Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

1 ejem.
8

SOBRE EL LEMA DE SCHUR-ZASSENHAUS

T E S I S

Que para obtener el Título de

LICENCIADO EN MATEMATICAS

P r e s e n t a

JUAN FLORES FUENTES

MEXICO, D. F. 6695 1979

I N T R O D U C C I O N

En el presente trabajo se hace un estudio sobre extensiones de grupos. Se comienza en el capítulo I por definir el producto directo de grupos y se demuestran algunos resultados preliminares que posteriormente son utilizados. En el capítulo II se generaliza el producto directo obteniendo así el producto semidirecto de grupos, se prueban algunas proposiciones referentes al mismo y se dan ejemplos. El capítulo III trata de lo que esencialmente es el objeto de este trabajo: Extensiones de grupos. Se demuestran algunos resultados y se dan ejemplos que hacen ver que una extensión es una generalización del producto semidirecto. Por último en el capítulo IV se hacen notar algunas condiciones bajo las cuales una extensión es un producto semidirecto.

También se obtienen los Teoremas:

Teorema 4.3. Sea K abeliano de Torsión y Q de orden n si $\forall k \in K$ $(|k|, n) = 1$ entonces toda extensión G de K por Q es un prducto semidirecto.

Teorema 4.4. Sea G una extensión de K por Q, con K abeliano de torsión, Q finito de orden n.

Si $\forall k \in K$ $(1\ k\ 1, n) = 1$ entonces cualesquiera dos subgrupos de G de orden n son conjugados. Que son generalizaciones de teoremas cuyas hipótesis originales tienen a K abeliano finito de orden m y $(m, n) = 1$.

Finalmente al examinar el lema de Schur-Zassenhaus (Si K y Q son grupos finitos de ordenes m y n respectivamente y si $(m, n) = 1$, entonces toda extensión G de K por Q es un producto semidirecto) se demuestra que si cambiamos las hipótesis a: Sean K y Q grupos, con K soluble de torsión, Q finito de orden n y si $\forall k \in K$ $(1\ k\ 1, n) = 1$ se tiene que la conclusión de lema también es válida.

C A P I T U L O I

PRODUCTO DIRECTO

Existen procedimientos para construir nuevos grupos a partir de grupos conocidos. Un ejemplo lo damos en la siguiente:

DEFINICION 1.1

Sean $(H, *)$ y (K, o) grupos, consideremos el producto cartesiano de los conjuntos soporte H y K. $H \times K = \{ (h, k) / h \in H, k \in K \}$ definimos una operación en $H \times K$ de la siguiente manera: $(h, k) (h_1, k_1) = (h * h_1, k \circ k_1)$; (Por simplicidad escribiremos (hh_1, kk_1) en lugar de $(h * h_1, K \circ K_1)$ claramente esta operación es asociativa, $(1_H, 1_K)$ es el elemento idéntico, (h^{-1}, k^{-1}) es el inverso de (h, k).

El grupo así obtenido se llama producto directo de H por K y se denota por $H \times K$.

EJEMPLO 1.2

$$\text{Sean } H = T_3 = \{1, a, a^2\}$$
$$K = T_2 = \{1, b\}$$

entonces $H \times K = \{(1,1), (1,b), (a,1), (a,b)\ (a^2,1), (a^2,b)\}$ que es el grupo cíclico T_6 con generadores (a,b) y (a^2,b)

TEOREMA 1.3

Sea G un grupo con subgrupos normales H y K; Si $H \cap K = \{1\}$ y $HK = G$, entonces $G \cong H \times K$

Demostración

Sea $a \varepsilon G$ puesto que $G = HK$ entonces $a = hk$ expresión única con $h \varepsilon H$ y $k \varepsilon K$; ya que si $a = hk = h_1 k_1$ entonces $h_1^{-1} h = k_1 k^{-1} \varepsilon H \cap K = \{1\}$ $h_1 = h$ y $k_1 = k$

Definimos $f: G \to H \times K$ por $f(a) = (h, k)$ donde $a = hk$ consideremos el conmutador $h^{-1}k^{-1}hk$. Tenemos

$h^{-1}k^{-1}hk \ \varepsilon\ K$ ya que $K \triangleleft G$

$h^{-1}k^{-1}hk \ \varepsilon\ H$ ya que $H \triangleleft G$ entonces $h^{-1}k^{-1}hk \ \varepsilon\ H \cap K = \{1\}$

así que $h^{-1}k^{-1}hk = 1$ luego $hk = kh$

ahora sean $a = hk$ y $b = h_1 k_1$ de aquí se tiene que

$$
\begin{aligned}
f(ab) &= f(hkh_1k_1) \\
&= f(hh_1kk_1) \\
&= (hh_1, kk_1)
\end{aligned}
$$

$= (h,k)\ (h_1,\ k_1)$

$= f(a)\ f(b)$ $\therefore$ f es homomorfismo

Supongamos que $f(a) = (1,\ 1)$ como $f(a) = (h,k)$ tenemos que $h=1$ y $k=1$ luego $a=1$ de donde el nucleo de f $= \{1\}$ $\therefore$ f es uno a uno.

Para cada $(h,k) \in H \times K$ existe un único $a \in G$ tal que $a = hk$ y $f(a) = (h,k)$

$\therefore$ f es sobre

Pasaremos a demostrar algunos resultados que se utilizaran en capítulos posteriores.

PROPOSICION 1.4

Si x es un generador de un grupo cíclico de orden n, entonces x^k es también generador $\Longleftrightarrow$ $(k,\ n) = 1$

Demostración

$\Rightarrow$) Supongamos que $<x> = <x^k>$ y $|<x>| = n$ entonces $<x> \subset <x^k>$ así que $x \in <x^k>$ y $x = (x^k)^c$ $\rightarrow$ $x^{kc-1} = 1 \rightarrow n\,|\,kc-1 \rightarrow kc - 1 =$ nd para alguna $d \in Z$ $\rightarrow$ $kc + n(-d) = 1 \rightarrow (k,n) = 1$

$\Leftarrow$) Supongamos que $(k,n) = 1$, es decir $ku + nv = 1$ con $u, v \in Z$ entonces $x = x^{ku+nv} = x^{ku} = (x^k)^u \in \langle x^k \rangle$

Luego tenemos que $\langle x \rangle \subset \langle x^k \rangle$ y como - $x^k \in \langle x \rangle$ implica que $\langle x^k \rangle \subset \langle x \rangle$ se sigue que - $\langle x \rangle = \langle x^k \rangle$

Dado un grupo G denotamos por Aut(G) el grupo - de automorfismos de G.

PROPOSICION 1.5

Si un grupo G es generado por un subconjunto S - entonces $\alpha(S)$ (la imágen de S bajo α) también genera G $\forall\ \alpha \in \mathrm{Aut}(G)$.

Demostración

Sea $a \in G$ como $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ $\exists$ $b \in G$ tal que - $\alpha(b) = a$ pero $b = S_1^{r_1} \ldots S_n^{r_n}$ con $S_i \in S$ y $r_i \in Z$ - ya que $\langle S \rangle = G$ entonces $a = \alpha(b) = \alpha(S_1^{r_1} \ldots S_n^{r_n}) = \alpha(S_1)^{r_1} \ldots \alpha(S_n)^{r_n}$

Podemos ya demostrar la siguiente:

PROPOSICION 1.6

$AuT(Tn) \simeq Zn^{*}$ y por lo tanto tiene orden $\phi(n)$ --

Donde Zn^{*} es el grupo multiplicativo de las clases de los enteros k módulo n con $k<n$ y $(k,n) = 1$

DEMOSTRACION

Sea x tal que $\langle x\rangle = Tn$ si $\alpha\in AuT(Tn)$ entonces $\alpha(x)$ también es generador de Tn (por 1.5) y $\alpha(x) = x^{k}$ para $k\in Z$ con $(k,n) = 1$ (por 1.4). Inversamente, si $(k,n) = 1$ entonces la función $\beta(u) = u^{k}$ $(u\in Tn)$ es un automorfismo de Tn. En efecto si $(k,n) = 1$ sea $\beta(u) = u^{k}$ entonces $\beta(uv) = (uv)^{k} = u^{k}v^{k} = \beta(u)\beta(v) \therefore \beta$ es homomorfismo. Sea $\beta(u) = u^{k} = 1 \rightarrow |u|\,|k$ y $|u|\;|n \rightarrow |u| = 1 \rightarrow u=1$ entonces el nucleo de - - $\beta = \{1\} \therefore \beta$ es automorfismo.

Sea $Zn^{*} = \{\overline{1},\ldots,\overline{m-1}\}$ si $\overline{k}$ denota la clase residual (módulo n) la cual contiene al entero k, entonces podemos - definir una función $\psi: AuT(Tn) \rightarrow Zn^{*}$ por $\psi(\alpha) = \overline{k} \longleftrightarrow \alpha(x) = x^{k}$. Se tiene que ψ es un isomorfismo. En efecto.

$\alpha(x) = x^{k}$

$\beta(x) = x^{k_1}$ $(\alpha\circ\beta)(x) = \alpha(x^{k_1}) = (x^{k_1})^{k} = x^{kk_1} \longrightarrow$

$\psi\ (\alpha\beta) = \overline{kk_1}$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\ (x) = x^{k}\\ \beta\ (x) = x^{k_1}\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\psi\ (\alpha) = \overline{k}\\ \psi\ (\beta) = \overline{k}_1\end{array}\right\} \longrightarrow \psi(\alpha)\ \psi\ (\beta) = \overline{k}\overline{k_1} = \overline{kk_1}$$

Entonces $\psi\ (\alpha_\circ\beta) = \psi(\alpha)\ \psi(\beta)$ y ψ es homomorfismo supongamos que $\psi(\alpha) = \psi(\beta) \rightarrow \psi(\alpha\beta^{-1}) = \overline{1} \leftrightarrow (\alpha\beta)^{-1}(x) = x^{1}$ --- $x \in Tn \rightarrow \alpha\beta^{-1} = |_{Tn} \rightarrow \alpha = \beta$

PROPOSICION 1.7

Sea G un grupo y sea X un conjunto con el mismo-- número de elementos de G. si f: G → X es una, correspon-- dencia uno a uno, existe una única operación binaria que- puede ser definida sobre X tal que X es un grupo y f un - isomorfismo.

