# Universidad Nacional Autónoma de México

## FACULTAD DE CIENCIAS

# INTRODUCCION A LA TEORIA ESPECTRAL NO LINEAL.

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a :

JORGE GILBERTO FLORES GALLEGOS



México, D. F. 1979

# INDICE

# Lista de símbolos

| | |
|---|---|
| $\mathbb{K}$ | el campo $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ |
| $\mathcal{C}(E,F)$ | el espacio de funciones continuas de $E$ en $F$ |
| $\mathcal{C}(E)$ | $\mathcal{C}(E,E)$ |
| $\mathcal{L}(E,F)$ | el espacio de operadores lineales acotados de $E$ en $F$, $E$ y $F$ espacios de Banach |
| $\mathcal{L}(E)$ | $\mathcal{L}(E,E)$ |
| $L^*$ | el adjunto de $L$ como operador que actúa en un espacio de Hilbert |
| $B_E(x;r)$ | $\{y \in E : \|y-x\| < r\}$ |
| $B_E[x;r]$ | la cerradura de $B_E(x;r)$ |
| $S_E[x;r]$ | la frontera de $B_E(x;r)$ |
| $I_E$ | la identidad del espacio de Banach $E$ |
| $\mathcal{A}(E)$ | la familia de subconjuntos acotados de $E$ |
| $E'$ | $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ |
| $L'$ | el adjunto de $L$ como operador entre espacios de Banach |
| $S^o$ | $\{x' \in E' : x'(s) = 0$ para todo $s \in S\}$, $S \subset E$ |
| ${}^oT$ | $\{x \in E : x'(x) = 0$ para todo $x' \in T\}$, $T \subset E'$ |
| $\mathcal{P}(X)$ | la familia de todos los subconjuntos de $X$ |
| $K(E,F)$ | el espacio de operadores lineales compactos de $E$ en $F$ |
| $\square$ | final de una demostración |

Si en el contexto sólo aparece un espacio de Banach (lo cual ocurrirá casi siempre), se omitirán los subíndices en las bolas, esferas e identidades.
Cuando se citen resultados de la tesis, se darán el número del capítulo y del resultado.
Para referencias de un mismo capítulo se omitirá el número de éste.

# INTRODUCCION

El objetivo de este trabajo es presentar de una manera detallada el material expuesto en las notas tituladas "On spectral theory for nonlinear operators", escritas por A. Vignoli.

La idea central en esas notas es definir la noción de espectro para una función continua que actúa en un espacio de Banach y que no necesariamente es lineal, de tal forma que sea una extensión al caso no lineal del concepto de espectro que conocemos para un operador lineal acotado. Además, ésto se quiere hacer preservando tantas propiedades de la teoría espectral lineal como sea posible.

En la parte inicial se da una descomposición para el espectro de un operador lineal acotado. Esa descomposición posee algunas de las propiedades que queremos conservar y las restantes se enuncian a lo largo del capítulo. Una vez hecho ésto, el problema lo podemos plantear de la siguiente manera: ¿cómo generalizar, para $\mathcal{C}(E)$, los sobconjuntos de $\mathcal{L}(E)$ que aparecen en la descomposición del espectro mencionada anteriormente?

En el capítulo uno se hacen algunas consideraciones preliminares de tipo intuitivo y se introducen tanto la herramienta como las clases de funciones continuas que nos permitirán resolver el problema planteado en el párrafo anterior.

Teniendo ya a nuestra disposición los ingredientes adecuados, en el capítulo siguiente se procede a la solución del problema: se da al espacio $\mathscr{C}(E)$ la estructura topológica apropiada y se definen, en base a lo realizado en el capítulo uno, los subconjuntos que generalizan a aquellos que aparecen como partes integrantes del espectro lineal y que fueron construídos al principio de la tesis. Se discute también el problema de la no vacuidad del espectro de un operador no lineal, situación que no coincide con la del caso lineal. Se generaliza además la alternativa de Fredholm.

En el último capítulo se presentan algunas aplicaciones de la teoría espectral no lineal: se demuestran, de manera sumamente fácil, algunos resultados clásicos en Topología y Análisis Funcional no Lineal y se calcula el espectro para una clase de operadores integrales de Volterra no lineales.

Cabe aclarar que la gran mayoría de los resultados que aparecen en las notas de Vignoli, se encuentran en el articulo señalado como [F-M-V] en las referencias.

Agradezco al Dr. José Angel Canavati la paciencia y orientación brindadas en la dirección de esta tesis y al Dr. Jorge Ize sus comentarios y cooperación para la aclaración de algunas dudas que se me presentaron.

# CAPITULO O

## Preliminares en teoría espectral lineal

En esta parte haremos un resumen de algunos conceptos y resultados de la teoría espectral para operadores lineales acotados.

Si $E$ es un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$ y $L \in \mathcal{L}(E)$, el <u>espectro de $L$</u>, que se denotará por $\sigma(L)$, está definido como:

$$\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - L \text{ no es un isomorfismo}\}.$$

La primera inquietud que uno siente acerca de un punto en el espectro de un operador es el tratar de saber por qué está ahí, es decir, ¿por qué el operador $\lambda I - L$ no es invertible? Las posibles respuestas a esta pregunta nos permiten dar descomposiciones del espectro en subconjuntos.

Una de tales descomposiciones es la siguiente:

$$\sigma(L) = \sigma_p(L) \cup \sigma_c(L) \cup \sigma_r(L)$$

donde $\sigma_p(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - L \text{ no es uno a uno}\}$ es el <u>espectro puntual</u>, $\sigma_c(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - L$ es uno a uno e $Im(\lambda I - L)$ es un subespacio denso y propio de $E\}$ es el <u>espectro continuo</u> y $\sigma_r(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - L$ es uno a uno e $Im(\lambda I-L)$ no es denso$\}$ es el espectro residual de $L$.

En general $\sigma_p(L)$, $\sigma_c(L)$ y $\sigma_r(L)$ no son subconjuntos abiertos o cerrados de $\sigma(L)$ como muestran los siguientes ejemplos:

Sean $H=L^2(\mathbb{R})$, $(q_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una enumeración de $U:=(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})\cap B_{\mathbb{C}}[0,1]$ y $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definida por $\varphi(x)=q_n$ para $x\in[n,n+1)$, entonces $\varphi$ es acotada. Sea $M:H\to H$ el operador $Mf=\varphi f$. Si $\lambda\in\sigma_p(M)$ existe $f\in H\setminus\{0\}$ tal que $\lambda f(x)=\varphi(x)f(x)$. Sea $A\subset\mathbb{R}$ tal que $m(A)>0$ y $f(x)\neq 0$ para $x\in A$, entonces $\varphi(x)=\lambda$ para $x\in A$, por lo tanto $\lambda\in U$. Recíprocamente, si $\lambda\in U$, $\lambda=q_n$ para algún $n$. Sea $f=\chi_{[n,n+1)}$, entonces $f\in H\setminus\{0\}$ y $\lambda f(x)=\varphi(x)f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$, i.e. $\lambda\in\sigma_p(M)$.

Resumiendo, $\sigma_p(M)=\{\lambda\in\mathbb{C}: m(\varphi^{-1}(\lambda))>0\}=U$, por lo cual $B_{\mathbb{C}}[0;1]\subset\overline{\sigma(M)}=\sigma(M)$.

Si $\lambda\notin B_{\mathbb{C}}[0;1]$, $\psi(x)=(\lambda-\varphi(x))^{-1}$ es acotada y el operador $Nf=\psi f$ es el inverso de $\lambda I-M$, por lo tanto $\sigma(M)=B_{\mathbb{C}}[0;1]$.

Puesto que $(Mf,g)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)\overline{g(x)}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\overline{\overline{\varphi(x)}\,g(x)}\,dx$,

el adjunto hermiteano $M^*$ de $M$ es $M^*f=\bar{\varphi}f$. Por esta razón $M\circ M^*=M^*\circ M$, esto es, $M$ es normal. De lo ante-

rior se concluye [Ver II.3.9 iii] que $H = Ker(\lambda I - M) \oplus \overline{Im(\lambda I - M)}$. Así, $\sigma_p(M) = \Gamma(M)$, donde $\Gamma(M) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Im(\lambda I - M)$ no es denso$\}$ y por lo tanto $\sigma_r(M) = \Gamma(M) \setminus \sigma_p(M) = \phi$.
Finalmente $\sigma_c(M) = B[0;1] \setminus U$.
Sea $S_L : \ell^2 \to \ell^2$ el operador $S_L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, \ldots)$. Para $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda I - S_L)(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (\lambda x_1 - x_2, \lambda x_2 - x_3, \ldots, \lambda x_n - x_{n+1}, \ldots)$.
Si $|\lambda| < 1$, $x := (1, \lambda, \ldots, \lambda^{n-1}, \ldots) \in \ell^2$ y $\lambda x = (\lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^n, \ldots) = S_L x$.
Recíprocamente, si $\lambda \in \sigma_p(S_L)$ existe $x \in \ell^2 \setminus \{0\}$ tal que $\lambda x = S_L x$. En ese caso $\lambda x_i = x_{i+1}$, $x = (x_1, \lambda x_1, \ldots, \lambda^{n-1} x_1, \ldots)$ y de ésto, $|\lambda| < 1$. Hemos probado pues que $\sigma_p(S_L) = B(0;1)$ por lo cual $B[0;1] \subset \sigma(S_L)$.
Sean $|\lambda| = 1$, $y^i = (y_1, y_2, \ldots, y_i, 0, \ldots, 0, \ldots)$, entonces

$$x^i := \Big(\sum_{j=1}^{i} \lambda^{-j} y_j, \sum_{j=1}^{i-1} \lambda^{-j} y_{j+1}, \ldots, \underbrace{\lambda^{-2} y_i + \lambda^{-1} y_{i-1}}_{(i-1)\text{-ésimo}}, \lambda^{-1} y_i, 0, \ldots, 0, \ldots\Big) \in \ell^2$$

y $(\lambda I - S_L) x^i = y^i$. Si $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) \in \ell^2$ sea $x^i \in \ell^2$ tal que $(\lambda I - S_L) x^i = (y_1, y_2, \ldots, y_i, 0, \ldots, 0, \ldots)$, entonces $(\lambda I - S_L) x^i \to y$, i.e. $\overline{Im(\lambda I - S_L)} = \ell^2$.
Como $\lambda I - S_L$ es uno a uno si $|\lambda| = 1$, $\lambda I - S_L$ no puede ser supráyectiva. Si lo fuera, por el Teorema de la transformación abierta, $\lambda I - S_L$ sería invertible, pero ésto no es posible pues $B[0;1] \subset \sigma(S_L)$. Puesto que $\|S_L\| = 1$, se tiene que $\sigma(S_L) \subset B[0;1]$, en consecuencia $\sigma(S_L) = B[0;1]$,

$\sigma_p(S_L) = B(0;1)$, $\sigma_r(S_L) = \phi$ y $\sigma_c(S_L) = S[0;1]$.

Sea ahora $S_R : \ell^2 \to \ell^2$ tal que $S_R(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (0, x_1, \ldots, x_{n-1}, \ldots)$.

Para $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda I - S_R)(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2 - x_1, \ldots, \lambda x_n - x_{n-1}, \ldots)$

por lo tanto $\sigma_p(S_R) = \phi$.

Debido a que se satisfacen las condiciones: $S_L = S_R^*$, $Ker(\lambda I - S_L)^\perp = \overline{Im(\bar{\lambda} I - S_R)}$, $\sigma_p(S_R) = \phi$ y puesto que $\sigma_p(S_L)$ es simétrico con respecto al origen, se obtiene que $B(0;1) = \sigma_p(S_L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Im(\lambda I - S_R) \text{ no es denso}\} = \sigma_r(S_R)$.

Además, $\sigma_c(S_R) = \sigma_c(S_L) = S[0;1]$

Sean $E = \ell^\infty$, $D = (\alpha_n)_{n=1}^\infty$ donde $\alpha_n = 1 + \frac{1}{n}$ y $A : E \to E$ definido como $A(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n, \ldots)$, entonces $(\lambda I - A)(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = ((\lambda - \alpha_1)x_1, (\lambda - \alpha_2)x_2, \ldots, (\lambda - \alpha_n)x_n, \ldots)$.

Por lo tanto $\sigma_p(A) = D$ y de ésto se sigue que $1 \in \sigma(A)$.

Si $y \in Im(I - A)$, existe $x \in E$ tal que $(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) = (-x_1, -\frac{1}{2}x_2, \ldots, -\frac{1}{n}x_n, \ldots)$, pero ésto implica que $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, es decir, $Im(I - A) \subset c_0$, donde $c_0 = \{(z_n)_{n=1}^\infty : z_n \to 0\}$, que es cerrado en $\ell^\infty$, por lo tanto $1 \in \sigma_r(A)$. Como $\lambda \notin \sigma(A)$ si $\lambda \notin \overline{D}$, $\sigma(A) = \overline{D}$ y $\sigma_c(A) = \phi$.

Consideraremos ahora una descomposición mas adecuada a nuestros propósitos. Antes de hacerlo daremos algunos pre-requisitos.

0.1 <u>Definición.</u>- Un operador $L \in \mathcal{L}(E,F)$ es <u>acotado</u> <u>infe-</u>

<u>riormente</u> si existe $K>0$ tal que $\|Lx\| \geq K\|x\|$ para todo $x \in E$ ó de forma equivalente si $d(L) := \inf\{\|Lx\| \mid \|x\|=1\} > 0$.

Consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathcal{L}(E,F)$:

$ISO(E,F) = \{L \in \mathcal{L}(E,F) : L \text{ es un isomorfismo}\}$

$EPI(E,F) = \{L \in \mathcal{L}(E,F) : L \text{ es suprayectivo}\}$

$BB(E,F) = \{L \in \mathcal{L}(E,F) : L \text{ es acotado inferiormente}\}$

Acerca de estos conjuntos tenemos el siguiente resultado:

<u>0.2 Proposición.-</u> $ISO(E,F)$, $EPI(E,F)$ y $BB(E,F)$ son subconjuntos abiertos de $\mathcal{L}(E,F)$.

<u>Dem.-</u> Una prueba de que $ISO(E,F)$ y $EPI(E,F)$ son abiertos se encuentra en Lang, S. Real Analysis; Addison-Wesley, 1973.

Para ver que $BB(E,F)$ es abierto sean $L \in BB(E,F)$ y $A \in \mathcal{L}(E,F)$ tal que $\|A-L\| < \frac{K}{2}$, donde $\|Lx\| \geq K\|x\|$ para todo $x \in E$, entonces $\|Ax\| \geq \|Lx\| - \|Lx - Ax\| \geq K\|x\| - \frac{K}{2}\|x\| = \frac{K}{2}\|x\|$, i.e. $A \in BB(E,F)$. □

<u>0.3 Proposición.-</u> $L \in ISO(E,F)$ si y sólo si $L \in BB(E,F) \cap EPI(E,F)$.

<u>Dem.-</u> $L \in ISO(E,F)$ si y sólo si $L$ es uno a uno, sobre y su inverso es acotado; pero ésto sucede precisamente si y sólo si $L \in BB(E,F) \cap EPI(E,F)$. □

Consideremos la siguiente descomposición del espectro de un operador lineal acotado: Sea $L \in \mathcal{L}(E)$. El <u>espectro puntual aproximado</u> de $L$, que se denotará por $\sigma_\pi(L)$, es $\sigma_\pi(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - L \notin BB(E)\}$ y el <u>espectro aproximado por la imágen</u>, que se denotará por $\sigma_\delta(L)$, es $\sigma_\delta(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - L \notin EPI(E)\}$. Obsérvese que, por definición, $\lambda \in \sigma_\pi(L)$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n) \subset E$ tal que $\|x_n\| = 1$ y $\lambda x_n - Lx_n \to 0$. Por 0.3 $\sigma(L) = \sigma_\pi(L) \cup \sigma_\delta(L)$. Además, es posible $\sigma_\pi(L) \cap \sigma_\delta(L) \neq \phi$. Siguiendo el modelo de esta descomposición se construirá el espectro de un operador no necesariamente lineal. Una propiedad importante de $\sigma_\pi(L)$ y $\sigma_\delta(L)$ es la siguiente:

<u>0.4 Proposición.-</u> $\sigma_\pi(L)$ y $\sigma_\delta(L)$ son subconjuntos cerrados de $\sigma(L)$.

<u>Dem.-</u> Es consecuencia de que la función $\phi_L : \mathbb{C} \to \mathcal{L}(E)$ definida por $\phi_L(\lambda) = \lambda I - L$ es continua y de que $\sigma_\pi(L) = \phi_L^{-1}(\mathcal{L}(E) \setminus BB(E))$, $\sigma_\delta(L) = \phi_L^{-1}(\mathcal{L}(E) \setminus EPI(E))$. $\square$

Daremos ahora algunas propiedades del espectro de un operador lineal acotado:

(a) $\sigma(L)$ es compacto. Más precisamente, si $\lambda \in \sigma(L)$, $|\lambda| \leq r(L) := \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(L)\} \leq \|L\|$, $r(L)$ es el radio espectral de $L$.

(b) $\sigma(L) \neq \phi$

(c) La función $\sigma: \mathcal{L}(E) \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$ que a cada $L \in \mathcal{L}(E)$ le asocia su espectro, es semicontinua superior [Si $L_n \to L$, $\lambda_n \in \sigma(L_n)$ y $\lambda_n \to \lambda$, entonces $\lambda \in \sigma(L)$]

(d) $\partial\sigma(L) \subset \sigma_\pi(L)$

<u>Afirmación.-</u> Si $(L_n)_{n=1}^{\infty} \subset ISO(E)$ es tal que $L_n \to L$ y $L \in BB(E)$, entonces $\operatorname{Im} L = E$.

<u>Dem.-</u> Sea $K > 0$ tal que $\|Lx\| \geq K\|x\|$ para todo $x \in E$. Si $y \in E$, existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ tal que $L_n x_n = y$; entonces $\|Lx_n - y\| \leq \|L - L_n\| \, \|x_n\|$. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no fuera acotada se tendría que $\|y\| = \|L_n x_n\| \geq \|Lx_n\| - \|L_n x_n - Lx_n\| \geq [K - \|L - L_n\|]\,\|x_n\|$ lo cual es absurdo, por lo tanto $Lx_n \to y$, c.e. $\operatorname{Im} L$ es denso. Por ser $L$ acotado inferiormente, $\operatorname{Im} L$ es cerrado; por lo tanto $\operatorname{Im} L = E$. ∎

Sea $\lambda \in \partial\sigma(L)$, entonces $\lambda \in \sigma(L)$ y existe una sucesión $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \setminus \sigma(L)$ tal que $\lambda_n \to \lambda$. Si $\lambda$ no estuviera en $\sigma_\pi(L)$, haciendo $L_n = \lambda_n I - L$ y usando la afirmación anterior y 6.3 tendríamos que $\lambda I - L$ es invertible. Siendo ésto último una contradicción, concluímos que $\lambda \in \sigma_\pi(L)$

(e) $\sigma(\lambda L) \equiv \lambda\sigma(L)$, donde la notación $\equiv$ significa que $\sigma_\pi(\lambda L) = \lambda\sigma_\pi(L)$ y $\sigma_\delta(\lambda L) = \lambda\sigma_\delta(L)$.

(f) $\sigma(\lambda I + L) \equiv \lambda + \sigma(L)$, $\lambda \in \mathbb{C}$

(g) $\sigma(A \circ L \circ A^{-1}) \equiv \sigma(L)$ para cualquier $A \in Iso(E)$

Si $\lambda \notin \sigma_\pi(L)$, $\lambda I - L \in BB(E)$, por lo tanto $\lambda I - A \circ L \circ A^{-1} = A \circ (\lambda I - L) \circ A^{-1} \in BB(E)$, i.e. $\lambda \notin \sigma_\pi(A \circ L \circ A^{-1})$. La otra contención y la igualdad entre $\sigma_\delta(L)$ y $\sigma_\delta(A \circ L \circ A^{-1})$ son análogas.

(h) $\sigma_\pi(L) \neq \phi$

En efecto, $\phi \neq \partial\sigma(L) \subset \sigma_\pi(L)$

(i) Si $L$ es compacto, $\sigma(L) = \sigma_\pi(L)$.

Es consecuencia de que el espectro de un operador compacto es un conjunto a lo más numerable (sus valores propios además de 0 si $\dim E = \infty$). En este caso $\partial\sigma(L) = \sigma(L)$.

