\mathcal{L}'' = \langle S'', \phi'' \rangle$ son extensiones de $\mathcal{L}(K)$, cualesquiera que sean los mapeos extensión $g': A \cup \{R_i^{\mu(i)}, i \in I\} \to S'$
$g'': A \cup \{R_i^{\mu(i)}, i \in I\} \to S''$ tenemos que
$M \models_{g'} \varphi \ \forall \varphi \in K$ sii $M \models_{g''} \varphi \ \forall \varphi \in K$. Escribimos $M \models_g K$ para indicar que $M \models_g \varphi \ \forall \varphi \in K$.

Definición.- Una estructura $M$ es modelo de un conjunto de enunciados $K$ sii $M \models_g K$.

## 3.- Principio de Finitud.

Ahora probaremos un resultado de fundamental importancia para nuestro propósito, pero antes daremos algunas definiciones auxiliares.

Definición.- Un conjunto de enunciados $K$ es consistente sii existe $M$, una estructura tal que $M \models_g K$.

Definición.- Una f.b.f. $\varphi$ de $\mathcal{L}^=$ está en forma normal prenex si es de la forma

$(Q_1 x_1), \ldots, (Q_n x_n)\varphi$, donde cada $Q_i$ es, o bien un cuantificador universal o un cuantificador existencial y $\varphi$ es una f.b.f. sin cuantificadores.

<u>Definición</u>.- Dos f.b.f. $\varphi$ y $\chi$ de $\mathcal{L}^=$ son equivalentes sii contienen las mismas C.I. y los mismos predicados.*

Si es el caso en que $\varphi$ y $\chi$ están definidas en una estructura $M$, entonces $M \models_g \varphi$ sii $M \models_g \chi$ y $M \not\models_g \varphi$ sii $M \not\models_g \chi$.

<u>Teorema</u> 3.1.- Dada cualquier f.b.f. $\varphi$ de $\mathcal{L}^=$, existe una f.b.f $\varphi_p$ en forma normal prenex tal que $\varphi_p$ es equivalente a $\varphi$.

Prueba.- Inducción sobre la complejidad de $\varphi$.

<u>Principio de Finitud</u>.-

Sea $K$ un conjunto de enunciados, tal que todo subconjunto finito de $K$ es consistente. Entonces $K$ es consistente.

Prueba.- Sea $K_p$ el conjunto que se obtiene de $K$ por sustituir cada $\varphi \in K$ por el enunciado equivalente $\varphi_p$. Supongamos que todo subconjunto finito de $K$ es consistente, y sea $K'_p$ un subconjunto finito de $K_p \Rightarrow$ que $K'_p$

es consistente.

A continuación probaremos que $K_p$ admite modelo el cual es también modelo de $K$ y así por definición concluir que $K$ es consistente. Para ésto introducimos la manera de interpretar los enunciados en forma normal prenex. Sea $\varphi: (\forall x)(\exists y)\,\psi(x,y)$ donde $\psi(x,y)$ es una f.b.f., $M \models \varphi$ significa que para toda C.I. $\underline{a}$ la cual sea imagen de algún individuo de $M$, existe una C.I. $\underline{b}$ tal que $M \models \psi[a,b]$, aplicando el axioma de eleccion podemos seleccionar tal $\underline{b}$ para cada $\underline{a}$ y decir que existe una función

$f: \{a \text{ C.I.} / a = g(x) \text{ con } x \in A\} \to \{a \text{ C.I.} \mid a = g(x) \text{ con } x \in A\}$

tal que $\forall \underline{a} \in D_f$, $M \models \psi[a, f(a)]$ (a tal función $f$ se le conoce con el nombre de función Skolem). La expresión $\psi(x, f(x))$, la cual no tiene sentido en $\mathcal{L}^=$, la llamamos, enunciado abierto (Skolem) y escribimos $M \models \psi(x, f(x))$ indicando que $M \models \psi[a, f(a)]\ \forall a \in D_f$. Ahora construiremos un modelo para $K_p$ en forma de un ultraproducto. Sea $I$ el conjunto de todos los subconjuntos finitos de $K_p$, para cada $i \in I$, sea $M_i$ una estructura tal que $M_i$ sea modelo de $i$ bajo el mapeo $g_i$. Sea $M = \{M_i\}_{i \in I}$, seleccionemos un apropiado ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre $I$ (es decir un ultrafiltro no principal).

Para cada $i \in I$, sea $d_i = \{\mu \in I / i \subseteq \mu\}$ y sea $\mathcal{U}_0 = \{d_i\}_{i \in I}$.

$\mathcal{U}_0$ cumple con las siguientes propiedades:

i) $\emptyset \notin \mathcal{U}_0$

ii) si $A, B \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{U}_0$.

Consideremos los conjuntos de subconjuntos de $I$ que son extensión de $\mathcal{U}_0$. Por el lema de Zorn, de entre éstos conjuntos hay algunos que son maximales, sea $\mathcal{U}$ uno de ellos. $\mathcal{U}$ claramente cumple con i) ii) además de:

iii) si $A \in \mathcal{U}$, $A \subset B \subset I \Rightarrow B \in \mathcal{U}$

iv) si $A \subset I$, o bien $A \in \mathcal{U}$ o $I - A \in \mathcal{U}$.

Por consiguiente $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre $I$. Probamos que el ultraproducto $M_{\mathcal{U}}$ es un modelo para $k_p$ donde

$M_{\mathcal{U}} = \langle \prod_{i \in I} A_i/\mathcal{U}, \{(R_{\mathcal{U}})_\ell^{\mu(\ell)}, \ell \in L\} \rangle$ con

$\prod_{i \in I} A_i/\mathcal{U} = \{f_{\mathcal{U}} / f \in \prod_{i \in I} A_i\}$, donde

$\prod_{i \in I} A_i = \{f / f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ y $f(i) \in A_i\}$

$f_{\mathcal{U}} = \{g \in \prod_{i \in I} A_i / f \sim_{\mathcal{U}} g\}$, $f \sim_{\mathcal{U}} g$ sii $\{i / f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$

y sobre $\prod_{i \in I} A_i/\mathcal{U}$ se define para cada $\ell \in L$ la relación $(R_{\mathcal{U}})_{\ell}^{\mu(\ell)}$ como; $(f_{\mathcal{U}}^{1},\ldots,f_{\mathcal{U}}^{\mu(\ell)})\in(R_{\mathcal{U}})_{\ell}^{\mu(\ell)}$

sii $(f_1,\ldots,f_{\mu(\ell)})\in R_{\ell}^{\mu(\ell)}$

sii $\{i\mid(f_1^{(i)},\ldots,f_{\mu(\ell)}^{(i)})\in R_{\ell_i}^{\mu(\ell)}\}\in\mathcal{U}$.

Sea $\varphi\in K_P \Rightarrow \varphi$ está en forma normal prenex. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$\varphi:(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\exists u)(\exists v)(\forall w)(\exists t)\,\psi(x,y,z,u,v,w,t)$

donde $\psi$ es una f. b. f. sin cuantificadores. Sabemos que $M\models\varphi$ sii el enunciado abierto.

$\psi(x,\alpha(x),z,\beta(x,z),\gamma(x,z),w,\delta(x,z,w))$ es verdadera en $M$ para apropiadas elecciones de funciones Skolen $\alpha,\beta,\gamma,\delta$. Por demostrar que: $M_{\mathcal{U}}\models\varphi$, lo cual es equivalente a probar que las funciones Skolen $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ se pueden definir en $M_{\mathcal{U}}$ de tal manera que $M_{\mathcal{U}}\models\psi(x,\alpha(x),z,\beta(x,z),\gamma(x,z),w,\delta(x,z,w))$, para ésto supongamos que tenemos una elección apropiada de las funciones Skolen $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ en todas las $M_i$ para las cuales $\varphi\in i$ y que son definidas arbitrariamente para las restantes $M_i$. Sean $f,g,h$ individuos cualesquiera de $M_{\mathcal{U}}$, definimos $K=\beta(f,g)$ como

$K(i)=\beta(f(i),g(i))\ \forall i\in I \Rightarrow$ que $K$ es un individuo de $M_{\mathcal{U}}$ y $\therefore$ $\beta$ se puede definir en $M_{\mathcal{U}}$. De manera semejante definimos las funciones $\alpha, \gamma, \delta$ en $M_{\mathcal{U}}$. Ahora hay que hacer ver que con éstas definiciones $M_{\mathcal{U}} \models \varphi(f, \alpha(f), g, \beta(f,g), \gamma(f,g), h, \delta(f,g,h))$ donde $\varphi$ no contiene cuantificadores, pero la anterior sólo está determinado por los valores de verdad de las fórmulas atómicas que ocurren en $\varphi$. Sean $P_k^{\delta(k)}(f_1, \ldots, f_{\delta(k)})$ con $k = 1, \ldots, l$ dichas fórmulas atómicas donde cada $f_m$ con $m = 1, \ldots, \delta(k)$ es, ó una C.I que ocurre en $\varphi$ ó alguna de las funciones $f, g, h$ ó alguna de los valores $\alpha(f), \beta(f,g), \gamma(f,g), \delta(f,g,h)$. Por la manera en que se define $M_{\mathcal{U}}$ tenemos que $M_{\mathcal{U}} \models P_k^{\delta(k)}(f_1, \ldots, f_{\delta(k)})$ sii

$$X_{k_i} = \{ i \mid M_i \models P_{k_i}^{\delta(k)}(f_1(i), \ldots, f_{\delta(k)}^{(i)}) \} \in \mathcal{U}.$$

$$\text{Sea } X'_{k_i} = \begin{cases} X_{k_i} & \text{si } X_{k_i} \in \mathcal{U} \\ I - X_{k_i} & \text{si } X_{k_i} \notin \mathcal{U} \end{cases} \quad \text{para } k = 1, \ldots, l$$

y sea $X = X'_{1_i} \cap X'_{2_i} \cap \cdots \cap X_{l_i}$, observemos que $\forall i \in X$ una fórmula atómica $P_k^{\delta(k)}(f_1, \ldots, f_{\delta(k)})$ es verdadera en $M_{\mathcal{U}}$ sii $R_{k_i}^{\delta(k)}(f_1(i), \ldots, f_{\delta(k)}(i))$

es verdadera en $M_i$.

Sea $Y \subset I$ tal que:

$$\Upsilon=\left\{\begin{array}{l} i \mid M_i \models \psi(f(i),\alpha(f(i)),g(i),\beta(f(i),g(i)), \\ \gamma(f(i),g(i)),h(i),\delta(f(i),g(i),h(i))) \end{array}\right\}$$

y sea $\lambda=\{\varphi\}$, si $\mu\in d_\lambda \Rightarrow$ que $\mu$ es un subconjunto finito de $k$ el cual contiene a $\varphi$. Entonces $M_\mu\models\varphi$ y $\therefore$

$M_\mu\models\psi(f(\mu),\alpha(f(\mu)),g(\mu),\beta(f(\mu),g(\mu)),\gamma(f(\mu),g(\mu)),h(\mu),\delta(f(\mu),g(\mu),h(\mu)))$

de aquí que $\mu\in\Upsilon$ y por consiguiente $d_\lambda\subset\Upsilon$, dado que $\mathcal{U}$ es filtro $\Upsilon\in\mathcal{U}\Rightarrow X\cap\Upsilon\neq\emptyset$. Sea $\eta\in X\cap\Upsilon$, entonces por definición de $X$, $M_\mathcal{U}\models P_k^{\delta(k)}(f_1,\ldots,f_{\delta(k)})$ sii $M_\eta\models P_{k_\eta}^{\delta(k)}(f_1(\eta),\ldots,f_{\delta(k)}(\eta))$ para $k=1,\ldots,\ell$ y por definición de $\Upsilon$

$M_\eta\models\psi(f(\eta),\alpha(f(\eta)),g(\eta),\beta(f(\eta),g(\eta)),\gamma(f(\eta),g(\eta)),h(\eta),\delta(f(\eta),g(\eta),h(\eta)))$

$\therefore$, $M_\mathcal{U}\models\psi(f,\alpha(f),g,\beta(f,g),\gamma(f,g),h,\delta(f,g))$

y por consiguiente $M_\mathcal{U}\models\varphi$.

El anterior procedimiento se aplica de igual manera si $\psi(x,y,z,u,v,w,t)$ contiene C.I. ó $\varphi$ comienza con un cuantificador existencial. Si $\underline{a}$ es una C.I. la cual ocurra en $\varphi$ y $p$ es el elemento de $\prod_{i\in I} A_i/\mathcal{U}$ el cual es denotado por $\underline{a}$, entonces $p(\mu)$ es el elemento de $M_\mu$ el cual es denotado por $\underline{a}$ $\forall\mu\in d_\lambda$. Por lo tanto $M_\mathcal{U}\models\varphi$ en todos los casos => que $M_\eta$ es modelo de $K_P$ y por consiguiente de $K$ => por definición que $K$ es consistente.

## 4.- Estructuras y Lenguajes de Orden Superior.

Propiedades de 1er Orden.- Dada una clase de estructuras $\mathcal{C}$, puede o no existir una f.b.f. cerrada, es decir un enunciado $\varphi$ de un lenguaje de 1er orden talque $M \models \varphi$ sii $M \in \mathcal{C}$. Por ejemplo, si $\mathcal{C}$ es la clase de los grupos o la clase de los campos, existe $\varphi$; entonces decimos que la propiedad de "ser grupo" o "ser campo" es de 1er orden, cuando tal $\varphi$ no existe se dice que la propiedad no es de 1er orden; tal es el caso si $\mathcal{C}$ es la clase de los conjuntos bien ordenados. Algunas de las propiedades que no son de 1er orden se pueden expresar mediante enunciados de lenguaje de 2º orden (o de orden superior).

Ahora hablaremos de estructuras de orden superior y construiremos lenguajes adecuados para hablar de ellos, y veremos como "reducir" un lenguaje de orden superior a un lenguaje con símbolos de tipo de 1er orden.

Dado un conjunto $A$ consideremos todas las relaciones entre elementos de $A$, entre elementos de $A$ y relaciones en $A$, etc., mas sin embargo hay que evitar tomar encuenta subconjuntos (relaciones 1-arias) de elementos y relaciones de $A$, y en general, la consideración de subconjuntos donde haya relaciones de distinto nivel, para ello introduciremos la noción de tipo.

Llamaremos a los elementos de $A$ individuos (de $A$).

<u>Definición</u>.- El conjunto $T$ de tipos, es el mínimo conjunto que satisface;

i) $0 \in T$

ii) si $\tau_1, \dots, \tau_n \in T$ entonces la sucesión finita $(\tau_1, \dots, \tau_n) \in T$.

Nota.- $\# T = \aleph_0$

Asignaremos tipo a los individuos, subconjuntos y relaciones de $A$ que son de nuestro interés.

Todo individuo de $A$ tiene tipo 0.

$A_\tau$ con $\tau \in T$ denota al conjunto de relaciones de tipo $\tau$, de aquí que no podamos referir a los individuos como relaciones de tipo 0 y escribir $A_0 = A$.

A toda relación $R \subset A_{z_1} \times \ldots \times A_{z_n}$ le asignaremos el tipo $z = (z_1, \ldots, z_n)$.

Sea $\underline{X}$ un conjunto cualquiera y sea $\sigma : I \to \underline{X}$ una función donde $I$ es un conjunto de índices; si $\sigma$ no es una función inyectiva entonces diremos que $\{\sigma(i) \mid i \in I\}$ es un subconjunto de $\underline{X}$ con repeticiones.

<u>Definición</u>.- Una estructura $M$ de orden superior es cualquier conjunto $\{B_z\}_{z \in T}$ tal que para algún conjunto de individuos $A$, toda $B_z$ es un subconjunto de $A_z$ con repeticiones y $B_0 = A_0 = A$.

<u>Definición</u>.- Una estructura $M = \{B_z\}_{z \in T}$ es completa sii la función $\sigma : T \to A_z$ es suprayectiva, es decir si $\forall z \in T$, $B_z$ contiene todas las relaciones de $A_z$.

<u>Definición</u>.- $M = \{B_z\}_{z \in T}$ es una estructura normal sii $B_z$ no contiene ninguna relación de $A_z$, repetida veces, es decir si $\sigma : T \to A_z$ es inyectiva.

Diremos que una estructura es completa y normal sii $B_z = A_z$ $\forall z \in T$.

Consideremos ahora un lenguaje $\mathcal{L} =$ donde el conjunto de predicados está dado por $\{\Phi_z\}_{z\in T-\{0\}}$, talque si $z=(z_1,\ldots,z_n)$, la aridad de $\phi_z$ es $n+1$; de ahora en adelante hablaremos de éste lenguaje como el lenguaje $\Delta$. Si $\Phi_z(x, y_1,\ldots, y_n)$ y $z=(z_1,\ldots,z_n)$, entonces diremos que $z_{i-1}$ es el tipo del i-ésimo lugar en $\Phi_z$.

Definición.- Una f.b.f. de $\Delta$ es estratificada si toda constante y variable individual que aparece en $\varphi$, aparece solamente en los lugares del mismo tipo.

Definición.- Sea $K$ un conjunto de enunciados de $\Delta$ talque:

i) todo $\varphi \in K$ es estratificada.

ii) Para toda C.I. que ocurra en cualquier $\varphi \in K$, el tipo de los lugares en los cuales aparece es el mismo en toda $\varphi \in K$ (a éste tipo le llamaremos el tipo de la constante individual en $K$).

Entonces diremos que $K$ es un conjunto de enunciados estratificados de $\Delta$.

Sea $M=\{B_z\}_{z\in T}$ una estructura de orden superior y supongamos que tenemos definido un mapeo $g: \{C.I. \text{ de } \Lambda\} \to \{B_z\}_{z\in T}$ 1-1.

Definición.- Un enunciado estratificado $\varphi$ de $\Lambda$ es admisible en $M$ bajo $g$ sii toda C.I. $c$ que ocurre en $\varphi$ pertenece al $\{C.I \text{ de } \Lambda\}$ y $g(c) \in \{B_z\}_{z\in T}$ talque el tipo de $g(c)$ es el tipo de los lugares en los cuales $c$ ocurre en $\varphi$.

Definición.- Un enunciado $\varphi$ de $\Lambda$ estraficado y admisible en $M$ bajo $g$ es verdadero en $M$ ($M \models_g \varphi$) sii,

i) $\varphi: \Phi_z(a, b_1, \ldots, b_n)$ (enunciado atómico). $M \models_g \varphi$ sii $(g(b_1), \ldots, g(b_n))$ satisface la relación $g(a)$ en $M$.

ii) $\varphi: \sim \chi$

$\varphi: \chi \vee \psi$

$\varphi: \chi \wedge \psi$

$\varphi: \chi \to \psi$

$\varphi: \chi \leftrightarrow \psi$ se definen en la manera usual.

iii) $\varphi: (\exists x)\, \psi(x)$

Sea $z$ el tipo de los lugares en los cuales $x$ ocurre en $\psi$. $M \models_g (\exists x)\, \psi(x)$ sii existe $c \in \{C.I. \text{ de } \Lambda\}$ talque $g(c) \in \{B_z\}_{z\in T}$ es de tipo $z$ y $M \models_g \Psi[c]$.

iv) $\varphi : (\forall x)\, \Psi(x)$.

$M \models_g (\forall x)\, \Psi(x)$ sii $M \models_g \Psi[c]$ para toda $c \in \{$C.I. de $\Lambda\}$ tal que $g(c) \in \{B_z\}_{z \in T}$ y su tipo es el tipo de los lugares en los cuales $x$ ocurre en $\varphi$.

Nota.— Podemos definir $M \models_g \varphi$ con $\varphi$ enunciado estratificado y admisible en $M$ conociendo solamente a $g_\varphi = g / \{$C.I. que ocurren en $\varphi\}$ extendiendo $g_\varphi$ mapeo parcial a un mapeo total $g' : \{$C.I de $\Lambda\} \to \{B_z\}_{z \in T}$ sin modificar el valor de verdad del enunciado $\varphi$ en $M$.

Definición.— Si $\varphi$ es un enunciado admisible en $M$ bajo $g$, de tal manera que no sea verdadero en $M$, entonces diremos que dicho enunciado es falso en $M$ y lo denotamos por $M \not\models_g \varphi$.