Demostración

Sean x, y ε G entonces f(x), f(y) ε X. Para la - operación x.y ε G definimos la operación $f(x) * f(y)$ en X, además dados x, y ε G existe un único z ε G tal que x.y=z $\longleftrightarrow$ para f(x), f(y) ε X existe un único f(z) ε X tal - que $f(x) * f(y) = f(z)$.

La asociatividad en X es obvia

$1.x = x.1 = x \iff f(1)*f(x) = f(x)*f(1) = f(x)$ en X

$xx^{-1} = 1$ en G $\iff f(x) * f(x^{-1}) = f(1)$ en X

entonces $(X,*)$ es grupo.

f es isomorfismo, ya que es uno a uno y

$x.y = z \iff f(x) * f(n) = f(z)$ nos dice que f es homomorfismo.

DEFINICION 1.8

Si $a, b \varepsilon G$, el conmutador de a, b denotado por - $[a, b]$, es el elemento $a^{-1}b^{-1}ab$. El subgrupo conmutador de G, denotado por G^1, es el subgrupo de G generado - por todos los conmutadores en G.

PROPOSICION 1.9

$$G^1 \triangleleft G \text{ y } \frac{G}{G^1} \text{ abeliano}$$

Demostración

Sean $a \varepsilon G^1$, $g \varepsilon G$, $g^{-1}(a^{-1})^{-1} ga^{-1} \varepsilon G^1$ luego $g^{-1} a g = g^{-1} (a^{-1})^{-1} ga^{-1}a \varepsilon G^1$.

Ahora sean $x, y \varepsilon G$ entonces

$$x G^1 y G^1 = xy G^1 = xy(y^{-1}x^{-1}yxG^1) = yxG^1 = yG^1xG^1$$

PROPOSICION 1.10

Si $H \lhd G$ y $\frac{G}{H}$ abeliano entonces $G^1 \subseteq H$

Demostración

Sean $x, y \varepsilon G$ puesto que $\frac{G}{H}$ es abeliano, se tie ne

$$\begin{aligned} x^{-1}y^{-1}xyH &= (x^{-1}H)(y^{-1}H)(xH)(yH) \\ &= (x^{-1}H)(xH)(y^{-1}H)(yH) \\ &= (x^{-1}xH)(y^{-1}yH) \\ &= HH \\ &= H \text{ entonces} \end{aligned}$$

$x^{-1}y^{-1}xy \varepsilon H \therefore G^1 \subseteq H$

DEFINICION 1.11

Un subgrupo H de G es característico en G, en caso de que $\alpha(H) \subset H \ \forall \alpha \varepsilon \mathrm{Aut}(G)$

PROPOSICION 1.12

G^1 es subgrupo característico de G

Demostración

Sea $x^{-1}y^{-1}xy \in G^1$ y sea $\alpha \in$ Aut (G) entonces

$\alpha(x^{-1}y^{-1}xy) = \alpha(x)^{-1}\,\alpha(y)^{-1}\,\alpha(x)\,\alpha(y) \in G^1 \therefore \alpha(G^1) \subset G^1$.

C A P I T U L O II

PRODUCTO SEMIDIRECTO

Se ha visto antes (Teorema 1.3), que un grupo G - es un producto directo de dos grupos K y Q Si:

i) $K \lhd G$ y $Q \lhd G$

ii) $K \cap Q = \{1\}$

iii) $K Q = G$

Si en (i) pedimos solamente que K sea normal en - G, y mantenemos (ii) y (iii) intactos, obtendremos una generalización del producto directo de grupos. Como se verá en la siguiente:

DEFINICION 2.1

Un grupo G es producto semidirecto de K por Q en- caso de que K y Q sean subgrupos de G tales que:

i) $K \lhd G$

ii) $K \cap Q = \{1\}$

iii) $K Q = G$

EJEMPLO 2.2

S_3 y T_6 son productos semidirectos de T_3 por T_2 --
En efecto.

Se tiene que $T_3 \lhd S_3$

y Si $x \in T_3 \cap T_2$ entonces $|x|$ $|3$ y $|x|$ $|2$ luego $x = 1$

$$|T_3.T_2| = \frac{|T_3||T_2|}{|T_3 \cap T_2|} = |T_3||T_2| = 6 \text{ entonces } T_3\ T_2 = S_3$$

Tenemos también que

$T_3 \Delta T_6$

$x \in T_3 \cap T_2 \qquad x = 1$

$$|T_3.T_2| = \frac{|T_3||T_2|}{|T_3 \cap T_2|} = |T_3||T_2| = 6 \text{ entonces } T_3.T_2 = T_6$$

De lo anterior y del ejemplo (1.2) podemos observar que T_6 es producto directo y en consecuencia producto-semidirecto de T_3 por T_2. Mientras que S_3 es producto semidirecto, pero no producto directo de los mismos.

LEMA 2.3

Sea G un producto semidirecto de K por Q, existe- un homomorfismo $\theta: Q \rightarrow AuT(K)$ definido por

$\theta_x\ (k) = x\ k\ x^{-1}\ \forall\ k \in K,\ x \in Q$

Demostración

Sea $\theta : Q \longrightarrow AuT(K)$ tal que $\theta(x) = \theta x$ como $K \Delta G$,

entonces $\theta_x(k) = xkx^{-1} \varepsilon K \; \forall x \varepsilon Q$. Luego $\theta_x \varepsilon AuT\ (K)$

y como $\theta_{x\ y}\ (k) = xyk(xy)^{-1} = xyky^{-1}x^{-1} = x\theta y(k)x^{-1} = \theta_x(\theta y(k))$

se tiene que $\theta xy = \theta_x \theta_y$ $\therefore$ $\theta(xy) = \theta(x)\theta(y)$ y $\theta_1(k) = k$

Nos proponemos recobrar un producto semidirecto G de K por Q comenzando solamente con K, Q y un homomorfismo $\theta : Q \longrightarrow AuT\ (K)$

DEFINICION 2.4

Sean K, Q y $\theta : Q \longrightarrow AuT(K)$, entonces un producto semidirecto G de K por Q realiza θ en caso de que $\theta_x(k) = xkx^{-1}$ $\forall$ $k \varepsilon K$.

Con esta definición notamos que el lema 2.3, dice que todo producto semidirecto de K por Q realiza un homofismo θ de Q en AuT (K).

DEFINICION 2.5

Sean K, Q y $\theta: Q \longrightarrow AuT(K)$ dados; entonces $Kx_\theta Q$ - es el conjunto de pares ordenados $(k, y) \in K\, x_\theta Q$ bajo la - operación binaria $(k,x)\ (k_1, y) = (k\theta_x(k_1), xy)$.

TEOREMA 2.6

Sean K, Q y $\theta: Q \longrightarrow AuT(k)$ dados; entonces $G = KX_\theta Q$- es un producto semidirecto de K por Q que realiza θ.

DEMOSTRACION.

G es grupo. En efecto.

$$
\begin{aligned}
((k, x)\ (k_1, y))(k_2, z) &= (k\theta_x(k_1), xy)\ (k_2, z)\\
&= (k\theta_x(k_1)\theta_{xy}(k_2), xyz)\\
(k, x)((k_1, y)(k_2, z)) &= (k, x)(k_1\theta y(k_2), yz)\\
&= (k\theta_x(k_1\theta y(k_2)), xyz)\\
&= (k\theta_x(k_1)\theta_x(\theta_y(k_2)), xyz)\\
&= (k\theta_x(k_1)\theta_{xy}(k_2), xyz) \quad \text{asociatividad}
\end{aligned}
$$

El elemento identidad es (1, 1) ya que

$(k,x)\ (1,1) = (k\theta_x(1), x) = (k, x)$

$(1, 1)(k,x) = (1\theta_1(k), x) = (k, x)$

El inverso de (k, x) es $(\theta_{x^{-1}}(k^{-1}), x^{-1})$ en efecto $(k,x)(\theta_{x}-1(k^{-1}),x^{-1}) = (k\theta_x(\theta_x-1(k^{-1})), 1)$

$$= (k\theta_{xx}-1(k^{-1}), 1)$$

$$= (k\partial_1(k^{-1}), 1)$$

$$= (1,1)$$

$$(\theta_x-1(k^{-1}), x^{-1})(k, x) = (\theta_x-1\ (k^{-1})\theta_x-1(k), 1)$$

$$= (\theta_x-1(k^{-1}k), 1)$$

$$= (1,1)$$

Identificamos ahora K con el subconjunto de G que consiste de todos los pares de la forma $(k,1)$ y definimos $\pi : G \longrightarrow Q$ tal que $\pi(k,x) = x$ entonces π es homomorfismo, ya que $\pi((k,x)(k_1,y)) = \pi((k\theta_x(k_1),xy)) = xy = \pi(k,x)\ \pi(k_1,y)$.

Ahora si $\pi(k,x) = x = 1$ entonces $(k,x)=(k,1) \in K$ el núcleo de $\pi = K$ $\therefore$ $K \lhd G$

Identificando Q con todos los pares de la forma $(1,x)$. Entonces Q es subgrupo de G con $KQ=G$ y $K \cap Q = \{(1,1)\}$ por lo tanto G es un producto semidirecto de K por Q.
para ver que G realiza θ comprobamos:

$$(1,x)(k,1)(1,x)^{-1} = (1\theta_x(k),x)\ (1,x)^{-1}$$
$$= (\theta_x(k),x)(\theta_{x^{-1}}(1^{-1}),x^{-1})$$
$$= (\theta_x(k)\theta_x(\theta_{x^{-1}}(1^{-1})),\ 1)$$
$$= (\theta_x(k)\theta_{xx^{-1}}(1^{-1}),\ 1)$$
$$= (\theta_x(k),\ 1)$$

TEOREMA 2.7

Si G es un producto semidirecto de K por Q, entonces $G \cong kx_\theta Q$ para alguna $\theta : Q \longrightarrow AuT\ (K)$

Demostración.