(a) y (b) son resultados bastante conocidos. Acerca de (c) podemos decir que la demostración que se hará posteriormente de un resultado análogo para operadores no necesariamente lineales, está basada en la del caso lineal. (e) y (f) son triviales.

A continuación probaremos que si $L \in \mathcal{L}(E)$, entonces $\sigma_\pi(L) = \sigma_\delta(L')$ y $\sigma_\delta(L) = \sigma_\pi(L')$

<u>$\sigma_\pi(L') \subset \sigma_\delta(L)$</u>

Supongamos que $\lambda \in \sigma_\pi(L') \setminus \sigma_\delta(L)$, entonces $\lambda I - L$ es sobre y existe una sucesión $(x_n')_{n=1}^{\infty} \subset E'$ tal que $\|x_n'\| = 1$ y $(\lambda I - L')x_n' \to 0$. Por el Teorema de la transformación abierta existe $\delta > 0$ tal que $B[0;\delta] \subset (\lambda I - L)B(0;1)$, por lo tanto $S[0;1] \subset (\lambda I - L)B(0;\frac{1}{\delta})$.

Dado $\epsilon > 0$ sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|(\lambda I - L')x_n'\| < \epsilon\delta$ si $n \geq N$. Sea $y \in E$ tal que $\|y\| = 1$, entonces $|x_n'(y)| = |x_n'(\lambda I - L)x| = |(\lambda I - L')x_n'(x)| \leq \|(\lambda I - L')x_n'\| \, \|x\| < \epsilon$ donde $x$ es tal que $(\lambda I - L)x = y$, $\|x\| \leq \frac{1}{\delta}$, por lo tanto $x_n' \to 0$, una contradicción.

<u>$\sigma_\delta(L) \subset \sigma_\pi(L')$</u>

Es consecuencia de que $Im(\lambda I - L) = E$ si $\lambda I - L'$ es acotado inferiormente. (Ver [R] Pág. 97).

<u>$\sigma_\delta(L') \subset \sigma_\pi(L)$</u>

Si $\lambda \notin \sigma_\pi(L)$, $\lambda I - L$ es acotado inferiormente. Esto implica que $Im(\lambda I - L)$ es cerrado, pero en este caso (Ver [R] Teorema 4.14) $Im(\lambda I - L')$ es cerrado y puesto que es denso, $\lambda \notin \sigma_\delta(L')$.

<u>$\sigma_\pi(L) \subset \sigma_\delta(L')$</u>

Si $\lambda \notin \sigma_\delta(L')$, $\lambda I - L'$ es sobre, por lo tanto $Ker(\lambda I - L) = {}^\circ(Im(\lambda I - L')) = 0$. Además, (nuevamente el Teorema 4.14 de [R]) $Im(\lambda I - L)$ es cerrado; por lo tanto $\lambda I - L$, considerado como operador de $E$ en $Im(\lambda I - L)$ es abierto, y por ser uno a uno $\lambda I - L$, existe $M > 0$ tal que $\|x\| \leq M \, \|(\lambda I - L)x\|$ para todo $x \in E$, i.e. $\lambda \notin \sigma_\pi(L)$.

Estas relaciones nos dan que $\sigma(L) = \sigma(L')$. Además, ya que $\sigma_\pi(L') \neq \phi$ (Propiedad (h)), $\sigma_\delta(L) \neq \phi$ para todo $L \in \mathcal{L}(E)$.

# CAPITULO I

## §1: Operadores asintóticamente lineales

Un caso interesante y particularmente ilustrativo, que en algún sentido es el mas cercano al caso lineal, es el de los operadores asintóticamente lineales; así que, antes de pasar a la situación general, examinemos un resultado obtenido por M.A. Krasnosel'skii acerca de operadores de este tipo.

<u>1.1 Definición.-</u> Una función continua $f: E \to E$ se llama <u>asintóticamente</u> <u>lineal</u> si existe $L \in \mathcal{L}(E)$ tal que

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{\|f(x) - Lx\|}{\|x\|} = 0$$

Obsérvese que si $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(E)$ son asintóticos a $f$ en $\infty$, entonces $L_1$ es asintótico a $L_2$ en $\infty$ y puesto que $L_1$ y $L_2$ son homogéneos, esta condición es precisamente $\| L_1 - L_2 \| = 0$, i.e. $L_1 = L_2$.

<u>1.2 Definición.-</u> Si $f: E \to E$ es asintóticamente lineal y $L \in \mathcal{L}(E)$ satisface la condición de la definición anterior, $L$ es la <u>derivada</u> <u>asintótica</u> de $f$ y se denota por $f'(\infty)$.

En la demostración del resultado de Krasnosel'skii haremos uso de los dos siguientes hechos:

<u>1.3 Lema.-</u> Si $f: E \to E$ es asintóticamente lineal y compacta, entonces $f'(\infty)$ es un operador compacto.

<u>Dem.-</u> Si $f'(\infty)$ no es compacto existe $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty} \subset E$ con $\|x_n\|=1$ y existe $\varepsilon > 0$ tales que dado $N \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $n, m \in \mathbb{N}$; $n, m \geq N$ con la propiedad $\|f'(\infty)x_n - f'(\infty)x_m\| \geq \varepsilon$. Sea $M > 0$ tal que $\|f(x) - f'(\infty)x\| < \frac{\varepsilon}{3}\|x\|$ si $\|x\| \geq M$ y definamos $y_n = M x_n$, entonces $\|f(y_n) - f(y_m)\| \geq \|f'(\infty)y_n - f'(\infty)y_m\| - (\|f'(\infty)y_n - f(y_n)\| + \|f'(\infty)y_m - f(y_m)\|) \geq \frac{M\varepsilon}{3}$, así $(f(y_n))_{n\geq 1}^{\infty}$ no tiene subsucesiones convergentes, por lo cual $f$ no puede ser compacta. □

<u>1.4 Lema.-</u> Si $K: E \to E$ es continua, compacta y $\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{\|Kx\|}{\|x\|} = 0$, entonces $K$ tiene un punto fijo.

<u>Dem.-</u> Por hipótesis existe $M > 0$ tal que $\|Kx\| < \|x\|$ si $\|x\| \geq M$. La compacidad de $K$ asegura la existencia de un número $R \geq M$ tal que $K(B[0;M]) \subset B[0;R]$, pero si $x$ es tal que $M < \|x\| \leq R$, entonces $\|Kx\| < \|x\| \leq R$, es decir $K(B[0;R]) \subset B[0;R]$ y por el Teorema de punto fijo de Schauder, $K$ tiene un punto fijo en $B[0;R]$. □

Ahora sí estamos en posición de probar el resultado de Krasnosel'skii al que hemos estado haciendo referencia:

**1.5 Teorema:** Sea $f: E \to E$ asintóticamente lineal y compacta. Si $\lambda \notin \sigma(f'(\infty))$, entonces la ecuación $\lambda x - f(x) = y$ se puede resolver para cualquier $y \in E$.

**Dem:** Sea $w: E \to E$ definida como $w(x) = f(x) - f'(\infty)x$, entonces $\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{\|w(x)\|}{\|x\|} = 0$ y por el Lema 1.3, $w$ es compacta.
Sea $h = (\lambda I - f'(\infty))^{-1} \circ w$, entonces $h$ es compacta y $\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{\|h(x)\|}{\|x\|} = 0$.
Por el Lema 1.4 existe $x \in E$ tal que $(\lambda I - f'(\infty))^{-1} w(x) = x$, i.e. $f(x) - f'(\infty)x = w(x) = \lambda x - f'(\infty)x$, por lo tanto la ecuación $\lambda x - f(x) = 0$ tiene una solución.
Además $g(x) = f(x) + y$ es compacta y $f'(\infty) = g'(\infty)$, por lo cual la ecuación $\lambda x - g(x) = 0$ tiene una solución. $\square$

De la demostración del Teorema anterior, vemos que éste sigue siendo válido con sólo pedir que $f$ se pueda expresar como $f(x) = Lx + w(x)$, donde $L \in \mathcal{L}(E)$, $w$ es compacta y $\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{\|w(x)\|}{\|x\|} = 0$.
Si $f$ es lineal, entonces $L = f$ y $w = 0$. De ésto se puede pensar en que si definimos el espectro de un operador no lineal, este espectro debería ser invariante bajo perturbaciones $w$ donde $w$ es compacta y satisface $\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{\|w(x)\|}{\|x\|} = 0$.

Por otra parte, el siguiente ejemplo muestra que el comportamiento asintótico de una función continua no basta para concluir que sea suprayectiva. En [Bromberg, S. - Rivaud, J.J. Análisis Diferencial, Sociedad Matemática Mexicana, 1975], se ha construido un difeomorfismo $h: \ell^2 \to \ell^2 \setminus \{0\}$ que es la identidad fuera de $B(0;1)$. Sean $i: B[0;1] \hookrightarrow \ell^2$, $r: \ell^2 \setminus \{0\} \to S[0;1]$ tal que $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ y $f: \ell^2 \to \ell^2$ definida por $f(x) = \begin{cases} r\,h\,i(x) & \text{si } \|x\| \leq 1 \\ x & \text{si } \|x\| \geq 1. \end{cases}$

En este caso $0 \notin \sigma(f'(\infty)) = \sigma(I)$, pero $f$ no es suprayectiva aunque su comportamiento asintótico es excelente ($w = f - I$ es $0$ fuera de $B(0;1)$ pero no es compacta). Esto nos induce a considerar ciertas propiedades globales de $f$. En el resultado de Krasnosel'skii la propiedad global es la compacidad de $f$. En nuestro caso se hará en términos de la medida de no compacidad de Kuratowski. Otro resultado que da información adicional a nuestras consideraciones, es uno obtenido por Granas ([G1]). Antes de enunciarlo introduciremos algunas nociones.

<u>1.6 Definición.-</u> Sean $E$, $F$ espacios de Banach y $f: E \to F$ continua. Se dice que $f$ es <u>cuasi-acotada</u> si existen constantes $a, b \geq 0$ tales que $\|f(x)\| \leq a\|x\| + b$ para todo $x \in E$. La <u>cuasinorma</u> de $f$, que se denota por $|f|$, está

definida como:

$$|f| = \inf \{a \geq 0 : \exists\, b \geq 0 \text{ con la propiedad } \|f(x)\| \leq a\|x\| + b\}$$

Es decir, $f$ es cuasi-acotada si transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados y $\lim\sup_{\|x\|\to\infty} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = |f| < \infty$.

Obsérvese que si $f$ es lineal y acotada, $|f| = \|f\|$. Si $f$ es asintóticamente lineal, $||f| - |f'(\infty)|| \leq |f - f'(\infty)| = 0$, por lo tanto $|f| = \|f'(\infty)\|$.

<u>17 Teorema.-</u> Sea $f: E \to E$ cuasi-acotada y compacta. Si $|\lambda| > |f|$, entonces $\lambda I - f$ es supra yectiva.

<u>Dem.-</u> Como $|\frac{1}{\lambda} f| < 1$, existe $M > 0$ tal que $\sup_{\|x\| \geq M} \frac{\|\frac{1}{\lambda} f(x)\|}{\|x\|} < 1$.

Por ser $f$ cuasi-acotada, existe $R \geq M$ tal que $\frac{1}{\lambda} f(B[0;M]) \subset B[0;R]$. Si $M \leq \|x\| \leq R$, $\|\frac{1}{\lambda} f(x)\| \leq \|x\| \leq R$, por lo tanto $\frac{1}{\lambda} f(B[0;R]) \subset B[0;R]$. Por el Teorema de punto fijo de Schauder, $\frac{1}{\lambda} f$ tiene un punto fijo en $B[0;R]$, mismo que es solución de $\lambda x - f(x) = 0$.

Puesto que $||f+y| - |f|| \leq |y| = 0$ para cualquier $y \in E$, de la primera parte se sigue que existe $x \in E$ tal que $\lambda x - f(x) = y$. $\square$

Obsérvese que en el resultado de Granas tenemos una suposición asintótica ($|f|<|\lambda|$) y una suposición global (la compacidad de $f$). Con respecto a los resultados de Granas y Krasnosel'skii podemos decir que ninguno de ellos es deducible a partir del otro. Para convencernos de ésto consideremos $z_0 \in \mathbb{C}$ y $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = z + z_0$. En este caso $f'(\infty) = I$, $\lambda = 0 \notin \sigma(f'(\infty))$ y $1 = \|I\| = |f| > |\lambda| = 0$. Sea $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $g(z) = z + \bar{z}$. Como $\frac{|g(z)|}{|z|} \leq 2$, $g$ es cuasi-acotada y obviamente es compacta. Probaremos que $g$ no es asintóticamente lineal.

Para ello sea $g(z) = \alpha z + w(z)$ donde $w$ es continua, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Si $\alpha = 0$, entonces $w(z) = z + \bar{z}$. Definamos $z_n = n$, entonces $w(z_n) = 2 z_n$ y por lo tanto $|w| \geq \lim \frac{|w(z_n)|}{|z_n|} = 2$.

Si $\alpha \neq 0$, tomemos $z_n = 2in$, entonces $w(z_n) = (1-\alpha) z_n + \bar{z}_n = -\alpha z_n$, por lo tanto $|w| \geq \lim \frac{|w(z_n)|}{|z_n|} = |\alpha| > 0$. Por lo tanto $g$ no es asintóticamente lineal.

## §2.- Notación adicional y resultados preliminares.

Si $E$ y $F$ son espacios de Banach y $f: E \to F$ es continua definimos $d(f) = \liminf_{\|x\| \to \infty} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$ ó equivalentemente

$$d(f) = \sup\{a \geq 0 : \exists b \geq 0 \text{ con } \|f(x)\| \geq a\|x\| - b \,,\ x \in E\}.$$

<u>21 Proposición.-</u> Sean $f, g : E \to F$ continuas, entonces (siempre que tenga sentido)

(a) $d(f) - |g| \leq d(f+g) \leq d(f) + |g|$.

(b) $d(f)\, d(g) \leq d(f \circ g) \leq |f|\, d(g)$

(c) $|f+g| \leq |f| + |g|$

(d) $|\lambda f| = |\lambda|\, |f|$, $\lambda$ escalar

(e) $d(f)\, |g| \leq |f \circ g| \leq |f|\, |g|$

(f) $|d(f) - d(g)| \leq |f-g|$

(g) Si $f$ es homeomorfismo, $d(f) = |f^{-1}|^{-1}$.

<u>Dem.-</u> (a) Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ tal que $\|x_n\| \to \infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\|f(x_n)\|}{\|x_n\|} = d(f)$, entonces $d(f+g) \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\|f(x_n) + g(x_n)\|}{\|x_n\|} \leq$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\|f(x_n)\|}{\|x_n\|} + \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\|g(x_n)\|}{\|x_n\|} \leq d(f) + |g|.$$

La otra desigualdad es cierta si $d(f) < \infty$ y $|g| = \infty$. Sea $|g| < \infty$, entonces $d(f) = d(f+g-g) \leq d(f+g) + |g|$ y por lo tanto $d(f) - |g| \leq d(f+g)$.

(b) La primera desigualdad es inmediata si $d(g) = 0$. Sea $d(g) > 0$, entonces, para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ con la propiedad de que $\|x_n\| \to \infty$ cuando $n \to \infty$, se cumple que $\frac{\|f(x_n)\|}{\|x_n\|} \to \infty$ en el caso $d(f) = \infty$. Como $d(g) > 0$, $\|g(x_n)\| \to \infty$ y ninguna subsucesión de $\frac{\|g(x_n)\|}{\|x_n\|}$ tiende a cero, y en ese caso $\frac{\|f \circ g(x_n)\|}{\|x_n\|} =$ $\frac{\|f(g(x_n))\|}{\|g(x_n)\|} \frac{\|g(x_n)\|}{\|x_n\|} \to \infty$, por lo cual $d(f \circ g) = \infty$.

Si $d(g)>0$ y $d(f)<\infty$, dado $\varepsilon>0$ existen $a,b\geq 0$ tales que $d(f)-\frac{\varepsilon}{d(g)}<a$ y $\|f(x)\|\geq a\|x\|-b$. Esto implica que $\|f(g(x))\|\geq a\|g(x)\|-b$. Sean $\alpha,\beta\geq 0$ tales que $\|g(x)\|\geq\alpha\|x\|-\beta$, entonces $\|f(g(x))\|\geq a\alpha\|x\|-(a\beta+b)$. Por definición de $d(\cdot)$, $d(f\circ g)\geq a\alpha$. Así, $d(f\circ g)\geq a\,d(g)>d(f)\,d(g)-\varepsilon$ y por lo tanto $d(f\circ g)\geq d(f)\,d(g)$.

Para la segunda desigualdad consideraremos inicialmente el caso $d(g)=0$, $|f|<\infty$. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset E$ tal que $\|x_n\|\to\infty$ y $\frac{\|g(x_n)\|}{\|x_n\|}\to 0$. Si $(g(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es acotada, $d(f\circ g)\leq \lim\frac{\|f\circ g(x_n)\|}{\|x_n\|}=0$. Si $\|g(x_n)\|\to\infty$,

$$d(f\circ g)\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\|f\circ g(x_n)\|}{\|x_n\|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\|f\circ g(x_n)\|}{\|g(x_n)\|}\frac{\|g(x_n)\|}{\|x_n\|}=0.$$

Sea $d(g)>0$. Si $d(f\circ g)=\infty$, para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ con $\|x_n\|\to\infty$, se cumple que $\frac{\|f\circ g(x_n)\|}{\|x_n\|}\to\infty$.

De la igualdad $\frac{\|f\circ g(x_n)\|}{\|x_n\|}=\frac{\|f(g(x_n))\|}{\|g(x_n)\|}\frac{\|g(x_n)\|}{\|x_n\|}$ que es válida excepto quizá en un conjunto finito de índices, y puesto que $\|g(x_n)\|\to\infty$, obtenemos que $|f|=\infty$ ó $d(g)=\infty$. Si $d(f\circ g)<\infty$, dado $\varepsilon>0$ sean $a,b\geq 0$ tales que $d(f\circ g)-\varepsilon<a$ y $\|f\circ g(x)\|\geq a\|x\|-b$ para cualquier $x\in E$. Si $\alpha,\beta\geq 0$ son tales que $\|f(x)\|\leq\alpha\|x\|+\beta$, entonces $\alpha\|g(x)\|\geq a\|x\|-(b+\beta)$. Así, $d(\alpha g)=\alpha\, d(g)\geq a$; en consecuencia $|f|\,d(g)\geq a>d(f\circ g)-\varepsilon$ y por lo tanto

$|f|\, d(g) \geq d(f\circ g)$.

(c) y (d) son inmediatas.

(e) La desigualdad del lado izquierdo se cumple cuando $|f\circ g| = \infty$.

Si $|f\circ g| < \infty$, dado $\varepsilon > 0$ escojamos $a, b \geq 0$ tales que $a < |f\circ g| + \varepsilon$ y $\|f\circ g(x)\| \leq a\|x\| + b$ para todo $x \in E$. Si $\alpha, \beta \geq 0$ satisfacen $\|f(x)\| \geq \alpha\|x\| - \beta$, entonces $\alpha\|g(x)\| \leq a\|x\| + (b+\beta)$ y por lo tanto $|\alpha g| = \alpha|g| \leq a$. De la desigualdad anterior obtenemos que $d(f)\,|g| \leq a < |f\circ g| + \varepsilon$, por lo tanto $d(f)\,|g| \leq |f\circ g|$.

Para probar la otra desigualdad supongamos primero que $|g| = 0$, $|f| < \infty$, entonces, para cada sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ con $\|x_n\| \to \infty$, se tiene que $\frac{\|g(x_n)\|}{\|x_n\|} \to 0$. Si $(g(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es acotada, $\frac{\|f\circ g(x_n)\|}{\|x_n\|} \to 0$ y si

$$\|g(x_n)\| \to \infty,\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\|f\circ g(x_n)\|}{\|x_n\|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\|f(g(x_n))\|}{\|g(x_n)\|}\, \frac{\|g(x_n)\|}{\|x_n\|} = 0 \ \therefore |f\circ g| = 0$$

Si $|g| > 0$, $|f| < \infty$, $|g| < \infty$, dado $\varepsilon > 0$ tomemos $a, b \geq 0$ tales que $a < |f| + \frac{\varepsilon}{|g|}$ y $\|f(x)\| \leq a\|x\| + b$ para todo $x \in E$, entonces $\|f\circ g(x)\| \leq a\|g(x)\| + b \leq \alpha a\|x\| + (b + a\beta)$ si $\alpha, \beta \geq 0$ satisfacen que $\|g(x)\| \leq \alpha\|x\| + \beta$. Por lo anterior $|f\circ g| \leq \alpha a$, de aquí que $|f\circ g| \leq |g|\, a \leq |f|\,|g| + \varepsilon$ y por lo tanto $|f\circ g| \leq |f|\,|g|$.

