UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

1 ejem.

11

RETICULOS DE BANACH*

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

JOSE LUIS GOMEZ SERRANO

* Con dos figuras.

JULIO DE 1979

PRÓLOGO.

A principios de 1978 Laura Martignon vino a México y dio un seminario sobre Retículos de Banach. Venía ella de recién estudiar con la escuela de Schaefer, en Tübingen, Alemania, con ideas nuevas y grandes entusiasmos acerca de una materia ya de por sí fascinante. En conversaciones con ella y con Carlos Bosch surgió la posibilidad de estudiar más a fondo estas cosas, de enterarnos de los nuevos resultados, de las nuevas direcciones, de los problemas importantes, con vistas a tener aquí un grupo, aunque fuese pequeño, que pudiera trabajar en cuestiones relacionadas. Como por otra parte tenía yo que decidir el tema en el que haría mi tesis, me pareció oportuno pedirle a Laura que me propusiera algún problema.

El día que ella lo hizo, aunque mi expresión pretendió desmentirlo, no entendí nada: frases en español, claro está, que decían cosas del tipo $p \Rightarrow q$ acerca de unos objetos designados con letras griegas o latinas, a voluntad de las pasiones románicas o helenísticas de mi interlocutora, pero sin mucha conexión con lo que hasta ese momento yo conocía.

Unos meses después regresó ella a México, no ya para dar un curso, sino nada más unas conferencias acerca de relaciones recién descubiertas entre la teoría de los números y el análisis. Recibí una prueba más de mi vocación por las matemáticas al encontrar también fascinantes estos nuevos objetos, pero decidí guardar mis inquietudes acerca de cosas nuevas y tratar de amainar mi ignorancia acerca de las antiguas; y una tarde, con la estupenda mediación de Natalia de Bengoechea, pudo Laura darse cuenta de que yo ni siquiera recordaba los problemas que ella me había planteado, y pude yo escuchar su estrepitosa sonrisa y una explicación que todavía hoy pretendo haber entendido.

Me di cuenta entonces que aún había bastantes cosas de tipo general que debía estudiar antes de tratar de resolver los problemas que me habían planteado, y los meses siguientes estuve trabajando con Carlos Bosch en tratar de esclarecer lo que en nuestra opinión eran las partes fundamentales de la Teoría de Retículos de Banach.

Notas tomadas aquí y allá fueron juntándose, y llegó un momento en que vi la positividad de darles forma de tesis, aún sin que, como fue mi primera intención, resolviera al menos parcialmente los problemas que me dio Laura.

El trabajo que a fin de cuentas presento hoy como tesis es la teoría general de retículos vectoriales, primero, su especialización en M- y L-espacios, después, y finalmente un estudio de homomorfismos de retículo entre estos espacios. Fue mi intención a lo largo de todas estas páginas un campo que yo descubrí rico por sus nexos con otras teorías matemáticas y atrayente por las perspectivas que plantea.

Muchas personas influyeron, de una manera u otra, en mi formación profesional. De mis maestros, al primero que quiero recordar es Octavio García: él me enseñó una manera de trabajar en matemáticas que me ha probado ser útil, y siempre que lo he requerido, he contado con su apoyo. El otro a quien mencionaré es mi asesor, Carlos Bosch: tuvo confianza en mí en una época especialmente difícil, me ha ayudado en mis buenas y en mis malas ocurrencias, más que mi maestro, ha sido mi amigo. A él y a Octavio les quiero agradecer todo, de todo corazón.

Naturalmente que también he tenido malas influencias: a Francisco Larrión quiero agradecerle que me haya indicado el mal camino; de esta manera he podido evitarlo. Quizá para reivindicarse, me hizo algunas sugerencias tipográficas.

Hubo un período de un año, de mediados de 1976 a mediados de 1977, que resultó decisivo para mis estudios, y en el que conté de una manera especial con la ayuda de mis padres, ayuda que por otra parte nunca he dejado de recibir. Probablemente este detalle es insignificante comparado con muchas otras cosas que he recibido de ellos, pero quiero mencionarlo por la importancia que tuvo en mi carrera. A ellos, por ésta y tantas cosas como la memoria me alcanza, también les quiero agradecer.

Finalmente voy a mencionar que este trabajo fue realizado siendo yo becario del Instituto de Matemáticas.

INDICE.

NOTACIONES.

Si K es un espacio compacto y Hausdorff, $\mathcal{C}(K)$ denotará el espacio de las funciones continuas de K en $\mathbb{R}$, con la norma del supremo y el orden puntual. Si $A \subset K$, $\mathcal{M}_A$ es el conjunto $\{f \in \mathcal{C}(K) \mid f|_A \equiv 0\}$. Si $A = \{p\}$, escribiremos $\mathcal{M}_p$ en lugar de $\mathcal{M}_{\{p\}}$.

Si $(\mathfrak{X}, \tau)$ es un espacio topológico y $x \in \mathfrak{X}$, $\mathcal{N}_x^{\tau}$ .. el conjunto de τ-vecindades abiertas de x. Escribiremos simplemente $\mathcal{N}_x$ si no hay riesgo de confusión. Si $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ es una red en $\mathfrak{X}$, $x_\alpha \xrightarrow[\tau]{} x$ significará que la red τ-converge a $x \in \mathfrak{X}$.

Si $(\mathfrak{X}, \Sigma, \mu)$ es un espacio de medida, escribiremos $\mathcal{L}^1(\mathfrak{X})$ o $\mathcal{L}^1(\mu)$ con idéntico significado, y pensaremos a este espacio con la norma y topología usuales y el orden puntual casi en todas partes. Si $A \in \Sigma$, $\mathcal{M}_A$ es el conjunto $\{f \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{X}) \mid f|_A \equiv 0 \ \mu\text{-ctp}\}$.

Si E es un espacio normado, E^* será su adjunto.

$\vee$ significa supremo, $\wedge$ significa ínfimo, $\square$ significa fin o ausencia de prueba y $:=$ es igual por definición o es igual por definición.

§0. INTRODUCCIÓN.

Este trabajo es un intento de acercamiento a los problemas siguientes, planteados a mí por Laura Martignon:

1) Sea E un retículo de Banach y sea $\mathrm{Hom}(E,E)$ el conjunto de los homomorfismo de retículo de E en E. Definimos $\mathrm{Hom}(E,E)^{\perp} := \{T \in E^* \mid \forall S \in \mathrm{Hom}(E,E)\ |T| \wedge |S| = 0\}$. El problema consiste en dar alguna caracterización de $\mathrm{Hom}(E,E)^{\perp}$.

2) Sea $\mathcal{K}(E)$ el conjunto de operadores compacto de un retículo de Banach E en sí mismo. Conjetura:

Las condiciones siguientes son equivalentes:

a.- $\mathcal{K}(E) \perp \mathrm{Hom}(E,E)$, i.e., $\forall T \in \mathcal{K}(E)\ \forall S \in \mathrm{Hom}(E,E)\ |T| \wedge |S| = 0$

b.- E no tiene átomos, es decir E no tiene elementos $u \neq 0$ tales que el ideal principal E_u es totalmente ordenado.

3) ¿En qué casos puede un operador compacto ser homomorfismo de retículos?

El enfoque presentado es parcial: se llega a caracterizar los homomorfismos de retículo solamente en dos clases importantes de retículo de Banach, los M-espacios con unidad y los L-espacios. En el primer caso la caracterización es total, es decir, para todos los homomorfismos, y en el segundo se hace para cierta clase de homomorfismos suprayectivos.

Las caracterizaciones que se presentan son de una clase especialmente atractiva, de lo que podrían llamarse "de tipo adjunto". Una explicación de esto: Si dos espacios vectoriales están dados en la forma $\mathbb{R}^A$ y $\mathbb{R}^B$, una función $\varphi: B \to A$ induce una transformación lineal $T_\varphi : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^B$, $f \mapsto f \circ \varphi$, el "adjunto" de φ.

(La razón del nombre es la semejanza de esta situación con la definición del operador adjunto en Análisis Funcional). Naturalmente que la explicación dada no es una definición formal, pero me parece suficientemente clara.

El camino seguido para llegar a estos resultados empieza en el punto cero de la teoría de Retículos de Banach: la definición de espacio vectorial ordenado. Las tres primeras secciones son de carácter introductorio; básicamente se intenta establecer el lenguaje y probar resultados de tipo muy general. Pero ya desde estas primeras secciones se nota una tendencia a trabajar de una manera especial en los espacios mencionados antes, que son básicamente $\mathcal{C}(K)$ (los M-espacios con unidad) y espacios $\mathcal{L}^1$ (los L-espacios). Esta tendencia se manifiesta sobre todo al final de §2, cuando se hace un estudio pequeño, aunque completo, de algunos ideales en espacios $\mathcal{C}(K)$ y $\mathcal{L}^1$.

La sección 4 deja establecidos los resultados generales de la teoría de dualidad en retículos vectoriales. El problema de que Hom(E, F) no es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial se salva de manera elegante, en el caso general, y de forma completamente satisfactoria, en el caso de los retículos de Banach, al considerar el conjunto de diferencias de funciones lineales positivas de E en F.

La sección 5 presenta unas caracterizaciones de los M-espacios con unidad y de los L-espacios en términos de su norma. Es la sección más larga, la que presenta los teoremas más complicados y la que a mi entender da una mejor idea de la estrecha relación que hay entre los conceptos que se manejan aquí y los de otras disciplinas cercanas, como la teoría de la medida.

Las dos últimas secciones son las caracterizaciones de homomorfismos en M- y L-espacios de que hablé antes.

Los prerrequisitos para leer este trabajo son el conocimiento de el libro de Royden "Real Analysis" y de los cuatro primeros capítulos del "Functional Analysis" de Rudin. Los libros de Schaefer y Fremlin que están en la bibliografía tratan de manera amplia los temas que aquí se introducen, y he sido influenciado grandemente por ellos. El primero es de carácter enciclopédico, tipo obra de consulta, y el segundo es más didáctico, escrito con una notación curiosa, pero acertada, y en un estilo que para mi gusto es muy agradable. No presupongo ningún conocimiento de estos libros: más bien, haber leído estas páginas podría ser útil para estudiar cualquiera de ellos.

§ 1. RETÍCULOS VECTORIALES

El material desarrollado en esta sección es principalmente introductorio: dejar claramente establecidos los conceptos principales con los que hemos de trabajar. Por otra parte, los resultados que mencionaremos son ampliamente conocidos y de un fácil acceso; por consiguiente, como regla general no daremos demostraciones durante esta primera sección. El lector interesado puede consultar los libros de Schaefer [S] y Fremlin [F] citados en la bibliografía.

(1.1) Nuestro objeto de estudio serán espacios vectoriales con una estructura de orden que satisfaga ciertas condiciones de regularidad con respecto a la suma de vectores y al producto por escalar: que el orden sea invariante bajo traslaciones y bajo multiplicación por escalares positivos. Veremos que estos requisitos no son demasiado fuertes, en vista de la abundancia de espacios de importancia que poseen un orden de este tipo.

Recordemos que un orden parcial en un conjunto X es una relación binaria $\leq$ que satisface

i) $\forall x \in X \quad x \leq x$ (reflexividad)

ii) $\forall x,y \in X$ si $x \leq y$ y $y \leq x$ entonces $x = y$ (antisimetría)

iii) $\forall x,y,z \in X$ si $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces $x \leq z$ (transitividad).

Un espacio vectorial ordenado, o más brevemente un EVO, es una pareja $(E, \leq)$, donde E es un espacio vectorial y $\leq$ un orden parcial en E que cumple

i) $\forall x,y,z \in E$ si $x \leq y$ entonces $x+z \leq y+z$

ii) $\forall x,y \in E \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ si $\lambda \geq 0$ y $x \leq y$ entonces $\lambda x \leq \lambda y$.

Un retículo vectorial es un EVO $(E, \leq)$ tal que
$\forall x,y \in E$ existe el supremo de x y y en E, denotado $x \vee y$.

Cuando consideremos que no hay riesgo de confusión, diremos simplemente que E es un EVO, dando por sobreentendido el orden. Ya que estaremos trabajando con órdenes parciales, todos los concepto relacionados con ellos, como supremo, ínfimo, cota superior e inferior, etc., son aplicables a los espacios vectoriales ordenados y a los retículos vectoriales. Consideraremos ahora algunos ejemplos de los conceptos recién definidos.

a) Si K es un espacio compacto Hausdorf, $\mathcal{C}(K)$ con el orden puntual ($f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in K \ f(x) \leq g(x)$) es un retículo vectorial. Siempre consideraremos este orden para $\mathcal{C}(K)$.

b) Los espacios $\mathcal{L}^p$, con el orden puntual casi en todas partes ($f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$ para casi toda x) son retículo dectorial.

c) Los espacios de sucesiones reales, como l_1, l_2, l_∞, c_0, con el orden puntual son retículo vectorial.

d) Más generalmente, los espacios de la forma $\mathbb{R}^{X}$, para X un conjunto arbitrario, son retículo vectorial con el orden puntual.

e) Si n es un natural, podemos dar a $\mathbb{R}^n$ el orden puntual descrito en d); este orden se llama canónico. Por otro lado, podemos definir un orden diferente, de la siguiente manera: si $x = (x_1, .., x_n)$ y $y = (y_1, .., y_n)$ son elementos de $\mathbb{R}^n$, decimos que x es menor o igual a $y \Leftrightarrow$ $x = y$ o $x_j \leq y_j$, donde j es la primera coordenada en que difieren x e y. Este orden se llama lexicográfico.

f) Si X es un espacio localmente compacto Hausdorff, el espacio vectorial $\mathcal{M}(X)$ de todas medidas de Radon sobre X es un EVO, con el orden definido "puntualmente":
$\mu \leq \nu \Leftrightarrow \forall A \subset X$ medible $\mu(A) \leq \nu(A)$.

(1.2) Hay varias maneras canónicas de obtener nuevos espacio vectoriales ordenados o retículo vectoriales a partir de espacio dados. Consideraremos ahora algunas de ellas.

a) Si E es un EVO y $A \subset E$, E induce una estructura de orden parcial en A; si A es subespacio vectorial, con el orden inducido es un EVO.

b) Si $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ es una familia de espacios vectoriales ordenados, $\prod_A E_\alpha$ con el orden definido por coordenadas es un EVO; este orden se llama canónico. En el caso de que A sea un conjunto bien ordenado, se puede también definir en $\prod_A E_\alpha$ el orden siguiente:
$x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \leq y = (y_\alpha)_{\alpha \in A} \iff x = y$ o $x_\beta \leq y_\beta$, donde β es la primera coordenada en que difieren x e y. Este orden se llama lexicográfico, y puede observarse que es una generalización del ejemplo dado en (1.1) e).

(1.3) DEFINICIÓN. Sea E un EVO y sea A un subespacio de E. Decimos que A es un subretículo vectorial de $E \iff \forall x, y \in A \ \exists x \vee y \in E$ y $x \vee y \in A$.

Hay que observar que aunque E sea un retículo vectorial, no está garantizado que un subespacio vectorial de E sea también un subretículo vectorial.

Por ejemplo, sea $E = \mathcal{C}[-1,1]$ y $A = \{f \in E \mid f \text{ es diferenciable}\}$. A no es cerrado bajo la formación de supremos, ya que $x \vee -x = |x| \notin A$.

Es importante observar que la formación del supremo depende del espacio en que se está trabajando; cuando consideremos que hay peligro de confusión, especificaremos en dónde se obtiene el supremo.

(1.4) Si E es un EVO, observamos que $x \leq y \Leftrightarrow 0 \leq y-x$. Por lo tanto, el orden $\leq$ está determinado por $E_+ := \{x \in E \mid x \geq 0\}$, el cono positivo. E_+ satisface las propiedades

i) $E_+ \cap -E_+ = \{0\}$

ii) $E_+ + E_+ \subset E_+$

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad \alpha E_+ \subset E_+$.

Estas propiedades caracterizan a los conos positivos, ya que si E es un espacio vectorial y P es un subconjunto de E que satisface i), ii) y iii), definiendo $x \leq y \Leftrightarrow y-x \in P$ obtenemos un orden parcial que hace a E un EVO.

Como ejemplos de conos positivos, tenemos los siguientes:

a) En $\mathcal{C}(K)$, $P = \{f \in \mathcal{C}(K) \mid \forall x \in K \ f(x) \geq 0\}$ es el cono positivo para el orden usual.

b) En $\mathbb{R}^2$, los conjuntos sombreados dibujados abajo son conos positivos.

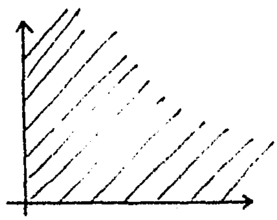

Figura 1.

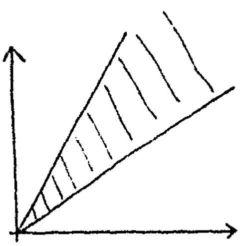

Figura 2.

c) En $\mathbb{R}$, el cono positivo es $\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$.

(1.5) En un retículo vectorial, siempre que x e y están en él, existe el ínfimo del conjunto $\{x, y\}$, y lo denotamos por $x \wedge y$.