Definimos $\theta_x(k) = xkx^{-1}$ puesto que $G = KQ$ y $K\cap Q = \{1\}$

Cada $g \in G$ tiene una expresión única $g = kx$, $k\in K$ y $x\in Q$.

la multiplicación en G satisface $kxk_1x_1 = kxk_1x^{-1}xx_1$

$$= k\theta_x(k_1)xx_1$$

sea $\psi : Kx_\theta Q \longrightarrow G$ tal que $\psi((k,x)) = kx$

ψ es uno a uno y está bien definida ya que

$(k,x)=(k_1,x_1) \Longleftrightarrow k = k_1$ y $x=x_1 \Leftrightarrow kx = k_1x_1 \Longleftrightarrow$

$\psi(k,x) = \psi(k_1,x_1)$

ψ es homomorfismo. En efecto:

$$\psi\ ((k,x)(k_1,X_1)) = \psi(k\theta_x(k_1),\ xx_1) = k\theta_x(k_1)xx_1$$
$$= kxk_1x^{-1}xx_1$$
$$= kxk_1x_1$$
$$= \psi(k,x)\ \psi(k_1,\ x_1)$$

ψ es sobre ya que $\forall$ $g = kx \in G$ $\exists$ $(k,x)\in kx_\theta Q$ tal que $\psi(k,x) = kx$.·. ψ es isomorfismo.

En base a los resultados que se acaban de probar- haremos ver con un ejemplo, que partiendo de K, Q y θ:Q -- AuT(K) podemos rescatar un producto semidirecto que θ realiza.

EJEMPLO 2.8

Consideremos $K = Z_3$, $Q=T_2$ y $\theta:T_2 \longrightarrow AuT(Z_3)$ se tiene por (1.6) que hay solamente dos automorfismos de- Z_3.

Es decir Si $Z_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$
$T_2 = \{1,x\}$ y θ es tal que

$$\theta_1: \begin{matrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{2} & \overline{2} \end{matrix} \qquad \theta_x: \begin{matrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{2} & \overline{2} \end{matrix}$$

para este homomorfismo θ

se tiene $Z_3 x_\theta T_2 = Z_3 x T_2 = \{(\bar{0}, 1), (\bar{0},x), (\bar{1},1), (\bar{1},x),$ $(\bar{2},1), (\bar{2},x)\}$

La operación aquí es la del producto directo ya que $\theta_a = 1_{Z_3}$ $\forall\ a \in T_2$.

En este caso $Z_3 x_\theta T_2 = T_6$.

Ahora consideremos θ tal que.

$$\theta_1: \begin{array}{cc} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{array} \qquad \theta_x: \begin{array}{cc} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{1} \end{array}$$

$$Z_3 x_\theta T_2 = \{(\bar{0},1), (\bar{0},x), (\bar{1},1), (\bar{1},x), (\bar{2},1), (\bar{2},x)\}$$

Construyendo la tabla de multiplicar tenemos.

$Z_3 x_\theta T_2$	$(\bar{0},1)$	$(\bar{0},x)$	$(\bar{1},1)$	$(\bar{1},x)$	$(\bar{2},1)$	$(\bar{2},x)$
$(\bar{0},1)$	$(\bar{0},1)$	$(\bar{0},x)$	$(\bar{1},1)$	$(\bar{1},x)$	$(\bar{2},1)$	$(\bar{2},x)$
$(\bar{0},x)$	$(\bar{0},x)$	$(\bar{0},1)$	$(\bar{2},x)$	$(\bar{2},1)$	$(\bar{1},x)$	$(\bar{1},1)$
$(\bar{1},1)$	$(\bar{1},1)$	$(\bar{1},x)$	$(\bar{2},1)$	$(\bar{2},x)$	$(\bar{0},1)$	$(\bar{0},x)$
$(\bar{1},x)$	$(\bar{1},x)$	$(\bar{1},1)$	$(\bar{0},x)$	$(\bar{0},1)$	$(\bar{2},x)$	$(\bar{2},1)$
$(\bar{2},1)$	$(\bar{2},1)$	$(\bar{2},x)$	$(\bar{0},1)$	$(\bar{0},x)$	$(\bar{1},1)$	$(\bar{1},x)$
$(\bar{2},x)$	$(\bar{2},x)$	$(\bar{2},1)$	$(\bar{1},x)$	$(\bar{1},1)$	$(\bar{0},x)$	$(\bar{0},1)$

que como puede verse es un grupo isomorfo a S_3.

C A P I T U L O III

EXTENSIONES

DEFINICION 3.1

Una sucesión de grupos Gi y homomorfismos fi dada por

$$\ldots G_{n-1} \xrightarrow{fn} Gn \xrightarrow{f_{n+1}} G_{n+1} \ldots$$

es exacta si Imágen de fn es igual al nucleo de fn+1.

En la discusión de extensiones G de K por Q, usaremos la notación multiplicativa para Q y la notación aditiva para G y su subgrupo normal K.

DEFINICION 3.2

Si $0 \longrightarrow K \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow I$ es una sucesión exacta, entonces se dice que G es una extensión de K por Q.

EJEMPLO 3.3

T_6 y S_3 son extensiones no isomorfas de Z_3 por T_2 ya que $0 \longrightarrow Z_3 \longrightarrow T_6 \longrightarrow T_2 \longrightarrow I$ y $0 \longrightarrow Z_3 \dashrightarrow S_3 \longrightarrow T_2 \longrightarrow I$

son sucesiones exactas y $T_6 \not\approx S_3$.

Existe una única entensión G de Z_2 por T_3. En - efecto tenemos que $|G|=6$ y $Z_2 \triangleleft G$, como los únicos grupos de orden 6 son S_3 y T_6 entonces G es o S_3 ó T_6 pero - $Z_2 \ntriangleleft S_3$ entonces $G = T_6$.

EJEMPLO 3.4

T_4 es una extensión de Z_2 por T_2 ya que

$0 \longrightarrow Z_2 \longrightarrow T_4 \longrightarrow T_2 \longrightarrow 1$ es exacta.

Pero T_4 no es producto semidirecto de Z_2 por T_2- ya que si $T_4 = Z_2 \times_\theta T_2$ entonces como $\theta : T_2 \longrightarrow AuT(Z_2) = 1_{Z_2}$ debe ser trivial entonces $T_4 = Z_2 x T_2$ lo cual es falso.

De los ejemplos anteriores se observa que una extensión es una generalización del producto semidirecto.

DEFINICION 3.5

Si $\pi : G \longrightarrow Q$ es sobre y $x \varepsilon Q$, entonces un levantamiento de x es un elemento $g \varepsilon G$ tal que $\pi(g) = x$.

LEMA 3.6

Sea G una extensión de K por Q, donde K es abeliano. Existe un homomorfismo $\theta : Q \longrightarrow AuT(K)$ tal que:

$\theta_x(k) = \ell(x) + k - \ell(x)$ $\forall k \in K$ y todo levantamiento $\ell(x)$ de x.

Demostración.

Si $a \in G$ sea fa la conjugación por a, puesto que $K \triangleleft G$, $fa|K$ es un automorfismo de K y la función $\mu : G \longrightarrow AuT(k)$ definida por $\mu(a) = fa|K$ es un homomorfismo. En efecto.

$\mu(a+b) = f_{a+b}|K = (fa|K)(f_b|K) = \mu(a)\mu(b)$

Si $a \in K$ entonces $\mu(a)(k) = a+k-a = k$ $\forall k$ ya que K es abeliano y $\mu(a) = 1_K$. Existe por lo tanto un homomorfismo.

$\mu_\# : \frac{G}{K} \longrightarrow AuT(k)$ definido por $\mu_\#(K_{+a}) = \mu(a)$.

En efecto. $\mu_\#(K_{+a} + K_{+b}) = \mu_\#(K_{+a+b}) = \mu(a+b) = \mu(a)\mu(b)$

$$= \mu_\#(K_{+a})\,\mu_\#(K_{+b})$$

El primer teorema de isomorfismo nos dice que $\frac{G}{K} \simeq Q$ y dice también que para cualquier elección de levantamientos $\ell(x)$, $x \in Q$, el mapeo $\lambda : Q \to \frac{G}{K}$ definido por $\lambda(x) = K + \ell(x)$ es un isomorfismo. Sea $\theta : Q \longrightarrow AuT\ (K)$

la composición $\mu_{\#}\lambda$ si $x \varepsilon Q_y$ $\ell(x)$ es un levantamiento, - entonces. $\theta_x = \mu_{\#}\lambda(x) = \mu_{\#}(K_{+}\ \ell(x)) = \mu(\ell(x))\ \varepsilon\ AuT(K)$; por lo tanto si $k \varepsilon K$ entonces.

$$\theta_x(k) = \mu(\ell(x))(k) = \ell(x) + k - \ell(x)$$

En lo sucesivo se escribirá $\theta_x(k)$ como xk. Se -- tienen las siguientes fórmulas:

$$x(k + k^1) = xk + xk^1$$

$$(xy)k = x(yk)$$

$$1k = k$$

DEFINICION 3.7

Sean K y Q grupos, K abeliano y $\theta: Q \longrightarrow AuT(k)$. -- una extensión G de K por Q realiza θ en caso de que $xk = \ell(x) + k - \ell(x)\ \forall\ k \varepsilon K$ y todo levantamiento $\ell(x)$ de x.