(f) De (a) se sigue que $d(f) = d(f-g+g) \leq |f-g| + d(g)$, así que $|d(f) - d(g)| \leq |f-g|$.

(g) Puesto que $f \circ f^{-1} = I = f^{-1} \circ f$, aplicando (b) obtenemos $1 \leq |f^{-1}|\, d(f)$ y por (e) $d(f)|f^{-1}| \leq 1$. Combinando ambas desigualdades, $d(f) = |f^{-1}|^{-1}$. ∎

La siguiente definición se debe a Kuratowski:

<u>2.2 Definición:</u> Sean $E$ un espacio de Banach y $A \in \mathcal{A}(E)$. La <u>medida de no-compacidad de Kuratowski</u> del conjunto $A$, que denotaremos por $\alpha(A)$, es $\alpha(A) := \inf\{\varepsilon > 0 : A$ admite una cubierta finita por conjuntos con diámetro menor o igual que $\varepsilon\}$. En el caso de que $A$ no sea acotado definimos $\alpha(A) = \infty$.

<u>2.3 Proposición:</u> Si $E$ es un espacio de Banach, $A, B \subset E$, entonces:

(a) $\alpha(A) = 0$ si y sólo si $\bar{A}$ es compacto

(b) Si $A \subset B$, $\alpha(A) \leq \alpha(B)$

(c) $\alpha(A \cup B) = \max\{\alpha(A), \alpha(B)\}$

(d) $\alpha(D(A;\varepsilon)) \leq \alpha(A) + 2\varepsilon$, donde $D(A;\varepsilon) = \{x \in E : dist(x, A) < \varepsilon\}$

(e) $\alpha(\lambda A) = |\lambda|\, \alpha(A)$, $\lambda$ escalar

(f) $\alpha(A+B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$

(g) $\alpha(\overline{co}(A))=\alpha(A)$, donde $\overline{co}(A)$ es la envolvente convexa cerrada de $A$.

(h) $\alpha(S[0;r])=2r$ si y sólo si $\dim E=\infty$.

Una demostración de (a)-(h) se encuentra en (Díaz, H. Medidas de no compacidad y sus aplicaciones al Análisis. Tesis Profesional. U.N.A.M. 1975).

Por medio de la medida de no-compacidad introduciremos algunas propiedades globales de una función continua $f:E\to F$ (Recuérdense las consideraciones intuitivas hechas en §1).

__2.4 Definición.__ Sea $f:E\to F$ continua y hagamos:

$\alpha(f):=\inf\{K\geq 0: \alpha(f(A))\leq K\alpha(A)$ para todo $A\in\mathcal{A}(E)\}$ y

$\beta(f):=\sup\{c\geq 0: \alpha(f(A))\geq c\alpha(A)$ para todo $A\in\mathcal{A}(E)\}$.

Si $\alpha(f)<\infty$, $f$ se llama __$\alpha$-Lipschitz__ y se dice que $f$ es una __$\alpha$-contracción__ si $\alpha(f)<1$.

Obsérvese que $f$ es compacta si y sólo si $\alpha(f)=0$. Claramente cualquier función de Lipschitz es $\alpha$-Lipschitz. El recíproco no es cierto. Sea $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ tal que $f(z)=e^z$, entonces $f$ es $\alpha$-Lipschitz por ser compacta, sin embargo $\sup\{\|f'(z)\|: z\in\mathbb{C}\}=\sup\{|e^z|: z\in\mathbb{C}\}=\infty$, por lo tanto

$f$ no es de Lipschitz.

2.5 Proposición: Sea $f: E \to F$ continua, entonces (siempre que tenga sentido)

(a) $\alpha(\lambda f) = |\lambda|\,\alpha(f)$, $\beta(\lambda f) = |\lambda|\,\beta(f)$, $\lambda$ escalar

(b) $|\alpha(f) - \alpha(g)| \leq \alpha(f-g) \leq \alpha(f) + \alpha(g)$.

(c) Si $E$ tiene dimensión infinita, $\beta(f) \leq \alpha(f)$. Si $E$ es un espacio de dimensión finita, $\alpha(f) = 0$ y $\beta(f) = \infty$.

(d) $\beta(f) - \alpha(g) \leq \beta(f+g) \leq \alpha(f) + \beta(g)$

(e) $\beta(f)\,\beta(g) \leq \beta(f \circ g) \leq \alpha(f)\,\beta(g)$

(f) $\beta(f)\,\alpha(g) \leq \alpha(f \circ g) \leq \alpha(f)\,\alpha(g)$

(g) $|\beta(f) - \beta(g)| \leq \alpha(f-g)$

(h) Si $E$ tiene dimensión infinita y $f$ es compacta, $\alpha(\lambda I - f) = |\lambda| = \beta(\lambda I - f)$, $\lambda$ escalar.

(i) Si $\beta(f) > 0$, para cada conjunto cerrado y acotado $B$, $f|_B$ es propia. Si además $d(f) > 0$, $f$ es propia.

(j) Si $f$ es homeomorfismo, $\beta(f) = [\alpha(f^{-1})]^{-1}$.

Dem: (a) Si $\dim E < \infty$, $\alpha(f) = 0 = \alpha(\lambda f)$. Si $\dim E = \infty$, el resultado es consecuencia de que $\alpha(f) = \sup\left\{\frac{\alpha(f(A))}{\alpha(A)} : \alpha(A) > 0\right\}$ y que $\alpha(\lambda A) = |\lambda|\,\alpha(A)$.

(b) Sean $\dim E = \infty$ y $A \in \mathcal{A}(E)$ tal que $\alpha(A) > 0$, entonces $\frac{\alpha((f+g)(A))}{\alpha(A)} \leq \frac{\alpha(f(A))}{\alpha(A)} + \frac{\alpha(g(A))}{\alpha(A)}$. Tomando supremos en ambos lados de las desigualdades obtenemos que

$\alpha(f+g) \leq \alpha(f)+\alpha(g)$. Además, $\alpha(f)=\alpha(f+g-g) \leq \alpha(f-g)+\alpha(g)$, por lo tanto $|\alpha(f)-\alpha(g)| \leq \alpha(f-g)$.

(c) Las igualdades en el caso $\dim E<\infty$ se obtienen directamente de las definiciones. Cuando $\dim E=\infty$, $\beta(f)$ se puede definir como $\beta(f)=\inf\left\{\frac{\alpha(f(A))}{\alpha(A)} : \alpha(A)>0\right\}$ y de aquí $\beta(f) \leq \alpha(f)$.

(d) Si $\dim E<\infty$, las desigualdades son obvias. Si $\dim E=\infty$, úsese la caracterización de $\beta$ y procédase como en 2.1 (b)

Para probar (e), (f) y (g) procédase como en 2.1

(h) Por (b) y (a), $|\lambda|=|\alpha(f)-\alpha(\lambda I)| \leq \alpha(f-\lambda I) \leq \alpha(f)+\alpha(\lambda I)=|\lambda|$.

Por (d) y (a), $|\lambda|=\beta(\lambda I)-\alpha(f) \leq \beta(\lambda I-f) \leq \beta(\lambda I)+\alpha(f)=|\lambda|$.

(i) Supongamos que $\beta(f)>0$, $\alpha(f)>0$ y sea $K\subset F$ compacto. Como $\alpha(f)>0$, $\|f(x)\|\to\infty$ cuando $\|x\|\to\infty$, por lo que la imágen inversa según $f$ de un conjunto acotado, es acotada. Si $0<r<\beta(f)$, $\alpha(f(B)) \geq r\alpha(B)$ para cualquier $B\in\mathcal{A}(E)$. Sea $B=f^{-1}(K)$, entonces $r\alpha(f^{-1}(K)) \leq \alpha(f(f^{-1}(K))) \leq \alpha(K)=0$ y $f^{-1}(K)$ es cerrado, por lo tanto $f^{-1}(K)$ es compacto, i.e. $f$ es propia. La misma demostración funciona para probar que si $\alpha(f)=0$, $f|_B$ es propia, para todo conjunto cerrado y acotado $B\subset E$.

(j) Análogo a 2.1 (g). $\square$

Comparando los enunciados de las Proposiciones 2.1 y 2.5 podremos notar la analogía entre $\alpha(\cdot)$ y $|\cdot|$ y la analogía entre $\beta(\cdot)$ y $d(\cdot)$.
Es de interés saber que tipo de información se puede obtener de $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$, $|\cdot|$ y $d(\cdot)$ en el contexto de los operadores lineales acotados.

<u>2.6 Proposición.-</u> Sea $L \in \mathcal{L}(E,F)$, entonces

(a) $d(L) > 0$ si y sólo si $L$ es acotado inferiormente

(b) $d(L) \leq \beta(L)$

(c) $\alpha(L) \leq \|L\|$

(d) Si $L \in ISO(E,F)$, entonces $d(L) = \|L^{-1}\|^{-1}$

(e) $\beta(L) > 0$ si y sólo si $\operatorname{Im} L$ es cerrado y $\dim \operatorname{Ker} L < \infty$

(f) $\beta(L') > 0$ si y sólo si $\operatorname{Im} L$ es cerrado y $\dim \operatorname{Coker} L < \infty$.

<u>Dem.-</u> (a) Es claro a partir de las definiciones.

(b) y (c) Como $d(L) = \inf\{\frac{\|Lx\|}{\|x\|} : x \neq 0\}$, $d(L)\|x\| \leq \|Lx\| \leq \|L\|\|x\|$

Así, para $A \in \mathcal{A}(E)$ obtenemos que $d(L)\alpha(A) \leq \alpha(L(A)) \leq \|L\|\alpha(A)$, por lo cual $d(L) \leq \beta(L)$ y $\alpha(L) \leq \|L\|$.

(d) Aplíquese 2.5 (j) y úsese que $\|L\| = |L|$

(e) Si $\beta(L) > 0$, por 2.5 (i) $L|_{S[0;1]}$ es propia y en consecuencia $(L|_{S[0;1]})^{-1}(0) = \operatorname{Ker} L \cap S[0;1]$ es compacto,

así que $\dim \operatorname{Ker} L < \infty$. En esta situación existe un subespacio cerrado $E_0$ de $E$ tal que $E = E_0 \oplus \operatorname{Ker} L$.
Sea $(y_n)_{n\geq 1}^{\infty} \subset \operatorname{Im} L$ tal que $y_n \to y_0 \in F$ y escojamos $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty} \subset E_0$ tal que $Lx_n = y_n$. Si existe $R>0$ tal que $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty} \subset B := B[0,R]$, definamos $C = B \cap E_0$, entonces $L|_C$ es propia. Como $K := \{y_0\} \cup \{y_n\}_{n\geq 1}^{\infty}$ es compacto, y $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty} \subset (L|_C)^{-1}(K)$, podemos suponer que $x_n \to x_0$ y por la continuidad de $L$, $Lx_0 = y_0$. Supongamos ahora que $\|x_n\| \to \infty$ y sea $z_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$, entonces $L(z_n) = \frac{L(x_n)}{\|x_n\|} = \frac{y_n}{\|x_n\|} \to 0$. Haciendo $A = (z_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ se tiene que

$\alpha(L(A)) = 0$. Como $0 = \alpha(L(A)) \geq \beta(L)\,\alpha(A)$ y $\beta(L) > 0$, necesariamente $\alpha(A) = 0$, o.e. $\bar{A}$ es compacto; en vista de lo cual podemos suponer que $z_n \to z$ y obviamente $\|z\| = 1$, pero $Lz = 0$ y ésto viola la condición $E_0 \cap \operatorname{Ker} L = \{0\}$.

Si $\operatorname{Im} L$ es cerrado y $\dim \operatorname{Ker} L < \infty$, $E = E_0 \oplus \operatorname{Ker} L$, donde $E_0$ es un subespacio cerrado de $E$. Sean $P_0 : E \to E_0$ la proyección canónica, $P_1 = I - P_0$ y $\hat{L} = L|_{E_0}$. Puesto que $\operatorname{Im} L$ es cerrado, $\hat{L}$ es un isomorfismo de $E_0$ en $\operatorname{Im} \hat{L} = \operatorname{Im} L$. Por (a) $d(\hat{L}) > 0$ y por (b) $\beta(\hat{L}) > 0$. Además $L = \hat{L} \circ P_0$ y por 2.5(e) $\beta(L) \geq \beta(\hat{L})\,\beta(P_0)$. Como $\operatorname{Im} P_1 \subset \operatorname{Ker} L$, $P_1$ es compacta. Finalmente, por

2.5 (h) $\beta(P_0)=1$ y por lo tanto $\beta(L)>0$.

(f) Si $\beta(L')>0$, por (e), $\dim \operatorname{Ker} L'<\infty$ e $\operatorname{Im} L'$ es cerrado, y ésto último implica que $\operatorname{Im} L$ es cerrado. Debido a que $\operatorname{Ker} L'=(\operatorname{Im} L)^{0}$, existe un subespacio $N$ de $F$ tal que $\dim N=\dim \operatorname{Ker} L'$ y $F=\operatorname{Im} L \oplus N$. Por definición $\operatorname{Coker} L=F/\operatorname{Im} L=N$, por lo tanto $\dim \operatorname{Coker} L<\infty$. Recíprocamente, si $\operatorname{Im} L$ es cerrado y $\dim \operatorname{Coker} L<\infty$, se tiene que $\operatorname{Im} L'$ es cerrado. Sea $N$ un subespacio de $F$ tal que $F=\operatorname{Im} L\oplus N$, entonces $\operatorname{Coker} L=F/\operatorname{Im} L=N$ y $\operatorname{Ker} L'=(\operatorname{Im} L)^{0}=(F/\operatorname{Im} L)'=N'$. Así, $\dim \operatorname{Ker} L'<\infty$ y por el resultado probado en (e), $\beta(L')>0$. ∎

De (e) y (f) vemos que $L$ es un operador de Fredhdm si y sólo si $\beta(L)>0$ y $\beta(L')>0$.

A continuación se muestra que las desigualdades $\beta(L)\geq d(L)$ y $\alpha(L)\leq\|L\|=|L|$ no son válidas en general en el caso no lineal.

Sean $E$ un espacio de Banach de dimensión infinita y $r: E\to B[0;1]$ tal que $r(x)=\begin{cases} x & \text{si } \|x\|\leq 1 \\ \frac{x}{\|x\|} & \text{si } \|x\|\geq 1\end{cases}$, entonces

$\frac{\|r(x)\|}{\|x\|}=\frac{1}{\|x\|}$ si $\|x\|\geq 1$, i.e. $|r|=0$. Como $B[0;1]$ no es compacto, $\alpha(r)\geq \frac{\alpha(r(B[0;1]))}{\alpha(B[0;1])}=1$.

Sea $f: \ell^2 \to \ell^2$ tal que $f(x) = (\|x\|, 0, \dots, 0, \dots)$. Por ser $f$ un operador de dimensión finita, $\beta(f) = 0$; y puesto que $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = 1$, $d(f) = 1$.

## §3.- Transformaciones establemente solubles

Ahora introduciremos una clase de funciones que será relevante en la teoría espectral no lineal. Como se verá mas adelante las transformaciones establemente solubles son un buen candidato para extender el concepto de epimorfismo lineal al caso no lineal.

<u>3.1 Definición.-</u> Se dice que una función continua $f: E \to F$ es <u>establemente</u> <u>soluble</u> si la ecuación $f(x) = h(x)$ tiene una solución para cualquier función compacta $h: E \to F$ tal que $|h| = 0$.

Debido a que las funciones constantes son compactas y tienen cuasinorma cero, las transformaciones establemente solubles son suprayectivas.

Para ver que el recíproco de este resultado no es cierto sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \frac{z}{\sqrt{|z|}}$ si $z \neq 0$, $f(0) = 0$, entonces

obviamente $f$ es continua, compacta, suprayectiva y $|f|=0$.
Si tomamos $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ y definimos $h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ por $h(z)=f(z)+z_0$, $h$ es compacta y $|h|=0$, pero no existen soluciones de $f(z)=h(z)$.

El primer ejemplo de transformación establemente soluble es la identidad $I:E\to E$ y esto es consecuencia del Teorema de punto fijo de Schauder (Ver 1.4). Antes de continuar con otros ejemplos de transformaciones establemente solubles mostraremos la equivalencia entre el Teorema de punto fijo de Schauder y la solubilidad estable de la identidad.

Que el Teorema de punto fijo de Schauder implica que $I$ es establemente soluble ya ha sido probado.

Sean ahora $f:E\to E$ compacta, $C$ un subconjunto cerrado, acotado y convexo de $E$ tal que $f(C)\subset C$ y sea $r:E\to C$ una retracción (Ver [D]), entonces $f\circ r:E\to E$ es compacta y $|f\circ r|=0$ ya que $C$ es acotado. Como la identidad es establemente soluble, existe una solución de la ecuación $f\circ r(x)=x$, pero $(f\circ r)(E)\subset C$; así que $x\in C$ y por lo tanto $x$ es un punto fijo de $f$.

A continuación caracterizaremos a las transformaciones establemente solubles entre los operadores lineales acotados. Para ello necesitaremos algunos resultados preliminares que han sido tomados de [Ho] (3.2, 3.3 y 3.4).

<u>3.2 Lema.-</u> Sean $\Omega$ un espacio paracompacto, $X$ un espacio vectorial normado y $F: \Omega \to \mathcal{P}(X)$ un portador semicontinuo inferior (esto es, $\{t \in \Omega : F(t) \cap \mathcal{O} \neq \phi\}$ es abierto en $\Omega$ para cualquier abierto $\mathcal{O}$ de $X$), con valores en subconjuntos convexos no vacíos de $X$, entonces, para cada $r>0$ existe una función continua $f: \Omega \to X$ tal que $\mathrm{dist}(f(t), F(t)) < r$ para todo $t \in \Omega$.

<u>Dem.-</u> Para cada $x \in X$ definamos $\mathcal{O}_x = \{t \in \Omega : \mathrm{dist}(x, F(t)) < r\} = \{t \in \Omega : F(t) \cap B(x; r) \neq \phi\}$, entonces $\{\mathcal{O}_x\}_{x \in X}$ es una cubierta abierta de $\Omega$. Por ser $\Omega$ paracompacto existe un refinamiento abierto localmente finito $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Sea $\{p_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una partición de la unidad subordinada a este refinamiento. Para cada $\alpha \in I$ sea $x(\alpha) \in X$ tal que $V_\alpha \subset \mathcal{O}_{x(\alpha)}$ y sea $f: \Omega \to X$ tal que $f(t) = \sum_{\alpha \in I} p_\alpha(t)\, x(\alpha)$. Para ver que esta suma está bien definida y que $f$ es continua recordemos que cada $t \in \Omega$ tiene una vecindad $U$ que intersecta sólo a un número finito de $V_\alpha$'s y en consecuencia $f|_U$ es una suma finita de funciones continuas.

Además, para cada $t \in \Omega$, $f(t)$ es una combinación convexa de puntos $x(\alpha)$ cada uno de los cuales pertenece al conjunto convexo $\{x \in X : dist(x, F(t)) < r\}$. Por lo tanto $dist(f(t), F(t)) < r$. □

Dado un portador $F: \Omega \to \mathcal{P}(X)$, una selección de $F$ es una función $f: \Omega \to X$ tal que $f(t) \in F(t)$ para cada $t \in \Omega$. El siguiente teorema de selección de Michael asegura la existencia de una selección continua para cierto tipo de portadores.([Mi])

<u>3.3 Teorema.-</u> Sean $\Omega$ un espacio paracompacto y $X$ un espacio de Banach. Si $F: \Omega \to \mathcal{P}(X)$ es un portador semicontinuo inferior con valores en subconjuntos cerrados, convexos y no vacíos de $X$, existe una selección continua $f: \Omega \to X$ de $F$.