Definición.— Si $K$ es un conjunto de enunciados estratificados y admisibles en $M$ bajo $g$, $M \models_g K$ sii $M \models_g \varphi \;\; \forall \varphi \in K$.

Extendamos el lenguaje $\Lambda$ a un lenguaje $\Lambda'$ añadiendo un conjunto de predicados 1-arios $\theta_z(\ )\ \forall z \in T$. Los predicados $\theta_z(\ )$ serán llamados, símbolos de tipo de 1er orden.

Sea $\lambda$ un mapeo tal que

$\lambda$: {f.b.f. estratificadas de $\Lambda$} $\to$ {f.b.f de $\Lambda'$}

definida de la siguiente manera:

i) si $\varphi$ es f.b.f. atómica, entonces $\lambda(\varphi) = \varphi$

ii) si $\varphi: \sim \psi$, entonces $\lambda(\varphi) = \sim\lambda(\psi)$

$\varphi: \psi \vee \chi$, $\varphi: \psi \wedge \chi$, $\varphi: \psi \to \chi$, $\varphi: \psi \leftrightarrow \chi$ se definen en la manera usual.

iii) si $\varphi: (\exists x)\psi$, entonces $\lambda(\varphi) = (\Theta_z(x) \wedge \lambda(\psi))$ donde z es el tipo de los lugares en los cuales x ocurre en $\psi$. Si x no ocurre en $\psi$, entonces z será el tipo 0.

iv) Si $\varphi: (\forall x)\psi$, entonces $\lambda(\varphi) = (\Theta_z(x) \to \lambda(\psi))$ donde z es el tipo de los lugares en los cuales x ocurre en $\psi$ y z=0 si x no ocurre en $\psi$.

<u>Definición</u>.- $\lambda(\varphi) = \varphi_\lambda$ el tipo transformado de $\varphi$.

Sea M una estructura de orden superior, asociamos a M una estructura $M_\lambda$ de primer orden donde su conjunto de individuos consta de $\{B_z\}_{z\in T}$ y el conjunto de relaciones de $M_\lambda$ consiste de un conjunto $\{B_z(\ \ )\}_{z\in T}$ de relaciones 1-arias junto con un conjunto

$\{F_z(x, Y_1, \ldots, Y_n)$ con $z \in T - \{0\}\}$ de relaciones donde $F_z$ tiene el mismo número de variables que $\phi_z$.

<u>Definición.</u>- Sea $R \in \{B_z\}_{z \in T}$ es decir $R$ es un individuo de $M_\lambda$, entonces $M_\lambda \models S_z(R)$ sii $z$ es el tipo de $R$ en $M$.

<u>Definición.</u>- Si $F_z$ es de aridad $n+1$ y $z = (z_1, \ldots, z_n)$ y $R, R_1, \ldots, R_n$ son individuos de $M_\lambda$, $M_\lambda \models F_z(R, R_1, \ldots, R_n)$ sii $R$ es de tipo $z$ en $M$, $R_i$ es de tipo $z_i$ en $M$ para cada $i = 1, \ldots, n$ y la sucesión $(R_1, \ldots, R_n)$ satisface $R$ en $M$.

Dada $g: \{\text{C.I. de } \Delta\} \to \{B_z\}_{z \in T}$ mapeo 1-1 definimos un mapeo

$$g': \{\text{C.I. y predicados de } \Delta'\} \to \{B_z\}_{z \in T} \cup \{S_z(\;)\}_{z \in T} \cup \{F_z(x, Y_1, \ldots, Y_n)\}_{z \in T - \{0\}}$$

tal que $g'(c) \in \{B_z\}_{z \in T}$ si $c \in \{\text{C.I. de } \Delta'\}$,

$$g'(\theta_z(\;)) \in \{S_z(\;)\}_{z \in T} \text{ y } g'(\phi_z(x, Y_1', \ldots, Y_n')) \in \{F_z(x, Y_1, \ldots, Y_n)\}_{z \in T - \{0\}}$$

Ahora enunciaremos y probaremos un resultado importante el cual nos permitirá saber cuándo un enunciado estratificado y admisible en una estructura de orden superior es verdadero en ésta, vía su asociada estructura de

1er orden.

Teorema 4.1.- Sea $\varphi$ un enunciado estratificado y admisible en $M$ bajo $g$. $M \models_g \varphi$ sii $M_\lambda \models_{g'} \varphi_\lambda$.

Prueba.- Por inducción sobre la complejidad de $\varphi$. Solo daremos dos casos.

Supongamos que $\varphi$ es un enunciado atómico $\Rightarrow \varphi : \phi_z(a, b_1, \ldots, b_n)$ donde $z = (z_1, \ldots, z_n)$ y $\{g(a), g(b_1), \ldots, g(b_n)\} \subset \{B_z\}_{z \in T}$. Sabemos que $M \models_g \varphi$ sii $(g(b_1), \ldots, g(b_n))$ satisface $g(a)$ en $M$

$M_\lambda \models_{g'} \varphi$ sii $F_z(g'(a), g'(b_1), \ldots, g'(b_n))$ es una relación en $M_\lambda$; tomando encuenta que $g(a) = g'(a)$, $g(b_i) = g'(b_i)$ para $i = 1, \ldots, n$ donde $\{g'(a), g'(b_1), \ldots, g'(b_n)\}$ está contenido en el conjunto de individuos de $M_\lambda$ y dado que $\varphi = \varphi_\lambda$, entonces $M \models_g \varphi$ sii $M_\lambda \models_{g'} \varphi_\lambda$

Sea $\varphi : (\exists x)\,\psi(x)$

$\Rightarrow$) Sabemos que $M \models_g (\exists x)\,\psi(x)$ sii existe $c \in \{$C.I. de $\Delta\}$ tal que $M \models_g \psi[c]$, pero por hipótesis inductiva tenemos que $M \models_g \psi[c]$ sii $M_\lambda \models_{g'} \lambda(\psi[c])$ (1), $\lambda(\psi[c])$ también se puede obtener sustituyendo x por c en $\lambda(\psi(x))$, y dado.

que $\Psi[c]$ es estratificado $\lambda(\Psi[c])$ también se puede obtener substituyendo $x$ por $c$ en $\lambda(\Psi(x))$, y dado que $\Psi[c]$ es estratificado $M_\lambda \models_{g'} \theta_2[c]$ ② donde $2$ es el tipo de los lugares en los cuales $c$ ocurre en $\Psi[c]$.

De ① y ② tenemos que $M_\lambda \models_{g'} \theta_2[c] \wedge \lambda(\Psi[c]) \Rightarrow M_\lambda \models_{g'} \varphi_\lambda$

$\Leftarrow$) Tenemos que $M_\lambda \models_{g'} \varphi_\lambda \Rightarrow M_\lambda \models_{g'} \theta_2[c] \wedge \lambda(\Psi[c])$ para alguna $c \in \{$C.I. de $\Lambda'\} \Rightarrow M_\lambda \models_{g'} \theta_2[c]$ y

$M_\lambda \models_{g'} \lambda(\Psi[c]) \Rightarrow$ que $\Psi[c]$ es un enunciado estraficado y admisible en $M$ para el cual hay dos alternativas que son; que sea verdadero ó falso en $M$. supongamos que $M \not\models_g \Psi[c] \Rightarrow$ por hipótesis inductiva que $M \not\models_{g'} \lambda(\Psi[c])$ lo cual contradice nuestra suposición, así que $M \models_g \Psi[c] \Rightarrow M \models_g \varphi$.

## 5- Principio de Finitud.
## (Versión Orden Superior).

Definición.- Un conjunto $K$ de enunciados de $\Lambda$ es consistente (en el sentido orden superior) sii $K$ es estratificado, admisible y verdadero en $M$, una estructura de orden superior.

Mostraremos ahora que el Principio de Finitud se tiene también para orden superior.

Teorema 5.1.- Sea $K$ un conjunto de enunciados de un lenguaje $\Lambda$, si todo subconjunto finito de $K$ es consistente, entonces $K$ es consistente.

Prueba.- Sea $\Lambda'$ una extensión del lenguaje $\Lambda$ como se puntualiza en la anterior sección, y sea $K_\lambda = \{\varphi_\lambda\}$ para todo $\varphi \in K$, mostraremos que $K_\lambda$ es consistente en el sentido de primer orden. Llamamos $H'$ a cualquier subconjunto finito de $K_\lambda \Rightarrow$ existe un $K' \subset K$ finito tal que $\varphi'_\lambda \in H'$ para todo $\varphi' \in K'$, si probamos que cada $H'$ es consistente entonces por el Principio de Finitud para primer orden podemos concluir que $K_\lambda$ es consistente y después por el teorema 4.1. tener que $K$ es consistente.

Por hipótesis tenemos que todo $K'$ es consistente entonces existe $M'$ estructura de orden superior tal que $K'$ es estratificado, admisible y verdadero en $M'$. Sabemos que a $M'$ le podemos asociar una estructura de primer orden $M'_\lambda$ y por teorema 4.1 $M'_\lambda \models H' \Rightarrow$ que $H'$ es consistente.

## 6.- Alargamientos de $K$.

Definiciones.- Sea $\varphi$ un enunciado y sea $K$ un conjunto de enunciados de un lenguaje de primer orden. Decimos que $\varphi$ está definido en $K$ si toda constante individual o todo predicado que ocurre en $\varphi$ también ocurre en $K$ (es decir en algún $\varphi' \in K$).

$K$ es contradictoria o inconsistente sii $K$ no es consistente.

$\varphi$ es deducible de $K$ si $K \cup \{\neg \varphi\}$ es contradictoria y ésto lo denotamos por $K \vdash \varphi$.

Ahora sea $\varphi$ un enunciado estratificado y $K$ un conjunto de enunciados estratificado de un lenguaje de orden superior. $\varphi$ está definido en $K$ si todas las constantes. individuales que ocurren en $\varphi$ también ocurren en $K$.

$\varphi$ es admisible en $K$ sii $K \cup \{\varphi\}$ es estratificado.

$\varphi$ es deducible de $K$ sii $K \cup \{\neg\varphi\}$ es estratificado. y contradictorio, en símbolos $K \vdash \varphi$.

Sea $K$ un conjunto estratificado de enunciados de un lenguaje $\Lambda$ y sea $\Gamma = \{$C.I. que ocurren en $K\}$. El tipo de cada $c \in \Gamma$ es el tipo de los lugares en los cuales $c$ ocurre en los enunciados de $K$.

Definición.- supongamos que el tipo de una $c \in \Gamma$ es $z = (z_1, z_2) \Rightarrow$ que $c$ denota una relación binaria. Definimos el conjunto $\Delta_c$ como $\{g \in \Gamma \mid K \vdash (\exists x)(\phi_2(c, g, x))\}$

Definición.- Una constante individual $c \in \Gamma$ es concurrente sii para todo conjunto finito $\{g_1, \ldots, g_n\} \subset \Delta_c$

$$a)\ K \vdash (\exists x)(\phi_2(c, g_1, x), \ldots, \phi_2(c, g_n, x))$$

Sea $\Gamma_0$ el conjunto de todas las C.I. en $\Gamma$ talque son concurrentes. $\forall c \in \Gamma_0$ seleccionemos una C.I. $a_c \neq c$ talque $a_c \notin \Gamma$, definimos $\Gamma_c$ como el conjunto de todas las $a_c$ seleccionadas de ésta manera.

Definición.- $\forall c \in \Gamma_0$, sea $K_c$ el conjunto de enunciados $\varphi_{c_g} : \phi_2(c, g, a_c)$ $\forall g \in \Delta_c$

Sea $K_0 = \bigcup\limits_{c \in \Gamma_0} K_c$

Definición.- El conjunto $H = K \cup K_0$ es llamado el alargamiento de K.

Sea $\mathcal{J}$ un conjunto de enunciados en un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}^{=}$ y sea $G = \{$ C.I. que ocurren en $\mathcal{J}\}$, supongamos que tenemos un mapeo $d: G \to G_1$ donde $G_1$ también es un conjunto de C.I. de $\mathcal{L}^{=}$. Sea $\mathcal{J}_1$ el conjunto de enunciados que se obtienen de $\mathcal{J}$, substituyendo cada $c \in G$ por su imagen $d(c)$ en $G_1$.

<u>Teorema</u>. 6.1.- Si $\mathcal{J}_1$ es consistente entonces $\mathcal{J}$ es consistente.

Omitimos la prueba de este teorema para dar paso a un resultado que es de nuestra mayor interés.

<u>Teorema</u> 6.2.- Sea K un conjunto estratificado de enunciados de un lenguaje $\Lambda$. Si K es consistente entonces H, su alargamiento, también es consistente.

Prueba.- Con ayuda del Teorema de Finitud para orden superior solo basta con probar que toda subconjunto finito de H es consistente, o mas precisamente, que $\bar{X} = K \cup K_0'$ con $K_0'$ cualquier subconjunto finito de $K_0$, es consistente.

sea $K'_0 = \{\phi_{z_1}(c_1, g_{11}, a_{c_1}), \ldots, \phi_{z_1}(c_1, g_{1K_1}, a_{c_1}),$

$\phi_{z_2}(c_2, g_{21}, a_{c_2}), \ldots, \phi_{z_2}(c_2, g_{2K_2}, a_{c_2}),$

$- - - - - - - - - - - - - -$

$\phi_{z_n}(c_n, g_{n_1}, a_{c_n}), \ldots, \phi_{z_n}(c_n, g_{nK_n}, a_{c_n})\}$

con $c_i \neq c_j$ si $i \neq j$ para $i, j = 1, \ldots, n$. Dado que $K$ es consistente entonces existe $M$ estructura de orden superior tal que $M \models K$. Por a) tenemos que:

$$K \vdash (\exists x)(\phi_{z_1}(c_1, g_{11}, x), \ldots, \phi_{z_1}(c_1, g_{1K_1}, x),$$
$$\phi_{z_2}(c_{21}, g_{21}, x), \ldots, \phi_{z_2}(c_2, g_{2K_2}, x),$$
$$- - - - - - - - - - - -$$
$$\phi_{z_n}(c_n, g_{n_1}, x), \ldots, \phi_{z_n}(c_n, g_{nK_n}, x))$$

lo cual implica que existen C.I. $a_1, \ldots, a_n$ en $\Lambda$ tal que bajo un mapeo $g$, $g(a_i) \in \{\Theta_z\}_{z \in T}$ para $i = 1, \ldots, n$; por lo tanto el conjunto de enunciados.

$$K'_1 = \{\phi_{z_1}(c_1, g_{11}, a_1), \ldots, \phi_{z_1}(c_1, g_{1K_1}, a_1),$$
$$\phi_{z_2}(c_2, g_{21}, a_2), \ldots, \phi_{z_2}(c_2, g_{2K_2}, a_2),$$
$$- - - - - - - - - - - - - - - -$$
$$\phi_{z_n}(c_n, g_{n_1}, a_n), \ldots, \phi_{z_n}(c_n, g_{nK_n}, a_n)\}$$

es verdadero en $M$. Sea $\Psi = K \cup K'_1$, aplicando Teorema 6.1. con $G = \{$C.I que ocurren en $\Psi\}$

y $G_1 = G \cup \{a_1, \ldots, a_n\}$ donde $d(e_i) = c_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y $d(a_{c_i}) = a_i$ para $i = 1, \ldots n$; dado que $K$ y $K_i'$ son verdaderos en $M$ entonces $\overline{\Sigma}$ también es verdadero en $M \Rightarrow$ que $\overline{\Sigma}$ es consistente $\Rightarrow \Sigma$ es consistente, y por el Principio de Finitud concluimos que $H$ es consistente.

## 7.- B - Modelos de K.

Definición.- Sea $B \subset \Gamma_0$ y denotemos por $K_B = \bigcup_{c \in B} K_c \Rightarrow$ que $K_B \subset K_0$. Llamamos al conjunto $H_B = K \cup K_B$ el $B$ - alargamiento de $K$. Es claro que $H_B \subset H$ y que $H_B$ es consistente si $K$ es un conjunto estratificado de enunciados consistente. En particular se tiene que $H_{\Gamma_0} = H$.

Definición.- Una estructura $M$ tal que $M \models K$ será llamada un $B$ - modelo de $K$ si $\forall b \in B$, existe una $c.I.c$ tal que cada uno de los enunciados.

$$\varphi_{b_g} : \phi_2(b, g, c) \quad \forall g \in \Delta_b$$

es verdadero en $M$.

De aquí que por definición, un modelo de $H_B$ será un $B$ - modelo de $K$. El converso no es cierto dado que es compatible con la definición de B-modelo, que una misma C.I. sirva para diferentes elementos concurrentes.

Ejemplo.- Sea A un conjunto numerable de individuos y sean S y P relaciones ternarias sobre A de tipo (0,0,0), dichas relaciones se comportan como la adición y producto. Tenemos a la relación de igualdad como la relación de identidad sobre A de tipo (0,0) denotada por e.

Sea $M = \{B_z\}_{z \in T}$ una estructura completa y normal, dado un mapeo $g: \{C.I. de A\} \to \{B_z\}_{z \in T}$ 1-1 sea K el conjunto de todos los enunciados verdaderos en M los cuales solamente involucran C.I. Consideremos la relación binaria sobre A la cual se expresa como $x < y$ inducida en los $B_{(0,0)}$ sea dicha relación binaria denotada por $q$ en el mapeo $g \Rightarrow$ que $\phi_{(0,0)}(q, x, y)$ significa que $x < y$.

El dominio de $q$ en el primer argumento, es A. así que sean $g_1, \ldots, g_n$ elementos de A, entonces el enunciado

$\varphi: (\exists y)(\phi_{(0,0)}(q, g_1, y) \wedge \cdots \wedge \phi_{(0,0)}(q, g_n, y))$ es verdadero en M, dado que es cierto que existe un número natural el cual es mas grande que los números naturales denotados por $g_1, \ldots, g_n$ en el mapeo $g \Rightarrow \varphi \in K \Rightarrow K \vdash \varphi$, con lo cual se tiene que $q$ es concurrente para $K$. Sea $B = \{q\}$, cualquier $B$- modelo de $K$ lo llamaremos un modelo no-standard de orden superior de la Aritmética.

Definición.- Sea $M = \{B_z\}_{z \in T}$ una estructura de orden superior completa y normal, dado $g: \{C.I.\ de\ \Lambda\} \to \{B_z\}_{z \in T}$ 1-1 consideremos a $K$ como el conjunto estratificado de enunciados admisibles y verdaderos en $M$, tomemos $B = \Gamma_0$ como el conjunto de todas las C.I. concurrentes para ésta $K$, diremos que toda estructura de orden superior que sea un $B$-modelo de $K$ es un alargamiento de $M$.

Sea $M^*$ un alargamiento de $M$ talque tenga como conjunto de individuos a $A^*$, se puede considerar $A^*$ como una extensión de $A$ y $M^*$ como una extensión de $M$ de la siguiente manera:

Supongamos que $M = \{B_z\}_{z \in T}$ y $M^* = \{B_z^*\}_{z \in T}$, para cualquier $R \in B_z$ sea $r$ la

C. I. de $\Lambda$ $\therefore$ $g(r) = R$ y sea $R^* = g(r)$ con $R^* \in \{B_z^*\}_{z\in T}$, $R^*$ debe de ser del mismo tipo que $R \Rightarrow R^* \in B_z^*$, por lo tanto la función $R \xrightarrow{f} R^*$ es un mapeo 1-1 de $\{B_z\}_{z\in T} \rightarrow \{B_z^*\}_{z\in T}$.

Nota: Tanto en los lenguajes de 1er orden como en los de orden superior, el símbolo "=" puede interpretarse como un símbolo lógico o como un predicado binario $P_1^2$ para el cual se dan axiomas. Para nuestro propósito optaremos por el último caso, en el cual $P_1^2$ se interpreta como una relación de equivalencia, donde de ahora en adelante a $P_1^2$ lo consideraremos como interpretando la relación identidad tomando en cuenta la estructura cociente.

Hasta ahora hemos dado la noción de concurrencia solo para C.I. con respecto a un conjunto de enunciados. tomemos en cuenta a K como el conjunto de enunciados verdaderos en M, transferimos la noción de concurrencia a las relaciones de M con la siguiente.