Por otra parte, cualquiera de las condiciones siguientes es suficiente para que un espacio vectorial ordenado E sea un retículo vectorial:

a) $\forall x, y \in E \quad \exists \inf\{x, y\} \in E$

b) $\forall x \in E \quad \exists \sup\{x, 0\} \in E$.

Tenemos también las siguientes importantes relaciones:

PROPOSICIÓN. Sea E un retículo vectorial, sean $A \subset E$, $B \subset E$, $x \in E$ y $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Entonces

a') Existe $\sup A \Leftrightarrow$ existe $\inf(-A)$, y en caso de existir, $\sup A = -\inf(-A)$.

b') $x + \sup A = \sup(x + A)$, si cualquiera de los dos existe.

c') $x + \inf A = \inf(x + A)$, si cualquiera de los dos existe.

d') $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$, si cualquiera de los dos existe.

e') $\sup(\alpha A) = \alpha \sup A$, si cualquiera de los dos existe. $\square$

(1.6) Los conceptos de parte positiva f^+ y parte negativa f^- de una función medible f juegan un papel importante en la teoría de integración. Estos objetos satisfacen algunas relaciones como $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$, $|f| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ c.t.p. También tenemos conceptos y relaciones como éstos para el caso de medidas con signo, al descomponerlas de acuerdo al teorema de descomposición de Hahn [Ro, pág 235] en variación positiva y variación negativa. La siguiente definición es un intento de generalizar estas nociones a retículos vectoriales.

DEFINICIÓN. Sea E un retículo vectorial, sea $x \in E$. Definimos $x^+ := x \vee 0$, $x^- := (-x) \vee 0$, $|x| := x^+ \vee x^-$.

PROPOSICIÓN. Sea E un retículo vectorial, sean $x, y, x_1, y_1 \in E$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces

a) $x = x^+ - x^-$ b) $|x| = x^+ + x^-$

c) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ d) $|\lambda x| = |\lambda|\,|x|$

e) $|x+y| \leq |x| + |y|$ f) $x + y = x \vee y + x \wedge y$

g) $|x-y| = x\vee y - x \wedge y$ h) $|x \vee y - x_1 \vee y_1| \leq |x - x_1| + |y - y_1|$

i) $|x \wedge y - x_1 \wedge y_1| \leq |x - x_1| + |y - y_1|$

$\square$

(1.7) Recuérdese que en la descomposición de una medida con signo μ en variación positiva μ^+ y negativa μ^-, éstas son mutuamente singulares ($\mu^+ \perp \mu^-$), es decir existe un subconjunto medible E del espacio X tal que $\mu^+(E) = 0$ y $\mu^-(X \setminus E) = 0$. Si quisiéramos generalizar este concepto a espacios del tipo $\mathbb{R}^X$, lo podríamos hacer sin dificultad: sencillamente hacemos $f \perp g \Leftrightarrow \exists\, E \subset X$ tal que $f|_E \equiv 0 \equiv g|_{X \setminus E}$. Esta forma tiene el problema de que un EVO no está dado a priori como subespacio de algún $\mathbb{R}^X$; como ejemplo podemos citar el dado en (1.1) f). La generalización de este concepto a retículos vectoriales está dada, por consiguiente, en términos diferentes, aunque equivalentes para los casos mencionados.

DEFINICIÓN. Sea E un retículo vectorial, sean $x, y \in E$, sean $A, B \subset E$.

a) x es ortogonal a y ($x \perp y$) $\Leftrightarrow |x| \wedge |y| = 0$.

b) A es ortogonal a B ($A \perp B$) $\Leftrightarrow \forall x \in A\ \forall y \in B\ x \perp y$.

c) definimos el complemento ortogonal de A como

$$A^{\perp} := \{x \in E \mid \{x\} \perp A\}.$$

- PROPOSICIÓN. Sea E un retículo vectorial, sean $x, y \in E$. Entonces

a) $x = x^{+} - x^{-}$ es la única representación de x como diferencia de dos positivos ortogonales.

b) $x \leq y \Longleftrightarrow x^{+} \leq y^{+}$ y $y^{-} \leq x^{-}$.

c) $x \perp y \Longleftrightarrow |x| \vee |y| = |x| + |y|$.

d) $x \perp y \Longrightarrow (x+y)^{+} = x^{+} + y^{+}$ y $|x+y| = |x| + |y|$.

$\square$

(1.8) PROPOSICIÓN A. Sea E un retículo vectorial, sean $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ y $(y_\alpha)_{\alpha \in A}$ familias en E tales que existen $x := \sup_A x_\alpha$ y $y := \sup_A y_\alpha$, sea $z \in E$. Entonces

a) $x \wedge z = \sup_A (x_\alpha \wedge z)$

b) $y \vee z = \inf_A (y_\alpha \vee z)$.

La afirmación ha de entenderse en el sentido de que existe el supremo o el ínfimo mencionado en el lado derecho de la igualdad y de que, naturalmente, la igualdad se da. $\square$

PROPOSICIÓN B. Sea E un retículo vectorial, sea $A \subset E$. Entonces

a) $A^{\perp}$ es un subespacio vectorial.

b) $\forall B \subset A^{\perp}$ si $\exists x := \sup B$ entonces $x \in A^{\perp}$. $\square$

Si $x \leq y$, denotamos por $[x,y]$ al conjunto

$$\{z \mid y \geq z \geq x\},$$

y lo llamamos intervalo ordenado. Con respecto a él, tenemos la siguiente afirmación.

PROPOSICIÓN C. (Propiedad de la descomposición)

Si $x, y \in E_+$, entonces $[0, x+y] = [0,x] + [0,y]$. $\square$

(1.9) Haremos ahora una clasificación de los retículos vectoriales en términos de las propiedades de orden que satisfacen.

DEFINICIÓN. Sea E un retículo vectorial.

a) E es arquimediano (A) $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in E_+$ si $\forall n \in \mathbb{N}$ $nx \leq y$ entonces $x \leq 0$.

b) E es numerablemente orden completo (NOC) $\Leftrightarrow$ $\forall A \subset E$ Si A es no vacío, numerable y acotado por arriba entonces $\exists \sup A$

c) E es orden completo (OC) $\Leftrightarrow$ $\forall A \subset E$ si A es no vacío y acotado superiormente entonces $\exists \sup A$.

Claramente tenemos que $OC \Rightarrow NOC$. Para ver que también se da $NOC \Rightarrow A$, sea E un espacio numerablemente orden completo, y sean x y $y \in E$ tales que $\forall n \in \mathbb{N}$ $nx \leq y$.
El conjunto $A := \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$ es numerable y está acotado superiormente por y, y entonces $\exists z := \sup A \in E$.
Entonces $x + z = x + \sup A = \sup(x + A) = \sup\{(n+1)x \mid n \in \mathbb{N}\} \leq z$,

y de aquí $x \leq 0$.

Por otro lado, de las implicaciones $A \Rightarrow NOC \Rightarrow OC$ ninguna es cierta: las funciones Riemann integrables en $[0,1]$ forman un espacio que es A pero no es NOC, ya que no existe en ese espacio el supremo del conjunto $\{\chi_{\{q\}} \mid q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$, y las funciones Lebesgue integrables en $[0,1]$ son NOC, por teoría de la medida elemental, pero no son OC, ya que si P es el conjunto no medible que aparece en [Ro, pág 64], $\{\chi_p \mid p \in P\}$ no tiene supremo medible.

(1.10) Finalizaremos esta sección mencionando un concepto importante: un elemento u de un retículo vectorial E se llama **unidad de orden débil** $\Leftrightarrow \forall x \in E \;\; x \perp u \Rightarrow x = 0$. Como ejemplo, podemos mencionar los siguientes:

a) en ℓ^1, $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es unidad de orden débil $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n \neq 0$.

b) en $\mathcal{L}^1$, f es unidad de orden débil $\Leftrightarrow f(x) \neq 0$ para casi toda x.

c) en los espacios $\mathcal{C}(K)$, con K compacto Hausdorff, no es posible dar una caracterización de las unidades de orden débiles en términos parecidos a los de a) o b); considérese el caso $K = [0,1]$, y $f(x) = x$; f es unidad de orden débil, pero no es cierto que $\forall x \in K \;\; f(x) \neq 0$.

§ 2. Ideales y Homomorfismos.

El objetivo principal de esta sección consistirá en establecer una biyección entre los ideales de un retículo vectorial y los homomorfismos de retículo con dominio en ese espacio (*). Se estudiarán también ideales y homomorfismo de carácter especial, como es el caso de los homomorfismo con codominio $\mathbb{R}$, que después utilizaremos para caracterizar a los retículo isomorfos a $\mathbb{R}$. En la última parte se estudiarán algunos ideales importantes en espacios $\mathcal{L}'$ y $\mathcal{C}(K)$.

(2.1) Definición. Sea E un retículo vectorial, sea $B \subset E$.

a) B es sólido $\Leftrightarrow \forall y \in E\ [\exists x \in B$ t.q. $|y| \leq |x|] \Rightarrow y \in B$.

b) Un ideal es un subespacio vectorial sólido.

Mencionaremos algunos ejemplos para ilustrar estos conceptos:

a') $\mathbb{R}^n$ es un ideal en $\mathbb{R}^{n+1}$, con el orden usual.

b') En $\mathcal{C}(K)$, si $A \subset K$, el conjunto $\mathcal{M}_A = \{ f \in \mathcal{C}(K) \mid f|_A \equiv 0 \}$ es un ideal. No todos los ideales son de esta forma,

(*) Más precisamente, clases de equivalencia de homomorfismos.

como lo prueba el ejemplo $I := \{ f \in \mathcal{C}[0,1] \mid \exists \alpha \in \mathbb{R}_+ \ |f| \le \alpha x^2 \}$.

c') Naturalmente que E y $\{0\}$ son ideales, los llamados triviales. Los demás ideales se llaman propios.

d') Si (X, Σ, μ) es un espacio de medida, y $A \in \Sigma$, $\mathcal{M}_A = \{ f \in \mathcal{L}^1(X) \mid f|_A \equiv 0 \ \mu\text{-ctp} \}$ es un ideal en $\mathcal{L}^1(X)$. Tampoco en este caso es cierto que todo lo ideales sean de esa forma: un ejemplo similar al de b') lo prueba.

Las siguientes propiedades elementales de sólidos e ideales son de gran importancia:

a'') toda unión de sólido es sólida.

b'') B es sólido $\Leftrightarrow$ $B = \bigcup_{x \in B} [-|x|, |x|]$.

c'') Todo ideal es subretículo vectorial.

d'') La intersección de sólido (ideales) es sólida (ideal).

e'') E es un ideal sólido.

(2.2) La observación anterior nos permite definir la envolvente sólida de un subconjunto A de un retículo vectorial E como la intersección de los sólidos que contienen a A, y el ideal generado por A como la intersección de los ideales que contienen a A.

En el caso de que $A = \{u\}$, el ideal generado por A se llama principal y se denota por E_u, un elemento v de E se llama unidad de orden si $E = E_u$.

Observemos que si $v \in E_+$, $E_v = \bigcup_{\mathbb{N}} n[-v, v]$, y si v es arbitrario, $E_v = \bigcup_{\mathbb{N}} [-|v|, |v|]$.

En el caso de los espacios $\mathcal{C}(K)$, las unidades de orden son las funciones f tales que $0 \notin Im(f)$.

(2.3) DEFINICIÓN. Sean E y F retículos vectoriales, sea $T: E \to F$ un operador lineal.

a) T es positivo $(T \geq 0) \Leftrightarrow T(E_+) \subset F_+$.

b) T es homomorfismo de retículo (T es HR) $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in E$ $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$ y $T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty$.

c) T es isomorfismo de retículo $\Leftrightarrow$ T es HR y $\exists T^{-1}: F \to E$ t.q. T^{-1} es HR y $T \circ T^{-1}$ = identidad en F y $T^{-1} \circ T$ = identidad en E.

Inmediatamente notamos que si T es un homomorfismo de retículo, entonces T es positivo. Además, el comportamiento de un operador positivo está determinado por los valores que toma en E_+; dicho de manera precisa,

PROPOSICIÓN A. Sean E y F retículos vectoriales, sea $T: E_+ \to F$ una función. Entonces T se extiende a una función positiva de E en F si y sólo si $\forall x, y \in E_+$ $T(x+y) = Tx + Ty$ y $\forall x \in E_+$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+$ $T\alpha x = \alpha Tx$.

Naturalmente, la extensión que se pide es lineal; la prueba resulta de observar que $E = E_+ - E_+$ y de (1.7)a). $\square$

La siguiente proposición caracteriza de varias formas a los homomorfismos de retículo T entre dos retículos vectoriales E y F.

PROPOSICIÓN B. Supongamos que T es lineal. Entonces son equivalentes las afirmaciones:

a) T es homomorfismo de retículo

b) $\forall x, y \in E \quad T x \vee y = Tx \vee Ty$

c) $\forall x \in E \quad |Tx| = T|x|$

d) $\forall x \in E \quad Tx^+ \wedge Tx^- = 0$

e) $Tx \in E \quad (Tx)^+ = Tx^+$

f) $\forall x, y \in E \quad x \wedge y = 0 \Rightarrow Tx \wedge Ty = 0.$

Puede encontrarse una prueba de este resultado en [S, pág 59] y en [F, pág 11]. □

En cuanto a isomorfismo de retículo, es equivalente esta condición a la de ser HR bigectivo.

(2.4) Si $T: E \to F$ es un homomorfismo de retículo, el kernel $T^{-1}(0)$ es un ideal de E. Veremos ahora que recíprocamente, cualquier ideal en E es el kernel de algún homomorfismo de retículo. La solución que se da es, por supuesto, vía construcción de un cociente.

TEOREMA. Sean E un retículo vectorial, I un ideal de E, E/I el espacio vectorial cociente y $p: E \to E/_I$ la proyección canónica. Definimos en $E/_I$

$$p(x) \leq p(y) \Longleftrightarrow \exists x' \in [x] \; \exists y' \in [y] \text{ t.q. } x' \leq y'.$$

Entonces se cumplen:

a) $\leq$ es un orden parcial en $E/_I$

b) $(E/_I, \leq)$ es retículo vectorial

c) p es homomorfismo de retículo.

Demostración: Definimos el conjunto $P := \{p(x) \mid x \in E_+\}$. Probaremos primero lo siguiente:

$$\forall x \in E \quad p(x) \in P \Leftrightarrow x^- \in I \qquad (*)$$

Sea $x \in E$, y supongamos que $p(x) \in P$. Entonces $\exists y \in E^+$ t.q. $p(x) = p(y)$, i.e, $y - x \in I$. Entonces $-x \leq y - x$ y por lo tanto $0 \leq x^- = (-x) \vee 0 \leq (y-x) \vee 0 = (y-x)^+ \leq |y-x|$, y como I es sólido, $x^- \in I$. Recíprocamente, si $x^- \in I$, $p(x) = p(x^+) - p(x^-) = p(x^+) \in P$. Esto prueba $(*)$.

Veremos ahora que P es un cono. Si $p(x) \in P \cap -P$, entonces $p(x) \in P$ y $p(-x) \in P$, y por $(*)$ $x^- \in I$ y $x^+ = (-x)^- \in I$, de donde $x = x^+ - x^- \in I$ y por lo tanto $p(x) = 0$ y $P \cap P = \{0\}$. Las otras dos condiciones de la definición (1.4) son verificadas trivialmente, y por consiguiente queda probado que E/I es un EVO con el orden parcial inducido por P, el cual coincide con $\leq$, ya que si x e $y \in E$, como I es ideal,

$p(x)-p(y)=p(x-y)\in P \Leftrightarrow (x-y)^{-}\in I \Leftrightarrow \exists j\in I$ t.q. $y-x\leq j$ $\Leftrightarrow \exists j\in I\ x\leq j+y \Leftrightarrow p(x)\leq p(y)$. Nos queda por probar que con ese orden E/I es retículo y que p es HR.

Probaremos ahora que:

$\forall x\in E$ existe $\sup\{p(x),0\}$ en E/I y es igual a $p(x^{+})$. (**)

Sea $x\in E$. Tenemos que $p(x^{+})=p(x)+p(x^{-})\geq p(x)$ (p es obviamente positiva) y que $p(x^{+})\geq 0$. Ahora, si $p(y)\geq p(x)$ y $p(y)\geq 0$, entonces $y^{-}\in I$ y $(y-x)^{-}\in I$. Por tanto $(y-x^{+})^{-}=(x\vee 0-y)\vee 0=(x-y)\vee(-y)\vee 0=(y-x)^{-}\vee y^{-}\in I$, puesto que I es un subretículo. De aquí que $p(y-x^{+})\geq 0$ y por tanto $p(y)\geq p(x^{+})$. Esto prueba (**).

Finalmente, por (1.5) E/I es retículo vectorial y por la proposición B de (2.3) p es HR. $\square$

(2.5) Consideremos la siguiente situación: un homomorfismo de retículo suprayectivo $T:E\to F$, I el kernel de T, y q la proyección canónica de E en E/I. Por el teorema anterior sabemos que E/I es un retículo vectorial y que q es homomorfismo de retículo. Es natural preguntarse en este contexto qué relaciones guardan entre sí E/I y F, y hasta qué punto refleja q el comportamiento de T. Esto es lo que investigaremos en el presente inciso.