<u>Dem.-</u> Por el Lema 3.2 existe una función continua $f_1: \Omega \to X$ tal que para cada $t \in \Omega$ $dist(f_1(t), F(t)) < \frac{1}{2}$. Supongamos que $f_1, \dots, f_n$ han sido construidas de tal manera que cada $f_i$ es continua y para cada $t \in \Omega$ se satisfacen: (a) $\| f_i(t) - f_{i-1}(t) \| < \frac{1}{2^{i-2}}$, $i = 2, \dots, n$, $t \in \Omega$ (b) $dist(f_i(t), F(t)) < \frac{1}{2^i}$ $i = 1, \dots, n$.

Sea $F_{n+1}: \Omega \to \mathcal{P}(X)$ tal que $F_{n+1}(t) = \{x \in F(t) : \|x - f_n(t)\| < \frac{1}{2^n}\}$. Como $dist(f_n(t), F(t)) < \frac{1}{2^n}$, $F_{n+1}(t) \neq \phi$ para cada $t \in \Omega$. Probaremos que $F_{n+1}$ es semicontinuo inferior. Para ello sean $\mathcal{O}$ abierto en $\mathfrak{X}$, $U=\{t\in\Omega: F_{n+1}(t)\cap\mathcal{O}\neq\phi\}$ y $t_0\in U$. En este caso existe $x_0\in F_{n+1}(t_0)\cap\mathcal{O}$ y de aquí que $x_0\in F(t_0)$ y $\|x_0-f_n(t_0)\|<\frac{1}{2^n}$. Sea $\lambda$ tal que $\|x_0-f_n(t_0)\|<\lambda<\frac{1}{2^n}$ y hagamos $Q:=\{x\in\mathfrak{X}: \|x-f_n(t_0)\|<\lambda\}$, $V_1:=\{t\in\Omega: F(t)\cap\mathcal{O}\cap Q\neq\phi\}$ y $V_2:=\{t\in\Omega: \|f_n(t)-f_n(t_0)\|<\frac{1}{2^n}-\lambda\}$, entonces $V_1$ es abierto por la semicontinuidad inferior de F, $V_2$ es abierto porque $f_n$ es continua y $t_0\in V_1\cap V_2\subset U$.

Aplicamos ahora el Lema 3.2 al portador $F_{n+1}$ para obtener una función continua $f_{n+1}:\Omega\to\mathfrak{X}$ tal que $\mathrm{dist}(f_{n+1}(t),F_{n+1}(t))<\frac{1}{2^{n+1}}$; pero si $t\in\Omega$ y $x\in F_{n+1}(t)$ satisface $\|x-f_n(t)\|<\frac{1}{2^{n+1}}$, entonces, puesto que $\|x-f_n(t)\|<\frac{1}{2^n}$; se tiene que $\|f_{n+1}(t)-f_n(t)\|\leq\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2^{n-1}}$ y como además $F_{n+1}(t)\subset F(t)$, $\mathrm{dist}(f_{n+1}(t),F(t))\leq \mathrm{dist}(f_{n+1}(t),F_{n+1}(t))<\frac{1}{2^{n+1}}$.

De esta manera hemos construído una sucesión de funciones continuas $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ que satisfacen (a) y (b). Por (a), la sucesión $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ es uniformemente de Cauchy, por lo tanto converge a una función continua $f:\Omega\to\mathfrak{X}$. Por (b) $f(t)\in F(t)$ para todo $t\in\Omega$. ∎

La forma del Teorema de selección de Michael que nos será de utilidad es conocida como el Teorema de

Bartle y Graves. (Ver [Mi]).

3.4 Teorema:- Sean $E$ y $F$ espacios de Banach y $L \in EPI(E,F)$, entonces, para cualquier $\lambda > 1$ existe una selección continua $f: F \to E$ de $L$ tal que

i) $f(ty) = t f(y)$, $t$ escalar

ii) $\|f(y)\| \leq \lambda \, dist(0, L^{-1}(y))$.

Dem.- $L$ es abierta por ser sobre. Si $\mathcal{O}$ es abierto en $E$, $\{y \in F : L^{-1}(y) \cap \mathcal{O} \neq \phi\} = L(\mathcal{O})$ es abierto en $F$, por lo cual el portador $G: F \to \mathcal{P}(E)$ definido por $G(y) = L^{-1}(y)$ es semicontinuo inferior.

Hagamos $G_1 = G|_{S_F[0;1]}$ y sea $\gamma: F \to \mathbb{R}$ tal que $\gamma(y) = \lambda \, dist(0, L^{-1}(y))$. Si $r \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \gamma^{-1}(-\infty, r)$, entonces $y_0 \in \{y \in F : L^{-1}(y) \cap B(0, \frac{r}{\lambda}) \neq \phi\}$ que es abierto y en consecuencia existe $\delta > 0$ tal que $L^{-1}(y) \cap B(0; \frac{r}{\lambda}) \neq \phi$ si $\|y - y_0\| < \delta$, i.e. $\gamma(y) = \lambda \, dist(0, L^{-1}(y)) < r$. Con ésto hemos probado que $\gamma$ es continua.

Definamos $G_2: S_F[0;1] \to \mathcal{P}(E)$ como $G_2(y) = G_1(y) \cap B_E(0; \gamma(y))$. Debido a la semicontinuidad inferior de $G_1$, $G_2$ hereda esta propiedad, por lo tanto el portador $G_3: S_F[0;1] \to \mathcal{P}(E)$ definido por $G_3(y) = \overline{G_2(y)}$ es también semicontinuo inferior.

Por el Teorema 3.3 existe una selección continua $g$ de $G_3$.

Definamos $h: F \to E$ como $h(y) = \begin{cases} \|y\| \, g\left(\frac{y}{\|y\|}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

entonces $h$ es continua y positivamente homogénea. Si $y \in F$ es tal que $\|y\|=1$, entonces $h(y) = g(y) \in G_3(y)$, por lo tanto $\|h(y)\| \leq \gamma(y) = \lambda \, dist(0, L^{-1}(y))$. Si $y \in F \setminus \{0\}$, $\|h(y)\| = \|y\| \, \|g(\frac{y}{\|y\|})\| \leq \|y\| \, \gamma(\frac{y}{\|y\|}) = \lambda \, dist(0, L^{-1}(y))$, y así $h$ satisface que $\|h(y)\| \leq \lambda \, dist(0, L^{-1}(y))$ para todo $y \in F$. Para obtener una selección de $L$ que satisfaga los requerimientos de homogeneidad, distinguiremos los casos en que el campo de escalares es $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Si el campo es real hacemos $f(y) = \frac{1}{2}(h(y) - h(-y))$, entonces $f$ es continua, homogénea y satisface (i).

En el caso complejo definimos $f(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-it} h(e^{it} y) \, dt$.

Para cada $y \in F$ el integrando es una función continua de $\mathbb{R}$ en $E$, es periódica con período $2\pi$ y la integral está definida como el límite de las sumas de Riemann, $f(y) = \frac{1}{2\pi} \lim \sum_{j=1}^{n} e^{-it_j'} h(e^{it_j'} y)(t_j - t_{j-1})$, donde

$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 2\pi$ y $t_j' \in [t_{j-1}, t_j]$. La existencia de dicho límite se prueba de igual manera que en el caso de la integral usual de Riemann. Puesto que $\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1}) = 1$, $f(y) \in \overline{co}\,(\{ e^{-it} h(e^{it} y) : t \in \mathbb{R}\})$ y por lo tanto $f(y)=\sum_{k=1}^{m} \alpha_k e^{-it_k} h(e^{it_k} y)$, donde $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k=1$ y de ésto se sigue que $\|f(y)\| \leq \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \|h(e^{it}y)\| \leq \lambda \operatorname{dist}(0, L^{-1}(y))$.

Si $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset F$ es tal que $y_n \to y_0$, como $h$ es uniformemente continua en el compacto $\{\alpha y_n : \alpha \in \mathbb{C}, |\alpha|=1, n \in \mathbb{N}\}$, $\lim e^{-it} h(e^{it} y_n) = e^{-it} h(e^{it} y_0)$ uniformemente en $t$ y por lo tanto $\lim f(y_n) = f(y_0)$, esto es, $f$ es continua.

Finalmente, debido a la periodicidad del integrando, se tiene que para $s \in \mathbb{R}$, $f(e^{is} y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-it} h(e^{i(t+s)} y)\, dt =$

$$= \frac{e^{is}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(t+s)} h(e^{i(t+s)} y)\, dt = \frac{e^{is}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-it} h(e^{it} y)\, dt = e^{is} f(y),$$

y combinando ésto con el hecho de que $f$ es positivamente homogénea, pues $h$ lo es, vemos que $f$ es homogénea. $\square$

<u>3.5 Observación</u>. Probaremos ahora que la selección $f$ de $L^{-1}$ que se acaba de construir es también casi-acotada. En efecto, debido a la suprayectividad de $L$, existe $\delta > 0$ tal que $B_F[0; \delta] \subset L(B_E(0;1))$. Así, si $y \in F$, $\|y\| = \delta$; existe $x \in E$ tal que $\|x\| \leq \frac{1}{\delta}$, $Lx = y$; pero en ese caso $\|f(y)\| \leq \lambda \operatorname{dist}(0, L^{-1}(y)) \leq \lambda \operatorname{dist}(0, x) \leq \frac{\lambda}{\delta}$, lo cual prueba que $f(S_F[0;1])$ es acotado y, puesto que $f$ es homogénea, $|f| = \sup\{\|f(y)\| : \|y\|=1\} < \infty$.

El siguiente resultado es de fundamental importancia en la teoría espectral no lineal.

<u>3.6 Teorema.-</u> Sea $L \in \mathcal{L}(E,F)$, entonces $L$ es establemente soluble si y sólo si $L \in EPI(E,F)$.

<u>Dem.-</u> La parte "sólo si" ya ha sido mencionada.

Sea $L \in EPI(E,F)$, entonces por 3.4 y 3.5 existe una selección continua y cuasi-acotada $f$ de $L^{-1}$.

Sea $h: E \to F$ compacta tal que $|h| = 0$, entonces $h \circ f: F \to F$ es compacta y $|h \circ f| \leq |h|\,|f| = 0$. Por ser $I_F$ establemente soluble existe una solución de la ecuación $y = h(f(y))$. Haciendo $x = f(y)$ tenemos que $Lx = Lf(y) = y = h(x)$. □

El Teorema anterior asegura la existencia de soluciones de la ecuación $Lx = h(x)$ si $L \in EPI(E,F)$, $h: E \to F$ es compacta y $|h| = 0$. ¿Qué se puede decir acerca del conjunto de soluciones de esta ecuación? En esa dirección tenemos lo siguiente:

<u>3.7 Proposición.-</u> Sean $L \in EPI(E,F)$, $h: E \to F$ compacta tal que $|h| = 0$. Si $\operatorname{Ker} L \neq \{0\}$, el conjunto de soluciones de la ecuación $Lx = h(x)$ no es acotado

**Dem:** Sean $z \in \operatorname{Ker} L$, $f: F \to E$ una selección continua de $L^{-1}$ y $f_z: F \to E$ tal que $f_z(y) = f(y) + z$, entonces $f_z$ es también una selección continua de $L^{-1}$ y $|f_z| = |f|$, por lo tanto $|h \circ f_z| = 0$.
Sea $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \operatorname{Ker} L$ tal que $\|z_n\| \to \infty$, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in F$ que es solución de la ecuación $y_n = h(f_{z_n}(y_n)) = h(f(y_n) + z_n)$. Hagamos $x_n = f_{z_n}(y_n)$, entonces $Lx_n = Lf_{z_n}(y_n) = y_n = h(x_n)$. Bastará probar que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no es acotado.
Supongamos que existe $c > 0$ tal que $\|x_n\| = \|f(y_n) + z_n\| \leq c$. Como $\|f(y_n) + z_n\| \geq \|z_n\| - \|f(y_n)\|$, necesariamente se debe cumplir que $\|f(y_n)\| \to \infty$, pero $f$ es cuasi-acotada y este hecho implica que $\|y_n\| \to \infty$, y si eso sucediera, también ocurriría que $\|y_n\| = \|h(f(y_n) + z_n)\| \to \infty$, lo cual es una contradicción porque $h$ es cuasi-acotada y $(f(y_n) + z_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotado. De lo anterior concluímos que $\|x_n\| \to \infty$. $\square$

Si $X$ es un espacio topológico, $h_t: X \to X \times [0,1]$ denotará la inmersión canónica $h_t(x) = (x, t)$.
El siguiente resultado muestra que bajo suposiciones de tipo homotópico se pueden resolver ecuaciones de la forma $f(x) = h(x)$ donde $f: E \to F$ es establemente soluble y $h: E \to F$ es compacta pero no necesariamente cuasi-acotada.

<u>3.8 Teorema.-</u> Sean $f: E \to F$ establemente soluble y $H: E \times [0,1] \to F$ continua y compacta tal que $H(x,0) = 0$ para todo $x \in E$ ($H|_{t_0} \equiv 0$) y sea $S = \{x \in E : f(x) = H(x,t)$ para algún $t \in [0,1]\}$. Si $f(S)$ es acotado, entonces la ecuación $f(x) = H(x,1)$ tiene una solución.

<u>Dem.-</u> Como $f(S)$ es acotado existe $r > 0$ tal que $\overline{f(S)} \subset B(0;r)$. Sea $\varphi: F \to [0,1]$ tal que

$$\varphi(y) = \frac{dist(y, F \setminus B(0;r))}{dist(y, \overline{f(S)}) + dist(y, F \setminus B(0;r))}, \text{ entonces}$$

$\varphi(y) = 1$ si $y \in \overline{f(S)}$, $\varphi(y) = 0$ si $\|y\| \geq r$.

Sea $\pi: F \to B_F[0;r]$ la retracción radial $\pi(y) = \begin{cases} y & \text{si } \|y\| \leq r \\ \frac{ry}{\|y\|} & \text{si } \|y\| > r. \end{cases}$

La composición $\pi \circ H \circ \psi: E \to F$, donde $\psi: E \to E \times [0,1]$ es tal que $\psi(x) = (x, \varphi f(x))$, es continua, compacta y $|\pi \circ H \circ \psi| = 0$; por lo tanto existe una solución de la ecuación $f(x) = \pi H(x, \varphi f(x))$. Denotemos por $x_0$ a una de tales soluciones, entonces $\|f(x_0)\| \leq r$. Si suponemos que $\|f(x_0)\| = r$, entonces $f(x_0) = \pi H(x_0, 0) = 0$. Siendo incompatibles las igualdades anteriores concluimos que $\|f(x_0)\| < r$. Entonces necesariamente $f(x_0) = H(x_0, \varphi f(x_0))$, es decir, $x_0 \in S$ y por lo tanto $\varphi f(x_0) = 1$, i.e. $f(x) = H(x,1)$. $\square$

En vista del Teorema anterior uno podría preguntarse si la propiedad de ser establemente soluble es un invariante homotópico; es decir, si toda homotopía que empieza en una transformación establemente soluble termina en una transformación del mismo tipo. La respuesta es no. Consideremos $H: \mathbb{C} \times [0,1] \to \mathbb{C}$ definida por $H(z,t) = \begin{cases} z & \text{si } |z| \leq 1 \\ t\frac{z}{|z|} + (1-t)z & \end{cases}$

si $|z| > 1$, entonces $H$ es continua, compacta, $H h_0 = I_{\mathbb{C}}$ y $H h_1$ es la retracción radial de $\mathbb{C}$ en la bola unitaria que no es establemente soluble por no ser suprayectiva.

El siguiente resultado debido a H. Schaefer es consecuencia inmediata del Teorema 3.8. (Ver [Scha]).

<u>3.9 Corolario:</u> Sea $f: E \to E$ continua y compacta y supongamos que el conjunto $S = \{x \in E : x = t f(x) \text{ para algún } t \in [0,1]\}$ es acotado, entonces $f$ tiene un punto fijo.

<u>Dem.-</u> La homotopía $H: E \times [0,1] \to E$ definida como $H(x,t) = t f(x)$ es compacta. □

El Teorema que se enuncia a continuación es de vital importancia para probar que el espectro de un operador no lineal es cerrado y es también una generalización del Teorema de punto fijo de Schauder.

<u>3.10 Teorema:</u> Sean $f: E \to F$ establemente soluble, $\mathfrak{X} \subset E$ cerrado, $h: \mathfrak{X} \to F$ continua. Supóngase que

(i) $f^{-1}(\bar{c}_0(h(\mathfrak{X}))) \subset \mathfrak{X}$

(ii) $h(\mathfrak{X})$ es acotado

(iii) $\alpha(f(A)) = \alpha(h(A))$ implica que $\bar{A}$ es compacto,

entonces la ecuación $f(x) = h(x)$ tiene una solución $x \in \mathfrak{X}$.

<u>Dem:</u> Sean $x_0 \in \mathfrak{X}$ y $x_1 \in f^{-1}(h(x_0))$, entonces $f(x_1) = h(x_0)$. Así que, de manera inductiva podemos construir una sucesión $(x_n) \subset \mathfrak{X}$ tal que $f(x_n) = h(x_{n-1})$. Sea $A = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces $f(A) = f(x_0) \cup h(A)$ y por (ii) $h(A)$ es acotado. Como $\alpha(f(A)) = \alpha(h(A))$, por (iii) $\bar{A}$ es compacto.

Denotemos por $A'$ al conjunto de puntos de acumulación de $A$.

El hecho de que $\mathfrak{X}$ sea cerrado implica que $A' \subset \mathfrak{X}$. Probaremos ahora que $A' \subset f^{-1}(h(A'))$. Para ello consideremos un elemento $x$ de $A'$ y una sucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty} \subset A$ que converja a $x$. De la continuidad de $f$ vemos que $h(x_{n_k - 1}) = f(x_{n_k}) \to f(x)$ y si $z$ es un punto límite de $(x_{n_k - 1})$ obtenemos que $h(z) = f(x)$.

Hagamos $\mathfrak{M} = \{M \subset \mathfrak{X} : A' \subset M,\ M \text{ es cerrado y } f^{-1}(\bar{c}_0 h(M)) \subset M\}$. La familia $\mathfrak{M}$ es no vacía pues $\mathfrak{X}$ pertenece a ella, y definamos ahora $M_0 = \cap\{M : M \in \mathfrak{M}\}$. Afirmamos que $f^{-1}(\bar{c}_0 h(M_0)) = M_0$. Sabemos que $f^{-1}(\bar{c}_0 h(M_0)) \subset f^{-1}(\bar{c}_0 h(M)) \subset$

$M$ para cada $M \in \mathfrak{M}$, por lo que $f^{-1}(\overline{co}\, h(M_0)) \subset M_0$. De la definición de $M_0$ se sigue que para probar la afirmación bastard mostrar que $M_1 := f^{-1}(\overline{co}\, (h(M_0))$ pertenece a $\mathfrak{M}$. Ya que $M_1$ es cerrado y $M_1 \subset M_0$, $\overline{co}\, h(M_1) \subset \overline{co}\, h(M_0)$, por lo tanto $f^{-1}(\overline{co}\, h(M_1)) \subset f^{-1}(\overline{co}\, h(M_0)) = M_1$. Puesto que $A' \subset M_0$, $h(A') \subset h(M_0) \subset \overline{co}\, (h(M_0))$; entonces $f^{-1}(h(A')) \subset M_1$ y se ha probado ya que $A' \subset f^{-1} h(A')$; por lo tanto $A' \subset M_1$ y la afirmación queda demostrada.

La condición (ii) implica que $h(M_0)$ es acotado y, puesto que $f$ es suprayectiva, $\alpha(\overline{co}\, h(M_0)) = \alpha(h(M_0)) = \alpha(f(M_0))$. Por (iii) $M_0$ es compacto. El Teorema de extensión de Dugundji ([D]) nos asegura que la función $h: M_0 \to h(M_0)$ se puede extender a una función continua $g: E \to \overline{co}\, h(M_0)$. Como $\overline{g(E)}$ es compacto, $g$ es compacta y $|g| = 0$. Por ser $f$ establemente soluble la ecuación $f(x) = g(x)$ tiene una solución $x_0 \in E$, pero $f(x_0)$ pertenece a $\overline{co}\, h(M_0)$, por lo cual $x_0 \in f^{-1}(\overline{co}\, h(M_0)) = M_0$ y de aquí que $f(x_0) = g(x_0) = h(x_0)$. □

La siguiente generalización del Teorema de punto fijo de Schauder debida a Darbo es consecuencia de 3.10 ([Da])

<u>3.11 Corolario.</u>- Sean $C$ un subconjunto cerrado, acotado y

convexo de un espacio de Banach $E$ y sea $f: C\to C$ una $\alpha$-contracción ($\alpha(f)<1$), entonces $f$ tiene un punto fijo $x\in C$.