DEFINICION 3.8

Sea G una extensión de K por Q y sea $\pi: G \longrightarrow Q$ - un homomorfismo de G sobre Q tal que nucleo $\pi = K$ escogiendo- un levantamiento $\ell(x)$ de cada $x \varepsilon Q$ definimos la función -- $\ell: Q \longrightarrow G$, que satisface $\pi \circ \ell = 1_Q$. El rango de tal función

ℓ es llamado un Transversal de K sobre G, supongamos que- K es abeliano y G una extensión de K por Q que realiza θ.- Identificamos Q con $\frac{G}{K}$, y para cada $x\varepsilon Q$, escogemos un levan tamiento $\ell(x)\ \varepsilon G$, por comodidad hacemos $\ell(1)=o$. Una vez - elegido el transversal, cada elemento $g\varepsilon G$ tiene una expre- sión única de la forma $g=k+\ell(x)$ $x\varepsilon Q$, $k\varepsilon K$ (ya que $\ell(x)$ es - representante de una clase de K en G y G es la unión ajena de estas clases).

Se tienen las siguientes fórmulas.

i) $\ell(x) + k = xk + \ell(x)$ $x\varepsilon Q$ y $k\varepsilon K$

ii) $\ell(x)+\ell(y) = f(x,y)+\ell(xy)$ para alguna $f(x,y)\ \varepsilon\ K$ ($\ell(x)+\ell(y)$ y $\ell(xy)$ son representantes de la misma -- clase de K).

DEFINICION 3.9

La función $f:QxQ \longrightarrow K$ definida por la fórmula ii) Se llama 2-cociclo de G.

PROPOSICION 3.10

Sea G una extensión de K por Q y Sea $\pi:G\longrightarrow Q$ un- homomorfismo sobre, con núcleo de π =K. Entonces G es -- producto semidirecto de K por Q $\leftrightarrow$ existe un homomorfismo- $\ell:Q\longrightarrow G$ con $\pi o\ell = 1_Q$

Demostración.

$\Rightarrow$) supongamos que $G = Kx_\theta Q$. Sea $\ell : Q \rightarrow G$ tal que $\ell(x)=(o,x)$ entonces $\ell(xy)=(0,xy)$ es decir tenemos $\ell(x)=(o,x)$, $\ell(y)=(o,y)$ entonces $\ell(x)+\ell(y)=(o,x)+(o,y)$

$=(o,xy)$

(con la operación producto - semidirecto).

Luego $\ell(xy)=\ell(x)+\ell(y)$

Ahora Sea $\pi(k,x)=x$ entonces nucleo $\pi=K$ así que

$(\pi\ell)(x) = \pi(\ell(x)) = \pi(o,x)=x \therefore \pi\ell = 1_Q$

$\Leftarrow$)supongamos que $\ell : Q \longrightarrow G$ es homomorfismo, Con $\pi o \ell = 1_Q$

tenemos que G tiene una copia $Q^|$ de Q. Sea $y \varepsilon K \cap Q^| \rightarrow$ $y=\ell(x)$ con $x\varepsilon Q$ y $\pi(y)=1 \rightarrow 1= \pi(y)= \pi(\ell(x)) = (\pi o \ell)(x) = 1_Q(x) = x \rightarrow x=1$ y $\ell(x)=o=y \therefore K\cap Q^| = \{o\}$.

Sea $g\varepsilon G \rightarrow \pi(g) = x\varepsilon Q$ y $\ell(x) \varepsilon Q^|$ ahora

$g=(g-\ell(x)) + \ell(x)$. Consideramos $\pi(g-\ell(x))= \pi(g)\,\pi(\ell(x))^{-1}$

$= xx^{-1}$

$= 1$

entonces $g-\ell(x)\varepsilon K \quad \therefore G=K.Q^|$

Esta proposición nos dice que el 2-cociclo $f:QxQ \rightarrow K$ antes definido, depende del transversal dado y además nos dice que tanto se "desvía" G de ser un producto semidirecto (G es producto semidirecto cuando existe $\ell:Q \longrightarrow G$ tal que $f(x,y) = o \;\forall\; x,y \in Q$).

TEOREMA 3.11

Sea K abeliano y sea $\theta:Q \longrightarrow AuT(k)$. Una función $f:QxQ \longrightarrow K$ es un 2-ciclo $\leftrightarrow$ satisface las siguientes fórmulas.

i) $f(1,y) = o = f(x,1) \quad \forall\; x,y\in Q$

ii) $xf(y,z)-f(xy,z)+f(x,yz)-f(x,y)=o \;\forall\; x,y,z \in Q$

Demostración.

$\rightarrow$) Supongamos que f es un 2-cociclo. Esto significa que existe una extensión G de K por Q que realiza θ un transversal ha sido hallado y f satisface.

$\ell(x)+\ell(y)=f(x,y)+\ell(xy)$. Puesto que hemos dicho que $\ell(1)=o$ entonces

i) $\ell(1)+\ell(y)=f(1,y)+\ell(y) \rightarrow \ell(y)=f(1,y)+\ell(y) \rightarrow f(1,y)=o$

y

$\ell(x)+\ell(1)=f(x,1)+\ell(x) \rightarrow \ell(x)=f(x,1)+\ell(x) \rightarrow f(x,1)=o$

ii) Tenemos $f(x,y)=\ell(x)+\ell(y)-\ell(xy)$ entonces

$$x\, f(y,z)=\ell(x)+\ell(y)+\ell(z)-\ell(yz)-\ell(x)$$
$$f(xy,z)=\ell(xy)+\ell(z)-\ell(xyz)$$
$$f(x,yz)=\ell(x)+\ell(yz)-\ell(xyz)$$
$$f(x,y)=\ell(x)+\ell(y)-\ell(xy)$$

$$\begin{aligned} xf(y,z)-f(xy,z)+f(x,yz)-f(x,y) &= xf(y,z)+f(x,yz)-f(xy,z)-f(x,y) \text{ (K abeliano)}.\\ &= \ell(x)+\ell(y)+\ell(z)-\ell(yz)-\ell(x)+\ell(x)+\ell(yz)-\ell(xyz).\\ &\quad -(\ell(xy)+\ell(z)-\ell(xyz))-(\ell(x)+\ell(y)-\ell(xy)).\\ &= \ell(x)+\ell(y)+\ell(z)-\ell(xyz)+\ell(xyz)-\ell(z)-\ell(xy)+\ell(xy)-\ell(y)-\ell(x)\\ &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$) Supongamos inversamente que tenemos una función $f:Q\times Q \longrightarrow K$ que satisface

i) $f(1,y) = f(x,1)=0 \quad \forall\, x,y\in Q$

ii) $xf(y,z)-f(xy,z)+f(x,yz)-f(x,y)=0 \quad \forall\, x,y,z\in Q$

Construiremos una extensión G de K por Q que realiza θ y hallaremos un transversal ℓ tal que f es el 2-cociclo determinado por este dato.

Sea G el conjunto de todos los pares $(k,x)\varepsilon K x Q$ - con la operación binaria $(k,x)+(k^1,y)=(k+xk^1+f(x,y),xy)$ -- Demostraremos que G es grupo. En efecto.

$$\big((k,x)+(k^1,y)\big)+(k^{11},Z)=(k+xk^1+f(x,y),xy)+(k^{11},z)$$
$$=(k+xk^1+f(x,y)+xyk^{11}+f(xy,z),xyz)$$
$$=(k+xk^1+xf(y,z)+xyk^{11}+f(x,yz),xyz)$$

$$(k,x)+\big((k^1,y)+(k^{11},Z)\big)=(k,x)+\big(k^1+yk^{11}+f(y,z),yz)$$
$$=(k+x(k^1+yk^{11}+f(y,z))+f(x,yz),xyz)$$
$$=(k+xk^1+xyk^{11}+xf(y,z)+f(x,yz),xyz)$$

Asociatividad

Consideremos.

$$(k,x)+(o,1)=(k+xo+f(x,1),x)=(k,x)$$
$$(o,1)+(k,x)=(o+1k+f(1,x),x)=(k,x)$$

$(o,1)$ es el idéntico.

Ahora

$$(k,x)+(-x^{-1}k-x^{-1}f(x,x^{-1}),x^{-1})=(k+x(-x^{-1}k-x^{-1}f(x,x^{-1}))+ f(x,x^{-1}),\ 1).$$
$$=(k-k-f(x,x^{-1})+f(x,x^{-1}),1)$$
$$=(o,1)$$

$$(-x^{-1}k-x^{-1}f(x,x^{-1}),x^{-1})+(k,x)=(-x^{-1}k-x^{-1}f(x,x^{-1})+x^{-1}k+ f(x^{-1},x),\ 1)$$
$$=-x^{-1}f(x,x^{-1})+f(x^{-1},x),\ 1)$$
$$=(o,1)$$

ya que por la formula (ii)

$$x^{-1}f(x,x^{-1})-f(x^{-1}x,x^{-1})+f(x^{-1},xx^{-1})-f(x^{-1},x)=o \rightarrow$$
$$x^{-1}f(x,x^{-1})-f(x^{-1},x)=o \rightarrow -x^{-1}f(x,x^{-1})+f(x^{-1},x)=o$$

entonces $(-x^{-1}k-x^{-1}f(x,x^{-1}),x^{-1})$ es el inverso de (k, x)
$\therefore$ G es grupo.