Por el resto del inciso consideraremos dos retículos vectoriales fijos E y F y una transformación lineal $T: E \to F$ también fija.

LEMA. Supongamos que T es isomorfismo de espacios vectoriales, y que T y T^{-1} son positivos. Entonces T es isomorfismo de retículos.

Demostración: Sean $x, y \in E$. Como $x \vee y \geq x$ y $x \vee y \geq y$, puesto que T es positiva, $T x \vee y \geq Tx$ y $T x \vee y \geq Ty$. Entonces

$$T x \vee y \geq Tx \vee Ty. \quad (*)$$

Por otro lado, como $Tx \vee Ty \geq Tx$ y $Tx \vee Ty \geq Ty$, siendo T^{-1} positivo, $T^{-1}(Tx \vee Ty) \geq x = T^{-1}Tx$ y $T^{-1}(Tx \vee Ty) \geq y = T^{-1}Ty$. Entonces $T^{-1}(Tx \vee Ty) \geq x \vee y$. Finalmente, aplicando la positividad de T,

$$Tx \vee Ty = TT^{-1}(Tx \vee Ty) \geq T x \vee y. \quad (**).$$

De $(*)$ y $(**)$ obtenemos $Tx \vee Ty$, i.e., T es HR. Por el mismo argumento T^{-1} es HR, lo cual termina la prueba. □

PROPOSICIÓN. Supongamos ahora que T es HR suprayectivo, y sean $I = \ker T$, q la proyección canónica de E en E/I y T_0 el isomorfismo de espacios vectoriales inducido por T y q entre E/I y F. Entonces T_0 es isomorfismo de retículos vectoriales.

Demostración: Recordemos que T_0 está dada como una transformación lineal que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "q"'] & F \\ E/I \arrow[ur, "T_0"'] & \end{tikzcd} \qquad T = T_0 \circ q$$

y está dada por la fórmula $T_0(q(x)) = T(x)$.
Por el lema anterior, basta probar que T_0 y T_0^{-1} son positivas, pero esto es inmediato de que $T_0(E/I)_+ = T(E_+)$ y de que $T_0^{-1}(F_+) = q(E_+)$. □

COROLARIO. Si $T(E_+) = F_+$, son equivalentes las siguientes condiciones:

a) T es HR

b) $\forall B \subset F$ sólido $T^{-1}(B)$ es sólido.

c) $T^{-1}(0)$ es ideal en E.

Demostración:

a) $\Rightarrow$ b): Si $x \in T^{-1}B$ y $y \in E$ y $|y| \leq |x|$, entonces $|Ty| = T|y| \leq T|x| \in B$. Como B es sólido, $Ty \in B$ y por tanto $y \in T^{-1}B$.

b) $\Rightarrow$ c): Es trivial.

c) $\Rightarrow$ a) Sea $I = T^{-1}(0)$, sea $q : E \to E/I$ la proyección canónica, sea $T_0 : E/I \to F$ la biyección inducida por T y q. Si $x \in E$, $q(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^- \in I = T^{-1}(0) \Leftrightarrow Tx^- = 0 \Leftrightarrow Tx^+ = Tx \geq 0$. Entonces T_0 es positiva y T_0^{-1} es positiva; por el lema, T_0 es HR, y como $T = T_0 \circ q$, también T es HR. □

(2.6) Consideraremos ahora algunos ejemplos para ilustrar la noción de homomorfismo de retículo.

a) Sea K un espacio compacto Hausdorff, sea $t \in K$. La función
$$\delta_t : \mathscr{C}(K) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto f(t)$$
es homomorfismo de retículos. Veremos más adelante que todos los HR entre $\mathscr{C}(K)$ y $\mathbb{R}$ son de la forma $\alpha\delta_t$, para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ y algún $t \in K$.

b) Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es lineal, φ es HR $\Leftrightarrow$ φ es positiva.

c) Si K_1 y K_2 son compactos Hausdorff, y $\varphi : K_2 \to K_1$ es un homeomorfismo, la función
$$T_\varphi : \mathscr{C}(K_1) \longrightarrow \mathscr{C}(K_2)$$
$$f \longmapsto f \circ \varphi$$
es un homomorfismo de retículos. Más adelante caracterizaremos a los HR entre $\mathscr{C}(K_1)$ y $\mathscr{C}(K_2)$ como los "adjuntos" de funciones $\varphi : K_2 \longrightarrow K_1$ continuas en algún subconjunto de K_2. El significado preciso del término "adjunto" lo veremos en §6.

d) Consideremos dos espacios de medida (X, Σ, μ) y (Y, T, ν). Recuérdese que una función $\varphi : Y \to X$ es medible $\Leftrightarrow$ $\forall B \in \Sigma$ $\varphi^{-1}(B) \in T$, es no singular $\Leftrightarrow$ es medible y $\forall B \in \Sigma$ $\mu(B) = 0 \Rightarrow \nu(\varphi^{-1}(B)) = 0$, y preserva la medida $\Leftrightarrow$ es medible y $\forall B \in \Sigma$ $\mu(B) = \nu(\varphi^{-1}(B))$. φ induce una función
$$T_\varphi : \mathbb{R}^X \longrightarrow \mathbb{R}^Y$$
$$f \longmapsto f \circ \varphi$$

Si φ es medible, la restricción de T_φ a los espacios $\mathcal{M}(X)$ y $\mathcal{M}(Y)$ de todas las funciones μ-medibles (ν-medibles) en X (en Y) es un homomorfismo de retículos.
En el caso que φ es no singular, T_φ puede considerarse un HR de $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ en $\mathcal{L}^\infty(\nu)$, y finalmente si φ preserva la medida podemos ver a T_φ como HR de $\mathcal{L}^p(\mu)$ en $\mathcal{L}^p(\nu)$, para $1 \le p \le \infty$.
Las pruebas de las dos primeras afirmaciones son inmediatas, y la tercera se demuestra viendo que si f es simple, $\int_X f\,d\mu = \int_Y f\circ\varphi\,d\nu$, de donde se obtiene esa misma igualdad para todas las f en $\mathcal{L}^p(\mu)$.

(2.7) Pasaremos ahora a estudiar dos clases importantes de ideales, los minimales y los maximales, y a clasificar a los retículos vectoriales en términos de esos tipos de ideales. Durante todo este inciso E denotará un retículo vectorial fijo.

DEFINICIÓN. Sea I un ideal en E tal que I es propio.

a) I es maximal $\Leftrightarrow$ $\forall J$ ideal en E $I \subset J \Rightarrow I = J$ ó $E = J$.

b) I es minimal $\Leftrightarrow$ $\forall J$ ideal en E $J \subset I \Rightarrow I = J$ ó $\{0\} = J$.

c) El radical R_E es la intersección de los ideales maximales.

d) E es semisimple $\Leftrightarrow$ $R_E = \{0\}$

e) E es simple $\Leftrightarrow$ sus ideales son $\{0\}$ y E.

Recordemos que una latiz es un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$ tal que todo subconjunto de A de dos elementos tiene supremo e ínfimo en A.

Si denotamos por $\mathcal{I}(E)$ al conjunto de ideales de E, podemos considerarlo un conjunto parcialmente ordenado con el orden definido por la contención.

LEMA. $\mathcal{I}(E)$ es una latiz.

Demostración. Si I y J son ideales en E, definimos $I \vee J := I + J$ y $I \wedge J := I \cap J$. Claramente $I \cap J$ es el ínfimo de $\{I, J\}$. Por otro lado $I + J$ es un subespacio vectorial de E, y si x está en $I + J$, sea $y \in E$ tal que $|y| \leq |x|$. Entonces $\exists a \in I\ \exists b \in J$ t.q. $x = a + b$. Por la propiedad de la descomposición (1.8) c), $|x| = |a+b| \leq |a| + |b| \in [0, |a|+|b|] = [0,|a|] + [0,|b|]$. Como $0 \leq y^+ \leq |x|$, $\exists s \in [0,|a|]\ \exists t \in [0,|b|]$ t.q. $y^+ = s + t$. Pero I y J son sólidos, de donde $[0,|a|] \subset I$ y $[0,|b|] \subset J$ y por lo tanto $y^+ \in I + J$. Análogamente $y^- \in I+J$ y de aquí $y = y^+ + y^- \in I + J$. Esto prueba que $I + J$ es sólido y por consiguiente un ideal. Como por otra parte $I+J$ es el subespacio más pequeño que contiene a I y a J, $I+J$ es el supremo de $\{I, J\}$. □

Consideremos ahora un ideal fijo I en $\mathcal{I}(E)$. El cociente E/I es un retículo vectorial, y entonces podemos considerar la latiz de ideales $\mathcal{I}(E/I)$. El siguiente teorema nos muestra una relación importante entre $\mathcal{I}(E)$ y $\mathcal{I}(E/I)$. Recordemos que un homomorfismo de latices es una función φ entre dos latices A y B tal que preserva ínfimo y supremo, es decir $\forall a, a' \in A$ $\varphi(a \vee a') = \varphi(a) \vee \varphi(a')$ y $\varphi(a \wedge a') = \varphi(a) \wedge \varphi(a')$, y que un isomorfismo de latices es un homomorfismo de latices que tiene inversa que también es homomorfismo de latices.

TEOREMA. Sea I un ideal en E, sea $q : E \to E/I$ la función canónica del espacio en el cociente. Entonces

a) $\begin{aligned} Q : \mathcal{I}(E) &\longrightarrow \mathcal{I}(E/I) \\ J &\longmapsto q(J) \end{aligned}$ es homomorfismo de latices suprayectivo.

b) Si $\mathcal{H} := \{J \in \mathcal{I}(E) \mid I \subset J\}$, la restricción de Q a $\mathcal{H}$ es isomorfismo de latices.

Demostración: a): Primero hay que probar que Q está bien definida. Si $J \in \mathcal{I}(E)$, $q(J)$ es un subespacio vectorial. Sea $x \in J$, sea $[y] \in E/I$ tal que $|[y]| \leq |[x]|$. Como q es HR, podemos suponer que $|y| \leq |x|$, y como J es sólido, $y \in J$. Entonces $[y] \in q(J)$ y $q(J)$ es sólido.

Veremos ahora que Q es homomorfismo de latices. Sean $J, K \in \mathcal{I}(E)$; es claro que $q(J+K) = q(J) + q(K)$ y que $q(J \cap K) \subset q(J) \cap q(K)$. Entonces, sólo falta probar que $q(J) \cap q(K) \subset q(J \cap K)$. Si $\alpha \in q(J) \cap q(K)$, $\exists x \in J\ \exists y \in K$ t.q.

$q(x) = q(y) = \alpha$. Como q es HR, $|\alpha| = q|x| = q|y| = q|x| \wedge q|y| =$ $= q(|x| \wedge |y|) \in q(J \cap K)$, puesto que J y K son sólidos. De aquí, puesto que $q(J\cap K)$ es un ideal, concluimos que $\alpha \in q(J \cap K)$ y la contención que nos faltaba.
Si Δ es un ideal en E/I, $q^{-1}(\Delta)$ es un ideal en E p... el corolario (2.7), y $\Delta = q q^{-1}(\Delta)$, puesto que q es suprayectiva. Entonces, también Q es suprayectiva.

b): Sean $H, K \in \mathcal{H}$ tales que $q(H) = q(K)$. Entonces $H = H + I = q^{-1} q(H) = q^{-1} q(K) = K + I = K$. Por otro lado, si Γ es un ideal en E/I, sea $H := q^{-1}(\Gamma) + I$. $H \in \mathcal{H}$ y $q(H) = \Gamma + 0 = \Gamma$. Entonces, $Q/_{\mathcal{H}}$ es biyectiva, de donde concluimos que $Q/_{\mathcal{H}}$ es isomorfismo de latices. $\square$

(2.8) Proposición. Sea E un retículo vectorial. Entonces, E/R_E es semisimple y arquimediano.
Demostración: Utilizando las conclusiones y notaciones del teorema anterior, con R_E en lugar de I, tenemos que

$$Q : \mathcal{H} = \{J \in \mathcal{J}(E) \mid R_E \subset J\} \longrightarrow \mathcal{J}(E/R_E)$$
$$J \longmapsto q(J)$$

es un isomorfismo de latices, y por lo tanto una biyección entre los ideales maximales de E y los de E/R_E. Entonces,
$R_{E/R_E} = \bigcap\{\Delta \in \mathcal{J}(E/R_E) \mid \Delta \text{ es maximal}\} = qq^{-1} \bigcap \{\Delta \in \mathcal{J}(E/R_E) \mid \Delta \text{ es maximal}\}$
$= q \bigcap \{q^{-1}\Delta \mid \Delta \text{ es ideal maximal en } E/R_E\} = q \bigcap \{H \in \mathcal{J}(E) \mid H \text{ es maximal}\} =$

$q(R_E) = \{0\}$, donde q es la proyección canónica de E en E/R_E, y esto prueba que E/R_E es semisimple.

Para ver que es arquimediano, sean $u, v \in (E/R_E)_+$ tales que $\forall n \in \mathbb{N}$ $nv \leq u$. Sea H un ideal maximal de E/R_E. Si $u \in H$, claramente $v \in H$. Por otro lado, si $u \notin H$, consideremos el ideal H' generado por $H \cup \{v\}$. Tenemos que $H' = \bigcup_{\mathbb{N}} n[-v,v] + H$, y si suponemos que $u \in H'$, entonces $\exists k \in \mathbb{N}$ $\exists h \in H^+$ t.q. $u \leq kv + h$, y por lo tanto $\exists x \in [0, kv]$ $\exists y \in [0, h]$ t.q. $u = x+y$. De aquí obtenemos que $h \geq y = u-x \geq 2kv - x \geq 2kv - kv = kv$ y por tanto $kv \in H$ y $v \in H$, y también $u \in H$, lo que es una contradicción. De aquí concluimos que H' es un ideal propio, ya que $u \notin H'$, y como $H \subset H'$ y H es maximal, tenemos que $H = H'$. Entonces, $v \in H$. Hemos probado que v está en todos los ideales maximales de E/R_E, y por tanto en su radical, que es cero por la primera parte. Entonces $v = 0$ y E/R_E es arquimediano. $\square$

Observemos que la demostración anterior sirve también como prueba de que todo retículo vectorial semisimple es arquimediano.

(2.9) Nuestro siguiente objetivo es dar una caracterización de los retículos vectoriales isomorfos a $\mathbb{R}$. Empezaremos probando una afirmación técnica.

LEMA. Sea E un retículo vectorial arquimediano, sea $x \in E_+$. Supongamos que $A \subset \mathbb{R}$ y que $\alpha := \sup A \in \mathbb{R}$. Entonces $\alpha x = \sup \{\beta x \mid \beta \in A\}$ en E.

Demostración: Es claro que $\forall \beta \in A$ $\alpha x \geq \beta x$. Ahora, si $y \in E$ y $\forall \beta \in A$ $y \geq \beta x$, sea $n \in \mathbb{N}$. Como $\alpha = \sup A$, $\exists \beta \in A$ tal que $\alpha - n^{-1} \leq \beta$. Entonces $(\alpha - n^{-1}) x \leq \beta x \leq y$, y de aquí $n\alpha x - x \leq ny$, y por tanto $n(\alpha x - y) \leq x$. Como E es arquimediano, $\alpha x - y \leq 0$, i.e., $\alpha x \leq y$. $\square$

TEOREMA. Sea E un retículo vectorial no trivial. Entonces son equivalentes las afirmaciones:

a) E es isomorfo como retículo a $\mathbb{R}$. ($E \cong \mathbb{R}$)

b) E es simple.

c) E es totalmente ordenado y arquimediano.

Demostración: a) $\Rightarrow$ b): obvio.

b) $\Rightarrow$ c): Sea $x \in E$, y supongamos $x^+ > 0$ y $x^- > 0$. De aquí obtenemos que $\{0\} \neq E_{x^+} \neq E$, lo que va contra la hipótesis de que E es simple. Entonces $x^+ = 0$ ó $x^- = 0$, i.e., $x \geq 0$ ó $x \leq 0$, de donde E es totalmente ordenado. Por (2.8) E es arquimediano.

c) $\Rightarrow$ a): Sea x_0 un elemento mayor que 0 en E. $\forall y \in E_+$ sea $\alpha_y := \sup \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha x_0 \leq y\}$. Como E es arquimediano y $x_0 > 0$, entonces $\alpha_y < \infty$, y como E es totalmente ordenado $\alpha_y > -\infty$.

Por el lema anterior $\alpha_y x_0 = \sup\{\alpha x_0 \mid \alpha x_0 \leq y\} \leq y$, y además, si $\alpha > \alpha_y$ entonces $\alpha x_0 \not\leq y$ y por tanto $\alpha x_0 > y$ puesto que E es totalmente ordenado; como $\alpha_y = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha x_0 \geq y\}$, usando otra vez el lema tenemos que $\alpha_y x_0 \geq y$. Entonces la función $y \longmapsto \alpha_y$ es un isomorfismo de conjuntos parcialmente ordenados entre E_+ y $\mathbb{R}_+$ y que claramente se extiende a un isomorfismo de retículos vectoriales entre E y $\mathbb{R}$. $\square$

Como consecuencia inmediata del teorema (2.7) y del teorema anterior, obtenemos

COROLARIO. Sea E un retículo vectorial, sea I un ideal de E. Entonces

a) Si I es maximal, $E/I \cong \mathbb{R}$.

b) Si I es minimal, $I \cong \mathbb{R}$.