Dem.- Aplíquese el Teorema 3.10 con $f=I$, $\mathbb{X}=C$. □

Ejemplos adicionales de transformaciones establemente solubles se obtienen mediante los siguientes hechos:

3.12 Lema.- Sean $E, F, G$ espacios de Banach, entonces

i) Si $f: E\to F$ es establemente soluble y $r: G\to E$ es continua con un inverso derecho cuasi-acotado $s: E\to G$, entonces $g=f\circ r: G\to F$ es establemente soluble.

ii) Si $f: E\to F$ es establemente soluble y $g: F\to G$ tiene un inverso derecho cuasi-acotado $s: G\to F$, entonces $g\circ f: E\to G$ es establemente soluble.

iii) Si $f: E\to F$ y $g: G\to E$ son continuas, $g$ es cuasi-acotada y $f\circ g: G\to F$ es establemente soluble, entonces $f$ es establemente soluble.

Dem.- i) Si $h: G\to F$ es compacta y $|h|=0$, entonces $h\circ s: E\to F$ es compacta y $|h\circ s|\leq |h|\, |s|=0$, por lo tanto existe una solución de $f(x)=h(s(x))$, por lo que si $y=s(x)$, $h(y)=f(x)=f(r(s(x)))=fr(y)$.

ii) y iii) se prueban de manera análoga. □

Por ejemplo, la función $f: E \to E$ definida por $f(x) = \|x\| x$ tiene inverso dado por $f^{-1}(y) = \frac{1}{\sqrt{\|y\|}}\, y$ si $y \neq 0$, $f^{-1}(0) = 0$, que es cuasi-acotada. Por 3.12 (ii) $f$ es establemente soluble.

Un campo vectorial compacto es una función $f: E \to E$ de la forma $f = I - g$, donde $g$ es compacta. Si existe $r > 0$ tal que $f^{-1}(0) \subset B(0; r)$, está definido el grado de Leray-Schauder (ó de Brower si $E$ tiene dimensión finita) $\deg(f, B(0;r), 0)$.

En sus notas Vignoli asegura que si $f$ es un campo vectorial compacto, $f^{-1}(0) \subset B(0;r)$ y $\deg(f, B(0;r), 0) \neq 0$, entonces $f$ es establemente soluble. Esto no es cierto en general. Para probarlo consideremos $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, entonces, para cualquier $t \in [0,1]$, la única solución de $t h(x) = x$ es $x = 0$. Además $x - h(x) =$

$$\begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Sea $g: \ell^\infty \to \ell^\infty$ la función definida por $g(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (h(x_1), 0, \dots, 0, \dots)$, entonces $g$ es compacta y la única solución, para $t \in [0,1]$, de $t g(\bar{x}) = \bar{x}$ es $\bar{x} = 0$. Por la propiedad de invarianza homotópica del grado, se tiene que $\deg(I - g, B(0;1), 0) = \deg(I, B(0;1), 0) = 1$, sin embargo $I - g$

no es establemente soluble porque no es soprayectiva. El problema es que $d(I-g)=0$.
Hagamos la suposición adicional $d(I-g)>0$. Sea $h:E\to E$ compacta tal que $|h|=0$, entonces existe $s>r$ tal que $\|x-g(x)\|>\|h(x)\|$ para $\|x\|\geq s$, en particular, las soluciones de $x=g(x)+t\,h(x)$ pertenecen a $B(0;s)$. Por las propiedades de localización e invarianza homotópica del grado,
$\deg(I-(g+h),B(0;s),0)=\deg(I-(g+h),B(0;r),0)=$
$\deg(I-g,B(0;r),0)\neq 0$ y por la propiedad de existencia de soluciones, hay una $x\in B(0;s)$ tal que $[I-(g+h)](x)=0$, i.e. $x-g(x)=h(x)$, así que $I-g$ es establemente soluble.
Como dato curioso añadiremos que un campo vectorial compacto $I-g$ puede ser establemente soluble y no cumplir la condición $d(I-g)>0$, como lo ejemplifica $f(x)=x\operatorname{sen}x$.

## §4.- Transformaciones regulares

En esta sección estudiaremos a la clase de las transformaciones regulares, mismas que representan una extensión al caso no lineal del concepto de isomorfismo lineal.

<u>4.1 Definición.-</u> Una función continua $f:E\to F$ es <u>regular</u>

si es establemente soluble y $d(f)>0$, $\beta(f)>0$.

La identidad $I: E\to E$ es regular ya que es establemente soluble y $\beta(I)=1=d(I)$.
A continuación caracterizaremos a las transformaciones regulares entre los operadores lineales acotados.

<u>4.2 Teorema.-</u> Sea $L\in \mathcal{L}(E,F)$, entonces $L$ es regular si y sólo si $L\in ISO(E,F)$.
<u>Dem.-</u> Si $L$ es regular, $L\in BB(E,F)$ porque $d(L)>0$ y es suprayectiva por ser establemente soluble.
Sea $L\in ISO(E,F)$, entonces $d(L)=\|L^{-1}\|^{-1}>0$ y $\beta(L)\geq d(L)$ y puesto que $L\in EPI(E,F)$, $L$ es establemente soluble. ▪

El siguiente resultado muestra que la propiedad de ser regular es invariante bajo perturbaciones pequeñas.

<u>4.3 Proposición.-</u> Sea $f:E\to F$ regular y sea $g:E\to F$ tal que $\alpha(g)<\beta(f)$ y $|g|<d(f)$, entonces $f+g$ es regular.
<u>Dem.-</u> Se tiene que $d(f+g)\geq d(f)-|g|>0$ y que $\beta(f+g)\geq \beta(f)-\alpha(g)>0$.
Sea $k:E\to F$ continua tal que $|k|<d(f)$ y $\alpha(k)<\beta(f)$ y sean $b,c\in\mathbb{R}^+$ tales que $|k|<b<c<d(f)$, entonces exis-

ten $a, r \in \mathbb{R}^+$ tales que $\|k(x)\| \leq a + b\|x\|$ y $\|f(x)\| \geq c(\|x\| - r)$.
(Para la última desigualdad tómese $r>0$ tal que $\|f(x)\| \geq c\|x\|$ si $\|x\| \geq r$).

Sea $\rho > \frac{cr+a}{c-b}$, entonces $a+b\rho < c(\rho - r)$. Aplicaremos el Teorema 3.10 con $X = B_E[0;\rho]$. De la elección de $a$ y $b$ vemos que $k(X) \subset B_F[0; a+b\rho]$.

Sea $x \in E$ tal que $f(x) \in B_F[0; a+b\rho]$, entonces $a+b\rho \geq \|f(x)\| \geq c(\|x\| - r)$, por lo tanto $\|x\| \leq r$, i.e. $f^{-1}(B_F[0; a+b\rho]) \subset B_E[0;\rho]$. Como $\overline{co}\, k(X) \subset B_F[0; a+b\rho]$, $f^{-1}(\overline{co}\, k(X)) \subset B_E[0;\rho]$; así, se cumple la condición (i) del Teorema 3.10.

Puesto que $\alpha(k) < \beta(f)$, se tiene que para cualquier $A \subset X$ con $\alpha(A) > 0$, $\alpha(f(A)) \geq \beta(f)\alpha(A) > \alpha(k)\alpha(A) \geq \alpha(k(A))$, por lo tanto la condición (iii) del Teorema 3.10 también se satisface y en consecuencia existe $x \in B_E[0;\rho]$ tal que $f(x) = k(x)$.

Si $h: E \to F$ es compacta y $|h| = 0$, $|-g+h| = |g| < d(f)$ y $\alpha(-g+h) = \alpha(g) < \beta(f)$. De lo demostrado anteriormente podemos concluir que existe $x \in E$ tal que $f(x) + g(x) = h(x)$, i.e. $f+g$ es establemente soluble, por lo tanto es regular. $\square$

Una propiedad interesante de las transformaciones regulares es la siguiente:

4.4 Proposición.- Sea $f: E \to F$ regular, entonces el portador $f^{-1}: F \to \mathcal{P}(E)$ es semicontinuo superior con valores compactos. (Para cada abierto $\mathcal{O} \subset E$, $\{y : f^{-1}(y) \subset \mathcal{O}\}$ es abierto en $F$).

Dem.- Se sabe que un portador $g: \mathfrak{X} \to \mathcal{P}(\mathfrak{Y})$, donde $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ son espacios métricos, es semicontinuo superior si y sólo si (Ver Berge, C. Espaces Topologiques, Dunod, 1959) la gráfica de $g$ es cerrada en $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ y la gráfica de $f^{-1}$ es cerrada porque $f$ es continua. Por la Proposición 2.5 (i) $f$ es propia, así que $f^{-1}(y)$ es compacto para cada $y \in F$. $\square$

Nótese que, de la Proposición anterior, si $f$ es regular e inyectiva, $f^{-1}$ es una función continua.
Estableceremos ahora un resultado en el cual se muestra que, considerando homotopías apropiadas, se pueden obtener nuevas transformaciones regulares empezando con transformaciones de este tipo.

4.5 Proposición.- Sean $f: E \to F$ regular y $H: E \times [0,1] \to F$ compacta. Supóngase que:

(i) $H h_0 \equiv 0$

(ii) el conjunto $S := \{x \in E : f(x) + H(x,t) = 0$ para algún $t \in [0,1]\}$

es acotado

(iii) $d(f+H_{h_1})>0$

entonces $f+H_{h_1}$ es regular.

<u>Dem.-</u> Como $H$ es compacta y $f$ es regular, $\beta(f+H_{h_1})=\beta(f)>0$. En vista de la condición (ii) basta probar que $f+H_{h_1}$ es establemente soluble.

Sea $k: E\to F$ compacta con $|k|=0$. Como $d(f+H_{h_1})>0$ y $|k|=0$ debe existir $r>0$ tal que $\|f(x)+H(x,1)\|>\|k(x)\|$ si $\|x\|\geq r$. Sea $\varphi: E\to [0,1]$ definida como

$$\varphi(x)=\frac{dist(x, E\setminus B(0;2r))}{dist(x,B[0,r])+dist(x,E\setminus B(0;2r))}, \text{ entonces}$$

$\varphi(x)=0$ si $\|x\|\geq 2r$, $\varphi(x)=1$ si $\|x\|\leq r$. Puesto que las soluciones de $f(x)+H(x,1)=k(x)$ y $f(x)+H(x,1)=\varphi(x)k(x)$ coinciden, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $k$ tiene soporte acotado.

Sea $\hat{H}: E\times[0,1]\to F$ tal que $\hat{H}(x,t)=H(x,t)-t\,k(x)$, entonces $\hat{H}$ es compacta y $H_{h_0}=0$. Además, puesto que $k$ tiene soporte acotado y el conjunto $S$ de la condición (ii) es acotado, el conjunto $\hat{S}=\{x\in E:$ $f(x)+\hat{H}(x,t)=0$ para algún $t\in[0,1]\}$ es acotado.

Dado que $f(\hat{S})\subset -\hat{H}(\hat{S}\times[0,1])$, podemos aplicar el Teorema 3.8 para obtener que la ecuación $f(x)=-\hat{H}(x,1)=$ $=k(x)-H(x,1)$ tiene una solución $x\in E$. Por lo tanto

$f + H\hbar_1$ es establemente soluble. □

Usaremos la Proposición anterior para dar un ejemplo de un operador diferencial ordinario no lineal que es regular.

4.6 Ejemplo.- Sean $E = \mathcal{C}^1([0,1]; \mathbb{R}^n)$, $F = \mathcal{C}([0,1]; \mathbb{R}^n)$ y $G = \mathbb{R}^n$. Sean $f: [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua y $a, b > 0$ tales que $\|f(t,x)\| \leq a + b\|x\|$ para $t \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R}^n$.
Consideremos el operador $\bar{\hbar}: F \to F$ definido por $\bar{\hbar}(x)(t) = f(t, x(t))$ y hagamos $\hbar = \bar{\hbar} \circ j$ donde $j: E \to F$ es la inclusión compacta.
Definamos $T: E \to F \times G$ como $Tx = (x' + \hbar(x), x(0))$. Probaremos que $T$ es regular.
Sea $L: E \to F \times G$ definida como $Lx = (x', x(0))$, entonces $L \in ISO(E, F \times G)$, por lo cual es regular.
Consideremos la homotopía $H: E \times [0,1] \to F \times G$ dada por $H(x, \lambda) = \lambda(\hbar(x), 0)$.
Para probar que $T$ es regular, bastará con probar que $d(T) = d(L + H\hbar_1) > 0$ y que el conjunto $S = \{x \in E : Lx + H(x,\lambda) = 0$ para algún $\lambda \in [0,1]\}$ es acotado. Para demostrar esto último consideremos

$$\begin{cases} x' + \lambda \hbar(x) = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

entonces $x(t) = -\lambda \int_0^t h(x)(\tau)\,d\tau = -\lambda \int_0^t f(\tau, x(\tau))\,d\tau$; por lo tanto $\|x(t)\| \leq \int_0^t \|f(\tau, x(\tau))\|\,d\tau \leq a + b\int_0^t \|x(\tau)\|\,d\tau$.

Antes de continuar enunciaremos y probaremos dos desigualdades. La segunda de ellas, conocida como desigualdad de Gronwall es básica en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias.

D1) Sea $p: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua tal que $p'$ existe en $[a,b]\setminus\Gamma$, donde $\Gamma$ es a lo más numerable, y supóngase que existen funciones continuas $\alpha, \beta: [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que $p'(t) \leq \alpha(t)\,p(t) + \beta(t)$ para todo $t \in [a,b]\setminus\Gamma$, entonces $p(t) \leq p(a)\exp\left(\int_a^t \alpha(r)\,dr\right) + \int_a^t \exp\left(\int_s^t \alpha(r)\,dr\right)\beta(s)\,ds$.

Dem.- Sea $\gamma(t) = \exp\left(-\int_a^t \alpha(r)\,dr\right)$, entonces $\gamma(t)p'(t) - \gamma(t)\,\alpha(t)\,p(t) \leq \gamma(t)\,\beta(t)$ para todo $t \in [a,b]\setminus\Gamma$, por tanto $\left[\gamma(t)\,p(t) - \int_a^t \gamma(s)\,\beta(s)\,ds\right]' \leq 0$, de aquí que

$$\gamma(t)\,p(t) - \int_a^t \gamma(s)\,\beta(s)\,ds \leq \gamma(a)\,p(a) = p(a).$$ Dividiendo por $\gamma(t)$ obtenemos el resultado.

D2) Sea $p: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y supóngase que existen funciones continuas $\mu: [a,b] \to \mathbb{R}^+$, $\nu: [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que $p(t) \leq \nu(t) + \int_a^t \mu(s)\,p(s)\,ds$, entonces

$$p(t) \leq v(t) + \int_a^t \exp\left(\int_s^t \mu(r)dr\right)\mu(s)\,v(s)\,ds.$$

Si $v(t) = v_0$ para todo $t \in [a,b]$, $p(t) \leq v_0 \exp\left(\int_a^t \mu(r)dr\right)$.

<u>Dem.-</u> Sea $q(t) = \int_a^t \mu(s)\,p(s)ds$, entonces
$q'(t) = \mu(t)\,p(t) \leq \mu(t)\,v(t) + \mu(t)\,q(t)$. Aplicamos ahora M)
a $q$ para obtener que $q(t) \leq \int_a^t \exp\left(\int_s^t \mu(r)dr\right)\mu(s)v(s)ds$,

y por lo tanto $p(t) \leq v(t) + q(t) \leq v(t) + \int_a^t \exp\left(\int_s^t \mu(r)dr\right)\mu(s)v(s)ds$.

Si $v \equiv v_0$, hagamos $q(t) = v_0 + \int_a^t \mu(s)p(s)ds$, en este caso
$q'(t) = \mu(t)\,p(t) \leq \mu(t)\,q(t)$ y por M) $p(t) \leq q(t) \leq v_0 \exp\left(\int_a^t \mu(r)dr\right)$.

En nuestro ejemplo $p, \mu$ y $v$ están definidas como, $p(t) = \|x(t)\|$,
$\mu(t) = b$, $v(t) = a$, por lo cual $\|x(t)\| \leq a \exp tb \leq a \exp b$
y ésto implica que $\|x\| \leq a \exp b$.
Para cada $t \in [0,1]$, $\|x'(t)\| = \|-\lambda\, h(x)(t)\| \leq \|f(t, x(t))\| \leq$
$a + b\|x(t)\| \leq a(1 + b\exp b)$ y en consecuencia $S$ es acotado.
Ahora sólo falta probar que $d(L + Hh_1) > 0$. En el espacio de Banach $F \times G$ tomemos la norma $\|(y,z)\| = \|y\| + \|z\|$.
Si $(y,z) \in Im(L + Hh_1)$, $x \in E$ es tal que $Lx + H(x,1) = (y,z)$,
es decir, $x' + h(x) = y$, $x(0) = z$, entonces
$\|x(t)\| = \|z + \int_0^t [y(\tau) - f(\tau, x(\tau))]d\tau\| \leq \|z\| + \|y\| + a + b\int_0^t \|x(\tau)\|d\tau$.

Nuevamente aplicamos la desigualdad de Gronwall para concluir que $\|x\| \leq M \exp b$, donde $M = a + \|y\| + \|z\|$. Además, $\|x'\| = \|y - h(x)\| \leq \|y\| + a + b\|x\| \leq M(1 + b\exp b)$. Por lo tanto $\|x\| + \|x'\| \leq M(1 + \exp b + b\exp b)$ y de aquí que

$$\frac{a + \|y\| + \|z\|}{\|x\| + \|x'\|} \geq \frac{1}{1 + \exp b + b\exp b}.$$

Puesto que $a$ es constante, se sigue que

$$d(L + HA_1) = \liminf_{\|x\|_E \to \infty} \frac{a + \|Lx + H(x,1)\|_{F \times G}}{\|x\|_E} \geq \frac{1}{1 + \exp b + b\exp b} > 0,$$

y por lo tanto $T = L + HA_1$ es regular.

<u>4.7 Proposición.</u>- Si $f: E \to F$ es regular y $h: E \to F$ es $\alpha$-Lipschitz en conjuntos acotados, existe $\varepsilon > 0$ tal que la ecuación $f(x) = \lambda h(x)$, tiene solución para $|\lambda| < \varepsilon$.

<u>Dem.</u>- Como $d(f) > 0$, existe $r > 0$ tal que $f^{-1}(B[0;1]) \subset B[0;r]$

Sea $\pi: E \to B[0;r]$ la retracción radial.

Por ser $h$ $\alpha$-Lipschitz en $B[0,r]$ y $\pi$ una $\alpha$-no-expansión (Ver II.2.9); $h \circ \pi: E \to F$ es $\alpha$-Lipschitz con imágen $h(B[0;r])$ que es acotado.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon\,\alpha(h \circ \pi) < \beta(f)$ y $\varepsilon \|h\pi(x)\| \leq 1$ para todo $x \in E$; entonces, para $|\lambda| < \varepsilon$, $\alpha(\lambda h \circ \pi) < \beta(f)$ y $0 = |\lambda h \circ \pi| < d(f)$. Por 4.3 existe $x_0 \in E$ tal que $f(x_0) = \lambda h(\pi(x_0))$. Puesto que $\|f(x_0)\| \leq 1$, $\|x_0\| \leq r$ y por lo tanto $f(x_0) = \lambda h(x_0)$. $\square$

Sean $E, F, G$ y $f$ como en el Ejemplo 4.6, $g: [0,1]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $C^1$ y $k: E \to \mathbb{R}^n$ continua. Como $g$ es de clase $C^1$, $g$ es de Lipschitz en conjuntos acotados y por 4.7 el problema
$$\begin{cases} x' = \lambda g(t, x, x') - f(t, x) \\ x(0) = \lambda k(x) + x_0 \end{cases}$$
tiene una solución $x \in \mathscr{C}^1([0,1]; \mathbb{R}^n)$ para valores de $\lambda$ suficientemente pequeños.