Definición.- Una relación binaria R en M de tipo $z = (z_1, z_2)$ es concurrente sii la constante la cual denota a R es concurrente con respecto a K, es decir, R es concurrente si, para cualquier conjunto finito $\{R_1, \ldots, R_n\}$ de relaciones todas de tipo $Z_1$, 7. para algún conjunto $\{R'_1, \ldots, R'_n\}$ de relaciones de tipo $Z_2$ las parejas $(R_1, R'_1), \ldots, (R_n, R'_n)$ satisfacen $R$, entonces existe una relación $S$ de tipo $Z_2$ tal que los pares $(R_1, S), \ldots, (R_n, S)$ satisfacen $R$.

Ejemplo.-

Sea $R = \{(a,b) \mid a, b \in X$ y $a \neq b\}$ si $X$ es infinito $R$ es una relación concurrente llamada relación de desigualdad.

Sea $F$ un filtro sobre un conjunto de índices $I$ y sea $R = \{(A,B) \mid B \subseteq A \subseteq I$ y $B \in F\}$, el dominio del primer argumento de ésta relación es $F$. Si $A_1, \ldots, A_n \in F$ tomemos $B = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ y dado que $B \in F$ y $B \subseteq A_i$ $\forall i = 1, \ldots, n$ $R$ es concurrente.

Sea $M = \{B_z\}_{z \in T}$ una estructura de orden superior completa y normal y sea $M^* = \{B^*_z\}_{z \in T}$ un alargamiento de $M$ normal con $B_0 = A$ y $B^*_0 = A^*$, en general no sucede que $M^*$ sea completa dado que $B^*_z$ puede ser un subconjunto propio de $A^*_z$.

Definición.- Las relaciones que pertenezcan a $B_2^*$ las llamaremos internas y a las que pertenezcan a $A_2^* - B_2^*$ las llamaremos externas.

Definición.- Cualquier relación interna la cual pertenezca a $\{B_2\}_{2\in T}$ será llamada una relación standard, es decir, una relación es standard si es denotada por una C.I. de $k$.

Teorema de Compactificación.-

Sea $B$ un conjunto de conjuntos en $M$ de tipo $2' = ((2))$ $(B \subset B_{2'})$. Sea $c$ la C.I. en $K$ la cual denota a $B$ en $M$ y sea $B^*$ el conjunto standard el cual es denotado por $c$ en $M^*$.

Supongamos que la intersección finita de elementos de $B$ es distinta del vacío. Entonces existe una relación interna $F$ de tipo $2$ en $M^*$ (es decir en $B_2^*$) tal que todo conjunto standard $G^* \subset B^*$, contiene a $F$.

Prueba.- Sabemos que cualquier conjunto standard $G^*$, denotado por $g$ en $K$, es un subconjunto de $B^*$ sii el conjunto $G$ en $M$ el cual también es denotado por $g$, está contenida en $B$.

Sea $R$ la relación de $M$ de tipo $\mu=((2),2)$ talque sea denotada por $r$ en $K$, el par $(G,S)$ satisface $R$ sii $G$ es de tipo $(2)$ y $G\subset B$, y $S$ es de tipo $2$ y $S\subset G$. Dado que por hipótesis se tiene que la intersección finita de elementos de $G$ es no vacia $\Rightarrow$ que $R$ es una relación concurrente, de aquí que exista una relación $F$ en $M^*$ talque el enunciado $\phi_\mu(r,g,f)$ es verdadero en $M^*$, para todo $g$ la cual denote un conjunto standard $G^*\subset B^*$ y para la C.I. $f$ la cual denota a $F$ $\therefore$ $F$ esta contenida en todos los conjuntos standard $G^*$ los cuales estén contenidos en $B^*$.

Nota: Dada cualquier relación $R$ en $M$ de tipo $2\neq 0$, indicaremos a la correspondiente relación en $M^*$ como $R^*$ la cual es denotada por la misma C.I. en $k$.

Sea $U$ un conjunto en $M$ denotado por $u$ en $k$, para todo $V\in U$ en $M$, $V^*$ es un elemento de $U^*$ en $M^*$. Pero si $v$ denota a $V$ en $k$ entonces
$M\models\phi_2(u,v)\ \forall z\in T \Rightarrow M^*\models\phi_2(u,v)\ \forall z\in T$

<u>Teorema</u> 7.1.- El conjunto $U^*$ contiene una relación interna no standard sii $U$ es infinito.

Prueba.– Si $\mathcal{U}=\phi \Rightarrow \mathcal{U}^*=\phi$. Supongamos que $\mathcal{U}$ contiene exactamente $n$ elementos y sean $V_1,\ldots,V_n$ dichos elementos tales que son denotados por $v_1,\ldots,v_n$ en $K$. Supongamos que el tipo de cada $V_i$ con $i=1,\ldots,n$ es $\sigma$, entonces el tipo de $\mathcal{U}$ es $(\sigma)$. Sea $z=(\sigma,\sigma)$ entonces el enunciado

$$(\forall x)[\phi_{(\sigma)}(u,x)\supset(\phi_z(e_\sigma,v_1,x)\vee\phi_z(e_\sigma,v_2,x)\vee\cdots\vee\phi_z(e_\sigma,v_n,x))]$$

donde $e_\sigma$ denota la relación de identidad en $A_\sigma$, es verdadero en $M \Rightarrow$ que pertenece a $K$ $\therefore$ también es verdadero en $M^*$, pero $e_\sigma$ también denota una relación de identidad en $M^*$, entonces $\mathcal{U}^*$ no puede tener otros elementos que no sean $V_1^*,\ldots,V_n^*$ los cuales están denotados por $v_1,\ldots,v_n$ en $K$. Por lo tanto para que $\mathcal{U}^*$ contenga una relación interna la cual no sea standard $\mathcal{U}$ tiene que ser infinito.

Supongamos que $\mathcal{U}$ contiene un número infinito de elementos. Sea $Q$ la relación binaria en $M$ tal que el par $(V,V')$ satisface $Q$ sii $V\in\mathcal{U}$, $V'\in\mathcal{U}$ y $V\neq V'$; $Q$ es una relación concurrente (pues $\mathcal{U}$ es infinito) $\Rightarrow$ que existe una relación $F$ en $M^*$ tal que $(V^*,F)$ satisface $Q$ para toda relación standard $V^*\in\mathcal{U}^*$

$\therefore$ F es una relación interna la cual pertenece a $\mathcal{U}^*$ y es diferente de todos los elementos standard de $\mathcal{U}^*$.

# Capítulo II

## Construcción Conjuntista (Davis)

## 1.- Individuos y superestructuras.

<u>Definición</u>.- Un conjunto de individuos es un conjunto tal que sus elementos no son conjuntos.

Sea $S$ un conjunto de individuos tal que $S_0 = S$

$$\vdots$$

$$S_{i+1} = S_i \cup P(S_i)$$

$$\vdots$$

<u>Definición</u>.- $\hat{S} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$ es la superestructura con individuos $S$.

todo $s \in S$ es un individuo de $\hat{S}$ y toda $s' \in \hat{S} - S$ es un conjunto de $\hat{S}$.

<u>Observación</u>.- $\phi \subseteq S \Rightarrow \phi \in S_1$.

<u>Definición</u>.- Sea $A \subseteq \hat{S}$. Decimos que $A$ es transitivo en $S$ sii $\forall x \in A$, o bien $x \in S$ o $x \subseteq A$.

<u>Teorema 1</u>.- Cada $S_i$ es transitivo en $\hat{S}$.

Prueba.- Por Inducción sobre $S_i$.

## 2.- Universos.

Definición.- Sea $S$ un conjunto de individuos. Un subconjunto $U$ de $\hat{S}$ es un universo con individuos $S$ sii

i) $\phi \in U$

ii) $S \subseteq U$

iii) si $x, y \in U$ entonces $\{x, y\} \in U$

iv) $U$ es transitivo en $\hat{S}$

Nota.- $\hat{S}$ es un universo con individuos $S$.

La superestructura $\hat{S}$ es también llamada universo standard con individuos $S$. Ahora nuestro propósito es construir un universo, llamado el universo no-standard, cuyo conjunto de individuos contiene a $S$ y sus propiedades estan relacionadas a las propiedades de $\hat{S}$.

Definición.- Sea $F$ un ultrafiltro sobre $I$, con $I$ un conjunto de índices, definimos al mapeo $\mu_F : P(I) \longrightarrow \{0,1\}$ :∋.

$$\mu_F(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \in F \\ 0 & \text{si } A \notin F \end{cases}$$

a tal mapeo $\mu_F$ lo llamamos, la medida inducida por $F$.

**Definición.-** Una propiedad de elementos de $I$ se tiene casi dondequiera (c.d.) sii el conjunto de elementos de $I$ para los cuales la propiedad se tiene, tiene medida 1.

Sea $f$ una función $\ni$ $f: I \rightarrow \hat{S}$. Escribimos $f_i = f(i)$ $\forall i \in I$.

**Definición.-**

Sea $Z_n = \{ f \mid f: I \longrightarrow \hat{S}$ y $f_i \in S_n$ c.d.$\}$

Sea $Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n$. Identificamos $a \in S$ con la función constante $S_i$, donde $S_i = S$ $\forall i \in I$

**Definición.-** Sean $f, g \in Z_0$, $f \sim g$ sii $f_i = g_i$ c.d.

**Teorema.- 2.1.-** La relación $\sim$ es una relación de equivalencia en $Z_0$.

La prueba de este resultado se omite.

**Definición.-** Para cada $f \in Z_0$, sea $\bar{f} = \{ g \in Z_0 / f \sim g \}$

**Nota.-** por lo anterior, $Z_0$ queda dividido en clases de equivalencia ajenas $\bar{f}$.

Sea $\bar{W} = \{ \bar{f} \mid f \in Z_0 \}$

**Observaciones.-** a) $\forall x, y \in S$, si $x \neq y \Rightarrow \bar{x} \neq \bar{y}$

b) $S \subseteq \bar{W}$ y $\forall x \in S$ se tiene que $\bar{x} = x$

Definición.- Sea $\hat{\omega} = \bigcup_{i\in N} \omega_i$ la superestructura con individuos $W$, donde

$W_0 = \omega, \ldots, \omega_{i+1} = \omega_i \cup P(\omega_i), \ldots$

Asociamos a cada $f \in Z_i$ una $\bar{f} \in \omega_i$ $\forall i \in N$.

Definición.- Sea $f \in Z_{i+1} - Z_i$.

$\bar{f} = \{\bar{g} \mid g \in Z_i$ y $g_i = f_i$ c.d.$\}$.

nota.- $\forall \bar{g} \in \bar{f}$ se tiene que $\bar{g} \in W_i$ y $\therefore$

$\bar{f} \subseteq \omega_i \Rightarrow \bar{f} \in \omega_i$

Definición.- Sea $\tilde{\omega} = \{\bar{f} \mid f \in Z\}$ el universo no-standard con individuos $W$ correspondiente a $\hat{S}$.

Dado que $\hat{S} \subseteq Z$, $\forall s \in \hat{S}$ existe un elemento $\bar{s} \in \tilde{\omega}$. Todos los $\bar{s}$ para los cuales $s \in \hat{S}$ son llamados los elementos standard de $\tilde{W}$. Los restantes elementos de $\tilde{W}$ son llamados los elementos no-standard de $\tilde{W}$. En particular, los individuos standard. son todos los elementos de $S$ y los individuos no-standard son aquellos que pertenecen a $W - S$

Por otra parte; sean $r, s \in \hat{S}$, si $\exists!\ t \in \hat{S}$ $\ni$ $(s, t) \in r$ escribimos $r \restriction_s = t$. La operación $\restriction$ tiene las siguientes propiedades :

i) si $r$ es una función y $s \in dom(r)$ $\Rightarrow$ $r \upharpoonright s = r(s) = t$

ii) $r \upharpoonright s \in S \quad \forall r, s \in \hat{S}$

## 3.- Lenguajes $\mathcal{L}_U$.-

Para cada universo $U$, construimos un lenguaje formal $\mathcal{L}_U$ el cual nos permitirá hablar acerca de $U$.

Definición.- Sea $\mathcal{L}_U = \langle S_U, \Phi_U \rangle$ donde $S_U$ está formado de la siguiente manera:

i) Pertenecen a $S_U$ los siguientes símbolos: $=, \in, \sim, \wedge, \exists, (\ \ ), \upharpoonright, ,$ .

ii) $S_U$ contiene un conjunto infinito numerable de variables $\{\mathbf{x}_i\}_{i \in I}$

iii) $S_U$ contiene un conjunto infinito numerable de constantes $\{\mathbf{c}_i\}_{i \in I}$, donde $\mathbf{c}_i$ es el nombre para $c_i \in U$ en $\mathcal{L}_U$.

Recordemos que una expresión es una sucesión finita de elementos de $S_U$.

Definición.- Una expresión $t$ es un término de $\mathcal{L}_{\mho}$ sii existe una sucesión finita de expresiones $t_1, t_2, \ldots, t_n = t$ talque para cada $i$ con $1 \leq i \leq n$.

1) $t_i$ es una variable de $\mathcal{L}_{\mho}$ ó
2) $t_i$ es una constante de $\mathcal{L}_{\mho}$ ó
3) $t_i = (t_j, t_k)$ donde $j, k < i$ ó
4) $t_i = t_j \upharpoonright t_k$ donde $j, k < i$

Definición.- Un término cerrado es aquel término que no contiene variables.

Describiremos ahora $\Phi_{\mho}$

Definición.- Una expresión $\alpha$ es una fórmula bien formada (f.b.f.) de $\mathcal{L}_{\mho}$ sii existe una sucesión finita de expresiones $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = \alpha$ donde cada $\alpha_i$ con $1 \leq i \leq n$ es:

1.- $\alpha_i = (t = s)$ donde $t$ y $s$ son términos de $\mathcal{L}_{\mho}$ ó

2.- $\alpha_i = (t \in s)$ donde $t$ y $s$ son términos de $\mathcal{L}_{\mho}$ ó

3.- $\alpha_i = \sim \alpha_j$ donde $j < i$ ó

4.- $\alpha_i = \alpha_j \wedge \alpha_k$ donde $k < i$, $j < i$

5) $\alpha_i = (\exists x_j \in t)\, \alpha_k$ donde $k < i$
y $t$ es un término de $\mathcal{L}_\sigma$ donde $x_j$ no ocurre.

Introducimos por abreviación ciertas operaciones lógicas. Sean $\alpha, \beta$ f.b.f. de $\mathcal{L}_\sigma$ entonces escribimos.

$$\alpha \vee \beta \quad \text{por} \quad \sim(\sim\alpha \wedge \sim\beta)$$
$$\alpha \supset \beta \quad \text{por} \quad \sim(\alpha \wedge \sim\beta)$$
$$\alpha \equiv \beta \quad \text{por} \quad (\alpha \supset \beta) \wedge (\beta \supset \alpha)$$
$$(\forall x_i \in t)\, \alpha \quad \text{por} \sim(\exists\, x_i \in t)\alpha$$

Las definiciones que se dan en el Capítulo I. 1.- para variable acotada, variable libre y enunciados es la misma que consideramos aquí, lo mismo que la noción de $\alpha[c_1, \ldots, c_n]$ con $\alpha$ una f.b.f. de $\mathcal{L}_\sigma$.

<u>Definición</u>.- Sea $t$ un término de $\mathcal{L}_\sigma$ y sea $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$ el conjunto que incluye a todas las variables que ocurren en $t$, en tal caso escribimos $t = t(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$. $t(c_1, \ldots, c_n)$ es el término cerrado de $\mathcal{L}_\sigma$, que se obtiene por reemplazar cada $x_{i_j}$ por $c_j$ para $j = 1, \ldots, n$.

## 4.- Semántica de $\mathcal{L}_{\mho}$.

Nuestro interés será llevado ahora a que cada término cerrado de $\mathcal{L}_{\mho}$ represente un elemento definido de $\mho$ y que cada enunciado de $\mathcal{L}_{\mho}$ exprese algo verdadero o falso acerca de $\mho$. Para ésto tenemos la siguiente definición:

<u>Definición</u>.- Sea $t$ un término cerrado de $\mathcal{L}_{\mho}$, definimos el valor $|t|_{\mho}$ de la siguiente manera:

1) $|c|_{\mho} = c \quad \forall c \in \mho$

2) $|(t, s)|_{\mho} = (|t|_{\mho}, |s|_{\mho})$

3) $|t \upharpoonright s|_{\mho} = |t|_{\mho} \upharpoonright |s|_{\mho}$

Ahora definimos lo que quiere decir que un enunciado $\alpha$ de $\mathcal{L}_{\mho}$ sea verdadero en $\mho$ (que denotamos $\mho \models \alpha$), de la siguiente manera:

1.- $\mho \models t = s$ sii $|t|_{\mho} = |s|_{\mho}$

2.- $\mho \models t \in s$ sii $|t|_{\mho} \in |s|_{\mho}$

3.- $\mho \models \sim \alpha$ sii no es el caso en que $\mho \models \alpha$ y escribimos $\mho \not\models \alpha$ que significa que $\alpha$ es falso en $\mho$.

4.- $\mathfrak{U} \models \alpha \vee \beta$ sii $\mathfrak{U} \models \alpha$ ó $\mathfrak{U} \models \beta$

5.- $\mathfrak{U} \models \alpha \wedge \beta$ sii $\mathfrak{U} \models \alpha$ y $\mathfrak{U} \models \beta$

6.- $\mathfrak{U} \models \alpha \supset \beta$ sii $\mathfrak{U} \not\models \alpha$ ó $\mathfrak{U} \models \beta$

7.- $\mathfrak{U} \models \alpha \equiv \beta$ sii ó bien $\mathfrak{U} \models \alpha$ y $\mathfrak{U} \models \beta$ ó $\mathfrak{U} \not\models \alpha$ y $\mathfrak{U} \not\models \beta$

8.- $\mathfrak{U} \models (\exists x_i \in t)\, \alpha(x_i)$ sii $\mathfrak{U} \models \alpha(\mathbf{c})$ para alguna $c \in |t|_{\mathfrak{U}}$

9.- $\mathfrak{U} \models (\forall x_i \in t)\, \alpha(x_i)$ sii $\mathfrak{U} \models \alpha(\mathbf{c})$ para toda $c \in |t|_{\mathfrak{U}}$

<u>Definición</u>.- Sea $A \subseteq \mathfrak{U}$, $A$ es definible sii existe una f. b. f. $\alpha = \alpha(x_i)$ de $\mathcal{L}_{\mathfrak{U}}$ tal que $A = \{ c \in \mathfrak{U} \mid \mathfrak{U} \models \alpha(\mathbf{c}) \}$.

En este caso la f. b. f. $\alpha$ es llamada una definición de $A$ en $\mathcal{L}_{\mathfrak{U}}$.

## 5.- <u>teorema de Los y Principio de transferencia</u>.

Hemos construido un lenguaje $\mathcal{L}_{\mathfrak{U}}$ para cada universo $\mathfrak{U}$, pues recordemos que tenemos construidos dos universos $\hat{S}$ y $\tilde{\omega}$ que son de nuestro interés. De ahora en adelante escribiremos $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\hat{S}}$ y $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}_{\tilde{\omega}}$. Si $t$ es término cerrado de $\mathcal{L}$ escribimos $|t| = |t|_{\mathcal{L}}$ y si $t'$ es un término cerrado de $\mathcal{L}^*$ escribiremos

$|t'|_* = |t'|_{\mathcal{L}^*}$. Si $\alpha$ es un enunciado de $\mathcal{L}$ escribiremos $\models \alpha$ en lugar de $\hat{\mathfrak{Z}} \models \alpha$ y si $\alpha$ es un enunciado de $\mathcal{L}^*$ escribiremos $* \models \alpha$ en lugar de $\tilde{\omega} \models \alpha$.

Definición.- Sea $\lambda$ un término ó una f. b. f. de $\mathcal{L}$. $\lambda^*$ es el término o la f. b. f. de $\mathcal{L}^*$ que se obtiene de $\lambda$, reemplazando cada constante $\mathbf{c}$ en $\lambda$ por la correspondiente constante $\bar{\mathbf{c}}$.

Antes de dar paso al teorema de Łos, enunciaremos dos resultados que son necesarios para dichos teorema y cuyas pruebas omitiremos.