(2.10) Aprovecharemos la información de que disponemos para dar una caracterización de los homomorfismos de retículo no cero con codominio $\mathbb{R}$, que después utilizaremos para caracterizar a esos mismos HR con dominio en $\mathcal{C}(K)$, en término del espacio K.

PROPOSICIÓN. Sea E un retículo vectorial, sea $T: E \to \mathbb{R}$ una funcional lineal no cero. Son equivalentes:

a) T es HR.

b) $T \geq 0$ y $\ker T$ es ideal maximal.

Demostración: a) $\Rightarrow$ b): Los homomorfismos de retículo son siempre positivos, y por el corolario (2.5) $\ker T$ es un ideal; resta probar que es maximal. Por la proposición (2.5) T y q (la proyección canónica de E en $E/\ker T$) inducen un isomorfismo de retículo vectoriales $T_\sim$ entre $E/\ker T$ y $\mathbb{R}$, y por el teorema (2.7) existe un isomorfismo de latices entre los ideales de $\mathbb{R}$ y los de E que contienen a $\ker T$. Entonces, $\ker T$ es maximal.

b) $\Rightarrow$ a): por el corolario (2.5). $\square$

(2.11) Finalizaremos esta sección haciendo un pequeño estudio de los ideales maximales y minimales en espacios de tipo $\mathcal{C}(K)$ y $\mathcal{L}^1$.

a) Consideraremos primero los espacios $\mathcal{C}(K)$, con K compacto Hausdorff. Si $p \in K$, el conjunto $\mathcal{M}_p := \{f \in \mathcal{C}(K) \mid f(p) = 0\}$ es un ideal maximal: tomemos un ideal J que contenga propiamente a $\mathcal{M}_p$. Entonces $\exists f \in J$ t.q. $f(p) \neq 0$. Como $|f| \in J$, podemos suponer que $f(p) > 0$ y que $f \geq 0$.

Sea $U := f^{-1}(f(p)/2, \infty)$. Por el lema de Urysohn $\forall x \in K\setminus U$ $\exists f_x : K \to [0,1]$ t.q. $f_x(x) = 1$ y $f_x(p) = 0$. Observemos que $\forall x \in K\setminus U$ $f_x \in \mathcal{M}_p$ y por tanto $f_x \in J$. $\forall x \in K\setminus U$ sea $U_x := f_x^{-1}(\frac{1}{2}, \infty)$. Por compacidad de $K\setminus U$, $\exists x_1, \dots, x_n \in K\setminus U$ tales que $K\setminus U \subset \bigcup_1^n U_{x_i}$. Definimos $g := f_{x_1} + \dots + f_{x_n} + f$. Esta función es estrictamente positiva y está en J. Ahora, si $h \in \mathcal{C}(K)$, sean $s := \sup_K |h|(x)$ y $t := \inf_K g(x)$. Por compacidad $t > 0$, y entonces $\exists M \in \mathbb{R}_+$ t.q. $Mt \geq s$. Entonces $\forall x \in K$ $|h(x)| \leq |Mg(x)|$, y de aquí concluimos que $h \in J$ y por tanto que $J = E$.

Recíprocamente, sea J un ideal maximal de $\mathcal{C}(K)$, y supongamos que $\forall p \in K$ $\exists f_p \in J$ t.q. $f_p(p) \neq 0$. Sin pérdida de generalidad $f_p \geq 0$ y $f_p(p) > 0$. $\forall p \in K$ sea $U_p := f_p^{-1}(f_p(p)/2, \infty)$. Otra vez por compacidad $\exists p_1, \dots, p_n \in K$ t.q. $K \subset \bigcup_1^n U_{p_i}$. Entonces, la función $f := \sum_1^n f_{p_i}$ está en J y es estrictamente positiva; como arriba, obtenemos que $\mathcal{C}(K) = \bigcup_{\mathbb{N}} n[-f, f] \subset J$, lo que contradice el que J sea propio. Por lo tanto $\exists p \in K$ $\forall f \in J$ $f(p) = 0$, i.e., $J \subset \mathcal{M}_p$. Como J es maximal y $\mathcal{M}_p \neq \mathcal{C}(K)$, $J = \mathcal{M}_p$.

Con esto hemos probado la afirmación siguiente:

Proposición A: Los ideales maximales en $\mathcal{C}(K)$ son los de la forma $\mathcal{M}_p$, para $p \in K$. $\square$

b) Pasaremos ahora al caso de los espacios $\mathcal{L}^1$. Lo primero que haremos será caracterizar a los espacios de medida (X, Σ, μ) tales que $\mathcal{L}^1(X)$ admite ideales maximales y minimales. Durante el resto de la sección utilizaremos el símbolo (X, Σ, μ) para denotar un espacio de medida arbitrario, pero fijo.

DEFINICIÓN. Un elemento A de Σ se llama átomo si y sólo si

$$\mu A > 0, \; \mu(X \setminus A) > 0 \text{ y } \forall B \in \Sigma|_A \; \mu B = 0 \text{ ó } \mu(A \setminus B) = 0.$$

PROPOSICIÓN B: $\mathcal{L}^1(X)$ admite ideales minimales y maximales $\Leftrightarrow$ X tiene átomos.

Demostración: $\Rightarrow$: Lo probaremos por contradicción. Sea E un ideal minimal en $\mathcal{L}^1(X)$, y supongamos que X no tiene átomos. Como E es un ideal propio, $\exists A \in \Sigma$ t.q. $\mu A \neq 0$ y $\exists f \in E$ t.q. $f|_A \neq 0$ μ-ctp. Caso 1: $\mu(X \setminus A) = 0$. No podemos tener la situación de que no hay subconjuntos propios de A medibles de medida positiva, porque en este caso tendríamos escencialmente un solo elemento en Σ de medida positiva (i.e., si $\mu S > 0$ y $\mu T > 0$, entonces $\mu(S \Delta T) = 0$), y entonces $\mathcal{L}^1(X) \cong \mathbb{R}$, que no tiene ideales maximales. Entonces, $\exists B \subset A$ t.q. B es medible, $\mu B > 0$ y $\mu A \setminus B > 0$. De aquí obtenemos que $g := f \cdot \chi_B$ es una función en E que se anula en un conjunto de medida positiva con complemento de medida positiva.

En el Caso 2, $\mu(X \setminus A)$, $g' := f \cdot \chi_{X \setminus A}$ es otra función en E que se anule en un subconjunto de medida positiva con complemento de medida positiva. En cualquier caso, podemos afirmar lo siguiente:

$\exists A' \in \Sigma$ t.q. $\mu A' \neq 0$ y $\mu(X \setminus A') \neq 0$ y $\exists f' \in E$ t.q. $f'|_{A'} \neq 0$ c.t.p.

Como X no tiene átomos, $\exists B' \in \Sigma$ t.q. $B' \subset A'$, $\mu B' \neq 0$ y $\mu(A' \setminus B') \neq 0$. Sea J el ideal $\mathcal{M}_B \cap E$. Entonces J es un ideal no cero contenido propiamente en E, lo que es una contradicción.

$\Leftarrow$: Si A es un átomo de X, el ideal $\mathcal{M}_A$ es maximal y el ideal $\mathcal{M}_{X \setminus A}$ es minimal. $\square$

Observemos que los ideales de la forma $\mathcal{M}_A$ son especialmente fáciles de manejar: en particular nos han permitido dar una solución muy simple al problema de la existencia de ideales maximales y minimales en $\mathcal{L}^1(X)$. Esto sugiere la conveniencia de trabajar un poco más con ellos, y si es posible, caracterizarlos. Es posible dar una respuesta simple a este problema, en términos de la topología de $\mathcal{L}^1(X)$, al menos en el caso importante de que X es de medida σ-finita. Como en problemas semejantes, primero resolveremos el caso finito y después el general

PROPOSICIÓN C: Supongamos que X es de medida finita, y sea E un ideal propio de $\mathcal{L}^1(X)$. Entonces E es cerrado $\Leftrightarrow$ $\exists\, B \in \Sigma$ t.q. $\mu B \neq 0$, $\mu(X \setminus B) \neq 0$ y $E = \mathcal{M}_B$.

Demostración: $\Rightarrow$: Sea $\mathcal{M} := \{A \in \Sigma \mid \mu A > 0$ y $\exists\, f \in E$ tal que $f|_A \neq 0$ μ-ctp$\}$. Como $E \neq \{0\}$, $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Sea $\alpha := \sup\{\mu A \mid A \in \mathcal{M}\}$. Tenemos que $0 < \alpha \leq \mu X < \infty$, y que $\exists\, (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ tal que $\mu A_n \to \alpha$ y $A_n \subset A_{n+1}$. Sea $A := \bigcup_{\mathbb{N}} A_n$, sea $B := X \setminus A$. Probaremos que $E = \mathcal{M}_B$.

$\subset$: Sea $f \in E$, y supongamos que no es cierto que $f|_B = 0$ μ-ctp. Entonces $\exists\, C \subset B$ medible tal que $0 < \mu C$ y $f|_C \neq 0$ μ-ctp, por lo tanto $C \in \mathcal{M}$. Como $A = \bigcup_{\mathbb{N}} A_n$ y $A_n \subset A_{n+1}$, $\mu A = \lim \mu A_n = \alpha$. Entonces, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu C > \alpha - \mu A_n$ $(\mu A = \alpha < \infty)$. Definimos $D := A_n \cup C$. Tenemos que $D \in \mathcal{M}$, y como $A_n \subset A$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces $C \cap A_n = \emptyset$. Por lo tanto $\mu D = \mu A_n + \mu C > \mu A_n + \alpha - \mu A_n = \alpha$, lo que contradice la definición de α.

$\supset$: Para probar esta contención, probaremos antes este

Lema: $\forall n \in \mathbb{N}$ $\chi_{A_n} \in E$. Demostración: Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\exists\, f \in E$ t.q. $f|_{A_n} \neq 0$ μ-ctp. Considerando $|f|$, podemos suponer que $f|_{A_n} > 0$ μ-ctp. $\forall k \in \mathbb{N}$ sea $B_k := f^{-1}[1/k, \infty] \cap A_n$. Entonces $B_k \subset B_{k+1}$ y $\bigcup_{\mathbb{N}} B_k = A_n$ y $\chi_{B_k} \in E$. De aquí concluimos que

$$0 = \lim_{k\to\infty} |\mu A_k - \mu B_k| = \lim_{k\to\infty} \|\chi_{A_n} - \chi_{B_k}\|,$$

y como E es cerrado, $\chi_{A_n} \in E$, lo que prueba el lema.
Como E es cerrado y como $\chi_{A_n} \longrightarrow \chi_A$, por el lema $\chi_A \in E$.
Como E es ideal, $\forall r \in \mathbb{R}$ $\forall D \subset A$ medible $r\chi_D \in E$, y como las funciones escalonadas son densas, $\mathcal{M}_B \subset E$.
Resta probar que $\mu B > 0$, pero ésto es inmediato de que E es un ideal propio y de que si $\underline{D} \subset X$ y $\mu(D) = \mu(X)$,

$$\left\{ \sum_1^n r_i \chi_{D_i} \,\middle|\, r_i \in \mathbb{R},\ D_i \subset D \text{ medible} \right\}^- = \mathcal{L}^1(X).$$

$\Leftarrow$: es obvia. $\square$

Proposición D: *Supongamos que X es σ-finito, y sea E un ideal propio de $\mathcal{L}^1(X)$. Entonces*
E es cerrado $\Leftrightarrow \exists B \in \Sigma$ t.q. $\mu B \neq 0$, $\mu(X \setminus B) \neq 0$ y $E = \mathcal{M}_B$.

Demostración: Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una partición numerable medible de X tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 < \mu X_n < \infty$.
Podemos considerar a $\mathcal{L}^1(X_n)$ como subespacio de $\mathcal{L}^1(X)$, de la siguiente manera: si $f \in \mathcal{L}^1(X_n)$, definimos $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in X_n$ y $\tilde{f}(x) = 0$ si $x \in X \setminus X_n$. Visto de esta manera, $\mathcal{L}^1(X_n)$ es el conjunto $\mathcal{M}_{X \setminus X_n}$, que es obviamente un ideal cerrado de $\mathcal{L}^1(X)$. Además es claro que la norma de $\mathcal{L}^1(X_n)$ como subespacio de $\mathcal{L}^1(X)$ y como espacio de tipo $\mathcal{L}^1$ coinciden.
$\forall n \in \mathbb{N}$ sea $E_n := E \cap \mathcal{L}^1(X_n)$, que es un ideal cerrado en $\mathcal{L}^1(X_n)$. Supongamos que $\forall n \in \mathbb{N}$ $E_n = \mathcal{L}^1(X_n)$.

Sea $f \in \mathcal{L}'(\mathfrak{X})$; probaremos que $f \in E$. $\forall n \in \mathbb{N}$ sea $f_n := f\chi_{\mathfrak{X}_n}$. Como $\int |f_n| d\mu \leq \int |f| d\mu < \infty$, $f_n \in \mathcal{L}'(\mathfrak{X}_n)$. Observemos que $\sum_1^n f_i \longrightarrow f$, y que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|\sum_1^n f_i| \leq |f|$; entonces, por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, $\int f = \lim \int \sum_1^n f_i$, y como $\sum_1^n f_i \in E$ que es cerrado, concluimos que $f \in E$, y por lo tanto $E = \mathcal{L}'(\mathfrak{X})$, contradicción.

Por otro lado, como $\{0\} \neq E$, es claro que para alguna $n \in \mathbb{N}$ sucede que $E_n \neq \{0\}$. Entonces, el conjunto $M := \{n \in \mathbb{N} \mid \{0\} \neq E_n \neq \mathcal{L}'(\mathfrak{X}_n)\}$ no es vacío. Por la proposición anterior $\forall n \in M$ $\exists B_n \in \Sigma$ t.q. $B_n \subset \mathfrak{X}_n$ y $E_n = \mathcal{M}_{B_n} = \{f \in \mathcal{L}'(\mathfrak{X}_n) \mid f|_{B_n} = 0\ \mu\text{-ctp}\}$. Sea M' el conjunto $\{n \in \mathbb{N} \mid E_n = \{0\}\}$. Sea $B := \bigcup_M B_n \cup \bigcup_{M'} \mathfrak{X}_n$. Probaremos que $E = \mathcal{M}_B$.

$\subset$: Sea $f \in E$. Definimos $f_n := f\chi_{\mathfrak{X}_n}$. Entonces $f_n \in E_n = \mathcal{M}_{B_n}$, por tanto $f_n|_{B_n} \equiv 0\ \mu\text{-ctp}$, y como $f|_{B_n} = f_n|_{B_n}$, tenemos que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f|_{B_n} \equiv 0$, y entonces $f|_B \equiv 0\ \mu\text{-ctp}$.

$\supset$: Sea $f \in \mathcal{M}_B$. Definimos $f_n := f\chi_{\mathfrak{X}_n}$. Entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n \in E_n \subset E$, y usando de nuevo el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, tenemos que $\int f = \lim \int \sum_1^n f_i$, y de aquí obtenemos que $f \in E$.

Como E no es ideal trivial, es claro a partir de la igualdad $E = \mathcal{M}_B$ que $\mu B \neq 0$ y $\mu(\mathfrak{X} \setminus B) \neq 0$.

$\Leftarrow$: Trivial $\square$

§ 3. Retículos Normados.

Un problema al que se llega de manera muy natural en el estudio de los retículos vectoriales, es el de encontrar conexiones entre el orden de un retículo y las diversas topologías que lo puedan hacer espacio vectorial topológico. En este trabajo nos limitaremos a tratar un solo caso, el de los retículos normados, caso de gran importancia y en el que la relación entre orden y topología resulta muy natural.

(3.1) Definición.

a) Un retículo normado es una pareja $(E, \|\ \|)$, donde E es un retículo vectorial y $\|\ \|$ es una norma en E tal que $\forall x, y \in E \quad |x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$. (*)

b) Una norma que satisfaga (*) se llama monótona.

c) Un retículo de Banach es un retículo normado que es espacio de Banach.

Podemos observar que una norma $\|\ \|$ es monótona si y sólo si $B := \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ es sólido

Si $\| \ \|$ es monótona y $|x| = |y|$, entonces $\|x\| = \|y\|$. En particular $\|x\| = \| \, |x| \, \|$.

El caso en que $\| \ \|$ satisfaga la condición

$$\forall x, y \in E \quad |x| \leq |y| \iff \|x\| \leq \|y\|$$

no es de gran interés, ya que caemos en un caso conocido. Si $x, y \in E_+ \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$ o $\|y\| \leq \|x\|$. Por lo tanto $x = |x| \leq |y| = y$ o $y \leq x$, lo que quiere decir que E_+ es totalmente ordenado. Veremos más adelante que E es arquimediano, y entonces por (2.9) que $E \cong \mathbb{R}$.