Una clase interesante de transformaciones regulares está dada por los campos vectoriales compactos $\varphi = I - g$ que satisfacen $d(\varphi) > 0$, $\varphi^{-1}(0) \subset B(0; r)$ y $\deg(\varphi, B(0;r), 0) \neq 0$. En efecto, $\beta(\varphi) = 1$ en dimensión infinita, $\beta(\varphi) = \infty$ en dimensión finita y como se vió en la sección anterior, $\varphi$ es establemente soluble.

# CAPITULO II

## §1.- El espacio $\mathscr{C}(E,F)$.

En esta sección estudiaremos al espacio $\mathscr{C}(E,F)$ de todas las funciones continuas de $E$ en $F$. A este espacio le daremos dos topologías, las cuales nos permitirán dar una definición y una descomposición del espectro de una función continua no necesariamente lineal, de tal manera que la definición sea una extensión al caso no lineal del concepto de espectro de un operador lineal acotado y que la descomposición tenga propiedades análogas a las del caso lineal dadas en el Capítulo 0.

<u>1.1 Definición:</u> Para cada $\varepsilon>0$ hacemos $V(\varepsilon)=\{f\in\mathscr{C}(E,F): q(f)<\varepsilon\}$ donde $q(f)=\max\{\alpha(f), |f|\}$. La familia $\mathcal{V}=\{V(\varepsilon): \varepsilon>0\}$ forma un sistema fundamental de vecindades del origen. Por medio de traslaciones obtenemos un sistema fundamental de vecindades de cada punto de $\mathscr{C}(E,F)$. Este sistema de vecindades define una topología que se llama la <u>q-topología</u> de $\mathscr{C}(E,F)$.

Como las $V(\varepsilon)$ no son absorbentes, la q-topología no hace

de $\mathcal{F}(E,F)$ un espacio vectorial topológico. Sin embargo, el subespacio $\mathcal{Q}(E,F)$ que consiste de todas las funciones cuasi-acotadas y $\alpha$-Lipschitz es un espacio vectorial topológico localmente convexo ya que tiene la topología generada por las seminormas $\alpha(\cdot)$ y $|\cdot|$.
Además, puesto que para cualquier $L \in \mathcal{L}(E,F)$, $q(L) = \|L\|$; la $q$-topología induce en $\mathcal{L}(E,F)$ la topología usual de convergencia uniforme en conjuntos acotados.
Hagamos $\sigma(E,F) = \{ f \in \mathcal{F}(E,F) : f$ no es regular$\}$. Este conjunto posee la siguiente propiedad importante:

<u>1.2 Teorema.-</u> $\sigma(E,F)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{F}(E,F)$.
<u>Dem.-</u> Si $f \in \mathcal{F}(E,F) \setminus \sigma(E,F)$, tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \min\{\alpha(f), \beta(f)\}$. Si $g \in V(\varepsilon)$, entonces $\alpha(g) \leq q(g) < \beta(f)$ y $|g| \leq q(g) < \alpha(f)$. Por I.4.3 $f+g$ es regular. $\square$

El Teorema anterior es una generalización del hecho que $ISO(E,F)$ es abierto en $\mathcal{L}(E,F)$.
Definamos los siguientes subconjuntos de $\sigma(E,F)$

$\sigma_S(E,F) = \{ f \in \sigma(E,F) : f$ no es establemente soluble$\}$

$\sigma_\pi(E,F) = \{ f \in \sigma(E,F) : \alpha(f) = 0$ ó $\beta(f) = 0\}$.

entonces $\sigma(E,F) = \sigma_S(E,F) \cup \sigma_\pi(E,F)$.

Queremos probar ahora que $\mathcal{D}\sigma(E,F) \subset \sigma_\pi(E,F)$. Para ésto necesitaremos algunos resultados preliminares.

<u>1.3 Lema.</u> $\sigma_\pi(E,F)$ es cerrado en $\mathcal{E}(E,F)$.

<u>Dem.-</u> Si $f \in \mathcal{E}(E,F) \setminus \sigma_\pi(E,F)$, sea $\varepsilon > 0$ y $\varepsilon < \min\{\alpha(f), \beta(f)\}$ entonces $f + V(\varepsilon) \subset \mathcal{E}(E,F) \setminus \sigma_\pi(E,F)$. □

Para probar el siguiente Lema tenemos que dotar a $\mathcal{E}(E,F)$ de una topología que tenga mas abiertos que la q-topología.

Si para cada $\varepsilon > 0$ hacemos $U(\varepsilon) = \{f \in \mathcal{E}(E,F) : \alpha(f) < \varepsilon$ y $\|f(x)\| < \varepsilon(1 + \|x\|)\}$, entonces la familia $\mathcal{U} = \{U(\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ forma un sistema fundamental de vecindades del origen. Esta familia nos permite definir una topología a la que llamaremos la topología fuerte de $\mathcal{E}(E,F)$. Obviamente la q-topología es más débil que la topología fuerte.

Ahora tenemos la estructura apropiada para llevar a cabo las ideas expuestas al principio de la sección.

<u>1.4 Lema.-</u> $\sigma(E,F) \setminus \sigma_\pi(E,F)$ es abierto en la topología fuerte.

<u>Dem.-</u> Sea $f \in \sigma(E,F) \setminus \sigma_\pi(E,F)$. Como $\sigma_\pi(E,F)$ es cerrado en la topología fuerte de $\mathcal{E}(E,F)$, bastará con encontrar una ve-

cindad $U(\varepsilon)$ del origen tal que $f+g$ no es establemente soluble para cualquier $g\in U(\varepsilon)$.

Supongamos que ésto no es cierto, entonces existe una sucesión $(g_n)_{n=1}^{\infty}\subset \mathcal{K}(E,F)$ tal que $\|g_n(x)\|<\frac{1}{n}(1+\|x\|)$, $\alpha(g_n)<\frac{1}{n}$ y $f+g_n$ es establemente soluble.

Como $f$ no es establemente soluble, existe $h:E\to F$ compacta con $|h|=0$ tal que $f(x)\neq h(x)$ para todo $x\in E$.

Por ser $f+g_n$ establemente soluble existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset E$ tal que $f(x_n)+g_n(x_n)=h(x_n)$.

Si la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no es acotada podemos suponer que $\|x_n\|\to\infty$ cuando $n\to\infty$ y en ese caso $\|f(x_n)\|\leq\|g_n(x_n)\|+\|h(x_n)\|<\frac{1}{n}(1+\|x_n\|)+\|h(x_n)\|$, es decir $d(f)=0$, contradiciendo que $f\notin\sigma_\pi(E,F)$. Con ésto aseguramos la existencia de un número $M>0$ tal que $\|x_n\|\leq M$ para todo $n\in\mathbb{N}$, entonces $\|f(x_n)-h(x_n)\|\leq\|g_n(x_n)\|<\frac{1}{n}(1+M)$, por lo tanto $(f-h)(x_n)\to 0$.

Puesto que $\beta(f-h)=\beta(f)>0$ y $d(f-h)=d(f)>0$, $f-h$ es propia y por lo tanto $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es relativamente compacta.

Sean $x_0\in E$ y $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}\subset(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_{n_k}\to x_0$, entonces $(f-h)(x_0)=\lim_{k\to\infty}(f-h)(x_{n_k})=0$, una contradicción.- □

<u>1.5 Teorema.-</u> $\partial\sigma(E,F)\subset\sigma_\pi(E,F)$.

<u>Dem:-</u> Sea $f\in\partial\sigma(E,F)$, entonces $f\in\sigma(E,F)$ pues este conjunto es cerrado en la topología fuerte. Si $f\notin\sigma_\pi(E,F)$,

$f \in \sigma(E,F) \setminus \sigma_{\pi}(E,F)$ que es abierto en la topología fuerte y ésto contradice que $f$ pertenezca a $\partial\sigma(E,F)$.$\square$

Del Teorema anterior tenemos lo siguiente:

<u>1.6 Proposición.-</u> Sea $\Omega$ una componente conexa de $\mathscr{C}(E,F) \setminus \sigma_{\pi}(E,F)$. Si $f \in \Omega$ es regular, cualquier $g \in \Omega$ es regular.
<u>Dem.-</u> Sea $A = \{g \in \Omega : g \text{ es regular}\}$, entonces $A$ no es vacío y por 1.5 la frontera de $A$ relativa a $\Omega$ es vacía, pero $\Omega$ es conexo, por lo tanto $A = \Omega$. $\square$

Sabemos que el conjunto $EPI(E,F)$ es abierto en $\mathscr{L}(E,F)$, así que, en vista del Teorema I.3.6 uno puede preguntarse si $\sigma_{\xi}(E,F)$ es cerrado en $\mathscr{C}(E,F)$. Hasta el momento se desconoce la respuesta.

## §2.- Definición del espectro para funciones continuas no necesariamente lineales.

Sean $E$ un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$ y $f: E \to E$ continua. El <u>espectro</u> de $f$, que se denotará por $\sigma(f)$, está definido como:

$$\sigma(f) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I - f \text{ no es regular}\}.$$

Consideremos los siguientes subconjuntos de $\sigma(f)$:

$$\sigma_S(f) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I - f \text{ no es establemente soluble}\}$$

$$\sigma_\pi(f) = \{\lambda \in \mathbb{K} : d(\lambda I - f) = 0 \text{ ó } \beta(\lambda I - f) = 0\}.$$

El siguiente resultado es consecuencia de I.2.6, I.3.6 y I.4.2

<u>2.1 Teorema.-</u> Sea $L \in \mathcal{L}(E)$, entonces $\sigma(L)$, $\sigma_S(L)$ y $\sigma_\pi(L)$ (los conjuntos que se acaban de definir) son el espectro, el espectro aproximado por la imágen y el espectro puntual aproximado de $L$ respectivamente, en el sentido usual de la teoría espectral para operadores lineales.

En vista de 2.1 usaremos los mismos nombres para $\sigma_\pi(f)$ y $\sigma_S(f)$ también en el caso de que $f$ no sea lineal. Daremos ahora un resultado en el cual se muestra que varias propiedades del espectro para operadores lineales acotados se extienden al contexto no lineal.

<u>2.2 Teorema.-</u> Sea $f: E \to E$ continua, entonces

(a) $\sigma(f)$ es cerrado

(b) $\sigma_\pi(f)$ es cerrado

(c) $\partial\sigma(f) \subset \sigma_\pi(f)$

<u>Dem:</u> Sea $\psi: \mathbb{K} \to \mathcal{C}(E)$ definida como $\psi(\lambda) = \lambda I - f$, entonces $\psi$ es continua en la $q$-topología y además $\sigma(f) = \psi^{-1}(\sigma(E))$, $\sigma_\pi(f) = \psi^{-1}(\sigma_\pi(E))$ y $\partial\sigma(f) = \partial\psi^{-1}(\sigma(E)) \subset \psi^{-1}(\partial\sigma(E))$.

De 1.2 y 1.3 se sigue que $\sigma(f)$ y $\sigma_\pi(f)$ son cerrados.

De 1.5 se tiene que $\partial\sigma(E) \subset \sigma_\pi(E)$ y por lo tanto $\partial\sigma(f) \subset \psi^{-1}(\partial\sigma(E)) \subset \psi^{-1}(\sigma_\pi(E)) = \sigma_\pi(f)$. □

Otras propiedades del espectro para operadores no lineales están contenidas en las dos Proposiciones siguientes:

<u>2.3 Proposición:</u> Sea $f: E \to E$ continua, entonces

(a) $r(f) \leq q(f)$, donde $r(f) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(f)\}$

(b) Si $q(f-g) = 0$, entonces $\sigma(f) = \sigma(g)$.

(c) Si $\lambda \notin \sigma(f)$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\lambda \notin \sigma(f+g)$ para cualquier función continua $g: E \to E$ con $q(g) < \epsilon$.

<u>Dem:</u> (a) Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| > q(f)$. Probaremos que $\lambda I - f$ es regular. Para ello, $d(\lambda I - f) \geq |\lambda| - |f| > 0$ y $\beta(\lambda I - f) \geq |\lambda| - \alpha(f) > 0$. Ahora sólo falta probar que $\lambda I - f$ es establemente soluble. Como $q(f+h) = q(f)$ si $h$ es compacta y $|h| = 0$, entonces bastará con probar que la ecuación $\lambda x = f(x)$ tiene una solución si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $|\lambda| > q(f)$.

Sea $|\lambda| > q(f)$, entonces $\frac{1}{\lambda} f$ es una $\alpha$-contracción y tiene cuasinorma menor que 1, por lo tanto existe $r>0$ tal que $\frac{1}{\lambda} f(B[0;r]) \subset B[0;r]$ y por I-3.11 la ecuación $x = \frac{1}{\lambda} f(x)$ tiene una solución.

(b) $q(f-g)=0$ implica que para cualquier escalar $\lambda$, $d(\lambda I - f) = d(\lambda I - g)$ y $\beta(\lambda I - f) = \beta(\lambda I - g)$, así $\sigma_\pi(f) = \sigma_\pi(g)$. Como $f-g$ es compacta y tiene cuasinorma cero, $\lambda I - f$ es establemento soluble si y sólo si $\lambda I - g$ lo es.

(c) Es consecuencia de que $\sigma(F)$ es cerrado en la $q$-topología. ∎

Notemos que $\sigma_\pi(f)$ se puede expresar como $\sigma_\pi(f) = \Sigma(f) \cup \sigma_\beta(f)$, donde $\Sigma(f) = \{\lambda \in \mathbb{K} : d(\lambda I - f) = 0\}$, $\sigma_\beta(f) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \beta(\lambda I - f) = 0\}$, y que $\Sigma(f)$ y $\sigma_\beta(f)$ son cerrados en la $q$-topología.
En el resultado que sigue, la notación $\sigma(f) \equiv \sigma(g)$ significará que $\sigma_S(f) = \sigma_S(g)$, $\Sigma(f) = \Sigma(g)$ y $\sigma_\beta(f) = \sigma_\beta(g)$.

<u>2.4 Proposición.-</u> Sean $f, g : E \to E$ continuas, entonces

(a) $\sigma(\lambda f) \equiv \lambda \sigma(f)$, $\lambda \in \mathbb{K}$

(b) $\sigma(\lambda I + f) \equiv \lambda + \sigma(f)$, $\lambda \in \mathbb{K}$

(c) $\sigma(A \circ f \circ A^{-1}) \equiv \sigma(f)$ para cualquier $A \in ISO(E)$.

<u>Dem.-</u> (a) y (b) son directos.

(c) Como $A \in ISO(E)$, $\beta(A) \geq d(A) > 0$, $\beta(A^{-1}) \geq d(A^{-1}) > 0$.
De las desigualdades $d(f \circ g) \geq d(f)\, d(g)$ y $\beta(f \circ g) \geq \beta(f)\, \beta(g)$

se sigue que $\Sigma(f)=\Sigma(A\circ f\circ A^{-1})$ y $\sigma_\beta(f)=\sigma_\beta(A\circ f\circ A^{-1})$.
Sean $\lambda\in\mathbb{K}\setminus\sigma_\zeta(f)$ y $h: E\to E$ compacta con $|h|=0$, entonces $A^{-1}\circ h\circ A$ es compacta y $|A^{-1}\circ h\circ A|=0$. Como $\lambda I-f$ es establemente soluble existe $x\in E$ tal que $\lambda x-f(x)=A^{-1}\circ h(Ax)$, entonces $\lambda Ax-Af(x)=h(Ax)$. Si $y=Ax$, la ecuación anterior es $(\lambda I-A\circ f\circ A^{-1})y=h(y)$, así que $\lambda\in\mathbb{K}\setminus\sigma_\zeta(A\circ f\circ A^{-1})$.
La otra inclusión se prueba con un argumento análogo. □

De la demostración de 2.3(b) se tiene que $\sigma(f)=\sigma(g)$ si $\zeta(f-g)=0$.
Como se cumple la inclusión $\partial\sigma(f)\subset\sigma_\pi(f)$, es de importancia saber que tan "alejados" están los elementos de $\sigma_\pi(f)$ del origen.

2.5 <u>Proposición.-</u> Sea $f\in\mathcal{C}(E)$, entonces:

(a) Si $\lambda\in\Sigma(f)$, $d(f)\leq|\lambda|\leq|f|$

(b) Si $\lambda\in\sigma_\beta(f)$, $\beta(f)\leq|\lambda|\leq\alpha(f)$.

<u>Dem.-</u> (a) Si $\lambda\in\Sigma(f)$, $|\lambda|-|f|\leq d(\lambda I-f)=0$ y $d(f)-|\lambda|\leq d(\lambda I-f)$.

(b) Análogo. □

El siguiente resultado da algunas condiciones suficientes para que $\lambda I-f$ sea suprayectiva

2.6 <u>Proposición.-</u> Sea $f\in\mathcal{C}(E)$, entonces:

(a) Si $\lambda_1, \lambda_2$ pertenecen a la misma componente de $\mathbb{K}\setminus\sigma_\pi(f)$, $\lambda_1 I - f$ y $\lambda_2 I - f$ son ambas regulares ó ambas no lo son.

(b) Sea $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Si $\sigma(f)$ es acotado (lo cual sucede si $\beta(f)>0$) y $\lambda$ pertenece a la componente no acotada de $\mathbb{C}\setminus\sigma_\pi(f)$, $\lambda I - f$ es regular.

(c) Sea $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Si $\sigma(f)$ es acotado superiormente (inferiormente) y $\lambda$ pertenece a la componente no acotada de $\mathbb{R}\setminus\sigma_\pi(f)$ en el semi-eje positivo (negativo), entonces $\lambda I - f$ es regular.

Dem.- (b) y (c) son casos particulares de (a) y (a) es consecuencia de 1.6. ∎

Se sabe que el espectro de un operador lineal acotado que actúa en un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$ es no vacío, aunque en el caso real el espectro puede ser vacío. En el caso no lineal se pueden tener operadores con espectro vacío, aún en espacios de Banach sobre $\mathbb{C}$, como muestra el siguiente ejemplo: La función $f: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definida por $f(z)=z^2$ es un campo vectorial compacto, $d(f)=\infty$ y $\deg(f, B(0;r), 0)=2$, así que $f$ es regular, ya que $\beta(f)=\infty$.

Para cualquier $\lambda\in\mathbb{C}$, $\beta(\lambda I - f)=\infty$, por lo cual $\sigma_\beta(f)=\phi$. También $d(\lambda I - f)\geq d(f)-|\lambda|=\infty$, así $\Sigma(f)=\phi$, por lo tanto $\sigma_\pi(f)=\phi$. Como $\partial\sigma(f)\subset\sigma_\pi(f)$, se debe tener que $\sigma(f)=\mathbb{C}$ ó

$\sigma(f)=\phi$, pero $0\in \mathbb{C}\setminus\sigma(f)$, por lo tanto $\sigma(f)=\phi$.
Este ejemplo hace evidente la importancia de tener condiciones suficientes para que el espectro de una función no sea vacío. A este respecto tenemos lo siguiente:

27 Proposición: Sean $f: E\to E$ compacta y $\dim E=\infty$, entonces
(a) $\sigma_\beta(f)=0$ y por tanto $\sigma_\pi(f)=\{0\}\cup\Sigma(f)$.
(b) $0\in\sigma_\xi(f)$
(c) Si $0\notin\Sigma(f)$, $0$ es punto interior de $\sigma(f)$. Más precisamente, la componente conexa de $\mathbb{K}\setminus\Sigma(f)$ que contiene a $0$ está contenida en $\sigma_\xi(f)$.
(d) Si $f$ es positivamente homogénea, $\Sigma(f)\setminus\{0\} = \{\lambda\in\mathbb{K} : f(x)=\lambda x$ para algún $x\neq 0\}$.

Dem: (a) Es obvio.
(b) Como $f(E)=\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{f(B(0;n))}$ y $\overline{f(B(0;n))}$ es magro, $f(E)\subsetneq E$, por lo tanto $f$ no puede ser establemente soluble.
(c) Probaremos primero que existe $r>0$ tal que $\lambda I-f$ no es suprayectiva si $|\lambda|<r$.
Si ésto no sucede, existe una sucesión $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{K}$ tal que $\lambda_n\to 0$ y $\lambda_n I-f$ es suprayectiva. Sea $0<a<\frac{1}{2}d(f)$, entonces existe $b\geq 0$ tal que $\|f(x)\|\geq 2a\|x\|-b$. Si $|\lambda|\leq a$, $\|\lambda x-f(x)\|\geq\|f(x)\|-|\lambda|\,\|x\|\geq a\|x\|-b$.
Sea $y\in B[0;1]$, entonces existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset E$

tal que $\lambda_n x_n - f(x_n) = y$. Para $|\lambda_n| \le a$ se tiene que $1 \geq \|\lambda_n x_n - f(x_n)\| \geq a\|x_n\| - b$, de donde $\|x_n\| \le \frac{b+1}{a}$ y por lo tanto $f(x_n) \to -y$. Así, hemos probado que $B[0;1] \subset \overline{f(B[0;\frac{b+1}{a}])}$ lo cual es absurdo. Por lo tanto debe existir $r>0$ tal que $B(0;r) \subset \sigma_\delta(f)$.