Mostraremos que G es una extensión de k por Q identificando k con todos los pares de la forma $(k,1)$ y definiendo $(k,x)=x$. es homomorfismo con núcleo k y por lo tanto $K \lhd G$ y $\frac{G}{K} \simeq Q$ por el 1er. teorema de isomorfismo. Para ver que G realiza θ identificamos $xk \in K$ con $(xk,1)$ y como la definición de ℓ produce $\ell(x)=(k^1,x)$ para alguna $k^1 \in K$. Comprobando tenemos:

$$\begin{aligned}(k^1,x)+(k,1)-(k^1,x) &= (k^1+xk+f(x,1),x)+(-x^{-1}k^1-x^{-1}f(x,x^{-1}),x^{-1})\\ &= (k^1+xk+x(-x^{-1}k^1-x^{-1}f(x,x^{-1}))+f\ (x,x^{-1}),1)\\ &= (k^1+xk-k^1-f(x,x^{-1})+f(x,x^{-1}),\ 1)\\ &= (xk,1) \text{ ya que K es abeliano.}\end{aligned}$$

finalmente definimos un transversal ℓ por $\ell(x)=(o,x)$ se tiene que:

$$\ell(x)+\ell(y)-\ell(xy)=(o,x)+(o,y)-(o,xy)$$

$$=(o+xo+f(x,y),xy)+(xy)^{-1}(o)-(xy)^{-1}f(xy,\ -\ -\ (xy^{-1}),\ (xy^{-1})).$$

$$=(f(x,y),xy)+(-(xy)^{-1}f(xy,(xy)^{-1}),(xy)^{-1})$$

$$=(f(\ x,y)+xy(-(xy)^{-1}f(xy,(xy)^{-1})+f(xy,(xy)^{-1},1)$$

$$=(f(x,y)-f(xy,(xy)^{-1})+f(xy,(xy)^{-1}),\ 1)$$

$$=(f(x,y),\ 1)$$

Ejemplo 3.12

Consideremos la siguiente extensión G de $\mathbb{Z}_7$ por- T_3

$T_3= \{1,a,a^2\}$

$\mathbb{Z}_7= \{\overline{0},\overline{1},\ldots,\overline{6}\}$

Se tiene que $\mathbb{Z}_7= <\overline{1}>$ y $\mathbb{Z}_7= <\overline{2}>$

Sea $\theta:T_3 \to \mathrm{AuT}(\mathbb{Z}_7)$ tal que $\theta_a(\overline{1})=\overline{2}$ $\theta_a \varepsilon\ \mathrm{AuT}(\mathbb{Z}_7)$

tenemos:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_7 \longrightarrow \mathbb{Z}_7 \times T_3 \longrightarrow T_3 \longrightarrow 1$$

$\overline{0}$	$(\overline{0},1)$	
	$\vdots$	1
$\overline{1}$	$(\overline{6},1)$	
$\overline{2}$		
$\overline{3}$	$(\overline{0},a)$	
$\overline{4}$	$\vdots$	a
$\overline{5}$	$(\overline{6},a)$	

$\overline{6}$ $\quad (\overline{0},a^2) \;\vdots\; (\overline{6},a^2)$ $\quad a^2$

Consideremos el transversal

$$\ell: \begin{array}{l} 1 \longrightarrow (\overline{0},1) \\ a \longrightarrow (\overline{0},a) \\ a^2 \longrightarrow (\overline{1},a^2) \end{array}$$

para este transversal elegido existe.

$f: T_3 x T_3 \longrightarrow Z_7$ tal que $f(x,y)=\ell(x)+\ell(y)-\ell(xy)$

$f(1,y)=f(x,1)=o$

se tiene $T_3 x T_3=\{\underline{(1,1)},\underline{(1,a)}\,\underline{(1,a^2)},\underline{(a,1)},(a,a),(a,a^2),\underline{(a^2,1)}$
$(a^2,a),(a^2,a^2)\}$

como $\ell(1)=o$ tenemos que f aplicada a los elementos subrayados es cero. Calcularemos f en los otros elementos de $T_3 x T_3$.

$$\begin{aligned} f(a,a) &= \ell(a)+\ell(a)-\ell(a^2) \\ &= (\overline{0},a)+(\overline{0},a)-(\overline{1},a^2) \\ &= (\overline{0}+a\overline{0},a^2)+(a^{-2}(\overline{1}^{-1}),a^{-2}) \\ &= (0+(\overline{1}^{-1}),\ 1) \\ &= (\overline{6},1) \end{aligned}$$

Las operaciones se realizan bajo el producto semidirecto.

$$
\begin{aligned}
f(a,a^2) &= \ell(a)+\ell(a^2)-\ell(a^3)\\
&= (\overline{0},a)+(\overline{1},a^2)\\
&= (\overline{0}+a\overline{1},1)\\
&= (\overline{2},1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(a^2,a) &= \ell(a^2)+\ell(a)-\ell(a^3)\\
&= (\overline{1},a^2)+(0,a)\\
&= (\overline{1}+a^2 0,\ 1)\\
&= (\overline{1},1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(a^2,a^2) &= \ell(a^2)+\ell(a^2)-\ell(a^4)\\
&= (\overline{1},a^2)+(\overline{1},a^2)-(\overline{0},a)\\
&= (\overline{1}+a^2(\overline{1}),\ a)+(\overline{0},a^2)\\
&= (\overline{1}+\overline{4},a)+(\overline{0},a^2)\\
&= (\overline{5},a)+(\overline{0},a^2)\\
&= (\overline{5}+a\overline{0},\ 1)\\
&= (\overline{5},1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ f(a^2,a^2) &= \overline{5}\\
f(a,a) &= \overline{6}\\
f(a^2,a) &= \overline{1}\\
f(a,a^2) &= \overline{2}
\end{aligned}
$$

comprobamos en algunos casos las formulas.

$f(1,y)=f(x,1)=0$ y $xf(y,z)-f(xy,z)+f(x,yz)-f(x,y)=0$

$f(1,a)=\ell(1)+\ell(a)-\ell(a) = 0 = f(a,1)$

Si $x=y=z=a$

$$af(a,a)-f(a^2,a)+f(a,a^2)-f(a,a)=a.\overline{6}-\overline{1}+\overline{2}-\overline{6}$$
$$=\overline{5}-\overline{1}+\overline{2}-\overline{6}$$
$$=0$$

Y si $x=a^2$ y $y=z=a$

$$a^2f(a,a)-f(a^2a,a)+f(a^2,a.a)-f(a^2,a)=a^2f(a,a)-f(1,a)+f(a^2,a^2)-f(a^2,a).$$
$$=a^2(\overline{6})+\overline{5}-\overline{1}$$
$$=\overline{3}+\overline{5}-\overline{1}$$
$$=\overline{0}$$

DEFINICION 3.13

$\mathcal{Z}_\theta^{\,2}(Q,K)$ es el conjunto de todos los 2-cociclos $f:QxQ \longrightarrow K$

PROPOSICION 3.14

$\mathcal{Z}_\theta^{\,2}(Q,K)$ es un grupo abeliano bajo la operación $(f+f^1)(x,y)=f(x,y)+f^1(x,y)$.

Demostración.

Sean f y f^1 ε $\mathcal{Z}_0^{\,2}(Q,K)$

$(f+f^1)(1,x)=f(1,x)+f^1(1,x)=0$

$(f+f^1)(x,1)=f(x,1)+f^1(x,1)=0$

$x(f+f^1)(y,z)-(f+f^1)(xy,z)+(f+f^1)(x,yz)-(f+f^1)(x,y)=0$

$x\big(f(y,z)+f^1(y,z)\big)-\big(f(xy,z)+f^1(xy,z)\big)+f(x,yz)+f^1(x,yz)-$
$\big(f(x,y)+f^1(x,y)\big).$

$=xf(y,z)+xf^1(y,z)-f(xy,z)-f^1(xy,z)+f(x,yz)+f^1(x,yz)-$
$f(x,y)-f^1(x,y).$

$=xf(y,z)-f(xy,z)+f(x,yz)-f(x,y)+xf^1(y,z)-f^1(xy,z)+f^1(x,yz)-$
$f^1(x,y) = 0$

cerradura.

$(f(x,y)+f^1(x,y)) + f^{11}(x,y)=f(x,y)+ (f^1(x,y)+f^{11}(x,y))$

asociatividad.

$-f(x,y) \in Z_\theta^2(Q,K)$ es el inverso de $f(x,y)$

y

$f(x,y)=0 \quad \forall\ x,y\in Q$ es el idéntico.

LEMA 3.15

Sea G una extensión de K por Q que realiza θ; - - sean ℓ y ℓ^1 transversales que dan origen a 2-cociclos f y f^1. Existe una función $\alpha:Q \longrightarrow K$ con.

$\alpha(1)=0$

$f^1(x,y)-f(x,y)=x\alpha(y)-\alpha(xy)+\alpha(x) \quad \forall\ x,y\in Q$

Demostración:

para cada $x\varepsilon Q$, $\ell(x)$ y $\ell^1(x)$ son diferentes representantes de la misma clase de K en G.

Se tiene que existe un elemento $\alpha(x)\ \varepsilon K$ tal que $\ell^1(x)=\alpha(x)+\ell(x)$ como hemos supuesto que $\ell(1)=0$ y $\ell^1(1)=0$ entonces $\ell^1(1)=\alpha(1)+\ell(1) \rightarrow \alpha(1) = 0$, por otro lado.

$$\ell^1(x)+\ell^1(y)=\alpha(x)+\ell(x)+\alpha(y)+\ell(y)$$

$$=\alpha(x)+\ell(x)+\alpha(y)-\ell(x)+\ell(x)+\ell(y)$$

$$=\alpha(x)+x\alpha(y)+\ell(x)+\ell(y)$$

$$=\alpha(x)+x\alpha(y)+f(x,y)+\ell(xy)$$

$$=\alpha(x)+x\alpha(y)+f(x,y)-\alpha(xy)+\ell^1(xy) \quad \rightarrow$$

$$\ell^1(x)+\ell^1(y)-\ell^1(xy)=\alpha(x)+x\alpha(y)+f(x,y)-\alpha(xy)$$

$$f^1(x,y)= x\alpha(y)-\alpha(xy)+\alpha(x)+f(x,y) \quad (K\text{abeliano})$$

$$f^1(x,y)-f(x,y)=x\alpha(y)-\alpha(xy)+\alpha(x)$$

DEFINICION 3.16

Una cofrontera es una función $g:QxQ \rightarrow K$ tal que $g(x,y)=x\alpha(y)-\alpha(xy)+\alpha(x)$ para alguna $\alpha:Q \longrightarrow K$ con $\alpha(1)=0$. $B^2_\theta(Q,K)$ es el conjunto de todas las cofronteras.

PROPOSICION 3.17

$B^2_\theta(Q,K)$ es un subgrupo de $\mathcal{Z}^2_\theta(Q,K)$.