Teorema 5.1.- Sea $t = t(\mathbf{x}_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_n})$ un término de $\mathcal{L}$, sean $g^1, g^2, \dots, g^n \in Z$ y sea $\bar{g} = |t^*(\bar{\mathbf{g}}^1, \dots, \bar{\mathbf{g}}^n)|_*$, entonces

$$g_i = |t(\mathbf{g}^1_i, \dots, \mathbf{g}^n_i)| \quad \text{c. d.}$$

Teorema 5.2.- Sea $t = t(\mathbf{x}_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_n})$ un término de $\mathcal{L}$ y sean $g^1, \dots, g^n \in Z$. Para cada $i \in I$ sea $h_i = |t(\mathbf{g}^1_i, \dots, \mathbf{g}^n_i)|$ entonces $h \in Z$ y $\bar{h} = |t^*(\bar{\mathbf{g}}^1, \dots, \bar{\mathbf{g}}^n)|_*$

Ahora si, enunciemos y probemos el importante...

Teorema de Los.- Sea $\alpha = \alpha(x_{i_1},\ldots,x_{i_n})$ una f.b.f. de $\mathcal{L}$ y sean $g^1, g^2,\ldots, g^n \in Z$. entonces $*\models \alpha^*(\bar{g}^1,\ldots,\bar{g}^n)$ sii $\models \alpha(g^1_i,\ldots,g^n_i)$

Prueba.- Por inducción sobre $k$, el número de ocurrencias de los conectivos $\sim$, $\wedge$, $\exists$ en $\alpha$.

Para $k=0$, $\alpha$ es de la forma $t \equiv s$ ó $t \in s$.

Si $\alpha = t \equiv s$, $\alpha^* = t^* \equiv s^*$. Tomando en cuenta teorema 5.1 y sabiendo que si $f, g \in Z$ entonces $\bar{f} = \bar{g}$ sii $f_i = g_i$ c.d., tenemos que $*\models \alpha^*(\bar{g}^1,\ldots,\bar{g}^n)$ sii $|t^*(\bar{g}^1,\ldots,\bar{g}^n)|_* = |s^*(\bar{g}^1,\ldots,\bar{g}^n)|_*$ sii $|t(g^1,\ldots,g^n)| = |s(g^1,\ldots,g^n)|$ c.d. Si $\alpha = t \in s$, se sigue como anteriormente, reemplazando $\equiv$ por $\in$.

Supongamos que el Teorema de Los se cumple para cuando $\alpha$ tiene $k$ conectivos, ahora mostraremos que se cumple para $k+1$.

Caso 1.- $\alpha$ es de la forma $\sim\beta$. Por hipótesis de inducción tenemos que $*\models \alpha^*(\bar{g}^1,\ldots,\bar{g}^n)$ sii $*\not\models \beta^*(\bar{g}^1,\ldots,\bar{g}^n)$ sii $\models \beta(g_i^1,\ldots,g_i^n)$ c.d. sii $\models \alpha(g_i^1,\ldots,g_i^n)$ c.d.

Caso 2.– $\alpha$ es de la forma $\beta \wedge \gamma$

Utilizando hipótesis inductiva se tiene que $* \models \alpha^*(\bar{g}^1, \ldots, \bar{g}^n)$ sii $* \models \beta^*(\bar{g}^1, \ldots, \bar{g}^n)$ y $* \models \gamma^*(\bar{g}^1, \ldots, \bar{g}^n)$ sii $\models \beta(g_i^1, \ldots, g_i^n)$ c.d. y $\models \gamma(g_i^1, \ldots, g_i^n)$ c.d. sii $\models \alpha(g_i^1, \ldots, g_i^n)$ c.d.

Caso 3.– $\alpha = \alpha(X_{i1}, \ldots, X_{in})$ es de la forma $(\exists X_k \in t)\ \beta(X_k, X_{i1}, \ldots, X_{in})$ donde $t = t(X_{i1}, \ldots, X_{in})$ es un término de $\mathcal{L}$.

$\Rightarrow$) Supongamos que $* \models \alpha^*(\bar{g}^1, \ldots, \bar{g}^n)$ y sea $\bar{h} = |t^*(\bar{g}^1, \ldots, \bar{g}^n)|_*$. Por la semántica para $\mathcal{L}^*$ se tiene que existe una $\bar{g} \in \tilde{\omega}$ $\ni$ $\bar{g} \in \bar{h}$ y $* \models \beta^*(\bar{g}, \bar{g}^1, \ldots, \bar{g}^n)$. Dado que se cumple que si $f, g \in Z$ entonces $\bar{f} \in \bar{g}$ sii $f_i \in g_i$ c.d. y tomando encuenta nuestra hipótesis inductiva, tenemos que $g_i \in h_i$ c.d. y $\beta(g_i, g_i^1, \ldots, g_i^n)$ c.d. Por teorema 5.1 sabemos que $h_i = |t(g_i^1, \ldots, g_i^n)|$ c.d., así para casi toda $i \in I$ se tiene que $\models \alpha(g_i^1, \ldots, g_i^n)$.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que $\models \alpha(g_i^1, \ldots, g_i^n)$ c.d., es decir, ésta condición se tiene $\forall i \in A$ donde $\mathcal{U}(A) = 1$. Sea $h_i = |t(g_i^1, \ldots, g_i^n)|$ $\forall i \in I$. Por teorema 5.2 se tiene que $h \in Z$ y digamos que $h_i \in S_m$

c. d., entonces para cada $i \in A$ existe una $r = r(i) \cdot \ni \cdot r \in h_i$ y $\models \beta(r, g_i^1, \ldots, g_i^n)$. Sea $g : I \to \hat{S}$ un mapeo $\ni \cdot g_i = r(i)$ $\forall i \in A$ y $g_i = \phi$ $\forall i \notin A$, por la transitividad de $S_m$, $g_i \in S_m$ para cada $i \in A$ para la cual $h_i \in S_m$ $\therefore$ $g_i \in S_m$ c. d., así que $g \in Z$ y para casi toda $i$ se tiene que $g_i \in h_i$ y $\models \beta(g_i, g_i^1, \ldots, g_i^n)$. Tomando en cuenta que si $f, g \in Z$ entonces $\bar{f} \in \bar{g}$ sii $f_i \in g_i$ c. d. y la hipótesis de inducción se tiene que; $\bar{g} \in \bar{h}$ y $^* \models \beta^* (\bar{g}, \bar{g}^1, \ldots, \bar{g}^n)$. Por teorema 5.2, $\bar{h} = |t^*(\bar{g}^1 \ldots, \bar{g}^n)|_*$ y por consiguiente $^* \models \alpha^* (\bar{g}^1, \ldots, \bar{g}^n)$.

Un caso particular del teorema de Los para $n=0$ es el...

<u>Principio de Transferencia</u>.-

Sea $\alpha$ un enunciado de $\mathcal{L}$, entonces $^* \models \alpha^*$ sii $\models \alpha$.

El Principio de transferencia es una de las herramientas básicas en el análisis no-standard, dado que si un teorema matemático se puede expresar como un enunciado $\alpha$ de $\mathcal{L}$ y queremos saber si $\models \alpha$, podemos demostrar a cambio que $^*\models \alpha^*$.

<u>Teorema</u> 5.3.- Sea $\alpha = \alpha(X_1)$, $\beta = (X_1)$ f.b.f. de $\mathcal{L}$ donde $\{c \in \hat{S} \mid \models \alpha(c)\} = \{c \in \hat{S} \mid \models \beta(c)\}$, entonces

$$\{\bar{g} \in \tilde{\omega} \mid {}^*\models \alpha^*(\bar{g})\} = \{\bar{g} \in \tilde{\omega} \mid {}^*\models \beta^*(\bar{g})\}$$

Prueba.- Por el Teorema de Łos tenemos que; $^*\models \alpha^*(\bar{g})$ sii $\models \alpha(g_i)$ c.d. sii $\models \beta(g_i)$ c.d. sii $^*\models \beta^*(\bar{g})$ c.d.

<u>Definición</u>.- Sea $A = \{c \in \hat{S} \mid \models \alpha(c)\}$ donde $\alpha$ es una f.b.f de $\mathcal{L}$, entonces

$$A^* = \{c \in \tilde{\omega} \mid {}^*\models \alpha^*(c)\}$$

<u>Teorema</u> 5.4.- Sea $r$ un conjunto de $\hat{S}$, entonces $r$ es un subconjunto definible de $\hat{S}$ y $r^* = \bar{r}$.

Prueba.- tenemos que $r = \{c \in \hat{S} \mid \models (c \in T)\}$ y por definición $r^* = \{\bar{g} \in \tilde{\omega} \mid {}^*\models (\bar{g} \in \bar{r})\} = \{\bar{g} \in \tilde{\omega} \mid \bar{g} \in \bar{r}\} = \bar{r}$

<u>Nota</u>.- $S$ es un subconjunto definible de $\hat{S}$, tomando por ejemplo, la f.b.f. $\alpha(X_i) : X_1 = X_1$ así $\hat{S} = \{c \in \hat{S} \mid \models c = c\}$ y por lo tanto, $(\hat{S})^* = \{c \in \tilde{\omega} \mid {}^*\models c = c\} = \tilde{\omega}$

De ahora en adelante escribiremos

$\hat{S} = U$ como el universo standard y $\tilde{\omega} = U^*$ como el universo no-standard.

$U - S_i = \hat{S} - S_i \notin \hat{S} \ \forall i \geq 0$

<u>Teorema</u> 5.5.- Supongamos que $\hat{S} - S_i \in \hat{S}$, dado que $S_i \in \hat{S} \Rightarrow \hat{S} = (\hat{S} - S_i) \cup S_i \in \hat{S}$, lo cual no puede ser posible, $\therefore$ $U - S_i \notin \hat{S} \ \forall i \geq 0$. Veamos que $U - S_i$ es definible, tomando encuenta la f.b.f.

$\alpha(x_1) = \sim (x_1 \in S_i)$, entonces

$U - S_i = \{c \in U \mid \models \sim (c \in S_i)\}$ y por lo tanto.

$(U - S_i)^* = \{c \in U^* \mid {}^*\models \sim (c \in \bar{S}_i)\} = U^* - \bar{S}_i = U^* - S_i^*$ tomando encuenta teorema 5.4. Para $i = 0$ se tiene que $(U - S)^* = U^* - \bar{S} = U^* - S^* = U^* - \omega$, donde $\bar{S} = S^* = \omega$ dado que $\bar{f} \in \bar{S}$ sii $f_i \in S$ c.d., es decir sii $f \in Z_0$ y por definición de $\omega$, se tiene que $\bar{f} \in \omega$ sii $f \in Z_0$

<u>Teorema</u> 5.6.- $U^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i^*$

Prueba.- Dado que para cada $i$, $S_i \in U \Rightarrow S_i^* \in U^*$ y como $U^*$ es transitivo, $S_i^* \subseteq U^*$, $\therefore \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i^* \subseteq U^*$.

Sea $\bar{f} \in U^* = \tilde{\omega} \Rightarrow f \in Z_i$ para alguna $i \in N$. Como $f_i \in S_i$ c.d. y dado que si $f, g \in Z$ entonces $\bar{f} \in \bar{g}$ sii $f_i \in g_i$ c.d., entonces $\bar{f} \in \bar{S}_i = S_i^*$

$\therefore \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i^* = U^*$

## 6.- Concurrencia e Internalidad.

Definición.- Una relación $r$ es llamada concurrente en $U$ sii $r \in U$ y siempre que $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{dom}(r)$, existe un elemento $c$ tal que $(a_i, c) \in r$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n$

Ejemplo.-

Sea $r_k = \{(A,B) \mid A \subseteq B \subseteq S_k\}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, si $(A,B) \in r_k$ $\Rightarrow A, B \in S_{k+1} \Rightarrow (A,B) \in S_{k+3}$ $\therefore r_k \subseteq S_{k+3} \Rightarrow r_k \in S_{k+4}$ y de aquí que $r_k \in U$. $r_k$ es concurrente. Sean $A_1, \ldots, A_n \in \mathrm{dom}(r_k)$, es decir, $(A_1, B_1) \in r_k, \ldots, (A_n, B_n) \in r_k$, sea $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Como $A_i \subseteq B_i \subseteq S_k$ $\forall i = 1, \ldots, n$ entonces $A_i \subseteq B \subseteq S_k$, esto es, $(A_i, B) \in r_k$ $\forall i = 1, \ldots, n$.

Para enunciar y probar el importante teorema de Concurrencia necesitamos conocer el conjunto de índices $I$ y el ultrafiltro $F$, utilizados en la construcción de $\mathcal{W}$, así como de lemas que son auxiliares en dicha prueba.

$I$ es el conjunto de todas las funciones $f$ tales que cumplen con:

i) $f$ está definida en $R$ donde

$R = \{ r \in \mathfrak{V} \mid r$ es concurrente en $\mathfrak{V} \}$

ii) $\forall r \in R$, $f(r)$ es un subconjunto finito del $dom(r)$.

<u>Definición</u>.- Si $f, g \in I$, $f < g$ sii $f(r) \subseteq g(r)$ $\forall r \in R$

<u>Definición</u>.- Sean $f, g \in I$, $h = f \vee g$ sii $h \in I$ y está definida como $h(r) = f(r) \cup g(r)$ $\forall r \in R$

<u>Definición</u>.- $\Gamma_f = \{ g \in I \mid f < g \}$ $\forall f \in I$

<u>Definición</u>.- $G \subseteq P(I)$ es un filtro base sobre $I$ sii

i) $\phi \notin G$

ii) Si $A, B \in G \Rightarrow A \cap B \in G$

iii) $G \neq \phi$

<u>Lema 1</u>.- Sea $G = \{ \Gamma_f \mid f \in I \}$, $G$ es un filtro base sobre $I$.

Omitimos prueba.

Tomando encuenta lema 1, existe un ultrafiltro $F$ sobre $I$ talque $G \subseteq F$.

<u>Lema 2</u>.- $F$ es un ultrafiltro sobre $I$ talque $\Gamma_f \in F$ $\forall f \in I$.

<u>Definición</u>.- Sea $r$ una relación concurrente en $\mathfrak{V}$ talque $r \in \mathfrak{S}_k$.

$\delta: I \to U$ es un mapeo tal que para cada $f \in I$ $(a, \delta_f) \in r$ $\forall a \in \delta(r)$

Dado que $r$ es concurrente en $U$ y $\delta(r)$ es un subconjunto finito del dom$(r)$, tal mapeo existe.

Sea $c = \bar{\delta}$, $\Rightarrow c \in U^*$

<u>Lema</u> 3.- Para cada $a \in$ dom$(r)$, $(a, \delta_f) \in r$ c.d.

Prueba.- Sea $a$ un elemento fijo dom$(r)$ y sea $\Gamma_a = \{ f \in I \mid (a, \delta_f) \in r \}$. Probaremos que $\mu_F(\Gamma_a) = 1$, es decir que $\Gamma_a \in F$. Definimos $g \in I$ por conveniencia como:

$$g(X) = \begin{cases} \{a\} & \text{si } X = r \\ \Phi & \text{si } X \neq r \end{cases}$$

por lema 2 $\Gamma_g \in F$, ahora haremos ver que $\Gamma_g \subseteq \Gamma_a$.

Sea $x \in \Gamma_g \Rightarrow g < r \Rightarrow g(r) \subseteq x(r)$ $\Rightarrow a \in x(r) \Rightarrow (a, \delta_x) \in r \Rightarrow x \in \Gamma_a$.

<u>Teorema de Concurrencia</u>.- Sea $r$ una relación concurrente en $U$. Entonces existe un elemento $c$ en $U^*$ tal que $(a^*, c) \in r^*$ $\forall a \in$ dom$(r)$.

Prueba. Sea $c = \bar{\delta}$ y sea $\delta'_f = (a, \delta_f)$ $\forall f \in X$. Sabemos que si $f, g \in Z$ entonces $\bar{h} = (\bar{f}, \bar{g})$ sii $h_i = (f_i, g_i)$ c.a. entonces $\bar{\delta'} = (\bar{a}, \bar{\delta}) = (a^*, c)$. Por lema 3, $\delta'_f \in r$ c.a. y dado que si $f, g \in Z$ entonces $\bar{f} \in \bar{g}$ sii $f_i \in g_i$ c.a., $\bar{\delta'} \in \bar{r} = r^* \therefore (a^*, c) \in r^*$.

Definición.- Los conjuntos de $\tilde{W}$ que pertenecen a $U^*$ los llamaremos conjuntos internos.

Definición.- Los conjuntos de $\tilde{W}$ que no son internos son conjuntos externos.

Teorema de Internalidad.-
Sea $A$ un conjunto interno y sea $B$ un subconjunto de $U^*$ definible. Entonces $A \cap B$ es interno.

Prueba.- $B = \{ c \in U^* \mid {}^*\models \alpha(c) \}$ para alguna f.b.f. $\alpha: \alpha(x)$ de $\mathcal{J}^*$ adecuada. Sean $\bar{g}^1, \bar{g}^2, \ldots, \bar{g}^n$ todas las constantes que ocurren en $\alpha$. Sean $y_1, \ldots, y_n$ $n$ variables que no ocurren en $\alpha$ y sea $\gamma: \gamma(X, y_1, \ldots, y_n)$ la f.b.f. que se obtiene de $\alpha$ reemplazando cada $\bar{g}^i$ por la correspondiente variable $y_i$

en todas sus ocurrencias $\therefore$ $\gamma$ es una f.b.f. de $\mathcal{L}$ tal que $\gamma^* = \gamma$ y $\alpha(x) = \gamma(x, \bar{g}^1, \ldots, \bar{g}^n)$.

Tomando encuenta el teorema de Łoś

$B = \{\bar{h} \in U^* \mid {}^* \models \gamma(\bar{h}, \bar{g}^1, \ldots, \bar{g}^n)\} =$

$\{\bar{h} \in U^* \mid \models \gamma(h_i, g_i^1, \ldots, g_i^n)$ c. d.$\}$

Como $A$ es interno $\Rightarrow$ $A = \bar{g}$ para alguna $g \in Z$ y supongamos que $g \in Z_n$. Sea $K$ definida por:

$K_i = \{c \in g_i \mid \models \gamma(c, g_i^1, \ldots, g_i^n)\}$ $\forall i \in I$

Como $g_i \in S_n$ c.d. $\forall i \in I$, $K_i \subseteq g_i \Rightarrow K_i \in S_{n+1}$ c.d. $\therefore$ $K \in Z$. Probaremos que $\bar{K} = A \cap B$.

Se tiene que $\bar{h} \in A$ sii $\bar{h} \in \bar{g}$ sii $h_i \in g_i$ c.d. de aquí que

$A \cap B = \{\bar{h} \in U^* \mid h_i \in g_i$ c.d. y $\models \gamma(h_i, g_i^1, \ldots, g_i^n)$ c.d.$\}$

$= \{\bar{h} \in U \mid h_i \in K_i$ c.d.$\} = \{\bar{h} \in U^* \mid \bar{h} \in \bar{K}\} = \bar{K}$.

# Capítulo III

## Estructuras No - standard.

## 1.- Aritmética No-Standard.

Nuestra atención estará ahora dirigida a estudiar a

$N^* = \langle IN^*, \{+^*, \cdot^*, \leq^*, 0^*, |\,|^*\} \rangle$ modelo no-standard de la Aritmética.

Tomando en cuenta la construcción lógica, $N^*$ es un alargamiento de $N$ y si $\varphi$ es un enunciado en $\Lambda \cdot \ni \cdot \varphi: (\forall x \in IN)(0 \leq x)$, entonces $N \models (\forall x \in IN)(0 \leq x)$ sii $N^* \models (\forall x \in IN^*)(0 \leq x)$. Notemos también que si $\varphi$ es un enunciado que se interpreta en $N$ como "existe un conjunto de números", en $N^*$, $\varphi$ se interpreta como "existe un conjunto interno."

Las relaciones $+^*$, $\cdot^*$, $\leq^*$, $|\,|^*$ comparten con las relaciones $+, \cdot, \leq, |\,|$; aquellas propiedades de las últimas, que pueden ser expresadas mediante enunciados de $\Lambda$.

Nota: Escibiremos $+^*$ en lugar de $+$, si no hay lugar a ambiguedades, esto también lo haremos para las restantes relaciones.