Veamos ahora algunos ejemplos:

a') Una buena parte de los espacios normados que surgen en análisis real se encuentran presentados como cocientes de algún subespacio de algún $\mathbb{R}^{X}$, y heredan una estructura de orden que convierte en monótona a la norma. Tal es el caso de los espacios $\mathcal{C}(K)$, $\mathcal{L}^p[0,1]$, $\mathbb{R}^n$, por ejemplo.

b') Si X es un conjunto no vacío, el espacio $\ell_1(X, \mu)$ con μ la medida que cuenta y el orden puntual es un retículo de Banach. Aquí la norma está dada por $\|x\| = \sum_{t \in X} x(t)$, para $x \in \ell_1(X, \mu)$. Otros casos interesantes son $\ell_\infty(X)$ y $c_0(X) = \{ f : X \to \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0 \ \{x \in X \mid |f(x)| > \varepsilon\} \text{ es finito} \}$; ambos son retículo de Banach, con el orden puntual y la norma del supremo.

c) El retículo vectorial M_A de todas las funciones valuadas en $\mathbb{R}$, acotadas y finitamente aditivas definidas en un álgebra booleana A es un retículo de Banach con norma $\|\nu\|$ = variación total de ν. En M_A el orden está definido también puntualmente: $\nu \leq \mu \iff \forall a \in A \ \nu(a) \leq \mu(a)$.

(3.2) Consideraremos ahora algunas propiedades elementales de los retículos normados.

PROPOSICIÓN: Sea $(E, \|\ \|)$ un retículo normado. Entonces se cumplen:

a) Las funciones $x \mapsto x^+$, $x \mapsto x^-$, $x \mapsto |x|$, $(x,y) \mapsto x \vee y$, $(x,y) \mapsto x \wedge y$ son uniformemente continuas.

b) E_+ es cerrado.

c) E es arquimediano.

d) $B \subset E$ sólido $\Rightarrow \overline{B}$ sólido.

Demostración: a): $(x,y) \mapsto x \vee y$ y $(x,y) \mapsto x \wedge y$ son uniformemente continuas por (1.6) h) e i), y las demás se derivan de estas dos.

b): E_+ es la imagen inversa del cerrado $\{0\}$ bajo la función continua $x \mapsto x^-$.

c) Si $x, y \in E_+$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ $x \leq ny$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ $x - \frac{1}{n} y \in -E_+$. Pero $\{\frac{1}{n} y\}$ converge en norma a 0, y como $-E_+$ es cerrado $x \in -E_+$, i.e., $x \leq 0$.

d) Sea $B \subset E$ sólido, sea $x \in \bar{E}$ y sea $y \in E$ tal que $|y| \leq |x|$. Entonces $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tal que $x_n \xrightarrow[\|\,\|]{} x$. Definimos $y_n^+ := y^+ \wedge |x_n|$, $y_n^- := y^- \wedge |x_n|$. Entonces, si $y_n := y_n^+ - y_n^-$, $y_n \in B$ y $y = \lim y_n$, porque $y_n^+ = y^+ \wedge |x_n| \xrightarrow[\|\,\|]{} y^+$ y $y_n^- \xrightarrow[\|\,\|]{} y^-$. Por lo tanto $y \in \bar{B}$. □

Corolario. La cerradura de un subretículo es subretículo, y la de un ideal es ideal. □

(3.3) La siguiente proposición es una agradable sorpresa:

Proposición: Sea E un retículo de Banach, sea F un retículo normado, sea $T: E \to F$ lineal positiva. Entonces T es continua.

Demostración: Supongamos que T no es continua. Entonces T no es acotada en la bola unitaria B de E. Como $B \subset (B\cap E_+) - (B \cap E_+)$, tampoco es acotada en $B \cap E_+$, y por lo tanto $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B \cap E_+$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|Tx_n\| \geq n^3$. Como E es completo, existe $z := \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} x_n$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Como $\forall m \geq n$ $\sum_1^m \frac{1}{i^2} x_i \geq \frac{1}{n^2} x_n$ y como E_+ es cerrado $z \geq \frac{1}{n^2} x_n$, y por lo tanto $Tz \geq \frac{1}{n^2} Tx_n \geq 0$, de lo cual concluimos que $\|Tz\| \geq \frac{1}{n^2}\|Tx_n\| \geq n$, por la monotonía de la norma de F, lo que es una contradicción. □

COROLARIO: Si I es un ideal maximal en un retículo de Banach E, entonces I es cerrado.

DEMOSTRACIÓN: I es el kernel de un homomorfismo de retículo $T: E \to \mathbb{R}$, que por la proposición anterior es continuo. $\square$

§4. EL DUAL ORDENADO.

(4.1) Consideremos el retículo vectorial $\mathbb{R}^2$ con el orden canónico, y los homomorfismos de retículo

$$T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad y \qquad T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} .$$
$$(x,y) \mapsto x \qquad\qquad (x,y) \mapsto y$$

Observemos que la suma $T = T_1 + T_2$ tiene la desgracia de no ser homomorfismo de retículo. Por otra parte, consideremos dos retículos vectoriales arbitrarios E y F y un homomorfismo de retículos $S: E \to F$. A menos que $S = 0$, $-S$ no es homomorfismo de retículos. La conclusión es que no tenemos esperanza alguna de formar un espacio vectorial que esté constituido por $\Re$ homomorfismos de retículos. Siendo deseable poder desarrollar una teoría de dualidad para retículos vectoriales, tendremos que buscar una clase de objetos más amplia que los homomorfismos de retículo. Una manera de solucionar el problema es considerar el conjunto de diferencias de funciones positivas, que en el caso de tratarse de funcionales, constituyen un retículo vectorial con el orden puntual.

Esta posibilidad es de sumo interés para nosotros, ya que más adelante caracterizaremos mediante argumentos de dualidad dos tipos importantes de retículos de Banach. Además, es posible establecer conexiones grandemente fructíferas entre el conjunto de diferencias de funcionales positivos en un retículo normado y su adjunto E^*. Esta sección, pues, estará dedicada a desarrollar una teoría de dualidad para retículos vectoriales.

(4.2) DEFINICIÓN. Sea E un retículo vectorial. El dual ordenado es el conjunto

$$E^{\star} = \{ f: E \to \mathbb{R} \mid \exists f_1, f_2 : E \to \mathbb{R} \text{ positivas t.q. } f = f_1 - f_2 \}.$$

El cono dual es el conjunto

$$E^{\star}_{+} = \{ f: E \to \mathbb{R} \mid f \text{ es positiva} \}.$$

El orden dual en $E^{\star}$ es el puntual.

Hay que observar que $E^{\star}_{+}$ es un cono en el sentido de la definición (1.4), y que el orden dual es precisamente el inducido por $E^{\star}_{+}$: estamos siendo coherentes con la terminología introducida anteriormente.

Daremos ahora una caracterización de los elementos de $E^{\star}$.

PROPOSICIÓN: Sea E un retículo vectorial, sea $T: E \to \mathbb{R}$ lineal. $T \in E^{\star} \Leftrightarrow \forall x \in E_+ \ \{ Ty \mid y \in [0,x] \}$ es acotado superiormente.

Demostración: $\Rightarrow$: trivial.

$\Leftarrow$: Sea $x \in E_+$. Definimos $Sx := \sup\{Ty \mid y \in [0,x]\}$. Obsérvese que Sx es el supremo de un conjunto no vacío y acotado superiormente por hipótesis.

Claramente tenemos que $x \in E_+$ y $\alpha \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow S(\alpha x) = \alpha Sx$.

Ahora, si x_1 y x_2 están en E_+,

$$\begin{aligned} Sx_1 + Sx_2 &= \sup\{Ty_1 \mid y_1 \in [0,x_1]\} + \sup\{Ty_2 \mid y_2 \in [0,x_2]\} \\ &= \sup\{T(y_1+y_2) \mid y_1 \in [0,x_1], y_2 \in [0,x_2]\} \\ &= \sup\{Tz \mid z \in [0,x_1+x_2]\} \\ &= S(x_1+x_2). \end{aligned}$$

La segunda igualdad es cierta porque T es lineal y por (1.5) d'), y la tercera por la propiedad de la descomposición. Por la proposición A de (2.3) S se extiende a una funcional positiva $S: E \to \mathbb{R}$.

Definimos ahora $R := S - T$, y observemos que si $x \in E_+$, $Sx - Tx \geq 0$, lo cual quiere decir que R es positiva, y por tanto que $T \in E^{\star}$. $\square$

Si $T: E \to \mathbb{R}$, por un simple argumento de traslación, (naturalmente suponemos que T es lineal) son equivalentes las condiciones

a) $\forall x \in E_+$ $\{Ty \mid y \in [0,x]\}$ es acotado superiormente

b) $\forall x,y \in E$ $x \leq y \Rightarrow \{Ty' \mid x \leq y' \leq y\}$ es acotado.

Entonces, por la proposición anterior concluimos que la condición b) es equivalente a que T esté en $E^{\star}$.

Consideremos ahora un elemento T de $E^{\star}$. Conservando la notación de la proposición que acabamos de probar, es claro que S es el supremo en $E^{\star}$ de T y 0. Podemos definir entonces a T^{+} como S, y concluir por (1.5) que $E^{\star}$ es un retículo vectorial. En cuanto a T^{-}, está dado por

$$T^{-}x = -\inf\{Ty \mid y \in [0,x]\}, \text{ si } x \in E_{+};$$

(recuérdese que una funcional positiva está determinada por sus valores en E_{+}).

$|T|$ está dado por la regla

$$|T|x = \sup\{Ty \mid |y| \leq x\}, \text{ si } x \in E_{+}.$$

Si S es otro elemento de $E^{\star}$, tenemos que

$$(T \vee S)(x) = \sup\{Tx_1 + Sx_2 \mid x_1, x_2 \in E_{+} \text{ y } x_1 + x_2 = x\}, \; x \in E_{+}$$

$$(T \wedge S)(x) = \inf\{Tx_1 + Sx_2 \mid x_1, x_2 \in E_{+} \text{ y } x_1 + x_2 = x\}, \; x \in E_{+}.$$

Las pruebas de estas igualdades consisten en meros cálculos; referimos al lector a los libros de Fremlin y Schaefer citados en la bibliografía.

(4.3) En este inciso E denotará un retículo normado. Es bien sabido que el adjunto E^{*} es un espacio de Banach (cfr., por ejemplo, [Ru]); investigaremos ahora la posibilidad de convertir a E^{*} en un retículo vectorial, o me-por aún, en retículo de Banach. El camino a seguir es, primero, probar la inclusión $E^{*} \subset E^{\star}$, y aprovechar la estructura de orden que posee $E^{\star}$ para imponerla a E^{*}, y ver que E^{*} resulta un subretículo de $E^{\star}$ después, para finalmente investigar relaciones entre orden y norma.

PROPOSICIÓN. Sea $T \in E^{*}$. Entonces.
$\exists T_1, T_2 \in E^{\star}_{+} \cap E^{*}$ t.q. $T = T_1 + T_2$.

Demostración: Si $x \in E_+$ y $y \in [0,x]$, entonces $\|y\| \leq \|x\|$, puesto que la norma es monótona. Por lo tanto $Ty \in T(B_{\|x\|}(0))$, que es acotado puesto que T es continua. Esto quiere decir que $T[0,x]$ es acotado por arriba, y por (4.2) $T \in E^{\star}$. Podemos entonces considerar la parte positiva T^{+} de T, y observar que si $x \in E_+$ y $\|x\| \leq 1$,

$$\begin{aligned} |T^{+}x| = T^{+}x &= \sup\{Ty \mid y \in [0,x]\} \\ &\leq \sup\{|Ty| \mid y \in [0,x]\} \\ &\leq \|T\|. \end{aligned}$$

Si x es arbitrario de norma menor o igual a 1, entonces $\|x^{+}\| \leq 1$ y $\|x^{-}\| \leq 1$. De aquí concluimos que $\|T^{+}\| \leq 2\|T\|$, y entonces T^{+} es continuo. En forma análoga podemos establecer que T^{-} es continua, y con esto se completa la demostración. $\square$

Como consecuencia inmediata tenemos que $E^{*} \subset E^{\star}$. Nótese que en el caso de los retículos de Banach, la otra contención $E^{\star}$ también es cierta, por (3.3); entonces, en este caso coinciden el dual ordenado y el adjunto.

(4.4) Los resultados anteriores nos permiten dar a E^{*} un orden que lo convierte en EVO. Por otro lado, en la proposición anterior hemos probado que si $T \in E^{*}$, entonces T^{+}, el supremo en $E^{\star}$ de T y 0, es un elemento de E^{*}; como también tenemos que $E^{*} \subset E^{\star}$, podemos concluir que T^{+} es el supremo en E^{*} de T y 0. Con esto, en virtud de (1.5) tenemos que E^{*}, con el orden dual, es un retículo vectorial. Notemos ahora que el orden dual es el puntual; podemos concluir entonces que la norma es monótona, y con esto hemos probado el

TEOREMA: E^{*} es un retículo de Banach, con el orden dual. $\square$

(4.5) En este inciso E denotará un retículo vectorial arbitrario, pero fijo. Consideremos una $x \in E$, y la función

$$\Phi(x) : E^{\star} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto f(x).$$

Observemos primero que si $f \in E^{\star}$,

$$f(x) = f(x^+) - f(x^-) = \Phi(x^+)(f) - \Phi(x^-)(f),$$

lo cual quiere decir que $\Phi(x)$ se descompone en suma de dos funcionales en E^* que claramente son positivas; entonces $\Phi(x) \in E^{**}$, y por tanto la función

$$\begin{aligned} \Phi : E &\longrightarrow E^{**} \\ x &\longmapsto \Phi(x) \end{aligned}$$

está bien definida.

Naturalmente, lo que haremos ahora será investigar las propiedades de orden que satisface Φ. Empezaremos probando un resultado técnico.

LEMA: Sea $u \in E_+$, sea $f \in E^*_+$. Entonces $\exists g \in E^*_+$ tal que
a) $g \leq f$
b) $g(u) = f(u)$
c) $\forall x \in E_+ \quad x \wedge u = 0 \Rightarrow g(x) = 0$.

Demostración: Sea $x \in E_+$. Definimos

$$g(x) := \sup\{ f(y) \mid y \in [0,x] \text{ y } \exists t \in \mathbb{R}_+ \text{ t.q. } y \leq tu \}.$$

Veremos que g es aditiva en E_+. Si $x, y \in E_+$,

$\leq$: sea $z \in [0, x+y]$ tal que $\exists t \in \mathbb{R}_+$ t.q. $z \leq tu$. Por la propiedad de la descomposición, $\exists a \in [0,x]$ $\exists b \in [0,y]$ tales que $z = a+b$. Claramente tenemos que $a \leq tu$ y $b \leq tu$. Entonces $f(z) = f(a) + f(b) \leq g(x) + g(y)$ y por lo tanto $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$.

$\geq$: por otro lado, si $a \in [0,x]$, $b \in [0,y]$ y $\exists\, t,s \in \mathbb{R}_+$ tales que $a \leq tu$ y $b \leq su$, obtenemos que $a+b \in [0,x+y]$ y $a+b \leq tu+su = (t+s)u$. Entonces $f(a)+f(b) = f(a+b) \leq g(x+y)$ y por tanto $g(x)+g(y) \leq g(x+y)$.

Ahora, si $x \in E_+$ y $\alpha \in \mathbb{R}_+$, es claro que $g(\alpha x) = \alpha g(x)$. Entonces g se extiende a una funcional positiva en E, por (2.3) proposición A.

Como f es positiva, si $x \in E_+$ y $y \in [0,x]$, entonces $f(y) \leq f(x)$, y esto implica que $g \leq f$. A partir de esto, es obvio que $g(u) = f(u)$. Para probar c), sea $x \in E_+$ tal que $x \wedge u = 0$, y sea $y \in [0,x]$ tal que $\exists\, t \in \mathbb{R}_+$ con $y \leq tu$. Entonces $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.q. $y \leq nu$, y de aquí que $0 \leq y \leq x \wedge nu \leq n(x \wedge u) = 0$. Entonces $y=0$ y $g(y)=0$. $\square$

PROPOSICIÓN. Φ es homomorfismo de retículos.

Demostración: Por la proposición B de (2.3) basta probar que $\forall x \in E$ $\Phi(x)^+ = \Phi(x^+)$, lo cual significa que

$$\forall x \in E\ \forall f \in E_+^{\star}\ \Phi(x)^+(f) = \Phi(x^+)(f).$$

Sean, pues, $x \in E$ y $f \in E_+^{\star}$. Notemos que

$$\Phi(x)^+(f) = \sup\{\Phi(x)(h) \mid h \in [0,f]\}$$
$$= \sup\{h(x) \mid h \in [0,f]\};$$

por lo tanto es suficiente probar que

$$f(x^+) = \sup\{h(x) \mid h \in [0,f]\}.$$

Empecemos observando que si $h \in [0,f]$,

$$h(x) \leq h(x^+) \leq f(x^+),$$

lo que prueba que $f(x^+) \geq \sup\{h(x) \mid h \in [0,f]\}$.
Para probar la otra desigualdad, apliquemos el lema a f y x^+ y obtengamos una funcional lineal g en E tal que $0 \leq g \leq f$, $g(x^+) = f(x^+)$ y $\forall y \in E_+$ $y \wedge x^+ = 0 \Rightarrow g(y) = 0$.
Como $x^+ \wedge x^- = 0$, entonces $g(x) = g(x^+) - g(x^-) = g(x^+) = f(x^+)$.
Entonces $f(x^+) = \sup\{h(x) \mid h \in [0,f]\}$, y la proposición está probada. □

(4.6) Teorema: Sea E un retículo normado. Entonces la función evaluación

$$\begin{aligned} e : E &\longrightarrow E^{**} \\ x &\longmapsto e(x) : E^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad f \longmapsto f(x) \end{aligned}$$

es homomorfismo de retículo.