Demostración

sea $g\varepsilon\ B^2_\theta(Q,K)$ entonces

$g(x,y)=x\alpha(y)-\alpha(xy)+\alpha(x)$ con $\alpha(1)=0$

$g(x,1)=x\alpha(1)-\alpha(x)+\alpha(x) = 0$

$g(1,x)=\alpha(y) -\alpha(y) +\alpha(1) = 0$

además

$xg(y,z)-g(xy,z)+g(x,yz)-g(x,y)=$

$x(y\alpha(z)-\alpha(yz)+\alpha(y))-(xy\alpha(z)-\alpha(xyz)+\alpha(xy))$

$+x\alpha(yz)-\alpha(xyz)+\alpha(x) - (x\alpha(y)-\alpha(xy)+\alpha(x)) =$

$xy\alpha(z)-x\alpha(yz)+x\alpha(y)-xy\alpha(z)+\alpha(xyz)-\alpha(xy)+x\alpha(yz)-\alpha(xyz).$

$+\alpha(x)-x\alpha(y)+\alpha(xy)-\alpha(x) = 0$ ya que K abeliano.

$\therefore\ B^2_\theta(Q,K) \subset \mathcal{Z}^2_\theta(Q,K)$

ahora sean g y $g^1\ \varepsilon\ B^2_\theta(Q,K)$ se tiene que

$(g-g^1)(x,y) = g(x,y)-g^1(x,y)$

$g(x,y)=x\alpha(y)-\alpha(xy)+\alpha(x)$

$g^1(x,y)= x\alpha^1(y)-\alpha^1(xy)+\alpha^1(x)$ con $\alpha(1)= \alpha^1(1) = 0$

$$
\begin{aligned}
(g-g^1)(x,y) &= g(x,y)-g^1(x,y) \\
&= x\alpha(y)-\alpha(xy)+\alpha(x)-\left(x\alpha^1(y)-\alpha^1(xy)+\alpha^1(x)\right) \\
&= x\alpha(y)-\alpha(xy)+\alpha(x)-x\alpha^1(y)+\alpha^1(xy)-\alpha^1(x) \\
&= x\alpha(y)-x\alpha^1(y)-\alpha(xy)+\alpha^1(xy)+\alpha(x)-\alpha^1(x) \\
&= x(\alpha(y)-\alpha^1(y)) - (\alpha-\alpha^1)(xy)+(\alpha-\alpha^1)(x) \\
&= x(\alpha-\alpha^1)(y)-(\alpha-\alpha^1)(xy)+(\alpha-\alpha^1)(x) \\
&= x\alpha_1(y)-\alpha_1(xy)\pm\alpha_1(x)
\end{aligned}
$$

con $\alpha_1=\alpha-\alpha^1$

$$\therefore\ (g-g^1)(x,y)\in B_\theta^2\ (Q,K)$$

DEFINICION 3.18

$H_\theta^2(Q,K)$ definido como $\dfrac{Z_\theta^2(Q,K)}{B_\theta^2(Q,K)}$ es llamado el 2do. grupo de cohomología.

DEFINICION 3.19

Sean G y G^1 dos extensiones de K por Q que realizan θ entonces $G\sim G^1$ si $\forall f$ asociado a G y $\forall f^1$ asociado a G^1 $f-f^1\in B_\theta^2\ (Q,K)$.

LEMA 3.20

La relación $\sim$ definida en 3.19 es de equivalencia.

Demostración.

i) $G \sim G$ En efecto sea f asociado a G y f^1 asociado a -- G entonces $f-f^1 \varepsilon B_\theta^2(Q,K)$ por el lema 3.15.

ii) $G \sim G^1$ entonces $\forall f$ asociado a G y $\forall f^1$ asociado a G^1 $f-f^1 \varepsilon B_\theta^2(Q,K) \rightarrow -(f-f^1)=f^1-f \ \varepsilon B_\theta^2(Q,K) \rightarrow G^1 \sim G$

iii) Supongamos $G \sim G^1$ y $G^1 \sim G^{11} \rightarrow \forall f$ asociado a G, $\forall f^1$ asociado a G^1 y $\forall f^{11}$ asociado a G^{11}.

$f-f^1 \varepsilon B_\theta^2(Q,K)$ y $f^1-f^{11} \ \varepsilon B_\theta^2(Q,K) \rightarrow f-f^{11}=(f-f^1)+(f^1-f^{11})$ $\varepsilon B_\theta^2(Q,K)$

$\rightarrow G \sim G^{11}$

LEMA 3.21

$G \sim G^1 \Leftrightarrow \exists f$ asociado a G y f^1 asociado a G^1 tal que $f-f^1 \varepsilon B_\theta^2(Q,K)$

Demostración.

$\Rightarrow$) obvio

$\Leftarrow$) Supongamos que existe f_1 asociado a G y f_2 asociado a - G^1 tal que $f_1 - f_2 \in B^2_\theta(Q,K)$

Sea f asociado a G y f^1 asociado a G^1 entonces.

$f - f_1 \in B^2_\theta(Q,K)$ y $f_2 - f^1 \in B^2_\theta\ (Q,K) \rightarrow$

$f - f_1 + f_2 - f^1 = (f - f^1) + (f_2 - f_1) \in B^2_\theta(Q,K)$ pero

$f_2 - f_1 \in B^2_\theta\ (Q,K)\ \therefore f - f^1 \in B^2_\theta(Q,K)$

Sea E el conjunto de las clases de equivalencia - de extensiones que realizan θ.

TEOREMA 3.22

Sea K un grupo abeliano y sea $\theta : Q \rightarrow AuT(K)$. El- conjunto E de todas las clases de equivalencia de extensiones de K por Q que realizan θ forman un grupo abeliano - - isomorfo a $H^2_\theta(Q,K)$ cuyo elemento identidad es la clase del producto semidirecto.

Demostración.

Si G es una extensión de K por Q que realiza θ, - denotamos por $[G]$ su clase de equivalencia, así que E es el conjunto de todas las $[G]$. Definimos ahora una co- - rrespondencia uno a uno $\lambda : H^2_\theta(Q,K) \rightarrow E$ como $\lambda\ (f + B^2_\theta) =$ - $[G_f]$, donde G_f es la extensión determinada por f que fueconstruida en el teorema (3.11). λ está bien definida, -- por que si f y f^1 están en la misma clase de $B^2_\theta(Q,K)$, la - definición de equivalencia dice que G_f y G_{f^1} son equivalentes. Inversamente, λ es uno a uno, ya que si $\lambda(f+B^2_\theta)$ = -- $\lambda(f^1+B^2_\theta) \rightarrow [G_f] = [G_{f^1}] \rightarrow G_f$ y G_{f^1} son equivalentes, - - entonces $f-f^1 \varepsilon B^2_\theta(Q,K) \rightarrow f+B^2_\theta = f^1+B^2_\theta$, además $\lambda : H^2_\theta \rightarrow E$ es - suprayectiva. En efecto.

La $G \varepsilon E \rightarrow \exists$ f asociada a G para algún levantamiento ℓ y en-- tonces $\exists$ G_f, como f asociada a G y f asociada a G_f y $f-f=0 \varepsilon B^2_\theta$ entonces $G \sim G_f$ de donde $[G] = [G_f]$ y $f+B^2_\theta \rightarrow [G_f]$

Por proposición (1.7) existe una única adición definida sobre E que hace de E un grupo y de λ un isomorfismo. La última parte de teorema se sigue del hecho de que una extensión es un producto semidirecto si y sólo si tiene un 2-cociclo en B^2_θ (Q,K).

COROLARIO 3.23

Sea K abeliano y sea $\theta : Q \rightarrow AuT(K)$. Toda extensión de K por Q que realiza θ es un producto semidirecto si y - sólo si $H^2_\theta(Q,K) = \{0\}$

Demostración

$\Longrightarrow$) Supongamos que G y G^1 son producto semidirecto de K por Q que realiza θ, entonces dadas las sucesiones.

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} Q \longrightarrow 1$$

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i^1} G^1 \xrightarrow{j^1} Q \longrightarrow 1$$ exactas, por proposición (3.10)

existen

$\ell : Q \to G$ y $\ell^1 : Q \to G^1$ homomomorfismos tales que

$j o \ell = 1_Q = j^1 o \ell^1$

$f(x,y) = \ell(x) + \ell(y) - \ell(xy) = o \quad \forall\, x,y \in Q$

$f^1(x,y) = \ell^1(x) + \ell^1(y) - \ell^1(x\, y) = o \quad \forall\, x,y \in Q \longrightarrow$

$f - f^1 \in B^2_\theta(Q,K) \to [G] = [G^1] \to E = \{[Kx_\theta Q]\}$

$H^2_\theta = \{0\}$

$\Longleftarrow$) inversamente $H^2_\theta = \{0\} \to E = \{[Kx_\theta Q]\}$ sea $G \in [Kx_\theta Q]$, ℓ un levantamiento de Q en G y sea

$f(x,y) = \ell(x) + \ell(y) - \ell(xy)$ entonces f es un 2-cociclo asociado a $G \to f \in B^2_\theta$. Ahora $f \in B^2_\theta \to \exists$ $\alpha : Q \to K$ tal que $f(x,y) = x\alpha(y) - \alpha(xy) + \alpha(x)$ sea $\varphi : Q \to G$ tal que $\varphi(x) = -\alpha(x) + \ell(x)$. Se tiene

$$\mathcal{U}(xy) = -\alpha(xy) + \ell(xy)$$
$$= -\alpha(x) - x\alpha(y) + f(x,y) + \ell(xy)$$
$$= -\alpha(x) + \ell(x) - \alpha(y) - \ell(x) + \ell(x) + \ell(y) - \ell(xy) + \ell(xy)$$
$$= -\alpha(x) + \ell(x) - \alpha(y) + \ell(y)$$
$$= \mathcal{U}(x) + \mathcal{U}(y) \ .$$

$\therefore$ $\mathcal{U}$ es homomorfismo

$\mathcal{U}(x)=0 \leftrightarrow -\alpha(x)+\ell(x)=0 \leftrightarrow \ell(x) = \alpha(x) \longleftrightarrow$

$(j\ell)(x)=j\alpha(x)=1 \leftrightarrow x = 1$ (ya que $(j\ell)(x)=1_Q(x)$)

$\therefore$ $\mathcal{U}$ es uno a uno

Sea $Q_1 = \mathcal{U}(Q)$

entonces i) $K \triangleleft G$

ii) $a \varepsilon\ \mathcal{U}(Q) \cap K \rightarrow \mathcal{U}(x)=a \rightarrow -\alpha(x)+\ell(x) = a \rightarrow$

$\ell(x) = a+\alpha(x) \varepsilon K \rightarrow (j\ell)(x)=1 \rightarrow x=1 \rightarrow \mathcal{U}(x) = 0 = a$

iii) Sea $g \varepsilon G$ y $\mathcal{U}(j(g))$

$j(\ell(j(g))-g) = j\ell(j(g)).(j(g))^{-1} = j(g).(j(g))^{-1} = 1 \longrightarrow$

$\ell(j(g)-g \varepsilon K \quad \mathcal{U}(j(g))-g = -\alpha(j(g)) + \ell(j(g)) - g$

$= k \ \varepsilon\ K$

$\therefore g = -k + \mathcal{U}(j(g))$

El isomorfismo $\psi: Kx_\theta Q \to G$ está dado por

$\psi(k,x)=k+\ell(x)$ ya que.