Tomando en cuenta la construcción conjuntista de un universo no-standard, supongamos que $IN \subseteq S$, entonces $IN \in S_i$ para alguna $i \Rightarrow IN \in \hat{S}$ y $P(IN) \in \hat{S}$. Dado que si $A \subseteq S$ entonces $A \subseteq A^*$ y $A^* \cap S = A$, tenemos que $IN \subseteq IN^*$. Consideramos la relación $R$ donde $R = \{(x,y) \mid x \in IN,\ y \in IN,\ x < y\}$, $R$ es concurrente dado que $dom(R) = IN$ y si $a_1, \ldots, a_n \in IN$ y $c$ es mas grande que todas las $a_i$ para $i = 1, \ldots, n$ entonces $(a_1, c) \in R, \ldots, (a_n, c) \in R$. Por el teorema de Concurrencia, existe un elemento $c$ en $U^*$ tal que $(a, c) \in R^*$ $\forall a \in IN$ (aquí $a^* = a$). Dado que $R \subset IN \times IN$, $R^* \subset IN \times IN$ y por consiguiente $c \in IN^*$. De lo anterior surge una pregunta interesante ¿$c \in IN$?, supongamos que la respuesta es afirmativa, entonces $c^* = c$ y $^*\models (a^*, c^*) \in R$ $(\forall a \in IN)$ y por el Princi- de Transferencia $\models (a, c) \in R$, es decir $a < c$ $\forall a \in IN \Rightarrow$ que $c$ es un número natural mas grande que todos los naturales y como tal natural no existe en $IN$, concluimos que $c \in IN^* - IN$ $\therefore IN^* - IN \neq \emptyset$.

8.- Propiedades Específicas de $N^*$

i) $IN \nsubseteq IN^*$ dado que $\exists\ m \in IN^* - IN$ $\ni$ $n < m$ $\forall n \in IN$.

ii) $IN$ es un segmento inicial de $N^*$ por i).

iii) Si $S$ es un conjunto interno de

relaciones en $\mathcal{N}^*$, entonces todos los elementos de S son internos.

iv) $\nexists\, m \in \mathbb{N}^* - \mathbb{N}$ tal que sea el mas pequeño de los elementos de $\mathbb{N}^* - \mathbb{N}$.

v) El tipo de orden de $\mathbb{N}^*$ es: $\omega + (\omega^* + \omega)\,\theta$.

Definición.- Cada $n \in \mathbb{N}$ es un número natural finito, también llamado natural standard

Definición.- Todo $m \in \mathbb{N}^* - \mathbb{N}$ es un número natural infinito, también llamado natural no-standard.

Veamos por qué se tiene iv)

Dada $m, n \in \mathbb{N}^*$ con $m > n$, $\exists\, z \in \mathbb{N}^*$ tal que $m = n + z$ (Por el Principio de transferencia), $\therefore\ z = m - n \Rightarrow z < m$, de aquí que para cada $m \in \mathbb{N}^* - \mathbb{N}$ se tenga que $\cdots < m-3 < m-2 < m-1 < m$ donde cada uno de éstos naturales debe ser infinito, ya que si $m-k,\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow m = (m-k) + k \in \mathbb{N}$ $\therefore\ \cdots, m-3, m-2, m-1 \in \mathbb{N}^* - \mathbb{N}$.

Para justificar v), definimos una relación "$\sim$" $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ donde $n \sim m$ sii $|n-m| \in \mathbb{N}$, ésta relación es una relación de equivalencia y claramente $\mathbb{N}$ constituye una relación de equivalencia con respecto a "$\sim$".

Sea $n \in \mathbb{N}^* - \mathbb{N}$, $n+n=2n$ y $|2n-n|=n \notin \mathbb{N}$ $\therefore$ $2n$ no pertenece a la misma clase de equivalencia que $n$ $\therefore$ para cada $n \in \mathbb{N}^* - \mathbb{N}$, sea $D_n = \{n \pm k \mid k \in \mathbb{N}\}$ la clase de equivalencia de $n$, claramente $D_n \cong \mathbb{Z}$ (con el orden) y $\therefore$ el tipo de orden de cada $D_n$ es $\omega^* + \omega$. Sea $\mathbb{N}^* - \mathbb{N}/\sim = \{D_n\}_{n \in \mathbb{N}^* - \mathbb{N}}$ definamos sobre este conjunto un orden de la siguiente manera; $D_n < D_m$ sii $n < m$ y $|n-m|$ es infinito. Supongamos que $D_n < D_m \Rightarrow n < m \Rightarrow$ Por el Principio de Transferencia que $\exists\, z \in \mathbb{N}^*$ tal que $m = n + z \Rightarrow m - n = z$, pero $|n-m| \in \mathbb{N}^* - \mathbb{N}$ $\therefore$ $z$ es infinito y $D_n < D_z < D_m$, así el tipo de orden $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}^* - \mathbb{N}}$ es $\theta$. Tomando en cuenta ii) tenemos que el tipo de orden de $\mathbb{N}^*$ es: $\omega + (\omega^* + \omega)\theta$.

<u>Teorema</u> 2.1.- El conjunto de naturales que pertenecen a $\mathbb{N}^* - \mathbb{N}$, es externo en $\mathcal{N}^*$.

Prueba.- Sea $Th(\mathcal{N})$ el conjunto estratificado de enunciados admisibles y verdaderos en $\mathcal{N}$. Sea $\mathbb{N}_i = \mathbb{N}^* - \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}_i$ no tiene elemento mínimo. Por otra parte, sabemos que es verdadero en $\mathcal{N}$, " todo subconjunto no vacío de elementos de $\mathbb{N}$ posee un elemento mínimo", lo anterior puede ser expresado mediante enunciado $\varphi$ de $Th(\mathcal{N})$ donde

$$\varphi : (\forall x)\{[(\exists y)\,\phi_{(0)}(x, y)] \supset [(\exists y)\,\phi_{(0)}(x, y) \wedge ((\forall z)\,\phi_{(0)}(x, z) \supset$$

$$(\phi_{(0,0)}(e, y, z) \vee \phi_{(0,0)}(q, y, z))]\}$$

$\therefore$ $\varphi$ también es verdadera en $\mathcal{N}^* \Rightarrow$ que todo conjunto interno no-vacío de números naturales posee un elemento mínimo y dado que $\mathbb{N}_i$ no posee tal elemento, $\mathbb{N}_i$ no es interno $\therefore$ $\mathbb{N}_i$ es externo en $\mathcal{N}^*$.

<u>Teorema</u> 6.6.- $\mathbb{N}$ es un conjunto externo en $\mathcal{N}^*$.

Prueba.- Sea

$\psi : (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\sim\phi_{(0)}(x, z) \equiv \phi_{(0)}(y, z))$ enunciado verdadero en $\mathcal{N} \Rightarrow \psi \in Th(\mathcal{N}) \Rightarrow \mathcal{N}^* \models \psi$. $\psi$ establece que para todo conjunto de tipo (0), existe otro conjunto, el cual es su complemento, recordado que en $\mathcal{N}^*$ se interpreta "conjunto" como "conjunto interno", entonces si $\mathbb{N}$ fuera un conjunto interno $\Rightarrow \mathbb{N}^* - \mathbb{N}$ también sería interno, pero sabemos por el Teorema anterior que $\mathbb{N}^* - \mathbb{N}$ es externo en $\mathbb{N}^*$, de aquí que $\mathbb{N}$ también sea un conjunto externo en $\mathcal{N}^*$.

## 3.- Análisis No-Standard.

Sea $R = \langle \mathbb{R}, \{+, \cdot, \leq, 0, 1, |\ |\} \rangle$.

Definimos $Th(R)$ como el conjunto estratificado de enunciados admisibles y verdaderos en $R$. Sea $\underline{a}$ un individuo tal que $\underline{a} \notin \mathbb{R}$ y sea $G = \{\sim e(a, b_i) \mid b_i \in \mathbb{R}\}$ donde $e$ denota la igualdad. Afirmamos que $Th(R) \cup G$ no es contradictorio; para ésto supongamos que $Th(R) \cup G$ es contradictorio $\Rightarrow \exists\, G' \subset G$ con $G' \neq \emptyset$ tal que $Th(R) \cup G'$ es contradictorio. Sea

$G' = \{\sim e(a, b_1), \ldots, \sim e(a, b_n)\} \Rightarrow$

$Th(R) \cup \{\sim e(a, b_1), \ldots, \sim e(a, b_n)\}$ es contradictorio $\Rightarrow Th(R) \vdash e(a, b_1) \wedge e(a, b_2) \wedge \ldots \wedge e(a, b_n)$

$Th(R) \vdash (\forall x)(e(x, b_1) \vee e(x, b_2) \vee \ldots \vee e(x, b_n))$

interpretando ésto último en $R$ tenemos que, todo $x \in \mathbb{R}$ es alguno de los $\{b_i\}_{i=1,\ldots,n}$, dado que ésto no es verdadero en $R \Rightarrow Th(R) \cup G$ es consistente y $\therefore$ posee un modelo $R^*$ donde $R^* = \langle \mathbb{R}^*, \{+^*, \cdot^*, \leq^*, 0, 1, |\ |^*\} \rangle$ y $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$ dado que $\mathbb{R}^*$ contiene elementos los cuales son diferentes, en $R^*$, que todos los elementos de $\mathbb{R}$, de aquí que $R^*$ sea un modelo no-standard del análisis.

## 4.- Propiedades ~~E~~ específicas de $R^*$.

i) $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{R}^*$

ii) $R^*$ es un campo ordenado, dado que el enunciado que expresa "$R$ es campo ordenado" pertenece a $Th(R)$

iii) $R^*$ no es arquimediano, dado que existen $a \in \mathbb{R}^* - \mathbb{R}$ tales que $r < a \ \forall r \in \mathbb{R}$

<u>Definición</u>.- Sea

$M_0 = \{ a \in \mathbb{R}^* \mid |a| < r$ para algún $r \in \mathbb{R} \}$, a todo elemento de $M_0$ lo llamaremos real finito.

<u>Definición</u>.- Sea

$M_1 = \{ a \in \mathbb{R}^* \mid |a| < r \ \forall r \in \mathbb{R} \}$, a los elementos de $M_1$ los llamaremos infinitesimales.

<u>Definición</u>.- Los elementos de $\mathbb{R}^* - M_0$ los llamaremos reales infinitos.

<u>Observaciones</u> .- $\mathbb{R} \subset M_0$, $M_1 \subset M_0$, $\mathbb{R} \cap M_1 = \{0\}$, $\mathbb{N}^* \cap M_0 = \mathbb{N}$.

Llamaremos a los elementos de $\mathbb{R}$, reales standard y a los elementos de $\mathbb{R}^* - \mathbb{R}$ reales no-standard.

<u>Notas</u>.- ~~El~~ 0 es el único real standard que es infinitesimal.

Un $r \in \mathbb{R}^*$ con $r \neq 0$ es infinitesimal sii $r^{-1}$ es infinito, es decir, pertenece a $\mathbb{R}^*-M_0$. Es fácil ver que $M_0$ es un subanillo de $\mathbb{R}^*$ y que $M_1$ constituye un subanillo de $M_0$ con la propiedad de que si $h \in M_1$ y $\underline{a} \in M_0$ entonces $a\,h \in M_1 \Rightarrow$ que $M_1$ es un ideal en $M_0$, más aún, $M_1$ es un ideal maximal, puesto que si $a \in M_0$ y $a \notin M_1$ entonces existen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$ tal que $0 < r_1 < |a| < r_2$ y así $a^{-1} \in M_0 \Rightarrow$ que cualquier ideal el cual contenga propiamente a $M_1$ debe de contener al elemento unitario de $M_0$ y $\therefore$ a toda $M_0$. Ahora consideremos al anillo cociente $M_0/_{M_1}$, dado que $M_1$ es un ideal maximal en $M_0$, el anillo cociente es un campo.

<u>Definición</u>.- Sean $a, b \in \mathbb{R}^*$. Si $|a-b|$ es infinitesimal entonces decimos que b está infinitamente cercano a $\underline{a}$ y escribimos $a \simeq b$

<u>Teorema</u> 4.1.- El anillo cociente $M_0/M_1$ es isomorfo (tomando en cuenta el orden) al campo de los números reales, $\mathbb{R}$.

Prueba.- Sabemos que si $A$ es una clase de equivalencia en $M_0$, módulo $M_1 \Rightarrow$ que $A$ no contiene reales standard $r_1, r_2$ tales que $r_1 \neq r_2$, dado que si $|r_1 - r_2| \simeq 0$ y $r_1 \neq r_2 \Rightarrow$

por definición de infinitesimal que $|r_1 - r_2| < |r_1 - r_2|$, lo cual es una contradicción. Con lo anterior mostramos que $\mathbb{R}$ es un subcampo de $M_0/M_1$, y solo resta mostrar que a todo real $\underline{a} \in M_0$ le corresponde un único real standard $r$ tal que $|a - r| \simeq 0$. Para esto, observamos que si $\underline{a} \in M_0$ entonces los conjuntos $D = \{r \mid r \in \mathbb{R} \text{ y } r \leq a\}$ y $D' = \mathbb{R} - D$ definen una cortadura $(D, D')$ en $\mathbb{R}$. Sea $r \in \mathbb{R}$ el real tal que $r = (D, D')$, entonces debe de suceder que $a \simeq r$. Supongamos que no es así $\Rightarrow$ por definición de infinitesimal, existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $|a - r| \geq \varepsilon$, si $a > r$ $\Rightarrow r + \varepsilon/2 < a$ lo cual contradice el hecho de que $\underline{a}$ y $r$ determinan la misma cortadura, lo mismo sucede si $r > a$, dado que se obtiene que $r - \varepsilon/2 > a$ y $\therefore$ concluimos que $a \simeq r \Rightarrow$ que la biyección $a \longrightarrow r$ nos asegura el isomorfismo entre $M_0/M_1$ y $\mathbb{R}$.

<u>Definición</u>.– $\forall a \in M_0$, llamamos al único real standard $r$, el cual esta infinitamente cerca de $\underline{a}$, la parte standard de $\underline{a}$ y lo denotamos como $r = st(a)$.

Definición.- $\forall a \in \mathbb{R}^*$ sea $\mu(a) = \{ r \in \mathbb{R} \mid |r-a| \in M_1 \}$; $\mu(a)$ es la clase de equivalencia de $\underline{a}$ en $\mathbb{R}^*$ módulo $M_1$, llamada la monada de $\underline{a}$.

Teorema 9.2.- $\mathbb{R}$ es un conjunto externo en $R^*$

Prueba.- Supongamos que $\mathbb{R}$ es interno en $R^* \Rightarrow \mathbb{R} \cap \mathbb{N}^* = \mathbb{N}$ es interna en $R^*$ y $\therefore$ en $N^*$, tomando en cuenta teorema 2.1, $\mathbb{R}$ no puede ser interno en $R^*$ $\therefore$ $\mathbb{R}$ es un conjunto externo en $R^*$

Nota.- $M_0$ y $M_1$ son conjuntos externos en $R^*$.

Teorema 9.3.- Sea $\underline{a} \in \mathbb{R}^*$, entonces $\mu(a)$ es externo en $R^*$.

Prueba.- Supongamos que $\mu(a)$ es interno en $R^*$ para alguna $a \in \mathbb{R}^* \Rightarrow$ $\mu_0 = \{ b = c - a \mid c \in \mu(a) \}$ también es interno en $R^*$ pero $\mu_0$ es la monada del 0 y $\therefore$ los recíprocos de los elementos en $\mu_0$ son distintos de cero, dicho conjunto de recíproco también es interno en $R^*$, pero éste conjunto es exactamente $M_1$ y por nota anterior sabemos que $M_1$ es externo en $R^*$, por consiguiente $\mu(a)$ tiene que ser externo en $R^*$ $\forall a \in \mathbb{R}^*$.

Veamos ahora la caracterización de algunos resultados clásicos del análisis y la topología en $\mathbb{R}^*$ (en una formulación no-standard).

—Una sucesión de reales standard $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathbb{R}$ sii $S_n \simeq S_m$ $\forall n,m \in \mathbb{N}^*-\mathbb{N}$

—Sea $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión interna tal que $S_n$ es infinitesimal $\forall n\in\mathbb{N}$. Entonces existe un número natural infinito $m$ tal que $S_n$ es infinitesimal $\forall n<m$.

—Sean $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, sea $f$ un mapeo de $X$ en $Y$ y sea $p \in X$. Entonces $f$ es contínua en $p$ sii $f(\mu(p)) \subseteq \mu(f(p))$.

—La integral impropia:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \text{ existe sii } \int_{\eta}^{\xi} f(x)\,dx \simeq 0 \quad \forall \eta,\xi \in \mathbb{N}^*-\mathbb{N}.$$

—Un espacio topológico $T$ es Hausdorff sii $\forall p,q \in T$ con $p\neq q$ $\mu(p)\cap\mu(q)=\emptyset$.

# Capitulo IV

## Un Problema de Subespacios Invarintes en Espacios Hilbert.

Enfocaremos ahora nuestra atención a un resultado del Análisis funcional, el cual era un problema abierto antes de ser tratado con la técnica no-standard. El problema es el siguiente: Si T es un operador lineal acotado sobre un espacio Hilbert. (o Banach); ¿T posee un subespacio invariante propio? Para operadores compactos sobre espacios Hilbert la respuesta afirmativa la dieron N. Aronszajn y J. Von Newman en 1930, y para espacios Banach la dan N. Aronszajn y K. Smith en 1954.

En 1963, Halmos en un artículo lanza la siguiente pregunta abierta hecha por K. Smith: Si T es un operador lineal acotado sobre un espacio Hilbert, tal que $T^2$ es compacto, ¿T tiene un subespacio invariante propio?

Mas adelante, Bernstein y Robinson en 1964 demostraron por primera vez con la técnica no-standard que; si algún polinomio de T es compacto, con T un operador lineal acotado sobre un espacio Hilbert, entonces T tiene un subespacio invariante propio. Poco después éste resultado se extendió a espacios Banach.

Antes de presentar la prueba que dieron Bernstein y Robinson con la técnica no-standard del resultado anteriormente mencionado, hablaremos del espacio Hilbert no-standard y de algunos resultados que son auxiliares en dicha prueba.

Sea $H$ un espacio Hilbert sobre $\mathbb{C}$, si $T$ es un operador sobre $H$ y $M$ un subespacios de $H$, $M$ es invariante bajo $T$ sii $T(M) \subseteq M$.

Si $H$ no es separable, cualquier operador lineal $T$ sobre $H$ y $\forall x \in H$ con $x \neq 0$, el conjunto $\{x, Tx, T^2x, \ldots, T^nx, \ldots\}$ genera un subespacio invariante propio, de aquí que el único caso interesante sea cuando $H$ es separable. De ahora en adelante siempre consideraremos a $H$ como un espacio Hilbert separable de dimensión infinita.

## 1.- ~~E~~ Espacio Hilbert no-standard

Sea $A_0 = H \cup \mathbb{C}$ y para cada tipo $z$ de la forma $z = (z_1, \ldots, z_n)$, sea $A_z$ el conjunto de todos los subconjuntos de $A_{z_1} \times A_{z_2} \times \cdots \times A_{z_n}$ como en el capítulo I. Sea $S = \{A_z\}_{z \in T}$ (aquí $T$ es el conjunto de todos los tipos), $S$ es la estructura mas grande que contiene a $A_0$ como su conjunto de individuos.

un alargamiento propio de $M$. Consideremos una relación arbitraria $Q$ de $M$ con $Q \in A_2$, $Q$ es denotada por el símbolo constante $\beta$ de $L$. Llamamos $Q^*$ a la relación que denota $\beta$ en $M^*$, $Q^*$ comparte con $Q$ las propiedades expresables mediante enunciados de $L$. En particular, $H$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{N}$ son extendidos en $M^*$ a los conjuntos $H^*$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{R}^*$ y $\mathbb{N}^*$ donde $H \subset H^*$, $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}^*$, $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$ y $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}^*$, así el espacio Hilbert no-standard $H^*$ contiene a todos los puntos standard y a otros elementos que no pertenecen a $H$ que son los llamados elementos no-standard de $H^*$.