Si $\Omega$ es la componente conexa de $\mathbb{K} \setminus \Sigma(f)$ que contiene a $0$ y $\lambda \in \Omega \setminus \{0\}$ sea $\lambda' = \frac{r}{2}\frac{\lambda}{|\lambda|}$, entonces $\lambda' I - f$ no es establemente soluble y como $\lambda, \lambda'$ están en la misma componente de $\mathbb{K} \setminus \sigma_\pi(f)$; por 2.6 (a) $\lambda I - f$ no es regular, pero $d(\lambda I - f) > 0$ y $\beta(\lambda I - f) > 0$, por lo tanto $\lambda I - f$ no es establemente soluble, i.e. $\lambda \in \sigma_\delta(f)$.

(d) Por ser $f$ positivamente homogénea, $d(\lambda I - f) = \inf\{\|\lambda x - f(x)\| : \|x\| = 1\}$.

Si $\lambda \in \Sigma(f) \setminus \{0\}$, existe $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ tal que $\|x_n\| = 1$ y $\|\lambda x_n - f(x_n)\| \to 0$. Por la compacidad de $f$ podemos suponer que $f(x_n) \to \lambda x$, entonces $\lambda x_n \to \lambda x$. Por ser $\lambda \neq 0$, $x_n \to x$, así que $f(x) = \lim \lambda x_n = \lambda x$. La otra contención es evidente. $\square$

2.8 Proposición.- Sean $f: E \to E$ continua y compacta, $\dim E = \infty$, entonces

(a) Si $\sigma(f) \subsetneq \mathbb{K}$, $\Sigma(f) \neq \emptyset$

(b) Si $0 \notin \Sigma(f)$ y $\sigma(f)$ es acotado, la componente conexa de

$\mathbb{K}\setminus\Sigma(f)$ que contiene a $0$ es acotada. Así, $\Sigma(f)$ contiene un escalar positivo y uno negativo.

Dem.- (a) Si $0\notin\Sigma(f)$, por 27 (c) $0\notin\partial\sigma(f)$, pero sabemos que $\partial\sigma(f)\subset\{0\}\cup\Sigma(f)$, por lo tanto $\partial\sigma(f)\subset\Sigma(f)$, y como $\sigma(f)\subsetneq\mathbb{K}$, $\partial\sigma(f)\neq\phi$.

(b) Es consecuencia de 27 (e). □

En la demostración de nuestro próximo resultado acerca de la no vacuidad del espectro de un operador usaremos el siguente resultado.

2.9 Lema.- Sean $E$ un espacio de Banach y $\pi: E\to B[0;r]$ la retracción radial de $E$ en $B[0;r]$, entonces $\pi$ es una $\alpha$-no-expansión ($\alpha(\pi)=1$).

Dem.- Para cada $A\in\mathcal{A}(E)$, $\pi(A)\subset\overline{co}(A\cup\{0\})$, por lo tanto $\alpha(\pi(A))\leq\alpha(\overline{co}(A\cup\{0\}))=\alpha(A\cup\{0\})=\alpha(A)$. □

2.10 Proposición.- Sea $f: E\to E$ tal que $q(f)<\infty$, $\dim E=\infty$ y $\alpha(f)<d(f)$, entonces $\Sigma(f)\neq\phi$.

Dem.- Sea $\varepsilon>0$ tal que $d(f)-\varepsilon>\alpha(f)$. La función $f_\varepsilon: E\to E$ definida como $f_\varepsilon(x)=\frac{1}{d(f)-\varepsilon}f(x)$ es una $\alpha$-contracción con $d(f_\varepsilon)>1$. Sea $r>0$ tal que $\|f_\varepsilon(x)\|>\|x\|$ si $\|x\|\geq r$, y sea $\pi_n: E\to B[0;r+n]$ la retracción radial. La función $f_{r+n}: S[0;r+n] \to S[0;r+n]$ dada por $f_{r+n}(x) = \pi_n f_\varepsilon(x)$ es una $\alpha$-contracción. Por un teorema de punto fijo de Nussbaum ([N]), existe $x_n \in S[0;r+n]$ tal que $f_\varepsilon(x_n) = \lambda_n x_n$, donde $\lambda_n = \frac{\|f_\varepsilon(x_n)\|}{r+n}$.

Como $|\lambda_n| = \frac{\|\lambda_n x_n\|}{\|x_n\|} = \frac{\|f_\varepsilon(x_n)\|}{\|x_n\|}$, $\limsup_{n\to\infty} |\lambda_n| \leq |f_\varepsilon| < \infty$.

Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\lambda_{n_k} \to \lambda$ cuando $k \to \infty$, entonces $\left\| \frac{\lambda x_{n_k} - f_\varepsilon(x_{n_k})}{\|x_{n_k}\|} \right\| \leq |\lambda_{n_k} - \lambda| \to 0$, por lo tanto $\lambda \in \Sigma(f_\varepsilon)$

y finalmente $\lambda(d(f)-\varepsilon) \in \Sigma(f)$. $\square$

<u>2.11 Proposición.-</u> Sea $f: E \to E$ tal que $\alpha(f) < \infty$, $\dim E = \infty$ y $\alpha(f) < d(f)$, entonces $0$ es punto interior de $\sigma_\xi(f)$.

<u>Dem.-</u> Primeramente mostraremos que si $g: E \to E$ es suprayectiva, entonces $\alpha(g) \geq d(g)$.

Si $d(g) = 0$, la afirmación es cierta. Sean $d(g) > 0$ y $0 < a < d(g)$, entonces existe $b > 0$ tal que $\|g(x)\| \geq a\|x\| - b$, $x \in E$. Si $g(x) \in B[0;n]$, $\|x\| \leq \frac{n+b}{a}$. Si $y \in B[0;n]$, existe $x \in E$ tal que $g(x) = y$, por lo tanto $y \in g(B[0;\frac{n+b}{a}])$.

Puesto que $\alpha(g) \geq \frac{\alpha(g(B[0;\frac{n+b}{a}]))}{\alpha(B[0;\frac{n+b}{a}])} \geq \frac{\alpha(B[0;n])}{\alpha(B[0;\frac{n+b}{a}])} \geq \frac{2n}{2(\frac{n+b}{a})} =$

$\frac{n}{n+b} a$, $\alpha(g) \geq \lim \frac{na}{n+b} = a$, por lo cual $\alpha(g) \geq d(g)$.

De lo anterior concluimos que $0 \in \sigma_\xi(f)$. Como $\alpha$ y $d$ son continuas y $d(f) < d(f)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $d(\lambda I - f) < d(\lambda I - f)$ si $|\lambda| < \varepsilon$, i.e. $B(0;\varepsilon) \subset \sigma_{\delta}(f)$. □

Ahora pasaremos a estudiar el espectro de funciones continuas en $\mathbb{R}^k$. Para hacerlo necesitaremos algunos resultados de homotopía para funciones entre esferas $S^{k-1}$.
$S^{n-1}$ denotará a la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$ y si $f: S^{n-1} \to S^{n-1}$, la notación $[f]$ significa la clase de homotopía de $f$.
A cada función continua $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $f^{-1}(0)$ acotado, le asociamos la clase de homotopía de la función $f_r: S^{n-1} \to S^{n-1}$ definida por $f_r(x) = \dfrac{f(rx)}{\|f(rx)\|}$, $x \in S^{n-1}$, donde $r \geq r_0$ y $r_0$ es tal que $f^{-1}(0) \subset B[0; r_0]$. Para ver que esta asociación está bien definida tomemos $s, r \geq r_0$. La homotopía $H: S^{n-1} \times [0,1] \to S^{n-1}$ definida como $H(x,t) = \dfrac{f(trx + (1-t)sx)}{\|f(trx + (1-t)sx)\|}$ satisface que $H h_0 = f_s$, $H h_1 = f_r$ y en consecuencia $[f_r] = [f_s]$.
Veremos que la asociación que hemos definido es casi invariante bajo homotopía

2.12 <u>Proposición.-</u> Sea $H: \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^m$ continua y tal que $\{x \in \mathbb{R}^n : H(x,t) = 0$ para algún $t \in [0,1]\}$ es acotado, entonces $[\widetilde{H h_0}] = [\widetilde{H h_1}]$ (A la clase de homotopía asociada a $f$ la denotaremos por $[\tilde{f}]$).

<u>Dem.:</u> Sea $r>0$ tal que $H(x,t)\neq 0$ si $t\in[0,1]$, $\|x\|\geq r$. La homotopía $\tilde{H}: S^{n-1}\times[0,1]\to S^{n-1}$ definida por $\tilde{H}(x,t)=\dfrac{H(rx,t)}{\|H(rx,t)\|}$ hace ver que $[\tilde{H}h_0]=[\tilde{H}h_1]$. □

El resultado que garantiza la existencia de puntos en el espectro para funciones continuas en $\mathbb{R}^k$ es el siguiente:

<u>2.13 Proposición:</u> Sea $f:\mathbb{R}^{2n+1}\to\mathbb{R}^{2n+1}$ tal que $|f|<\infty$, entonces $\Sigma(f)\neq\phi$.

<u>Dem.:</u> Sean $\lambda\in\mathbb{K}$ tal que $|\lambda|>|f|$, $r>0$ tal que $\|f(x)\|<|\lambda|\,\|x\|$ si $\|x\|\geq r$ y $H:\mathbb{R}^{2n+1}\times[0,1]\to\mathbb{R}^{2n+1}$ definida como $H(x,t)=\lambda x - t f(x)$. Ya que $H^{-1}(0)\subset B[0;r]$, se sigue de la Proposición anterior que $[\widetilde{\lambda I - f}]=[\tilde{\lambda I}]$.

Como $[\tilde{\lambda I}]=[\tilde{I}]$ si $\lambda>0$ y $[\tilde{\lambda I}]=[-\tilde{I}]$ si $\lambda<0$, tomando $\lambda_0,\lambda_1\in\mathbb{R}$ tales que $\lambda_0<-|f|$, $\lambda_1>|f|$, se tiene que $[\widetilde{\lambda_0 I - f}]=[-\tilde{I}]$ y $[\widetilde{\lambda_1 I - f}]=[\tilde{I}]$.

Además, para cualquier $r>0$, $x\in\mathbb{R}^{2n+1}$, $\deg(I,B(x;r),x)=1$ y $\deg(-I,B(x;r),x)=-1$. Por la invarianza homotópica del grado, $I\not\simeq -I$ y por lo tanto $[\tilde{I}]\neq[-\tilde{I}]$. De la Proposición anterior se sigue que $S=\{x\in\mathbb{R}^{2n+1}: t\lambda_0 x+(1-t)\lambda_1 x=f(x)$ para algún $t\in[0,1]\}$ no es acotado; es decir, existe una sucesión $(x_n,\lambda_n)\subset S\times[\lambda_0,\lambda_1]$

tal que $\|x_n\| \to \infty$, $\lambda_n \to \lambda$, entonces $f(x_n) = [\lambda_n \lambda_0 + (1-\lambda_n)\lambda_1] x_n$ y en consecuencia $\frac{\| [\lambda_n \lambda_0 + (1-\lambda_n)\lambda_1] x_n - f(x_n) \|}{\|x_n\|} \to 0$, por lo tanto $\lambda \lambda_0 + (1-\lambda) \lambda_1 \in \Sigma(f)$. $\square$

El portador $\sigma : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{P}(\mathbb{K})$ que a cada operador lineal acotado que actúa en $E$ le asocia su espectro, es semicontinuo superior. Se probará que esta propiedad se extiende al contexto no lineal cuando nos restringimos al subespacio $Q(E)$ de $\mathcal{C}(E)$ que consta de todas las funciones $f \in \mathcal{C}(E)$ con $q(f) < \infty$. En el caso general del espacio $\mathcal{C}(E)$ tenemos el siguiente resultado:

<u>2.14 Proposición.-</u> Sean $f : E \to E$ continua y $M \subset \mathbb{K}$ compacto. Si $M \cap \sigma(f) = \phi$, existe $\epsilon > 0$ tal que $M \cap \sigma(g) = \phi$ si $q(f-g) < \epsilon$.

<u>Dem.-</u> Si existen $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}(E)$ y $(\mu_n)_{n=1}^{\infty} \subset M$ tales que $q(f_n - f) < \frac{1}{n}$, $\mu_n \in \sigma(f_n)$, por ser $M$ compacto podemos suponer que $\mu_n \to \mu$. Como $q((\mu_n I - f_n) - (\mu I - f)) \leq |\mu_n - \mu| + q(f_n - f)$ y $\sigma(E)$ es cerrado en la $q$-topología, $\mu \in M \cap \sigma(f)$. $\square$

<u>2.15 Teorema.-</u> El portador $\sigma : Q(E) \to \mathcal{P}(\mathbb{K})$ que a cada $f \in Q(E)$ le asocia su espectro, es semicontinuo superior

con valores compactos.

Dem: Sea $U$ abierto tal que $\sigma(f)\subset U$. Tomemos $r > q(f)+1$ y hagamos $M = B[0;r]\setminus U$, entonces $M$ es compacto y $M \cap \sigma(f) = \phi$. Sea $\varepsilon$ como en la Proposición anterior y tal que $\varepsilon < 1$. Para cualquier $g \in \mathcal{G}(E)$ con $q(f-g) < \varepsilon$ se tiene que $\sigma(g) \cap M = \phi$. Además $q(g) \leq q(f) + q(g-f) < q(f)+\varepsilon < q(f)+1 < r$, i.e. $\sigma(g) \subset B[0;r]$, por lo tanto $\sigma(g) \subset B[0;r]\setminus M \subset U$. $\square$

## §3.- Alternativa de Fredholm para operadores no lineales.

Si $C \in K(E)$ se tiene la alternativa de Fredholm: Sea $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ si $\dim E = \infty$, entonces la ecuación $\lambda x - Cx = y$ tiene solución para todo $y \in E$ si y sólo si la ecuación $\lambda x - Cx = 0$ tiene como única solución a la trivial, dicho en otras palabras $\sigma(C) = \sigma_\pi(C)$. Con el objeto de extender la alternativa de Fredholm a operadores no lineales introducimos el siguiente concepto

3.1 Definición.- Una función continua $f: E \to E$ es alternativa si $\sigma(f) = \sigma_\pi(f)$.

Como una herramienta para los propósitos de esta sección desarrollaremos algunas nociones básicas de la teoría de campos vectoriales compactos ([G]) y algunos resultados relativos a transformaciones compactas.

3.2 <u>Teorema de aproximación</u>.- Sean $E$ un espacio de Banach, $X$ un espacio métrico acotado y $h: X \to E$ compacta, entonces existen un subespacio de dimensión finita $E_n$ de $E$ y una función $h_\varepsilon : X \to E_n$ tal que $\|h(x) - h_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$ para cada $x \in X$.

<u>Dem</u>.- Como $\overline{h(X)}$ es compacto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\{y_1, \ldots, y_n\}$ subconjunto de $E$ tal que $\overline{h(X)} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i; \varepsilon)$. Sea $E_n$ el subespacio generado por $\{y_1, \ldots, y_n\}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ sea $\mu_i : X \to \mathbb{R}$ la función $\mu_i(x) = \max\{0, \varepsilon - \|h(x) - y_i\|\}$, entonces $\mu_i$ es continua. Como para cada $x \in X$ existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\mu_i(x) \neq 0$, la función

$$\lambda_i(x) = \frac{\mu_i(x)}{\sum_{j=1}^{n} \mu_j(x)}$$ es continua en $X$. Además $\lambda_i(x) = 0$ si y sólo si $\|h(x) - y_i\| \geq \varepsilon$.

Sea $h_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x)\, y_j$, entonces $\|h(x) - h_\varepsilon(x)\| =$

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x)\,(h(x) - y_j)\Big\| \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x)\, \|h(x) - y_j\| < \varepsilon. \ \square$$

3.3 Teorema de extensión.- Sean $E$ un espacio de Banach, $A$ un subconjunto cerrado de un espacio métrico acotado $X$ y $f: A \to E_n$ una transformación de dimensión finita, entonces $f$ se puede extender a una transformación de dimensión finita $f^*: X \to \overline{co}(f(A))$.

Dem.- Sea $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) y_i$, donde $y_i \in E_n$, $f_i: A \to \mathbb{K}$.
Cada una de las funciones coordenadas $f_i$ es acotada y por el Teorema de extensión de Tietze existe $\tilde{f}_i: X \to \mathbb{K}$ tal que $\tilde{f}_i(x) = f_i(x)$ para $x \in A$. Sea $r: E \to \overline{co}(f(A))$ una retracción (Teorema de extensión de Dugundji), entonces $f^*(x) = r(\sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_i(x) y_i)$ es una extensión de dimensión finita de $f$ a $X$. □

3.4 Lema.- Sea $k: B[0;1] \to E$ compacta tal que $k(-x) = -k(x)$ si $x \in S[0;1]$, entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe una transformación de dimensión finita $k_\varepsilon: B[0;1] \to E_n$, $E_n \subset E$, tal que $\|k(x) - k_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$ si $x \in B[0;1]$ y $k_\varepsilon(-x) = -k_\varepsilon(x)$ si $x \in S[0;1]$.

Dem.- Dado $\varepsilon > 0$ sea $g: B[0;1] \to E_n$ una transformación de dimensión finita tal que $\|g(x) - k(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $x \in B[0;1]$. Sea $h: S[0;1] \to E_n$ tal que $h(x) = g(x) + g(-x)$, entonces $\|h(x)\| < \varepsilon$ para $x \in S[0;1]$.
Por el Teorema de extensión existe $h^*: B[0;1] \to E_n$

extensión de $h$ que satisface $\|h^{+}(x)\| < \epsilon$ para $x \in B[0;1]$. Definamos $h_\epsilon : B[0;1] \to E_n$ como $h_\epsilon(x) = g(x) - \frac{1}{2} h^{+}(x)$, entonces $\|h_\epsilon(x) - h(x)\| \leq \|g(x) - h(x)\| + \frac{1}{2}\|h^{+}(x)\| < \epsilon$ para $x \in B[0;1]$. Además $h_\epsilon(x) = g(x) - \frac{1}{2}[g(x) + g(-x)] = \frac{1}{2}[g(x) - g(-x)]$ para $x \in S[0;1]$, por lo tanto $h_\epsilon$ es impar en $S[0;1]$. □

El siguiente resultado es una generalización del Teorema de Borsuk al caso de dimensión infinita.

<u>3.5 Teorema.-</u> Sea $f = I - h : S[0;1] \to E \setminus \{0\}$ un campo vectorial compacto. Si $f(-x) = -f(x)$ para $x \in S[0;1]$, entonces toda extensión de $f$ a un campo vectorial compacto en $B[0;1]$ se anula en algún punto de $B[0;1]$.

<u>Dem.-</u> Supongamos que existe un campo vectorial compacto $\bar{f} : B[0;1] \to E \setminus \{0\}$, extensión de $f$. Sea ahora $\bar{f}(x) = x - \overline{h(x)}$, entonces $\bar{h}(-x) = -\bar{h}(x)$ para $x$ en la esfera unitaria. Por ser $B[0;1]$ cerrado, $\bar{f}(B[0;1])$ es cerrado y como $0$ no está en ese conjunto,

$d = dist(0, \bar{f}(B[0;1])) > 0$.