Como no hemos desarrollado en este trabajo las técnicas que se usan para probarlo, lo enunciamos aquí sin demostración y remitimos al lector al libro de Schaefer, pág 86.

§5. M-ESPACIOS Y L-ESPACIOS.

(5.1) En esta sección estudiaremos dos casos importantes de retículos de Banach, caracterizándolos en términos de condiciones que satisfagan con respecto a su norma.

Empecemos con los espacios de tipo $\mathcal{C}(K)$. Observemos que comparten con los espacios $\mathcal{L}^\infty$ las propiedades de que si $f \geq 0$ y $g \geq 0$, entonces $\|f \vee g\| = \|f\| \vee \|g\|$ y que la función constante 1 es interior al cono positivo. Veremos que los retículos de Banach que satisfacen estas condiciones son escencialmente (i.e., módulo un isomorfismo de retículos) espacios $\mathcal{C}(K)$.

Por otra parte, consideremos el importante caso de los espacios $\mathcal{L}^1$, y notemos que aquí la norma es aditiva en el cono positivo, es decir que si $f \geq 0$ y $g \geq 0$ entonces $\|f+g\| = \|f\| + \|g\|$. Daremos también en esta sección una caracterización de los espacios cuya norma tiene esta propiedad.

Definiremos ahora de manera precisa los

clases de espacios con los que hemos de trabajar.

DEFINICIÓN. Sea E un retículo normado.

a) E es de tipo $M \Leftrightarrow \forall x, y \in E_+ \quad \|x \vee y\| = \|x\| \vee \|y\|$.

b) E es de tipo $L \Leftrightarrow \forall x, y \in E_+ \quad \|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.

c) E es un M-espacio $\Leftrightarrow$ E es un retículo de Banach de tipo M.

d) E es un L-espacio $\Leftrightarrow$ E es un retículo de Banach de tipo L.

Hay que mencionar también un concepto que no va a ser útil en la teoría de representación que desarrollaremos: la unidad de un retículo normado es el supremo de la bola unitaria, en caso de que exista.

(5.2) Por (4.4) sabemos que el adjunto E^* de un retículo normado E es un retículo de Banach con el orden dual. En el caso de los espacios de tipo M y L podemos establecer una relación de dualidad muy importante entre sus adjuntos:

TEOREMA: Sea E un retículo normado.

a) Si E es de tipo M, entonces E^* es un L-espacio

b) Si E es de tipo L, entonces E^* es un M-espacio con unidad.

Demostración: a) Sean $f, g \in E^*_+$. Por la desigualdad del triángulo, basta probar que $\|f+g\| \geq \|f\| + \|g\|$. Para ver esto, sean $x, y \in E_+$ de norma 1. Entonces $x \vee y$ es positivo y de norma 1, puesto que E es de tipo M. De aquí

obtenemos que $(f+g)(x\vee y) = f(x\vee y) + g(x\vee y) \geq f(x) + g(y)$,
y por tanto $\|f+g\| \geq \|f\| + \|g\|$.

b) Si definimos $u: E_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$, por hipótesis u
es aditiva en E_+; como claramente saca escalares positivos, tenemos por (23) que u se extiende a una funcional lineal positiva en E. Si $x \in E$ y $\|x\| \leq 1$, entonces
$|u(x)| \leq \sup\{u(x^+), u(x^-)\} = \sup\{\|x^+\|, \|x^-\|\} \leq \|x\| \leq 1$.
Por otro lado, si x es positivo y de norma 1, $u(x) = 1$, lo que prueba que u es continua y de norma 1. Ahora, si $f \in E_+^*$ es de norma menor o igual a 1, sea $x \in E_+$. Entonces

$|f(x)| \leq \|f\| \, \|x\| \leq \|x\| = u(x)$, y con esto hemos probado que u es unidad.

Finalmente, consideremos $f, g \in E_+^*$. Si $x \in E_+$,

$$(\|f\| \vee \|g\|)\, u(x) = [\|f\| \vee \|g\|]\, \|x\| \geq \|f\| \, \|x\| \geq |f(x)|.$$

Entonces $(\|f\| \vee \|g\|)u \geq f$. Tenemos una desigualdad análoga para g, y de aquí deducimos que

$$(\|f\| \vee \|g\|)u \geq f \vee g.$$ Entonces

$$\|f\vee g\| \leq \|(\|f\| \vee \|g\|)\, u\| = (\|f\| \vee \|g\|)\|u\| = \|f\| \vee \|g\|.$$

Para probar la otra desigualdad, recordemos que como $f\vee g \geq f$ y $f \vee g \geq g$ y la norma es monótona en E^* (4.4), tenemos que $\|f\vee g\| \geq \|f\|$ y $\|f\vee g\| \geq \|g\|$, de donde obtenemos el resultado deseado. $\square$

(5.3) Nuestro objetivo en este inciso es probar el siguiente:

TEOREMA: Sea E un M-espacio con unidad u. Entonces existe un espacio compacto Hausdorff K tal que E es isomorfo como retículo e isométrico a $\mathcal{C}(K)$.

Este es un teorema de Shizuo Kakutani, que hasta donde sabemos apareció por primera vez con el título "Concrete representation of abstract (M)-Spaces" in Ann. of Math., vol 42 no. 4, oct. 1941. La prueba que presentamos aquí sigue la línea de §4 de [K-N], y naturalmente ha sido objeto de revisiones y modificaciones por parte de muchos autores. La demostración está dada en varias etapas, para facilitar su comprensión.

Empezaremos trabajando con un espacio de tipo M (no necesariamente un M-espacio) con unidad u, al que denotaremos, en un alarde de originalidad, por E.

a) Definición del espacio estructura K.

Nuestro candidato es el siguiente conjunto:

$$K := \{ f \in E^* \mid f \text{ es HR y } \|f\| = 1 \};$$

probaremos que K es compacto y Hausdorff en la topología débil*- de E^*. Para empezar, probaremos que

a.1) $E^* \setminus HR := \{ f \in E^* \mid f \text{ no es HR} \}$ es débil*- abierto.

Sea $h \in E^* \setminus HR$. Entonces $\exists\, x_0 \in E$ t.q. $h(x_0)^+ \neq h(x_0^+)$.

Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & E \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R} \end{array} \qquad \varphi(x) := x^+ \ , \ \psi(x) = x^+$$

que por hipótesis no es conmutativo en x_0, es decir $\psi\circ h(x_0) \neq h\circ\varphi(x_0)$. Entonces $\exists A \in \mathcal{N}_{\psi\circ h(x_0)}$ $\exists B \in \mathcal{N}_{h\circ\varphi(x_0)}$ t.q. $A \cap B = \phi$. Sea $A' := \psi^{-1}(A)$, que es abierto por (3.2), y consideremos la vecindad débil* de h $\mathcal{U} := e(x)^{-1}(A') \cap e(x^+)^{-1}(B)$ (e = función evaluación de E en E^{**}). Si $f \in \mathcal{U}$, entonces $f(x)^+ \in A$ y $f(x^+) \in B$, que son ajenos, y por lo tanto $f(x)^+ \neq f(x^+)$, lo que prueba que f no es HR.

Como consecuencia inmediata de a.1) tenemos que

a.2) $HR := \{f \in E^* \mid f \text{ es } HR\}$ es débil* - cerrado.

Como los homomorfismo de retículo son positivos, entonces

a.3) $K := \{f \in HR \mid \|f\| = 1\} = \{f \in HR \mid f(u) = 1\}$,

y por lo tanto

a.4) K es débil* - cerrado.

Por otro lado, el teorema de Banach-Alaoglu nos asegura

a.5) $H := \{f \in E^* \mid \|f\| \leq 1\}$ es débil* - compacto.

Finalmente, como $K \subset H$, obtenemos que

a.6) K es débil* - compacto y Hausdorff.

En adelante llamaremos a K el espacio estructura de E, y lo consideraremos con la topología débil*.

b) Definición del isomorfismo.

Daremos ahora una función entre E y $\mathcal{C}(K)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : E &\longrightarrow \mathcal{C}(K) \\ x &\longmapsto \mathcal{R}(x) : K \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \qquad\qquad h \mapsto h(x). \end{aligned}$$

Nótese que $\mathcal{R}$ es una función de tipo evaluación, muy abundantes últimamente; esto mismo nos sirve para darnos cuenta de que $\mathcal{R}(x) = e(x)|_K$, y como la topología débil* en E^* es precisamente la mínima que hace continuas a las evaluaciones $e(x) : E^* \to \mathbb{R}$, obtenemos que $\mathcal{R}$ es función bien definida, es decir $\mathcal{R}(x) \in \mathcal{C}(K)$.

Las siguientes afirmaciones son obvias:

b.1) $\mathcal{R}$ es lineal.

b.2) $\mathcal{R}$ es homomorfismo de retículos.

Nos queda por probar que $\mathcal{R}$ es isometría. Sea pues $x \in E_+$; probaremos que $\|x\| = \|\mathcal{R}(x)\|$. Esto bastará para probar nuestro objetivo, ya que $\|x'\| = \| |x'| \| = \| \mathcal{R}|x'| \| = \| |\mathcal{R}x'| \| = \|\mathcal{R}(x')\|$, puesto que si x' es arbitrario esas igualdades se dan por (3.1) y por b.2).

b.3) $\|\mathcal{R}(x)\| \le \|x\|$.

Esto resulta de que $\|\mathcal{R}(x)\| = \sup\{|\mathcal{R}(x)(h)| \mid h \in K\} = \sup\{|h(x)| \mid h \in K\} \le \|x\|$, porque si $h \in K$ entonces $\|h\| = 1$.

Definimos ahora los conjuntos

$A := \{ g \in E^*_+ \mid \|g\| \leq 1 \}$ y $B := \{ g \in A \mid g(x) = \|x\| \}$.

Observemos que A es débil*- cerrado $\left(A = \bigcap_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \geq 0}} e(x)^{-1}[-1,1]\right)$

y está contenido en el conjunto

$$H = \{ f \in E^* \mid \|f\| \leq 1 \},$$

que es débil*- compacto por el teorema de Banach-Alaoglu.

Entonces,

b.4) A es débil*- compacto.

El siguiente lema nos será útil para probar que $\|\Re(x)\| \geq \|x\|$:

b.5) Lema: Sea $f \in B$ tal que $\exists\, g_1, g_2 \in A$ tales que

i) $f = \frac{1}{2} g_1 + \frac{1}{2} g_2$

ii) $\forall t \in [0,1]$ $t g_1 + (1-t) g_2 \in A$

Entonces $\forall t \in [0,1]$ $t g_1 + (1-t) g_2 \in B$.

Demostración: Sin pérdida de generalidad, considerando $\frac{x}{\|x\|}$, podemos suponer que $\|x\| = 1$.

Supongamos que $g_1(x) \neq \|x\|$. Como $g \geq 0$, $x \geq 0$ y $\|g\| \leq 1$, entonces $g_1(x) < 1$. Como $g_2 = 2f - g_1$, también tenemos que $g_2(x) = 2f(x) - g_1(x) = 2 - g_1(x) > 1$, lo que contradice que g_2 sea un elemento de A.

Del mismo modo $g_2(x) = 1$ y de ahí se sigue el lema.

Del lema concluimos que

b.6) Los punto extremo de B son puntos extremo de A.

Por otra parte, el teorema de Hahn-Banach nos asegura la existencia de una funcional continua f en E tal que $f(x) = \|x\|$ y $\forall y \in E$ $|f(y)| \leq \|y\|$.
Como $\|f^+\| \leq \|f\| \leq 1$ y $\|f^-\| \leq \|f\| \leq 1$, entonces
$f^+(x) \leq \|x\|$ y $f^-(x) \leq \|x\|$. Pero también
$\|x\| = f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, de lo cual concluimos que
$f^+(x) = \|x\|$ y también que $f^+ \in B$, es decir

b.7) $B \neq \emptyset$.

Podemos ahora aplicar el teorema de Krein-Millman [K-N, p.131] para obtener un elemento h en A tal que $h(x) = \|x\|$, y por tanto $\|h\| = 1$. Aplicando ahora el lema 24.1 de [K-N] obtenemos que h es HR, lo cual prueba que

b.8) $\|\mathfrak{R}(x)\| \geq \|x\|$.

Con ésto tenemos que $\mathfrak{R}$ es isometría, y completamos la parte b).

c) Si E es M-espacio, entonces $\mathfrak{R}(E) = \mathcal{C}(K)$.

Todo lo que necesitamos probar es que $\overline{\mathfrak{R}(E)} = \mathcal{C}(K)$.

Haremos uso del siguiente resultado, que aparece como (7.43) de [H-S]:

c.1) Sea $h \in \mathcal{C}(K)$ y supongamos que $\forall \varepsilon > 0$ $\forall a, b \in K$ $\exists f \in \mathfrak{R}(E)$ tal que $|f(a) - h(a)| < \varepsilon$ y $|f(b) - h(b)| < \varepsilon$. Entonces $h \in \overline{\mathfrak{R}(E)}$.

Para poder aplicar lo anterior, probaremos ahora que

c.2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall g, h \in K\ \exists x \in E$ t.q. $\mathfrak{A}(x)(g) = \alpha$ y $\mathfrak{A}(x)(h) = \beta$.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sean $g \neq h \in K$. Entonces $\exists x \in E$ t.q.
$\mathfrak{A}(x)(g) = g(x) \neq h(x) = \mathfrak{A}(x)(h)$.

Definimos

$$\begin{aligned} \varphi : K &\longrightarrow \mathbb{R} \\ k &\longmapsto \alpha + (\beta - \alpha)\,\frac{\mathfrak{A}(x)(k) - \mathfrak{A}(x)(g)}{\mathfrak{A}(x)(h) - \mathfrak{A}(x)(g)} \end{aligned}$$

Observemos que $\varphi(g) = \alpha$ y $\varphi(h) = \beta$ y que φ está en $\mathfrak{A}(E)$, puesto que $\mathfrak{A}(E)$ es subespacio vectorial y $\mathfrak{A}(u) \equiv 1$. (u = la unidad de E).

De c.2) obtenemos c.1), y de c.1) que $\overline{\mathfrak{A}(E)} = \mathcal{C}(K)$.

Volveremos ahora a enunciar ahora el teorema que mencionamos al principio de (5.3), añadiendo los detalles más importantes de la prueba que dimos.

TEOREMA: Sea E un M-espacio con unidad u. Entonces

a) $K := \{ f \in E^* \mid f$ es HR y $\|f\| = 1 \}$ es un conjunto débil*-compacto.

b) $$\begin{aligned} \mathfrak{A} : E &\longrightarrow \mathcal{C}(K) \\ x &\longmapsto \mathfrak{A}(x) : K \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \qquad\qquad h \longmapsto h(x) \end{aligned}$$ es homomorfismo de retículos e isometría.

c) $\mathfrak{A}(E) = \mathcal{C}(K)$. $\square$

(5.4) Consideremos ahora un espacio compacto y Hausdorff X. Denotaremos por $\mathcal{L}$ al subconjunto de los borelianos en X, es decir el σ-anillo generado por los subconjuntos compactos de X.

Una medida de Borel regular con signo en X m es una medida finita con signo definida en $\mathcal{L}$ y que cumple la condición de regularidad

$$\forall B \in \mathcal{L} \quad m(B) = \sup\{m(K) \mid K \text{ es compacto y } K \subset B\}$$

Si m es una de estas medidas, definimos la variación total de m como

$$\|m\| := \sup\{|m(A) - m(B)| \mid A, B \in \mathcal{L},\ A \cap B = \emptyset\}.$$

Si denotamos por $\mathcal{M}$ al conjunto de todas estas medidas, $\mathcal{M}$ puede verse como espacio normado con la suma usual de medidas y con norma igual a variación total.

Podemos dar también a $\mathcal{M}$ estructura de EVO, con el orden puntual

$$m_1 \le m_2 \iff \forall B \in \mathcal{L} \quad m_1(B) \le m_2(B).$$

El teorema de representación de Riesz dice que

$$\begin{aligned} H : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{C}(X)^* \\ m &\longmapsto H(m) : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad f \longmapsto \int f\,dm \end{aligned}$$

es una isometría que preserva el orden. No daremos aquí la prueba; el lector puede consultar [H], [B] o [K-N].