Una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de $H$ ($\circ$ $\mathbb{C}$) se extiende a una sucesión $\{x_n\}^*$ donde $f^*$ ahora está definida $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ y toma valores en $H^*$ ($\circ$ $\mathbb{C}^*$), de aquí que si $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = f^*(n)$ y $\therefore$ $f^*(n) = f(n)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

La norma $\|\cdot\|$ que en $M$ es una función de $H$ en $\mathbb{R}$ se extiende a una función de $H^*$ en $\mathbb{R}^*$, la cual será otra vez denotada por $\|\cdot\|$.

Recordemos que si $r \in \mathbb{R}^*$ y $|r| < s$ $\forall\, s \in \mathbb{R}^+$, $r$ es infinitesimal y si $|r| < s$ para algún $s \in \mathbb{R}^+$, entonces $r$ es finito y en éste caso

Entre las relaciones de $\mathfrak{S}$ están $H$ y $\mathbb{C}$, así como todos sus subconjuntos, todas sus relaciones, todas sus relaciones de relaciones, etc, en particular están $\mathbb{R}$ y $\mathbb{N}$ como subconjuntos de $\mathbb{C}$, además podemos seleccionar las relaciones bajo las cuales $H$ es un espacio Hilbert sobre $\mathbb{C}$. Por ejemplo, encontramos en $S$ la relación $Q(x,y,z)$ la cual se tiene si $x,y,z \in \mathbb{C}$ y $x-y=z$ y la relación $A(x,y,z)$, que se tiene si $x,y,z \in H$ y $x+y=z$, de está manera todas las operaciones algebráicas sobre $H$ y $\mathbb{C}$ son relaciones en $S$. También pertenece a $S$ la relación $N(x,y)$ que se tiene justamente en el caso en que $x \in H$, $y \in \mathbb{R}$ y la norma de $x$ es $y$, es decir $\|x\| = y$.

Una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de $H$ es una función $f: \mathbb{N} \to H$, tomada como una relación binaria $P(n,y)$ la cual se tiene si $x_n = y$.

Seleccionemos ahora un lenguaje $L$ adecuado para $S$, es decir que $L$ contenga un símbolo constante distinto para cada individuo y relación en $S$. Sea $M = \langle \{A_z\}_{z\in T}, F \rangle$ donde $F$ es un mapeo 1-1 que asocia a cada individuo y relación en $S$ una constante (es decir un símbolo constante) de $L$. Sea $M^* = \langle \{B_z\}_{z\in T}, G \rangle$

existe un único elemento de $\mathbb{R}$, denotado por $st(r) = r^{\circ} \cdot \to \cdot\ r - r^{\circ}$ es infinitesimal, esto se tiene dado que $\mathbb{R}$ es completo (en el sentido de Cauchy) y se define $r^{\circ}$ como el real determinado por la cortadura Dedekind $< \{s \in \mathbb{R} \mid |s| < r\}, \{s \in \mathbb{R} \mid |s| \geq r\} >$.

Escribimos $r_1 \sim r_2$ sii $r_1 - r_2$ es infinitesimal $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}^*$, ésta es una relación de equivalencia y en particular se tiene que $r \sim r^{\circ}$ $\forall r \in \mathbb{R}^*$ finito. Las mismas definiciones se tienen cuando $r \in \mathbb{C}^*$

Teorema 1.1.-

La sucesión $\{S_n\}$ de elementos de $\mathbb{R}$ converge al real standard $S$, es decir $\lim_{n \to \infty} S_n = S$ sii $S - S_{\nu}$ es infinitesimal $\forall \nu \in \mathbb{N}^* - \mathbb{N}$.

Prueba.- Aplicar Teorema de Łos.

Sea $x \in H^*$, si $x \in H \Rightarrow x$ es standard. Si $\|x\| < r$ para algún $r \in \mathbb{R}^+$, $x$ es llamado norma-finita. Si $\|x\| < s$ $\forall s \in \mathbb{R}^+$, $x$ es llamado infinitesimal, Definimos la relación "$\sim$" $\forall x, y \in H^*$ como $x \sim y$ sii $x - y$ es infinitesimal. $\sim$ es una relación de equivalencia compatible con las operaciones de espacio vectorial.

Definición.- Si existe $y \in H^*$ standard tal que $x \sim y$, para $x \in H^*$, a $x$ lo llamamos casi-standard.

<u>Nota</u>.- $H^*$ contiene elementos los cuales son norma-finito pero no casi-standard.

Sea $V$ una relación de $M$ de tipo(2). Si los elementos de $V$ son descritos con algún nombre matemático común, entonces éste mismo nombre se usará también para referirse a los elementos de $V^*$. Sea $\omega$ la relación de $M$ la cual designe al conjunto de todos los operadores lineales acotados en $H$. Existe una función real-valuada

$\|\cdot\|: \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida $\forall T \in \omega$ como $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\|$

$\|\cdot\|$ se extiende a la función $\|\cdot\|: \omega^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$, la función $\|\cdot\|$ tiene la siguiente propiedad:

$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\| \quad \forall T \in \omega^*$ y $\forall x \in H^*$.

Si $T \in \omega$, denotamos por $T^*$ al operador extensión en $H^*$.

<u>Definición</u>.- Un operador lineal acotado $T$ sobre $H$ es compacto (o completamente continuo) si transforma a todo acotado de $H$ en un conjunto realmente compacto, es decir; en un conjunto cuya cerradura es compacta.

El siguiente resultado es una caracterización de operadores compactos, dada por Robinson.

<u>Teorema</u> 1.2.- Sea $T$ un operador compacto sobre $H$, entonces $T_x^*$ es casi-standard $\forall x \in H^*$ norma-finita.

Prueba.- Si $x \in H^*$ es norma-finita $\Rightarrow \|x\| < r$ para algún $r \in \mathbb{R}^+$. Sea $D = \{\xi \mid \|\xi\| < r\}$, $D$ es acotado en $H$ (su cota es $r$), como $T$ es un operador compacto sobre $H \Rightarrow \overline{T(D)} = A$ es compacto (donde $\overline{T(D)}$ denota la cerradura de $T(D)$). Los correspondientes conjuntos en $H^*$ son $D^*$ y $A^*$; como $\|x\| < r \Rightarrow r \in D$ y $\therefore$ $x \in D^*$, de aquí que $T_x^* \in A^*$. Tomando en cuenta que si $S$ es un conjunto compacto en $H$, entonces todo $s \in S^*$ es casi-standard, concluimos que $A^*$ solo contiene elementos casi-standard y $\therefore$ $T_x^*$ es casi-standard.

Sea $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal de $H$.

Denotamos por $H_n$ al espacio generado por $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Sea $P_n$ la proyección de $H$ sobre $H_n$. Cuando pasamos a $M^*$, $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ se extiende a una sucesión $^*$ $\{e_i\}^*_{i \in \mathbb{N}^*}$ de elementos de $H^*$. Si $v \in \mathbb{N}^* - \mathbb{N}$, $H_v$ designará al subespacio de

$H^*$ generado por $\{e_i\}^*_{i=1,\dots,v\in \mathbb{N}^*}$, es decir $H_v$ consiste de todos aquellos elementos de $H^*$ que tengan una expresión de la siguiente manera:

$\sum_{i=1}^{v} a_i e_v$ con $a_i \in \mathbb{C}^*$, $i=1,\dots,v$

Dada una sucesión infinita de elementos de $H^*$ $\{\xi_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ escribimos $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i = \sigma$ para indicar que dada $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ con $\varepsilon > 0$, $\exists\, v \in \mathbb{N}^*$ ∍· $\left|\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i - \sigma\right| < \varepsilon$ $\forall i > v$, $i \in \mathbb{N}^*$. Lo anterior también se tiene para sucesiones de elementos de $\mathbb{C}^*$.

<u>Teorema</u> 1.3.- Si $x \in H \Rightarrow \|x - P_v x\|$ es infinitesimal $\forall v \in \mathbb{N}^* - \mathbb{N}$.

Prueba.- Sea $x \in H$, dado que $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es base de $H$ $\lim_{n\to\infty}\{P_n x\} = x$. Tomando en cuenta teorema 1.1 se sigue que $x - P_v x$ es infinitesimal $\forall v \in \mathbb{N}^* - \mathbb{N}$.

<u>Teorema</u> 1.4.- Si $x \in H^*$ es casi-standard, entonces $x$ es norma finito y $\|x - P_v x\|$ es infinitesimal.

Prueba.- Sea $x \in H^*$ ∍· $x$ sea casi-standard $\Rightarrow \exists\ x^\circ$ en $H \cdot\ni\cdot \|x-x^\circ\|$ es infinitesimal. Sabemos que:

$\|x\|=\|x-x^\circ+x^\circ\| \leq \|x-x^\circ\|+\|x^\circ\|$, como $\|x-x^\circ\|<r\ \forall r\in\mathbb{R}^+$.

podemos escoger $r=1$ y entonces $\|x\|\leq 1+s\in\mathbb{R}^+$ donde $\|x^\circ\|=s$ y de aquí que $x$ sea norma-finito.

Tomemos en cuenta que:

$\|x-P_v x\| = \|x-x^\circ+x^\circ-P_v x^\circ+P_v x^\circ-P_v x\| \leq$

$\leq \|x-x^\circ\|+\|x^\circ-P_v x^\circ\|+\|P_v x^\circ-P_v x\| =$

$= \|x-x^\circ\|+\|x^\circ-P_v x^\circ\|+\|P_v\|\|x^\circ-x\|$ por la linealidad de $P_v$ y la propiedad; $\|Tx\|\leq\|T\|\|x\|$. Sabemos que $\|x-x^\circ\|$ es infinitesimal y por teorema 1.3 también sabemos que $\|x^\circ-P_v x^\circ\|$ es infinitesimal y dado que $\|P_v\|=1$, concluimos que $\|x-P_v x\|$ es infinitesimal.

Sea $T$ un operador lineal acotado sobre $H$, relativo a una base ortormal $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $T$ está representado por una matriz infinita $[a_{jk}]$ (con $j$-renglones y $k$-columnas) con $j,k\in\mathbb{N}$.

Así para cualquier

$k\in\mathbb{N}$, $Te_k=\sum_{i=1}^{\infty} a_{jk}\,e_j = a_{1k}e_1+a_{2k}e_2+\cdots+a_{nk}e_n+\cdots$

Dado que $[a_{jk}]$ es una función de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{C}$, tiene una extensión $[a_{jk}]^*$, la cual es una función de

$\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}^*$. Para toda $m, n \in \mathbb{N}^*$ el valor de ésta función en $\langle m,n \rangle$ es denotado por $a_{mn} \in \mathbb{C}^*$

Dada cualquier matriz infinita $[a_{jk}]$ podemos multiplicarla por ella misma $n$ veces en la manera usual, y a ésta nueva matriz la notaremos por $[a_{jk}]^n$ y cada uno de sus términos por $a_{jk}^{(n)}$, $\therefore$ $[a_{jk}]^n = [a_{jk}^{(n)}]$

Definición.- Una matriz $[a_{jk}]$ es casi-superdiagonal sii $a_{jk} = 0$ para $j > k+1$.

Teorema 5.- Sea $T$ un operador lineal acotado en $H$, representado por la matriz casi-superdiagonal $[a_{jk}]$. Sea $p(z) = C_0 + C_1 + \cdots + C_m z^n$

$p(z) = C_0 + C_1 z + \cdots + C_m z^m$ con $C_m \neq 0$ para $m \geq 1$, un polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$ tal que $p(T)$ es compacto. Entonces existe $v \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ tal que $a_{v+1,v}$ es infinitesimal.

Omitimos su prueba.

## E.- Subespacios de Espacios Hilbert No-Standard.

Sea $E$ un subespacio lineal (interno) de $H_v$. Definimos al conjunto $E^\circ \subset H$ como.

$E^\circ = \{x \in H \mid \|x - x'\| < r \;\; \forall r \in \mathbb{R}^+$ y para algún $x' \in E\}$.

Denotamos por $P_E$ la proyección de $H^*$ sobre $E$, entonces $P_E$ es el mas cercano operador puntual sobre $E$, es decir $\|x-x'\| \geq \|x-P_E x\|$ $\forall x \in H$ y $x' \in E$ (se da la igualdad cuando $x'$ es standard), de aquí que $x \in H$ y $x \in E^{\circ}$ sii $\|x-P_E x\|$ es infinitesimal.

<u>Definición</u>.- Sea $T$ un operador lineal acotado sobre $H$ y sea $\nu \in \mathbb{N}^* - \mathbb{N}$. El operador $T_\nu$ sobre $H_\nu$ es la restricción de $P_\nu T^* P_\nu$ a $H_\nu$, es decir $T_\nu = P_\nu T^* P_\nu : H_\nu \subset H^* \longrightarrow H_\nu \subset H^*$. Entonces se tiene que:

$\|T_\nu\| \leq \|P_\nu\|^2 \|T^*\| \leq \|T^*\| = \|T\|$

$\therefore T_\nu$ tiene norma finita.

<u>Teorema</u>. 2.1.- Sea $E$ un subespacio lineal interno de $H_\nu$ invariante bajo $T_\nu$, entonces $E^{\circ}$ es invariante bajo $T$.

Prueba.- Tomemos cualquier $x \in E^{\circ}$ ($\Rightarrow$ $x$ es standard), entonces $P_E x \simeq x$ y dado que $\|T^*\| = \|T\| \Rightarrow T^* P_E x \simeq T^* x$, pero si $x \in H$ entonces $T^*_x \in H$ y $\therefore T^* P_E x$ es casi-standard.

Ahora bien, tomando encuenta teorema 1.4, sea $x, T^* P_E x$ y sea $P_\nu x$, $P_\nu T^* P_E x$, entonces tenemos que $\|T^* P_E x - P_\nu T^* P_E x\|$ es infinitesimal, es decir $P_{\vartheta}T^*P_E x \simeq T^*P_E x$ y pegando las dos relaciones tenemos que; $P_{\vartheta}T^*P_E x \simeq T^*x$. Sabemos que $T^*: H^* \to H^*$ y $P_{\vartheta}: H^* \to H_{\vartheta}$ y dado que $T_{\vartheta} = T^*|_{H_{\vartheta}}$ podemos hacer $T_{\vartheta} = P_{\vartheta}T^*: H^* \to H_{\vartheta}$, entonces nuestras anteriores relaciones nos quedan $T_{\vartheta}P_E x = P_{\vartheta}T^*P_E x \simeq T^*x = Tx$ dado que $x$ es standard, pero $T_{\vartheta}P_E x \in E$ pues por hipótesis $T_{\vartheta}(E) \subseteq E$ $\therefore$ $Tx$ está infinitamente cercano a un elemento de $E \Rightarrow$ que $Tx \in E^0$ y con ésto probamos que $T$ deja invariante a $E^0$.

La dimensión de $H_{\vartheta}$ definida en el lenguaje $L$ es $\vartheta$, es decir $\dim(H_{\vartheta}) = \vartheta$, en éste sentido $H_{\vartheta}$ es de "dimensión finita" y sucede lo mismo con todo subespacio lineal (Interno) $E$ de $H_{\vartheta}$, es decir existe un entero positivo $\dim(E) \in \mathbb{N}^*$ que puede ser finito o infinito que comparte con las dimensiones standard aquellas propiedades que pueden ser expresadas mediante enunciados de $L$.

<u>Teorema</u>.- 2.2.- Sean $E$ y $E_1$ subespacios lineales de $H_{\vartheta}$ tales que, $E \subset E_1$ y $\dim(E_1) = \dim(E)+1$, entonces $E^0 \subseteq E_1^0$ y cualesquiera dos elementos de $E_1^0$ son linealmente dependientes módulo $E^0$.

Omitimos su prueba.

## 3.- Resultado Principal (Prueba No-Standard)

Teorema.- Sea T un operador lineal acotado en un espacio Hilbert H sobre $\mathbb{C}$ con dim(H) infinita y sea $p(z) \neq 0$ un polinomio con coeficientes complejos $\ni$ $p(T)$ es compacto. Entonces T deja invariante al menos un subespacio lineal cerrado de H, propio.

Prueba.- El método de la prueba está basado en el hecho de que un espacio de dimensión finita, digamos m, cualquier operador lineal posee una cadena de subespacios invariantes $E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_m$ donde $\dim(E_j)=j$ con $j=1,\ldots,m$ y así $E_0=\{0\}$.

Sea $x \in E$ con $\|x\|=1$.

Si $A=\{x, Tx, T^2x, \ldots,\}$ es un conjunto linealmente dependiente (en el sentido algebráico), entonces A genera un subespacio invariante propio para T. Si no sucede ésto, entonces $A=\{x, Tx, T^2x, \ldots\}$ es un conjunto linealmente independiente y genera a todo el espacio H. En este caso al conjunto A lo podemos reemplazar por un conjunto ortonormal equivalente a $A$, con ayuda del proceso de Gram-Schmidt, sea dicho conjunto $B = \{x = a_1, e_2, \ldots, \}$ y $\therefore \{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una base ortonormal para $H$ y para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $\text{gen}\{e_1, \ldots, e_n\} = \text{gen}\{x, Tx, \ldots, T^{n-1}x\}$. También para cualquier $k \in \mathbb{N}$

$$a_k \in \text{gen}\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} = \text{gen}\{x, Tx, \ldots, T^{k-1}x\}$$

así que

$$Te_k \in \text{gen}\{Tx, T^2x, \ldots, T^kx\} \subseteq \text{gen}\{a_1, e_2, \ldots, e_{k+1}\}$$

$\therefore Te_k = \sum_{j=1}^{k+1} \beta_{jk} e_j$ para alguna $\beta_{jk} \in \mathbb{C}$ con $0 < j \leq k+1$. Después de seleccionar tal $\beta_{jk}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos la matriz $[a_{jk}]$ como:

i) $a_{jk} = \beta_{jk}$ si $j \leq k+1$.

ii) $a_{jk} = 0$ si $j > k+1$

Entonces $[a_{jk}]$ es una matriz casi-superdiagonal, la cual representa a $T$ relativo a la base $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Supongamos que $T$ es un operador lineal acotado sobre $H$ y que $p(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$ con $c_n \neq 0$ es un polinomio no nulo con coeficientes en $\mathbb{C}$ tal que $p(T)$ es compacto. Por Teorema 1.5, sea $\nu$ tal natural infinito tal que $a_{\nu+1,\nu}$ es infinitesimal.

Para abreviar, denotemos por $P$ la proyección $P_\nu$ de $H^*$ sobre $H_\nu$ y por $T'$ al operador $PT^*P$.

Probemos por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ que $(T^*)^n(\xi)$ v $(T')^n(\xi)$ $\forall\, \xi \in H_\nu$ con $\xi$ norma-finito y $n \in \mathbb{N}$.

Para el caso $n=1$, sea $\xi \in H_\nu$ norma-finito, entonces $\xi = P(\xi) = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k e_k$ para alguna $\alpha_k \in \mathbb{C}^*$ con $k = 1,2,\ldots,\nu$. Entonces
$|\alpha_\nu| = \|\alpha_\nu\| \|e_\nu\| = \|\alpha_\nu e_\nu\| \leq \|\xi\|$ pero si $\xi = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k e_k$

$\Rightarrow$ que $\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k e_k$ en norma, es menor que cada

uno de los sumandos, en particular de $\alpha_\nu e_\nu$ y como $\|\xi\|$ es norma-finito, es decir $\|\xi\| < m$ para alguna $m \in \mathbb{R}^+$, entonces también $|\alpha_\nu| < m \Rightarrow \alpha_\nu$ es finito. Ahora bien

$$T^*(\xi) = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k T^*(e_k) = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} e_j = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k \sum_{j=1}^{\nu+1} a_{jk} e_j$$

dado que $a_{jk} = 0$ si $j > k+1 > k$

$j > \nu+1 > k$ para $k = \nu$

usando el hecho de que $[a_{jk}]$ es una matriz casi-superdiagonal.