$(k,x)+(k_1,y)=(k+xk_1,\ xy)$

$$(k+\ell(x))+(k_1+\ell(y)=k-\alpha(x)+\ell(x)+k_1-\alpha(y)+\ell(y)$$

$$=k-\alpha(x)+\ell(x)+\ k_1-\ell(x)+\ell(x)-\alpha(y)-\ell(x)+\ell(y)+\ell(y).$$

$$=x+xk_1-\alpha(x)-x\alpha(y)+\ell(x)+\ell(y)$$

$$=k+xk_1-\alpha(xy)-\ f(x,y)+\ell(x)+\ell(y)$$

$$=k+xk_1-\alpha(xy)+\ell(xy)\quad \text{que es}$$

precisamente ψ aplicado a $(k+xk_1,\ xy)$.

CAPITULO IV

DEFINICION 4.1

Un grupo G es de torsión si $\forall$ $x \in G$ $\exists$ $n \in Z$ - tal que $nx = 0$

PROPOSICION 4.2

Si G es una extensión de K por Q con K de Torsión y Q de Torsión entonces G es de Torsión.

Domostración

Se tiene $0 \to K \to G \to Q \to 1$ exacta es decir- $\frac{G}{K} \simeq Q$. Sea Y el isomorfismo de $\frac{G}{K}$ en Q. Entonces - dado $g \in G$ se tiene que $Y(g+K) = x \in Q$ como Q es de torsión existe $n \in Z$ tal que $Y(g+K)^n = 1$ entonces - - $Y(ng+K) = 1 \rightarrow ng + K = K$ ya que Y es isomorfismo entonces $ng \in K$ como K es de torsión $\exists$ $m \in Z$ tal que - $m(ng) = 0$ o sea $(mn)g = 0 \rightarrow O(g) < \infty$

TEOREMA 4.3

Sea K abeliano de Torsión y Q de orden n. Si $\forall k \in K$ $(|k|, n) = 1$ entonces toda extensión de K por Q es un producto semidirecto.

Por corolario 3.21 es suficiente demostrar que $f : Q \times Q \to K$ 2 - cociclo es una cofrontera.

Sea $T : Q \to K$ tal que $T(x) = \sum\limits_{y \in Q} f(x, y)$

consideramos $xf(y, z) - f(xy, z) + f(x, yz) = f(x, y)$

$$\sum_{z \in Q} \left(xf(y,z) - f(xy, z) + f(x, yz)\right) = \sum_{z \in Q} f(x, y)$$

$$x \sum_{z \in Q} f(y, z) - \sum_{z \in Q} f(xy, z) + \sum_{z \in Q} f(x, yz) = n\, f(x, y)$$

$$x\,T(y) - T(xy) + T(x) = n\, f(x, y)$$

Sea $m_x = |T(x)|$ entonces $(|T(x)|, n) = 1$ luego existen $a_x, b_x \in Z$ tal que $a_x m_x + b_x n = 1$.

Sea $\alpha(x) = b_x T(x)$ para algun b_x fijo, se tiene $\alpha(1) = b_1 T(1) = 0$ y por otro lado.

$$n\left(x\alpha(y)-\alpha(xy)+\alpha(x)\right) = n\left(xby\,T(y)-b_{xy}\,T(xy)+bx\,T(x)\right)$$

$$= xnb_y\,T(y)-nb_{xy}\,T(xy)+nb_x\,T(x)$$

$$= x(1-a_ym_y)\,T(y)-(1-a_{xy}\,m_{xy})\,T(xy)+$$

$$(1-a_xm_x)\,T(x)$$

$$= xT(y)-T(xy)+T(x)$$

$$= nf(x,y)$$

$$n\left(x\alpha(y)-\alpha(xy)+\alpha(x)-f(x,y)\right)=0$$

$|x\alpha(y)-\alpha(xy)+\alpha(x)-f(x,y)|\ |n$ pero como

$x\alpha(y)-\alpha(xy)+\alpha(x)-f(x,y)\ \varepsilon\ K$ se tiene que

$$x\,\alpha(y)-\alpha(xy)+\alpha(x)-f(x,y)=0$$

$$\therefore\ f(x,y)=x\,\alpha(y)-\alpha(xy)+\alpha(x)$$

TEOREMA 4.4

Sea G una extensión de K por Q, con K abeliano de Torsión, Q finito de orden n.

Si $\forall\ k\,\varepsilon\,K$ $(|k|, n)=1$ entonces cualesquiera dos subgrupos de G de orden n son conjugados.

Demostración

Sea Q_1 subgrupo de G de orden n, se tiene -

$K \cap Q_1 = \{0\}$ ya que si $x \in K \cap Q_1$ entonces $x \in K$ y $x \in Q_1$

$|x| \mid n$ $x=0$

Sean $x, y \in Q_1$ si $x + K = y + K \rightarrow x - y \in K \rightarrow$ $x - y \in K \cap Q$.

Luego $x - y = 0$ de donde $x = y$ y como $\frac{G}{K} \simeq Q$ - hay exactamente n clases distintas de K, esto significa que $\forall g \in G \; \exists \; x_1 \in Q_1$ tal que $g + K = x_1 + K$ es decir -

$g - x_1 \in K$ entonces $g - x_1 = k$ de donde $g = k + x_1$ - -

$\therefore$ $G = K\,Q_1$.

Lo mismo si Q_2 es un subgrupo de orden n de G. - Por proposición 3.10 existen levantamientos

$\ell_1 : Q \rightarrow Q_1 \subset G$ y $\ell_2 : Q \rightarrow Q_2 \subset G$ que son homomorfismos. Es-decir $f_1 = f_2 = 0$, $\ell_1(x) = \alpha(x) + \ell_2(x)$ y $0 = f_1(x,y)$ -

$$f_2(x,y) = \ell_1(x) + \ell_1(y) - \ell_1(xy) - \big(\ell_2(x) + \ell_2(y) - \ell_2(xy)\big)$$

$$= \ell_1(x) + \ell_1(y) - \ell_1(xy) + \ell_2(xy) - \ell_2(y) - \ell_2(x)$$

$$= \alpha(x) + \ell_2(x) + \alpha(y) + \ell_2(y) - (\alpha(xy) + \ell_2(xy))$$

$$+ \ell_2(xy) - \ell_2(y) - \ell_2(x)$$

$$= \alpha(x) + \ell_2(x) + \alpha(y) + \ell_2(y) - \ell_2(xy) - \alpha(xy)$$

$$+ \ell_2(xy) - \ell_2(y) - \ell_2(x)$$

$$= \alpha(x) + \ell_2(x) + \alpha(y) - \ell_2(x) + \ell_2(x) + \ell_2(y) - \ell_2(xy)$$

$$- \alpha(xy) + \ell_2(xy) - \ell_2(y) - \ell_2(x)$$

$$= \alpha(x) + x\alpha(y) - \alpha(xy)$$

$$= x\alpha(y) - \alpha(xy) + \alpha(x)$$

Sea $m = \text{mcm}\left\{|\alpha(x)| \;|x \in Q\right\} \to \exists\ a, b \in Z$ con

$am + bn = 1$

consideramos $\sum_{y\in Q}(x\alpha(y)-\alpha(xy)+\alpha(x))=0$ entonces

$$\sum_{y\in Q} \alpha(y) - \sum_{y\in Q} \alpha(y) + n\alpha(x) = 0$$

haciendo $k = \sum_{y\in Q} \alpha(y)$

tenemos $xk - k + n\,\alpha(x) = 0$ de donde $- n\alpha(x) = xk - k$

multiplicando por b tenemos $- bn\alpha(x) = xbk - bk$

$$\text{ahora } -bk + \ell_1(x) + bk = -bk + \ell_1(x) + bk - \ell_1(x) + \ell_1(x)$$

$$= -bk + xbk + \ell_1(x)$$

$$= -bn\alpha(x) + \ell_1(x)$$

$$= -(1 - am)\ \alpha(x) + \ell_1(x)$$

$$= -\ \alpha(x) + \ell_1(x)$$

$$= \ell_2(x)$$

TEOREMA 4.5 (Lema de Schur - Zassenhaus)

Si K y Q son grupos finitos de órdenes m y n respectivamente, y si $(m, n) = 1$, entonces toda extensión G - de K por Q es un producto semidirecto.

Demostración

Es suficiente probar que G contiene un subgrupo - de orden n.

Se probará por inducción sobre m.

Si $m = 1$ obvio por teorema 4.3

Supongamos que K contiene un subgrupo propio - $K_1 \neq \{0\}$ que también es normal en G. Entonces $\frac{K}{K_1} \lhd \frac{G}{K_1}$ -

y $\dfrac{\frac{G}{K_1}}{\frac{K}{K_1}} \approx \dfrac{G}{K} \approx Q$ entonces $0 \to \dfrac{K}{K_1} \to \dfrac{G}{K_1} \to Q \to 1$ es - exacta.