(5.5) Iniciamos ahora la tarea de representar de manera concreta a los L-espacios. La letra E representará en todo el inciso un retículo normado de tipo L. Fijaremos también las siguientes notaciones:

$e: E \longrightarrow E^{**}$, la función evaluación, que es homomorfismo de retículos e isometría por (4.6)

$K := \{ f \in E^{**} \mid f \text{ es } \text{HR} \text{ y } \|f\| = 1 \}$, el espacio estructura de E^*, con la topología débil*. (5.3) a)

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : E^* &\longrightarrow \mathcal{C}(K) \quad \text{isomorfismo de retículos isométrico} \\ f &\longmapsto \mathcal{R}(f) : K \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (5.3) \\ &\qquad\qquad \varphi \longmapsto \varphi(f) \end{aligned}$$

$N : E^{**} \longrightarrow \mathcal{C}(K)^*$ es entonces también un

$$\begin{array}{c} E^* \\ \downarrow F \\ \mathbb{R} \end{array} \longmapsto N(F) = F \circ \mathcal{R}^{-1} : \mathcal{C}(K) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(K) \arrow[rr] \arrow[dr, "\mathcal{R}^{-1}"'] & & \mathbb{R} \\ & E^* \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

isomorfismo de retículos isométrico.

$H : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{C}(K)^*$ es isometría que preserva

$$\begin{aligned} m &\longmapsto H(m) : \mathcal{C}(K) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad f \longmapsto \int f \, dm \end{aligned}$$

el orden. Aquí $\mathcal{M}$ representa a las medidas de borel regulares con signo en K. (5.4)

$H^{-1} : \mathcal{C}(K)^* \longrightarrow \mathcal{M}$ es una isometría que preserva el orden.

$\mathcal{L}$ = borelianos en K.

Tenemos entonces que la composición

$$\Omega = E \xrightarrow{e} E^{**} \xrightarrow{n} \mathcal{B}(K)^{*} \xrightarrow{H^{-1}} \mathfrak{M}$$

es una isometría que preserva el orden, y por lo tanto un isomorfismo de retículos isométrico entre E y un retículo $\Omega(E) \subset \mathfrak{M}$. El resto de nuestro trabajo consistirá en identificar plenamente a $\Omega(E)$. Una última convención en notación será hacer

$$m_x := \Omega(x), \quad \text{si } x \in E.$$

A partir de ahora supondremos que E es L-espacio. El teorema a probar es el siguiente:

TEOREMA: $\Omega(E)$ es igual al conjunto

$$\{m \in \mathfrak{M} \mid \forall B \in \mathcal{L} \text{ si } B \text{ es de la } 1^{a} \text{ categoría entonces } m(B)=0\}$$

Este teorema se debe también a S. Kakutani, y aparece en "Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem", Am. of Math., Vol. 42 no. 2, April 1941. Seguimos aquí la línea presentada en §24 de [K-N], y como en el caso anterior, la prueba está dividida en una serie de lemas.

Lema A. Sea $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha \in D}$ una red en E^*_+ monótonamente creciente y acotada superiormente por $g \in E^*$. Entonces existe el supremo de $\mathcal{F}$ en E^* y la red débil*- converge a su supremo.

Demostración: Consideremos un $x \in E_+$; la red $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha \in D}$ es monótonamente creciente en $\mathbb{R}$ y acotada por $g(x)$; entonces, existe $f(x) = \sup_D f_\alpha(x)$. Esto nos define una funcional lineal positiva f que satisface $0 \leq f \leq g$. Como $g \in E^*$, obtenemos que $f \in E^*$ también ($\|f\| \leq \|g\| < \infty$). Además es claro que $\mathcal{F}$ débil*- converge a f y que f es el supremo en E^* de $\mathcal{F}$. □

LEMA B. Sea $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ una red en E monótonamente creciente acotada superiormente por $z \in E$. Entonces existe el supremo de la red en E y ésta converge en norma a su supremo.

Demostración: Primero probaremos que la red es de Cauchy. Sea $\alpha \in D$. El conjunto $\{\|x_\beta - x_\alpha\| \mid \beta \geq \alpha\}$ es un conjunto acotado superiormente por $\|x_\alpha - z\|$ y creciente, por lo tanto converge a un punto $p \in \mathbb{R}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces $\exists \alpha' \geq \alpha$ $\forall \beta \geq \alpha'$ $|p - \|x_\beta - x_{\alpha'}\|| < \varepsilon/4$.
Entonces $\forall \gamma, \beta \geq \alpha'$ $|\|x_\beta - x_{\alpha'}\| - \|x_\gamma - x_{\alpha'}\|| < \varepsilon/2$.

Sean $\beta, \gamma \in D$ mayores o iguales a α'. Como D es dirigido, $\exists \lambda \in D$ t.q. $\lambda \geq \beta$ y $\lambda \geq \gamma$. Como la norma es aditiva en E_+, $\|x_\beta - x_\gamma\| \leq \|x_\lambda - x_\beta\| + \|x_\lambda - x_\gamma\|$

$$= \|x_\lambda - x_{\alpha'}\| - \|x_\beta - x_{\alpha'}\| + \|x_\lambda - x_{\alpha'}\| - \|x_\gamma - x_{\alpha'}\|$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Esto prueba que la red es de Cauchy, y por lo tanto convergente en norma a un punto $x \in E$.

Probaremos ahora que x es cota superior de $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$. Supongamos que $\exists \alpha_0 \in D$ t.q. $x \not\geq x_{\alpha_0}$. Entonces $x \notin \{y \in E \mid y \geq x_{\alpha_0}\}$, que es cerrado por (3.2). Entonces $\exists \varepsilon > 0$ $B_\varepsilon(x) \cap \{y \in E \mid y \geq x_{\alpha_0}\} = \emptyset$. Pero la red converge en norma a x; entonces $\exists \beta \in D$ $\forall \gamma \geq \beta$ $\|x - x_\gamma\| < \varepsilon$, contradicción.

Entonces x es cota superior de la red. Si x' es cualquier cota superior de la red, entonces también lo es $x \wedge x'$, y entonces $\|x \wedge x' - x_\alpha\| \leq \|x - x_\alpha\|$, porque la norma es monótona; de aquí concluimos que $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ converge en norma a $x \wedge x'$, y entonces $x \wedge x' = x$, o equivalentemente, $x \leq x'$. $\square$

Con esto lemas hemos probado que tanto E como E^* son espacio orden completo, de acuerdo a la definición (1.9).

LEMA C. Sea $\mathcal{U} \subset K$ abierto. Entonces $\bar{\mathcal{U}}$ es abierto.
Demostración: Sea $\mathcal{B} := \{ f : K \to [0,1] \mid f$ es continua y $f|_{K \setminus \bar{\mathcal{U}}} \equiv 0 \}$. $\mathcal{B} \neq \emptyset$ $(0 \in \mathcal{B})$ y está acotado superiormente (en $\mathcal{C}(K)$) por 1. Por el lema A $\exists\, f_0 = \sup \mathcal{B} \in \mathcal{C}(K)$. Por el lema de Urysohn $\forall x \in \mathcal{U}$ $f_0(x) = 1$, i.e., $f_0|_{\mathcal{U}} \equiv 1$. Por lo tanto $f|_{\bar{\mathcal{U}}} \equiv 1$. Por otro lado, si $s \notin \mathcal{U}$, también por el lema de Urysohn $\exists\, g : K \to [0,1]$ continua t.q. $g(s) = 0$ y $g|_{\bar{\mathcal{U}}} \equiv 1$. g es cota superior de $\mathcal{B}$, y por lo tanto $f_0(s) = 0$. Entonces $f_0|_{K \setminus \bar{\mathcal{U}}} \equiv 0$. Esto quiere decir que $f_0 = \chi_{\bar{\mathcal{U}}}$, y de ahí se obtiene el resultado. $\square$

LEMA D. Si $x \in E$, $m_x := \Omega(x)$ se anula en los borelianos de K de la primera categoría.
Demostración: Si B es un boreliano en K de la primera categoría, B es unión de un número numerable de borelianos densos en ninguna parte, y entonces basta probar el lema para los borelianos densos en ninguna parte. Sea S uno de ellos. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que m_x es positiva (Teo. de descomposición de Hahn). Definimos el conjunto

$$\mathcal{B} := \{ f : K \to [0,1] \mid f \text{ es continua y } f|_S \equiv 0 \}.$$

Podemos considerar a $\mathcal{B}$ como red, dirigida por la relación $f \leq g \iff \forall x \in K \; f(x) \leq g(x)$. Entonces por el lema A

$\exists\, f_0 := \sup \mathcal{B} \in \mathcal{C}(K)$. Si $x \notin \bar{S}$, por el lema de Urysohn $f_0(x) = 1$. Entonces $f_0|_{K\setminus\bar{S}} \equiv 1$ y por lo tanto $f_0|_{\overline{K\setminus\bar{S}}} \equiv 1$. Pero $\bar{S}$ es de interior vacío, entonces $\overline{K\setminus\bar{S}} = K$, y por consiguiente $f \equiv 1$. Como $\mathcal{R}^{-1}$ es un isomorfismo de retículos y una isometría, el conjunto $\{\mathcal{R}^{-1}(f) \mid f \in \mathcal{B}\}$ es una red contenida en E^* monótonamente creciente, acotada y con supremo $\mathcal{R}^{-1}(1)$. Por el lema A tenemos $\mathcal{R}^{-1}(f)(x) \xrightarrow[w^*]{} \mathcal{R}^{-1}(1)(x)$. Entonces $\int f\,dm_x = H(m_x)(f) = H \circ \Omega(x)(f) = H \circ H^{-1} \circ \mathcal{U} \circ e(x)(f) = \mathcal{U}(e(x)(f)) = e(x) \circ \mathcal{R}^{-1}(f) = \mathcal{R}^{-1}(f)(x) \xrightarrow[w^*]{} \mathcal{R}^{-1}(1)(x) = \int f\,dm_x$, y escrito más brevemente, $\int f\,dm_x \xrightarrow[w^*]{} \int 1\,dm_x$.

Tomemos ahora un $\varepsilon > 0$. De lo anterior, existe una $f \in \mathcal{B}$ tal que $0 \leq \int (1-f)\,dm_x < \varepsilon$.
Como $(1-f)|_S \equiv 1$, entonces $\chi_S \leq 1-f$ y de aquí

$$m_x(S) = \int \chi_S\,dm_x \leq \int (1-f)\,dm_x < \varepsilon.$$

Por lo tanto $\quad m_x(S) = 0$. $\square$

Con este lema hemos probado la mitad de nuestro teorema, a saber, que $\Omega(E)$ está contenido en el conjunto de las medidas en $\mathcal{M}$ que se anulan en los borelianos de la primera categoría. Pasamos ahora a probar la otra contención.

LEMA E. Sea $A' \in \mathcal{L}$. Entonces $\exists\, A'' \subset K$ abierto y cerrado tal que $A' \Delta A''$ es de la primera categoría.

Demostración: Definimos $\mathcal{A}$ como el conjunto

$$\{A \subset K \mid \exists\, U \subset K \text{ abierto t.q. } A \Delta U \text{ es de la } 1^a \text{ categoría}\}.$$

Probaremos que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra que contiene a los compactos, y eso será suficiente.

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$. Entonces $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, U_n$ abierto tal que $(A_n \setminus U_n) \cup (U_n \setminus A_n)$ es de la primera categoría. Sea $U := \bigcup_{\mathbb{N}} U_n$, sea $A := \bigcup_{\mathbb{N}} A_n$. Entonces

$$\begin{aligned} A \Delta U &= \Big(\bigcup_{\mathbb{N}} A_n \setminus \bigcup_{\mathbb{N}} U_n\Big) \cup \Big(\bigcup_{\mathbb{N}} U_n \setminus \bigcup_{\mathbb{N}} A_n\Big) \\ &\subset \Big[\bigcup_{\mathbb{N}} (A_n \setminus U_n)\Big] \cup \Big[\bigcup_{\mathbb{N}} (U_n \setminus A_n)\Big] \\ &= \bigcup_{\mathbb{N}} \big[(A_n \setminus U_n) \cup (U_n \setminus A_n)\big] \end{aligned}$$

que es de la primera categoría.

Sea $B \in \mathcal{A}$. Entonces $\exists\, V \subset K$ abierto t.q. $(B \setminus V) \cup (V \setminus B)$ es de la primera categoría. Sea $W := K \setminus \bar{V}$. Entonces

$$[(K\setminus B)\setminus W] \cup [W \setminus (K \setminus B)] = [(K\setminus B)\setminus(K\setminus\bar{V})] \cup [(K\setminus\bar{V})\setminus(K\setminus B)]$$

$$= [\bar{V}\setminus B] \cup [B \setminus \bar{V}] = (V \setminus B) \cup (\partial V \setminus B) \cup (B \setminus \bar{V}),$$ que es de la primera categoría porque ∂V es un cerrado de interior vacío, y esto prueba que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra.

Sea M un abierto en K. Por el lema C $\bar{M}$ es abierto y cerrado. Entonces $M \Delta \bar{M} = \partial M$, que es de la 1^a categoría. Como $\mathcal{A}$ es cerrado bajo complementación, entonces $\mathcal{A}$ contiene a los compactos. $\square$

LEMA F: Sean $x \in E_+$, $p := m_x$ y $A \in \mathcal{B}$. Definimos $p|_A(B) := p(A \cap B)$ para todo $B \in \mathcal{B}$. Entonces $p|_A \in \Omega(E)$.

Demostración: Por el lema E $\exists A' \subset K$ abierto y cerrado tal que $A \Delta A'$ es de la primera categoría, y aplicando el lema D obtenemos que $p|_A = p|_{A'}$. Podemos suponer entonces, sin pérdida de generalidad, que A es abierto y cerrado. Entonces las funciones χ_A y $\chi_{K \setminus A} : K \to \mathbb{R}$ están en $\mathcal{C}(K)$. Como $\mathfrak{R}^{-1}$ es HR, $\mathfrak{R}^{-1}(\chi_A) \wedge \mathfrak{R}(\chi_{K\setminus A}) = \mathfrak{R}^{-1}(\chi_A \wedge \chi_{K\setminus A}) = 0$, y por lo tanto $0 = [\mathfrak{R}^{-1}(\chi_A) \wedge \mathfrak{R}^{-1}(\chi_{K\setminus A})](x) = \inf\{\mathfrak{R}^{-1}(\chi_A)(x-y) + \mathfrak{R}^{-1}(\chi_{K\setminus A})(y) \mid 0 \leq y \leq x, y \in E\}$.

Entonces $\forall \varepsilon > 0 \ \exists y \in [0,x]$ t.q. $\mathfrak{R}^{-1}(\chi_A)(x-y) + \mathfrak{R}^{-1}(\chi_{K\setminus A})(y) < \varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$, sea $y \in [0,x]$ que cumpla lo de arriba. Como $x - y \in E_+$,
$0 \leq m_x(A) - m_y(A) = m_{x-y}(A) = \int \chi_A \, dm_{x-y} = H \circ \Omega(x-y)(\chi_A) = H \circ H^{-1} \circ N \circ e(x-y)(\chi_A) = N \circ e(x-y)(\chi_A) = e(x-y) \circ \mathfrak{R}^{-1}(\chi_A) = \mathfrak{R}^{-1}(\chi_A)(x-y) < \varepsilon$.

Análogamente $0 \leq m_y(K \setminus A) < \varepsilon$. Entonces

$$\|m_y - p|_A\| = \|m_y|_A - p|_A + m_y|_{K\setminus A}\| \leq m_{x-y}(A) + m_y(K\setminus A) < 2\varepsilon.$$

Como $\Omega(E)$ es cerrado, $p|_A \in \Omega(E)$. $\square$

LEMA G: Sea $n \in \mathcal{M}_+ \setminus \{0\}$ tal que se anula en los borelianos de la primera categoría. Entonces

$$\exists x \in E_+ \setminus \{0\} \text{ t.q. } m_x \leq n.$$

Demostración: Sea $U := \bigcup \{V \subset K \mid V \text{ es abierto y } n(V) = 0\}$.
Entonces n se anula en todos los compactos contenidos en U, y por la regularidad de n, $n(U) = 0$.

Definimos $A := K \setminus \bar{u}$; este conjunto tiene las siguientes propiedades:

i) A es abierto y cerrado ($\bar{u}$ es abierto y cerrado por lema C)

ii) $n(K\setminus A) = n(\bar{u}) = n(u) + n(\partial u) = 0$

iii) Si $B \subset A$ es abierto no vacío, entonces $n(B) > 0$.

Tomemos ahora un boreliano $B \subset A$; si B es de la primera categoría, es obvio que $n(B) = 0$. Ahora, si $n(B) = 0$, por el lema E existe un abierto y cerrado B' tal que $(B\setminus B') \cup (B'\setminus B)$ es de la primera categoría, y por lo tanto $n(B') = n(B\cap B') + n(B'\setminus B) = 0$. De las condiciones i) y iii) resulta que $B' \cap A = \phi$, y por lo tanto $B = B\setminus B'$ que es de la primera categoría. Resumiendo:

iv) $\forall B \in \mathcal{L}$ si $B \subset A$ entonces B es de la 1ª categoría $\Leftrightarrow n(B) = 0$.

Como $n(K\setminus A) = 0$, de aquí concluimos que

v) $\forall B \in \mathcal{L}$ B es de la 1ª categoría $\Leftrightarrow n(B\cap A) = 0$.

Consideremos ahora la función $f := \chi_A$, continua por i).
Como $n \neq 0$, entonces $A \neq \phi$ y por lo tanto $\chi_A \neq 0$. Entonces $\exists x \in E_+$ tal que $\mathcal{R}^{-1}(f)(x) \neq 0$, pero observemos que
$\mathcal{R}^{-1}(f)(x) = \ell(x) \circ \mathcal{R}^{-1}(f) = H \circ \ell(x)(f) = H \circ H^{-1} \circ H \circ \ell(x)(f) =$
$H \circ \Omega(x)(f) = H(m_x)(f) = \int f\, dm_x = m_x(A)$.