Cambiando el signo de sumatoria en la anterior relación, obtenemos que

$$T^*(\xi) = \sum_{j=1}^{\nu+1} \left( \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k a_{jk} \right) e_j$$

pero $a_{\nu+1,k} = 0$ para $\begin{array}{l} k+1 < \nu+1 \\ k < \nu \end{array}$

así que $\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k a_{\nu+1,k} = \alpha_\nu a_{\nu+1,\nu}$ y $\therefore$

$$T^*(\xi) = \sum_{j=1}^{\nu} \left( \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k a_{jk} \right) e_j + \alpha_\nu a_{\nu+1,\nu} e_\nu.$$

Pero $PT^*(\xi) = P\left( \sum_{j=1}^{\nu+1} \left( \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k a_{jk} \right) e_j \right)$ y dado que $P$ es la proyección $P_\nu$ de $H^*$ sobre $H_\nu$, entonces

$PT^*(\xi) = \sum_{j=1}^{\nu} \left( \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k a_{jk} \right) e_j$ y por consiguiente;

$$T^*(\xi) - PT^*(\xi) = \sum_{j=1}^{\nu} \left( \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k a_{jk} \right) e_j + \alpha_\nu a_{\nu+1,\nu} e_\nu - \sum_{j=1}^{\nu} \left( \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k a_{jk} \right) e_j$$

$$= \alpha_\nu a_{\nu+1,\nu} e_\nu$$

Sabemos que $\alpha_\nu$ y $e_{\nu+1}$ son finitos y que $a_{\nu+1,\nu}$ es infinitesimal, entonces $\|T^*(\xi) - PT^*(\xi)\|$ es infinitesimal, y dado que $\xi$ es arbitrario de norma-finito con $\xi \in H_\nu$ y $T' = PT^*P$ y como $T'(\xi) = PT^*P(\xi) = PT^*(\xi) \Rightarrow T^*(\xi) \backsim PT^*(\xi) = T'(\xi)$

$\therefore T^*(\xi) \backsim T'(\xi)$ con $\xi$ norma-finita, $\xi \in H_\nu$ y esto prueba el caso para $n = 1$.

Sea $n \geq 2$ y supongamos que

$(T^*)^{n-1}(\xi)\, v\, (T')^{n-1}(\xi)$ para cualquier $\xi$ norma-finito con $\xi \in H_\vartheta$.

Dado que $T^*$ tiene norma finita (dado que $\|T^*\| = \|T\|$)

$(T^*)^n(\xi) = T^*(T^*)^{n-1}(\xi)\, v\, T^*(T')^{n-1}(\xi)$.

Ahora bien, $\|(T')\|^{n-1}(\xi)\| \leq \|(T')^{n-1}\|\,\|\xi\|$

$\leq M^{-1} \cdot r = r'$ para

alguna $r' \in \mathbb{R}$, $\therefore (T')^{n-1}(\xi)$ es un elemento de $H_\vartheta$ norma-finito y tomando en cuenta que, $T^*(\xi)\, v\, T'(\xi)$ apliquémoslo reemplazando $\xi$ por $(T')^{n-1}(\xi)$, entonces obtenemos que;

$T^*((T')^{n-1}(\xi))\, v\, T'((T')^{n-1}(\xi)) = (T')^n(\xi)$.

Pero $(T^*)^n(\xi)\, v\, T^*(T')^{n-1}(\xi)$ y $T^*(T')^{n-1}(\xi)\, v\, (T')^n(\xi)$ $\Rightarrow (T^*)^n(\xi)\, v\, (T')^n(\xi)$ y de aquí que $(T^*)^n(\xi)\, v\, (T')^n(\xi)$ para $\xi \in H_\vartheta$ norma-finito y $n \in \mathbb{N}$.

Aplicando lo anterior a los mononios $p(T^*) = C_0 + C_1 T^* + C_2 (T^*)^2 + \cdots + C_n (T^*)^n$ y $p(T') = C_0 + C_1 T' + C_2 (T')^2 + \cdots + C_n (T')^n$, tenemos que $\|p(T^*(\xi)) - p(T'(\xi))\| = \|C_0(I^* - I^*) + C_1(T^*(\xi) - T'(\xi)) + \cdots +$

$+ C_n((T^*)^n(\xi) - (T')^n(\xi))\| \leq$

$\leq |C_1|\,\|T^*(\xi) - T'(\xi)\| + \cdots + |C_n|\,\|(T^*)^n(\xi) - (T')^n(\xi)\|$

y tomando en cuenta que $(T^*)^n(\xi)\, v\, (T')^n(\xi)$ para toda $\xi \in H_\vartheta$ norma-finito y $n \in \mathbb{N}$, entonces tenemos que $\|p(T^*(\xi)) - p(T'(\xi))\| < m \;\; \forall m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow p(T^*(\xi)) \sim p(T'(\xi))$ $\forall$ $\xi \in H_\nu$ con $\xi$ norma-finito.

Denotemos por $T_\nu$ la restricción de $T'$ a $H_\nu$. Dado que $H_\nu$ es de "dimensión finita" en el sentido del análisis no-standard, existe una cadena de subespacios, como al principio de la prueba con $m=\nu$ tal que $T_\nu(E_j) \subseteq E_j$ para $j=0,1,2,\ldots,\nu$. Los $E_j$ son subespacios lineales de $H^*$ y son de "dimensión finita" en el sentido del análisis no-standard. Dado que estos $E_j$ son subespacios de $H_\nu$, sea $Q_j$ la proyección de $H^*$ sobre $E_j \subset H_\nu$ para $j=0,1,2,\ldots,\nu$ y $\therefore Q_j = P$.

Seleccionemos cualquier $\alpha \in H$ con $\|\alpha\|=1$. Como $\alpha \in H \Rightarrow p(T\alpha) = p(T^*\alpha)$, si $p(T\alpha)=0$ $\Rightarrow$ que $p(T\alpha) = C_0\alpha + C_1 T\alpha + C_2 T^2\alpha + \cdots + C_n T^n\alpha = 0$ con $C_n \neq 0 \Leftrightarrow \{\alpha, T\alpha, T^2\alpha, \ldots, T^n\alpha\}$ es un conjunto linealmente dependiente, contrariamente a lo que hemos supuesto $\therefore p(T(\alpha)) = p(T^*(\alpha)) \neq 0$. Tomando encuenta Teorema 1.3 tenemos que $\alpha \sim P_\alpha$.

$\|p(T^*)\| \leq |C_0| + |C_1|\|T^*\| + \cdots + |C_n|\|T^*\|^n$ y como $\|T^*\| = \|T\| = M \Rightarrow \|p(T^*)\| \leq M'$ con $M' \in \mathbb{R}$ $\therefore p(T^*)$ tiene norma finita. Lo mismo sucede para $p(T')$, así que $p(T^*_\alpha) \sim p(T^*P_\alpha)$ y

$p(T'\alpha) \, v \, p(T'P\alpha)$.

Pero hemos seleccionado $v$ t.q. satisfaga Teorema 1.5. y como $p(T^*\xi) \, v \, p(T'\xi) \Rightarrow p(T^*P\alpha) \, v \, p(T'P\alpha)$.

Poniendo las tres relaciones juntas

$$p(T^*\alpha) \, v \, p(T^*P\alpha)$$
$$p(T'\alpha) \, v \, p(T'P\alpha)$$
$$p(T^*P\alpha) \, v \, p(T'P\alpha)$$
$$\therefore \; p(T^*\alpha) \, v \, p(T'\alpha)$$

Ahora bien, $p(T\alpha)=p(T^*\alpha) \neq 0$ es standard $\Rightarrow p(T'\alpha)$ no es infinitesimal y consecuentemente $\|p(T'\alpha)\| > r$ para alguna $r \in \mathbb{R}$.

Consideremos las expresiones

$r_j = \| p(T'\alpha) - p(T'Q_j\alpha) \|$ para $j = 0, 1, 2, \ldots, v$

Observemos que:

$r_j = \| p(T'\alpha) - p(T'Q_j\alpha) \| = \| p(T')(\alpha - Q_j\alpha) \| \leq$

$\| p(T') \| \| \alpha - Q_j\alpha \|$, por otra parte tenemos que $r_0 = \| p(T'\alpha) - p(T'Q_0\alpha) \| = \| p(T'\alpha) \|$ pero sabemos que $r < \| p(T'\alpha) \| = r_0 \Rightarrow r < r_0$. Por teorema 1.3 Tenemos que $\| \alpha - Q_v\alpha \| = |\alpha - P\alpha\|$ es infinitesimal.

$r_v = \| p(T'\alpha) - p(T'Q_v\alpha \| \leq \| p(T') \| \| \alpha - Q_v\alpha \| = r_0 \cdot m$ $\Rightarrow r_0 \cdot m > r_0 > r_0/2 > r/2 > r_v$ y por consiguiente $r_v < r/2 \Rightarrow r_v < r_0$. Por lo tanto se sigue que exiote un entero positivo $\mu$ más pequeño que puede ser finito o infinito tal que $r_\mu < r/2$ pero $r_{\mu-1} \geq r/2$

A todo $E_j$ le asociamos el subespacio lineal cerrado $E_j^\circ$ de $H$, donde recordemos que $E_j^\circ = \{x \in H \mid \|x - x'\|$ es infinitesimal para algún $x' \in E_j\}$. $E_{\mu-1}^\circ$ no puede ser todo $H$, pues en particular $\alpha \notin E_{\mu-1}^\circ$, porque si $\alpha \in E_{\mu-1}^\circ \Rightarrow \|\alpha - Q_{\mu-1}\alpha\|$ sería infinitesimal y como $r_{\mu-1} \leq \|p(T')\| \|\alpha - Q_{\mu-1}\alpha\| \Rightarrow$ que $r_{\mu-1}$ sería también infinitesimal, lo cual contradice la selección de $\mu$, dado que $r_{\mu-1} \geq r/2$; $\therefore$ $r_{\mu-1}$ no puede ser infinitesimal, de aquí que $E_{\mu-1}^\circ \neq H$. Por otra parte $E_\mu^\circ$ no puede ser $\{0\}$, para ésto consideremos el punto $\eta = p(T', Q_\mu\alpha)$, dado que $Q_\mu\alpha \in E_\mu$ y $E_\mu$ es invariante bajo $p(T_v)$ y equivalentemente bajo $p(T')$ entonces $\eta \in E_\mu$. Tomando en cuenta que $p(T^*\xi) \simeq p(T'\xi)$ (con $\xi \in H_v$ norma-finito) y dado que $Q_\mu\alpha \in E_\mu \subset H_v$ tenemos que $Q_\mu\alpha \in H_v$ y $\therefore$ $\eta = p(T'Q_\mu\alpha) \simeq p(T^*Q_\mu\alpha)$

$$= (p(T))^* Q_\mu\alpha.$$

Sabemos que $\|Q_\mu\alpha\| \leq \|Q_\mu\| \|\alpha\| = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow$ que $Q_\mu\alpha$ es norma-finito y teniendo en cuenta que $p(T)$ es compacto, aplicando Teorema 1.2 obtenemos que $(p(T))^* Q_\mu\alpha$ es casi-standard, pero $\eta\, \nu(p(T))^* \Phi_\mu \alpha \Rightarrow$ que $\eta$ posee una parte standard $\eta^\circ \therefore \eta^\circ \in E_\mu^\circ$.

Si $\eta^\circ = 0$, como $\|\eta - \eta^\circ\| < r \; \forall r \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \|\eta\| < r \; \forall r \in \mathbb{R} \Rightarrow \eta$ es infinitesimal, pero sabemos que;

$r_\mu = \| p(T'\alpha) - p(T'\Phi_\mu \alpha)\| \geq \|p(T'\alpha)\| - \|p(T'\Phi_\mu \alpha)\| > r - \alpha$ donde $\alpha = \|\eta\|$ es infinitesimal y esto podría implicar que $r_\mu > r/2$, lo cual es contradictorio a la selección de $\mu \therefore \eta^\circ \in E_\mu^\circ$ y $\eta^\circ \neq 0$. Por otra parte, $E_{\mu-1}^\circ$ y $E_\mu^\circ$ son invariantes bajo $T$ por Teorema 2.1, si ninguno de los dos, $E_{\mu-1}^\circ$ ó $E_\mu^\circ$, es subespacio invariante propio de $H$ para $T$, podríamos tener que $E_{\mu-1}^\circ = \{0\}$ y $E_\mu^\circ = H$, pero esto contradice el teorema 2.2 y $\therefore H$ contiene por lo menos un subespacio invariante bajo $T$, propio.

## 4.- Pruebas Standard del mismo Problema.

Después de conocida y aceptada la prueba no-standard del problema de los subespacios invariantes, se han dado otras pruebas dentro del análisis clásico. Una de ellas, hecha por Halmos, se considera en parte una copia de la prueba no-standard donde quita del camino a los infinitesimales con las nociones de convergencia débil y fuerte. Posteriormente, Radjavi y Rosenthal en su libro "Invariant subspaces", dan a conocer otras pruebas standard del mismo problema, en las cuales su herramienta principal es la Teoria del espectro.

Considero interesante analizar en ésta trabajo dos de estas pruebas standard que a continuación presento.

i) <u>Halmos</u> (<u>Convergencia</u> <u>Débil</u> <u>y</u> <u>Fuerte</u>).

Mostraremos que por pequeñas modificaciones a la prueba de Bernstein – Robinson, puede convertirse en una prueba expresable en el análisis clásico, dicho trabajo, dado a conocer en 1964, se debe al escéptimo del análisis no-standard P.R. Halmos, pero antes daremos algunas definiciones que serán de nuestra ayuda.

Supongamos que $X, Y$ son espacios lineales normados. Denotemos a $B(X,Y)$, como es usual , al conjunto de todos los operadores acotados $T$, tales que $T: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$.

Definición.- El espacio dual de un espacio $\mathfrak{X}$, es el espacio cuyos elementos son todas las funcionales lineales continuas sobre $\mathfrak{X}$. Dicho espacio se denota como $\mathfrak{X}^*$.

Definición.- Sea $\{x_n\}$ una sucesión en $\mathfrak{X}$ y sea $x \in \mathfrak{X}$, $\{x_n\}$ converge fuertemente a $x$, y escribimos $x_n \xrightarrow{F} x$, sii $\|x_n - x\| \to 0$

Definición.- Sean $\{x_n\}$ y $x$ como en la anterior definición, diremos que $\{x_n\}$ converge débilmente a $x$, y escribimos $x_n \xrightarrow{d} x$, sii $f(x_n) \to f(x)$ $\forall f \in \mathfrak{X}^*$.

Definición.- Sea $\{T_n\}$ una sucesión en $B(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ y sea $T \in B(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$, $\{T_n\}$ converge fuertemente a $T$ sii $T_n x \to Tx$ $\forall x \in \mathfrak{X}$, y lo denotamos $T_n \xrightarrow{F} T$.

Definición.- Sean $\{T_n\}$ y $T$ como en la anterior definición, diremos que $\{T_n\}$ converge débilmente a $T$ sii $T_n x \xrightarrow{d} Tx$ $\forall x \in \mathfrak{X}$, y lo denotamos como $T_n \xrightarrow{d} T$.

Nota.- Los operadores compactos, también llamados completamente continuos, definidos sobre un espacio Hilbert actuan de la siguiente manera: toda sucesión que converge débilmente la mapean en una sucesión fuertemente convergente.

Ahora sí, ya estamos listos para probar de manera standard nuestro resultado el cual puede ser enunciado de la siguiente manera: Si $T$ es un operador sobre un espacio Hilbert de dimensión mayor que 1, sepabable, con $p$ un polinomio no-nulo tal que $p(T)$ sea compacto, entonces existe un subespacio no-trivial de $H$ invariante bajo $T$.

Prueba.- Sin pérdida de generalidad podemos suponer la existencia de un vector unitario $e$ tal que los vectores $e, Te, T^2e, \ldots$ formen un conjunto linealmente independiente y que dicho conjunto tiene a $H$ como su espacio generado. El proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt aplicado a la sucesión $e, Te, T^2e, \ldots$, nos da una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ para $H$ con la propiedad de que $gen\{e, \ldots, T^{n-1}e\} = gen\{e_1, \ldots, e_n\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Se sigue que si $a_{mn} = (Te_n, e_m) \Rightarrow$ que $a_{mn} = 0$ a menos que $m \leq n+1$, en otras palabras, en la matriz que representa a $T$, todas las entradas que estan un renglón bajo la diagonal principal deben de ser cero. Las entradas de la matriz de $T$ a la $k$-ésima potencia están dadas por; $a_{mn}^{(k)} = (T^k e_n, e_m)$. Un argumento directo de inducción, basado en la multiplicación de matrices nos da el siguiente resultado; $a_{m,n}^{(k)} = 0$ a menos que $m \leq n+k$ y $a_{n+k,n}^{(k)} = \prod_{1 \leq j \leq k} a_{n+j,\,n+j-1}$, éste resultado tiene una implicación para polinomios, pues veamos que si el grado de $p$ es $k \geq 1$ y si las entradas de la matriz de $p(T)$ están dadas por $a_{mn}^{(p)} = (p(T)e_n, e_m) \Rightarrow a_{n+k,n}^{(p)} = \text{constante}\,(a_{n+k,n}^{(k)})$, donde ésta constante es el coeficiente correspondiente a $p$ y $k$ es el grado de $p$. Como $\{e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$ es base ortonormal para $H$, entonces $e_n \xrightarrow{d} 0$ y tomando en cuenta que $p(T)$ es compacto, entonces $\|p(T)e_n\| \to 0$, $\therefore$ existe una sucesión creciente $\{k(n)\}$ de enteros positivos (en efecto $k(n) < k$) tal que los correspondientes términos de la subdiagonal $a_{k(n)+1,\,k(n)} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Si $H_n = \text{gen}\{e_1, \ldots, e_{k(n)}\}$ entonces $\{H_n\}$ es una sucesión creciente de subespacios de $H$ de dimensión finita tal que $\text{gen}(\{H_n\}) = H$.

$P_n$ es la proyección de rango $H_n$, es decir $P_n: H \to H_n \Rightarrow P_n x \to Id_x = 0$ $\forall x \in H$ cuando $n \to \infty$, es decir $P_n \xrightarrow{E} Id$.

Dado que para cada $n$ el operador $P_nTP_n$ deja invariante a $H_n$ y cada $H_n$ tiene dimensión finita, entonces para cada $n$ existe una cadena de subespacios invariantes bajo $P_nTP_n$

$$\{0\} = H_n^{(0)} \subset H_n^{(1)} \subset \cdots \subset H_n^{(k(n))} = H_n$$

con $\dim(H_n^{(i)}) = i$ para toda $i = 0, 1, 2, \ldots, k(n)$.

Si $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son sucesiones de vectores en $H$, escribimos $f_n \sim g_n$ sii $\|f_n - g_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Si $\{f_n\}$ es una sucesión acotada de vectores en $H$ entonces $TP_n f_n \sim P_nTP_n f_n$. La prueba de la anterior afirmación es un cálculo directo basado en el hecho que;

$$P_n f = \sum_{j=1}^{k(n)} (f, e_j) e_j \text{ con } f \in H \Rightarrow TP_n f_n = \sum_{j=1}^{k(n)} (f_n, e_j) Te_j =$$

$$\sum_{j=1}^{k(n)} (f_n, e_j) \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} e_i \text{ , ahora bien}$$

$$P_nTP_n f_n = \sum_{j=1}^{k(n)} (f_n, e_j) \sum_{i=1}^{k(n)} a_{ij} e_i \quad y$$

$$TP_n f_n - P_nTP_n f_n = \sum_{j=1}^{k(n)} (f_n, e_j) \sum_{i=k(n)+1}^{\infty} a_{ij} e_j$$

notemos que la mas grande de las $j$ es $k(n)$ y la mas pequeña de las $i$ es $k(n)+1$ y dado que $a_{ij}=0$ si $i>j+1$ entonces

$$TP_nf_n - P_nTP_nf_n = \sum_{j=1}^{k(n)} (f_n, e_j) \sum_{i=k(n)+1}^{\infty} a_{ij} e_i =$$

$$(f_n, e_{k(n)})\, a_{k(n)+1,k(n)}\, e_{k(n)+1} \Rightarrow$$

$$\|TP_nf_n - P_nTP_nf_n\| \leq \|(f_n, e_{k(n)})\, a_{k(n)+1,k(n)}\, e_{k(n)+1}\| \leq$$

$$\leq \|f_n\|\|e_{k(n)}\|\,|a_{k(n)+1,k(n)}|\,\|e_{k(n)+1}\| = \|f_n\||a_{k(n)+1,k(n)}|$$

entonces $\|TP_nf_n - P_nTP_nf_n\| \to 0$ cuando $n\to\infty$ y $\therefore$ $TP_nf_n \sim P_nTP_nf_n$.