Sea $0 < \epsilon < d$. Por el Lema anterior existe una transformación de dimensión finita $\bar{h}_\epsilon : B[0;1] \to E_n$ tal que $\|\bar{h}_\epsilon(x) - \bar{h}(x)\| < \epsilon$ si $x$ está en la bola unitaria y

$\tilde{h}_\varepsilon(-x) = -\tilde{h}_\varepsilon(x)$ para $x \in S[0;1]$. Sean $B_n = B[0;1] \cap E_n$, $S_{n-1} = S[0;1] \cap E_n$, $g_\varepsilon(x) = x - \tilde{h}_\varepsilon(x)$ y $g_\varepsilon^{*} = g_\varepsilon|_{B_n}$. Puesto que $\|\xi(x) - g_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$ para $x \in B[0;1]$ y $\varepsilon < d$, $g_\varepsilon$ no se anula en $B[0;1]$ y por lo tanto $g_\varepsilon^{*}$ es un campo vectorial en $B_n$ que es impar en $S_{n-1}$ y que no se anula en $B_n$, una contradicción al Teorema de Borsuk. ∎

La forma no lineal de la alternativa de Fredholm es la siguiente:

<u>3.6 Teorema.-</u> Sea $f: E \to E$ impar y compacta, entonces $f$ es alternativa.

<u>Dem.-</u> Sea $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \sigma_\pi(f)$. Como $d(\lambda I - f) > 0$, para probar que $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \sigma(f)$, será suficiente con demostrar que la ecuación $\lambda x - f(x) = h(x)$ tiene solución si $h$ es compacta y tiene soporte acotado. En ese caso existe $r > 0$ tal que $h(x) = 0$ y $\lambda x - f(x) \neq 0$ si $\|x\| \geq r$.

Si $\lambda = 0$ (lo cual puede suceder si y sólo si $\dim E < \infty$), $f(x) = f(x) - h(x)$ no se anula en $S[0;r]$ y es impar ahí. Por el Teorema de Borsuk existe $x_0 \in B[0;r]$ tal que $f(x_0) = h(x_0)$.

Si $\lambda \neq 0$, el campo vectorial compacto $K: B[0;r] \to E$ dado por $Kx = x - \lambda^{-1} f(x) - \lambda^{-1} h(x)$ es impar y no se anula en

$S[0;r]$. Por 3.5 existe $x_0 \in B[0;r]$ tal que $K(x_0)=0$, i.e. $\lambda x_0 - f(x_0) = h(x_0)$ y por tanto $\lambda \notin \sigma(f)$. □

3.7 Definición.- Una función continua $f: E \to E$ es asintóticamente impar si existe una función impar $g: E \to E$ tal que $|f-g|=0$.
Si $f$ es además compacta, $k(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ es impar, compacta y $\|f(x) - k(x)\| \leq \frac{1}{2}\|f(x) - g(x)\| + \frac{1}{2}\|g(x) - f(-x)\|$, es decir $|f-k|=0$.

Una generalización inmediata de 3.6 está dada por:

3.8 Teorema.- Sea $f: E \to E$ asintóticamente impar y compacta, entonces $f$ es alternativa.
Dem.- Sea $g: E \to E$ impar y compacta tal que $|f-g|=0$. Por ser $f-g$ compacta, $q(f-g)=0$. Por 2.3(b) $\sigma(f) \equiv \sigma(g)$ y por 3.6 $\sigma(f) = \sigma(g) = \sigma_\pi(g) = \sigma_\pi(f)$. □

Recordemos que el espectro escencial $\sigma_e(L)$ de un operador lineal acotado $L: E \to E$ está definido como $\sigma_e(L) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I - L$ no es un operador de Fredholm de índice cero$\}$ ó equivalentemente $\sigma_e(L) = \bigcap_{K \in \mathcal{K}(E)} \sigma(L+K)$

<u>3.9 Definición:</u> Se dice que $L \in \mathcal{L}(E)$ es <u>balanceado</u> si $\sigma_\beta(L) = \sigma_e(L)$.

Por I.2.6(e) se cumple siempre $\sigma_\beta(L) \subset \sigma_e(L)$.

Ejemplos de operadores balanceados son los siguientes:

i) Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda I$ es balanceado ya que $\sigma_\beta(\lambda I) = \{\lambda\}$ si $\dim E = \infty$ y $\sigma_\beta(L) = \phi$ si $\dim E < \infty$.

ii) Si $\dim E < \infty$, cualquier operador lineal $L: E \to E$ es balanceado pues $\sigma_e(L) = \phi = \sigma_\beta(L)$.

iii) Si $H$ es un espacio de Hilbert y $A: H \to H$ es normal ($A \circ A^* = A^* \circ A$), $A$ es balanceado. En particular cualquier operador auto-adjunto es balanceado.

Como $A$ es normal, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^*$ y puesto que $(\operatorname{Im} A)^\perp = \operatorname{Ker} A^*$, $(\operatorname{Ker} A)^\perp = \overline{\operatorname{Im} A}$. Así, $H = \operatorname{Ker} A \oplus \overline{\operatorname{Im} A}$.

Si $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \sigma_\beta(A)$, $\lambda I - A$ es normal, $\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - A) < \infty$ e $\operatorname{Im}(\lambda I - A)$ es cerrado, por lo tanto $\lambda I - A$ es un operador de Fredholm de índice cero, i.e. $\lambda \notin \sigma_e(A)$.

iv) Si $\dim E = \infty$, $A \in \mathcal{L}(E)$ y $A^n$ es compacto para algún $n$, entonces $A$ es balanceado.

Puesto que $\beta(A)^n \leq \beta(A^n) \leq \alpha(A^n) = 0$, $0 \in \sigma_\beta(A)$. Ahora basta probar que $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \sigma_e(A)$ si $\lambda \neq 0$.

De la identidad $\lambda^n - A^n = T(\lambda I - A)$ donde $T = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} A + \dots + \lambda A^{n-2} + A^{n-1}$ obtenemos que, para $\lambda \neq 0$, $0 < |\lambda|^n = \beta(\lambda^n - A^n) \leq$

$\alpha(T)\,\beta(\lambda I-A)$. Como $A'^n$ es también compacto, $\beta(\lambda I-A')>0$ y por I.2.6 (e) y (f), $\lambda I-A$ es un operador de Fredholm.

Por ser $(tA)^n$ compacto para todo $t\in\mathbb{R}$, la trayectoria $\gamma:[0,1]\to\mathcal{L}(E)$ definida por $\gamma(t)=\lambda I-tA$ está contenida en el conjunto de operadores de Fredholm, y por la continuidad del indice $i(\lambda I-A)=i(\lambda I)=0$, por lo tanto $\lambda\notin\sigma_e(A)$.

(v) Si $\dim E=\infty$, $A\in\mathcal{L}(E)$ y $\lim\sqrt[n]{\|A^n\|}=0$, $A$ es balanceado.

$\beta(A)\leq\sqrt[n]{\beta(A^n)}\leq\sqrt[n]{\alpha(A^n)}\leq\sqrt[n]{\|A^n\|}\to 0$, por lo cual $0\in\sigma_\beta(A)$.

Además $\sigma_\beta(A)\subset\sigma_e(A)\subset\sigma(A)=\{0\}$, por lo tanto $\sigma_\beta(A)=\{0\}=\sigma_e(A)$.

(vi) Si $L$ es balanceado, $\mu I+L$ es balanceado para cualquier $\mu\in\mathbb{K}$.

Esto es consecuencia de que $\sigma_\beta(\mu I+L)=\mu+\sigma_\beta(L)$.
y $\sigma_e(\mu I+L)=\mu+\sigma_e(L)$.

El siguiente resultado es una generalización de 3.8

<u>3.10 Teorema.-</u> Sean $L\in\mathcal{L}(E)$ balanceado y $h:E\to E$ asintóticamente impar y compacta, entonces $L+h$ es alternativa.

<u>Dem:-</u> Sea $\lambda\in\mathbb{K}\setminus\sigma_\pi(L+h)$, entonces $\beta(\lambda I-L)=$
$=\beta(\lambda I-(L+h))>0$, i.e. $\lambda\notin\sigma_\beta(L)$. Por ser $L$ balanceado, existe $K\in\mathcal{K}(E)$ tal que $A:=\lambda I-(L+K)$ es isomorfismo.

Como $\beta(I-A^{-1}\circ(h-K))=1$ y $d(I-A^{-1}\circ(h-K))=$
$=d(A^{-1}\circ(\lambda I-(L+h)))\geq d(A^{-1})\,d(\lambda I-(L+h))>0$,
$1\notin\sigma_\pi(A^{-1}\circ(h-K))$. Por ser $A^{-1}\circ(h-K)$ asintoticamente impar y compacta, $I-A^{-1}(h-K)$ es regular. De aquí que $\lambda I-(L+h)=A\circ A^{-1}\circ(\lambda I-(L+h))=A(I-A^{-1}(h-K))$ es regular. $\square$

# CAPITULO III

## §1.- Algunas consecuencias de la teoría espectral no lineal.

En esta sección probaremos varios resultados bastante conocidos en Topología y Análisis Funcional no Lineal. Antes de enunciarlos introduciremos algo de notación y algunos hechos elementales que usaremos.

Sean $S=\{x\in E : \|x\|=1\}$ y $f: S\to E$ continua tal que $f(S)$ es acotado. Denotaremos por $\bar{f}$ a la siguiente extensión de $f$:

$$\bar{f}(x)=\begin{cases}\|x\|\, f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

, entonces

(a) $\bar{f}$ es continua y positivamente homogénea

(b) $d(\bar{f})=\inf\{\|f(x)\| : x\in S\}$

(c) $|\bar{f}|=\sup\{\|f(x)\| : x\in S\}$

(d) Si $\beta(\lambda I-\bar{f})>0$, entonces $\lambda\in\Sigma(\bar{f})$ si y sólo si $f(x)=\lambda x$ para algún $x\in S$

Este último hecho es consecuencia de:

1.1 <u>Proposición.-</u> Sea $f: E\to E$ positivamente homogénea tal que $\beta(f)>0$, entonces $f(x)=0$ tiene unicamente la solución trivial si y sólo si $d(f)>0$.

Dem: "$\Leftarrow$" Es obvio.

"$\Rightarrow$" También, pero sea $d(f)=0$, entonces existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset S$ tal que $f(x_n) \to 0$. Sea $A = (x_n)_{n=1}^{\infty}$. Como $0 = \alpha(f(A)) \geq \beta(f)\,\alpha(A)$, entonces $\alpha(A)=0$, por lo cual podemos suponer que $x_n \to x$ y por lo tanto $f(x) = \lim f(x_n) = 0$. $\square$.

Las consecuencias de la teoría espectral no lineal que probaremos son las siguientes:

1.2 Teorema: Sean $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ y $f: S^n \to S^n$ continua pero no suprayectiva, entonces $f$ tiene un punto fijo.

Dem: Sea $\tilde{f}: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ la extensión introducida al principio de la sección. Como $d(\tilde{f}) = |\tilde{f}| = 1$, $\lambda I - \tilde{f}$ es regular si $|\lambda| > 1$. Además, $\sigma_\pi(\tilde{f}) = \Sigma(\tilde{f}) \subset \{-1, 1\}$. Puesto que $f$ no es sobrayectiva, $0 \in \sigma(\tilde{f})$.

Si $|\lambda| < 1$, $0$ y $\lambda$ están en la misma componente de $\mathbb{R} \setminus \sigma_\pi(\tilde{f})$, por lo cual $\lambda I - \tilde{f}$ es regular, i.e. $(-1,1) \subset \sigma(\tilde{f})$ y puesto que el espectro es cerrado, $\sigma(\tilde{f}) = [-1, 1]$. De la inclusión $\partial\sigma(\tilde{f}) \subset \sigma_\pi(\tilde{f}) = \Sigma(\tilde{f})$, $\Sigma(\tilde{f}) = \{-1, 1\}$. Así, $f$ tiene un punto fijo (y también un punto que bajo $f$ va en su antípoda). $\square$

<u>1.3 Teorema.-</u> Sean $S=\{x\in E: \|x\|=1\}$, donde $\dim E=\infty$, y $f: S\to S$ continua y compacta, entonces $f$ tiene un punto fijo.

<u>Dem.-</u> Como $\bar{f}$ es compacta, $\beta(I-\bar{f})=1$. Además $\Sigma(f)\subset S_{\mathbb{K}}[0;1]$ y $\sigma(\bar{f})$ es acotado. Por II-2.8 (b) la componente de $\mathbb{K}\setminus\Sigma(\bar{f})$ que contiene a $0$ es acotada, por lo tanto $\Sigma(\bar{f})=S_{\mathbb{K}}[0;1]$, en particular $1\in\Sigma(\bar{f})$. □

<u>1.4 Teorema.-</u> Sea $f: S^n\to S^n$ continua e impar, entonces $f$ es suprayectiva.

<u>Dem.-</u> Tenemos que $\sigma_\pi(\bar{f})=\Sigma(\bar{f})\subset\{-1,1\}$, por lo tanto $0\notin\sigma_\pi(\bar{f})$. Por ser $f$ alternativa, $0\notin\sigma(\bar{f})$ y de aquí $\bar{f}$ es suprayectiva, por lo tanto $f$ lo es. □

<u>1.5 Teorema.-</u> Sean $\dim E=\infty$ y $f: S\to S$ continua y compacta, entonces $f$ no es impar.

<u>Dem.-</u> Si $f$ es impar, como $\Sigma(\bar{f})\subset S_{\mathbb{K}}[0;1]$, $\sigma_\beta(\bar{f})=\{0\}$ y $\bar{f}$ es alternativa; $\sigma(\bar{f})=\sigma_\pi(\bar{f})\subset\{0\}\cup S_{\mathbb{K}}[0;1]$, pero esto contradice al hecho de que $0$ es punto interior de $\sigma_\delta(\bar{f})$. (II-2.7(c)). □

<u>1.6 Teorema de Birkhoff-Kellog.-</u> Sean $\dim E=\infty$, $f: S\to E$ continua, compacta y tal que $\|f(x)\|\geq k>0$ para todo

$x\in S$, entonces $f$ tiene un valor propio positivo.

Dem.- $0\notin\Sigma(\bar f)$ y $\bar f$ es cuasi-acotada. Por II.2.8(b) la componente de $\mathbb{K}\setminus\Sigma(\bar f)$ que contiene a $0$ es acotada y por lo tanto existe $r>0$ tal que $r\in\Sigma(\bar f)$, entonces $r$ es un valor propio de $f$ ya que $\beta(rI-\bar f)=r>0$. □

1.7 Teorema de Hopf en esferas.- Sea $f: S^{2n}\to\mathbb{R}^{2n+1}$ continua y tal que $(f(x),x)=0$ para todo $x\in S^{2n}$, entonces $f$ se anula en algún punto $x\in S^{2n}$.

Dem.- $\bar f:\mathbb{R}^{2n+1}\to\mathbb{R}^{2n+1}$ es cuasi-acotada y por 2.13 del Capítulo II existe $\lambda\in\Sigma(\bar f)$, por lo tanto existe $x\in S^{2n}$ tal que $f(x)$ y $x$ son paralelos, pero son también ortogonales. Por eso $f(x)=0$. □

1.8 Teorema de Borsuk-Ulam.- Sea $\varphi: S\to E$ un campo vectorial compacto tal que $\varphi(S)$ está contenido en un subespacio propio $F$ de $E$, entonces existe $x\in S$ tal que $\varphi(x)=\varphi(-x)$.

Dem.- Sea $\psi: S\to F$ tal que $\psi(x)=\varphi(x)-\varphi(-x)$, entonces $\beta(\bar\psi)>0$ ($\beta(\bar\psi)=\infty$ si $\dim E<\infty$, $\beta(\bar\psi)=2$ si $\dim E=\infty$), así, $0\notin\sigma_\beta(\bar\psi)$.

Como $\bar\psi$ no es supráyectiva, $\bar\psi$ no es regular y por ser $\tilde{\Psi}$ alternativa, $0 \in \sigma(\tilde{\Psi}) = \sigma_\pi(\tilde{\Psi})$. Por lo tanto $0 \in \Sigma(\tilde{\Psi})$ y finalmente existe $x \in S$ tal que $\Psi(x) = 0$. $\square$

1.9 Teorema:- Sean $U$ un subconjunto abierto y acotado de un espacio de Banach $E$, entonces $\partial U$ no es retracto de $\bar{U}$ bajo un campo vectorial compacto.

Dem:- Supongamos que existe un campo vectorial compacto $\varphi : \bar{U} \to \partial U$ que es una retracción de $\bar{U}$ en $\partial U$.

Definamos $f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in \bar{U} \\ x & \text{si } x \in E \setminus U \end{cases}$, entonces $q(I-f) = 0$.

Por II-2.3 (b) $\sigma(f) = \sigma(I) = \{1\}$. De lo anterior se sigue que $0 \notin \sigma(f)$, pero ésto es una contradicción pues $f$ no es suprayectiva. $\square$

## §2.- El espectro de un operador integral de Volterra no lineal.

El espectro de un operador lineal acotado de Volterra consiste únicamente de 0.

Probaremos que esta situación se extiende al caso no lineal con ciertas restricciones sobre el núcleo del operador.

Sea $h : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que existen a,b,c,o

con la propiedad $|h(t,s,x)| \leq a + b|s| + c|x|$.
Sean $E = \mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ y $f: E \to E$ el operador
$f(x)(t) = d + \int_0^t h(t,s,x(s))\,ds$, $d$ una constante.
Afirmamos que bajo estas suposiciones $\sigma(f) = \{0\}$.
Usando el Teorema de Arzela-Ascoli se prueba que $f$ es compacta.
Puesto que $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq \frac{d + a + b + c\|x\|}{\|x\|}$, $f$ es cuasi-acotada y por lo tanto $\sigma(f)$ es acotado.
Por ser $f$ compacta, $\beta(\lambda I - f) = |\lambda|$. Calculemos $d(\lambda I - f)$.
Sean $y \in Im(\lambda I - f)$, $x \in E$ tal que
$\lambda x(t) - \int_0^t h(t,s,x(s))\,ds - d = y(t)$, entonces $|\lambda x(t)| \leq$
$|d| + \|y\| + \int_0^t |h(t,s,x(s))|\,ds \leq |d| + \|y\| + \int_0^t (a + b + c|x(s)|)\,ds$.
Si $\lambda \neq 0$, $|x(t)| \leq |\lambda^{-1}|(\|y\| + |d| + a + b) + |\lambda^{-1}|c\int_0^t |x(s)|\,ds$.
Aplicando la desigualdad de Gronwall obtenemos que
$|x(t)| \leq |\lambda^{-1}|(\|y\| + |d| + a + b)\exp(|\lambda^{-1}|c)$.
Esto prueba que $\frac{\|\lambda x - f(x)\| + a + b + |d|}{\|x\|} \geq \frac{|\lambda|}{\exp(|\lambda^{-1}|c)} > 0$,
y en consecuencia $d(\lambda I - f) \geq \frac{|\lambda|}{\exp(|\lambda^{-1}|c)} > 0$. Por lo tanto $\sigma_\pi(f) = \{0\}$.
Por ser $\sigma(f)$ acotado y dada la inclusión $\partial\sigma(f) \subset \sigma_\pi(f)$, se tiene que $\sigma(f) = \{0\}$.

Como consecuencia de este resultado tenemos el hecho bastante conocido de que el problema con valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(0) = c \end{cases}$$

tiene una solución en $[0,1]$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

# Referencias

[Da] Darbo, G. Punti uniti in transformazioni a codominio non compatto. Rend. Sem. Mat. Padova. 24 (1955) 84-92

[D] Dugundji, J. An extension of Tietze's Theorem. Pacific Journal of Mathematics. 1 (1951) 353-367

[F-M-V] Furi, M; Martelli, M; Vignoli, A. Contributions to the spectral theory for nonlinear operators. (Aparecerá en Annali di Matematica Pura ed Applicata).

[G] Granas, A. Introduction to the topology of functional spaces. Mathematics Lecture Notes. University of Chicago. 1961.

[G1] Granas, A. The theory of compact vector fields and some applications to the topology of functional spaces. Rozprawy Matematyczne. Warsawa 30 (1962)

[Ha] Halmos, P.R. A Hilbert space problem book. Van Nostraud. 1967.

[Ho] Holmes, R.B. Geometric Functional Analysis and its applications. Springer-Verlag. 1975.

[M] Martin, R. Nonlinear operators and Differential Equations in Banach spaces. J. Wiley & Sons. 1976

[Mi] Michael, E. Continuos selections I. Annals of Mathematics 63 (1956) 361-382

[N] Nussbaum, R.D. Some fixed point theorems. Bulletin of the American Mathematical Society 77 (1971) 360-365.

[R] Rudin, W. Functional Analysis. Mc Graw-Hill. 1973.

[Scha] Schaeffer, H. Über die Methode der a priori Schranken. Math. Ann. 129 (1955) 415-416

[S] Schechter, M. Principles of Functional Analysis. Academic Press. 1971.