Sea $p := m_x$. Por el lema F, $p|_A \in \Omega(E)$, y claramente $p|_A \neq 0$. Tomemos ahora un $B \in \mathcal{L}$ arbitrario.
Definimos $B_1 := B\cap A$ y $B_2 := B \cap K\setminus A$. Es claro que $p|_A(B_2) = 0$.

Como $n(B)=0$ y $n\geq 0$, entonces $n(B_1)=0$, y por v), B_1 es de la primera categoría. Entonces por el lema L $p|_A(B_1)=0$ y por lo tanto $p|_A(B)=p|_A(B_1)+p|_A(B_2)=0$. Esto demuestra que $p|_A$ es absolutamente continua con respecto a n. Por el teorema de Radon-Nikodym $\exists\, g: K\to \mathbb{R}_+$ $\mathcal{B}$-medible tal que $\forall B\in\mathcal{B}$ $p|_A(B)=\int_B g\,dn$.

$\forall k\in\mathbb{N}$ definimos $C_k:=\{x\in A \mid g(x)\leq k\}$. Entonces $A=\bigcup_{\mathbb{N}} C_k$, y como $p|_A(A)=p(A)\neq 0$, $\exists\, s\in\mathbb{N}$ tal que $p|_A(C_s)\neq 0$. Entonces $p|_{A\cap C_s}\in\Omega(E)$, $p|_{A\cap C_s}\neq 0$ y $p|_{A\cap C_s}\leq s\,n$, ya que si $B\in\mathcal{B}$,

$$p|_{A\cap C_s}(B)=p|_A(B\cap C_s)=\int_{B\cap C_s} g\,dn\leq\int_{B\cap C_s} s\,dn=s\,n(B\cap C_s)\leq s\,n(B).$$

Definiendo $q:=\frac{1}{s}p|_{A\cap C_s}$, completamos la prueba. $\square$

Finalmente, sea $n\in\mathcal{M}$ que se anula en los borelianos de la primera categoría. Sin pérdida de generalidad $n\geq 0$.

Definimos el conjunto $\mathcal{B}$ como

$$\{e(x)\in E^{**} \mid 0\leq e(x)\leq N^{-1}\circ H(n)\}.$$

Como E^{**} es un L-espacio (teorema (5.2)), por el lema B $\exists\, \varphi:=\sup\mathcal{B}\in E^*$, y $\mathcal{B}$ converge en norma a φ.

Como $e(E)$ es cerrado en E^{**}, $\exists\, z \in E_+$ t.q. $e(z) = \varphi$. Es claro que $e(z) \leq N^{-1} \circ H(n)$, y como N y H preservan el orden, $m_z = H^{-1} \circ N \circ e(z) \leq H^{-1} \circ N \circ N^{-1} \circ H(n) = n$.

Supongamos que $m_z < n$. Entonces $n - m_z$ es una medida elemento de $\mathcal{M}$ que se anula en los borelianos de la primera categoría. Por el lema G $\exists\, x \in E_+ \setminus \{0\}$ tal que $m_x \leq n - m_z$. Entonces $e(z) < e(x) + e(z) \leq N^{-1} \circ H(n)$. Hemos llegado a una contradicción y al fin de nuestro teorema.

§6. Homomorfismos de Retículos en $\mathcal{C}(K)$.

El objeto de la presente sección es dar una caracterización de los homomorfismo de retículo $T: \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(L)$, para dos espacios compactos Hausdorff K y L que permanecerán fijos hasta antes de §7. La caracterización será en términos de funciones $\varphi: L \to K$ continuas en cierto subconjunto de L y que cumplan $T = T_{\varphi g}$ el "adjunto" de φ multiplicado por una cierta función g. El teorema se debe a Manfred Wolff, y aparece en su artículo "Über das Spektrum von Verbandshomomorphismen in $\mathcal{C}(X)$", Math. Ann, 182, 161-169 (1969).

(6.1) En la sección 2 caracterizamos a los ideales maximales de $\mathcal{C}(K)$ como los conjuntos $\mathcal{M}_p$, para $p \in K$. Trataremos ahora de dar una descripción semejante de los ideales cerrados en $\mathcal{C}(K)$.

Primero notamos que si $M \subset K$ es cerrado, el conjunto $\mathcal{M}_M$ es un ideal cerrado en $\mathcal{C}(K)$. Probaremos que el recíproco también es cierto. Empezaremos por fijar un ideal cerrado I. Definimos como sospechoso al conjunto $M := \bigcap_{f \in I} Z(f)$, donde $Z(f) = f^{-1}(0)$, y trataremos de juntar pruebas suficientes en su contra. Para empezar, es evidente que M es cerrado, y que $I \subset \mathcal{M}_M$. Para probar la otra contención, tomemos $f \in \mathcal{M}_M$ y $\varepsilon > 0$. Como I es ideal, basta probar que $|f| \in I$; supongamos entonces, sin pérdida de generalidad que $f \geq 0$. Probaremos que $\exists h \in I$ tal que $\|h - f\| < \varepsilon$, lo que bastará para ver que $f \in I$. El conjunto $S := f^{-1}[\varepsilon, \infty)$ es cerrado en un compacto y por tanto compacto. Como $M \cap S = \emptyset$, por el lema de Urysohn $\forall s \in S\ \exists g_s \in I\ \exists U_s \in \mathcal{U}_s$ t.q. $g|_{U_s} > 0$. Por compacidad $\exists s_1, \ldots s_n \in S$ t.q. $S \subset \bigcup_1^n U_{s_i}$. La función $g := \sum_1^n |g_{s_i}|$ está en I y es estrictamente positiva en S. Sea $\alpha := \sup_K f(x)$, y sea $\beta := \inf_S g(x)$. Como S es compacto, entonces $\beta > 0$ y por lo tanto existe $\gamma > 0$ tal que $\gamma\beta \geq \alpha$. Definimos $h := \gamma g \wedge f$, y como $\gamma g|_S \geq \gamma\beta \geq \alpha \geq f|_S$, tenemos que $h|_S = f|_S$. Por otra parte, si $x \notin S$, $0 \leq h(x) \leq f(x) \leq \varepsilon$, y esto prueba que $\|h - f\| < \varepsilon$, y completa la prueba de

PROPOSICIÓN. Los ideales cerrados en $\mathcal{C}(K)$ son los de la forma $\mathcal{M}_M$, para $M \subset K$ cerrado. □

(6.2) Utilizaremos ahora la información que tenemos acerca de los ideales maximales en $\mathcal{C}(K)$ para dar una caracterización que sólo dependa de K de los homomorfismos de retículo no cero de $\mathcal{C}(K)$ en $\mathbb{R}$.

PROPOSICIÓN. Sea $T: \mathcal{C}(K) \to \mathbb{R}$ un HR distinto de cero. Entonces $\exists!\, t \in K\ \exists!\, \alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $T = \delta_t : \mathcal{C}(K) \to \mathbb{R}$
$$f \longmapsto \alpha f(t).$$

Nótese que las δ_t son las medidas de Dirac concentradas en los diferentes puntos de K. De aquí obtenemos que los homomorfismo de retículo de norma 1 son precisamente las medidas de Dirac.

Demostración: Sabemos por (2.10) que $\ker T$ es un ideal maximal en $\mathcal{C}(K)$, y entonces $\exists\, t \in K$ t.q. $\ker T = \mathcal{M}_t$. Observemos que $Tf = Tg \Leftrightarrow T(f-g) = 0 \Leftrightarrow (f-g) \in \ker T \Leftrightarrow (f-g)(t) = 0 \Leftrightarrow f(t) = g(t)$. Definimos $\alpha := T(1)$ y tomemos una $f \in \mathcal{C}(K)$. Sea $k := f(t)$. Como $f(t) = k \cdot 1(t)$, $Tf = Tk \cdot 1 = k\,T_1 = f(t)\,\alpha$, donde 1 es la función constante en K de valor uno. La unicidad de t y de α es obvia. $\square$

(6.3) Probaremos ahora el teorema que nos caracteriza a los homomorfismos de retículo entre $\mathcal{C}(K)$ y $\mathcal{C}(L)$.

TEOREMA. Sea $T: \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(L)$ lineal, sea $g := T1_K$ (1_K = la función constante 1 en K), sea $U := \{y \in L \mid g(y) \neq 0\}$. Son equivalentes: a) T es HR, y b) g es positiva y $\exists\, \varphi: L \to K$ tal que $\forall f \in \mathcal{C}(K)$ $Tf = g \cdot (f \circ \varphi)$. $\varphi|_U$ es continua y única.

Demostración: a) $\Rightarrow$ b): g es positiva porque T es HR y $g = T1_K$.

Sea $y \in L$, y consideremos la función

$$T^*(\delta_y) : \mathcal{C}(K) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto \delta_y \circ T(f),$$

donde $T^* : \mathcal{C}(L)^* \to \mathcal{C}(K)^*$

$$\mathcal{C}(L) \xrightarrow{h} \mathbb{R} \mapsto T^*(h) = \mathcal{C}(K) \xrightarrow{T} \mathcal{C}(L) \xrightarrow{h} \mathbb{R}$$

es el adjunto de T y δ_y es la medida de Dirac en L concentrada en el punto y.

$T^*(\delta_y)$ es HR:

si $f \geq 0$, entonces $Tf \geq 0$ y por tanto $\delta_y \circ T(f) \geq 0$,

y si $f \in \mathcal{C}(K)$ arbitraria, $|T^*(\delta_y)(f)| = |\delta_y \circ T(f)| =$

$|Tf(y)| = |Tf|(y) = \delta_y(|Tf|) = \delta_y \circ T|f| = T^*(\delta_y)|f|$,

lo que prueba que $T^*(\delta_y)$ es HR.

Entonces, si $T^*(\delta_y) \not\equiv 0$, por (6.2)

$$\exists!\, x = \varphi(y) \in K \ \exists!\, \lambda(y) \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ t.q. } T^*(\delta_y) = \lambda(y)\cdot\delta_{\varphi(y)}.$$

Observemos que si $g(y) \neq 0$, entonces

$$T^*(\delta_y)(1_K) = \delta_y(T1_K) = \delta_y(g) = g(y) \neq 0,$$

y por tanto $T^*(\delta_y) \not\equiv 0$, y aplicando la φ y la λ,

$$g(y) = \delta_y(g) = \delta_y(T1_K) = T^*(\delta_y)(1_K) = \lambda(y)\cdot\delta_{\varphi(y)}(1_K) = \lambda(y).$$

En el caso de que $y \notin U$, i.e., definimos $\varphi(y) = x_0$, un punto fijo de K, y esto completa la definición de φ.

Veamos que si $y \notin \mathcal{U}$ entonces $\forall f \in \mathcal{C}(K)$ $Tf(y) = 0$.

Supongamos que no. Entonces $\exists f \in \mathcal{C}(K)$ tal que

$0 \neq Tf(y) = \delta_y \circ Tf = T^*(\delta_y)(f) = \lambda(y) \cdot \delta_{\varphi(y)}(f) = \lambda(y) \cdot f\circ\varphi(x)$,

y por lo tanto $\lambda(y) \neq 0$.

Por otro lado, $0 = g(y) = \delta_y(g) = \delta_y(T1_K) = T^*(\delta_y)(1_K) =$

$\lambda(y) \cdot \delta_{\varphi(y)}(1_K) = \lambda(y)$, contradicción.

Entonces, si $f \in \mathcal{C}(K)$,

caso 1: $y \in \mathcal{U}$. Entonces $Tf(y) = \delta_y \circ Tf = T^*(\delta_y)(f) =$

$\lambda(y) \cdot \delta_{\varphi(y)}(f) = g(y)\, f(\varphi(x))$.

caso 2: $y \notin \mathcal{U}$. Entonces $Tf(y) = 0 = g(y) = g(y) \cdot f\circ\varphi(x)$.

Por lo tanto $Tf = g \cdot (f \circ \varphi)$.

Es evidente que $\varphi|_{\mathcal{U}}$ está únicamente determinada.

Falta solamente probar que $\varphi|_{\mathcal{U}}$ es continua.

Sea $y_0 \in \mathcal{U}$, sea $V \in \mathcal{N}_{\varphi(y_0)}$. Si $y \in \varphi^{-1}(V) \cap \mathcal{U}$, por el lema de Urysohn $\exists f : K \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(\varphi(y)) = 1$ y $f(K \setminus V) \equiv 0$. Sabemos que $Tf = g \cdot (f \circ \varphi) \in \mathcal{C}(L)$ y que $Tf(y) = g(y) \cdot (f\circ\varphi)(y) = g(y) \neq 0$, y entonces $\exists A \in \mathcal{N}_y$ $\forall x \in A$ $0 \neq Tf(x) = g(x) \cdot (f \circ \varphi)(x)$

Entonces $\forall x \in A$ $g(x) \neq 0$, i.e., $x \in \mathcal{U}$; de aquí que $A \subset \mathcal{U}$ y que $\varphi|_{\mathcal{U}}$ es continua.

b) $\Rightarrow$ a): Sea $f \in \mathcal{C}(K)$, sea $y \in L$. Como

$T|f(x)| = g(x) \cdot (|f| \circ \varphi)(x) = |g(x)|\,|f|(\varphi(x)) = |g(x) \cdot f \circ \varphi(x)| =$

$|Tf(x)|$, lo que prueba que T es HR. $\square$

§7. EPÍLOGO.

Consideremos dos espacios de medida finita (X, Σ, μ) y (Y, Δ, ν), y un homomorfismo de retículos suprayectivo $T: \mathcal{L}'(X) \twoheadrightarrow \mathcal{L}'(Y)$. Ker T es un ideal cerrado en $\mathcal{L}'(X)$, y por lo tanto $\exists A \in \Sigma$ t.q. Ker $T = \mathcal{M}_A$. Es fácil ver que $\mathcal{L}'(X)/_{\mathcal{M}_A} \cong \mathcal{L}'(A)$ y que la proyección canónica q está dada por la fórmula $q(f) = f|_A$. Además, sabemos que existe un isomorfismo de retículos $T_0: \mathcal{L}'(A) \to \mathcal{L}'(Y)$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}'(X) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "q"'] & \mathcal{L}'(Y) \\
\mathcal{L}'(A) \arrow[ur, "T_0"'] &
\end{tikzcd}.$$

Entonces, habremos conocido completamente a T cuando sepamos cómo son los isomorfismos de retículos entre $\mathcal{L}'(A)$ y $\mathcal{L}'(Y)$. Schaefer, pág. 225, menciona que es equivalente la existencia de un isomorfismo de retículos T entre $\mathcal{L}'(A)$ y $\mathcal{L}'(Y)$, y la existencia de un isomorfismo φ entre sus respectivas álgebras booleanas reducidas, pero no indica qué tipo de relación se da entre los isomorfismos. Es tentador pensar que en el caso que φ sea una función entre Y y X tengamos $T = T_\varphi$, o en una situación parecida a la de §6, por ejemplo que si $g = T 1_X$ (1_X = la función constante 1 en X), entonces $T = g \cdot T_\varphi$. Este sería probablemente el siguiente paso en la caracterización de los HR entre espacios $\mathcal{L}^1$. Después habría que estudiar el caso no suprayectivo, o equivalentemente, los subretículos de $\mathcal{L}^1(Y)$.

Hay una descripción de los L-espacios mencionada en [S], pág. 114, en donde se prueba que todo L-espacio es isomorfo a un $\mathcal{L}^1(\mu)$, para μ una medida de Radon positiva en un espacio localmente compacto Hausdorff s. Entonces, para estudiar los HR entre L-espacios es suficiente hacerlo considerando espacios $\mathcal{L}^1$.

Teniendo ya una descripción completa de los HR entre L- y entre M-espacios, se antoja intentar resolver los problemas de §0, al menos para estos casos, esperando que las ideas que surjan aquí puedan sugerir formas de ataque efectivas para el caso finalmente general

BIBLIOGRAFÍA.

[B] Berberian, S.K.: Measure and Integration. Chelsea.

[F] Fremlin, D.H. Topological Riesz Spaces and measure theory. Cambridge.

[H] Halmos, P.R. Measure theory. Springer-Verlag.

[H-S] Hewitt and Stromberg. Real and abstract analysis. Springer-Verlag.

[K-N] Kelley, Namioka et.al. Linear Topological spaces. Springer-Verlag.

[K1] Kakutani, S. Concrete representation of abstract (M)-spaces. Ann. of Math., Vol. 42 no. 4, October, 1941.

[K2] Kakutani, S. Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem. Ann. of Math, Vol. 42 no. 2, april 1941.

[M] Martignon, L. Retículos de Banach, notas de clase tomadas por Emma Lam. (no publicadas).

[Ro] Royden, H.L. Real Analysis. Macmillan.

[Ru] Rudin, W. Functional Analysis. Mc Graw-Hill.

[S] Schaefer, H.H. Banach lattices and positive operators. Springer-Verlag.

[W] Wolff, M. Über das Spektrum von Verbandshomomorphismen in $\mathcal{C}(X)$. Math. Ann., 182, 161-169 (1969).