La anterior relación también se da para exponentes mas altos, es decir $T^kP_nf_n \sim (P_nTP_n)^kf_n$ para $k=1,2,\ldots$ (la prueba es por inducción sobre $k$).

Para $k=0$ la relación anterior dice; $\|P_nf_n - f_n\|\to 0$, lo cual es una condición rigurosa sobre la sucesión acotada $\{f_n\}$ y asi la condición se satisface, entonces $T^kP_nf_n \sim (P_nTP_n)^kf_n$ $\Rightarrow$ que $p(T)P_nf_n \sim p(P_nTP_n)f_n$ dado que el grado de $p$ es $k\geq 1$.

Dado que $P_ne=e$ para cada $n$, se sigue que $p(T)e \sim p(P_nTP_n)e$, y como $p(T)e\neq 0$ dado que $\{e, Tx, T^2x, \ldots\}$ es un

conjunto linealmente independiente
$\|p(T)e - p(P_nTP_n)e\| \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces
sea $L = \lim_{n\to\infty} \|p(P_nTP_n)e\| = \|p(T)e\| > 0$

Consideremos para cada n, los números

$$\|p(P_nTP_n)e - p(P_nTP_n)P_n^{(0)}e\|$$

$$\|p(P_nTP_n)e - p(P_nTP_n)P_n^{(1)}e\|$$

$$\vdots$$

$$\|p(P_nTP_n)e - p(P_nTP_n)P_n^{(k(n))}e\|$$

donde $P_n^{(i)}$ es la proyección con rango $H_n^{(i)}$, por esto $P_n^{(0)}$ es la proyección en $\{0\}$ y $\therefore$ el primero de estos números tiende a $L$. Por otra parte $P_n^{(k(n))} = P_n \Rightarrow$ que el último de estos números es cero. En vista de este hecho es posible seleccionar para cada n (con posiblemente un número finito de ecepciones) un entero positivo $i(n)$ tal que
$i \leq i(n) \leq k(n)$ y $\|p(P_nTP_n)e - p(P_nTP_n)P_n^{i(n)-1}e\| \geq L/2$,
$\|p(P_nTP_n)e - p(P_nTP_n)P_n^{i(n)}e\| < L/2$. La manera mas simple de hacer ésto, es hacer que $i(n)$ sea el entero positivo mas pequeño para el cual las desigualdades anteriores se cumplen.

Ahora bien, como $1 \leq i(n) \leq k(n)$
$\|P_n^{i(n)-1}\| \leq \|P_n\|$ y $\|P_n^{i(n)}\| \leq \|P_n\| \Rightarrow$ que $\{P_n^{i(n)-1}\}$ y $\{P_n^{i(n)}\}$ son sucesiones acotadas de operadores, entonces existe una sucesión creciente $\{n_j\}$ de números naturales tales que $\{P_{n_j}^{i(n_j)-1}\}$ y $\{P_{n_j}^{i(n_j)}\}$ convergen débilmente. Denotamos a $Q_j^- = P_{n_j}^{i(n_j)-1}$ y a $Q_j^+ = P_{n_j}^{i(n_j)}$.

Sea $M^-$ el conjunto de todos los vectores $f$ en $H$ para los cuales $Q_j^- f \to f$ (fuertemente) y sea $M^+$ el conjunto de todos los vectores $f \in H$ para los cuales se tiene que $Q_j^+ f \to f$ (fuertemente); probaremos que $M^-$ y $M^+$ son subespacios de $H$ los cuales son invariantes bajo $T$.

Dado que las combinaciones lineales son continuas, entonces $M^-$ es una variedad lineal. Para probar que $M^-$ es cerrado, supongamos que $g$ es un elemento de la cerradura de $M^-$, por demostrar que $g \in M^-$; es decir que $Q_j^- g \to g$ (fuertemente).

Dada $\delta > 0$, encontrar $f \in M^-$ tal que $\|f - g\| < \delta/3$ y entonces encontrar $j_0$ tal que $\|Q_j^- f - f\| < \delta/3$ siempre que $j \geq j_0$, de aquí que si $j \geq j_0$ entonces

$$\|Q_j^- g - g\| \leq \|Q_j^- g - Q_j^- f\| + \|Q_j^- f - f\| + \|f - g\| < \delta \Rightarrow$$

que $g \in M^-$ $\therefore$ $M^-$ es cerrado. Para probar que $M^-$ es invariante bajo $T$, supongamos que $f \in M^- \Rightarrow$ $Q_j^- f \xrightarrow{F} f$ e inferior primero que; $TQ_j^- f \to Tf$

pues $T$ es acotado, segundo; $Q_j^- T Q_j f \sim Q_j^- Tf$ pues $Q_j^-$ es uniformemente acotada. Rasonemos de la siguiente manera;

$$Q_j^- Tf \sim Q_j^- T Q_j^- f = Q_j^- P_{n_j} T P_{n_j} Q_j^- f =$$

$$P_{n_j} T P_{n_j} Q_j^- f \sim T P_{n_j} Q_j^- f = T Q_j f \to Tf.$$

Ahora bien, $Q_j^- Tf \sim T Q_j^- f \to Tf$ $\therefore$ $Q_j^- Tf \to Tf \Rightarrow$ $Tf \in M^-$ y de aquí que $M^-$ es invariante bajo $T$. Probaremos ahora que $M^- \neq H$, mostraremos que $e \notin M^-$. Observemos que:

$\|(P_n T P_n)^k\| \leq \|P_n T P_n\|^k \leq \|T\|^k$, y tomando en cuenta al polinomio cuyos coeficientes son los valores absolutos de los coeficientes de $p$, se tiene que $p(P_n T P_n)$ es uniformemente acotada, es decir, $\exists$ $M > 0$ talque $\|p(P_n T P_n)\| < M$ $\forall$ $n$. Tomando encuenta que

$$\|p(P_n T P_n) e - p(P_n T P_n) P_n^{i(n)-1} e\| \geq L/2$$

$\|p(P_nTP_n)e - p(P_nTP_n)P_{n_j}^{i(n_j)-1}e\| = \|p(P_nTP_n)e - p(P_nTP_n)Q_j^- e\|$

$= \|p(P_nTP_n)(e - Q_j^- e)\| \leq \|p(P_nTP_n)\| \|e - Q_j^- e\|$, y dado que $\|p(P_nTP_n)\|$ está acotada superiormente, es decir

$\|p(P_nTP_n)\| < K \Rightarrow 1/\|p(P_nTP_n)\| > K > 0 \Rightarrow$ que el inverso de $\|p(P_nTP_n)\|$ está acotado lejos del cero y consecuentemente $\|e - Q_j^- e\|$ está acotado lejos del cero, lo cual hace imposible que $Q_j^- e \to e \Rightarrow e \notin M^-$. Ahora probemos que $M^+ \neq \{0\}$. La selección de la sucesión $\{n_j\} \Rightarrow$ que la sucesión $\{Q_j^+ e\}$ es débilmente convergente y la compacidad de $p(T) \Rightarrow$ que la sucesión $\{p(T)Q_j^+ e\}$ converge fuertemente y supongamos que converge a $f$; por demostrar que:

i) $f \neq 0$

ii) $f \in M^+$

i) $p(T)Q_j^+ e \sim p(P_{n_j}TP_{n_j})Q_j^+ e$ pues

$p(T)P_n f_n \sim p(P_nTP_n) f_n$

i.e. $\|p(T)Q_j^+ e - p(P_{n_j}TP_{n_j})Q_j^+ e\| \to 0$ cuando $n \to \infty$

tomando en cuenta que;

$\|p(P_{n_j}TP_{n_j})e - p(P_{n_j}TP_{n_j})Q_j^+ e\| < L/a$ y

$\lim\limits_{n\to\infty} \|p(P_{n_j} T P_{n_j})e\| = L$ se sigue que;

$\|p(T)Q_j^+ e\|$ no puede tender a cero y por consiguiente $f \neq 0$

ii) $Q_j^+ f \backsim Q_j^+ p(T) Q_j^+ e$ pues $\{p(T)Q_j^+ e\} \to f$ y $Q_j^+$ es uniformemente acotado.

$Q_j^+ f \backsim Q_j^+ p(T) Q_j^+ e \backsim Q_j^+ p(P_{n_j} T P_{n_j}) Q_j^+ e = p(P_{n_j} T P_{n_j}) Q_j^+ e$

$\backsim p(T) Q_j^+ e$ pero $p(T) Q_j^+ e \to f$

$\therefore\ Q_j^+ f \to f \Rightarrow f \in M^+$.

Ahora bien, si $M^+ \neq H$, hemos terminado. Si $M^+ = H$, entonces P.D. que $M^- \neq \{0\}$.

Si $M^+ = H \Rightarrow Q_j^+ f \to f\ \forall f \in H$ y a fuerzas $Q_j^+ f \to f$ débilmente (ya que convergencia fuerte $\Rightarrow$ convergencia débil), al mismo tiempo la sucesión $\{Q_j^-\}$ se sabe que converge débilmente, digamos que converge a $Q^-$. Los operadores $Q_j^-$ y $Q_j^+$ son tales que $Q_j^- \leq Q_j^+$ y tal que $Q_j^- - Q_j^+$ tiene rango 1, se sigue que, para cada $j$ existe un vector unitario $f_j$ tal que

$(Q_j^+ - Q_j^-) f = (f, f_j) f_j \quad \forall f$. Observemos que $Q_j^- e$

no puede tender débilmente a $e$, pues si tendiera, entonces podría tender fuertemente a $e$ (una propiedad de proyecciones) y se puede probar que no es así $\therefore$ se tiene que $Q_e^- \neq e$ o equivalentemente que $(1-Q^-)e \neq 0$.

¿Puede ser el número $\|(e, f_j)\|$ arbitrariamente pequeño?, veamos; dado que $\|((Q_j^+ - Q_j)e, g)\| \leq |(e, f_j)| \cdot \|g\| \; \forall g$, si la respuesta es sí, esto implicaría que $((1-Q^-)e, g) = 0 \; \forall g$, así que $(1-Q^-) = e = 0$ lo cual es una contradicción. El hecho se obtiene porque los números $|(e, f_j)|$ son acotados lejos del cero, lo cual hace posible la prueba de que $M^- \neq 0$, sacando que si $g \perp (1-Q^-)e \Rightarrow g \in M^-$.

Desde luego, dado que $(e, f_j)(f_j, g) \to ((1-Q^-)e, g) = 0$ se sigue que

$(f_j, g) \to 0$ y por consiguiente

$(f, f_j)(f_j, g) \to 0 \; \forall f$ y esto implica que

$((1-Q^-)f, g) = 0 \; \forall f$ y por consiguiente $(1-Q^-)g = 0$, en otras palabras, $Q_j g \to g$ débilmente y $\therefore$ fuertemente (la misma propiedad de proyecciones que fue mencionada anteriormente) de lo anterior se sigue finalmente que $g \in M^-$.

## ii) Radjavi - Rosenthal
## (Teoria del Espectro)

Otras pruebas standard mas elaboradas (en el sentido de las nociones que utiliza) del problema de los subespacios invariantes se encuentran en el libro de Radjavi - Rosenthal, "Invariant Subspaces" (pag. 87 y pag. 158). A continuación describimos detalladamente una de ellas.

### Preliminares.

Definición.- Un operador $T \in B(H)$ es invertible sii existe $S \in B(H)$ tal que $ST = I = TS$.

En este caso escribimos $T^{-1} = S$

Definición.- El espectro $\sigma(T)$ de un operador $T \in B(H)$ es el conjunto de todos los escalares $\lambda$ tales que $T - \lambda I$ no es invertible. Así $\lambda \in \sigma(T)$ sii al menos una de las siguientes dos afirmaciones se cumple:

i) El rango de $T-\lambda I$ no es todo $H$.

ii) $Ker(T-\lambda I) \neq \{0\}$

si ii) se tiene, se dice que $\lambda$ es un valor propio de $T$ al cual asociamos un espacio propio, el $Ker(T-\lambda I)$; así cada $0 \neq x \in Ker(T-\lambda I)$ es un vector propio de $T$ el cual satisface la ecuación $Tx = \lambda x$.

<u>Definición</u>.- El espectro punto de un operador $T$, denotada por $\Pi_0(T)$ es el conjunto de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $T-\lambda I$ no es 1-1.

<u>Nota</u>: si $\lambda \in \Pi_0(T) \Rightarrow \lambda$ es un valor propio de $T$.

<u>Definición</u>.- El radio espectral de un operador $T$, denotado por $\rho(T)$ es el radio del disco cerrado más pequeño con centro en el origen que contiene a $\sigma(T)$, es decir, $\rho(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$.

<u>Teorema</u> (<u>La alternativa de Fredholm</u>).-

Si $T$ es un operador compacto entonces, $\sigma(T) = \{0\} \cup \Pi_0(T)$

Teorema del Mapeo Espectral.– Si $T \in B(H)$ y $p$ es cualquier polinomio, entonces $\sigma(p(T)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}$.

Definición.– Los subespacios $S_1, S_2$ de $H$ es un par complementario sii $S_1 \cap S_2 = \{0\}$ y $\{x+y \mid x \in S_1, y \in S_2\} = H$

Teorema 1.– Si $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ donde $\sigma_1, \sigma_2$ son conjuntos cerrados no-vacios disjuntos, entonces $T$ tiene un par complementario $\{S_1, S_2\}$ de subespacios invariantes propios tal que $\sigma(T|_{S_1}) = \sigma_1$ y $\sigma(T|_{S_2}) = \sigma_2$

Definición.– Un operador compacto $T$ es cuasi-nilpotente sii $\rho(T) = 0$ (lo cual implica que $\sigma(T) = \{0\}$).

Nota.– La anterior definición no es la usual, pero son equivalentes.

Definición.– La topología norma (o topología fuerte) es la topología métrica definida sobre $H$.

Definición.– El álgebra uniformemente cerrado generada por un operador $T$ compacto es la más pequeña subálgebra de $B(H)$ cerrada que contiene a

T y la Identidad en la topología norma.

Teorema 2.- Sea T un operador compacto. Si T es un operador cuasi-nilpotente de tal manera que el álgebra uniformemente cerrada generada por T contenga un operador compacto que no es el operador O, entonces T tiene un subespacio invariante propio.

## Teorema de los Subespacios Invariantes.

Todo operador polinomialmente compacto tiene un subespacio invariante no-trivial.

Prueba.- Supongamos que $p(T)=k$ donde K es compacto p un polinomio no nulo. Si k tiene espectro punto no vacío entonces hay al menos un $\lambda \in \mathbb{C}$ $\ni$ $\exists\, x \in H$ con $x \neq 0$ tal que $Kx = \lambda x$ i.e. $p(T)x = \lambda x$

$$p(T)x = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i T^i x = \lambda x$$

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i' T^i x \in gen\{x, Tx, \ldots\}$$

tomando en cuenta que

$$Tx = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i' T^{i+1} x \quad \in gen\{x, Tx, \ldots\}$$

$\Rightarrow$ que gen$\{x, Tx, \ldots\}$ es un subespacio invariante propio bajo T.

Ahora supongamos que el espectro punto de K es el conjunto vacío, así por la alternativa Fredholm se tiene que $\sigma(K) = \{0\}$ i. e. $\sigma(p(T)) = \{0\}$, ahora bien por el teorema del Mapeo Espectral tenemos que $\sigma(p(T)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\} = \{0\}$ y dado que p no es el polinomio cero, entonces p tiene un número finito de ceros $\Rightarrow$ que $\sigma(T)$ es finito.

Supongamos que $\sigma(T)$ tiene mas de un punto, tomando encuenta el teorema 1, tenemos que T tiene subespacios invariantes propios. Si $\sigma(T) = \{\lambda\}$ entonces $\sigma(T-\lambda) = 0$ $\Rightarrow$ que $T-\lambda$ es cuasi-nilpotente y por el teorema 2.- se tiene que $T-\lambda$ tiene un subespacio invariante no-trivial.

## 5.- Análisis de las Pruebas.-

El método de la prueba no-standard se basa en el hecho de que en un espacio de dimensión finita, cualquier operador lineal acotado T posee una cadena de subespacios invariantes (Resultado standard). Dado que el subespacio $H_\nu$ con $\nu \in \mathbb{N}^* - \mathbb{N}$ es de "dimensión finita" en el sentido del análisis no-standard, existe una cadena de subespacios invariantes bajo T. Lo anterior es posible aplicando el Principio de Transferencia al enunciado $\varphi$ que se interpreta como "S es de dimensión finita", el cual es expresable en un lenguaje de orden superior.

Sin embargo, en las pruebas que expusimos hay elementos comunes importantes, tales como: existencia de bases ortonormales, propiedades de las proyecciones y características especiales de los operadores compactos. No obstante, debemos notar que los elementos del análisis como tal, utilizados en la prueba de Radjavi-Rosenthal son mas fuertes, es decir, el contexto matemático-analítico en el cual se da la prueba, es mas rico que el necesario para la prueba no-standard donde el "arma fuerte" es la construcción lógica de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$ y $H^*$.

Otras situaciones en las cuales se da el mismo fenómeno, es por ejemplo la prueba del Teorema de Tyhonov (Machover y Hirschfeld, Lectures on Non-standard analysis. Lecture notes in Mathematics, No. 94 Springer-Verlag, pag. 33)

Otro punto clave en la prueba no-standard, es la noción de internalidad, ya que dicha noción nos permite considerar subespacios internos de $H^*$, es decir elementos de $A_2$ con $2 \neq 0$. Por otra parte, notamos que los teoremas previos a la prueba no-standard los podemos caracterizar de la siguiente manera:

1.1, 1.3 son clásicos y 2.1, 2.2 son extensiones de resultados clásicos

Concluimos que podemos obtener resultados satisfactorios de problemas abiertos en análisis clásico y otras ramas de la matemática, con la técnica no-standard así como dar pruebas mas simples de resultados ya mostrados.

## BIBLIOGRAFIA


1.- BACHMAN, G AND NARICI, L.

Funcional Analysis. Acadmic Press New York (1972).

2.- BELL, J.L. AND SLOMSON, A. B.

Models and ultraproducts. North-Holland, Amsterdam (1969).

3.- BERNSTEIN A.R. AND ROBINSON, A.

Solution of an invariant subspace problem of P.R. Halmos and K.T. - Smith. Pacific Journal of Mathematics, Vol. 16, pp. 431-432 (1966).

4.- DAVIS, MARTIN.

Applied Nonstandard Analysis. John-Wiley, New York (1977).

5.- DUNFORD, N. AND SCHWARTZ, J.T.

Linear Operators. Part I: General theory. Interscience Publishers, New York (1966).

6.- HALMOS, PAUL.R.

Introduction to Hilbert space. Chelsea, New York (1957).

7.- HALMOS, PAUL R.

Invariant subspaces of polinomially compact operators.
Pacific Journal of Mathematics, vol. 16, pp. 433-437 (1966).

8.- HELSON, HENRY

Lectures on invariant subspaces. Academic Press, New York (1964).

9.- KOLMOGOROV, A.N. FOMIN, S. V.

Elementos de la teoria de funciones y del análisis funcional.
Mir, Moscú (1975).

10.- LUXEMBURG, W. A. J.

What is nonstandard analysis?
Papers in the Fundations of Mathematics, Amer. Math. Monthy 80 (1973), No. 6, Parte II, pp 38 - 37.

11.- MACHOVER, MOSHÉ AND HIRSCHFELD, J.

Lectures on non-standard analysis.
Lecture notes in Mathematics, No. 94, Springer-Verlag (1969).

12.- MENDELSON, ELLIOT.

Introduction to Mathematical Logic.
Van-Nostrand, Princeton, U.S.A. (1964).

13.- RADJAVI, HEYDAR AND ROSENTHAL, PETER.

Invariant subspaces. Springer-Verlag, New York. (1973).

14.- ROBINSON, ABRAHAN.

Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra.
North-Holland, Amsterdam (1963).

15.- ROBINSON, ABRAHAN

Non-standard Analysis. Studies en Logic and the Fundations of Mathematics, North-olland, Amsterdam (1966).

16.- RUDIN, WALTER.

Funcional Analysis. Mc. Graw-Hill, New York (1976).