Si $\left|\frac{K}{K_1}\right| = m^1$, entonces $m^1 < m$ y $\left|\frac{G}{K_1}\right| = m'n$. Por inducción $\frac{G}{K_1}$ contiene un subgrupo $\frac{N}{K_1}$ de orden n. Es decir $\frac{N}{K_1} \approx Q$ luego $0 \to K_1 \to N \to Q \to 1$ es exacta ahora como $|N| = n\,|K_1|$ y $(n, |K_1|) = 1$, ya que $|K_1|$ m. puesto que $K_1 \lhd N$ y $|K_1| < m$, la hipótesis inductiva da un subgrupo de N y por lo tanto de G de orden n.

Podemos ahora suponer que K no contiene subgrupos propios $\neq \{0\}$ que sean normales en G.

Si p es un primo que divide a m, $\underline{P}$ p-subgrupo de Sylow de K, entonces $\underline{P}$ también es un p-subgrupo de Sylow de G. En efecto ya que si $p^\alpha\ |1G|$, $\alpha \geq$ entonces $p^\alpha | m$ ó - $p^\alpha | n$ pero no a ambos ya que $(m, n) = 1$. Además como - - $K \lhd G$ si $g \in G$ entonces $g^{-1}\,\underline{P}\,g \subset g^{-1} Kg = K$ y $|g\,\underline{P}\,g^{-1}| = |\underline{P}| \to g^{-1}\,\underline{P}\,g$ es p-subrupo de Sylow de K entonces $\exists k \in K$ tal que $k^{-1}\,\underline{P}\,k = g^{-1}\,\underline{P}\,g$. Así que $[G:N_G(\underline{P})] = [K:N_k(P)]$ y - por el teorema de lagrange.

$$\frac{|G|}{|N_G(\underline{P})|} = \frac{|K|}{|N_K(\underline{P})|} \Rightarrow \left|\frac{G}{K}\right| = \left|\frac{N_G(\underline{P})}{N_K(\underline{P})}\right|$$

$$\left|\frac{G}{K}\right| = \left[N_G(\underline{P}) : N_K(P)\right] = n$$

Puesto que $N_K(\underline{P}) = K \cap N_G(\underline{P})$

$$\frac{N_G(P)}{N_K(\underline{P})} \simeq \frac{K\,N_G(\underline{P})}{K}$$ se tiene que -

$N_k(\underline{P}) \lhd N_G(\underline{P})$. En efecto, sea $h \in N_K(\underline{P})$ y $g \in N_G(\underline{P}) \rightarrow$ -

$g^{-1}\,h\,g \in K$ y $g^{-1}hg\,\underline{P}\,g^{-1}\,h^{-1}\,g = \underline{P} \rightarrow g^{-1}h\,g \in N_G\,(\underline{P}) \rightarrow$ -

$g^{-1}h\,g \in N_K\,(\underline{P})$).

De donde

$[KN_G(P):K] = [N_G(\underline{P}):N_k(P)] = n$ así que

$|K\,N_G\,(\underline{P})| = n\,|k| = |G|$ como $K\,N_G\,(P)$ es subgrupo de-

G se sigue que $K\,N_G\,(\underline{P}) = G$. y en consecuencia

$$\frac{K\,N_G\,(\underline{P})}{K} = \frac{G}{K} \simeq Q.$$

Si $N_G\,(\underline{P})$ es un subgrupo propio de G, entonces -

$|N_K\,(\underline{P})| < m$ y así $N_G\,(\underline{P})$ contiene un subgrupo de orden-

n por la hipótesis de inducción. Por lo tanto podemos supo ner que $N_G(\underline{P}) = G$ i.e. $P \triangleleft G$ puesto que $\underline{P} \subset K$ y K no - tiene subgrupos propios normales en G distintos de {0}, - $K = \underline{P}$.

ahora $Z(\underline{P})$ es un subgrupo característico de $\underline{P}$ así que - $P \triangleleft G$ implica que $Z(\underline{P}) \triangleleft G$ entonces $Z(\underline{P}) = P$.

Pero ahora $\underline{P}$ es abeliano y la demostración se - completa por teorema 4.3.

Si en las hipótesis del teorema (4.5) pedimos que el grupo K sea soluble de torsión y $(|k|, n) = 1 \; \forall \; k \in K$ - entonces la conclusión del mismo es válida. Antes de probar ésto, daremos unas definiciones y probaremos algunos - enunciados.

DEFINICION 4.6

Una serie normal de G es una cadena de subgrupos- $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_n = \{0\}$ en la cual $G_{i+1} \triangleleft G_i \; \forall_i$- los grupos factores de la serie son $\frac{G_i}{G_{i+1}}$

DEFINICION 4.7

Un grupo G es soluble si tiene una serie normal - con grupos factores abelianos. Tal serie es llamada serie-soluble de G.

LEMA 4.8

Si $G = G_0 \supset G_1 \supset \ . \ . \ . \ \supset G_n = \{0\}$ es una serie - soluble entonces $G_i \supset G^{(i)}$ $\forall$ i ($G^{(i)}$ es el conmutador de $G^{(i-1)}$) demostración por inducción sobre i

$i = 0$, $G_i = G^{(i)}) = G$

supongamos ahora que $G_i \supset G^{(i)}$; entonces

$G_i' \supset G^{(i)'} = G^{(i+1)}$ puesto que $\frac{G_i}{G_{i+1}}$ es abeliano se tie- ne $G_{i+1} \supset G_i'$ por proposición (1.10) esto implica que - - $G_{i+1} \supset G^{(i+1)}$ q.e.d.

TEOREMA 4.9

Un grupo G es soluble $\Longleftrightarrow$ $G^{(n)} = \{0\}$ para algun - entero n

Demostración

$\Rightarrow$) Sea $G = G_0 \supset G_1 \supset \ . \ . \ . \ \supset G_n = \{0\}$ una serie solu- ble. Por el lema anterior $G^{(n)} \subset G_n = \{0\} \Rightarrow G^{(n)} = \{0\}$

$\Leftarrow$) Si $G^n = \{0\}$ para algun entero n, entonces la serie $G \supset G^{(o)} \supset G^{(1)} \supset \ . \ . \ . \ \supset G^{(n)} = \{0\}$ es una serie soluble para G.

Estamos ya listos para demostrar el siguiente.

TEOREMA 4.10

Sean K y Q grupos con K soluble de torsión y Q finito de orden n. Si $\forall$ k ε K $(|k|, n) = 1$ entonces toda extensión G de K por Q es un producto semidirecto demostración supóngase que $K^{(n)} = \{0\}$ sea K^1 el conmutador de K- entonces $K^1 \lhd G$ y $\frac{K}{K_1} \lhd \frac{G}{K_1}$

con $\dfrac{\frac{G}{K_1}}{\frac{K}{K_1}} \simeq \frac{G}{K} \simeq Q$ entonces

$0 \to \frac{K}{K_1} \to \frac{G}{K_1} \to Q \to 1$ es exacta. Como $\frac{K}{K_1}$ abeliano se tiene por teoremas (4.3 y 4.4) que existe $\frac{N_1}{K_1}$ subgrupo de $\frac{G}{K_1}$ tal que $\frac{N_1}{K_1} \simeq Q$ pero entonces

$0 \to K \to N_1 \to Q \to 1$ es exacta. Repetimos el proceso tomando ahora $K^{(2)} \lhd K^1$ entonces.

$$\frac{\dfrac{K_1}{K^{(2)}}}{\dfrac{K^1}{K^{(2)}}} \simeq \frac{N_1}{K^1} \simeq Q \text{ entonces } 0 \to \frac{K_1}{K^{(2)}} \to \frac{N_1}{K^{(2)}} \to Q \to 1$$

es exacta. Como $\frac{K^1}{K^{(2)}}$ es abeliano se tiene por teoremas 4.3 y 4.4 que existe $\frac{N_2}{K^{(2)}}$ subgrupo de $\frac{N_1}{N^{(2)}}$ tal que $\frac{N_2}{K^{(2)}} \simeq Q$ entonces $0 \to K^{(2)} \to N_2 \to Q \to 1$ es exacta y continuando de la misma forma tenemos

$$0 \to K^{(3)} \to N_3 \to Q \to 1$$

$$\vdots$$

$$0 \to K^{(n-1)} \to N_{n-1} \to Q \to 1$$

Son sucesiones exactas y aquí se termina el proceso ya que $K^{(n)} = \{0\}$ y $K^{(n-1)}$ es abeliano. Por Teoremas (4.3) y (4.4) N_{n-1} contiene un subgrupo de orden n y como $N_{n-1} \subset N_{n-2} \subset \ldots \subset N_2 \subset N_1 \subset G$ se tiene que G contiene un subgrupo de orden n.

sea éste Q^1, entonces $K \cap Q^1 = \{0\}$. ya que si $x \varepsilon K \cap Q^1$
$\to k \varepsilon K$ y $|x| \mid n \to x=0$

Por otro lado sean $x, y \varepsilon Q^1$ si $x + K = y + K$ --

$x - y \varepsilon K \rightarrow x - y \quad K \cap Q^{\prime} = \{0\} \rightarrow x = y$ y como $\frac{G}{K} \simeq Q$ hay-
exactamente n clases distintas de K, esto significa que -
$\forall\, g \varepsilon G \exists\, x \varepsilon Q^{1}$ tal que $g+K = x+K$ es decir $g - x \varepsilon K$ en--
entonces $g - x_1 = k$ de donde $g = k + x_1 \quad \therefore G = K Q_1$

B I B L I O G R A F I A

1) J. J. Rotman. The Theory of Croups.
Boston: Allyn and Bacon, 1965.

2) W. R. Scott. Group Theory.
Englewood Cliffs, New Jersey: prentice - Hall, 1964.

3) M. Hall. Theory of Groups. New York: Macmillan, 1959.